

**UNESP**  
**Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá**

**Guaratinguetá**  
**2014**

RAFAEL AUGUSTO COUCEIRO CORREA

**Sólitons e Oscillons em cenários com violações da simetria de Lorentz**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Doutor em Física na área de Partículas e Campos.

Orientador: Prof. Dr. Alvaro de Souza Dutra

Co-orientador: Prof. Dr. Marcelo Gleiser

**Guaratinguetá  
2014**



*RAFAEL AUGUSTO COUCEIRO CORREA*

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
“DOUTOR EM FÍSICA”

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto  
Coordenador

*BANCA EXAMINADORA:*



Prof. Dr. ALVARO DE SOUZA DUTRA  
Orientador / UNESP-FEG



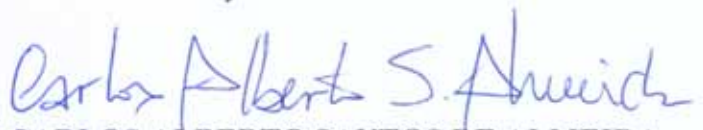
Prof. Dr. MARCELO BATISTA HOTT  
UNESP-FEG



Prof. Dr. DENIS DALMAZI  
UNESP-FEG



Prof. Dr. DIONISIO BAZEIA FILHO  
IF/UFPB



Prof. Dr. CARLOS ALBERTO SANTOS DE ALMEIDA  
IF/UFCe

*Julho de 2014*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente aos meus pais, meus irmãos e a minha esposa Caroline Domingos Siqueira pela ajuda compreensão e incentivo durante as etapas de desenvolvimento desta tese. Agradeço aos amigos e colegas que me acompanharam ao longo desse período, em especial aos amigos Luiz Augusto Guimarães Boldrin, Marcelo Gonçalves Garcia, Pedro Henrique Ribeiro da Silva Moraes, Alessandro Luiz Ribeiro dos Santos, Elias Leite Mendonça, André Luiz Amarante, João Rafael Lúcio dos Santos e aos outros colegas da Pós-Graduação. Agradeço a todos os professores do Departamento de Física e Química e do Departamento de Matemática, em especial agradeço aos professores Antonio Soares de Castro, Denis Dalmazi, Marcelo Batista Hott e Júlio Marny Hoff pela grande contribuição à minha formação e a grande amizade desenvolvida ao longo destes anos. Agradeço também ao professor Marcelo Gleiser pela contribuição que vem dando à minha formação e pelo grande apoio dado durante minha passagem pelo Dartmouth College. Agradeço especialmente ao professor Alvaro de Souza Dutra pela sua grande amizade, pela imensa contribuição à minha formação, pela ajuda prestada nos momentos difíceis e por seu grande esforço e empenho em passar toda sua experiência profissional.

Este trabalho contou com apoio das seguintes entidades

- CAPES/DS
- CAPES/PDSE
- CNPQ

“Se você quer ser um vencedor deve seguir os seguintes caminhos:

Primeiro, ter uma meta definida.

Segundo, analisar sua meta e observar se existe a possibilidade de cumpri-la.

Terceiro, independente de qual seja sua condição ou classe social você deverá ter muita força de vontade e dedicar-se ao máximo para cumpri-la.

Quarto, não ter medo de estar enganado, pois independente de você conseguir ou não, você aprenderá algo novo.”

Rafael Augusto Couceiro Correa.

CORREA, R. A. C. **Sólitons e Oscillons em cenários com violações da simetria de Lorentz**. 2014. Tese (Doutorado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2014.

## RESUMO

Este trabalho está dividido em quatro partes. Na primeira parte, apresentamos uma breve introdução ao estudo dos chamados sólitons, os quais correspondem a certas soluções de equações de onda não-lineares. Mostraremos as importantes características e propriedades destas classes de configurações. Em adição, vamos mostrar dois exemplos de configurações do tipo sólitons, as quais envolvem campos escalares em 1+1 dimensões. Além disso, também apresentamos uma maneira de caracterizar soluções do tipo sólitons, qual seja a chamada carga topológica. Na segunda parte do nosso trabalho, estudamos a chamada entropia configuracional para uma classe de modelo que apresentam dois campos escalares auto-interagentes que suportam configurações do tipo kinks e lumps. Mostramos que, apesar da energia das configurações serem degeneradas, elas têm uma configuração favorita devido a sua entropia configuracional. Então, apresentamos as consequências gerais deste valor preferido de entropia para a estrutura das configurações. Também mostraremos que nossos resultados estão em perfeito acordo com aqueles numéricos. Já na terceira parte, apresentaremos uma classe de sólitons viajantes em sistemas com violações das simetrias de Lorentz. No caso de cenários envolvendo violações de Lorentz é usual construir configurações solitônicas estáticas. Aqui mostramos mostrar que é possível construir alguns sólitons viajantes os quais, como deveria ser esperado, não podem ser mapeados em configurações estáticas através do boost de Lorentz devido à quebra explícita desta simetria. Ademais, no modelo estudado, encontramos um conjunto completo de soluções. Neste caso, mostraremos que as soluções apresentam um limite crítico controlado pela escolha de uma constante arbitrária de integração. Na parte final do trabalho, discutimos o impacto da quebra da simetria de Lorentz sobre oscillons usuais, nos então chamados flat-top oscillons e nas soluções do tipo breathers. Nossa análise estará voltada para um cenário rigorosamente demonstrado na literatura. Mostramos que a violação de Lorentz é responsável pela origem de um tipo de deformação da configuração, onde as configurações do campo se transformam em oscilatórias em uma região localizada próxima de seu valor máximo.

**PALAVRAS-CHAVE:** Sólitons, lumps, oscillons, breathers, entropia configuracional, violação de Lorentz.

CORREA, R. A. C. **Sólitons e Oscillons em cenários com violações da simetria de Lorentz**. 2014. Tese (Doutorado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2014.

### ABSTRACT

This thesis is divided in four parts. In the first part, we present a brief review of the study of solitons, which are solutions of nonlinear differential equations. Furthermore, we show the important characteristics and properties of these classes of configurations. In the second part, we have investigated the measure of the configurational entropy of some classes of models which comprises two interacting scalar fields. We found that the best configuration of the fields has a preferred value. In the third part, we present a new class of traveling solitons in Lorentz-violating systems. This is done by using nonlinear models in two-dimensional space-time of two interacting scalar fields in Lorentz-violating scenarios. Here we show that it is possible to construct some solitons with position and time dependence which, as it should be expected, can not be mapped into a static configuration by means of Lorentz boosts due to its explicit breaking.

Finally, we discuss the impact of the breaking of the Lorentz symmetry on the usual oscillons, the so-called flat-top oscillons, and on the breathers. Our analysis is performed by using a Lorentz violation scenario rigorously derived in the literature. We show that the Lorentz violation is responsible for the origin of a kind of deformation of the configuration, where the field configuration becomes oscillatory in a localized region near its maximum value. Furthermore, we show that the Lorentz breaking symmetry produces a displacement of the oscillon along the spatial direction, the same feature is present in the case of breathers.

**KEYWORDS:** Solitons, lumps, oscillons, breathers, configurational entropy, Lorentz violation.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Uma breve introdução ao estudo dos sólitons</b>	<b>11</b>
1.1	Introdução . . . . .	11
1.2	Ondas solitárias e sólitons . . . . .	13
1.3	Sólitons e ondas solitárias em $(1 + 1)$ dimensões . . . . .	16
1.4	Pequenas oscilações e estabilidade . . . . .	23
1.5	Carga topológica . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Medida da entropia configuracional para dois campos escalares auto-interagentes</b>	<b>25</b>
2.1	Introdução . . . . .	25
2.2	Uma breve revisão do modelo e suas soluções . . . . .	29
2.2.1	A. Paredes de Bloch Degeneradas . . . . .	34
2.2.2	B. Paredes de Bloch Críticas . . . . .	35
2.3	Entropia configuracional para dois campos escalares auto-interagentes . . . . .	36
2.4	Entropia para PBD e PBC . . . . .	37
2.5	Conclusões . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Sólitons viajantes em sistemas com violação das simetrias de Lorentz e CPT</b>	<b>46</b>
3.1	Introdução . . . . .	46
3.2	O modelo . . . . .	49
3.3	Conclusão . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Oscillons e Breathers em sistemas com violação das simetrias de Lorentz e CPT</b>	<b>57</b>
4.1	Introdução . . . . .	58

4.2	Lagrangiana do modelo padrão estendido (MPE) . . . . .	62
4.3	Lagrangiana do MPE: Teoria com um campo escalar . . . . .	65
4.4	Equação de movimento em cenários com violação de Lorentz: Teoria com um campo escalar . . . . .	68
4.5	Oscillons usuais com violação de Lorentz: Teoria com um campo escalar . .	70
4.6	Flat-top oscillons com violação de Lorentz: Teoria com um campo escalar .	74
4.7	Breathers com violação da simetria de Lorentz: Teoria com um campo escalar	78
4.8	Radiação de oscillons com violação da simetria de Lorentz: Teoria com um campo escalar . . . . .	79
4.8.1	8.1. Radiação dos Oscillons Usuais com VL: Teoria para um campo escalar . . . . .	82
4.8.2	8.2. Radiação dos Flat-top oscillons: Teoria para um campo escalar	84
4.9	Oscillons com VL: Teoria com dois campos escalares . . . . .	86
4.10	Conclusões . . . . .	90
<b>5</b>	<b>Conclusões Finais</b>	<b>92</b>

# Lista de Figuras

1.1	Kink e antikink com $a = \mu = 1$ e $x_0 = 0$ . . . . .	20
1.2	Densidade de energia do kink com $\mu = \lambda = 1$ e $x_0 = 0$ . . . . .	21
1.3	Perfil do kink do modelo de sine-Gordon com $\alpha = \beta = 1$ . . . . .	22
2.1	Órbitas para as soluções e estados de vácuo do potencial. A figura do topo mostra as soluções degeneradas e a figura de baixo apresenta as soluções críticas. . . . .	32
2.2	Perfil das soluções PBD e PBC para $\lambda = 1$ . . . . .	43
2.3	Frações modais $f^{(1)}(k)$ e $f^{(2)}(k)$ com $\mu = 1$ . Note que o valor máximo da curva está localizado em $k = 0$ . . . . .	44
2.4	A figura da parte superior representa a entropia configuracional da configuração e seus respectivos pontos de mínimos, local e global. A figura da parte inferior representa o perfil da solução para três valores de $c_0$ . . . . .	45
3.1	Órbitas das soluções para $\mu = 1$ . . . . .	54
3.2	Soluções do tipo viajantes e do tipo estáticas para $\lambda = \mu = 1$ e $c_0 = -2,001$ . A linha pontilhada corresponde ao caso estático com $\beta = 0,5$ e $A = 1$ . A linha continua corresponde ao caso viajante para $\alpha = 0,5$ , $\beta = 0,5$ , $B = -1,5$ e $A = 1$ . . . . .	56
4.1	Perfil dos oscillons usuais em 1 + 1-dimensões com quebra das simetrias de Lorentz e <i>CPT</i> para $t = 0$ (esquerda) e $t = 1250$ (direita) com $\epsilon = 0.01$ . A linha mais fina corresponde ao caso com $k_{00} = 0.12$ , $k_{11} = 0.30$ , $k_{01} = 0.27$ e $k_{10} = 0.21$ . A linha mais grossa corresponde ao caso com $k_{\mu\nu} = 0$ . . . . .	74

4.2	Perfil dos Flat-Top oscillons em 1 + 1-dimensões com quebra da simetria de Lorentz para $t = 0$ (esquerda) e $t = 200$ (direita) com $g = 5$ . A linha fina corresponde ao caso com $k_{00} = 0.12$ , $k_{11} = 0.30$ , $k_{01} = 0.27$ e $k_{10} = 0.21$ . A linha mais grossa corresponde ao caso com $k_{\mu\nu} = 0$ . . . . .	77
4.3	A figura da esquerda representa o perfil da solução dos Flat-top oscillons com quebra da simetria de Lorentz. A figura da direita é o perfil das soluções dos Flat-top oscillons sem violação da simetria de Lorentz. . . . .	78
4.4	Breathers em 1 + 1-dimensões com VL para $t = 0$ (esquerda) e $t = 10$ (direita) com $v = 2$ , $w = 1$ , $\beta = 1$ . A linha fina corresponde ao caso com $k_{00} = 0.28$ , $k_{11} = 0.30$ , $k_{01} = 0.27$ e $k_{10} = 0.37$ . A linha grossa corresponde ao caso com $k_{\mu\nu} = 0$ . . . . .	79
4.5	Amplitude da radiação emitida determinada pela transformada de Fourier. A figura da esquerda corresponde ao caso com VL e a figura da direita ao caso com simetria de Lorentz. . . . .	84

# Capítulo 1

## Uma breve introdução ao estudo dos sólitons

Neste capítulo apresentaremos uma breve introdução ao estudo dos chamados sólitons, os quais correspondem a certas soluções de equações de onda não-lineares. Mostraremos que tais objetos apresentam as importantes características de serem localizados espacialmente, possuírem densidade de energia finita e que, mesmo após sofrerem colisões, mantêm suas formas e velocidades originais. Ademais, vamos mostrar dois exemplos de configurações do tipo sólitons, as quais envolvem campos escalares em  $1 + 1$  dimensões. Por fim, vamos apresentar uma maneira de caracterizar soluções do tipo sóliton, qual seja, a chamada carga topológica.

### 1.1 Introdução

Em Agosto de 1834 um engenheiro escocês chamado John Scott Russell observou um importante e interessante fenômeno durante a construção de canal entre as cidades de Edinburgo e Glasgow. Durante sua observação, ele notou que um barco, o qual era puxado por um par de cavalos ao longo do estreito canal em construção, ao ser freado bruscamente produziu uma grande onda, bem definida e arredondada. Russell passou a seguir esta onda, e observou que ela continuava seu curso ao longo do canal mantendo sua forma e sem diminuir sua velocidade. Sua experiência com este fenômeno foi descrita apenas alguns anos depois em "Report of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science" [1], naquele trabalho ele disse:

*”Eu estava observando o movimento de um barco que vinha sendo puxado rapidamente ao longo de um canal estreito por um par de cavalos, quando o barco, repentinamente, parou - Não apenas a massa de água no canal que havia sido colocada em movimento começou a se acumular em torno da proa da embarcação em estado de violenta agitação, mas de repente ela deixou-o para trás, deslizando para frente com grande velocidade, adquirindo a forma de uma grande elevação solitária, uma arredondada, suave e bem definida “corcova” de água, a qual continuou seu curso através do canal aparentemente sem mudança de forma ou diminuição de velocidade. Eu a segui a cavalo e acompanhei seu avanço tranqüilo a uma taxa de cerca de oito ou nove milhas por hora, preservando sua forma original com algo como trinta pés de largura e um a um e meio pés de altura. Sua altura foi gradualmente diminuindo e, após uma caçada de uma ou duas milhas, eu a perdi nas bifurcações do canal. Esta, no mês de agosto de 1834, foi a minha primeira chance de contato com este singular e belo fenômeno, que decidi chamar de ondas de translação.”*

Russell, passou a realizar várias experiências em laboratório, gerando o que ele chamou de *ondas de translação*, e conseguiu obter uma forma empírica para a velocidade da onda de translação. Em 1871, Boussinesq [2] e independentemente Lord Rayleigh [3] em 1876, passaram a estudar o problema matematicamente, mas foi apenas no ano de 1895 que Korteweg e De Vries [4] obtiveram uma expressão matemática para determinar a velocidade da onda observada por Russell.

Embora Russell tenha reportado este importante e interessante fenômeno em 1844, foi somente na década de 1960 que o estudo deste tipo de sistema ganhou mais interesse na comunidade científica. Tal interesse foi motivado pelo fato que as ondas de translação, também chamadas de ondas solitárias, ao colidirem manterem suas características, de modo que após a colisão permanecem inalteradas, preservando suas formas e velocidades. Motivados em responder esta questão Zabusky e Kruskal [5], inspirados pelo trabalho de Fermi, Pasta e Ulam [6] sobre a propagação de fônons em uma rede não-linear, conseguiram explicar numericamente o problema, e em analogia aos prótons e fótons, sugeriram o nome de *sólitons* para as chamadas ondas não-lineares. Além disso, Zabusky e Kruskal também mostraram que as ondas solitárias observadas por Russell representam soluções do tipo sóliton. Após este trabalho uma grande quantidade de estudos descrevendo algum

tipo de sistema não-linear foram apresentados em várias áreas da Física [7]-[37]. Atualmente, o estudo de teorias não-lineares está intimamente relacionada aos então chamados sólitons [33]-[37], os quais são soluções de equações de campo não-lineares cuja densidade de energia é localizada no espaço, isto é, suas densidades de energia estão concentradas em uma pequena região do espaço. Além disso, soluções do tipo sóliton têm a importante característica de manterem suas formas inalteradas após colidirem uns com os outros.

## 1.2 Ondas solitárias e sólitons

Como apresentamos na primeira seção deste capítulo, os nomes ondas solitárias e sólitons fazem referência a uma classe de soluções de equações de onda não-lineares. Para melhor entender as características dessas soluções, nessa seção iremos apresentar algumas propriedades da equação de onda

$$\square\phi(x,t) = \partial^\mu\partial_\mu\phi(x,t) = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi(x,t) = 0, \quad (1.1)$$

onde  $\phi(x,t)$  é um campo escalar real em  $(1+1)$  dimensão e  $c$  é a velocidade da luz. A equação acima apresenta duas importantes características, as quais devem ser discutidas, uma vez que são fundamentais para nossa melhor compreensão a respeito de ondas solitárias e sólitons.

A primeira característica vem do fato de que qualquer função da forma  $f(x \pm ct)$  será solução da equação de onda (1.1), desde que seja real e bem comportada. Em particular, podemos construir um pacote de onda bem localizado que viaja com velocidade uniforme  $\pm c$  e que mantém sua forma. Assim, podemos escrever a função  $f(x \pm ct)$  em termos das funções de ondas planas do tipo  $\sin(kx \pm \omega t)$  e  $\cos(kx \pm \omega t)$ , pois elas formam um conjunto completo de soluções para a equação de onda, portanto escrevemos

$$f(x \pm ct) = \int dk [a_\pm(k) \cos(kx \pm \omega t) + b_\pm(k) \sin(kx \pm \omega t)]. \quad (1.2)$$

O fato do pacote de onda  $f(x \pm ct)$  viajar mantendo sua forma e sua velocidade, está relacionado ao fato que todos os seus componentes possuírem a mesma velocidade de onda ( $c = \omega/k$ ).

Por outro lado, a segunda característica surge do fato de que a soma de dois pacotes de onda localizados,  $f_1(x - ct)$  e  $f_2(x + ct)$ , também será uma solução

$$f_3(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct). \quad (1.3)$$

Então, quando  $t \rightarrow -\infty$ , teremos dois pacotes de onda localizados que se encontram separados, e que estão se aproximando sem destruírem suas formas. Em um dado  $t$  finito, eles colidem. Após a colisão eles se afastam um do outro com  $t \rightarrow \infty$ , mas mantendo suas formas e velocidades originais. Destacamos que para a equação (1.1), esta propriedade será válida para mais de dois pacotes de onda.

As duas características que mencionamos acima, ou seja, a retenção da forma e velocidade de um pacote de onda mesmo após sofrerem colisões são características das soluções da equação (1.1), que é uma equação simples, sendo linear e não dispersiva. No entanto, várias equações na Física são mais complicadas, podendo conter termos não-lineares, dispersivos, e com vários campos acoplados. A presença destes termos na equação (1.1), tende a destruir as características apresentadas, mesmo em  $(1 + 1)$  dimensões. Como exemplo, podemos considerar a equação de Klein-Gordon em duas dimensões

$$(\square + m^2 c^2)\phi(x, t) = 0. \quad (1.4)$$

A equação acima é linear, e funções do tipo ondas planas formam um conjunto completo de soluções, mas agora diferentes comprimentos de onda viajam com diferentes velocidades. Então, o pacote de onda que tem a forma em  $t = 0$  igual a

$$f(x) = \int dk [a(k) \cos(kx) + b(k) \sin(kx)], \quad (1.5)$$

irá se alargar com o tempo. Desta forma, a característica do pacote de onda ser não dispersivo é perdida, conseqüentemente não existem pacotes de onda que mantêm suas formas depois de sofrerem colisões.

Outro exemplo que podemos considerar é aquele em que adicionamos um termo não-linear na equação (1.1), como exemplo escrevemos

$$\square\phi + \phi^3 = 0, \quad (1.6)$$

esta equação possui apenas algumas soluções que são obtidas através de métodos numéricos ou aproximados.

No entanto, é possível que para algumas equações onde os termos não-lineares e dispersivos estão presentes, os efeitos médios de cada um deles se compensem, assim fazendo com que a característica do pacote de onda de manter sua forma e velocidade seja satisfeita, podendo ocorrer em uma, duas ou três dimensões espaciais. Quando isso ocorre, dizemos que as soluções são as chamadas ondas solitárias. Por outro lado, quando os pacotes de onda também mantêm suas formas após sofrerem colisões, as soluções são chamadas de sólitons.

Para utilizar uma definição mais precisa sobre ondas solitárias e sólitons, devemos utilizar o conceito de densidade de energia  $\varepsilon(x, t)$ , a qual é alguma função do campo  $\phi(x, t)$ . No caso da teoria clássica de campos em uma dimensão espacial e uma dimensão temporal a dinâmica da teoria é descrita pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (1.7)$$

onde  $\mu$  é igual a 0 ou 1, onde  $V(\phi)$  é alguma função arbitrária de  $\phi$ , ou seja, é o potencial dependente do campo. Desta forma, a energia funcional de qualquer configuração de campo é dada por

$$E[\phi] = \int dx [(1/2)(\partial_0 \phi)^2 + (1/2)(\partial_1 \phi)^2 + V(\phi)]. \quad (1.8)$$

Se a energia é limitada inferiormente,  $V(\phi)$  também deverá ser limitado inferiormente, neste caso sempre podemos adicionar uma constante ao potencial, tal que o valor mínimo de  $V$  seja zero. Note que, a partir da equação (1.8), o estado de mínima energia (estado fundamental) é aquele para o qual  $\phi_i$  é, independentemente do tempo e do espaço, os zeros de  $V$ . Assim, se  $V$  tem vários zeros, a teoria tem vários mínimos. Utilizamos a palavra "localizada", muitas vezes encontrada na literatura, para especificar as soluções de equações de campo com densidade de energia  $\varepsilon(x, t)$  localizada e energia localizada.

Com isso, uma onda solitária é definida como uma solução com densidade de energia localizada e não-singular de alguma equação de campo não-linear (ou de equações acopladas, quando vários campos estão envolvidos) cuja densidade de energia tem uma dependência da forma

$$\varepsilon(\vec{x}, t) = \varepsilon(\vec{x} - \vec{u}t), \quad (1.9)$$

onde  $\vec{u}$  é algum vetor velocidade. Em outras palavras, a densidade de energia deve se mover com velocidade constante e mantendo sua forma.

Por outro lado, sólitons são ondas solitárias cujo perfil da densidade de energia no limite assintótico ( $t \rightarrow \infty$ ) recupera sua forma e velocidade originais mesmo após sofrerem colisões. Enquanto todos sólitons são ondas solitárias, o contrário não é verdade.

### 1.3 Sólitons e ondas solitárias em $(1 + 1)$ dimensões

Como mencionamos na seção anterior, sólitons são soluções de equações de campo não-lineares, que apresentam densidade de energia localizada (bem definida) e que após sofrerem colisões mantêm suas formas e velocidades originais. Assim, nesta seção apresentamos os fundamentos teóricos para encontrar soluções do tipo sóliton. Iniciamos com a teoria  $\phi^4$ , a qual é muito familiar no contexto da Teoria Quântica de Campos, nesta teoria o potencial  $V(\phi)$  pode ser escrito como

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2}\phi^4 - \mu^2\phi^2 + \frac{\mu^4}{2\lambda}, \quad (1.10)$$

com  $\lambda$  e  $\mu^2$  sendo parâmetros positivo definidos. Este potencial também pode ser escrito na forma

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2}(\phi^2 - a^2)^2, \quad (1.11)$$

onde  $a^2 \equiv \mu^2/\lambda$ . Os dois mínimos do potencial estão localizados em  $\phi = \pm a$ .

Outro modelo que também utilizamos é o chamado modelo de sine-Gordon, onde o potencial pode ser escrito como

$$V(\phi) = \frac{\alpha}{\beta^2}[1 - \cos(\beta\phi)], \quad (1.12)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros reais. É interessante ressaltar que este tipo de sistema tem sido usado no estudo de um amplo número de fenômenos, incluindo a propagação de deslocamentos em cristais, condução de ondas em membranas, fluxo magnético nas junções Josephson e em modelos em duas dimensões de partículas elementares [8, 38]. No modelo de sine-Gordon os vácuos são aqueles nos quais  $\phi_i = 2n\pi/\beta$  com  $n \in Z^*$ .

Retornando à idéia desta seção, vamos procurar as soluções das equações de movi-

mento. Para soluções independentes do tempo, o princípio de Hamilton se reduz a

$$\delta E = \delta \int dx \left[ \frac{1}{2} (\partial_1 \phi)^2 + V(\phi) \right] = 0. \quad (1.13)$$

Porém, nem todas as soluções possuem energia finita. Para a integral (1.8) convergir é necessário que o campo  $\phi(x)$  tenda aos zeros do potencial com  $x \rightarrow \pm\infty$ . Em outras palavras, é necessário que nos limites assintóticos ( $x \rightarrow \pm\infty$ ) o campo  $\phi$  seja um dos mínimos do potencial.

A discussão acima pode ser aplicada a modelos em que o potencial  $V$  tenha dois mínimos adjacentes, sendo a forma do potencial  $V$  entre os zeros irrelevante. Além disso, o comportamento de  $V$  fora da região entre os zeros também é irrelevante.

Assim, podemos dizer que se o potencial  $V$  tem somente um zero, não existem soluções independentes do tempo com energia finita. Por outro lado, para potenciais que apresentam dois pontos de mínimo, a configuração do campo  $\phi$  pode permanecer em um dos zeros do potencial com  $x \rightarrow \pm\infty$ , ou mover-se de um dos mínimos de  $V$  com  $x \rightarrow -\infty$  para o outro mínimo com  $x \rightarrow +\infty$ .

Para encontrar as configurações estáticas do campo escalar, utilizamos a equação de movimento, que se reduzirá a

$$\phi'' = \frac{dV}{d\phi}, \quad (1.14)$$

onde o sobrescrito linha significa derivada em relação à coordenada espacial. Multiplicando a equação acima por  $\phi'$  e integrando em  $x$ , temos

$$\int dx \phi' \phi'' = \int dx \phi' \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (1.15)$$

que poderá ser reescrita como

$$\int \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2} (\phi')^2 \right] dx = \int \frac{dV}{dx} dx, \quad (1.16)$$

desta maneira, encontramos

$$\frac{1}{2} (\phi')^2 = V(\phi) + C_0, \quad (1.17)$$

onde  $C_0$  é uma constante arbitrária de integração.

Integrando a equação acima, chegamos a

$$x - x_0 = \pm \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{2V(\phi) + C_0}}. \quad (1.18)$$

O parâmetro arbitrário  $\phi_0$  é o valor de  $\phi$  em  $x_0$ , e pode ser qualquer valor entre os dois zeros adjacentes do potencial. É interessante destacar que a presença deste parâmetro  $\phi_0$  é apenas uma questão de invariância espacial translacional. Este fato pode ser visualizado dizendo que se  $f(x)$  é solução de (1.18) com algum valor fixo  $\phi_0$ , então a solução geral com  $\phi_0$  arbitrário será

$$\phi = f(x - x_0), \quad (1.19)$$

onde  $x_0$  é arbitrário. Em outras palavras, o centro da solução pode ser qualquer. Com a equação (1.17), a expressão da energia total (1.8) pode ser simplesmente escrita como

$$E = \int dx (\partial_1 \phi)^2 = \int d\phi \sqrt{2V(\phi) + C_0}. \quad (1.20)$$

O método apresentado até aqui para encontrar soluções das configurações de campo, é usualmente conhecido na literatura. Como vimos, ele permite reduzir uma equação de segunda ordem unidimensional a uma equação de primeira, independentemente da forma de  $V(\phi)$ . Entretanto, é interessante que o potencial seja uma função bem comportada do campo, além disso, deve ser positiva e limitada inferiormente.

No sentido de garantir que a energia seja bem definida nos limites assintóticos da configuração do campo, o valor da constante arbitrária de integração  $C_0$  deve ser zero.

Um outro método, também encontrado na literatura, é o chamado método de Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfield [12, 13]. Tal método consiste em reescrever a energia funcional total do sistema, de tal maneira que seja possível encontrar a equação (1.17) como equação para as configurações de mínima energia. Para fazer isto, devemos manipular os termos da energia funcional de tal forma que possamos completar quadrado,

$$E = \int dx \left[ \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2} \left( \partial_1 \phi \mp \sqrt{2V} \right)^2 \pm \sqrt{2V} (\partial_1 \phi) \right]. \quad (1.21)$$

Então, para valores fixos de  $\phi$  com  $x \rightarrow \pm\infty$ , a energia será mínima se

$$\partial_0\phi = 0, \quad (1.22)$$

ou seja, o campo escalar é estático. Além disso, devemos ter

$$\partial_1\phi \mp \sqrt{2V(\phi)} = 0, \quad (1.23)$$

pois as possíveis configurações são aquelas em que nos limites assintóticos a configuração do campo se encontra em um dos mínimos do potencial, que neste caso é zero, por este motivo escolhemos  $C_0 = 0$ . Assim, escrevemos

$$\frac{1}{2}(\partial_1\phi)^2 = V(\phi). \quad (1.24)$$

Portanto, o valor mínimo de energia será

$$E_{\min.} = \pm \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(\infty)} d\tilde{\phi} \sqrt{2V(\tilde{\phi})}. \quad (1.25)$$

É importante notar que o método de Bogomol'nyi possibilita obter a equação diferencial de primeira ordem, e também escrever a energia mínima, muitas vezes chamadas de energia BPS (Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfield) [12, 13].

Agora, para ilustrar uma aplicação do método de obter soluções para a configuração do campo escalar, vamos utilizar os dois exemplos apresentados, quais sejam, o modelo  $\phi^4$  e sine-Gordon.

No modelo  $\phi^4$ , a equação (1.18) ficará

$$x - x_0 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{\phi_0}^{\phi} d\tilde{\phi} \frac{1}{\tilde{\phi}^2 - a^2}. \quad (1.26)$$

Resolvendo a integral acima e invertendo a equação para obter  $\phi$  em função de  $x$ , chegamos a

$$\phi(x) = \pm a \tanh[\mu(x - x_0)], \quad (1.27)$$

onde assumimos que  $\phi_0 = 0$ . Os sinais  $+$  e  $-$  na solução acima se referem aos chamados kinks e antikinks, respectivamente. As soluções para o kink e antikink conectam os dois mínimos do potencial, saindo de  $\phi(x \rightarrow -\infty) = \mp a$  e terminando em  $\phi(x \rightarrow \infty) = \pm a$ .

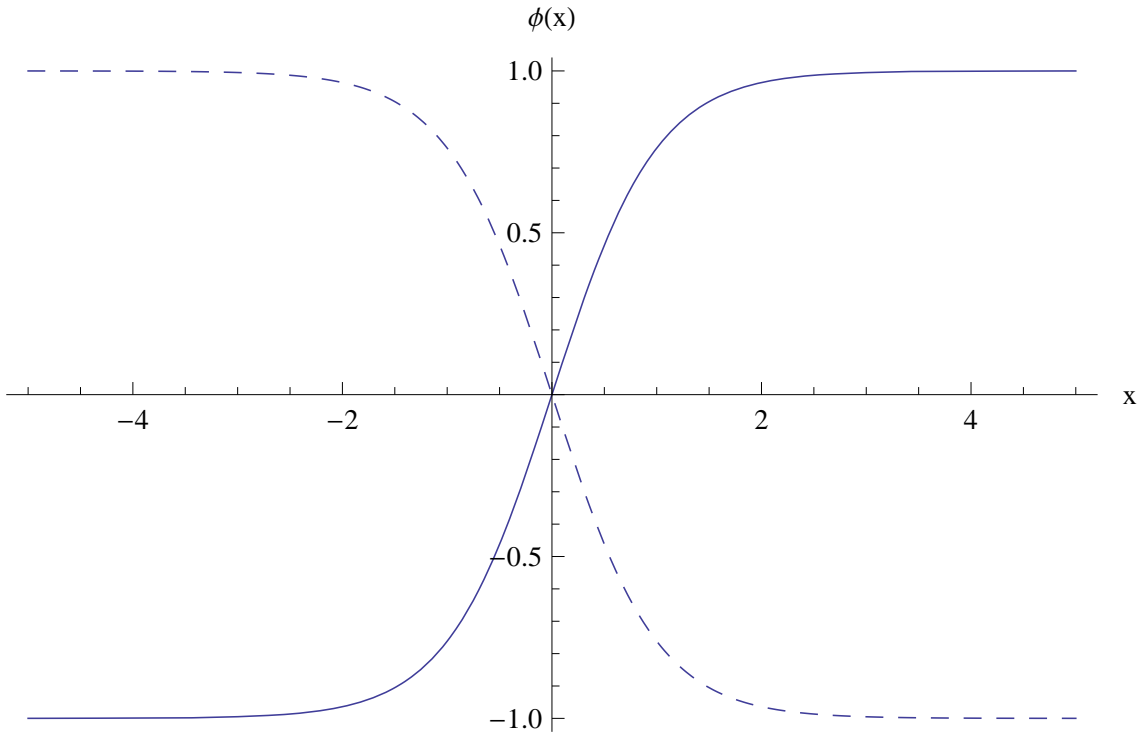


Figura 1.1: Kink e antikink com  $a = \mu = 1$  e  $x_0 = 0$ .

Na figura 1.1 vemos os perfis do kink do antikink. Nesta figura, podemos observar os limites assintóticos das soluções.

Note que, o efeito da invariância translacional é observada explicitamente, ou seja,  $x_0$  provoca um desvio espacial na solução. Outro fato interessante, é a simetria da densidade de lagrangiana sob a troca  $x \leftrightarrow -x$  e, separadamente, sob a troca  $\phi \leftrightarrow -\phi$ . Vemos que estas trocas refletem nas relações

$$\phi_{kink}(x) = -\phi_{antikink}(x) = \phi_{antikink}(-x), \quad (1.28)$$

onde fizemos  $x_0 = 0$ . Esta simetria de reflexão mantém invariante a lagrangiana sob a troca de  $\phi \leftrightarrow -\phi$ , e é chamada  $Z_2$ . Por este motivo, alguns autores costumam denominar o kink de "  $Z_2$  kink".

A densidade de energia da solução do kink é dada por

$$\varepsilon(x) = 4\mu^4\lambda\{\text{sech}[\sqrt{2\lambda}\mu(x - x_0)]\}^4. \quad (1.29)$$

Podemos notar, a partir da figura 1.2 que a densidade de energia do kink é localizada na região ao redor da origem.

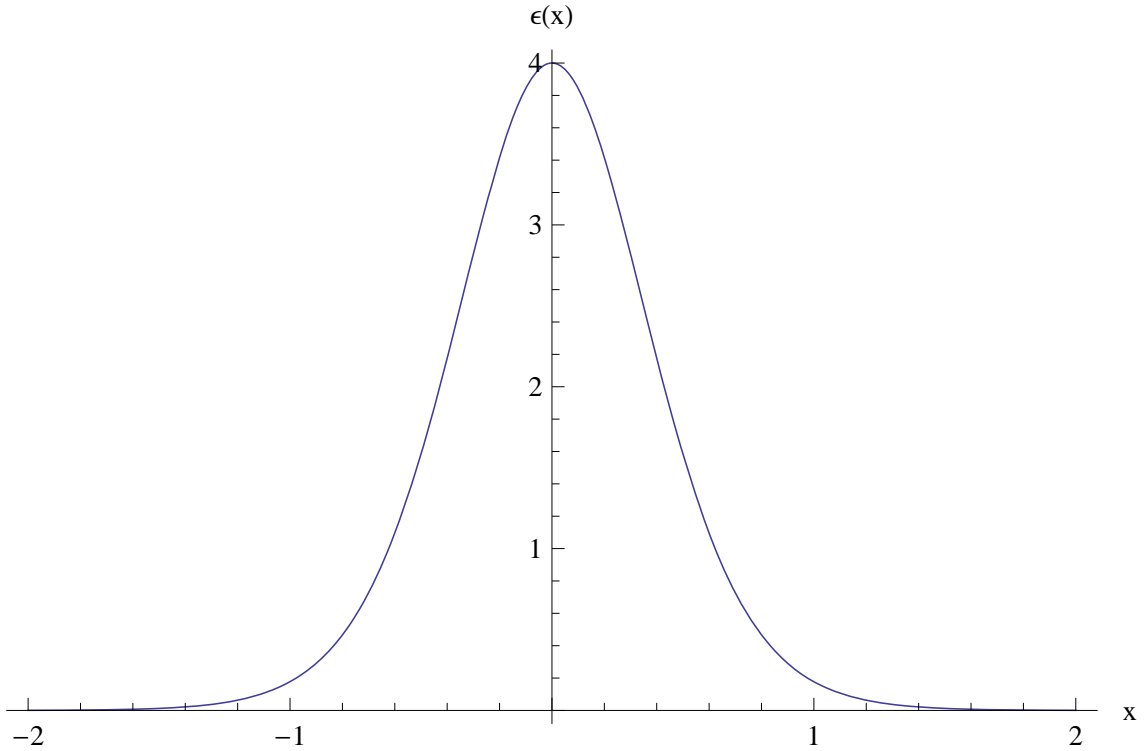


Figura 1.2: Densidade de energia do kink com  $\mu = \lambda = 1$  e  $x_0 = 0$ .

Assim, a energia total do kink, as vezes chamada massa clássica do kink  $M_{cl}$ , fica sendo

$$E = M_{cl} = \frac{4\mu^3}{3\lambda}. \quad (1.30)$$

Portanto, a energia total é finita e o kink é uma onda solitária. Através de cálculos numéricos, é possível mostrar que um kink e um antikink que estão se aproximando um do outro, não retêm suas formas após colidirem. Este fato, mostra que o kink deste modelo é uma onda solitária, mas não um sóliton.

Além de tudo, para sistemas com invariância relativística, uma vez conhecida a solução estática, soluções dependentes do tempo podem ser obtidas através de um boost de Lorentz (veja apêndice), isto é, passando para um sistema de coordenadas em movimento.

Então, a solução estática do kink pode ser transformada para a solução do kink em movimento através do boost de Lorentz, neste caso a solução será

$$\phi_v(x, t) = \pm a \tanh\{\mu\gamma[(x - x_0) - vt]\}, \quad (1.31)$$

com  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ . Agora, a solução dependente do tempo da energia total é

$$E_v = \gamma M_{cl}. \quad (1.32)$$

onde  $M_{cl}$  é a massa clássica da configuração estática.

No caso do modelo de sine-Gordon, encontramos que

$$\phi(x) = \frac{4}{\beta} \arctan[\exp(\sqrt{\alpha}x)], \quad (1.33)$$

e a correspondente energia, é dada por

$$E = M_{cl} = \frac{8\sqrt{\alpha}}{\beta^2}. \quad (1.34)$$

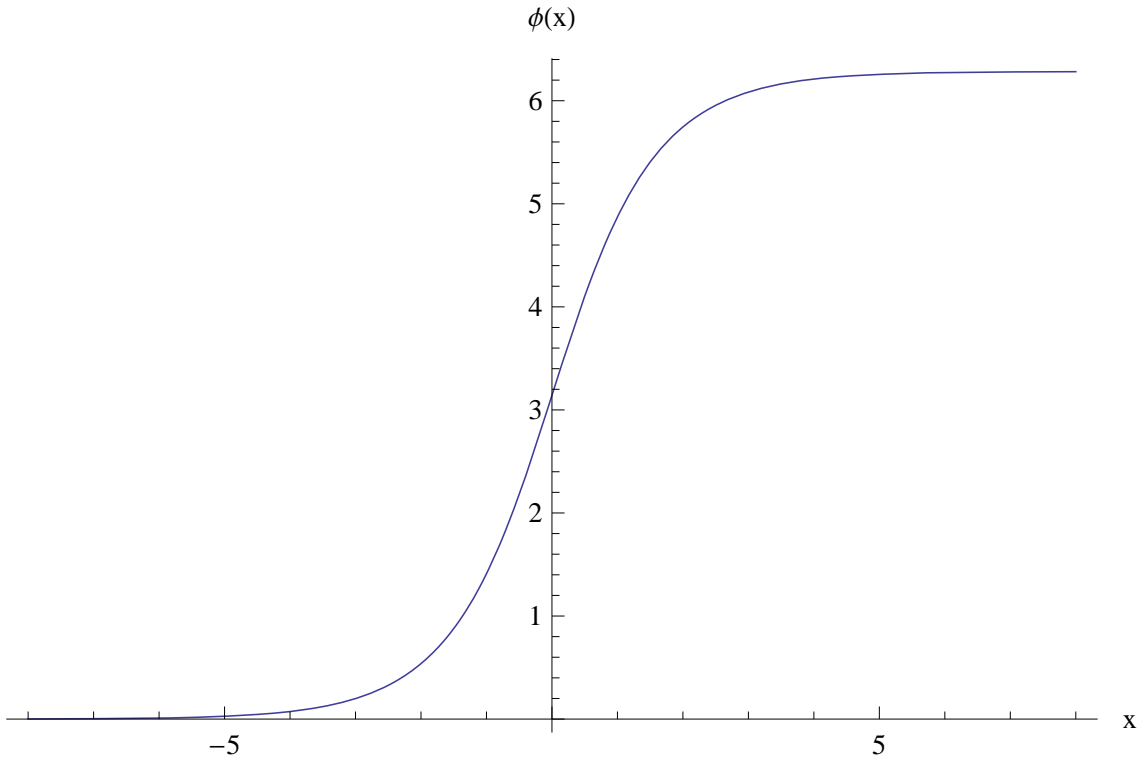


Figura 1.3: Perfil do kink do modelo de sine-Gordon com  $\alpha = \beta = 1$ .

Aplicando o boost de Lorentz, a solução do modelo de sine-Gordon é escrita como

$$\phi(x) = \frac{4}{\beta} \arctan \left\{ \exp \left[ \sqrt{\alpha} \gamma (x - vt) \right] \right\}. \quad (1.35)$$

A solução do modelo de sine-Gordon, representa um sóliton, uma vez que mesmo após sofrer colisões mantêm sua forma inalterada [33], em contraste com a solução do kink da teoria  $\lambda\phi^4$ .

## 1.4 Pequenas oscilações e estabilidade

Vimos nas seções anteriores que é possível para qualquer teoria que envolva um campo escalar em uma dimensão espacial e que possui mais de um estado de energia mínima, encontrarmos soluções independentes do tempo com energia finita.

No entanto, devemos verificar se estas soluções são estáveis sob pequenas perturbações [33, 36, 37]. Neste sentido, vamos analisar este problema nesta seção. A equação de movimento para a densidade de lagrangiana (1.7) é dada por

$$\square\phi + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (1.36)$$

consideremos a solução da forma

$$\phi(x, t) = \phi_{clas.}(x) + \eta(x, t), \quad (1.37)$$

onde a função  $\phi_{clas.}(x) = \phi(x)$  é a solução clássica independente do tempo e  $\eta(x, t)$  é o termo responsável pela perturbação. Inserindo a expressão (1.37) na equação de movimento (1.36) e tomando apenas os termos em primeira ordem na perturbação, chegamos a

$$\square\eta + \frac{d^2V(\phi_{clas.})}{d\phi^2}\eta = 0, \quad (1.38)$$

Esta equação é invariante sob transformações temporais, deste modo, podemos escrever o termo perturbativo  $\eta(x, t)$  como uma superposição dos estados

$$\eta(x, t) = \sum_n a_n e^{i\omega_n t} \psi_n(x). \quad (1.39)$$

Então, teremos que

$$-\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + V''(\phi_{clas.})\psi_n = \omega_n^2\psi_n. \quad (1.40)$$

Observe que a equação acima é do tipo de Schrödinger, com o potencial sendo  $V''(\phi_{clas.})$ , onde linha representa a derivada em relação ao campo  $\phi_{clas.}$ . Com isso, dizemos que a solução é estável se os auto-valores desta equação assumirem apenas valores positivos ou nulos, caso contrário a solução será instável.

## 1.5 Carga topológica

Uma maneira de caracterizar as soluções do tipo kink, é notar a presença de uma corrente conservada do tipo

$$j^\mu = c \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi, \quad (1.41)$$

onde  $\nu, \mu = 0, 1$ ,  $\varepsilon^{\mu\nu}$  é o tensor antisimétrico em duas dimensões ( $\varepsilon^{01} = 1$ ) e  $c$  é uma constante conveniente, que pode ser escolhida de acordo com o modelo em estudo. Através da antisimetria de  $\varepsilon^{\mu\nu}$ , vemos que  $j^\mu$  é conservada:  $\partial_\mu j^\mu = 0$ . Portanto,

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dx j^0 = c [\phi(\infty) - \phi(-\infty)], \quad (1.42)$$

onde  $Q$  é a carga conservada, chamada de carga topológica do modelo sob análise. Para configurações em que o valor da carga topológica resulta em  $Q \neq 0$ , dizemos que a solução é topológica. Caso contrário, com  $Q = 0$ , dizemos que a solução é não-topológica. Por exemplo, na configuração do tipo kink (1.27) do modelo  $\lambda\phi^4$ , a carga topológica é

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dx j^0 = \frac{1}{2a} [\phi(\infty) - \phi(-\infty)] = 1, \quad (1.43)$$

então, dizemos que a configuração é topológica. Por outro lado, o anti-kink tem carga  $Q = -1$ . Um interessante exemplo de configuração não-topológica é o chamado lump, onde a configuração do campo permanece em um dos mínimos do potencial.

É importante destacar que tal lei de conservação da carga topológica aqui apresentada mostra que nenhum processo com energia finita pode mudar os valores assintóticos do campo. Em contraste com as cargas conservadas obtidas através do teorema de Noether, onde as cargas topológicas estão diretamente associadas com uma simetria da lagrangiana.

## Capítulo 2

# Medida da entropia configuracional para dois campos escalares auto-interagentes

Neste capítulo investigaremos a medida da chamada entropia configuracional para uma classe de modelos que apresentam dois campos escalares auto-interagentes em  $1 + 1$  dimensões. Mostraremos que, apesar da energia das configurações serem degeneradas, elas têm uma configuração favorita devido a sua entropia configuracional. Então, apresentamos as consequências gerais deste valor preferido da entropia para a estrutura das configurações. Também mostraremos que nossos resultados estão em perfeito acordo com aqueles obtidos numericamente.

### 2.1 Introdução

Basta uma rápida olhada ao nosso redor que observaremos que a maior parte da natureza é descrita por fenômenos não-lineares. Como um simples exemplo da nossa afirmação, vamos imaginar que estamos assistindo uma linda apresentação teatral em um auditório. Assim, quando a apresentação acabar, todas as pessoas que ocupam o auditório começarão a aplaudir o elenco de atores. Notaremos que haverá uma inconsistência nos aplausos no início, mas apenas alguns segundos após o início poderemos observar um aplauso sincronizado. Este interessante fenômeno de sincronização é muito bem entendido usando modelos de osciladores acoplados, os quais estão baseados no então chamado modelo de

Kuramoto [39], o qual possui origem puramente não-linear.

Atualmente, várias áreas da Física apresentam a não-linearidade em seus desenvolvimentos teóricos como uma chave fundamental para estudar e entender o funcionamento do Universo, desde escalas atômicas até escalas macroscópicas. Por exemplo, podemos encontrar não-linearidade em Cosmologia [34], Teoria de Campos [36, 37], Física da Matéria Condensada [32], e em outras importantes áreas [35]. Um outro crescente interesse na não-linearidade surge a partir dos defeitos topológicos, os quais estão associados com algum tipo de quebra da simetria. Neste caso, os modelos em estudo apresentam mínimos de energia degenerados, os quais são responsáveis pela formação de paredes de domínio conectando tais valores mínimos de energia. Por exemplo, em um sistema de matéria condensada, podemos encontrar paredes de domínio em materiais ferromagnéticos onde paredes de domínio com diferentes magnetizações são formadas no sentido de minimizar a energia magnética.

Em um cenário cosmológico, defeitos topológicos aparecem a partir de transições de fase. Dentro deste contexto, no início o Universo estaria em um estado para o qual a densidade de energia era extremamente alta e localizada em estado de falso vácuo. Com a expansão do Universo e seu conseqüente resfriamento, podemos pensar que ele passa por uma transição de fase. Neste ponto, como um exemplo, podemos citar o trabalho de Coleman [40], o qual sugeriu que no início o Universo se encontrava em um vácuo falso, o qual era extremamente denso, e deste modo, seu destino é tender para um vácuo verdadeiro quando  $t \rightarrow \infty$ .

Nos dias de hoje, a presença da não-linearidade é bem entendida em uma ampla classe de modelos, apresentando, ou não, natureza topológica. Como exemplos podemos citar os monopolos, texturas, cordas e kinks [34, 36, 37]. Em particular, destacamos os chamados kinks os quais são soluções não dissipativas com a presença de uma carga topológica associada. Como mostrado no Capítulo 1, configurações do tipo kink surgem em teorias de campos quando o potencial dependente do campo escalar possui dois ou mais mínimos degenerados. Como exemplo apresentamos o kink  $\phi^4$ , também chamado kink  $Z_2$  [41]. Neste caso, mostramos que a configuração de energia mínima do campo escalar real interpola os mínimos degenerados do potencial.

A presença da não-linearidade na natureza é fascinante, mas ao mesmo tempo assustadora, pois não temos desenvolvimentos matemáticos suficientes para resolver ana-

liticamente os problemas associados com alguns tipos de não-linearidade. No entanto, um poderoso desenvolvimento para resolver problemas não-lineares analiticamente foi introduzido na década de 1970 por Bogomolnyi, Prasad e Sommerfield [12, 13]. Aqui, é importante destacar que o método apresentado por Bogomolnyi, Prasad e Sommerfield é chamado na literatura de método BPS. Este método está baseado em obter uma equação diferencial de primeira ordem a partir da energia funcional. Utilizando este método, é possível encontrar soluções que minimizam a energia da configuração e que ao mesmo tempo garantem a sua estabilidade. Na verdade, podemos encontrar uma ampla variedade de modelos na literatura apresentando as propriedades BPS. Como exemplos, podemos encontrar as soluções BPS no modelo de Skyrme [42], em monopolos [43, 44], em buracos negros supersimétricos [45], em teorias de supergravidade [46], e nas teorias  $K$  [47]-[50].

Contudo, algumas décadas atrás foi mostrado na literatura que é possível encontrar soluções para teorias não-lineares envolvendo campos escalares acoplados em  $1 + 1$  dimensões. Este desenvolvimento foi apresentado por Rajaramam e está embasado em um método de "tentativa e erro", o qual conduz à algumas importantes soluções particulares. No entanto, Bazeia e colaboradores [25] mostraram que algumas soluções de sistemas de equações diferenciais de segunda ordem, envolvendo dois ou mais campos escalares, podem ser mapeadas em um correspondente conjunto de equações diferenciais não-lineares de primeira ordem. Naquele trabalho, os autores aplicaram suas soluções em uma grande variedade de modelos naturais, desde polímeros até paredes de domínio. Motivado em encontrar um procedimento o qual é absolutamente geral quando trabalhamos com sistemas não-lineares como aqueles estudados em [25], foi mostrado por Dutra [28] que alguns sistemas não-lineares podem ser mapeados em equações diferenciais lineares de primeira ordem e, como consequência, podemos obter a solução geral do sistema.

Por outro lado, em 1948, em um trabalho muito importante e pioneiro, Shannon [51] descreveu o que foi chamado de "Uma Teoria Matemática da Comunicação", a qual atualmente é conhecida como "Teoria da Informação". Naquele trabalho, Shannon introduziu uma teoria matemática capaz de resolver o problema mais fundamental da teoria da informação, ou seja, aquele da transmissão de informação exatamente ou quase exatamente.

A idéia central da teoria da informação apresentada em [51], foi introduzir os conceitos de entropia e informação mútua usando o ponto de vista da teoria da comunicação. Neste contexto, a entropia foi definida como a medida da "incerteza" ou "aleatoriedade" de um

fenômeno aleatório. Assim, se uma pequena quantidade de informação sobre uma variável aleatória é recebida, a incerteza diminui. Como consequência, podemos medir esta redução na incerteza a qual pode ser relacionada a quantidade de informação transmitida. Esta quantidade é a então chamada informação mútua. Após o trabalho de Shannon, um amplo número de sistemas de comunicação tem sido rigorosamente analisado a partir do ponto de vista da teoria da informação, onde vários tipos de transmissão de informação podem ser estudados através de um modelo unificado.

Além disso, em um cenário cosmológico, Bardeen, Carter e Hawking [52] estabeleceram a relação entre as leis da termodinâmica de buracos negros. Alguns anos mais tarde, Wald [53], motivado pela conexão entre buracos negros e termodinâmica, fez uma definição precisa de entropia para um sistema auto-gravitante o qual contém um buraco negro. As idéias aplicadas em [53] seguem aquelas apresentadas pela teoria da informação.

Por outro lado, em um trabalho recente de Gleiser e Stamatopoulos [54], o conceito de entropia foi, mais uma vez, reintroduzido na literatura, mas agora com um desenvolvimento capaz de levar em conta a dinâmica e o conteúdo de informação de modelos cujas configurações possuem densidade de energia localizadas. Naquele trabalho, os autores, usando uma analogia com a teoria da informação de Shannon, construíram uma entropia configuracional a qual pode ser aplicada para variados modelos não-lineares que envolvem campos escalares com soluções características de sólitons, ou seja, com energia espacialmente localizada. Como mostrado por aqueles autores [54], a entropia configuracional pode resolver situações onde as energias das configurações são degeneradas. Neste caso, a entropia configuracional pode ser utilizada para selecionar a melhor configuração entre aquelas degeneradas, ou seja, a melhor configuração seria aquela com menor entropia. O desenvolvimento apresentado em [54] tem sido usado para estudar sistemas dinâmicos fora do equilíbrio em problemas envolvendo quebra espontânea de simetria e a estabilidade de objetos compactos [55, 56].

Assim, no presente trabalho analisamos a medida da entropia configuracional para classes de modelos que possuem dois campos escalares auto-interagentes [10, 11, 25, 28]. Aqui, é importante destacar que estas classes de modelos exibem uma rica estrutura devido a variedade de kinks (sólitons) que eles compreendem. Além do mais, esta classe de modelos têm sido extensivamente estudada na literatura e dão origem a bags, junções e redes de defeitos BPS e não-BPS [57].

Na seção 2.1 faremos uma breve revisão do modelo a ser estudado e suas soluções. Na seção 2.3 apresentamos uma rápida revisão da medida da entropia configuracional para soluções espacialmente localizadas. A seção 2.4 está dedicada ao cálculo da entropia configuracional do modelo sob análise e a seção 2.5 é voltada para as conclusões e importantes considerações.

## 2.2 Uma breve revisão do modelo e suas soluções

Nesta seção apresentamos uma breve revisão do modelo sob estudo e das correspondentes configurações dos campos escalares que compõem o modelo. Assim, nesta seção estudamos uma teoria de campos escalares em  $1 + 1$  dimensões com dois campos escalares reais auto-interagentes, a qual é descrita pela seguinte densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\nu\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\nu\chi)^2 - V(\phi, \chi), \quad (2.1)$$

onde  $V(\phi, \chi)$  é o potencial, o qual descreve o sistema com dois campos escalares reais auto-interagentes. Na densidade de lagrangiana acima, estamos usando unidades naturais com  $c$  igual à unidade e a métrica  $\eta_{\nu\beta} = \text{diag}(1, -1)$  em um espaço bidimensional, onde uma dimensão é o tempo e a outra é o espaço. Neste caso, as coordenadas são definidas por  $x^\nu = (t, x)$ .

Impondo que o potencial deva ser representado em termos de um superpotencial  $W(\phi, \chi)$  do tipo

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial W(\phi, \chi)}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial W(\phi, \chi)}{\partial \chi} \right)^2 \right], \quad (2.2)$$

É importante destacar que a teoria super-simétrica é uma fonte significativa para gerar distintas paredes de domínio e sólitons topológicos [24, 58, 59]. Além disso, pesquisas usando modelos definidos por  $W(\phi, \chi)$  têm sido desenvolvidas na literatura e importantes resultados têm surgido.

A partir da densidade de lagrangiana (2.1), as equações clássicas de Euler–Lagrange

das configurações estáticas de campo  $\phi = \phi(x)$  e  $\chi = \chi(x)$  são dadas por

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = W_\phi W_{\phi\phi} + W_\chi W_{\chi\phi}, \quad (2.3)$$

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = W_\chi W_{\chi\chi} + W_\phi W_{\chi\phi}. \quad (2.4)$$

Deste modo, a energia funcional das configurações estáticas de campo podem ser calculadas como

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\chi}{dx} \right)^2 + W_\phi^2 + W_\chi^2 \right], \quad (2.5)$$

onde  $W_\phi \equiv \frac{\partial W(\phi, \chi)}{\partial \phi}$  e  $W_\chi \equiv \frac{\partial W(\phi, \chi)}{\partial \chi}$ . A energia funcional acima pode ser facilmente reescrita na seguinte forma

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \left( \frac{d\phi}{dx} - W_\phi \right)^2 + \left( \frac{d\chi}{dx} - W_\chi \right)^2 + 2 \left( W_\phi \frac{d\phi}{dx} + W_\chi \frac{d\chi}{dx} \right) \right]. \quad (2.6)$$

Assim, como uma consequência, as soluções com mínima energia das equações diferenciais de segunda ordem para as soluções estáticas podem ser encontradas a partir seguintes equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} = W_\phi, \quad \frac{d\chi}{dx} = W_\chi. \quad (2.7)$$

Então, a energia  $E_{BPS}$ , a qual é chamada de energia BPS, é escrita como

$$E_{BPS} = |W(\phi_j, \chi_j) - W(\phi_i, \chi_i)|, \quad (2.8)$$

onde  $\phi_i$  e  $\chi_i$  denotam o  $i$ -ésimo estado de vácuo do modelo.

Seguindo o procedimento apresentado na referência [28], é possível a partir do conjunto

de equações diferenciais (2.7) escrever a equação

$$\frac{d\phi}{W_\phi} = dx = \frac{d\chi}{W_\chi}, \quad (2.9)$$

a qual conduz a

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi}{W_\chi}. \quad (2.10)$$

Em geral, a equação diferencial acima é não-linear e relaciona os campos escalares do modelo. Consequentemente, a equação (2.10) diz que o campo  $\phi$  é uma função do campo  $\chi$ , em outras palavras,  $\phi = \phi(\chi)$ . Assim, uma vez que esta função é conhecida, as equações (2.7) se tornam desacopladas e podem ser resolvidas.

No sentido de tornar esta seção auto-consistente, vamos revisar o modelo estudado em [25, 28], o qual é usado para modelar um grande número de sistemas [25, 57], cujo superpotencial é dado por

$$W(\phi, \chi) = -\lambda\phi + \frac{\lambda}{3}\phi^3 + \mu\phi\chi^2. \quad (2.11)$$

onde  $\lambda$  e  $\mu$  são constantes de acoplamento adimensionais, reais e positivas. O potencial  $V(\phi, \chi)$  do modelo com o superpotencial apresentado acima é escrito como

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \left[ \lambda^2 + \lambda^2\phi^2(\phi^2 - 2) + \mu^2\chi^2 \left( \chi^2 - \frac{2\lambda}{\mu} \right) + 2\mu^2 \left( \frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) \phi^2\chi^2 \right]. \quad (2.12)$$

Para  $\lambda/\mu > 0$  o modelo tem quatro valores de mínimo supersimétricos  $(\phi, \chi)$ . Neste caso, estes valores correspondem a

$$\mathcal{M}_1 = (-1, 0), \quad \mathcal{M}_2 = (1, 0), \quad (2.13)$$

$$\mathcal{M}_3 = \left( 0, -\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} \right), \quad \mathcal{M}_4 = \left( 0, \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} \right).$$

As órbitas conectando os estados de vácuo deste modelo podem ser vistas na figura 2.1. Note que, a partir da figura, temos seis configurações conectando os vácuos, onde

cinco são estados BPS e um é não-BPS.

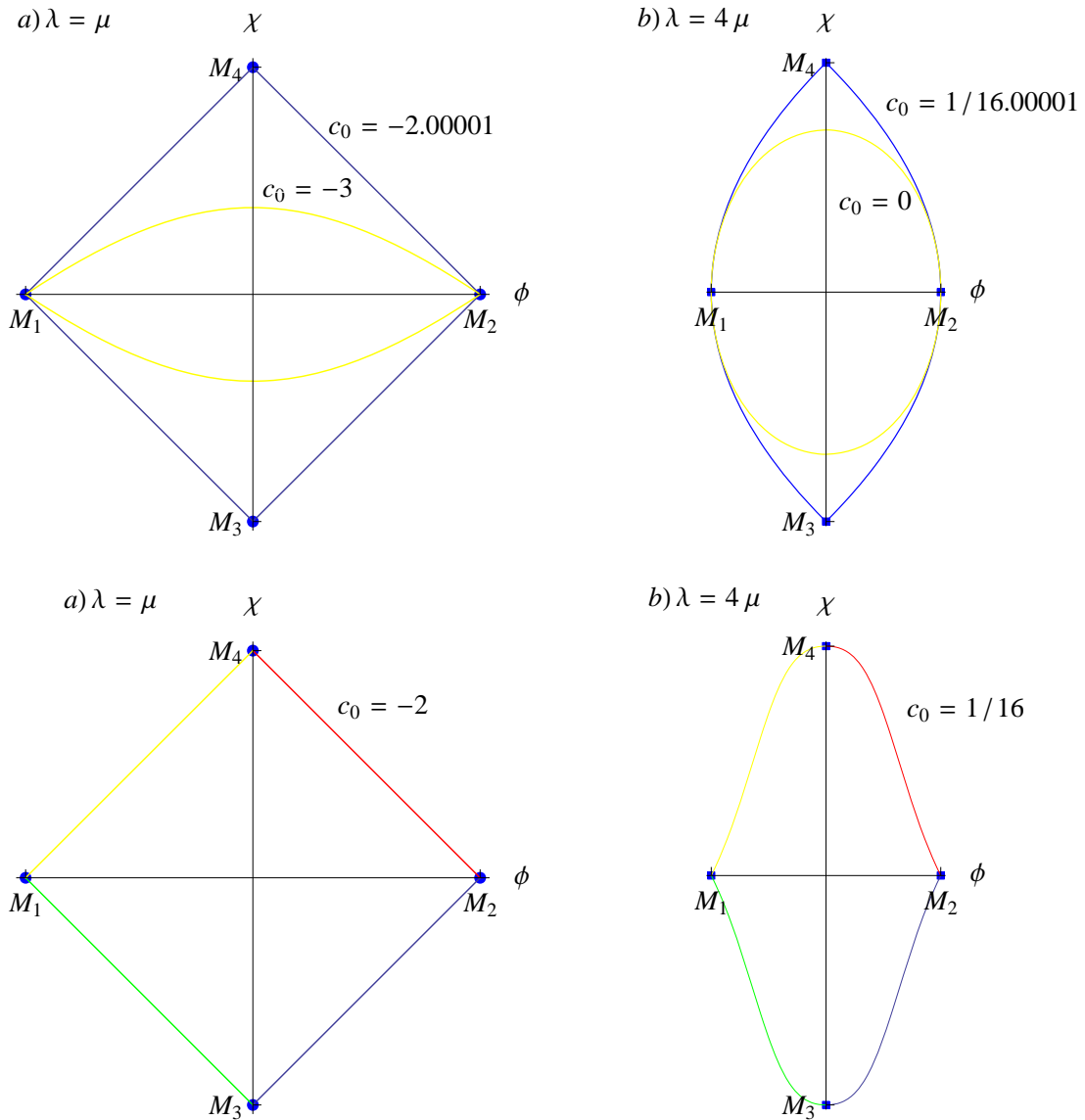


Figura 2.1: Órbitas para as soluções e estados de vácuo do potencial. A figura do topo mostra as soluções degeneradas e a figura de baixo apresenta as soluções críticas.

Usando os resultados acima, os setores conectando o vácuo e suas correspondentes

energias são dados por

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2, \quad E_{BPS}^{(12)} &= \frac{4\lambda}{3}, \\
\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_3, \quad E_{BPS}^{(13)} &= \frac{2\lambda}{3}, \\
\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_4, \quad E_{BPS}^{(14)} &= \frac{2\lambda}{3}, \\
\mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_3, \quad E_{BPS}^{(23)} &= \frac{2\lambda}{3}, \\
\mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_4, \quad E_{BPS}^{(24)} &= \frac{2\lambda}{3}, \\
\mathcal{M}_3 \rightarrow \mathcal{M}_4, \quad E_{nBPS}^{(34)} &= \frac{4\lambda}{3} \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Assim, vemos que quatro destes setores possuem energias iguais, isto é, são configurações degeneradas.

Como foi destacado em [28], as soluções gerais das equações diferenciais de primeira ordem podem ser encontradas para os campos escalares, através da primeira integração da relação

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi}{W_\chi} = \frac{\lambda(\phi^2 - 1) + \mu\chi^2}{2\mu\phi\chi}, \tag{2.15}$$

e, então, reescrevendo um dos campos em função do outro.

Assim, no sentido de resolver a equação acima, introduzimos a nova variável  $\rho = \phi^2 - 1$ , com isso a equação poderá ser reescrita na seguinte forma

$$\frac{d\rho}{d\chi} - \frac{\lambda\rho}{\mu\chi} = \chi. \tag{2.16}$$

Deste modo, não é difícil mostrar que as soluções gerais correspondentes são

$$\rho(\chi) = \phi^2 - 1 = c_0\chi^{\lambda/\mu} - \frac{\mu}{\lambda - 2\mu}\chi^2, \quad (\lambda \neq 2\mu), \tag{2.17}$$

$$\rho(\chi) = \phi^2 - 1 = \chi^2[\ln(\chi) + c_1], \quad (\lambda = 2\mu), \tag{2.18}$$

onde  $c_0$  e  $c_1$  são constantes arbitrárias de integração. Substituindo as soluções encontradas acima na equação diferencial para o campo  $\chi$ , teremos

$$\frac{d\chi}{dr} = \pm 2\mu\chi\sqrt{1 + c_0\chi^{\lambda/\mu} - \frac{\mu}{\lambda - 2\mu}\chi^2}, \quad (\lambda \neq 2\mu), \quad (2.19)$$

$$\frac{d\chi}{dr} = \pm 2\mu\chi\sqrt{1 + \chi^2[\ln(\chi) + c_1]}, \quad (\lambda = 2\mu). \quad (2.20)$$

Diante das equações acima, foi encontrado na referência [28] que em quatro casos particulares a primeira equação diferencial em (2.19) pode ser resolvida analiticamente. Além disso, no sentido de garantir soluções finitas em todo o espaço,  $c_0$  não pode assumir valores maiores que determinados valores críticos. Desta forma, foi observado que nos valores críticos as configurações de campo sofrem mudanças drásticas, como veremos a seguir.

### 2.2.1 A. Paredes de Bloch Degeneradas

O primeiro conjunto de soluções da equação (2.19) foi batizada por Dutra e Hott [60] como Paredes de Bloch Degeneradas (PBD). Neste conjunto de soluções, temos duas situações onde as soluções clássicas são obtidas:

#### A1. Para $c_0 < -2$ e $\lambda = \mu$

Neste caso, temos

$$\chi_{PBD}^{(1)}(x) = \frac{2}{\left(\sqrt{c_0^2 - 4}\right) \cosh(2\mu x) - c_0}, \quad (2.21)$$

$$\phi_{PBD}^{(1)}(x) = \frac{\left(\sqrt{c_0^2 - 4}\right) \sinh(2\mu x)}{\left(\sqrt{c_0^2 - 4}\right) \cosh(2\mu x) - c_0}. \quad (2.22)$$

#### A2. Para $\lambda = 4\mu$ e $c_0 < 1/16$

Aqui, as soluções podem ser escritas como

$$\chi_{PBD}^{(2)}(x) = -\frac{2}{\sqrt{(\sqrt{1-16c_0}) \cosh(4\mu x) + 1}}, \quad (2.23)$$

$$\phi_{PBD}^{(2)}(x) = \frac{(\sqrt{1-16c_0}) \sinh(4\mu x)}{(\sqrt{1-16c_0}) \cosh(4\mu x) + 1}. \quad (2.24)$$

Na figura 2.2 apresentamos o perfil típico das soluções do tipo PBD. Nesta figura vemos que soluções do tipo duplo-kink aparecem para valores de  $c_0$  próximos aos valores críticos. Por outro lado, também notamos que as soluções com o perfil de lump são mais robustas, exibindo um topo mais plano quando  $c_0$  se aproxima dos valores críticos.

Uma importante característica do sistema, com soluções PBD, é que sua energia é degenerada com respeito aos valores de  $c_0$ . Em outras palavras, para qualquer valor de  $c_0$  a energia mínima correspondente é dada por  $E_{PBD} = 4\lambda/3$ .

## 2.2.2 B. Paredes de Bloch Críticas

Uma interessante classe de soluções analíticas, conhecidas como Paredes de Bloch Críticas (PBC), mostrou-se existir quando a constante de integração é tomada no valor crítico. Novamente, temos duas subdivisões:

### B1. Para $\lambda = \mu$ e $c_0 = -2$

Neste caso, temos o seguinte conjunto de soluções para os campos escalares

$$\chi_{PBC}^{(1)}(x) = \frac{1}{2} [1 \pm \tanh(\mu x)], \quad (2.25)$$

$$\phi_{PBC}^{(1)}(x) = -\frac{1}{2} [\tanh(\mu x) \mp 1]. \quad (2.26)$$

### B2. Para $\lambda = 4\mu$ e $c_0 = 1/16$

Agora, as soluções para os campos são dadas por

$$\chi_{PBC}^{(2)}(x) = \sqrt{2} \frac{\cosh(\mu x) \pm \sinh(\mu x)}{\sqrt{\cosh(2\mu x)}}, \quad (2.27)$$

$$\phi_{PBC}^{(2)}(x) = \frac{1}{2} [\pm 1 - \tanh(2\mu x)]. \quad (2.28)$$

Na figura 2.2 fizemos uma representação do perfil das configurações do tipo PBC. Neste caso, a energia corresponde ao valor  $E_{PBC} = 2\lambda/3$ , a qual é consistente com a energia das PBD desde que possamos utilizar duas configurações do tipo PBC no sentido de conectar o mesmo vácuo dado pelas PBD. Neste caso, a energia total deve ser a mesma necessária para se mover entre os vácuos das configurações PBD ( $E_{PBD} = 4\lambda/3 = 2 E_{PBC}$ ), como podemos ver na figura 2.1.

## 2.3 Entropia configuracional para dois campos escalares auto-interagentes

Em um trabalho recente [54] foi mostrado que, em analogia com a teoria da informação de Shannon, a medida da entropia configuracional em um espaço funcional pode ser usada para selecionar a melhor solução com energia espacialmente localizada, quando estamos diante de uma infinidade de configurações com energias degeneradas. Naquele trabalho, foi mostrado que a entropia configuracional é dada por

$$S_c[f] = - \int d^d \mathbf{k} \tilde{f}(\mathbf{k}) \ln[\tilde{f}(\mathbf{k})], \quad (2.29)$$

onde  $d$  é o número de dimensões espaciais,  $\tilde{f}(\mathbf{k}) = f(\mathbf{k})/f_{\max}(\mathbf{k})$ . Neste caso, a função  $f(\mathbf{k})$  foi chamada de fração modal, a qual é representada como

$$f(\mathbf{k}) = \frac{|F(\mathbf{k})|^2}{\int d^d \mathbf{k} |F(\mathbf{k})|^2}. \quad (2.30)$$

A função  $F(\mathbf{k})$  representa a transformada de Fourier da densidade de energia da configuração. Neste ponto, é importante destacar que a densidade de energia deve ser de quadrado integrável. Em tal caso a entropia pode ser bem definida.

Aqui estenderemos o procedimento apresentado em [54], o qual é absolutamente geral quando aplicado a sistemas com densidade de energia espacialmente localizadas, para teorias envolvendo dois campos escalares. Assim, para configurações estáticas de dois campos escalares interagindo, a densidade de energia é escrita como

$$\rho(x) = \frac{1}{2} [(\partial_x \phi)^2 + (\partial_x \chi)^2 + V(\phi, \chi)]. \quad (2.31)$$

É possível notar que a densidade de energia dada acima carrega uma dependência funcional apenas na variável espacial, este fato permite utilizar o desenvolvimento apresentado em [54] para obter a transformada de Fourier  $F(k)$ . Assim permitindo que tal procedimento possa ser utilizado para determinar a entropia configuracional das soluções PBD e PBC. No caso em estudo, as configurações PBD e PBC são estáticas. Então a transformada de Fourier da densidade de energia é dada por

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} \rho(x), \quad (2.32)$$

Destacamos que o teorema de Parseval mostra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\rho(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk |F(k)|^2. \quad (2.33)$$

Como estamos trabalhando com densidades de energia espacialmente localizadas, elas representam um conjunto de funções de quadrado integráveis.

## 2.4 Entropia para PBD e PBC

Nesta seção, utilizaremos o desenvolvimento apresentado na seção anterior para determinar a entropia das configurações PBD e PBC. Iniciaremos com o caso PBD, onde  $\lambda = \mu$  e  $c_0 < -2$ . Primeiramente, seguindo o procedimento para encontrar a entropia, podemos

obter a densidade de energia correspondente para os campos escalares (2.21) e (4.30)

$$\rho_{PBD}^{(1)}(x) = \frac{6\mu^2}{[a_1 + \cosh(2\mu x)]^4} \tag{2.34}$$

$$- \frac{8\mu^2 c_0 \cosh(2\mu x)}{\alpha [a_1 + \cosh(2\mu x)]^4} + \frac{2\mu^2 \cosh(4\mu x)}{[a_1 + \cosh(2\mu x)]^4},$$

onde  $\alpha = \alpha(c_0) \equiv c_0/\sqrt{c_0^2 - 4}$  e  $a_1 \equiv -c_0/\alpha$ .

Por outro lado, a densidade de energia correspondente para  $\lambda = 4\mu$  e  $c_0 < 1/16$  é dada por

$$\rho_{PBD}^{(2)}(x) = - \frac{16\mu^2[\beta^2 + \cosh(2\mu x)]}{\beta^2[a_2 + \cosh(4\mu x)]^4} \tag{2.35}$$

$$- \frac{4\mu^2[7 \cosh(4\mu x) + \cosh(12\mu x)]}{\beta[a_2 + \cosh(4\mu x)]^4},$$

com  $\beta = \beta(c_0) \equiv \sqrt{1 - 16c_0}$  e  $a_2 \equiv 1/\beta$ .

Neste ponto, mais uma vez, vale a pena ressaltar que os valores de energia são degenerados para diferentes valores de  $c_0$ . Como apresentado em [54], a entropia configuracional é um importante caminho para selecionar a melhor das configurações entre as infinitas soluções existentes para o modelo em estudo. Assim, apesar da degenerescência da energia, temos uma solução, entre as infinitas permitidas, com um melhor ordenamento. No entanto, no caso estudado em [54], as configurações degeneradas não são soluções das equações diferenciais não lineares, tais soluções correspondem a funções teste. Aqui estamos trabalhando com soluções exatas da equação diferencial não linear, as quais são genuinamente degeneradas com relação aos valores de  $c_0$ .

Assim, no sentido de contornar o problema da degenerescência para estas configurações, aplicaremos o desenvolvimento de [54] para analisar a entropia configuracional das configurações PBD. Em outras palavras, tentaremos utilizar a entropia configuracional no sentido de selecionar uma configuração de campo preferida.

Seguindo este caminho, devemos calcular a transformada de Fourier da densidade de energia (2.34) e (2.35), as quais permitem determinar a fração modal (2.30). Assim,

usando (2.32), temos

$$F^{(1)}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} \rho_{DBW}^{(1)}(x), \quad (2.36)$$

$$F^{(2)}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} \rho_{DBW}^{(2)}(x). \quad (2.37)$$

Para resolver analiticamente as transformadas de Fourier dadas acima, é muito importante e conveniente introduzir a integral generalizada

$$I^{(n)}(a_n, \gamma, \delta, k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ikx} \cosh(\gamma x)}{[a_n + \cosh(\delta x)]^4}. \quad (2.38)$$

Após calcular a integral acima, podemos encontrar

$$I^{(n)}(a_n, \gamma, \delta, k) = \frac{8}{\delta} \sum_{j=1}^2 G_j(a_n, \gamma, \delta, k), \quad (2.39)$$

onde

$$\begin{aligned} G_j(a_n, \gamma, \delta, k) &= \frac{1}{\Omega_j + 4} F_1[A_j; B_j, B'_j; C_j; X_n, Y_n] \\ &- \frac{1}{\Omega_j - 4} F_1[\bar{A}_j; \bar{B}_j, \bar{B}'_j; \bar{C}_j; X_n, Y_n], \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde as funções  $F_1[A_j; B_j, B'_j; C_j; X_n, Y_n]$  e  $F_1[\bar{A}_j; \bar{B}_j, \bar{B}'_j; \bar{C}_j; X_n, Y_n]$  são as chamadas

funções hipergeométricas de Appell de duas variáveis com

$$\begin{aligned}\Omega_j &= i\omega + (-1)^{j+1}\Omega, \quad \omega = k/\delta, \quad \Omega = \gamma/\delta, \\ A_j &= \Omega_j + 4, \quad B_j = B'_j = 4, \quad C_j = \Omega_j + 5,\end{aligned}\tag{2.41}$$

$$\bar{A}_j = -\Omega_j + 4, \quad \bar{B}_j = \bar{B}'_j = 4, \quad \bar{C}_j = -\Omega_j + 5,$$

$$X_n = -1/\left[a_n - \sqrt{a_n^2 - 1}\right],$$

$$Y_n = -1/\left[a_n + \sqrt{a_n^2 - 1}\right].$$

Então, podemos escrever as soluções de (2.36) e (2.37) nas seguintes formas compactas

$$\begin{aligned}F^{(1)}(k) &= \frac{2\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \left[ 3I^{(1)}(a_1, 0, 2\mu, k) \right. \\ &\quad \left. - \frac{4c_0}{\alpha} I^{(1)}(a_1, 2\mu, 2\mu, k) + I^{(1)}(a_1, 4\mu, 2\mu, k) \right],\end{aligned}\tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}F^{(2)}(k) &= -\frac{4\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \left[ I^{(2)}(a_2, 0, 4\mu, k) \right. \\ &\quad + \frac{4}{\beta^2} I^{(2)}(a_2, 2\mu, 4\mu, k) + \frac{7}{\beta} I^{(2)}(a_2, 4\mu, 4\mu, k) \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta} I^{(2)}(a_2, 12\mu, 4\mu, k) \right].\end{aligned}\tag{2.43}$$

Agora, para escrever a fração modal (2.30) é necessário desenvolver (2.33). Em tal caso, fazendo uso de técnicas numéricas para determinar as soluções das integrais  $F^{(1)}(k)$  e  $F^{(2)}(k)$ , é possível encontrar que as funções que melhores se ajustam para as soluções

são dadas por

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk |F^{(1)}(k)|^2 \simeq g_1 - g_2 e^{g_3 c_0}, \quad (2.44)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk |F^{(2)}(k)|^2 \simeq h_1 - h_2 e^{h_3 c_0}, \quad (2.45)$$

onde  $g_1 = 0.848139$ ,  $g_2 = 3.88337$ ,  $g_3 = 1.13318$ ,  $h_1 = 41.0711$ ,  $h_2 = 23.2854$  e  $h_3 = 1.16999$ .

Assim, as frações modais podem ser escritas como

$$f^{(1)}(k) \simeq \frac{|F^{(1)}(k)|^2}{g_1 - g_2 e^{g_3 c_0}}, \quad f^{(2)}(k) \simeq \frac{|F^{(2)}(k)|^2}{h_1 - h_2 e^{h_3 c_0}}. \quad (2.46)$$

As frações modais encontradas acima estão ilustradas graficamente na figura 2.2. Pode ser visto através do gráfico que elas são localizadas e exibem um valor máximo localizado em  $k = 0$ . Consequentemente, concluímos que

$$S_c^{(1)} \simeq - \int dk \tilde{f}^{(1)}(k) \ln[\tilde{f}^{(1)}(k)], \quad (2.47)$$

$$S_c^{(2)} \simeq - \int dk \tilde{f}^{(2)}(k) \ln[\tilde{f}^{(2)}(k)]. \quad (2.48)$$

Afim de encontrar a entropia configuracional aplicaremos métodos numéricos para calcular as integrais. Assim, na figura 2.3, vemos o perfil da entropia configuracional. Neste caso, podemos verificar que a entropia é uma função da constante  $c_0$ , a qual tem um valor mínimo. Além disso, é importante destacar que para este valor de  $c_0$ , onde a entropia configuracional é minimizada, as configurações de campo experimentam um tipo de transição de fase. Neste valor de  $c_0$  a solução do tipo kink duplo se transforma em um kink usual. Por outro lado, vemos que a configuração do tipo lump, a qual apresenta um topo mais plano quando o valor de  $c_0$  esta próximo do valor crítico, transforma-se em uma solução mais suave quando  $c_0$  esta no valor mínimo.

A partir da solução da entropia configuracional, podemos concluir que são os valores da constante  $c_0$  responsáveis pela minimização da entropia. Neste caso, apresentamos

na tabela 1 alguns valores de entropia configuracional mínima e suas correspondentes constantes  $c_0$ .

$\square$	$c_0^{(\text{crit})}$	$S_C^{(\text{crit})}$	$c_0^{(\text{min})}$	$S_C^{(\text{min})}$	$c_0^{(\text{trans})}$	$S_C^{(\text{trans})}$	$\text{Lim}_{c_0 \rightarrow -\infty} S_C$
$\lambda = 1$	-2.00000	1.59	-2.0075	0.9049	-2.2303	1.0838	1.7
$\lambda = 1.4$	-2.63384	1.45	-2.6361	1.0949	-2.9735	1.2465	2.2
$\lambda = 2.2$	4.20083	2.02	4.2006	1.2857	4.0248	1.3606	2.3

Tabela 2.1: Valores de entropia mínima e suas correspondentes constantes  $c_0$ .

Em todos os casos considerados vemos que a entropia mínima apresenta um valor mais baixo que o valor da energia da configuração. Deste modo, podemos concluir que esta relação entre energia e baixa entropia configuracional oferece um caminho eficiente para medir o ordenamento associado com soluções que apresentam energia localizada, mostrando a melhor configuração entre uma infinidade de possíveis soluções.

## 2.5 Conclusões

Neste capítulo, investigamos a medida da entropia configuracional,  $S_c(c_0)$ , para uma classe de modelos que possui dois campos escalares interagindo de maneira não linear. Encontramos que a entropia configuracional apresenta um valor mínimo para um dado valor de  $c_0$ . Notamos também que a função  $S_c(c_0)$  apresenta um ponto de mínimo local, onde a estrutura das configurações sofrem um tipo de transição de fase, ou seja, para este valor de mínimo local o valor de  $c_0$  correspondente é aquele para o qual o kink duplo do modelo se transforma em um kink usual. Um ponto de grande importância da medida da entropia configuracional foi o fato dela permitir selecionar a melhor das configurações do campo escalar entre as infinitas soluções existentes para o modelo.

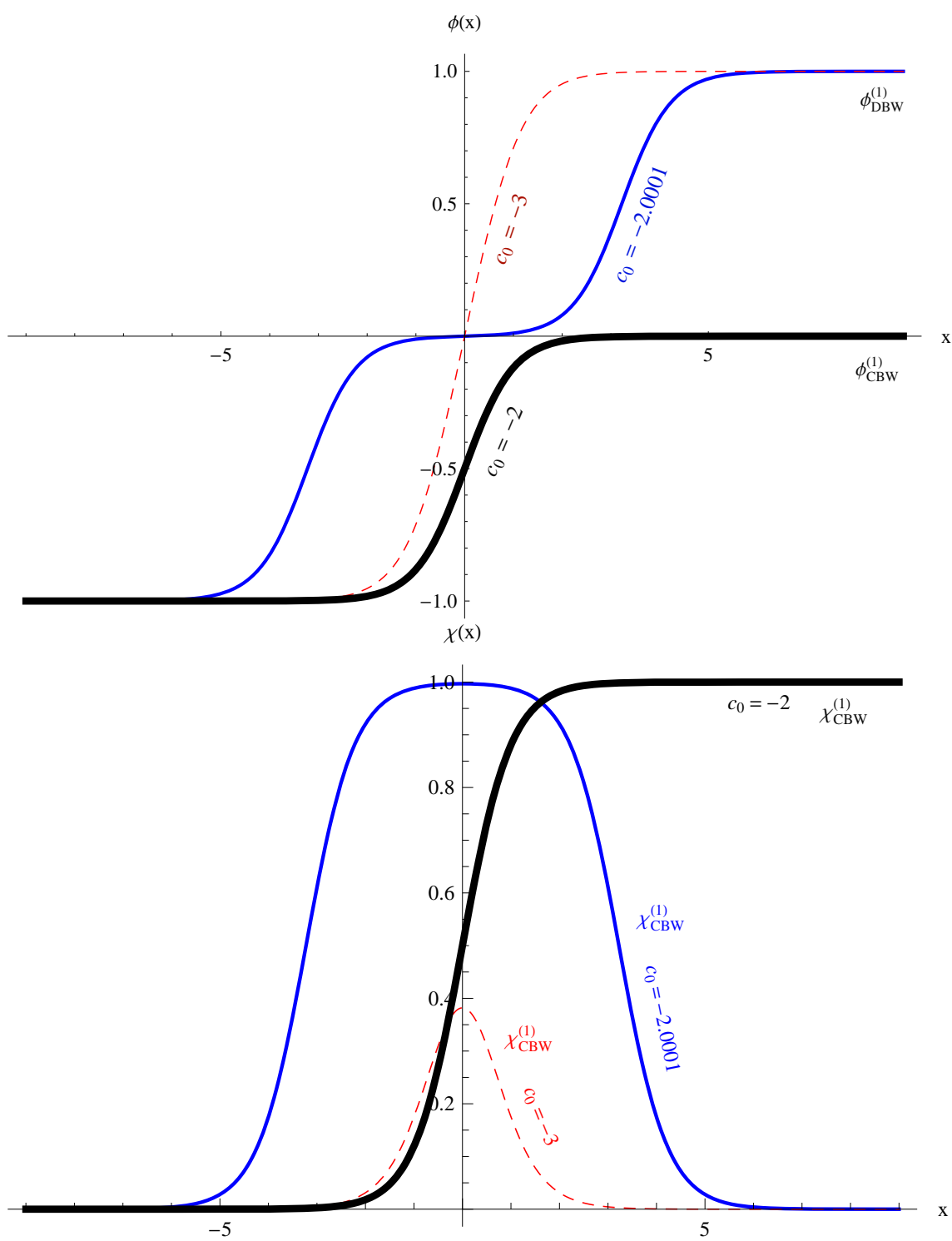


Figura 2.2: Perfil das soluções PBD e PBC para  $\lambda = 1$ .

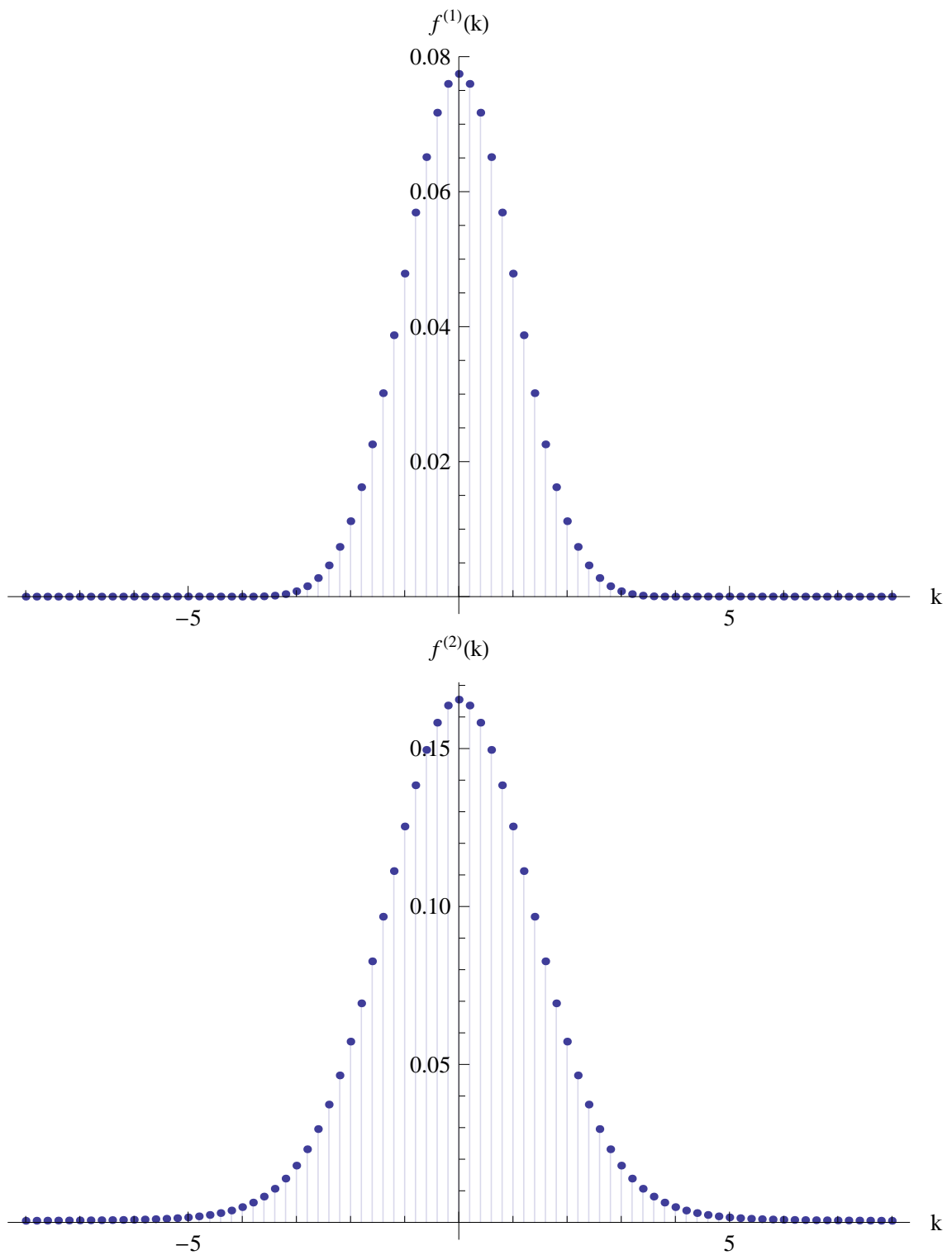


Figura 2.3: Frações modais  $f^{(1)}(k)$  e  $f^{(2)}(k)$  com  $\mu = 1$ . Note que o valor máximo da curva está localizado em  $k = 0$ .

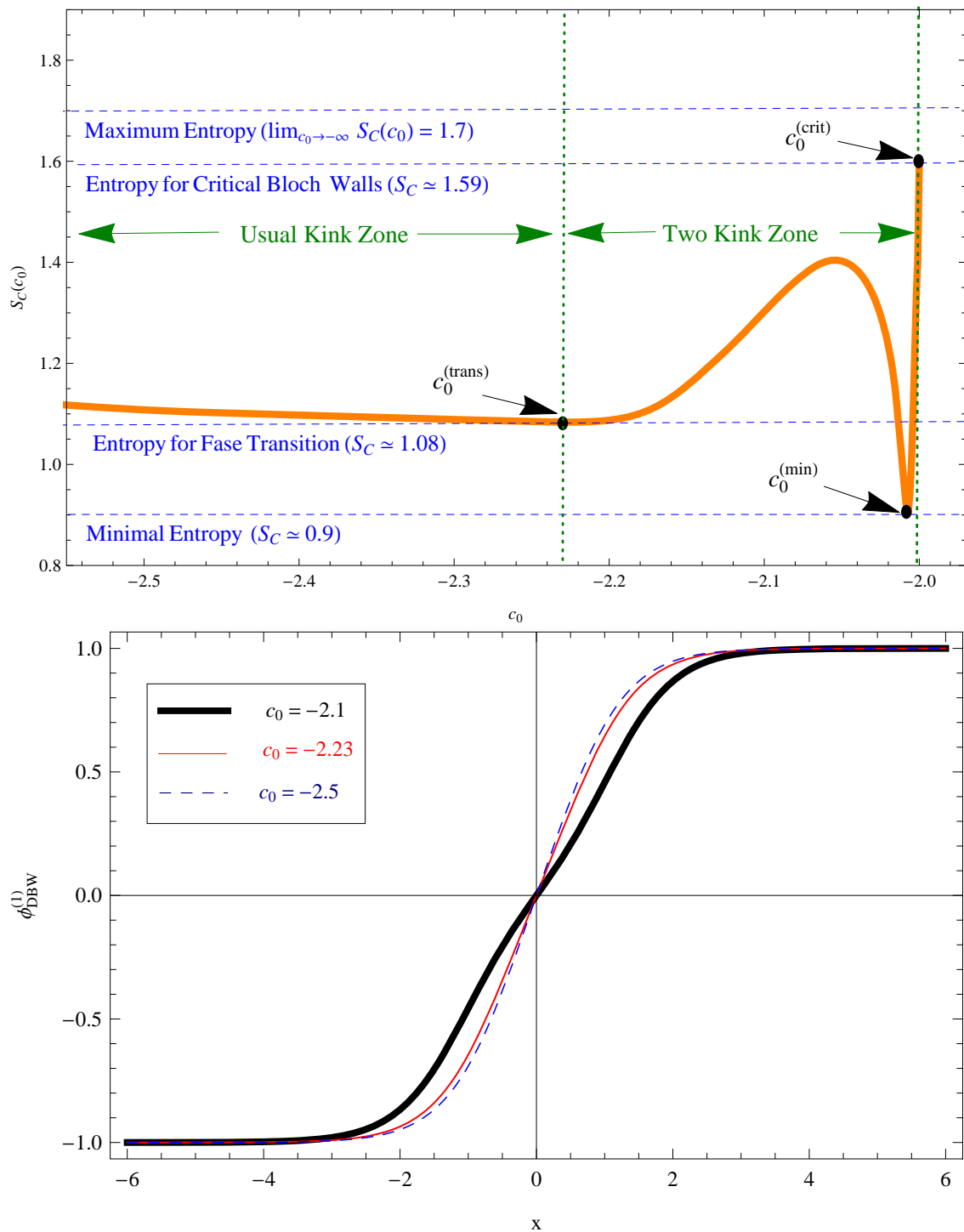


Figura 2.4: Entropia configuracional para  $\lambda = 1$ .

# Capítulo 3

## Sólitons viajantes em sistemas com violação das simetrias de Lorentz e CPT

Neste capítulo apresentaremos uma classe de sólitons viajantes em sistemas com violações das simetrias de Lorentz. No caso de cenários envolvendo violações de Lorentz é usual construir configurações solitônicas estáticas. Aqui iremos mostrar que é possível construir alguns sólitons viajantes os quais, como deveria ser esperado, não podem ser mapeados em configurações estáticas através do boost de Lorentz devido à quebra explícita desta simetria. Além disso, no modelo estudado, encontramos um conjunto completo de soluções. Neste caso, mostraremos que as soluções apresentam um limite crítico controlado pela escolha de uma constante arbitrária de integração.

### 3.1 Introdução

Uma nova área de estudos surgiu alguns anos atrás com Kostelecky e Samuel [61], quando eles iniciaram o estudo do problema da quebra das simetrias de Lorentz e *CPT* (conjugação da carga - paridade - reversão temporal). Este estudo teve suas motivações no fato das teorias de super-cordas sugerirem que a simetria de Lorentz possa ser violada em escalas de altas energias. Após aquele trabalho pioneiro, uma grande estrutura teórica sobre violações das simetrias de Lorentz e *CPT* foi rigorosamente desenvolvida na literatura. Como um exemplo deste desenvolvimento, podemos citar o trabalho apresentado

por Colladay e Kostelecky [62, 63], onde os efeitos das violações das simetrias de Lorentz e *CPT* foram analisados no modelo padrão da física das partículas elementares. Atualmente, uma grande quantidade de trabalhos considerando o impacto de algum tipo de quebra de simetria de Lorentz tem aparecido na literatura [64]-[79].

Nos últimos anos, uma parte em especial dos estudos envolvendo violações da simetria de Lorentz tem se destacado na literatura, tais estudos envolvem investigações sobre defeitos topológicos na presença de violações das simetrias de Lorentz [77]-[80]. Podemos encontrar dentro desta linha de estudos trabalhos sobre monopólos e vórtices [43, 80, 81]. Por exemplo, em um artigo recente [43] a questão sobre a violação da simetria de Lorentz em vórtices BPS foi investigada. Neste caso, os autores concluíram que a violação de Lorentz permite controlar a extensão radial e a amplitude do campo magnético dos vórtices de Abrikosov-Nielsen-Olesen.

Na verdade, a invariância de Lorentz é a mais fundamental simetria do modelo padrão da física de partículas e tem sido verificada muito bem em vários experimentos. Mas é importante destacar que não podemos estar certos, devido à acurácia experimental, que esta simetria é exata. Esta afirmação é encorajada devido ao fato de que existem alguns testes experimentais da invariância de Lorentz em escalas de energias baixas, em outras palavras, energias abaixo de 14 Tev. Assim, a partir deste fato, podemos suspeitar que em altas energias a invariância de Lorentz possa ser quebrada. Como um exemplo, na teoria de cordas existe a possibilidade de que possamos estar vivendo em um Universo governado por coordenadas não-comutativas [82]. Neste cenário foi mostrado na referência [83] que a invariância de Lorentz é quebrada.

Além disso, em um cenário cosmológico, a ocorrência de raios cósmicos de altas energias acima do limite Greisen-Zatsepin-Kuzmin (GZK) [84] ou super eventos GZK, tem sido encontrados em dados astrofísicos [85]. Estes eventos indicam a possibilidade de uma quebra da simetria de Lorentz [86].

O impacto da violação de Lorentz sobre cenários cosmológicos é muito importante, porque vários de seus pontos fracos podem ser facilmente explicados através da violação da simetria de Lorentz. Em um importante estudo, foi mostrado por Bekenstein [87] que o problema da matéria escura está intimamente associado à violação de Lorentz e na referência [88] a quebra da simetria de Lorentz também é utilizada para esclarecer o problema da energia escura. Atualmente, a quebra da simetria de Lorentz é um fabuloso

mecanismo para a tentativa de resolução de vários problemas e conflitos em cosmologia, tais como a baryogenesis [89], o campo magnético primordial [90], a nucleossíntese [91] e raios cósmicos [92].

No cenário inflacionário com violação de Lorentz, Kanno e Soda [93] mostraram que a violação afeta a dinâmica do modelo inflacionário. Neste caso, aqueles autores demonstraram que usando uma teoria envolvendo campos escalares, tensoriais e vetoriais com quebra da simetria de Lorentz, as soluções exatas inflacionárias são encontradas sem a necessidade do potencial do inflaton. Portanto, a inflação estaria conectada com a violação da simetria de Lorentz.

Aqui, é conveniente enfatizarmos que a inflação é o ingrediente fundamental para resolver os problemas do horizonte e achatamento do modelo padrão do Universo primordial. Aproximadamente  $10^{-33}$  segundos após a inflação, o inflaton decaiu para radiação, onde quarks, leptons e fótons foram acoplados uns aos outros. Neste caso, a matéria bariônica foi impedida de formar-se. Portanto, aproximadamente  $1.388 \times 10^{12}$  segundos após o Big Bang, o Universo se resfriou o suficiente para permitir que os fótons viajassem livremente através do Universo. Depois disso, a matéria foi se tornando dominante no Universo.

Por outro lado, é importante destacar que modelos não lineares, os quais possuem soluções topológicas, são muito interessantes em vários ramos da Física [37]. Em um trabalho recente [78] foi mostrado que alguns modelos não lineares em  $1 + 1$  dimensões com dois campos escalares interagindo em um cenário com violações das simetrias de Lorentz e CPT suportam soluções solitônicas estáticas. Este trabalho foi feito através da generalização do modelo anteriormente apresentado por Barreto e colaboradores [77]. Em outro trabalho, também muito recente [79], os efeitos da violação de Lorentz sobre defeitos topológicos gerados por dois campos escalares reais foram analisados. Naquele caso, a violação de Lorentz é induzida por um coeficiente tensorial que acopla os dois campos escalares. Em todos estes exemplos, as configurações solitônicas apresentadas são estáticas. Nesse capítulo, mostraremos que é possível encontrar um conjunto de configurações não triviais que apresentam um perfil viajante neste tipo de cenário. Neste caso, apresentaremos uma generalização dos modelos recentemente discutidos na literatura [77, 78, 94, 95, 96, 79]. Como consequência, apresentaremos uma classe de configurações do tipo sólitons viajantes em sistemas com violações das simetrias de Lorentz e CPT. Além disso, mostraremos que as configurações estáticas não são limites das soluções

viajantes. Os desenvolvimentos que faremos em nosso trabalho estão embasados nos resultados apresentados para classes de modelos não lineares de dois campos escalares auto-interagentes os quais foram apresentados em [28]. Nesta última referência foi mostrado que estes sistemas não lineares em  $1 + 1$  dimensões, podem ser mapeados em equações diferenciais lineares de primeira ordem, conduzindo em soluções gerais e analíticas para o sistema. Mostraremos também que as soluções apresentam um limite crítico controlado pela escolha arbitrária da constante de integração.

## 3.2 O modelo

Alguns anos atrás, foi apresentado em [77] um modelo envolvendo dois campos escalares reais em  $1 + 1$  dimensões onde a densidade de lagrangiana com quebra da simetria de Lorentz generaliza alguns resultados da literatura. Aquela densidade de lagrangiana contém funções vetoriais com dependência dos campos escalares. Além disso, as funções vetoriais mencionadas são responsáveis por quebrar a simetria de Lorentz. Por outro lado, na referência [79], os efeitos da violação de Lorentz em defeitos topológicos gerados por dois campos escalares reais também foram analisados. Neste caso, a lagrangiana possui um tensor, o qual é o termo responsável pela quebra da simetria.

Assim, em nessa seção contruiremos um modelo generalizado possuindo dois campos escalares auto-interagentes em  $1 + 1$  dimensões, o qual é descrito pela seguinte densidade de lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - G^\mu(\phi, \chi)\partial_\mu\phi - F^\mu(\phi, \chi)\partial_\mu\chi + \\ & - \gamma k^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \partial_\mu\chi\partial_\nu\chi) - p k^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\chi - V(\phi, \chi), \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde  $\mu = 0, 1$ ,  $G^\mu(\phi, \chi)$  e  $F^\mu(\phi, \chi)$  são funções vetoriais, e  $V(\phi, \chi)$  é o potencial. Além disso,  $k^{\mu\nu}$  é um tensor constante, aqui representado por uma matriz  $2 \times 2$ , onde  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  e  $\alpha_4$  são parâmetros arbitrários. De fato, um processo similar de quebra da simetria de Lorentz foi apresentado por Anacleto *et al.* [76] em um trabalho recente, onde o tensor  $k^{\mu\nu}$  é uma matriz  $4 \times 4$ . Naquele caso os autores estudaram o problema de buracos negros acústicos a partir do modelo de Higgs abeliano com violação da simetria de Lorentz.

Então, como falado anteriormente, o tensor  $k^{\mu\nu}$  é escrito como

$$k^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Note que, a partir da densidade de lagrangiana (3.1), podemos recuperar o caso apresentado no trabalho [79] escolhendo  $\gamma = 0$ ,  $G^0(\phi, \chi) = F^0(\phi, \chi) = 0$ ,  $\alpha_1 = \alpha_4 = \beta$ ,  $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$  e  $p = -1$ . Além disso, também podemos recorrer à densidade de lagrangiana apresentada em [77, 78] através de uma escolha conveniente dos parâmetros. Portanto, temos um modelo mais geral que inclui funções vetoriais e um tensor constante. É importante destacar que o modelo mais geral apresentado aqui pode ser utilizado para obter mais informações sobre o impacto da violação de Lorentz de importantes sistemas, semelhantes aos apresentando estruturas topológicas [77, 78].

A partir da densidade de lagrangiana (3.1), podemos escrever as equações de movimento correspondentes

$$(1 - \gamma \alpha_1)\ddot{\phi} - (1 + \gamma \alpha_4)\phi''' - p(\alpha_1\ddot{\chi} + \alpha_4\chi'') + (F_\phi^0 - G_\chi^0)\dot{\chi} + (F_\phi^1 - G_\chi^1)\chi' + \quad (3.3)$$

$$-(\alpha_3 + \alpha_2)(\gamma\dot{\phi}' + p\dot{\chi}') + V_\phi = 0,$$

$$(1 - \gamma \alpha_1)\ddot{\chi} - (1 + \gamma \alpha_4)\chi''' - p(\alpha_1\ddot{\phi} + \alpha_4\phi'') - (F_\phi^0 - G_\chi^0)\dot{\phi} - (F_\phi^1 - G_\chi^1)\phi' + \quad (3.4)$$

$$-(\alpha_3 + \alpha_2)(\gamma\dot{\chi}' + p\dot{\phi}') + V_\chi = 0,$$

onde ponto indica derivada com respeito ao tempo, enquanto linha representa derivada com respeito ao espaço,  $V_\phi \equiv \partial V/\partial\phi$  e  $V_\chi \equiv \partial V/\partial\chi$ . Pode ser visto que as duas equações acima carregam informações da quebra de Lorentz do modelo através da presença dos parâmetros  $\alpha_i$  e das funções vetoriais. Entretanto, como uma consequência do modelo estudado neste trabalho, em geral, não podemos resolver analiticamente as equações diferenciais acima. No entanto, podemos considerar um interessante caso para as configurações de campo, onde procuraremos por soluções do tipo ondas viajantes. Configurações que exibem o perfil de ondas viajantes possuem um importante impacto quando estudamos as chamadas D-branas e os campos de supergravidade para uma D-brana [94, 95, 96].

Então, iniciaremos nossa procura por soluções do tipo ondas viajantes na forma  $\phi = \phi(u)$  e  $\chi = \chi(u)$  com  $u = Ax + Bt$ . Assim, as equações (3.3) e (3.4) adquirem as formas

$$-\phi_{uu} + \tilde{\beta}\chi_{uu} - \tilde{\alpha}\chi_u + \tilde{V}_\phi = 0, \quad (3.5)$$

$$-\chi_{uu} + \tilde{\beta}\phi_{uu} + \tilde{\alpha}\phi_u + \tilde{V}_\chi = 0, \quad (3.6)$$

com as definições

$$\tilde{\beta} \equiv -\frac{p[(\alpha_2 + \alpha_3)AB + \alpha_4A^2 + \alpha_1B^2]}{(1 + \gamma\alpha_4)A^2 - (1 - \gamma\alpha_1)B^2 + AB\gamma(\alpha_2 + \alpha_4)}, \quad (3.7)$$

$$\tilde{\alpha} \equiv -\frac{B(F_\phi^0 - G_\chi^0) + A(F_\phi^1 - G_\chi^1)}{(1 + \gamma\alpha_4)A^2 - (1 - \gamma\alpha_1)B^2 + AB\gamma(\alpha_2 + \alpha_4)}, \quad (3.8)$$

$$\tilde{V}_\phi \equiv \frac{V_\phi}{(1 + \gamma\alpha_4)A^2 - (1 - \gamma\alpha_1)B^2 + AB\gamma(\alpha_2 + \alpha_4)}, \quad (3.9)$$

$$\tilde{V}_\chi \equiv \frac{V_\chi}{(1 + \gamma\alpha_4)A^2 - (1 - \gamma\alpha_1)B^2 + AB\gamma(\alpha_2 + \alpha_4)}. \quad (3.10)$$

No sentido de desacoplar o par de equações diferenciais de segunda ordem, multiplicamos a equação (3.5) por  $\phi_u$  e a equação (3.6) por  $\chi_u$ . Assim, não é difícil concluir que, após somar as duas equações, podemos escrever

$$\frac{d}{du} \left[ -\frac{1}{2}(\phi_u^2 + \chi_u^2) + \tilde{\beta}\phi_u\chi_u + \tilde{V}(\phi, \chi) \right] = 0. \quad (3.11)$$

Neste caso, temos

$$-\frac{1}{2}(\phi_u^2 + \chi_u^2) + \tilde{\beta}\phi_u\chi_u + \tilde{V}(\phi, \chi) = c_0. \quad (3.12)$$

A equação acima pode ser reescrita para o caso onde  $c_0 = 0$  o qual é necessário para garantir soluções do tipo solitônicas, caso contrário obteremos soluções oscilantes ou

complexas [37]. Portanto, chegamos em

$$-\frac{1}{2}(\phi_u^2 + \chi_u^2) + \tilde{\beta}\phi_u\chi_u + \tilde{V}(\phi, \chi) = 0. \quad (3.13)$$

Note que na equação acima, a dependência em  $\tilde{\alpha}$  desapareceu. Contudo, a dependência do sistema em termos dos parâmetros responsáveis pela quebra de Lorentz estão sempre presentes, mas de maneira implícita.

Agora, para desacoplar a equação acima, aplicamos a rotação

$$\begin{pmatrix} \phi(u) \\ \chi(u) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(u) \\ \varphi(u) \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

assim, a equação (3.13) é escrita como

$$-\frac{1}{2}(1 - \tilde{\beta})\theta_u^2 - \frac{1}{2}(1 + \tilde{\beta})\varphi_u^2 + \tilde{V}(\theta, \varphi) = 0. \quad (3.15)$$

Além disso, devemos aplicar as dilatações

$$\theta(u) = \frac{\sigma(u)}{\sqrt{1 - \tilde{\beta}}}, \quad \varphi(u) = \frac{\rho(u)}{\sqrt{1 + \tilde{\beta}}}. \quad (3.16)$$

Deste modo, teremos

$$-\frac{1}{2}\sigma_u^2 - \frac{1}{2}\rho_u^2 + \tilde{V}(\sigma, \rho) = 0. \quad (3.17)$$

Neste ponto, podemos verificar que a equação acima permite escrever duas equações diferenciais de primeira ordem acopladas. Neste caso, é usual impor que o potencial possa ser escrito em termos de um superpotencial do tipo

$$\tilde{V}(\sigma, \rho) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W(\sigma, \rho)}{\partial \sigma} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W(\sigma, \rho)}{\partial \rho} \right)^2, \quad (3.18)$$

o qual conduz ao seguinte conjunto de equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{d\sigma}{du} = \pm W_\sigma, \quad \frac{d\rho}{du} = \pm W_\rho, \quad (3.19)$$

onde  $W_\sigma \equiv \partial W(\sigma, \rho)/\partial \sigma$  e  $W_\rho \equiv \partial W(\sigma, \rho)/\partial \rho$ .

Agora, para analisar a energia das configurações obtidas, escrevemos o tensor energia-

momento na forma

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \chi)} \partial^\nu \chi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (3.20)$$

Portanto, a densidade de energia da densidade lagrangiana (3.1) é escrita como

$$\begin{aligned} T^{00} = & \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{\dot{\chi}^2}{2} + \left( \frac{1}{2} + \gamma\alpha_4 \right) (\phi'^2 + \chi'^2) + G^1(\phi, \chi)\phi' + F^1(\phi, \chi)\chi' + \\ & - p\alpha_1\dot{\phi}\dot{\chi} + \gamma(\alpha_2 + \alpha_3)\phi'\dot{\phi} + \gamma(\alpha_2 + \alpha_3)\chi'\dot{\chi} + p\alpha_4\phi'\chi' + p\alpha_2\dot{\phi}\chi' + \\ & + p\alpha_3\phi'\dot{\chi} + V(\phi, \chi). \end{aligned} \quad (3.21)$$

No caso das soluções do tipo ondas viajantes, a densidade de energia é escrita na forma

$$\begin{aligned} T_{viajante}^{00} = & \left[ \frac{B^2}{2} + \left( \frac{1}{2} + \gamma\alpha_4 \right) A^2 + \gamma(\alpha_2 + \alpha_3)AB \right] \phi_u^2 \\ & + \left[ \frac{B^2}{2} + \left( \frac{1}{2} + \gamma\alpha_4 \right) A^2 + \gamma(\alpha_2 + \alpha_3)AB \right] \chi_u^2 + p [\alpha_4 A^2 - \alpha_1 B^2 + (\alpha_2 + \alpha_3)AB] \phi_u \chi_u \\ & + A[G^1(\phi, \chi)\phi_u + F^1(\phi, \chi)\chi_u] + V(\phi, \chi). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Agora, escolhemos o superpotencial utilizado em [25, 28], que é escrito como

$$W(\sigma, \rho) = -\lambda\sigma + \frac{\lambda}{3}\sigma^3 + \mu\sigma\rho^2. \quad (3.23)$$

Neste caso, as soluções apresentadas na referência [28], com  $\lambda = \mu$ , são dadas por

$$\begin{aligned} \sigma_+(u) = & \frac{(c_0^2 - 4)e^{4\mu(u-u_0)} - 1}{[c_0 e^{2\mu(u-u_0)} - 1]^2 - 4e^{4\mu(u-u_0)}}, \sigma_-(u) = \frac{4 - c_0^2 + e^{4\mu(u-u_0)}}{[e^{2\mu(u-u_0)} - c_0]^2 - 4}, \\ \rho_+(u) = & \frac{4e^{2\mu(u-u_0)}}{[c_0 e^{2\mu(u-u_0)} - 1]^2 - 4e^{4\mu(u-u_0)}}, \rho_-(u) = \frac{4e^{2\mu(u-u_0)}}{[e^{2\mu(u-u_0)} - c_0]^2 - 4}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde devemos impor que  $c_0 \leq -2$  em tais soluções. Por outro lado, no caso onde  $\lambda = 4\mu$ ,

as soluções exatas são escritas como

$$\sigma_+(u) = \frac{4 + (16c_0 - 1)e^{8\mu(u-u_0)}}{[2 + e^{4\mu(u-u_0)}]^2 - 16c_0e^{8\mu(u-u_0)}}, \sigma_-(u) = \frac{16c_0 + 4e^{8\mu(u-u_0)} - 1}{[1 + 2e^{4\mu(u-u_0)}]^2 - 16c_0}, \quad (3.25)$$

$$\rho_+(u) = -\frac{2e^{2\mu(u-u_0)}}{\sqrt{[(1/2)e^{4\mu(u-u_0)} + 1]^2 - 4c_0e^{8\mu(u-u_0)}}}, \rho_-(u) = -\frac{4e^{2\mu(u-u_0)}}{\sqrt{[1 + 2e^{4\mu(u-u_0)}]^2 - 16c_0}}.$$

Neste caso, impomos que  $c_0 \leq 1/16$ . É importante destacar que fazendo as mudanças  $\sigma \rightarrow \rho$  e  $\rho \rightarrow \sigma$  no caso onde  $\lambda = \mu$ , a equação de movimento (3.17) se mantém invariante. Assim, as soluções que eram kinks se transformam em lumps e *vice-versa*, este fato é usado para gerar o conjunto completo de órbitas conectando os vácuos do modelo presentes na figura 3.1.

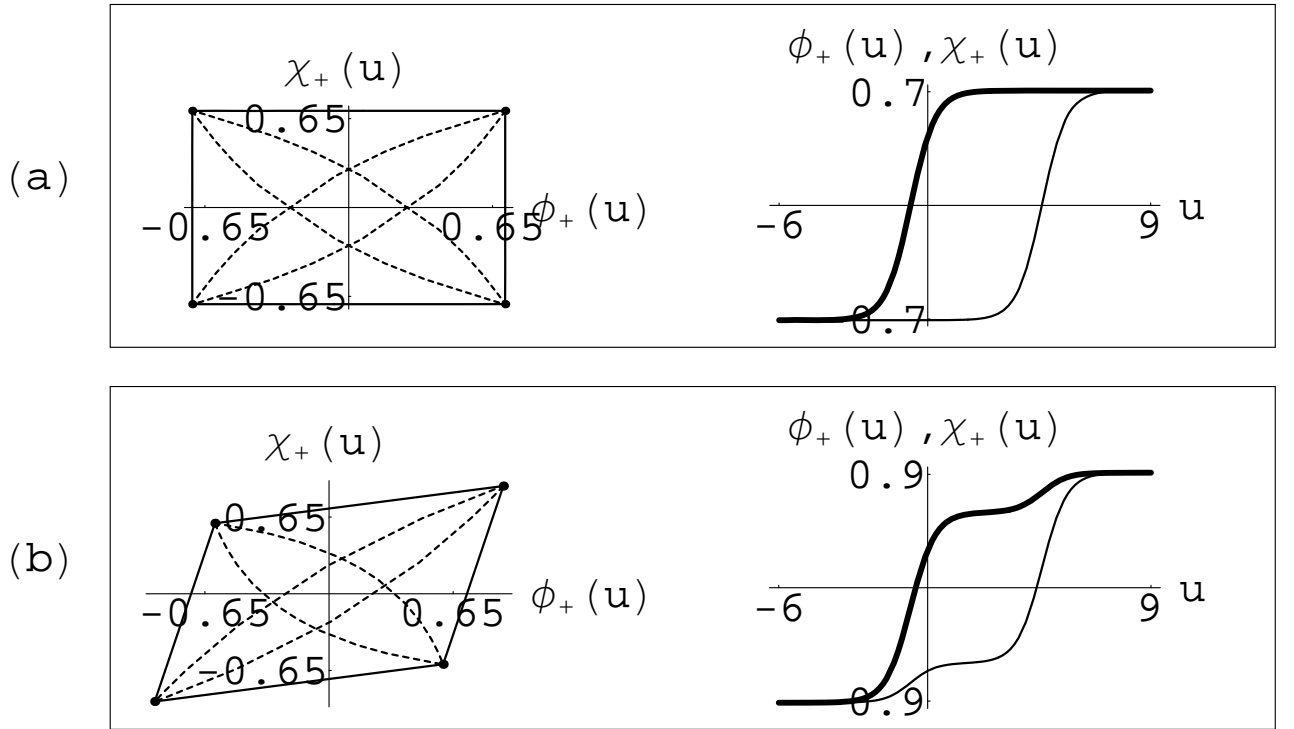


Figura 3.1: Órbitas das soluções para  $\mu = 1$ .

Assim, os campos  $\phi(u)$  e  $\chi(u)$  são dados por

$$\phi_{\pm}(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{\sigma_{\pm}(u)}{\sqrt{1-\tilde{\beta}}} - \frac{\rho_{\pm}(u)}{\sqrt{1+\tilde{\beta}}} \right], \quad (3.26)$$

$$\chi_{\pm}(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{\sigma_{\pm}(u)}{\sqrt{1-\tilde{\beta}}} + \frac{\rho_{\pm}(u)}{\sqrt{1+\tilde{\beta}}} \right].$$

Desta forma, usando as soluções apresentadas na referência [28] as quais estão representadas aqui por (3.24) e (3.25), temos um conjunto completo de soluções com dependência da posição e do tempo.

Chamamos a atenção para o fato de que as soluções estáticas para as equações (3.3) e (3.4) são diferentes (em forma) das soluções do caso viajante. Esta diferença pode ser vista a partir das equações diferenciais dos campos estáticos

$$-\phi'' + \bar{\beta}\chi'' + \bar{\alpha}\chi' + \bar{V}_{\phi} = 0, \quad (3.27)$$

$$-\chi'' + \bar{\beta}\phi'' - \bar{\alpha}\chi' + \bar{V}_{\chi} = 0, \quad (3.28)$$

onde agora, temos

$$\bar{\beta} \equiv \frac{-p\alpha_4}{(1+\gamma\alpha_4)}, \bar{\alpha} \equiv \frac{(F_{\phi}^1 - G_{\chi}^1)}{(1+\gamma\alpha_4)}, \quad (3.29)$$

$$\bar{V}_{\phi} \equiv \frac{V_{\phi}}{(1+\gamma\alpha_4)} \quad \text{and} \quad \bar{V}_{\chi} \equiv \frac{V_{\chi}}{(1+\gamma\alpha_4)}.$$

Em particular, se  $\gamma = 0$ ,  $G^{\mu}(\phi, \chi) = F^{\mu}(\phi, \chi) = 0$ ,  $\alpha_1 = \alpha_4 = \beta$ ,  $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$  e  $p = -1$ , podemos recuperar o modelo apresentado em [79]. No caso estático, as equações de movimento apresentadas por aqueles autores são dadas por

$$-\phi'' + \beta\chi'' + V_{\phi} = 0, \quad (3.30)$$

$$-\chi'' + \beta\phi'' + V_{\chi} = 0. \quad (3.31)$$

Um ponto interessante é notar que o par de equações apresentadas em [79] para as soluções estáticas, assumem uma forma diferente quando comparadas com as equações (3.27) e (3.28). De fato, através da escolha correta dos parâmetros, somos capazes de recuperar as equações de movimento descritas no trabalho [79]. Mas as configurações estáticas gerais são dadas pelas equações (3.27) e (3.28), as quais estão carregando mais informações dos termos responsáveis pela violação da simetria de Lorentz do modelo em análise.

A diferença discutida acima pode ser vista na figura 3.2.

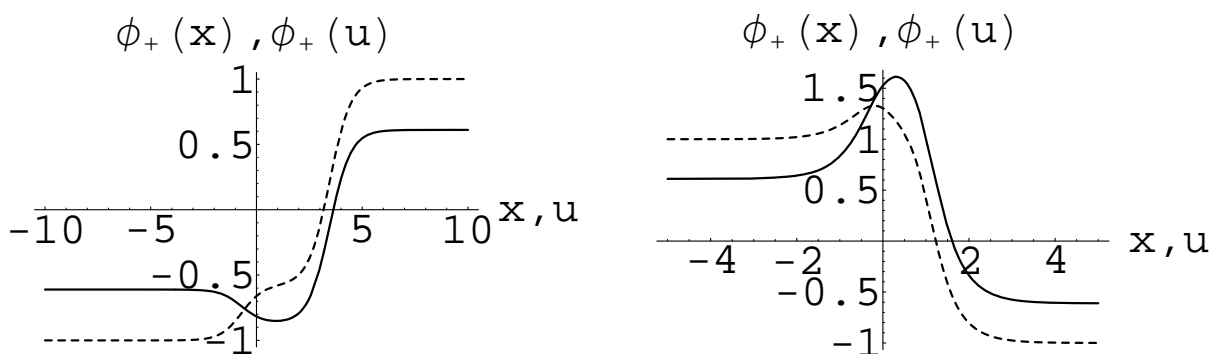


Figura 3.2: Soluções do tipo viajantes e do tipo estáticas para  $\lambda = \mu = 1$  e  $c_0 = -2,001$ . A linha pontilhada corresponde ao caso estático com  $\beta = 0,5$  e  $A = 1$ . A linha contínua corresponde ao caso viajante para  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $B = -1,5$  e  $A = 1$ .

### 3.3 Conclusão

Neste capítulo, mostramos que uma classe de sólitons viajantes em sistemas envolvendo violações da simetria de Lorentz pode ser determinada de maneira analítica. Devido ao fato de não haver mais a simetria de Lorentz, tais soluções aqui apresentadas não podem ser determinadas através de boosts de Lorentz provenientes de uma teoria estática. Mostramos que as soluções apresentadas são decorrentes de modelos não-lineares com dois campos escalares auto-interagentes, discutidas em [28]. Além disso, para o modelo estudado, conseguimos obter um conjunto completo de soluções que apresentam um limite crítico controlado pela escolha de uma constante arbitrária de integração.

## Capítulo 4

# Oscillons e Breathers em sistemas com violação das simetrias de Lorentz e CPT

Neste capítulo, discutimos o impacto da quebra da simetria de Lorentz sobre oscillons usuais, nos então chamados flat-top oscillons e nas soluções do tipo breathers. Nossa análise está voltada para um cenário rigorosamente demonstrado na literatura. Mostramos que a violação de Lorentz é responsável pela origem de um tipo de deformação da configuração, onde as configurações do campo se transformam em oscilatórias em uma região localizada próxima de seu valor máximo. Além disso, que a violação de Lorentz produz um desvio no oscillons ao longo da sua direção espacial, veremos que a mesma característica está presente no caso das soluções do tipo breathers. Também mostraremos que o efeito de uma violação de Lorentz nos oscillons flat-top é responsável por um colapso do flat-top. Por fim, encontraremos analiticamente a radiação emitida, este resultado indica que a amplitude da radiação emitida é controlada pelos parâmetros da quebra de Lorentz, de tal modo que o oscillons dentro deste cenário se torna mais estável que aqueles que são governados pela simetria de Lorentz. No entanto, veremos que mesmo neste caso, onde temos violação da simetria, tais oscillons ainda apresentam uma natureza de configurações com longo período de vida.

## 4.1 Introdução

Como mencionado anteriormente, o estudo de sistemas não-lineares tem sido uma área muito explorada ao longo dos últimos anos [7, 8]. De fato, tal limite não-linear é encontrado em muitos sistemas físicos atuais. Isto inclui, sistemas de matéria condensada, modelos em teorias de campos, cosmologia moderna e uma ampla quantidade de sistemas de domínio da Física [33]-[37]. Uma das razões deste crescente interesse é o fato de vários destes sistemas apresentarem um número contável de distintas configurações com valores de energia mínima degenerada. Em alguns casos a estrutura degenerada pode ser estudada através de modelos simples envolvendo campos escalares clássicos, onde o potencial utilizado para descrever o modelo envolve dois ou mais mínimos degenerados. Por exemplo, em duas ou mais dimensões espaciais, podemos descrever as chamadas paredes de domínio [36] conectando diferentes porções do espaço, onde os campos escalares se encontram em diferentes valores dos mínimos do potencial do modelo.

No contexto da teoria de campos é muito comum a presença de sólitons [33, 36], os quais são configurações de campos que apresentam uma forma localizada e invariante. Outro aspecto característico dos sólitons é sua capacidade de manter sua forma inalterada após colidirem com outros sólitons. Atualmente a presença destas configurações é muito bem entendida em uma grande variedade de modelos, apresentando ou não natureza topológica. Como exemplos, podemos citar os monopólos, texturas, cordas e kinks [34].

Uma importante característica de um amplo número de modelos não-lineares é a presença de configurações topologicamente estáveis, as quais preservam suas formas diante de pequenas perturbações. Entre os vários tipos de configurações de campos não-lineares, existe uma classe especialmente importante de soluções estáveis e dependentes do tempo, os chamados breathers, encontrados em modelos do tipo Sine-Gordon. Outra configuração de campo, também dependente do tempo, que possui sua estabilidade garantida por uma carga conservada são os chamados  $Q$ -balls, como batizado por [103] ou sólitons não-topológicos [104]. Porém, considerando o fato que numerosos sistemas físicos apresentam limites metaestáveis, uma outra classe de solução deve receber um importante destaque, são os usualmente chamados oscillons. Esta classe de soluções foi descoberta na década de 1970 por Bogolyubsky e Makhankov [105], e redescoberta posteriormente por Gleiser [107]. Aquelas soluções, apareceram durante o estudo da dinâmica das transições de fase de primeira ordem e em problemas envolvendo a nucleação de bolhas. Desde então, mais

e mais trabalhos foram dedicados ao estudo destes objetos [107]-[130].

Oscillons são configurações absolutamente gerais e são encontrados no modelo Abelian de Higgs  $U(1)$  [124], no modelo padrão  $SU(2) \times U(1)$  [113, 115], em modelos cosmológicos inflacionários [107, 116, 117], em modelos envolvendo axions [118], em cenários apresentando universos em expansão [114, 121, 126] e em sistemas envolvendo transições de fase [108, 120].

O aspecto usual do oscillon é tipicamente aquele em forma de sino, o qual oscila senoidalmente no tempo. No entanto, recentemente Amin e Shirokoff [126] demonstraram que dependendo da intensidade da constante de acoplamento do campo escalar auto-interagente, é possível observar oscillons com uma espécie de platô em seu topo. De fato, eles mostraram que esses novos oscillons são mais robustos que aqueles até então conhecidos na literatura. Assim, como uma consequência dos resultados encontrados os autores chamaram esta nova classe de configurações de oscillons flat-top.

Neste ponto é interessante destacar que Segur e Kruskal [106] demonstraram que em uma dimensão espacial, oscillons emitem radiação muito lentamente, garantindo um longo período de vida da configuração. Em trabalho recente, o cálculo da radiação emitida dos oscillons foi estendida para os casos em duas e três dimensões espaciais [129]. Outro resultado importante envolvendo a radiação emitida pelos oscillons, foi apresentado por Hertzberg [130]. Naquele trabalho, Hertzberg calculou a taxa de decaimento para oscillons quantizados, demonstrando que a taxa de decaimento quântica é muito distinta da taxa emitida classicamente.

Por outro lado, em 1989, Kostelecky e Samuel [61] motivados pelo fato das teorias de supercordas sugerirem que a simetria de Lorentz possa ser violada em altas energias, deram os primeiros passos nos estudos do problema das violações das simetrias de Lorentz e  $CPT$  (conjugação da carga-paridade-reversão temporal). Depois daquele trabalho pioneiro, uma grande estrutura teórica sobre violação das simetrias de Lorentz e  $CPT$  tem sido rigorosamente desenvolvida na literatura. Como exemplo de tais estudos, podemos citar os trabalhos de Colladay and Kostelecky [135], no qual os autores analisaram o impacto de violações das simetrias de Lorentz e  $CPT$  sobre o modelo padrão de física de partículas. Atualmente, um grande número de trabalhos considerando o impacto de algum tipo de quebra da simetria de Lorentz têm aparecido na literatura [131]-[142]. Um interessante sistema estudado levando em consideração o impacto da violação de Lorentz é o problema

de Aharonov-Bohm-Casher [131]. Neste caso, foi mostrado que a violação da simetria é responsável por levantar as degenerescências originais na ausência de campos magnéticos, mesmo para uma partícula neutra. Seguindo a linha de sistemas estudados envolvendo violação da simetria de Lorentz, com a introdução de um procedimento de redução dimensional apresentado na referência [132, 133], Casana, Carvalho e Ferreira [134] aplicaram o método apresentado por aqueles autores para investigar a redução dimensional do setor eletromagnético envolvendo uma violação do tipo *CPT*-par. No contexto da teoria de gauge, Boldo *et al.* [136], analisaram o problema da violação de Lorentz em conexão com modelos de gravitação. Efeitos da violação de Lorentz em neutrinos também tem sido uma área de intensos estudos [137].

Nos últimos anos, uma grande atenção tem sido dada para as investigações envolvendo defeitos topológicos na presença de violações das simetrias de Lorentz e *CPT*. [77, 78, 97, 80]. Vários trabalhos também têm sido feitos envolvendo monopólos e vórtices em cenários envolvendo quebras de simetrias [43, 80, 81]. Um exemplo relacionado ao estudo dos vórtices é apresentado em [43], neste estudo os autores mostraram que a violação de Lorentz permite um controle da extensão radial e da amplitude do campo magnético em vórtices do tipo Abrikosov-Nielsen-Olesen.

De fato, a invariância de Lorentz é a mais fundamental simetria do modelo padrão da física de partículas. Além disso, ela tem sido muito bem verificada em muitas medidas experimentais. Mas, é importante chamar a atenção que não estamos completamente certos que tal simetria, ou qualquer outra, sejam completamente exatas, pois isso envolve uma acurácia experimental muito alta. Esta nossa afirmação é encorajada pelo fato de que a maioria dos testes experimentais da invariância de Lorentz são feitos em baixas energias, em outras palavras, energias abaixo de 14 Tev. Assim, diante deste fato, podemos suspeitar que em altas energias a invariância de Lorentz possa ser quebrada. Como exemplo, em teorias de cordas existe a possibilidade de que possamos estar vivendo em um Universo o qual é governado por coordenadas não-comutativas [82]. Dentro deste cenário, foi mostrado na referência [83] que a invariância de Lorentz é quebrada.

Por outro lado, em um cenário cosmológico, a ocorrência de raios cósmicos de altas energias acima dos níveis de Greisen-Zatsepin-Kuzmin (GZK) [84], chamados eventos super GZK, têm sido encontrados em dados astrofísicos [85]. Este evento indica a possibilidade de uma violação de Lorentz [86].

O impacto da violação de Lorentz sobre o cenário cosmológico é muito importante, pois vários de seus pontos fracos podem ser facilmente esclarecidos através da violação de Lorentz. Por exemplo, foi mostrado por Bekenstein [87] que o problema da matéria escura está associado com uma violação de Lorentz na gravidade e na referência [88] a quebra da simetria de Lorentz também é utilizada para esclarecer o problema da energia escura. Nos dias atuais, a quebra da simetria de Lorentz é um fabuloso mecanismo para a descrição de muitos problemas e conflitos na cosmologia, tais como a baryogenesis [89], o campo magnético primordial [90], nucleosynthesis [91] e raios cósmicos [92].

No cenário inflacionário com violação de Lorentz, Kanno e Soda [93] demonstraram que a violação de Lorentz afeta a dinâmica do modelo inflacionário. Neste caso, aqueles autores mostraram que utilizando uma teoria que engloba campos escalares, vetororiais e tensoriais em um contexto envolvendo violação da simetria de Lorentz, as soluções exatas do período inflacionário são facilmente encontradas sem a necessidade da existência do potencial do inflaton. Portanto, a inflação está conectada com a violação de Lorentz.

Aqui, é conveniente para enfatizar que a inflação é o ingrediente fundamental para resolver os problemas do modelo padrão do universo em seus estágios iniciais. Sabemos que aproximadamente  $10^{-33}$  segundos após a inflação do Universo, o inflaton decaiu em radiação, onde quarks, léptons e fótons se acoplaram. Neste caso, a matéria bariônica foi impedida de formar-se. Portanto, aproximadamente  $1,388 \times 10^{12}$  segundos após o Big Bang, o Universo se resfriou o suficiente para permitir que fótons viajassem livremente através do Universo. Depois disso, a matéria tornou-se dominante no Universo.

Neste ponto, é importante destacar que o Universo pós-inflacionário é governado por campos escalares, onde interações não-lineares estão presentes. Uma importante linha de estudos dentro do contexto de sistemas não-lineares, é aquele onde configurações do tipo oscillons estão presentes. Nesta linha de estudos, foi apresentado na referência [143] que oscillons podem facilmente dominar o Universo pós-inflacionário. Nesta última referência, foi demonstrado que o Universo pós-inflacionário pode conter uma fase efetiva dominada por matéria, durante a qual ela é dominada por concentrações localizadas de campos de matéria. Além disso, em um trabalho muito recente [144], foi mostrado que oscillons podem dominar a densidade de matéria do Universo por um dado tempo. Desta maneira, como uma primeira motivação podemos pensar sobre os efeitos de uma violação da simetria de Lorentz sobre este cenário.

Assim, neste capítulo estamos interessados em responder às seguintes questões: Podem *oscillons* e *breathers* existir em cenários com violação da simetria de Lorentz? Se *oscillons* e *breathers* existem nestes cenários, como suas estruturas são alteradas? Além disso, o que acontece com o tempo de vida dos *oscillons* neste cenário?

Portanto, neste capítulo mostraremos que *oscillons* e *breathers* podem ser encontrados em cenários com violações da simetria de Lorentz, nossos desenvolvimentos estão guiados por teorias envolvendo violações de Lorentz que foram rigorosamente estudadas na literatura [135, 138], as quais atualmente servem como bases para estudar diversos sistemas físicos de interesse.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira. Na seção 4.2 apresentamos a descrição da densidade lagrangiana para um campo escalar real na presença de um cenário com violação da simetria de Lorentz. Na seção 4.3 calculamos as respectivas relações de comutação do grupo Poincaré no chamado modelo padrão estendido em  $1 + 1$  dimensões no espaço plano de Minkowski. Os desenvolvimentos para encontrar as equações de movimento são feitos na seção 4.4. O perfil dos *oscillons* usuais na presença da violação de Lorentz é analisado na seção 4.5. Na seção 4.6 iremos encontrar os chamados *flat-top oscillons* os quais violam a simetria de Lorentz. As soluções do tipo *breathers* são apresentadas na seção 4.7. Discutimos a questão da radiação emitida pelos *oscillons* na seção 4.8. Na seção 4.9 apresentamos os *oscillons* em uma teoria com dois campos escalares auto-interagentes. Finalmente, apresentamos nossas conclusões na seção 4.10.

## 4.2 Lagrangiana do modelo padrão estendido (MPE)

Nesta seção, apresentamos uma teoria envolvendo um campo escalar em  $3 + 1$  dimensões no espaço plano de Minkowski, mas aqui consideramos uma quebra da simetria de Lorentz. Em baixas energias, as simetrias de Lorentz e *CPT* do modelo padrão de física de partículas é experimentalmente bem suportado, mas em altas energias as teorias de supercordas sugerem que a simetria de Lorentz possa ser quebrada, neste contexto, a estrutura desenvolvida para estudar as violações de Lorentz e *CPT* é o então chamado modelo padrão estendido. Na descrição do modelo padrão estendido, a densidade de lagrangiana para um campo escalar real contendo violação de Lorentz (VL), a qual pode ser lida como uma versão simplificada do modelo de Higgs, é governada por [135, 138]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + \frac{1}{2}k^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi), \quad (4.1)$$

onde  $\varphi$  é um campo escalar real,  $k^{\mu\nu}$  é um tensor adimensional o qual controla o grau da violação de Lorentz e  $V(\varphi)$  é o potencial de auto-interação. É importante destacar que, a alguns anos atrás [77], esta densidade de lagrangiana foi usada para estudar estruturas de defeitos topológicos em cenários violando as simetrias de Lorentz e *CPT*. Naquele caso estudado, os autores mostraram que a violação das simetrias de Lorentz e *CPT* é responsável pela geração de uma assimetria entre defeitos e anti-defeitos. Esta situação foi mais tarde generalizada em [78]. Além disso, uma densidade de lagrangiana similar foi utilizada ao se estudar a questão da normalização da teoria escalar de Yukawa com violação de Lorentz [139]. Naquele caso, foi mostrado que uma teoria com VL envolvendo  $N$  campos escalares, interagindo através de uma interação do tipo  $\phi^4$ , pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_K = & \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_i)(\partial^\mu\varphi_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N K_{\mu\nu}^i\partial^\mu\varphi_i\partial^\nu\varphi_i - \frac{1}{2}\lambda^2\varphi_i^2 \\ & + \sum_{i=1}^N u_i^\beta\varphi_i\partial_\beta\varphi_i + \sum_{j=1}^N \varphi_i^2 v_j^\beta\partial_\beta\varphi_j - \frac{g}{4!}(\varphi_i^2)^2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Como um exemplo simples, os autores demonstraram para  $K_{\mu\nu}^i = K_{00}^i\delta_\mu^0\delta_\nu^0$  que a relação de dispersão para tal teoria é dada por  $E = \sqrt{p^2 - K_{00}^i(p^0)^2 + \lambda^2}$ , a qual implica em uma violação de Lorentz. Portanto, utilizando calculos explícitos, as correções quânticas na teoria acima foram estudados pelos autores daquele trabalho, onde os resultados revelaram que o modelo descrito pela densidade de lagrangiana (4.2) é renormalizável.

Retornando à equação (4.1), podemos escrever a densidade de lagrangiana na forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\nu} + k^{\mu\nu})\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi).$$

Neste caso, a métrica de Minkowsky é modificada de  $g^{\mu\nu}$  para  $\eta^{\mu\nu} + k^{\mu\nu}$ , a qual é responsável pela quebra da simetria de Lorentz [135, 138, 139, 140, 141]. Neste ponto é possível aplicar uma transformação linear apropriada da variável espacial  $x^\mu$ , no sentido de mapear a densidade de lagrangiana acima em uma forma do tipo invariante de Lorentz,

mas como resultado de tal transformação, os campos e constantes de acoplamento do potencial são alterados. Deste modo, as constantes de acoplamento e os campos são reescalados em função dos parâmetros  $k^{\mu\nu}$ .

Claramente, como um produto final, a lagrangiana com violação de Lorentz e aquela invariante de Lorentz, têm a mesma equação de movimento. A diferença fundamental entre estas duas equações de movimento surge do fato que as novas variáveis  $x^\mu$  carregam informações das violações de Lorentz através dos parâmetros  $k^{\mu\nu}$ . Em outras palavras, nas variáveis transformadas, o sistema mostra ser covariante (sob boosts das variáveis transformadas). Entretanto, como os acoplamentos resultantes não permanecem invariantes quando mudamos de um sistema de referência para outro, não existe uma invariância de Lorentz real. Por exemplo, tal comportamento deveria ser análogo a uma mudança do valor da carga elétrica quando se move a partir de um referencial inercial para outro, o que é proibido.

Na densidade de lagrangiana (4.1),  $k^{\mu\nu}$  é um tensor constante representado por uma matriz  $4 \times 4$ . O ponto fundamental sobre este tensor é o fato dele ser o agente responsável pela quebra da simetria de Lorentz. Assim, na representação matricial, escrevemos o tensor  $k^{\mu\nu}$  na forma

$$k^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} k^{00} & k^{01} & k^{02} & k^{03} \\ k^{10} & k^{11} & k^{12} & k^{13} \\ k^{20} & k^{21} & k^{22} & k^{23} \\ k^{30} & k^{31} & k^{32} & k^{33} \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

Em geral  $k^{\mu\nu}$  tem parâmetros arbitrários, mas é importante destacar que se esta matriz for real, simétrica, e possuir traço nulo, a simetria  $CPT$  é preservada [135, 138]. Outra questão importante e que devemos comentar é que sobre uma operação  $CPT$ ,  $\partial_\mu \rightarrow -\partial_\mu$ , o termo  $k^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi$  vai em  $k^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \rightarrow +k^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi$ . Assim, notamos que  $k^{\mu\nu}$  é sempre  $CPT$ -par, independentemente de suas propriedades. Além disso, o tensor  $k^{\mu\nu}$  deve ser simétrico no sentido de evitar uma contribuição nula.

Em um trabalho recente, Anacleto *et al.* [142] também analisaram um processo semelhante de quebra da simetria de Lorentz, onde o tensor  $k^{\mu\nu}$  foi usado para estudar o problema de buracos negros acústicos no modelo abeliano de Higgs com VL. Em outro trabalho [142] o tensor  $k^{\mu\nu}$  foi usado para estudar os efeitos de super-ressonância a partir de buracos negros em rotação com VL. Por fim, em um trabalho muito recente [97], foi

introduzido um modelo generalizado envolvendo dois campos escalares auto-interagentes em  $1 + 1$  dimensions apresentando um tensor constante e funções vetoriais, onde tanto o tensor quanto as funções são responsáveis por violar as simetrias de Lorentz e *CPT*. Naquele caso, foi encontrada de maneira analítica uma classe de sólitons viajantes em alguns sistemas.

Todavia, podemos encontrar sistemas com quebra da simetria de Lorentz, o qual possui um campo escalar adicional [141]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_1\partial^\mu\varphi_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_2\partial^\mu\varphi_2 + \frac{1}{2}k^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi_1\partial_\nu\varphi_1 \quad (4.4)$$

$$- \frac{m_1\varphi_1^2}{2} - \frac{m_2\varphi_2^2}{2} - V(\varphi_1, \varphi_2).$$

Na densidade de lagrangiana acima, temos um coeficiente diferente corrigindo a métrica, mas os coeficientes para violação de Lorentz não podem ser removidos da densidade de lagrangiana usando redefinições das variáveis ou dos campos, mostrando que efeitos observáveis da VL podem ser detectados na teoria acima. Portanto, as teorias envolvendo mais campos e interações permitem redefinições adicionais e efeitos observáveis.

### 4.3 Lagrangiana do MPE: Teoria com um campo escalar

Nesta seção, iremos trabalhar em  $1 + 1$  dimensões no espaço-tempo de Minkowski. Aqui, estudamos um modelo de campo escalar real na presença de um cenário com violação da simetria de Lorentz. A teoria que iremos estudar é descrita pela densidade de lagrangiana (4.1). Assim, para o caso em  $1 + 1$  dimensões, a densidade de lagrangiana correspondente adquire a forma escrita abaixo

$$\mathcal{L}_{1+1} = \frac{1}{2}\alpha_1(\partial_t\varphi)^2 - \frac{1}{2}\alpha_2(\partial_x\varphi)^2 + \frac{1}{2}\alpha_3\partial_t\varphi\partial_x\varphi - V(\varphi), \quad (4.5)$$

onde

$$\alpha_1 \equiv (1 + k^{00}), \alpha_2 \equiv (1 - k^{11}), \alpha_3 \equiv (k^{01} + k^{10}), \quad (4.6)$$

$$\partial_t \equiv \partial/\partial t, \partial_x \equiv \partial/\partial x.$$

Neste ponto, é importante destacar que a densidade de lagrangiana acima claramente não manifesta covariância. Além disso, é possível observar que a covariância é recuperada escolhendo  $k^{00} = k^{11} = 0$  e  $k^{01} = -k^{10}$  (ou  $k^{01} = k^{10} = 0$ ). Outras possibilidades que não representam uma VL são  $k^{00} = -k^{11}$  e  $k^{01} = -k^{10}$  (ou  $k^{01} = k^{10} = 0$ ).

Por outro lado, para o caso em análise, podemos facilmente construir a densidade de hamiltoniana correspondente

$$\mathcal{H} = \beta_1 \Pi^2 + \beta_2 (\partial_x \varphi)^2 + \beta_3 \Pi (\partial_x \varphi) + V(\varphi), \quad (4.7)$$

onde  $\beta_1 = 1/(2\alpha_1)$ ,  $\beta_2 = [2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3(\alpha_3 - 1)]/(4\alpha_1)$ ,  $\beta_3 = -\alpha_3/(2\alpha_1)$  e  $\Pi$  é o momento conjugado, o qual é dado por

$$\Pi = \alpha_1 \partial_t \varphi + (\alpha_3/2) \partial_x \varphi. \quad (4.8)$$

A partir de agora, vamos ver como a álgebra de Poincaré é modificada neste cenário. A idéia desta análise é mostrar que a invariância de Poincaré é quebrada. Em outras palavras, verificar como este cenário tem sua simetria de Lorentz violada. Portanto, para fazer isto escreveremos abaixo os três geradores da álgebra de Poincaré, a hamiltoniana  $H$ , o momento total  $P$  e o boost de Lorentz  $M$

$$H = \int dx \mathcal{H}, \quad (4.9)$$

$$P = \int dx \left[ \frac{\Pi(\partial_x \varphi)}{\alpha_1} - \frac{\alpha_3(\partial_x \varphi)^2}{2\alpha_1} \right], \quad (4.10)$$

$$M = \int dx \left\{ t \left[ \frac{\Pi(\partial_x \varphi)}{\alpha_1} - \frac{\alpha_3(\partial_x \varphi)^2}{2\alpha_1} \right] - x \mathcal{H} \right\}. \quad (4.11)$$

Com isto, podemos calcular as relações de comutação do grupo de Poincarè. Assim, após alguns cálculos envolvendo as relações de comutação usuais, não é difícil concluir que

$$[H, P] = -i \left( \frac{\alpha_3}{\alpha_1^2} \right) \int dx (\partial_x \varphi) (\partial_x \Pi), \quad (4.12)$$

$$[M, H] = -i \int dx \left( (4\beta_1\beta_2 + \beta_3^2) \Pi (\partial_x \varphi) \right. \quad (4.13)$$

$$\left. - \frac{\alpha_3}{\alpha_1^2} (\partial_x \varphi) (\partial_x \Pi) + 2\beta_2\beta_3 (\partial_x \varphi)^2 + 2\beta_1\beta_3 (\Pi)^2 \right),$$

$$[M, P] = -i \frac{H}{\alpha_1} + i \frac{\alpha_3}{2\alpha_1^2} \int dx \left( \Pi (\partial_x \varphi) \right. \quad (4.14)$$

$$\left. + x (\partial_x \varphi) (\partial_x \Pi) + \frac{\beta_3}{4\beta_1} (\partial_x \varphi)^2 \right).$$

A partir das relações acima, podemos observar que a álgebra de Poincarè não é fechada, uma vez que as relações de comutação não são recuperadas. Como uma consequência, neste cenário temos uma violação da simetria de Lorentz. Entretanto, é possível recuperar todas as relações de comutação fazendo  $k^{00} = k^{11} = 0$  e  $k^{01} = -k^{10}$  (ou  $k^{01} = k^{10} = 0$ ). Como um simples exemplo, fazendo  $k^{00} = k^{11} = 0$  e  $k^{01} = -k^{10}$  teremos

$$[H, P] = 0, [M, H] = -iP, [M, P] = -iH. \quad (4.15)$$

Neste ponto podemos verificar que, para o caso  $k^{00} = -k^{11}$  e  $k^{01} = -k^{10}$  (ou  $k^{01} = k^{10} = 0$ ), as relações de comutações (4.12)-(4.14) conduzem a

$$[H, P] = 0, [M, H] = -i\alpha_1 P, [M, P] = -iH/\alpha_1. \quad (4.16)$$

No entanto, no caso acima, podemos recuperar a álgebra usual de Poincarè usando a reescala  $P = \tilde{P}/\alpha_1$ . Deste modo, tais relações de comutação indicam que não existe VL para esta configuração tensorial.

Em resumo, a densidade de lagrangiana (4.5) apresenta uma dependência explícita

dos parâmetros  $k^{00}$ ,  $k^{11}$ ,  $k^{01}$  e  $k^{10}$ , os quais são responsáveis pela violação da simetria de Lorentz. Isto acontece devido ao fato de que a invariância de Poincaré não ser mais preservada, como podemos ver em (4.12)-(4.14).

## 4.4 Equação de movimento em cenários com violação de Lorentz: Teoria com um campo escalar

Nesta seção, estudaremos a equação de movimento na presença do cenário com VL apresentado na seção anterior. Aqui, nosso objetivo é estudar o caso no espaço-tempo de Minkowski em  $1 + 1$  -dimensões. Como uma consequência, estudaremos a teoria que é governada pela densidade de lagrangiana (4.5). Consequentemente, a correspondente equação de movimento clássica pode ser escrita como

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} - \alpha_2 \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x \partial t} + V_\varphi = 0, \quad (4.17)$$

onde  $V_\varphi \equiv \partial V / \partial \varphi$ . Note que a equação acima está carregando informações sobre a quebra da simetria da teoria em análise, tal informação é representada pelos parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ .

Com a finalidade de mostrar que a equação de movimento da teoria em análise nesta seção é de fato não invariante, aplicamos uma transformação envolvendo um boost de Lorentz na equação de movimento apresentada em (4.17). Então, ficamos com

$$q_1 \frac{\partial \varphi^2(x', t')}{\partial t'^2} - q_2 \frac{\partial \varphi^2(x', t')}{\partial x'^2} + q_3 \frac{\partial \varphi^2(x', t')}{\partial x' \partial t'} + V_\varphi = 0, \quad (4.18)$$

onde

$$x' = \gamma(x - vt), t' = \gamma(t - vx/c^2), \gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad (4.19)$$

e

$$\begin{aligned}
q_1 &= \gamma^2 \left( \frac{\alpha_1 c^2 - \alpha_2 v^2 - \alpha_3 c v}{c^4} \right), \\
q_2 &= \gamma^2 \left( \frac{-\alpha_1 v^2 + \alpha_2 c^2 + \alpha_3 c v}{c^2} \right), \\
q_3 &= \gamma^2 \left( \frac{-2v\alpha_1 c + 2c\alpha_2 v - \alpha_3 (c^2 + v^2)}{c^3} \right).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Seguindo a demonstração acima, podemos ver claramente que esta equação não é invariante sob transformações de boost. Por exemplo, podemos concluir que as possibilidades  $[k^{00} = -k^{11}, k^{01} = -k^{10}]$  ou  $[k^{00} = -k^{11}, k^{01} = k^{10} = 0]$  resultam nas equações

$$\frac{\alpha_1}{c^2} \frac{\partial \varphi^2(x, t)}{\partial t^2} - \alpha_1 \frac{\partial \varphi^2(x, t)}{\partial x^2} + V_\varphi = 0, \tag{4.21}$$

$$\frac{\alpha_1}{c^2} \frac{\partial \varphi^2(x, t)}{\partial t^2} - \alpha_1 \frac{\partial \varphi^2(x, t)}{\partial x^2} + V_\varphi = 0. \tag{4.22}$$

Podemos notar que não há modificação das equações, em outras palavras, as possibilidades  $[k^{00} = -k^{11}, k^{01} = -k^{10}]$  ou  $[k^{00} = -k^{11}, k^{01} = k^{10} = 0]$  não representam genuínos fatores para causar uma violação de Lorentz na teoria.

Agora, no intuito de resolver analiticamente a equação diferencial (4.17) e simultaneamente preservar a quebra da simetria de Lorentz, devemos desacoplar a equação. Neste sentido, aplicamos a rotação

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ T \end{pmatrix}, \tag{4.23}$$

onde  $\theta$  é um ângulo arbitrário de rotação. Assim, a equação (4.17) nas novas variáveis é reescrita como

$$h_1 \frac{\partial^2 \varphi(X, T)}{\partial T^2} - h_2 \frac{\partial^2 \varphi(X, T)}{\partial X^2} + V_\varphi = 0, \tag{4.24}$$

com as definições

$$\begin{aligned}\theta &\equiv -\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2}\right), \\ h_1 &\equiv \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + [\alpha_3^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)^2] \cos(2\theta)}{2(\alpha_1 + \alpha_2)}, \\ h_2 &\equiv \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 + [\alpha_3^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)^2] \cos(2\theta)}{2(\alpha_1 + \alpha_2)}.\end{aligned}\tag{4.25}$$

Note que o ângulo de rotação  $\theta$  foi escolhido com a finalidade de eliminar a dependência do termo  $\partial^2\varphi/\partial X\partial T$ . Agora, aplicando as dilatações  $T = \sqrt{h_1}\Upsilon$  e  $X = \sqrt{h_2}Z$ , temos

$$\frac{\partial^2\varphi(Z, \Upsilon)}{\partial \Upsilon^2} - \frac{\partial^2\varphi(Z, \Upsilon)}{\partial Z^2} + V_\varphi = 0.\tag{4.26}$$

A partir de agora, usaremos a equação acima para descrever o perfil de oscillons e breathers. Neste ponto, é de grande importância destacar que a equação acima carrega todas as informações sobre a violação da simetria de Lorentz da teoria. De fato, o campo escalar  $\varphi(Z, \Upsilon)$  carrega toda a dependência dos parâmetros que quebra a simetria de Lorentz. Esta informação surge a partir do fato que as novas variáveis  $Z$  e  $\Upsilon$  apresentarem dependência explícita dos elementos  $k^{\mu\nu}$ .

## 4.5 Oscillons usuais com violação de Lorentz: Teoria com um campo escalar

Nesta seção, estudaremos uma teoria envolvendo um campo escalar real, a qual possibilitará encontrar oscillons usuais na presença do cenário com VL descrito nas duas seções anteriores. Atualmente, o perfil de um oscillon usual é aquele em que a estrutura espacial é localizada no espaço e que na maioria dos casos é governado por uma função do tipo  $sech(x)$ . Por outro lado, a estrutura temporal é do tipo  $\cos(t)$ , a qual é periódica. A teoria que iremos estudar é governada pela densidade de lagrangiana (4.5). Neste caso, mostramos na última seção que a equação de movimento correspondente, após algumas manipulações, pode ser representada pela equação (4.26). Desta maneira, com a finali-

dade de analisar oscillons usuais nesta situação, escolhemos um potencial do tipo  $\varphi^6$ , o qual pode é escrito como

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{4}\varphi^4 + \frac{g}{6}\varphi^6, \quad (4.27)$$

onde  $g$  representa uma constante de acoplamento. É importante mencionar que utilizaremos o regime onde  $g \gg 1$ , pois neste regime temos a garantia de que o potencial apresenta pelo menos um ponto de mínima energia.

Visto que nosso interesse primordial é encontrar soluções periódicas e localizadas, é muito útil e também usual no estudo de oscillons introduzir as seguintes transformações de escala em  $t$  e  $x$

$$\tau = \omega\Upsilon, \quad y = \epsilon Z, \quad (4.28)$$

com  $\omega = \sqrt{1 - \epsilon^2}$ . Assim, a equação de movimento (4.26) torna-se

$$\omega^2 \frac{\partial^2 \varphi(y, \tau)}{\partial \tau^2} - \epsilon^2 \frac{\partial^2 \varphi(y, \tau)}{\partial y^2} + \varphi - \varphi^3 + g\varphi^5 = 0. \quad (4.29)$$

Desta maneira ficamos diante de uma excelente posição para investigar o perfil de oscillons usuais. Mas é importante comentar que a questão fundamental em nossa análise é o fato da teoria estar carregando informações da quebra da simetria de Lorentz. Podemos facilmente observar este fato inspecionando a equação de movimento acima, a qual está trazendo implicitamente informações sobre os termos da VL através das variáveis  $y$  e  $\tau$ . Novamente chamamos a atenção para o caso onde recuperamos a invariância de Lorentz, ou seja, fazendo  $k^{00} = k^{11} = 0$  e  $k^{01} = -k^{10}$  (ou  $k^{01} = k^{10} = 0$ ). Neste caso, encontraremos os oscillons usuais apresentados até então na literatura.

O próximo passo é expandir o campo  $\varphi$  como

$$\varphi(y, \tau) = \epsilon\varphi_1(y, \tau) + \epsilon^3\varphi_3(y, \tau) + \epsilon^5\varphi_5(y, \tau) + \dots \quad (4.30)$$

Pode-se notar que a expansão acima apresenta somente potências ímpares da constante  $\epsilon$ , isto ocorre porque a equação (4.29) é ímpar em  $\varphi$  [121]. Agora, substituímos a expansão do campo escalar dada acima na equação de movimento (4.29). Esta substituição resulta em várias equações diferenciais acopladas, as quais possuem como coeficientes as diversas ordens em  $\epsilon$ , as quais devem ser nulas, ou seja, a substituição leva a uma estrutura do

tipo

$$\epsilon e q_1 + \epsilon^3 e q_2 + \epsilon^5 e q_3 + \epsilon^7 e q_4 + \dots = 0. \quad (4.31)$$

Seguindo os desenvolvimentos usuais para encontrar configurações de oscillons, devemos considerar que a expansão (4.30) é válida para regimes de pequenas amplitudes, com  $\epsilon \ll 1$ . Então, como consequência deste desenvolvimento, apenas o campo  $\varphi_1$  terá um papel fundamental para descrever o perfil do oscillon. Diante deste fato, devemos considerar apenas as equações  $e q_1$  e  $e q_2$ , as quais possuem as formas

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2} + \varphi_1 = 0, \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \tau^2} + \varphi_3 - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - \varphi_1^3 = 0. \quad (4.33)$$

Portanto, a solução da equação (4.32) é da forma

$$\varphi_1(y, \tau) = \Phi(y) \cos(\tau), \quad (4.34)$$

Aqui chamamos a atenção para o fato da solução ser suave na origem e anular-se quando  $y$  torna-se infinitamente grande.

A fim de encontrar a solução de  $\Phi(y)$ , vamos substituir a solução obtida para  $\varphi_1(y, \tau)$  na equação (4.33). Deste modo, chegamos a

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \tau^2} + \varphi_3 = \left( \frac{d^2 \Phi}{dy^2} - \Phi + \frac{3}{4} \Phi^3 \right) \cos(\tau) + \frac{1}{4} \Phi^3 \cos(3\tau). \quad (4.35)$$

Resolvendo a equação acima, encontraremos um termo que será linear na variável  $\tau$ , resultando em uma solução não periódica. Como estamos interessados em soluções periódicas no tempo, para evitar que o termo linear em  $\tau$  apareça na solução, devemos impor que

$$\frac{d^2 \Phi}{dy^2} - \Phi + \frac{3}{4} \Phi^3 = 0. \quad (4.36)$$

Neste ponto, verificamos que a equação acima pode ser integrada, resultando em

$$\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)^2 + U(\Phi) = E, \quad (4.37)$$

onde  $U(\Phi) = -\Phi^2 + (3/8)\Phi^4$ . Para garantir a presença de soluções solitônicas, devemos impor na equação acima que  $E$  seja igual a zero. Esta condição permitirá que a configuração do campo vá assintoticamente para o vácuo do potencial  $U(\Phi)$ . Com isso, resolvendo a equação acima com  $E = 0$ , encontraremos

$$\Phi(y) = \sqrt[4]{\frac{8}{3}}[(y)]^{1/2}. \quad (4.38)$$

Como podemos ver, até a ordem  $\mathcal{O}(\epsilon)$ , a correspondente solução para o campo nas variáveis originais é dada por

$$\begin{aligned} \varphi_{osc}(x, t) = & \epsilon \sqrt[4]{\frac{8}{3}} \left( \sqrt{\left[ \frac{\epsilon[x \cos(\theta) + t \sin(\theta)]}{\sqrt{h_2}} \right]} \right) \\ & \times \cos \left[ \frac{\omega[-x \sin(\theta) + t \cos(\theta)]}{\sqrt{h_1}} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (4.39)$$

O perfil da solução acima para alguns valores dos parâmetros  $k^{\mu\nu}$  está plotado na figura 4.1. Na figura 4.1 vemos o perfil dos oscillons usuais na presença da violação da simetria de Lorentz. Neste caso, podemos checar que os parâmetros responsáveis pela VL causam um tipo de deformação na configuração, onde a solução torna-se oscilatória em uma região localizada próxima ao seu valor máximo. Além disso, no sentido temporal, é possível reparar que a VL produz um deslocamento do oscillon ao longo da direção espacial. Neste caso, chamaremos esta nova configuração como "oscillons envelopados", uma vez que em  $t = 0$  a nova configuração está contida, "envelopada", pelo oscillon com simetria de Lorentz.

Contudo, se quisermos recuperar aos oscillons com simetria de Lorentz, é necessário impor que  $k^{00} = k^{11} = 0$  e  $k^{01} = -k^{10}$  (ou  $k^{01} = k^{10} = 0$ ).

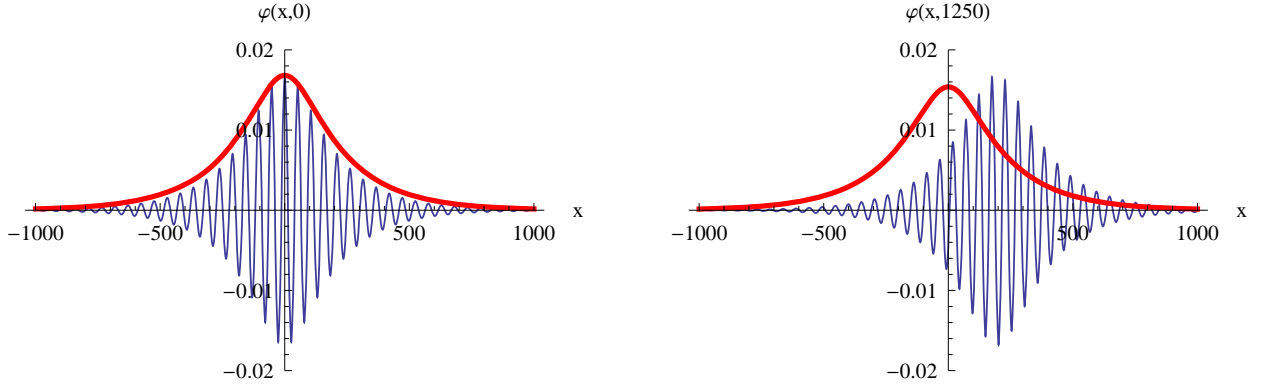


Figura 4.1: Perfil dos oscillons usuais em 1 + 1-dimensões com quebra das simetrias de Lorentz e  $CPT$  para  $t = 0$  (esquesda) e  $t = 1250$  (direita) com  $\epsilon = 0.01$ . A linha mais fina corresponde ao caso com  $k_{00} = 0.12$ ,  $k_{11} = 0.30$ ,  $k_{01} = 0.27$  e  $k_{10} = 0.21$ . A linha mais grossa corresponde ao caso com  $k_{\mu\nu} = 0$ .

## 4.6 Flat-top oscillons com violação de Lorentz: Teoria com um campo escalar

A alguns anos atrás uma nova classe de oscillon, a qual é caracterizada por um tipo de platô em seu topo, foi apresentada por Amin e Shirokoff [126]. Naquele trabalho, os autores mostraram que esta configuração tem um impacto importante na dinâmica de um Universo em expansão. Assim, nesta seção, descreveremos o impacto da VL sobre Flat-Top oscillons. Mais uma vez, estudaremos o caso em 1 + 1-dimensões, onde a equação clássica de movimento é dada por (4.26). O potencial que utilizaremos para estudar tal cenário é aquele representado em (4.27).

A partir de agora, iniciaremos um ataque direto ao problema de encontrar os chamados flat-top oscillons. De maneira análoga ao procedimento apresentado em [126], introduzimos um campo escalar reescalado por  $\varphi(Z, \Upsilon) = \phi(y, \tau)/\sqrt{g}$ , onde  $Z = \sqrt{g}y$ ,  $\tau = \varpi\Upsilon$  e  $\varpi = \sqrt{1 - \alpha^2/g}$ . É importante destacar que a constante  $\alpha^2$  é responsável pela mudança na frequência, sua presença vem do potencial não-linear. Com isso, não é difícil concluir que a equação clássica de movimento pode ser reescrita da forma

$$(\partial_\tau^2 \phi + \phi) + g^{-1}[-\alpha^2 \partial_\tau^2 \phi - \partial_y^2 \phi - \phi^3 + \phi^5] = 0. \quad (4.40)$$

Então, poderemos investigar o impacto da violação da simetria de Lorentz sobre os

chamados flat-top oscillons, pois o campo  $\phi$  novamente está carregando as informações sobre a VL através dos parâmetros  $k^{\mu\nu}$ . Para fazer esta investigação, começamos expandindo o campo escalar  $\phi$  da seguinte maneira

$$\phi(y, \tau) = \phi_1(y, \tau) + g^{-1}\phi_3(y, \tau) + \dots \quad (4.41)$$

Se substituirmos a expansão do campo escalar mostrada acima na equação de movimento (4.40), e coletarmos os termos em ordem  $\mathcal{O}(1)$  e  $\mathcal{O}(g^{-1})$ , encontramos

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \tau^2} + \phi_1 = 0, \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial \tau^2} + \phi_3 - \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} - \phi_1^3 + \phi_1^5 = 0. \quad (4.43)$$

Portanto, a solução da equação (4.42) é da forma

$$\phi_1(y, \tau) = \Psi(y) \cos(\tau), \quad (4.44)$$

Com o intuito de encontrar a solução de  $\Psi(y)$ , vamos substituir a solução obtida para  $\phi_1(y, \tau)$  na equação (4.43). Assim, concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial \tau^2} + \phi_3 &= \left( \frac{d^2 \Psi}{dy^2} - \alpha^2 \Psi + \frac{3}{4} \Psi^3 - \frac{5}{8} \Psi^5 \right) \cos(\tau) \\ &+ \left( \frac{3}{4} \Psi^3 - \frac{5}{16} \Psi^5 \right) \cos(3\tau) - \frac{\Psi^5}{16} \cos(5\tau). \end{aligned} \quad (4.45)$$

cuja solução pode ser escrita da forma

$$\begin{aligned} \phi_3(y, \tau) &= \frac{1}{8} [4G(y) - 2H(y) + 8c_1] \cos(\tau) \\ &- H(y) \cos(3\tau) + 4[G(y)\tau + 2c_2] \sin(\tau), \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde definimos  $G(y) \equiv \left( \frac{d^2 \Psi}{dy^2} - \alpha^2 \Psi + \frac{3}{4} \Psi^3 - \frac{5}{8} \Psi^5 \right)$  e  $H(y) \equiv \left( \frac{3}{4} \Psi^3 - \frac{5}{16} \Psi^5 \right)$ . Além disso,

$c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias de integração.

Mais uma vez a solução da função  $\phi_3$  terá um termo linear na variável  $\tau$ , resultando em uma solução não-periódica, e estamos interessados em soluções em são periódicas no tempo. Portanto, devemos impor que  $G(y)$  seja igual a zero. Como consequência, temos

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} = \left( \alpha^2\Psi - \frac{3}{4}\Psi^3 + \frac{5}{8}\Psi^5 \right), \quad (4.47)$$

Neste ponto, podemos verificar que a equação acima possui o mesmo perfil da equação apresentada na referência [126]. Deste modo, esta equação pode ser integrada, resultando em

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\Psi}{dy} \right)^2 + U(\Psi) = E, \quad (4.48)$$

onde  $U(\Psi) = -(1/2)\alpha^2\Psi^2 + (3/16)\Psi^4 - (5/48)\Psi^6$ . Na equação acima devemos fazer  $E = 0$ , pois nosso interesse é determinar soluções localizadas. Além disso, com a imposição desta condição a configuração do campo irá assintoticamente ao vácuo do potencial  $U(\Psi)$ . Por outro lado, também é usual impor que o perfil de  $\Psi(y)$  seja suave em  $y = 0$ , tornando-se necessário fazer  $d\Psi(0)/dy = 0$ . Então, a partir destas imposições, teremos que  $E = U(\Psi_0) = 0$ , a qual implica em

$$\alpha^2 = \frac{3}{8}\Phi_0^2 - \frac{5}{24}\Phi_0^4, \quad (4.49)$$

com  $\Psi_0 \equiv \Psi(0)$ . Assim, resolvendo a equação acima em  $\Psi_0$ , encontramos um valor crítico  $a \leq \alpha_c = \sqrt{27/160}$ . Acima deste valor crítico,  $\Psi_0$  torna-se imaginário.

Agora, deveremos resolver a equação (4.48) com  $E = 0$ . Neste caso, temos que

$$\frac{d\Psi}{\sqrt{\alpha^2\Psi^2 - \frac{3}{8}\Psi^4 + \frac{5}{24}\Psi^6}} = dy. \quad (4.50)$$

Resolvendo equação acima, chegamos a

$$\Psi(y) = \frac{(u\sqrt[4]{4vu})}{\sqrt{2\sqrt{v} + \cosh[2y\sqrt{uv}(\alpha_c^2 - \alpha^2)]}}, \quad (4.51)$$

onde  $v = 27/[160(\alpha_c^2 - \alpha^2)]$  e  $u = (v - 1)/v$ .

Como podemos ver, até a ordem  $\mathcal{O}(1)$ , a solução correspondente para o campo nas

variáveis originais é dada por

$$\varphi_{FT}(x, t) = \tag{4.52}$$

$$\frac{u\sqrt{4vu}}{\sqrt{2g\sqrt{v} + g \cosh \left\{ \frac{2[x \cos(\theta) + t \operatorname{sen}(\theta)]\sqrt{uv(\alpha_c^2 - \alpha^2)}}{\sqrt{gh_2}} \right\}}} \times \cos \left\{ \frac{\varpi[-x \operatorname{sen}(\theta) + t \cos(\theta)]}{\sqrt{h_1}} \right\} + \mathcal{O}(g^{-3/2}).$$

O perfil da solução acima está plotada na figura 4.2. Nesta figura vemos o perfil do flat-top oscillon sobre a influência da VL. Neste caso, podemos verificar que a VL é responsável por um controle da largura do platô do oscillon. Então, medindo a largura do oscillon somos capazes de determinar a existência e o grau da quebra de simetria. Na figura 4.3 vemos o perfil típico do flat-top oscillon.

Por outro lado, o efeito da quebra de simetria sobre a densidade de energia faz com que a densidade de energia se torne cada vez mais localizada ao redor da origem.

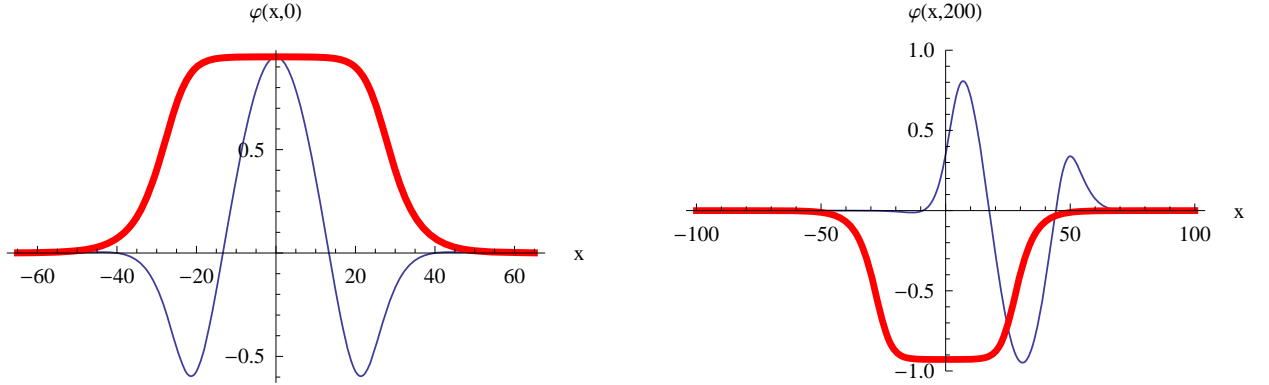


Figura 4.2: Perfil dos Flat-Top oscillons em 1 + 1-dimensões com quebra da simetria de Lorentz para  $t = 0$  (esquerda) e  $t = 200$  (direita) com  $g = 5$ . A linha fina corresponde ao caso com  $k_{00} = 0.12$ ,  $k_{11} = 0.30$ ,  $k_{01} = 0.27$  e  $k_{10} = 0.21$ . A linha mais grossa corresponde ao caso com  $k_{\mu\nu} = 0$ .

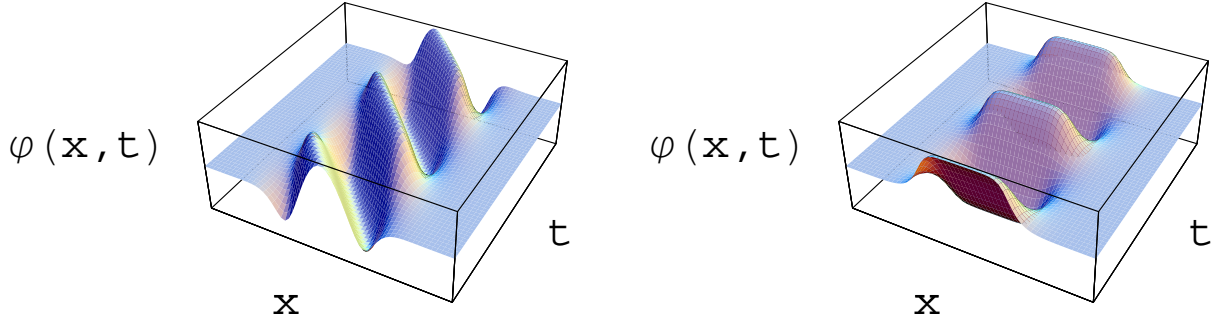


Figura 4.3: A figura da esquerda representa o perfil da solução dos Flat-top oscillons com quebra da simetria de Lorentz. A figura da direita é o perfil das soluções dos Flat-top oscillons sem violação da simetria de Lorentz.

## 4.7 Breathers com violação da simetria de Lorentz: Teoria com um campo escalar

Nesta seção, estudaremos o perfil de um breather em 1+1 -dimensões no espaço-tempo de Minkowski na presença do cenário com VL descrito na seção 4.2. Novamente, usaremos a equação clássica de movimento (4.26). As configurações de breathers surgem a partir do modelo de sine-Gordon

$$V(\varphi) = \frac{\gamma}{\beta}[1 - \cos(\beta\varphi)]. \quad (4.53)$$

Um ponto importante a respeito do modelo de sine-Gordon é que ele é invariante sob a transformação  $\varphi \rightarrow \varphi + 2n\pi$ , onde  $n$  é um número inteiro. Neste caso, a equação clássica de movimento é

$$\frac{\partial^2 \varphi(Z, \Upsilon)}{\partial \Upsilon^2} - \frac{\partial^2 \varphi(Z, \Upsilon)}{\partial Z^2} + \gamma \sin(\beta\varphi) = 0. \quad (4.54)$$

A equação acima pode ser resolvida através do método de espalhamento inverso [145]. Assim, após alguns cálculos diretos, concluímos que a solução do breather é dada por

$$\varphi_B(Z, \Upsilon) = \frac{4}{\beta} \arctan \left[ \frac{\sqrt{\gamma - w^2} \sin(w\Upsilon)}{w \cosh(Z\sqrt{\gamma - w^2})} \right], \quad (4.55)$$

onde  $w$  é a frequência de oscilação e descreve diferentes breathers. Na figura 4.4 mostramos o perfil da solução apresentada acima.

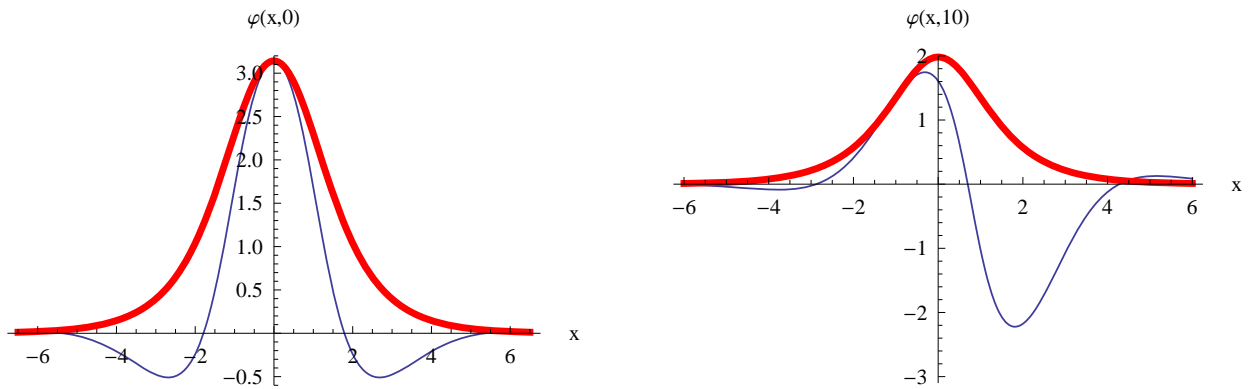


Figura 4.4: Breathers em 1 + 1-dimensões com VL para  $t = 0$  (esquerda) e  $t = 10$  (direita) com  $v = 2$ ,  $w = 1$ ,  $\beta = 1$ . Alinha fina corresponde ao caso com  $k_{00} = 0.28$ ,  $k_{11} = 0.30$ ,  $k_{01} = 0.27$  e  $k_{10} = 0.37$ . A linha grossa corresponde ao caso com  $k_{\mu\nu} = 0$ .

## 4.8 Radiação de oscillons com violação da simetria de Lorentz: Teoria com um campo escalar

Uma importante característica dos oscillons é sua emissão de radiação. Através de um trabalho pioneiro Segur e Kruskal [106] mostraram que oscillons em uma dimensão espacial decaem emitindo radiação. Recentemente, os cálculos da radiação emitida em duas e três dimensões espaciais foram feitas em [129]. Por outro lado, em um trabalho recente feito por Hertzberg [130], os efeitos da radiação quântica emitida por oscillons foram analisadas, onde mostrou-se que o caso quântico é muito distinto do clássico. É importante destacar que aquele autor mostrou que a amplitude da radiação clássica emitida pelos oscillons, pode ser encontrada usando a amplitude da transformada de Fourier da estrutura espacial do oscillon.

Assim, nesta seção, determinaremos a radiação emitida pelos oscillons apresentados nas seções anteriores, os quais apresentam violações da simetria de Lorentz. Aqui, vamos estabelecer um método em 1 + 1 dimensões espaciais que permitirá calcular a radiação de oscillons em teorias que apresentam VL. Para desenvolver o método, seguiremos um procedimento semelhante ao apresentado em [130]. Então, iniciaremos sugerindo que a solução da equação clássica de movimento possa ser escrita na seguinte forma

$$\varphi_{sol}(x, t) = \varphi_{osc}(x, t) + \eta(x, t), \quad (4.56)$$

onde  $\varphi_{osc}(x, t)$  é a solução do oscillon e  $\eta(x, t)$  representa uma pequena correção. Agora, substituindo a decomposição do campo escalar da acima na equação de movimento (4.17), encontraremos

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \frac{\partial^2 \varphi_{osc}}{\partial t^2} - \alpha_2 \frac{\partial^2 \varphi_{osc}}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2 \varphi_{osc}}{\partial x \partial t} + \alpha_1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \\ & - \alpha_2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} + U(\varphi_{osc}, \eta) = 0, \end{aligned} \quad (4.57)$$

onde  $U(\varphi_{osc}, \eta)$  é uma função que depende da forma do potencial  $V_{\varphi_{sol}}(\varphi_{sol})$ . Com a finalidade de desacoplar a equação acima, aplicaremos a rotação (4.23) seguida das dilatações  $T = \sqrt{h_1} \Upsilon$  e  $X = \sqrt{h_2} Z$ . Assim, chegamos em

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi_{osc}(Z, \Upsilon)}{\partial \Upsilon^2} - \frac{\partial^2 \varphi_{osc}(Z, \Upsilon)}{\partial Z^2} + \frac{\partial^2 \eta(Z, \Upsilon)}{\partial \Upsilon^2} \\ & - \frac{\partial^2 \eta(Z, \Upsilon)}{\partial Z^2} + U(\varphi_{osc}, \eta) = 0. \end{aligned} \quad (4.58)$$

A partir da equação acima é possível encontrar a solução para  $\eta(Z, \Upsilon)$ . Devemos lembrar que a função  $\eta(Z, \Upsilon)$  carrega as informações da quebra da simetria através da dependência nos parâmetros  $k^{\mu\nu}$ . Nosso interesse é investigar o modelo dado por (4.27). Então,  $U(\varphi_{osc}, \eta)$  tem a forma

$$\begin{aligned} U(\varphi_{osc}, \eta) &= \varphi_{osc} + \eta - \varphi_{osc}^3 - \eta^3 + 3\varphi_{osc}^2 \eta + 3\varphi_{osc} \eta^2 \\ &+ g(\varphi_{osc}^5 + \eta^5 + 10\varphi_{osc}^2 \eta^3 + 10\varphi_{osc}^3 \eta^2 \\ &+ 5\varphi_{osc} \eta^4 + 5\varphi_{osc}^4 \eta). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Como  $\eta$  representa uma pequena correção, suporemos que os termos não-lineares  $\eta^2$ ,  $\eta^3$ ,  $\eta^4$ ,  $\eta^5$  e os termos paramétricos  $3\eta\varphi_{osc}^2$ ,  $5g\eta\varphi_{osc}^4$  possam ser desprezados. O motivo de também desprezarmos os termos paramétricos vem do fato de estarmos trabalhando em um regime assintótico, onde  $\varphi_{osc}$  também é muito pequeno. Neste regime, a equação

(4.58) irá adquirir a seguinte forma

$$\frac{\partial^2 \eta(Z, \Upsilon)}{\partial \Upsilon^2} - \frac{\partial^2 \eta(Z, \Upsilon)}{\partial Z^2} + \eta(Z, \Upsilon) = -J(Z, \Upsilon), \quad (4.60)$$

onde

$$J(Z, \Upsilon) = \frac{\partial^2 \varphi_{osc}(Z, \Upsilon)}{\partial \Upsilon^2} - \frac{\partial^2 \varphi_{osc}(Z, \Upsilon)}{\partial Z^2} \quad (4.61)$$

$$+ \varphi_{osc}(Z, \Upsilon) - \varphi_{osc}^3(Z, \Upsilon) + g\varphi_{osc}^5(Z, \Upsilon).$$

Podemos utilizar a transformada de Fourier para resolver a equação diferencial (4.60), onde  $J(Z, \Upsilon)$  atua como uma fonte. Com isto em mente, escrevemos abaixo as transformadas de Fourier

$$\eta(R, w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dZ d\Upsilon \eta(Z, \Upsilon) \quad (4.62)$$

$$\times \exp[-i(RZ - w\Upsilon)],$$

$$J(R, w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dZ d\Upsilon J(Z, \Upsilon) \quad (4.63)$$

$$\times \exp[-i(RZ - w\Upsilon)].$$

Então, temos a solução correspondente

$$\eta(Z, \Upsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dR dw \eta(R, w) \quad (4.64)$$

$$\times \exp[i(RZ - w\Upsilon)],$$

onde

$$\eta(R, w) = -\frac{J(R, w)}{R^2 - (w^2 + 1)}. \quad (4.65)$$

Através do desenvolvimento acima é possível encontrar o campo de radiação para os

oscillons. Além disso, como uma consequência do método, a expansão dos oscillons deve ser truncada.

### 4.8.1 8.1. Radiação dos Oscillons Usuais com VL: Teoria para um campo escalar

Nesta subseção estudaremos a radiação emitida pelos oscillons usuais no cenário com quebra da simetria de Lorentz. Neste caso, a expansão do oscillon deve ser truncada em ordem  $N$ , da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \varphi(y, \tau) = & \epsilon\varphi_1(y, \tau) + \epsilon^3\varphi_3(y, \tau) + \epsilon^5\varphi_5(y, \tau) \\ & + \dots + \epsilon^N\varphi_N(y, \tau). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Como exemplo, consideremos o caso com  $N = 1$ . Este é o caso onde a configuração do campo corresponde ao oscillon

$$\varphi_{osc}(y, \tau) = \epsilon\varphi_1(y, \tau). \quad (4.67)$$

Substituindo (4.67) em (4.61), obtemos

$$J(Z, \Upsilon) = \left( \sqrt[4]{\frac{8}{3}} \right) \epsilon^3 [sech(\epsilon Z)]^{3/2} \cos(3\omega\Upsilon). \quad (4.68)$$

Assim, para  $N = 1$  podemos resolver facilmente a integral (4.64), a qual permite encontrar  $\eta(Z, \Upsilon)$ . Portanto, podemos generalizar o resultado para  $N$  substituindo a expansão (4.66) em (4.61) e usando a equação diferencial (4.29). Após alguns cálculos, o resultado é

$$J(Z, \Upsilon) = C_N \epsilon^{N+2} [(\epsilon Z)]^{N+1/2} \cos(\bar{n}\omega\Upsilon) + \dots, \quad (4.69)$$

onde  $C_N$  são coeficientes constantes. Por exemplo, para  $N = 1$  temos  $C_1 = \sqrt[4]{8/3}$ . O

próximo passo é calcular  $\eta(Z, \Upsilon)$ . Utilizando (4.64) concluímos que

$$\begin{aligned} \eta(Z, \Upsilon) &= \frac{\pi\sqrt{\pi}C_N \epsilon^{N+2}}{k_{rad}} \cos(\omega_{rad}\Upsilon) \\ &\times \text{sen}(k_{rad}Z) \int dZ(\epsilon Z)]^{N+1/2} \cos(k_{rad}Z). \end{aligned} \quad (4.70)$$

onde

$$\omega_{rad} = \bar{n}\omega, \quad k_{rad} = \sqrt{\omega_{rad}^2 - 1}. \quad (4.71)$$

Na expressão (4.70), podemos notar que existe uma radiação sendo emitida pela configuração a qual apresenta uma amplitude descrita pela integral

$$\begin{aligned} A(k_{rad}) &= \frac{\pi\sqrt{\pi}C_N \epsilon^{N+2}}{k_{rad}} \\ &\times \int dZ(\epsilon Z)]^{N+1/2} \cos(k_{rad}Z), \end{aligned} \quad (4.72)$$

também notamos que a radiação tem uma frequência representada por  $\omega_{rad}$  e um número de onda  $k_{rad}$ . Podemos fazer uso da generalização acima para calcular a amplitude de radiação os oscillons em cenários com VL. Por exemplo, para  $N = 1$ , temos

$$\begin{aligned} A(k_{rad}) &= \frac{4\pi\sqrt{2\pi}C_1 \epsilon^3}{k_{rad}} \\ &\times [b_1 F(a_1, a_2, a_3, -1) + b_1^* F(a_1, a_2^*, a_3^*, -1)], \end{aligned} \quad (4.73)$$

onde  $F(a_1, a_2, a_3, -1)$  e  $F(a_1, a_2^*, a_3^*, -1)$  são funções hipergeométricas

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{3\epsilon - 2ik_{rad}}, \quad a_1 = \frac{3}{2}, \\ a_2 &= \frac{3}{4} - \frac{ik_{rad}}{2\epsilon}, \quad a_3 = \frac{7}{4} - \frac{ik_{rad}}{2\epsilon}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Na figura 4.5 vemos como a amplitude da radiação emitida muda com o parâmetro

$k^{\mu\nu}$ . Através da figura observamos que a amplitude da radiação emitida dos oscillons é controlada pelos termos da quebra de Lorentz do modelo, de tal maneira que a amplitude de radiação irá decair mais rapidamente quando os efeitos da quebra de Lorentz aumentarem.

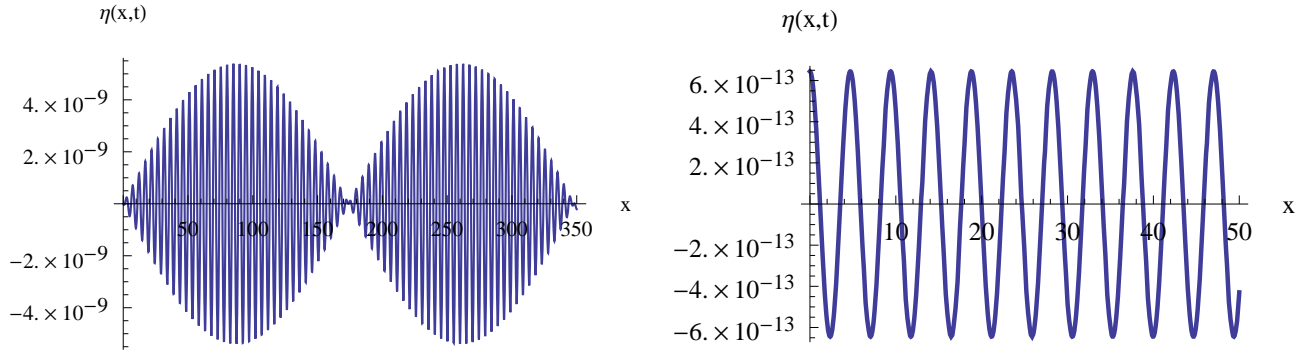


Figura 4.5: Amplitude da radiação emitida determinada pela transformada de Fourier. A figura da esquerda corresponde ao caso com VL e a figura da direita ao caso com simetria de Lorentz.

## 4.8.2 8.2. Radiação dos Flat-top oscillons: Teoria para um campo escalar

Agora apresentaremos a radiação emitida pelos Flat-top oscillons no cenário com violação de Lorentz. Aqui, a expansão associada ao oscillon truncada em ordem  $N$  é definida como

$$\varphi(y, \tau) = \varphi_1(y, \tau) + \frac{1}{g} \varphi_3(y, \tau) \quad (4.75)$$

$$+ \frac{1}{g^2} \varphi_5(y, \tau) + \dots + \frac{1}{g^{N-1}} \varphi_{2N-1}(y, \tau).$$

Substituindo a expansão acima em (4.61), teremos

$$\begin{aligned}
J(Z, \Upsilon) &= \bar{C}_N \\
&\times \bar{C}_N \left\{ \frac{(u\sqrt{4vu})}{\sqrt{2g\sqrt{v} + g \cosh[2Z \sqrt{uv}(\alpha_c^2 - \alpha^2)/\sqrt{g}]}} \right\}^{N+2} \\
&\times \cos(\bar{n}\bar{\omega}\Upsilon) + \dots,
\end{aligned} \tag{4.76}$$

onde  $\bar{C}_N$  são coeficientes constantes. Agora calculamos  $\eta(Z, \Upsilon)$  como dado por (4.64). Após realizar alguns cálculos, concluímos que

$$\begin{aligned}
\eta(Z, \Upsilon) &= \frac{\pi\sqrt{\pi}\bar{C}_N}{\bar{k}_{rad}} \cos(\bar{\omega}_{rad}\Upsilon) \text{sen}(\bar{k}_{rad}Z) \\
&\times \int d\tilde{Z} \left\{ \frac{(u\sqrt{4vu})}{\sqrt{2g\sqrt{v} + g \cosh[2\tilde{Z} \sqrt{uv}g(\alpha_c^2 - \alpha^2)]}} \right\}^{N+2} \\
&\times \cos(\bar{k}_{rad}\tilde{Z}).
\end{aligned} \tag{4.77}$$

onde

$$\bar{\omega}_{rad} = \bar{n}\bar{\omega}, \quad \bar{k}_{rad} = \sqrt{\bar{\omega}_{rad}^2 - 1}. \tag{4.78}$$

Conforme a expressão acima, vemos que existe uma radiação emitida, a qual tem sua amplitude descrita pela integral

$$\begin{aligned}
A(k_{rad}) &= \frac{\pi\sqrt{\pi}\bar{C}_N}{\bar{k}_{rad}} \int dZ \cos(\bar{k}_{rad}Z) \\
&\times \left\{ \frac{(u\sqrt{4vu})}{\sqrt{2\sqrt{v} + \cosh[2Z \sqrt{uv}(\alpha_c^2 - \alpha^2)/\sqrt{g}]}} \right\}^{N+2}.
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Deste modo, podemos usar esta generalização para calcular a amplitude de radiação

dos Flat-top oscillons em cenários com VL. Por exemplo, para  $N = 1$ , temos

$$A(k_{rad}) = \frac{4\pi\bar{C}_N}{A_0 k_{rad}} \left( \frac{u\sqrt{4vu}}{\sqrt{g}} \right)^3 (\xi_1 \mathcal{F}_a + \xi_1^* \mathcal{F}_b), \quad (4.80)$$

onde  $\mathcal{F}_a = \mathcal{F}(\Omega_1; \Omega_2; \Omega_2; \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5)$  e  $\mathcal{F}_b = \mathcal{F}(\Omega_1^*; \Omega_2; \Omega_2; \Omega_3^*, \Omega_4, \Omega_5)$  são as chamadas funções hipergeométricas de Appell de duas variáveis, e

$$A_0 = 2\sqrt{\frac{uv(\alpha_c^2 - \alpha^2)}{\sqrt{g}}}, \quad \xi_1 = 3 + \frac{2ik_{rad}}{A_0},$$

$$\Omega_1 = \frac{3}{2} - \frac{ik_{rad}}{A_0}, \quad \Omega_2 = \frac{3}{2}, \quad \Omega_3 = \frac{5}{2} - \frac{ik_{rad}}{A_0}, \quad (4.81)$$

$$\Omega_4 = \sqrt{A_0^2 - 1} - A_0, \quad \Omega_5 = \frac{1}{\sqrt{A_0^2 - 1} - A_0}.$$

Neste caso, notamos que a amplitude da radiação emitida muda com os parâmetros  $k^{\mu\nu}$ . Novamente podemos ver que a amplitude da radiação é controlada pelos termos da quebra de Lorentz. Além disso, a amplitude de radiação apresenta um decaimento mais rápido quando a VL aumenta.

## 4.9 Oscillons com VL: Teoria com dois campos escalares

Na seção 4.2, mostramos que uma teoria envolvendo dois campos escalares é aquela mais geral para descrever teorias com VL, pois é possível encontrar efeitos observáveis da VL. Então, nesta seção, estudaremos uma teoria de campos escalares possuindo dois campos auto-interagentes na presença de um cenário com VL. A teoria que iremos analisar é semelhante à aquela dada por Potting [141]. Aqui, iremos trabalhar com a seguinte

densidade de lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_1 \partial^\mu \varphi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_2 \partial^\mu \varphi_2 \\ & + \frac{1}{2} k^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi_1 \partial_\nu \varphi_2 - V(\varphi_1, \varphi_2). \end{aligned} \quad (4.82)$$

onde  $V(\varphi_1, \varphi_2)$  é o potencial de interação. Como um exemplo, no sentido de encontrar soluções de oscillons, podemos escolher o potencial na forma

$$\begin{aligned} V(\varphi_1, \varphi_2) = & \frac{g}{3} (\varphi_1^6 + \varphi_2^6) - \frac{1}{2} (\varphi_1^4 + \varphi_2^4) \\ & + \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + 5g (\varphi_1^4 \varphi_2^2 + \varphi_1^2 \varphi_2^4) - 3\varphi_1^2 \varphi_2^2. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Com a finalidade de desacoplar a densidade de lagrangiana (4.82), aplicamos a rotação

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}. \quad (4.84)$$

Após algumas manipulações, concluímos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma_1 \partial^\mu \sigma_1 + \frac{1}{2} k_1^{\mu\nu} \partial_\mu \sigma_1 \partial_\nu \sigma_1 \\ & + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma_2 \partial^\mu \sigma_2 + \frac{1}{2} k_2^{\mu\nu} \partial_\mu \sigma_2 \partial_\nu \sigma_2 - V(\sigma_1, \sigma_2), \end{aligned} \quad (4.85)$$

onde

$$k_1^{\mu\nu} = \frac{1}{4} k^{\mu\nu}, \quad k_2^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} k^{\mu\nu}, \quad (4.86)$$

e o potencial é

$$V(\sigma_1, \sigma_2) = V(\sigma_1) + V(\sigma_2), \quad (4.87)$$

com

$$V(\sigma_i) = \frac{g}{6}\sigma_i^6 - \frac{1}{4}\sigma_i^4 + \frac{1}{2}\sigma_i^2, \quad i = 1, 2. \quad (4.88)$$

É importante notar que aplicando as rotações nos campos, a densidade de lagrangiana se tornou desacoplada, transformando-se em duas densidades de lagrangiana independentes  $\mathcal{L} = \sum_{i=1}^2 \mathcal{L}_i$ , onde

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma_i\partial^\mu\sigma_i + \frac{1}{2}k_i^{\mu\nu}\partial_\mu\sigma_i\partial_\nu\sigma_i - V(\sigma_i), \quad (4.89)$$

Podemos ver que todo os desenvolvimentos e resultados feitos para determinar o campo  $\sigma_1$  serão os mesmos para se determinar  $\sigma_2$ . Então, podemos fazer o caso geral  $\sigma_i$  que teremos tanto  $\sigma_1$  como  $\sigma_2$ . Outro ponto importante que dever ser mencionado é o fato de qualquer redefinição de variável  $x^\mu$  continuar carregando informação do parâmetro  $k^{\mu\nu}$ , o qual é responsável pela VL.

Como iremos trabalhar em 1 + 1-dimensões, a lagrangiana (4.89) torna-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i^{(1+1)} &= \frac{1}{2}a_i(\partial_t\sigma_i)^2 - \frac{1}{2}b_i(\partial_x\sigma_i)^2 \\ &+ \frac{1}{2}d_i\partial_t\sigma_i\partial_x\sigma_i - V(\sigma_i), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Neste caso, temos

$$a_i \equiv (1 + k_i^{00}), \quad b_i \equiv (1 - k_i^{11}), \quad d_i \equiv (k_i^{01} + k_i^{10}). \quad (4.91)$$

Neste ponto torna-se claro porque a densidade de lagrangiana (4.82) é mais geral e mais fundamental que a teoria descrita por (4.1). Primeiramente, porque as relações de comutações do grupo de Poincarè não são fechadas, indicando uma violação da simetria de Lorentz. Segundo, é impossível com redefinições das variáveis eliminar os parâmetros da VL em (4.85), pois se aplicarmos uma mudança de coordenada com finalidade de escrever a densidade de lagrangiana em uma forma invariante, somente um dos setores da teoria se tornará invariante.

Desta maneira, usando os desenvolvimentos descritos na seção 4.4, encontramos a

equação

$$\frac{\partial^2 \sigma_i(Z_i, \Upsilon_i)}{\partial \Upsilon_i^2} - \frac{\partial^2 \sigma_i(Z_i, \Upsilon_i)}{\partial Z_i^2} + V_{\sigma_i} = 0, \quad (4.92)$$

onde

$$Z_i = \frac{x \cos(\theta_i) + t \sen(\theta_i)}{\sqrt{L_i}}, \quad (4.93)$$

$$\Upsilon_i = \frac{-x \sen(\theta_i) + t \cos(\theta_i)}{\sqrt{H_i}}. \quad (4.94)$$

com o conjunto de definições

$$\theta_i \equiv -\frac{1}{2} \arctan \left( \frac{d_i}{a_i + b_i} \right), \quad (4.95)$$

$$L_i \equiv \frac{b_i^2 - a_i^2 + [d_i^2 + (a_i + b_i)^2] \cos(2\theta_i)}{2(a_i + b_i)}, \quad (4.96)$$

$$H_i \equiv \frac{a_i^2 - b_i^2 + [d_i^2 + (a_i + b_i)^2] \cos(2\theta_i)}{2(a_i + b_i)}. \quad (4.97)$$

Felizmente, somos capazes de encontrar soluções periódicas para os campos  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  a partir da equação (4.92). Neste caso, estamos olhando para soluções do tipo oscillons. Estas soluções foram determinadas nas seções 4.5 e 4.6. Assim, utilizando os resultados daquelas seções, podemos mostrar que

$$\sigma_i^{(USUAL)}(x, t) = \quad (4.98)$$

$$\begin{aligned} & \epsilon_i \sqrt[4]{\frac{8}{3}} \left( \sqrt{\left\{ \frac{\epsilon_i [x \cos(\theta_i) + t \sen(\theta_i)]}{\sqrt{L_i}} \right\}} \right) \\ & \times \cos \left\{ \frac{\omega_i [-x \sen(\theta_i) + t \cos(\theta_i)]}{\sqrt{H_i}} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon_i^3), \end{aligned}$$

e

$$\sigma_i^{(FLAT-TOP)}(x, t) = \quad (4.99)$$

$$\frac{u_i \sqrt[4]{4v_i u_i}}{\sqrt{2g\sqrt{v_i} + g \cosh \left\{ \frac{2[x \cos(\theta_i) + t \sin(\theta_i)] \sqrt{u_i v_i (\alpha_c^2 - \alpha_i^2)}}{\sqrt{gL_i}} \right\}}} \times \cos \left\{ \frac{\varpi_i [-x \sin(\theta_i) + t \cos(\theta_i)]}{\sqrt{H_i}} \right\} + \mathcal{O}(g^{-3/2}).$$

Nas soluções acima  $\sigma_i^{(USUAL)}$  representa os oscillons usuais e  $\sigma_i^{(FLAT-TOP)}$  são os chamados Flat-Top oscillons. Além disso, temos

$$\omega_i = \sqrt{1 - \epsilon_i^2}, \varpi_i = \sqrt{1 - \alpha_i^2/g}, \quad (4.100)$$

$$v_i = 27/[160(\alpha_c^2 - \alpha_i^2)], u_i = (v_i - 1)/v_i.$$

Como mencionado anteriormente, os campos escalares originais  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são caracterizados pelos campos  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  da seguinte forma

$$\varphi_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \varphi_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (4.101)$$

É importante destacar que as soluções apresentadas acima não representam apenas relações puramente algébricas entre  $\sigma_i$  e os parâmetros originais da teoria, mas uma solução essencialmente Física. Podemos ver que existem dois tipos de frequências, as quais podem ser combinadas para cada campo escalar  $\varphi$ . Este fato indica que suas soluções podem ser consideradas como uma sobreposição de dois campos independentes, como consequência, podemos ter um fenômeno de interferência na estrutura dos oscillons.

## 4.10 Conclusões

Neste capítulo investigamos oscillons usuais e os então chamados flat-top oscillons para o caso de cenários com violações da simetria de Lorentz. Mostramos que a violação da

simetria é responsável pelo surgimento de uma espécie de deformação da configuração. Por outro lado, a partir da inspeção dos resultados provenientes dos flat-top oscillons em  $1 + 1$ -dimensões com quebra de simetria, em comparação com apresentados em [126], vimos que os oscillons estão carregando informações dos termos responsáveis pela VL da teoria em análise, neste caso fazendo  $k^{00} = k^{11} = 0$  e  $k^{01} = -k^{10}$  (ou  $k^{01} = k^{10} = 0$ ) podemos recuperar a solução apresentada na referência [126]. Além disso, mostramos que é possível obter o grau da quebra de simetria através da largura do oscillon em  $1 + 1$  dimensões. Uma questão importante sobre as soluções não-lineares está relacionada à sua estabilidade. Assim, estudamos a questão da estabilidade das soluções encontradas utilizando um procedimento semelhante ao apresentado por Hertzberg [130, 126], o qual está baseado na determinação da amplitude da radiação emitida pelos oscillons. Concluímos que a radiação emitida por estes oscillons é controlada pelos termos da VL do modelo, de tal maneira que a radiação decai mais rapidamente quando os termos se tornam maiores.

Uma questão natural, a qual iremos analisar em um futuro trabalho, é sobre as implicações cosmológicas de possíveis oscillons [146] com outro tipo de violação da simetria de Lorentz.

# Capítulo 5

## Conclusões Finais

Nesta tese, apresentamos uma breve introdução ao estudo dos chamados sólitons, os quais correspondem a certas soluções de equações de onda não-lineares. Mostramos que tais objetos são localizados espacialmente, possuindo densidade de energia finita e que, mesmo após sofrerem colisões, mantêm suas formas e velocidades originais. Além disso, mostramos dois exemplos de configurações do tipo sólitons, as quais envolvem campos escalares em  $1 + 1$  dimensões. Foi mostrado também que uma maneira de caracterizar soluções do tipo sóliton é através da chamada carga topológica.

No capítulo 2, investigamos a medida da chamada entropia configuracional para uma classe de modelos que apresentam dois campos escalares auto-interagentes em  $1 + 1$  dimensões. Encontramos que, apesar da energia das configurações serem degeneradas, elas têm uma configuração favorita devido a sua entropia configuracional. Deste modo, determinamos através de cálculos analíticos e numéricos que a entropia configuracional é uma função do valor  $c_0$ . Assim, mostramos que a função  $S_c(c_0)$  apresenta dois valores de mínimos, ou seja, um mínimo global e outro local. No ponto de mínimo local vimos que a configuração sofre uma espécie de transição de fase, onde kink duplo se transforma em kink usual. Por outro lado, no valor de mínimo global a configuração apresenta a mínima entropia, o que nos leva a concluir que neste valor de entropia a configuração é mais estável. No capítulo 3, apresentamos uma classe de sólitons viajantes em sistemas com violações das simetrias de Lorentz. Neste caso, mostramos que é possível construir alguns sólitons viajantes os quais, como deveria ser esperado, não podem ser mapeados em configurações estáticas através do boost de Lorentz devido à quebra explícita desta simetria. Ademais, no modelo estudado, encontramos um conjunto completo de soluções,

onde tais soluções apresentam um limite crítico controlado pela escolha de uma constante arbitrária de integração.

Por fim, discutimos o impacto da quebra da simetria de Lorentz sobre os oscillons usuais e nos chamados flat-top oscillons. Neste caso, mostramos que a violação de Lorentz é responsável pela origem de um tipo de deformação da configuração, onde as configurações do campo se transformam em oscilatórias em uma região localizada próxima de seu valor máximo. Além disso, notamos que a violação de Lorentz produz é responsável em produzir um desvio no oscillons ao longo da sua direção espacial. Também concluímos que o efeito de uma violação de Lorentz nos oscillons flat-top é responsável por um colapso do flat-top. Uma importante análise que fizemos foi determinar analiticamente a radiação emitida pelas configurações. Neste caso, os resultados obtidos indicaram que a amplitude da radiação emitida é controlada pelos parâmetros da quebra de Lorentz, de tal modo que os oscillons dentro deste cenário se tornam muito estáveis.

No entanto, torna-se importante a partir desta tese descrever uma teoria geral para sistemas que envolvem dois campos escalares auto interagentes em cenários que apresentam violações das simetrias de Lorentz e *CPT* (conjugação da carga-paridade-reversão temporal), os quais permitem obter soluções de oscillons. Assim, como uma continuação desta tese, estaremos analisando tais aspectos teóricos. Neste caso, nossa análise estará voltada em uma caracterização analítica de tal teoria. Pois tal descrição poderá oferecer um novo caminho para sondar a dimensionalidade do espaço. Além disso, em um contexto cosmológico, ao adicionar os efeitos das violações das simetrias de Lorentz e *CPT* em nossa teoria, poderemos estudar os impactos destas violações na formação de estruturas logo após o período de inflação do Universo, onde foi estimado numericamente que aproximadamente 20% da densidade de energia total do Universo neste período são provenientes de configurações do tipo oscillons. Desta forma, nossa caracterização em um contexto cosmológico poderá oferecer uma nova chave para o entendimento da Física que descreve o Universo primordial.

# Referências Bibliográficas

- [1] J. S. Russell, *Report on Waves*, Fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science **14** (1844) 311.
- [2] J. Boussinesq, *Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire*, **C. R.** **72** (1871) 755.
- [3] L. Rayleigh (J. W. Strutt), *Philos. Mag.* **1** (1876) 257.
- [4] D. J. Korteweg e G. De Vries, *Philos. Mag.* **39** (1895) 422.
- [5] N. J. Zabusky e M. D. Kruskal, *Phys. Rev. Lett.* **15** (1965) 240.
- [6] E. Fermi, J. Pasta e S. M. Ulam, *Studies in nonlinear problem*, Tech. Rep. **LA-1940**, Los Alamos Sci. Lab. (1955).
- [7] G. B. Whitham, *Linear and Non-Linear Waves*, John Wiley e Sons, Nova Iorque (1974).
- [8] A. C. Scott, F. Y. F. Chiu e D. W. Mclaughlin, *Proc. I.E.E.E.* **61** (1973) 1443.
- [9] R. Rajaraman e E. J. Weinberg, *Phys. Rev. D* **11** (1975) 2950.
- [10] R. Rajaraman, *Phys. Rev. Lett.* **42** (1979) 200.
- [11] L. J. Boya e J. Casahorran, *Phys. Rev. A* **39** (1989) 4298.
- [12] M. K. Prasad e C. M. Sommerfield, *Phys. Rev. Lett.* **35** (1975) 760.
- [13] E. B. Bogomol'nyi, *Sov. J. Nucl. Phys.* **24** (1976) 449.
- [14] H. Arodz, *Phys. Rev. D* **52** (1995) 1082; *Nucl. Phys. B* **450** (1995) 174; H. Arodz e A. L. Larsen, *Phys. Rev. D* **49** (1994) 4154.

- [15] M. Cvetič e H. H. Soleng, Phys. Rep. **282** (1997) 159.
- [16] R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. D **13** (1975) 3398.
- [17] R. Friedberg, T. D. Lee, and A. Sirlin, Phys. Rev. D **13** (1976) 2739.
- [18] V. G. Makhankov, Phys. Reports **35** (1978) 1.
- [19] S. Coleman, *Classical lumps and their Quantum Descendants*, Plenum Press, Nova Iorque (1977).
- [20] A. Strumia e N. Tetradis, Nucl. Phys. B **542** (1999) 719.
- [21] C. Csaki, J. Erlich, C. Grojean e T. J. Hollowood, Nucl. Phys. B **584** (2000) 359.
- [22] M. Gremm, Phys. Lett. B **478** (2000) 434.
- [23] A. de Souza Dutra e A. C. Amaro de Faria, Jr., Phys. Rev. D **72** (2005) 087701.
- [24] M. A. Shifman e M. B. Voloshin, Phys. Rev. D **57** (1998) 2590.
- [25] D. Bazeia, M. J. dos Santos e R. F. Ribeiro, Phys. Lett. A **208** (1995) 84; D. Bazeia, W. Freire, L. Losano e R. F. Ribeiro, Mod. Phys. Lett. A **17** (2002) 1945.
- [26] A. Campos, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 141602.
- [27] A. Melfo, N. Pantoja e A. Skirzewski, Phys. Rev. D **67** (2003) 105003.
- [28] A. de Souza Dutra, Phys. Lett. B **626** (2005) 249.
- [29] A. de Souza Dutra e A. C. F. de Amaral Jr. , Phys. Lett. B **642** (2006) 274.
- [30] V. I. Afonso, D. Bazeia e L. Losano, Phys. Lett. B **634** (2006) 526.
- [31] M. Giovannini, Phys. Rev. D **75**, 064023 (2007); Phys. Rev. D **74** (2006) 087505.
- [32] A. R. Bishop and T. Schneider, *Solitons and Condensed Matter Physics* (Springer-Verlag, Berlin, 1978).
- [33] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, North Holland, Amsterdam (1982).
- [34] A. Vilenkin e E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge University, Cambridge (1994).

- [35] C. Gu, *Soliton Theory and Its Applications* (Springer-Verlag, Berlin, 1995).
- [36] T. Vachaspati, *Kinks and Domain Walls: An Introduction to Classical and Quantum Solitons*, Cambridge University Press, Cambridge (2006).
- [37] E. J. Weinberg, *Classical Solutions in Quantum Field Theory: Solitons and Instantons in High Energy Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2012).
- [38] A. Barone, F. Esposito, C. J. Magee e A. C. Scott, *Nuovo Cim.* **1** (1971) 227.
- [39] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence* (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
- [40] S. Coleman, *Phys. Rev. D* **15** (1977) 2929.
- [41] R. F. Dashen, B. Hasslacher, and A. Neveu, *Phys. Rev. D* **10** (1974) 4130.
- [42] C. Adam, J. M. Queiruga, J. Sanchez-Guillen, and A. Wereszczynski, *J. High Energy Phys.* **1305** (2013) 108.
- [43] R. Casana, M. M. Ferreira, Jr, and E. da Hora, *Phys.Rev. D* **86** (2012) 085034; *Phys. Lett. B* **718** 620 (2012).
- [44] B. Cheng and C. Ford, *Phys. Lett. B* **720** (2013) 262.
- [45] N. Halmagyi, M. Petrini, and A. Zaffaroni, *J. High Energy Phys.* **1308** (2013) 124.
- [46] D. Cassani, G. Dall'Agata, and A. F. Faedo, *J. High Energy Phys.* **1303** (2013) 007.
- [47] C. Armendaris-Picon, T. Damour, V. F. Mukhanov, *Phys. Lett. B* **458** (1999) 209.
- [48] E. Babichev, *Phys. Rev. D* **74** (2006) 085004.
- [49] C. Adam, N. Grandi, J. Sanchez-Guillen, and A. Wereszczynski, *J. Phys. A* **41** (2008) 2004.
- [50] C. Adam, J. M. Queiruga, J. Sanchez-Guillen, and A. Wereszczynski, *Phys. Rev. D* **86** (2012) 105009.

- [51] C. E. Shannon, The Bell System Technical J. **27** (1948) 379.
- [52] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **31** (1973) 161.
- [53] R. M. Wald, Phys. Rev. D **20** (1979) 1271.
- [54] M. Gleiser and N. Stamatopoulos, Phys. Lett. B **713** (2012) 304.
- [55] M. Gleiser and N. Stamatopoulos, Phys. Rev. D **86** (2012) 045004.
- [56] M. Gleiser and D. Sowinski, Phys. Lett. B **727** (2013) 272.
- [57] D. Bazeia, F. A. Brito, Phys. Rev. D. **61** (2000) 105019.
- [58] M. B. Voloshin, Phys. Rev. D. **57** (1997) 1266.
- [59] M. Shifman, Phys. Rev. D. **57** (1997) 1258.
- [60] A. de Souza Dutra, A. C. Amaro de Faria Jr, and M. Hott, Phys. Rev. D **78** (2008) 043526.
- [61] V. A. Kostelecky and S. Samuel, Phys. Rev. D **39** (1989) 683.
- [62] D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **55** (1997) 6760.
- [63] D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **58** (1998) 116002.
- [64] S. M. Carrol, G. B. Field and R. Jackiw, Phys. Rev. D **41** (1990) 1231.
- [65] V. A. Bezerra, C. N. Ferreira, and J. A. Helayël-Neto, Phys. Rev. D **71** (2005) 044018.
- [66] J. L. Boldo, J. A. Helayël-Neto, L. M. de Moraes, C. A. G. Sasaki, and V. J. Vásquez Otoyá, Phys. Lett. B **689** (2010) 112.
- [67] L. Maccione, S. Liberati, and G. Sigl, Phys. Rev. Lett. **105** (2010) 021101.
- [68] G. Gubitosi, G. Genovese, G. Amelino-Camelia, and A. Melchiorri, Phys. Rev. D **82** (2010) 024013.
- [69] B. Altschul, Q. G. Bailey, and V. A. Kostelecký, Phys. Rev. D **81** (2010) 065028.

- [70] R. Casana, M. M. Ferreira, Jr., and M. R. O. Silva, Phys. Rev. D **81** (2010) 105015.
- [71] Q. G. Bailey, Phys. Rev. D **82** (2010) 065012.
- [72] M. D. Seifert, Phys. Rev. D **81** (2010) 065010.
- [73] A. Kostelecky and R. V. Kooten, Phys. Rev. D **82** (2010) 101702.
- [74] N. Engelhardt, A. E. Nelson, and J. R. Walsh, Phys. Rev. D **81** (2010) 113001.
- [75] V. A. Kostelecky and N. Russell, Phys. Lett. B **693** (2010) 443.
- [76] M. A. Anacleto, F. A. Brito and E. Passos, Phys. Lett. B **694** (2010) 149.
- [77] M. N. Barreto, D. Bazeia, and R. Menezes, Phys. Rev. D **73** (2006) 065015.
- [78] A. de Souza Dutra, M. Hott, and F. A. Barone, Phys. Rev. D **74** (2006) 085030.
- [79] D. Bazeia, M. M. Ferreira Jr., A. R. Gomes, and R. Menezes, Physica D **239** (2010) 942.
- [80] M. D. Seifert, Phys. Rev. D **82**, 125015 (2010).
- [81] M. N. Barraz Jr., J. M. Fonseca, W. A. Moura-Melo, and J. A. Helayël-Neto, Phys. Rev. D **76**, 027701 (2007).
- [82] A. Connes, M. R. Douglas, and A Schwarz, J. High Energy Phys. **02**, 003 (1998).
- [83] S. M. Carrol, J. A. Hervey, V. A. Kostelecky, C. D. Lane, and T. Okamoto, Phys. Rev. Lett. **87**, 141601 (2001).
- [84] G. T. Zatsepin and V. A. Kuzmin, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **4**, 114 (1966).
- [85] M. Takeda *et. al.*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1163 (1998).
- [86] S. R. Coleman and S. L. Glashow, Phys. Rev. D **59**, 116008 (1999).
- [87] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D **70**, 083509 (2004); Phys. Rev. D **71**, 083509(E) (2005).
- [88] O. Bertolani, R. Lehnert, R. Potting, and A. Ribeiro, Phys. Rev. D **69**, 083513 (2004).

- [89] S. M. Carrol and J. Shu, Phys. Rev. D **73**, 103515 (2006).
- [90] O. Bertolani and D. F. Mota, Phys. Lett. B **455**, 96 (1999).
- [91] S. M. Carrol and E. A. Lim, Phys. Rev. D **70**, 123525 (2004).
- [92] O. Bertolani, Gen. Relativ. Gravit. **34**, 707 (2002).
- [93] S. Kanno and J. Soda, Phys. Rev. D **74**, 063505 (2006).
- [94] Y. Hikida, H. Takayanagi and T. Takayanagi, J. High Energy Phys. **04** (2003) 032.
- [95] C. P. Bachas and M. R. Gaberdiel, J. High Energy Phys. **03** (2004) 015.
- [96] W. Black, R. Russo, D. Turton, Phys. Lett. B **694** (2010) 246.
- [97] A. de Souza Dutra and R. A. C. Correa, Phys. Rev. D **83**, 105007 (2011).
- [98] A. de Souza Dutra and A. C. Amaro de Faria, Jr., Phys. Rev. D **72**, 087701 (2005);  
Phys. Lett. B **642**, 274 (2006).
- [99] D. Bazeia, W. Freire, L. Losano, and R. F. Ribeiro, Mod. Phys. Lett. A **17**, 1945  
(2002).
- [100] A. Campos, Phys. Rev. Lett. **88**, 141602 (2002).
- [101] A. Melfo, N. Pantoja, and A. Skirzewski, Phys. Rev. D **67**, 105003 (2003).
- [102] A. de Souza Dutra and R. A. C. Correa, Phys. Lett. B **679**, 138 (2009); Phys. Lett.  
B **693**, 188 (2010).
- [103] S. Coleman, Nucl. Phys. **B262**, 263 (1985).
- [104] T. D. Lee and Y. Pang, Phys. Rep. **221** 251 (1992).
- [105] I. L. Bogolyubsky and V. G. Makhankov, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **24**, 15 (1976).
- [106] H. Segur and M. D. Kruskal, Phys. Rev. Lett. **58**, 747 (1987).
- [107] M. Gleiser, Phys. Rev. D **49**, 2978 (1994); Phys. Lett. B **600**, 126 (2004); Int. J.  
Mod. Phys. D **16**, 219 (2007).
- [108] E. J. Copeland, M. Gleiser, and H. -R. Müller, Phys. Rev. D **52**, 1920 (1995).

- [109] M. Gleiser and R. M. Haas, Phys. Rev. D **54**, 1626 (1996).
- [110] A. B. Adib, M. Gleiser and C. A. S. Almeida, Phys. Rev. D **66**, 085011 (2002).
- [111] E. P. Honda and M. W. Choptuik, Phys. Rev. D **65**, 084037 (2002).
- [112] M. Gleiser and R. C. Howell, Phys. Rev. Lett. **94**, 151601 (2005).
- [113] E. Farhi, N. Graham, V. Khmeiani, R. Markov, and R. Rosales, Phys. Rev. D **72**, 101701 (2005).
- [114] N. Graham and N. Stamatopoulos, Phys. Lett. B **639**, 541 (2006).
- [115] N. Graham, Phys. Rev. Lett. **98**, 101801 (2007).
- [116] A. D. Linde, Phys. Rev. D **49**, 748 (1994).
- [117] A. Cardoso, Phys. Rev. D **75**, 027302 (2007).
- [118] E. W. Kolb and I. I. Tkachev, Phys. Rev. D **49**, 5040 (1994).
- [119] P. M. Saffin and A. Tranberg, J. High Energy Phys. **01**, 30 (2007).
- [120] M. Gleiser, B. Rogers and J. Thorarinson, Phys. Rev. D **77**, 023513 (2008).
- [121] E. Farhi, N. Graham, A. H. Guth, N. Iqbal, R. R. Rosales, and N. Stamatopoulos, Phys. Rev. D **77**, 085019 (2008).
- [122] H. Arodz, P. Klimas, and T. Tyranowski, Phys. Rev. D **77**, 047701 (2008).
- [123] G. Fodor, P. Forgács, Z. Horváth, and A. Lukács, Phys. Rev. D **78**, 025003 (2008).
- [124] M. Gleiser and J. Thorarinson, Phys. Rev. D **79**, 025016 (2009).
- [125] M. Gleiser and D. Sicilia, Phys. Rev. D **80**, 125037 (2009).
- [126] M. A. Amin and D. Shirokoff, Phys. Rev. D **81**, 085045 (2010).
- [127] M. Gleiser, N. Graham and N. Stamatopoulos, Phys. Rev. D **82**, 043517 (2010).
- [128] T. Romanczukiewicz and Ya. Shnir, Phys. Rev. Lett. **105**, 081601 (2010).
- [129] G. Fodor, P. Forgács, Z. Horváth, and M. Mezei, Phys. Lett. B **674**, 319 (2009).

- [130] M. P. Hertzberg, Phys. Rev. D **82**, 045022 (2010).
- [131] H. Belich, E. O. Silva, M. M. Ferreira, Jr., and M. T. D. Orlando, Phys. Rev. D **83**, 125025 (2011).
- [132] H. Belich, M. M. Ferreira, Jr., J. A. Helayel-Neto, and M. T. D. Orlando, Phys. Rev. D **67**, 125011 (2003).
- [133] H. Belich, M. M. Ferreira, Jr., and J. A. Helayel-Neto, Eur. Phys. J. C **38**, 511 (2005).
- [134] R. Casana, E. S. Carvalho, and M. M. Ferreira, Jr., Phys. Rev. D **84**, 045008 (2011).
- [135] D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997); Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998).
- [136] J. L. Boldo, J. A. Helayel-Neto, L. M. de Moraes, C. A. G. Sasaki, and V. J. Vásquez Otoya, Phys. Lett B **689**, 112 (2010).
- [137] V. A. Kostelecky and Matthew Mewes, Phys. Rev. D **85**, 096005 (2012).
- [138] V. A. Kostelecky and R. Lehnert, Phys. Rev. D **63**, 065008 (2001).
- [139] A. Ferrero and B. Altschul, Phys. Rev. D **84**, 065030 (2011).
- [140] B. Altschul, Phys. Lett. B **639**, 679 (2006); Phys. Rev. Lett **98**, 041603 (2007); Phys. Rev. D **87**, 045012 (2013).
- [141] R. Potting, Phys. Rev. D **85**, 045033 (2012).
- [142] M. A. Anacleto, F. A. Brito, and E. Passos, Phys. Lett B **694**, 149 (2010); Phys. Lett B **703**, 609 (2011); Phys. Rev. D **85**, 025013 (2012).
- [143] M. A. Amin, R. Easther, and H. Finkel, J. Cosmol. Astropart. Phys. **12**, 001 (2010); arXiv:1006.3075; Phys. Rev. D **87**, 123505 (2013).
- [144] M. A. Amin *et. al.*, Phys. Rev. Lett. **108**, 241302 (2012).
- [145] C. S. Gardner, J. Greene, M. Kruskal, and R. Miura, Phys. Rev. Lett. **19**, 1095 (1967).

- [146] M. A. Amin, R. Easther, H. Finkel, R. Flauger, and M. P. Hertzberg, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 241302 (2012).

## Apêndice

Com o objetivo de familiarizar aqueles que não estão acostumados com a notação relativística, decidimos fazer este apêndice. Nele, apresentamos de maneira simples a transformação de Lorentz, a qual desempenha um papel importante papel nas soluções apresentadas ao longo desta tese. Mostramos também como são escritos os operadores diferenciais em termos da notação relativística.

### A1) Transformação de Lorentz

Com a finalidade de encontrar uma transformação que preserve invariantes as equações de Maxwell ao passar de um referencial inercial para outro, vamos considerar dois referenciais  $S$  e  $S'$ , cujos eixos são paralelos e as origens coincidem em  $t = t' = 0$ . O referencial  $S'$  possui velocidade  $v$  e move-se paralelamente ao eixo  $Ox$ . No referencial  $S$ , uma fonte de luz emite um pulso de luz em  $t = 0$ , este pulso de luz se propagará em forma de uma onda esférica. Para um observador em  $S$ , a onda esférica de raio  $ct$  se propaga a partir de  $O$ . Para o observador em  $S'$ , a onda terá raio  $ct$  e estará se propagando a partir de  $O'$ . Assim, as frentes de onda em cada um dos referenciais serão dadas por

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2, \quad (5.1)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2. \quad (5.2)$$

Lembremos que a transformação de Galileu (TG) é dada por

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z \quad \text{e} \quad t = t'. \quad (5.3)$$

Portanto, se aplicarmos a TG à equação da frente de onda no referencial  $S'$ , teremos

$$x^2 - 2xvt + v^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2, \quad (5.4)$$

a equação acima é diferente da equação (5.1) que descreve a frente de onda no referencial  $S$ .

Nosso objetivo é encontrar uma transformação que mantenha a equação da frente de onda invariante ao passarmos de um referencial inercial para outro e que recupere a TG

quando  $v/c \rightarrow 0$ . Como o movimento é ao longo do eixo  $x$ , as componentes  $y$  e  $z$  não sofrem modificações. Deste modo, vamos tentar a transformação

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z = z' \quad \text{e} \quad t' = t + \lambda x. \quad (5.5)$$

onde  $\lambda$  é uma constante. Em seguida, aplicamos a transformação acima na equação da frente de onda no referencial  $S'$ . Deste modo, teremos

$$(1 - c^2\lambda^2)x^2 + y^2 + z^2 - 2(v + \lambda c^2)xt = (1 - v^2/c^2)c^2t^2. \quad (5.6)$$

Para a equação acima assumir a forma da equação da frente de onda dada pela equação (5.1), devemos fazer  $\lambda = -v/c^2$ . Assim, ficamos com

$$(1 - v^2/c^2)x^2 + y^2 + z^2 = (1 - v^2/c^2)c^2t^2, \quad (5.7)$$

e para eliminar o fator  $(1 - v^2/c^2)$ , devemos escrever a transformação dada pelas equações (5.5) como

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z = z' \quad \text{e} \quad t' = \gamma[t - (v/c^2)x]. \quad (5.8)$$

onde  $\gamma = [1 - v^2/c^2]^{-1/2}$ . A transformação dada acima é denominada transformação de Lorentz (TL), com ela a equação da onda esférica se mantém invariante ao passar do referencial inercial  $S$  para o referencial inercial  $S'$ . Destacamos que a transformação de Lorentz conserva invariantes as leis do eletromagnetismo ao passar de um referencial para outro.

## A2) Notação relativística

Vamos considerar dois eventos no espaço-tempo,  $(x, y, z, t)$  e  $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$ . Desta forma, dizemos que o intervalo entre estes dois eventos é dado por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (5.9)$$

onde  $ds$  será o mesmo para todos observadores inerciais. Além disso,  $ds$  será invariante sob a TL. Através da definição de intervalo dada acima, os eventos em que  $ds^2 > 0$  são chamados do tipo-tempo, aqueles em que  $ds^2 < 0$  são chamados do tipo-espaço e aqueles em que  $ds^2 = 0$  são ditos do tipo-luz. Em três dimensões espaciais  $(x, y, z)$  são as

componentes de um vetor, e  $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  é invariante sob rotações. Note que há termos negativos na expressão de  $ds^2$ , isto significa que o espaço não é estritamente euclidiano. Portanto, definimos

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z), \quad (5.10)$$

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z),$$

com a definição acima podemos escrever o intervalo invariante com

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 dx^\mu dx_\mu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (5.11)$$

O quadrivetor  $x^\mu$  é chamado de vetor contravariante, e o quadrivetor  $x_\mu$  é chamado de vetor covariante. O produto interno entre um vetor contravariante e um vetor covariante é um invariante. Por simplicidade, vamos adotar a convenção da soma, onde a soma de um subíndice repetido indica um somatório sobre ele. Assim, temos

$$\sum_{\mu=0}^3 dx^\mu dx_\mu = dx^\mu dx_\mu. \quad (5.12)$$

A relação entre  $x^\mu$  e  $x_\mu$  é feita através do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , de tal maneira que

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = g_{\mu 0} x^0 + g_{\mu 1} x^1 + g_{\mu 2} x^2 + g_{\mu 3} x^3. \quad (5.13)$$

Observando (5.13), vemos que  $x_0 = x^0$ ,  $x_1 = -x^1$ ,  $x_2 = -x^2$  e  $x_3 = -x^3$ . Portanto, escrevemos  $g_{\mu\nu}$  como

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Para  $x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$ , observamos que

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

No caso dos operadores diferenciais, definimos

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right), \quad (5.16)$$

$$\partial^\mu \equiv g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right).$$

Deste modo, o operador diferencial de segunda ordem é um invariante de Lorentz, sendo escrito como

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \quad (5.17)$$

onde  $\square$  é o chamado operador d'Alembertiano. Além disso, o quadrivetor energia-momento de uma partícula será  $p^\mu = (E/c, \vec{p})$  e  $p_\mu = (E/c, -\vec{p})$ , resultando no invariante

$$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2/c^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2 c^2. \quad (5.18)$$

Também podemos utilizar a notação para  $p_\mu x^\mu$ , que ficará

$$p_\mu x^\mu = Et - \vec{p} \cdot \vec{r}. \quad (5.19)$$