



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.008/05

CAOS NA INTERAÇÃO DE DOIS MONOPÓLOS MAGNÉTICOS NÃO-ABELIANOS

Ricardo Francisco Fariello

Orientador

Prof. Dr. Gastão Inácio Krein



Março de 2005

Agradecimentos

Desejo registrar aqui meu agradecimento ao Prof. Gastão Krein que, com sua experiência e demasiada paciência, soube conduzir a orientação desta dissertação de forma dinâmica e respeitosa. A ele, devo meu primeiro contato com a inevitabilidade.

Agradeço ao Dr. Hilmar Forkel pela proposição do tema, pelas proveitosas discussões que tivemos em várias ocasiões e que impulsionaram o desenvolvimento desta dissertação.

Gostaria também de expressar minha gratidão ao amigo Sergio Szpigel, pelo incentivo, pela boa vontade e presença nos piores e nos melhores momentos. E também a sua esposa Cecília pelo tempo tomado da sua família.

Quero transferir meus agradecimentos especiais aos amigos Maurício e Daniela Machado (Mo Cushla), Ana Luiza Barbieri, Fernando Gonçalves Gardim e André Ricardo Rocha da Silva.

Por fim, agradeço à CAPES pela bolsa.

Resumo

Nesta dissertação tratamos do problema de caos dinâmico na interação de baixas energias de dois monopólos magnéticos não-Abelianos do tipo Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS). Monopólos magnéticos BPS são soluções solitônicas das equações clássicas de movimento da teoria de gauge não-Abeliana de Yang-Mills-Higgs $SU(2)$, em que o potencial de Higgs é colocado igual a zero. O movimento clássico de monopólos magnéticos, no limite de velocidades relativas baixas, pode ser descrito por um movimento geodésico no espaço de soluções estáticas de mínima energia em termos de coordenadas coletivas. O conhecimento da métrica para este espaço de coordenadas coletivas é suficiente para determinar a dinâmica de baixas energias de um conjunto de monopólos. Para o caso de dois monopólos, a métrica de Atiyah-Hitchin é a de interesse. O problema pode ser colocado na forma de um sistema dinâmico hamiltoniano não-integrável, em que as soluções das equações de movimento derivadas a partir desta métrica indicam a presença de caos. Superfícies de seção de Poincaré, espectros de potência e expoentes de Lyapunov das soluções dependentes do tempo são calculados numericamente para caracterizar soluções caóticas deste sistema dinâmico.

Palavras Chaves: Caos; Teorias de Gauge; Monopólos Magnéticos.

Áreas do conhecimento: 1.05.03.00-5; 1.05.02.00-9.

Abstract

In this dissertation we treat the problem of dynamical chaos in the low energy interaction of two non-Abelian magnetic monopoles of the Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) type. BPS magnetic monopoles are solitonic solutions of the classical equations of motion of the non-Abelian Yang-Mills-Higgs $SU(2)$ gauge theory in which the Higgs potential is taken to be equal to zero. The classical motion of the magnetic monopoles in the limit of low relative speed can be described by a geodesic motion in the space of minimum energy static solutions in terms of collective coordinates. Knowledge of the metric of this space of collective coordinates is sufficient to determine the low energy dynamics of a set of monopoles. For the case of two monopoles, it is the metric of Atiyah-Hitchin which is of interest. The problem can be formulated as a non-integrable dynamical hamiltonian system, in which the solutions of the equations of motion derived from this metric indicate the presence of chaos. Poincaré surfaces of section, power spectra and Lyapunov exponents of the time-dependent solutions are calculated numerically to characterize chaotic solutions of this dynamical system.

Índice

1	Introdução	1
2	Superfícies de seção de Poincaré, espectros de potência e expoentes de Lyapunov	4
2.1	Superfícies de seção de Poincaré	5
2.2	Espectros de potência	9
2.3	Expoentes característicos de Lyapunov	13
3	Modelo de Higgs SU(2) não-Abeliano	19
3.1	Soluções clássicas do tipo monopólo-magnético	19
3.2	Soluções clássicas do tipo dyon	26
3.3	Realização dos campos físicos	28
4	Dinâmica de dois monopólos BPS	32
4.1	Descrição da métrica de Atiyah-Hitchin	33
4.2	Formulação do problema	37
4.3	Limite assintótico da dinâmica de dois monopólos	39
4.4	Integrabilidade	48
5	Simulações numéricas	51
5.1	Superfícies de seção de Poincaré	51
5.2	Espectros de potência	53
5.3	Expoentes característicos de Lyapunov	57
6	Conclusões e Perspectivas Futuras	60
A	Solução das Eqs. 4.24	62
B	Algumas expansões úteis	67
C	Método de Runge-Kutta de quarta ordem	69
D	Integração da Eq. 4.78	72
	Referências	74

Capítulo 1

Introdução

Nesta dissertação tratamos do problema de caos dinâmico na interação de baixas energias de dois monopólos magnéticos não-Abelianos de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS). Monopólos magnéticos BPS são soluções solitônicas das equações clássicas de movimento da teoria de gauge não-Abeliana de Yang-Mills-Higgs $SU(2)$, em que o coeficiente λ do potencial de Higgs $\lambda(|\Phi|^2 - 1)^2$ é colocado igual a zero. A idéia de monopólos magnéticos foi introduzida por Dirac em 1931 [1]. Na teoria eletromagnética baseada nas equações de Maxwell, campos elétricos e magnéticos aparecem em pé de igualdade, mas enquanto que cargas elétricas ocorrem naturalmente, cargas magnéticas (ou monopólos magnéticos) aparentemente não são necessárias. No entanto, postulando a existência de monopólos, Dirac foi capaz de mostrar a razão pela qual cargas elétricas aparecem em múltiplos inteiros da carga do elétron. Devido à inexistência experimental para a existência de monopólos magnéticos na natureza, o assunto não teve maiores desdobramentos até a descoberta em 1974 de que monopólos magnéticos poderiam surgir naturalmente como soluções não singulares de energia finita em teorias de gauge com quebra espontânea de simetria [2]. É precisamente no contexto destas teorias que se insere o problema estudado nesta dissertação. A conexão destas teorias de gauge não-Abelianas e as teorias caóticas é muito natural, tendo em vista a natureza não linear das equações de movimento dos campos de gauge.

Mais especificamente, o interesse no estudo de caos na dinâmica de campos de gauge não-Abelianos clássicos teve início em estudos sobre a integrabilidade das equações clássicas (não lineares) de Yang-Mills. Estes estudos, por sua vez, foram motivados pela descoberta por Polyakov et al. [3] dos instantons, configurações solitônicas com topologia não trivial das equações clássicas de Yang-Mills, que foram imaginados por algum tempo ser relevantes para o entendimento do vácuo da cromodinâmica quântica (QCD), a teoria das interações fortes. Uma possível existência de uma nova lei de conservação associada a esta topologia não trivial poderia prevenir o decaimento do vácuo físico a um estado de vácuo trivial não-perturbativo, o que poderia trazer luz ao problema do confinamento dos quarks e glúons. As tentativas de encontrar tais novas integrais de movimento mostraram-se, no entanto, infrutíferas. Apesar deste fracasso inicial, estudos tentando associar comportamentos caóticos dos campos de gauge ao problema do confinamento na QCD, motivados principalmente por analogias com problemas da física da matéria condensada, continuam sendo perseguidos com bastante vigor na literatura.

Mais recentemente, o problema da termalização da matéria produzida em colisões de íons pesados relativísticos têm sido investigado sob a luz de uma dinâmica caótica dos campos de gauge [4]. A altas temperaturas, como as que se espera sejam alcançadas nestas colisões, os modos de longos comprimentos de onda (infravermelho) dominam a dinâmica do sistema e, portanto, é natural se esperar que uma descrição clássica ou semi-clássica possa ser útil para o estudo da dinâmica fora do equilíbrio. Estudos da evolução em tempo real das equações da teoria de Yang-Mills para $SU(2)$ e $SU(3)$ discretizada numa rede mostraram [5] que, mesmo que se comece a simulação com configurações de campo muito fora do equilíbrio, os campos de gauge termalizam muito rapidamente. Termalizar significa que a distribuição de energia sobre a rede apresenta uma forma térmica. Mais precisamente, partindo de configurações iniciais randômicas para os campos de gauge para cada link da rede, estes estudos mostraram que o sistema apresenta comportamento caótico. Ainda mais, estes estudos mostraram que campos de gauge $SU(3)$ termalizam mais rapidamente que campos $SU(2)$. Situações similares ocorrem para o caso de campos de Yang-Mills-Higgs [6] - esta questão é relevante para o entendimento de processos de bariogênese no contexto das interações eletrofracas [7], i.e., o aparente excesso de bárions sobre antibárions no universo. Neste caso também se verifica uma rápida termalização dos campos, apesar de a equipartição da energia entre os dois campos ser muito mais demorada.

No caso de monopólos magnéticos BPS, objeto desta dissertação, soluções numéricas para o movimento de dois monopólos foram realizadas originalmente por Temple-Raston [8, 9, 10, 11]. Estes trabalhos sugeriram a existência de caos. Mais especificamente, no segundo e no último trabalho da série, em que os autores estudaram soluções de espalhamento e de confinamento, eles encontraram indicações de uma grande sensibilidade às condições iniciais. A partir de gráficos de escape, os autores conjecturam que para monopólos não muito afastados entre si, o movimento parece muito provavelmente ser caótico. Nesta dissertação, damos continuidade a este interessante estudo que foi interrompido em 1993. Em especial, vamos nos deter no estudo de soluções confinadas e empregar as ferramentas tradicionais de análise de caos, a saber, superfícies de seção de Poincaré, espectros de potência e expoentes de Lyapunov [12]. A análise espectral e o cálculo dos expoentes de Lyapunov, pelo que sabemos, não haviam sido ainda feitos anteriormente e são os resultados originais desta dissertação.

No próximo Capítulo, vamos apresentar uma visão geral destes métodos numéricos tradicionais para caracterizar movimentos caóticos. Para mostrar como eles funcionam na prática, vamos aplicá-los a um modelo específico, a saber, o modelo hamiltoniano de Hénon-Heiles [13]. No Capítulo 3, vamos mostrar como soluções clássicas exatas que representam configurações de monopólo estáticas, esfericamente simétricas e de carga um podem ser obtidas no chamado limite BPS de uma teoria de Yang-Mills-Higgs $SU(2)$ através de uma identificação conveniente do campo eletromagnético. No Capítulo 4, vamos mostrar com detalhe a obtenção das equações de movimento para o movimento geodésico de dois monopólos magnéticos BPS utilizando a métrica de Atiyah-Hitchin. Inicialmente, vamos descrever esta métrica e derivar as equações para as componentes da métrica. Formulamos o problema de

dois monopólos através do método de Manton e expomos nossa análise detalhada do limite assintótico integrável do movimento de dois monopólos. Ao final, estudamos a integrabilidade do sistema hamiltoniano determinado pela métrica de Atiyah-Hitchin. Nossos resultados numéricos são apresentados no Capítulo 5. Começamos reproduzindo os resultados de Temple-Raston [10] para as superfícies de seção de Poincaré. A seguir, vamos tratar da análise espectral de algumas soluções temporais representativas. Finalmente, apresentamos nossos resultados para os expoentes característicos de Lyapunov, correspondentes às mesmas séries temporais utilizadas para a análise espectral. Nossas conclusões e perspectivas futuras são apresentadas no Capítulo 6. A dissertação ainda conta com quatro Apêndices, onde apresentamos derivações explícitas de alguns resultados utilizados no corpo da dissertação, como também discutimos o método de Runge-Kutta de quarta ordem para a integração numérica de equações diferenciais.

Capítulo 2

Superfícies de seção de Poincaré, espectros de potência e expoentes de Lyapunov

Pode-se agora considerar como um fato de reconhecimento geral que a maior parte dos sistemas hamiltonianos tenha o espaço de fase preenchido de regiões nas quais algumas propriedades da maioria das trajetórias são tão aleatórias quanto o resultado de um lançamento de dados, mesmo sendo a dinâmica determinista. Para o pessoal da Mecânica Estatística pode ser uma surpresa esse comportamento incomum poder ocorrer já em sistemas com apenas dois ou três graus de liberdade. Além disto, este fato não se restringe somente a problemas hamiltonianos, aparecendo também em sistemas dinâmicos com fricção interna, denominados sistemas dinâmicos dissipativos. Um cenário característico para o surgimento de soluções complicadas em sistemas dissipativos envolve uma transição de movimento quase-periódico existente num atrator representado por um toro no espaço de fase para movimento aperiódico num atrator estranho [14].

No que se refere a sistemas hamiltonianos, nos quais concentra-se nossa atenção, a maioria é não-integrável. Embora a integrabilidade possa ser agradável, no sentido de que se presta à análise analítica, ou seja, existem variáveis de ângulo-ação que tornam a dinâmica trivial, de certa forma é extremamente rara. Mesmo assim, há dois casos importantes em que a estrutura das equações de movimento nos permite mudar variáveis de modo a se produzirem equações solucionáveis, a saber, o oscilador harmônico e o pêndulo simples. Ambos são discutidos na Ref. [15].

A teoria moderna dos sistemas dinâmicos hamiltonianos foi criada sob a influência de dois estímulos importantes: os resultados de alguns cálculos computacionais realizados por Hénon e Heiles e o teorema conhecido como o teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser, que é útil no estabelecimento da existência de soluções quase-periódicas para sistemas hamiltonianos. Esse teorema aplica-se a perturbações de sistemas integráveis com qualquer número de graus de liberdade. Sua implicação mais notável é que, no espaço de fase, mesmo na presença de uma pequena perturbação, haverá regiões de movimento regular, como para um sistema integrável, e outras regiões nas quais o sistema apresentará um comportamento bem irregular das trajetórias. A Ref. [16] contém uma prova desse teorema, uma descrição da literatura inicial e vários exemplos investigativos.

O modelo de Hénon-Heiles [13] tornou-se o campo de provas para diversos métodos gerais no estudo de sistemas dinâmicos caóticos. Neste capítulo, vamos apresentar

uma visão geral dos métodos mais utilizados e vamos mostrar, através de resultados numéricos concretos para este modelo, como eles funcionam na prática. Todos os códigos numéricos foram escritos por nós, tendo sido testados confrontando nossos resultados com resultados da literatura. Testes foram também feitos usando outros modelos que, para não tornar o assunto muito repetitivo, não serão discutidos aqui. Começaremos discutindo o método padrão, envolvendo a superfície de seção de Poincaré.

2.1 Superfícies de seção de Poincaré

É interessante poder-se estabelecer se um determinado sistema dinâmico é integrável ou não. Para um sistema hamiltoniano independente do tempo com dois graus de liberdade, podemos efetuar uma verificação numérica, construindo uma superfície de seção de Poincaré. Esse sistema é autônomo e a hamiltoniana é, então, uma integral do movimento. Sob as hipóteses dadas, a hamiltoniana pode ser escrita como

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = E, \quad (2.1)$$

onde a energia, E , é uma constante, q_i e p_i são a posição e o momento canônico em associação com o i -ésimo grau de liberdade. Em consequência desse condicionante, se restringirmos as condições iniciais a um valor da energia, haverá então somente três coordenadas independentes restantes. Segue-se que as trajetórias acham-se confinadas a uma superfície de energia tridimensional no espaço de fase. Indo mais além, se a Eq. (2.1) pode ser solucionada para p_2 , ela pode ser escrita da forma $p_2 = p_2(p_1, q_1, q_2, E)$. Agora, em acréscimo à energia total, seja dada uma segunda integral de movimento

$$I_2(p_1, p_2, q_1, q_2) = C_2, \quad (2.2)$$

onde C_2 é uma constante. Assim, podemos dizer que aí se produz também uma superfície tridimensional no espaço de fase quadridimensional. Além disso, se nos forem dadas as condições iniciais, E e C_2 serão estabelecidos e a órbita correspondente ficará restrita à interseção das superfícies definidas pelas Eqs. (2.1) e (2.2), isto é, a uma superfície bidimensional no espaço de fase. Por exemplo, se combinarmos as Eqs. (2.1) e (2.2), poderemos eliminar p_1 e, então, escrever o momento p_2 como uma função das duas coordenadas q_1 e q_2 : $p_2 = p_2(q_1, q_2, E, C_2)$. Escolhendo $q_1 = 0$, a órbita coloca-se sobre uma curva unidimensional no plano $p_2 q_2$; nesse caso, diz-se que o movimento é ordenado e que a hamiltoniana é integrável na energia E .

De modo geral, não poderemos identificar uma integral de movimento adicional como I_2 . Pensaríamos então em trajetórias como curvas em movimento ao longo do espaço tridimensional. Uma vez que o espaço tridimensional ainda é difícil de ser visualizado, surge a tentação de se encontrar uma forma melhor para representar as soluções. Aqui usamos uma idéia que se deve à pessoa que lançou as raízes matemáticas da teoria moderna dos sistemas dinâmicos, o matemático Henri Poincaré. As vantagens do método de Poincaré, conhecido como superfície de seção, constituem-se na simplicidade e facilidade de aplicação. Agora passaremos a discutir seu método.

Em vez de observarmos trajetórias contínuas complicadas em $\mathbb{R}^3$, nos concentraremos em um subespaço bidimensional da superfície de energia constante, denominada superfície de seção, escolhida de maneira tal que a interseção das trajetórias se dê transversalmente. Este é um passo clássico [17]. Uma vez que a seção foi selecionada, nos concentraremos nos pontos de interseção consecutivos que atravessam a seção em uma direção, visualizando o movimento como um mapa ponto a ponto na própria seção. Para alguns problemas de mecânica, como o problema de Duffing, esse mapa pode ser obtido, aproximadamente, aplicando-se os métodos convencionais da teoria das perturbações [18]. De modo geral, é preciso recorrer a cálculos numéricos. Uma abordagem simplista ao cálculo numérico do mapa de Poincaré envolveria a integração passo a passo das equações de movimento de Hamilton,

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad (2.3)$$

para $k = 1, 2$, e um teste das mudanças de sinal de um determinado componente, digamos q_1 , quando o plano $q_1 = 0$ é utilizado como seção de Poincaré. Entretanto, para se localizarem os pontos de interseção da órbita com um plano, é preciso usar um esquema de interpolação, que funciona ajustando-se curvas polinomiais entre os pontos da órbita com sinais opostos de q_1 .

Adotando-se o método de Poincaré, reduz-se enormemente a quantidade de dados a ser manipulada, já que quase todos os pontos da órbita podem ser ignorados. Isso mostra uma das vantagens do método presente. Uma vantagem mais prática é a de que a caracterização de um regime dinâmico pode ser obtida de maneira mais natural. Por exemplo, uma simples evolução periódica se tornaria um único ponto fixo na seção de Poincaré; uma órbita periódica com duas frequências comensuráveis (o que significa que as frequências são frações racionais uma da outra) resultaria num número finito de pontos repetidos indefinidamente na mesma ordem; uma órbita quase-periódica de duas frequências desenharia uma curva que nunca volta exatamente a seus traços anteriores, e o movimento caótico apareceria como uma miríade de pontos através dos quais seria difícil desenhar uma curva simples. No caso específico em que uma órbita parece preencher a seção caoticamente, presume-se, normalmente, que o sistema é não-integrável.

Para dar um exemplo da determinação de um mapa de Poincaré numa seção p_2q_2 localizada na posição $q_1 = 0$ no espaço de fase, consideramos aqui o caso de dois osciladores harmônicos simples com um acoplamento não-linear, descrito pela hamiltoniana de Hénon-Heiles

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3 = E, \quad (2.4)$$

que decorre de um modelo para o movimento de uma estrela-teste no potencial efetivo devido às outras estrelas de uma galáxia [13, 19] e uma série de outros fenômenos da física [20]. Esse sistema dinâmico possui dois graus de liberdade e uma integral do movimento conhecida, a energia. As equações de movimento, que podem ser obtidas a partir das equações de Hamilton, levam ao sistema acoplado

de quatro equações diferenciais de primeira ordem, duas das quais são não-lineares:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= p_1, & \dot{p}_1 &= -q_1 - 2q_1q_2, \\ \dot{q}_2 &= p_2, & \dot{p}_2 &= -q_2 - q_1^2 + q_2^2.\end{aligned}\tag{2.5}$$

As equações de movimento acima podem ser diretamente integradas (para diversos valores da energia E e diversos valores iniciais), aplicando-se qualquer rotina simples como o procedimento clássico de Runge-Kutta, correto até a quarta ordem do passo do tempo, que iremos discutir no Apêndice C. Uma vez que planejamos resolver as equações de movimento numericamente, precisamos fornecer condições prévias para as coordenadas q_1 , q_2 , p_1 e p_2 . Para isto, seguimos Hénon e Heiles e selecionamos o caso de uma energia típica, $E = 1/12$, com determinados valores para as coordenadas q_2 e p_2 ; o valor para p_1 segue a partir da integral de energia onde escolhemos a raiz positiva:

$$p_1 = \left(\frac{1}{6} - q_2^2 - p_2^2 + \frac{2}{3}q_2^3\right)^{1/2}.\tag{2.6}$$

Uma vez conhecidas as condições prévias, pode-se calcular uma série de trajetórias e os resultados desses cálculos podem então ser utilizados para se construir um mapa de Poincaré, considerando-se os pontos sucessivos nos quais uma determinada trajetória cruza o plano transversal p_2q_2 em $q_1 = 0$ com $p_1 \geq 0$. Consideramos aqui o mapa de Poincaré obtido marcando-se q_2 and p_2 cada vez que uma órbita fura a superfície da seção $q_1 = 0$ em direção descendente.

Agora chegamos a um ponto na nossa discussão do método de análise de Poincaré, no qual seria natural desenhar uma apresentação gráfica para a integração numérica das Eqs. (2.5) na energia $E = 1/12$. Na Fig. 2.1, representamos graficamente os pontos de interseção de catorze órbitas individuais no plano p_2q_2 para este valor de energia.

Inspecionando esse gráfico no espaço de fase, vemos que há quatro regiões de movimento regular, caracterizadas pela propriedade de que as órbitas têm um comportamento que parece semelhante a movimentos quase-periódicos (os pontos de interseção calculados situam-se sobre curvas fechadas, neste caso). Também contidos na Fig. 2.1 encontram-se quatro pontos fixos elípticos, os quais constituem os centros das órbitas fechadas e correspondem a soluções periódicas do modelo matemático proposto por Hénon e Heiles. Entre as regiões de movimento regular existe uma única linha divisória que cruza a si própria três vezes nos pontos que são chamados pontos fixos hiperbólicos. Essa linha corresponde, num pêndulo simples, ao movimento que separa a libração da rotação em torno do ponto de suspensão. A impressão geral é que o sistema de Hénon-Heiles é integrável em $E = 1/12$, de forma que, além da hamiltoniana, tem que existir uma segunda integral de movimento. Sucede que essa interpretação não é bem correta. Cálculos numéricos precisos, realizados por Magnenat [21], indicaram que, no valor da energia $E = 1/12$, encontra-se comportamento irregular nas áreas vizinhas dos pontos fixos hiperbólicos.

Um dos resultados interessantes da Ref. [13] é a observação que, para E ligeiramente maior que $1/12$, o plano transversal de Poincaré indica a presença simultânea de regiões ordenadas e caóticas. Esse quadro é claramente ilustrado pela Fig. 2.2, que refere-se a $E = 1/8$. A Fig. 2.2 é gerada pela integração numérica de dezoito

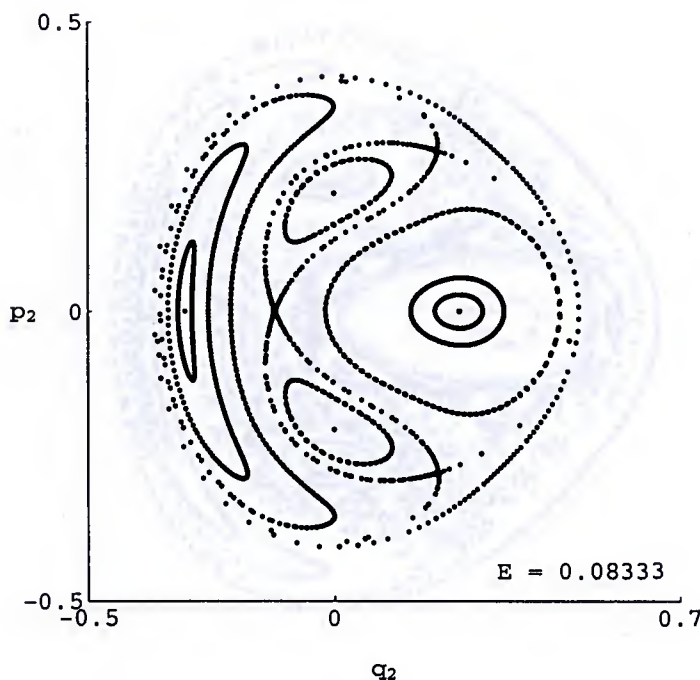


Figura 2.1: Superfícies de seção de Poincaré para o sistema de Hénon-Heiles no plano p_2q_2 em $q_1 = 0$ com $p_1 \geq 0$, para uma energia $E = 1/12$.

órbitas e a marcação dos pontos de interseção com o plano q_2 (horizontal) versus p_2 (vertical) em $q_1 = 0$ com $p_1 \geq 0$. Observamos, a partir do gráfico na Fig. 2.2, que algumas das órbitas ainda situam-se em superfícies bidimensionais e correspondem a movimento ordenado, mas há também pontos espalhados que são criados por uma única solução particular que percorre a superfície de energia tridimensional. Mais uma vez, encontramos quatro pontos fixos elípticos que correspondem a quatro soluções periódicas em torno das quais há toros. Claramente visíveis no lado direito da Fig. 2.2 estão também cinco ilhotas com pontos elípticos em seus centros. Os centros das cinco ilhotas são uma órbita de período cinco. Entre elas, há cinco pontos fixos hiperbólicos. Para um ponto fixo hiperbólico, algumas trajetórias vizinhas aproximam-se e outras afastam-se do ponto fixo, fundindo-se nas regiões caóticas ao redor das cinco ilhas. Contrastando com o hiperbólico, para um ponto fixo elíptico, trajetórias vizinhas nem se aproximam nem se afastam do ponto fixo. Uma situação adicional é que, em energias ainda mais altas, parece haver uma transição completa do comportamento coerente para o caótico. No entanto, há ainda curvas fechadas nas redondezas de uma órbita originalmente periódica. MacKay [22] examinou uma transição análoga em mapas de preservação de áreas, que representam os sistemas de conservação mais simples.

Os diversos aspectos acima mencionados foram esclarecidos primeiramente pelos cálculos de Hénon e Heiles [13], e pelo menos alguns foram mais tarde enfatizados por Gustavson [19], que também tratou explicitamente do problema da segunda integral

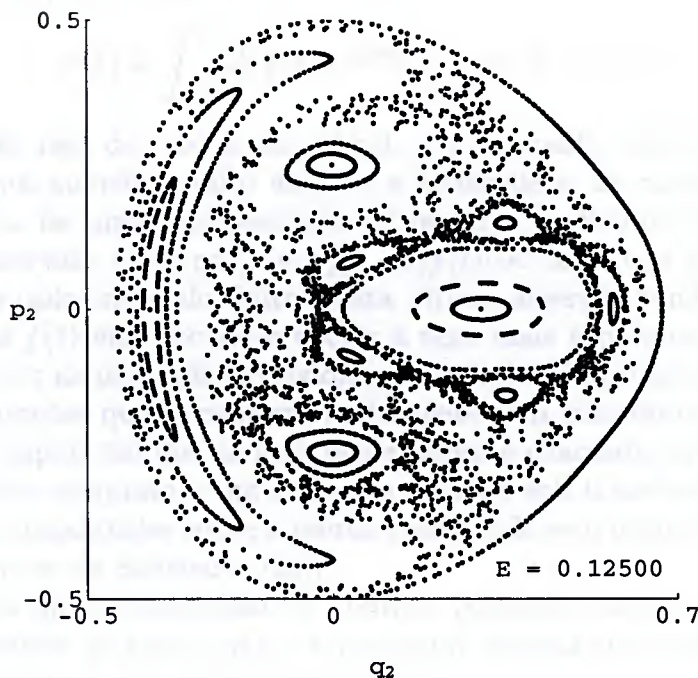


Figura 2.2: Mesmo que na Fig. 2.1, mas para $E = 1/8$.

com o uso de ferramentas analíticas. Deve-se observar que o tipo de caos descrito pelo modelo de Hénon-Heiles ocorre em diversos sistemas hamiltonianos. Um exemplo famoso é o do problema dos três corpos celestiais. A este respeito, vamos encerrar esta parte salientando que Vázquez et al. [23] compararam o diagrama genérico de velocidade de escape para o Mapa de Cremona (ver [24] e as referências inclusas), que é o caso conservativo do bem conhecido Mapa de Hénon, com um diagrama desse tipo para o problema dos três corpos celestiais, encontrando grandes semelhanças entre os dois sistemas. Isso sugere que o Mapa de Cremona constitui um modelo adequado para problemas físicos reais nos quais pode ocorrer escape.

2.2 Espectros de potência

A seção anterior tratou do estudo de trajetórias no espaço de fase usando um método qualitativo aplicado no domínio do tempo. Para um entendimento mais quantitativo da dinâmica, vamos discutir nesta seção um método aplicado ao domínio de frequências, baseado no método da transformada de Fourier. Este método fornece informações a respeito da contribuição de cada harmônico à dinâmica global do sistema e, em particular, é possível verificar se existem particulares frequências que dominam a dinâmica. Com isto, obtém-se um espectro de potência de frequências, que fornece o quadrado da amplitude associada a cada componente de frequência.

De uma maneira mais formal, a transformada de Fourier $F(s)$ de uma função

dependente do tempo $f(t)$ é escrita como

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i2\pi st}, \quad -\infty < s < \infty, \quad (2.7)$$

onde t é tomado real de $-\infty$ a ∞ . Aqui, s é chamada variável de frequência. Colocado de uma maneira muito simples e incompleta, as condições necessárias para a existência de uma representação de integral de Fourier são que $f(t)$ seja integrável no intervalo $(-\infty, \infty)$, i.e., $\int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)| < \infty$, e que $f(t)$ seja contínua aos pedaços em cada intervalo finito. Esta última asserção também inclui o fato de que a função $f(t)$ em $\pm\infty$ deve decair a zero mais rapidamente que qualquer potência de t , pois as integrais envolvidas são integrais impróprias. Tecnicamente, o conjunto de funções que decrescem, juntamente com suas derivadas, de maneira suficientemente rápida tal que as integrais existam é chamada de classe de funções de Schwartz. Este conjunto é um conjunto fechado sob transformação de Fourier (para maiores tecnicidades sobre a teoria, recomenda-se o livro de Koopmans [25]; veja também o livro de Strichartz [26]).

Com a ajuda da representação de Fourier, podemos calcular a quantidade de energia por unidade de tempo (i.e., a potência) contida no sinal $f(t)$ como uma função da frequência s , de acordo com

$$P(s) \propto |F(s)|^2. \quad (2.8)$$

A potência $P(s)$ é então uma função real e não negativa de s . A Eq. (2.8) é chamada de densidade espectral de potência (DEP) da função $f(t)$.

Em aplicações, a função $f(t)$ reflete a dinâmica de alguma variável de estado, como uma coordenada de posição $q(t)$, ou uma coordenada de momento $p(t)$, como função do tempo t . A fim de determinar a evolução no tempo de uma determinada variável de estado, para dadas condições iniciais, são necessários cálculos numéricos detalhados. Com isto, temos então que nos restringir a intervalos de tempo finitos, mas arbitrariamente longos. No que segue, vamos supor que uma série temporal $f_j \in \mathbb{R}, j = 0, 1, \dots, N-1$ de uma única variável tenha sido observada em intervalos iguais de tempos Δt . O que vamos apresentar a seguir é a definição original de espectro de potência. Vamos seguir de muito perto a apresentação de Rasband [15], com pequenas modificações. Uma maneira muito similar de calcular o espectro de potência foi feita por Bergé, Pomeau e Vidal [27].

Para nossos propósitos aqui, introduzimos uma transformada de Fourier discreta da série $f_j \equiv f(j \Delta t)$ como

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i2\pi jk/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.9)$$

com $i = \sqrt{-1}$. Usando esta expansão, juntamente com as relações de ortogonalidade discretas para as exponenciais complexas periódicas

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi(k-\ell)n/N} = \begin{cases} N & \text{if } k - \ell = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0 & \text{outros casos,} \end{cases} \quad k, \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.10)$$

encontramos imediatamente que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i2\pi jk/N} &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i2\pi kn/N} \right) e^{i2\pi jk/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i2\pi kn/N} e^{i2\pi jk/N} \right) = \sqrt{N} f_j, \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Este resultado é chamado de transformada de Fourier inversa. A transformada inversa indica como se volta do domínio da transformada ao domínio original, com a diferença que f_j é agora periódica. Usando a Eq. (2.11), em conjunção com as relações de ortogonalidade, obtemos a identidade de Plancherel para a transformada de Fourier discreta:

$$\sum_{j=0}^{N-1} |f_j|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |F_k|^2. \quad (2.12)$$

A seguir, definimos a função de correlação temporal da série f_j escrevendo

$$C_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j f_{j+k}. \quad (2.13)$$

Esta quantidade é muito útil para mostrar as consequências mensuráveis da presença de comportamento irregular em sistemas dinâmicos simples [28]. Inserindo a Eq. (2.11) na Eq. (2.13), obtemos

$$C_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{m,m'=0}^{N-1} F_m F_{m'} e^{i2\pi[jm+(j+k)m']/N}, \quad (2.14)$$

da qual inferimos que

$$C_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |F_m|^2 e^{-i2\pi km/N}. \quad (2.15)$$

Para chegarmos neste resultado, fizemos uso das relações de ortogonalidade e empregamos a propriedade de simetria da transformada de Fourier discreta

$$F_{-k} = \bar{F}_k. \quad (2.16)$$

De especial importância é o resultado obtido tomando a transformada inversa em ambos os lados da Eq. (2.15):

$$|F_m|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{i2\pi km/N}. \quad (2.17)$$

Esta é a definição original de um espectro de frequência.

A quantidade $|F_m|^2$ representa a contribuição da m -ésima componente de frequência ao movimento global da série temporal f_j . As Eqs. (2.15) e (2.17) mostram que a função de correlação temporal e a potência da m -ésima componente de frequência formam um par de transformadas discretas (teorema de Wiener-Khintchin; veja Feller [29]). É usual plotar o espectro de potência $|F_m|^2$ como função da frequência $s_m = m/(N\Delta t)$. Na prática, num cálculo numérico, o espectro de potência $|F_m|^2$ pode ser calculado via um algoritmo de transformada de Fourier rápida - Fast Fourier Transform (FFT). Para evitar oscilações espúrias na transformada discreta, é usual usar-se janelas de frequências (windowing) - veja, por exemplo, as explicações e a literatura dada na Ref. [30].

Análises de frequências têm se mostrado particularmente úteis para distinguir movimentos quase-periódicos de evoluções caóticas no tempo [31]. Os espectros de movimentos quase-periódicos são linhas discretas com frequências sem interrelações entre si, enquanto os movimentos caóticos apresentam um espectro tipicamente ruidoso. Mais especificamente, para um movimento periódico com frequência s_1 , a análise de frequência consiste de picos de δ 's de Dirac na frequência s_1 e nos seus harmônicos $2s_1, 3s_1, \dots$. Para um movimento quase-periódico com m frequências racionalmente independentes (ou incomensuráveis) $s_1, \dots, s_m$, obtém-se um conjunto de picos de δ 's de Dirac nestas frequências, e também picos em todas as combinações lineares inteiras das m frequências fundamentais $s_1, \dots, s_m$. Em contraste, para o caso de um movimento caótico, obtém-se um espectro de potência contínuo, sem nenhum conteúdo harmônico de periodicidade - o espectro não contém picos discretos ou, equivalentemente, a função de correlação temporal decai rapidamente no tempo. Neste último caso, é de se esperar que as frequências mais baixas contribuam ao espectro. Isto pode ser pensado como sendo devido ao fato de que pontos aperiódicos num conjunto finito de dados aparecem como pontos com períodos muito longos, comparáveis ao comprimento da série temporal.

As considerações acima são essenciais para entender algumas características dos espectros mostrados na Fig. 2.3 a seguir. Os espectros se referem a realizações determinísticas da variável p_2 obtidas do estudo numérico do sistema de Hénon-Heiles para $E = 1/8$, com condições iniciais que correspondem a comportamentos periódico e caótico. Estas realizações dependentes do tempo, observados na seção anterior usando o método das seções de Poincaré, manifestam-se como uma oscilação numa frequência $s_1 \approx 0.13$, como mostrado na Fig. 2.3a para $q_2(0) = 0$ e $p_2(0) = 0.25$, e como uma série errática contendo essencialmente todas as componentes de frequências em proporções desiguais, como mostrado na Fig. 2.3b para $q_2(0) = -0.20$ e $p_2(0) = 0$. Pode-se ver na Fig. 2.3a, que o módulo-quadrado da transformada de Fourier da oscilação periódica, mostrada numa escala logarítmica, resulta nos picos agudos esperados e harmônicos associados (a largura de linha de 0.01 destes picos agudos é determinada pelo comprimento da série temporal). No entanto, picos agudos não aparecem no espectro de potência da oscilação não-periódica, como mostrado na Fig. 2.3b. Aqui, nota-se de maneira bem visível um conteúdo de baixa-frequência bastante largo, em contraste com o espectro da Fig. 2.3a.

Enquanto que a aplicação das técnicas tradicionais de análise espectral com alta resolução de frequências exprime periodicidade imediatamente, esta não pode dis-

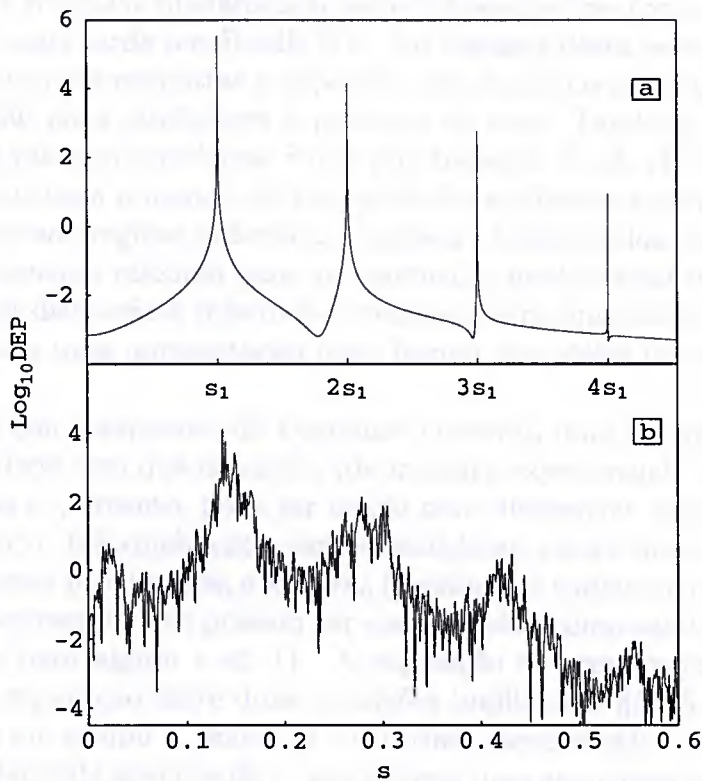


Figura 2.3: Espectro de potência calculado numericamente para um movimento periódico (a) e um movimento caótico (b) da variável p_2 que satisfaz as Eqs. (2.5) para $E = 1/8$.

criminar de maneira inambígua entre comportamento caótico e randômico. Assim, é natural perguntar-se: como pode-se estar seguro que o que parece ser caótico é realmente caótico? Para responder esta e outras questões similares, é necessária uma caracterização precisa das propriedades do comportamento irregular. Portanto, é desejável desenvolver um método para extrair quantidades físicas da série temporal irregular observada. As quantidades mais básicas para caracterizar comportamento caótico são os expoentes característicos positivos de Lyapunov [32]. A próxima seção apresenta o conceito de um coeficiente característico de Lyapunov.

2.3 Expoentes característicos de Lyapunov

Nosso método de calcular um expoente de Lyapunov não-negativo é inspirado numa técnica desenvolvida independentemente por Benettin et al. [33] e Shimada e Nagashima [34] para determinar um conjunto completo de expoentes de Lyapunov característicos a partir de equações diferenciais.

Durante as últimas duas décadas tem havido um interesse considerável na direção

de calcular estes expoentes, o que resultou em vários métodos numéricos diferentes [35]. Muito do trabalho fundamental sobre expoentes de Lyapunov foi feito por Oseledec [36] e mais tarde por Ruelle [37]. No restante desta seção vamos descrever um procedimento para encontrar o expoente característico de Lyapunov dominante, o que é suficiente para estabelecer a presença de caos. Também, uma revisão será feita de alguns cálculos numéricos feitos por Benettin et al. [32] que calcularam o expoente máximo para o modelo de Hénon-Heiles a diferentes energias, para valores iniciais tomados nas regiões ordenada e caótica. Contopoulos, Galgani e Giorgilli calcularam o expoente máximo para um particular modelo com três graus de liberdade [38]. Nossa discussão é informal e orientada para um cálculo prático, baseada na Ref. [39]; para uma apresentação mais formal das idéias discutidas aqui, ver a Ref. [40].

Lembramos que o expoente de Lyapunov constitui uma quantidade para caracterizar a velocidade com que divergem (de maneira exponencial) ou convergem trajetórias vizinhas e, portanto, pode ser usado para diferenciar entre comportamento caótico e periódico. Informalmente, vamos considerar, para o momento, duas órbitas iniciadas por pontos próximos $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0$ (próximos o suficiente para que dentro de algum erro experimental eles possam ser considerados como sendo o mesmo ponto, i.e., $\|\delta\mathbf{x}_0\| = \epsilon$ para algum $\epsilon \ll 1$). A suposição de crescimento ou decaimento exponencial da separação entre duas condições implica em $\|\delta\mathbf{x}_\tau\| \approx e^{L\tau}\|\delta\mathbf{x}_0\|$, após o transcurso de um tempo τ , onde L é o expoente característico de Lyapunov. Para valores suficientemente grandes de τ , isto fornece uma aproximação para o expoente característico de Lyapunov máximo $L_{\max}$, tal que

$$L_{\max} \approx \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lim_{\|\delta\mathbf{x}_0\| \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \log \left(\frac{\|\delta\mathbf{x}_\tau\|}{\|\delta\mathbf{x}_0\|} \right). \quad (2.18)$$

Um valor positivo para $L_{\max}$ significa que as órbitas iniciadas em $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0$ tornam-se descorrelacionadas e, assim, $\mathbf{x}_0$ tem uma dependência sensível às condições iniciais, um sinal de caos. Claramente, a fórmula derivada é fácil de entender e fácil de implementar. No entanto, o cálculo na prática do expoente de maior valor, com base na Eq. (2.18), é dificultado pelo fato que num sistema caótico, qualquer erro $\delta\mathbf{x}_0$, não interessando quão pequeno, eventualmente vai resultar num número grande demais para ser representado por um número ordinário num computador. Então, um método diferente é necessário. Daqui para frente, vamos nos concentrar no estudo e na aplicação do método da matriz Jacobiana, que faz uso do espaço tangente de uma trajetória observada. Nos casos de interesse, esta trajetória é caótica.

Vamos considerar uma trajetória observada $\mathbf{x}(t)$, que pode ser considerada como sendo uma solução de um certo conjunto autônomo de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)), \quad (2.19)$$

definido num espaço de fase ($\mathbf{x}$ e $\mathbf{F}$ são vetores coluna n -dimensionais). Para dadas n condições iniciais $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$, a Eq. (2.19) leva a uma curva solução $\mathbf{x}(t) = \Phi(t, \mathbf{x}_0)$, que satisfaz, claramente, a condição $\mathbf{x}_0 = \Phi(0, \mathbf{x}_0)$. Referimo-nos a Φ como o conjunto de todas as possíveis curvas solução. O sistema da Eq. (2.19) pode ser

linearizado em qualquer ponto $\mathbf{x}(t)$ da trajetória, fazendo

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t), \quad (2.20)$$

onde $\delta\mathbf{x}(t)$ é o vetor desvio de $\mathbf{x}(t)$. A melhor aproximação linear é dada pela série de Taylor truncada em $\mathbf{x}(t)$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t)) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{J}(\mathbf{x}(t)) \cdot \delta\mathbf{x}(t) + \mathcal{O}(\|\delta\mathbf{x}(t)\|^2), \quad (2.21)$$

onde $\mathbf{J}(\mathbf{x}(t))$ é a matriz Jacobiana $n \times n$ de $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}(t)) = [\partial\mathbf{F}(\mathbf{x})/\partial\mathbf{x}]|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)}. \quad (2.22)$$

Assim, podemos escrever o sistema de equações para o vetor desvio $\delta\mathbf{x}(t)$ como

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}(t)) \cdot \delta\mathbf{x}(t), \quad (2.23)$$

ignorando os termos de grau 2 ou maior. Claramente, este é um sistema de equações diferenciais lineares, mesmo que o sistema original tenha termos não lineares. A fim de evidenciar mais claramente o conteúdo da Eq. (2.23), introduzimos

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \lim_{\|\delta\mathbf{x}(0)\| \rightarrow 0} \frac{\delta\mathbf{x}(t)}{\|\delta\mathbf{x}(0)\|}, \quad (2.24)$$

como um elemento do espaço tangente $\mathbf{x}(t)$, tal que

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \nabla\mathbf{F}(\Phi(t, \mathbf{x}_0)) \cdot \boldsymbol{\xi}(t). \quad (2.25)$$

Este conjunto de equações é chamado de sistema variacional correspondente à solução da Eq. (2.19) sob dados iniciais $\mathbf{x}_0$; ele propaga pequenas variações tangentes à órbita no tempo 0 a pequenas variações à órbita no tempo t . Ele é também a equação de fluxo para determinar o expoente característico de Lyapunov máximo (denotado por ora por $L_{\max}$). A Eq. (2.18) para $L_{\max}$ então, toma a forma transparente

$$L_{\max}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}_0) \approx \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\boldsymbol{\xi}(t)\|. \quad (2.26)$$

Em geral, o vetor inicial $\boldsymbol{\xi}_0$ é escolhido aleatoriamente, de maneira que não tenha uma orientação pré-definida no espaço tangente. Portanto, espera-se que para um vetor $\boldsymbol{\xi}_0$ escolhido aleatoriamente, a Eq. (2.26) leve ao maior expoente. Se este expoente for positivo, temos fortes indicações de dinâmica caótica.

Vamos passar agora para a descrição de nossos resultados numéricos. O objetivo era calcular a quantidade $L_{\max}$ para o sistema hamiltoniano de Hénon-Heiles de dois graus de liberdade. Para o cálculo de $L_{\max}$, integramos diretamente as equações de órbita, juntamente com as correspondentes equações variacionais. Para o sistema de Hénon-Heiles, as equações variacionais são facilmente deduzidas linearizando a Eq. (2.5), obtendo-se

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{q_1} &= \xi_{p_1}, & \dot{\xi}_{p_1} &= -\xi_{q_1} - 2q_2\xi_{q_1} - 2q_1\xi_{q_2}, \\ \dot{\xi}_{q_2} &= \xi_{p_2}, & \dot{\xi}_{p_2} &= -\xi_{q_2} - 2q_1\xi_{q_1} + 2q_2\xi_{q_2}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

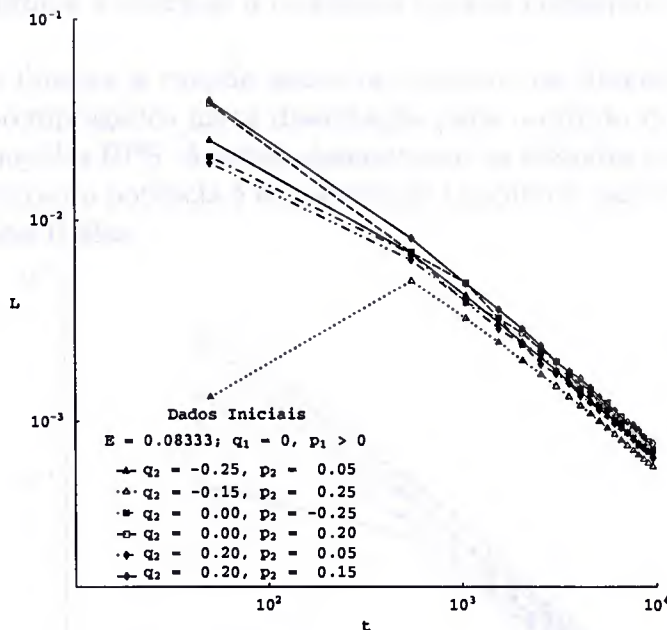


Figura 2.4: $L(t)$ para uma energia $E = 1/12$, para seis diferentes condições iniciais.

Iniciamos nossos cálculos com um valor de energia para o qual os cálculos numéricos indicavam a existência de uma segunda integral de movimento, pelo menos dentro da precisão dos gráficos das superfícies de seção de Poincaré que havíamos calculado anteriormente.

Os resultados para $L(t) = \log(\|\xi(t)\|)/t$ como função de t numa escala log-log são mostrados na Fig. 2.4 para seis condições iniciais diferentes tomadas na região regular – note que cada curva está assinalada com um símbolo diferente. O valor inicial para ξ usado na integração foi $\|\xi_0\| = 1$. Como se pode ver na Fig. 2.4, todas as órbitas parecem levar a um valor presumivelmente igual a zero para $L_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} L(t)$. Este comportamento genérico para $L(t)$ não muda com o aumento da energia, desde que se escolha condições iniciais apropriadamente de maneira que estas se encontrem na região de comportamento regular. Isto está ilustrado na Fig. 2.5. Para comparar, a curva correspondente a $E = 1/12 = 0,08333 \dots$ também está indicada.

Vamos agora analisar o comportamento de $L(t)$ para a energia $E = 1/8$. Os resultados $L(t)$ estão mostrados na Fig. 2.6, para seis diferentes condições iniciais, três delas são tomadas na região regular, e as outras três na região caótica. Na Fig. 2.2, a curva 1 corresponde a um ponto inicial numa das duas regiões regulares simétricas próximas ao eixo p_2 ; a curva para a órbita 2 refere-se a um ponto inicial dentro da grande região regular ao redor do eixo q_2 , enquanto que a curva 3 corresponde a um ponto inicial numa das pequenas ilhas envolvendo esta região. Para estas curvas, o expoente de Lyapunov máximo aproxima-se de zero para $t \rightarrow \infty$. Por outro lado, as curvas 4-6 parecem aproximarem-se de valores limites positivos de $L_{\max}$. A curva

para a órbita 1 refere-se a condições iniciais correspondentes àquelas para a Fig. 2.3a, e a curva para a órbita 4 refere-se a condições iniciais correspondentes àquelas da Fig. 2.3b.

Esta discussão finaliza a revisão sobre os métodos de diagnóstico de soluções caóticas que serão empregados nesta dissertação para o estudo do movimento geodésico de dois monopólos BPS. A saber, descrevemos os métodos baseados em seções de Poincaré, espectros de potência e expoentes de Lyapunov, fazendo uma aplicação ao modelo de Hénon-Heiles.

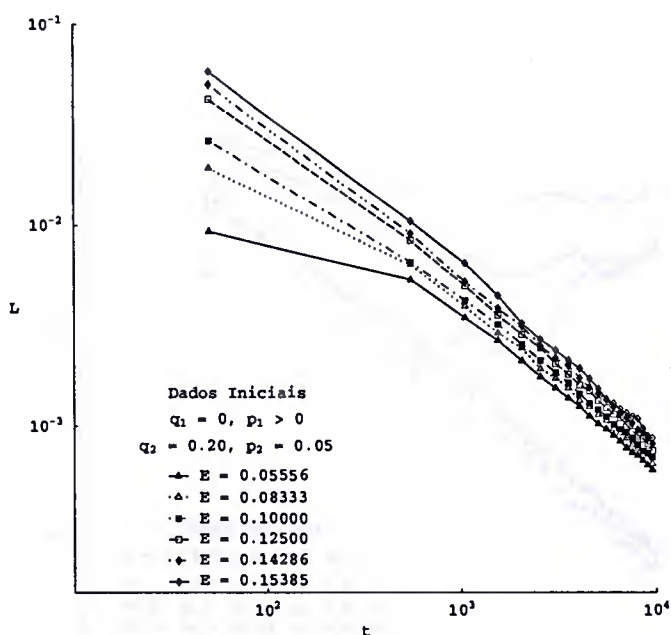


Figura 2.5: $L(t)$ a diferentes energias, para condições iniciais na região regular.

Capítulo 3

Modelo de Higgs $SL(3)$ não-Abeliano

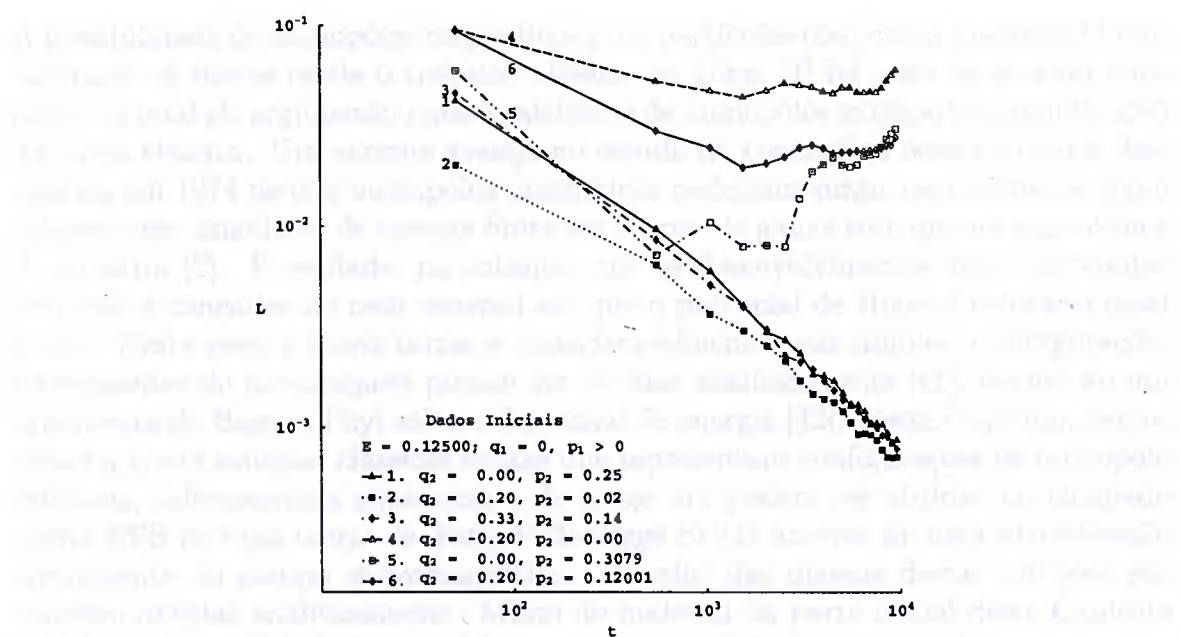


Figura 2.6: $L(t)$ a uma energia $E = 1/8$, para seis condições iniciais diferentes, três escolhidas na região regular (curvas 1-3: triângulos, quadrados e diamantes preenchidos) e três na região caótica (curvas 4-6: triângulos, quadrados e diamantes vazios).

Capítulo 3

Modelo de Higgs SU(2) não-Abeliano

A possibilidade de monopólos magnéticos (i.e., partículas com carga magnética) tem fascinado os físicos desde o trabalho clássico de Dirac [1] há mais de setenta anos atrás, no qual ele argumentou que a existência de monopólos explicaria a quantização da carga elétrica. Um enorme avanço no estudo de monopólos ocorreu com a descoberta em 1974 de que monopólos magnéticos poderiam surgir naturalmente como soluções não singulares de energia finita em teorias de gauge com quebra espontânea de simetria [2]. É verdade, no entanto, que os desenvolvimentos mais marcantes têm sido alcançados no caso especial em que o potencial de Higgs é colocado igual a zero. Neste caso, a teoria torna-se consideravelmente mais simples e configurações interessantes de monopólo podem ser obtidas analiticamente [41], devido ao um argumento de Bogomol'nyi sobre o funcional de energia [42]. Neste Capítulo, vamos mostrar como soluções clássicas exatas que representam configurações de monopólo estáticas, esfericamente simétricas e de carga um podem ser obtidas no chamado limite BPS de uma teoria de Yang-Mills-Higgs SU(2) através de uma identificação conveniente do campo eletromagnético. O valor das massas destas soluções são também obtidas analiticamente. Muito do material da parte inicial deste Capítulo está baseado na Ref. [43], a qual é uma boa introdução a este assunto.

3.1 Soluções clássicas do tipo monopólo-magnético

Os monopólos que iremos discutir são os monopólos estáticos não-abelianos que surgem nas teorias de gauge de Yang-Mills-Higgs no limite quando o potencial de Higgs é pouco apreciável. Esta situação pode ser vista como uma aproximação do modelo mais comum*. Começamos considerando uma teoria de gauge SU(2) com um terno de campos vetoriais A_μ^a e um terno de campos escalares Φ^a . Em termos destes campos, a densidade da lagrangeana da teoria é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu \Phi)^a (\mathcal{D}^\mu \Phi)^a, \quad (3.1)$$

onde, como de hábito, o tensor de campo de gauge possui componentes

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (3.2)$$

*Na realidade, em muitos trabalhos sobre os monopólos, há um termo adicional $\lambda(\Phi^a \Phi^a - 1)^2$ na energia potencial, e nós tomamos o caso especial onde λ é bem pequeno.

e se lê a derivada covariante atuando sobre Φ^a na representação adjunta como

$$(\mathcal{D}_\mu \Phi)^a = \partial_\mu \Phi^a + g \epsilon^{abc} A_\mu^b \Phi^c. \quad (3.3)$$

Pode-se, de fato, verificar que a lagrangeana é invariante sob o conjunto de transformações de gauge locais, que são fornecidas por

$$\Phi^a(x) \rightarrow \Phi'^a(x) = \Phi^a(x) + i\theta^c(x)(\tau_c)^a_b \Phi^b(x) \quad (3.4)$$

e

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A'^a_\mu(x) = A_\mu^a(x) + g^{-1} \partial_\mu \theta^a(x) + \epsilon^{abc} A_\mu^b(x) \theta^c(x), \quad (3.5)$$

até os termos de ordem θ^2 , onde $\theta^a(x)$ são funções arbitrárias de x , e $(\tau_b)^a_c = i\epsilon^{abc}$ são matrizes hermiteanas 3×3 representativas dos três geradores da álgebra de Lie:

$$[\tau_b, \tau_c]_- = i\epsilon^{bcd} \tau_d. \quad (3.6)$$

Aqui, como em todo lugar no que é indicado abaixo, ϵ^{abc} são as constantes de estrutura do grupo (anti-simétricas em todos os três índices). Esses números obedecem à condição

$$\epsilon^{bce} \epsilon^{ead} + \epsilon^{cae} \epsilon^{ebd} + \epsilon^{abe} \epsilon^{ecd} = 0. \quad (3.7)$$

Aplicando-se a transformação dos campos de Yang-Mills, Eq. (3.5), na Eq. (3.2),

$$\begin{aligned} \delta F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu (\delta A_\nu^a) - \partial_\nu (\delta A_\mu^a) - g \epsilon^{abc} A_\nu^b \delta A_\mu^c + g \epsilon^{abc} A_\mu^b \delta A_\nu^c \\ &= \epsilon^{abc} (\partial_\mu A_\nu^b - \partial_\nu A_\mu^b) \theta^c + g (\epsilon^{bce} \epsilon^{ead} + \epsilon^{cae} \epsilon^{ebd}) \theta^b A_\mu^c A_\nu^d, \end{aligned} \quad (3.8)$$

e usando-se a Eq. (3.7),

$$\delta F_{\mu\nu}^a = \epsilon^{abc} (\partial_\mu A_\nu^b - \partial_\nu A_\mu^b + g \epsilon^{bde} A_\mu^d A_\nu^e) \theta^c, \quad (3.9)$$

obtemos a regra de transformação de $F_{\mu\nu}^a$:

$$F_{\mu\nu}^a(x) \rightarrow F'^a_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}^a(x) + \epsilon^{abc} F_{\mu\nu}^b(x) \theta^c(x). \quad (3.10)$$

Isto mostra que $F_{\mu\nu}^a$ transforma-se de acordo com a representação adjunta. De modo semelhante, pode-se verificar também que a derivada covariante possui a mesma propriedade de transformação do campo em que atua. Assim sendo, para provar a invariância SU(2) de $\mathcal{L}$, é suficiente demonstrar que a variação local de $F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}$ é igual a zero. A partir da Eq. (3.10), fica claro que

$$\delta (F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}) = \epsilon^{abc} F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}^b \theta^c + \epsilon^{abc} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu b} \theta^c = 0, \quad (3.11)$$

em virtude da anti-simetria de ϵ^{abc} .

A equação de Euler-Lagrange para Φ^a ,

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^a)} \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^a}, \quad (3.12)$$

leva a

$$\partial_\mu (\mathcal{D}^\mu \Phi)^a + g \epsilon^{abc} A_\mu^b (\mathcal{D}^\mu \Phi)^c = (\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \Phi)^a = 0. \quad (3.13)$$

Temos também

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu^a)} \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu^a}, \quad (3.14)$$

que resulta, depois de um pouco de álgebra,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu a} + g\epsilon^{abc} A_\mu^b F^{\mu\nu c} = (\mathcal{D}_\mu F^{\mu\nu})^a = g\epsilon^{abc} (\mathcal{D}^\nu \Phi)^b \Phi^c. \quad (3.15)$$

Agora nos voltamos ao cálculo do tensor de energia-momento $\Theta^{\mu\nu}$. Uma vez que, como bem se sabe,

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\sigma^a)} \partial^\nu A_\sigma^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^a)} \partial^\nu \Phi^a - \mathcal{L} \eta^{\mu\nu}, \quad (3.16)$$

encontramos que

$$\Theta^{\mu\nu} = -F^{\mu\sigma a} \partial^\nu A_\sigma^a + (\mathcal{D}^\mu \Phi)^a \partial^\nu \Phi^a - \mathcal{L} \eta^{\mu\nu}, \quad (3.17)$$

onde $\eta^{\mu\nu}$ é o tensor métrico diagonal, com elementos

$$\eta^{00} = -\eta^{11} = -\eta^{22} = -\eta^{33} = 1. \quad (3.18)$$

Observamos que o tensor $\Theta^{\mu\nu}$ não é invariante de gauge. Permite-se, porém, passar para um tensor de energia-momento, $\tilde{\Theta}^{\mu\nu}$, acrescentando-se a divergência quadridimensional de um tensor de posto três, que deve ser anti-simétrico com relação aos primeiros dois índices. Essa exigência tem o benefício de não contribuir à energia total e ao momento total, desde que o tensor extra decaia com rapidez suficiente no infinito espacial. Sob as considerações acima, podemos agora construir $\tilde{\Theta}^{\mu\nu}$ como

$$\tilde{\Theta}^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \partial_\sigma (F^{\mu\sigma a} A^{\nu a}), \quad (3.19)$$

que, com a assistência da Eq. (3.15), produz o seguinte resultado:

$$\tilde{\Theta}^{\mu\nu} = -F^{\mu\sigma a} F^\nu_{\sigma a} + (\mathcal{D}^\mu \Phi)^a (\mathcal{D}^\nu \Phi)^a - \mathcal{L} \eta^{\mu\nu}. \quad (3.20)$$

Com base na Eq. (3.20), a densidade de energia é dada por

$$2\tilde{\Theta}^{00} = \mathbf{E}^a \cdot \mathbf{E}^a + \mathbf{B}^a \cdot \mathbf{B}^a + (\mathcal{D}_0 \Phi)^a (\mathcal{D}_0 \Phi)^a + (\mathcal{D}_i \Phi)^a (\mathcal{D}_i \Phi)^a, \quad (3.21)$$

e a densidade do momento é, simplesmente,

$$\tilde{\Theta}^{0i} = (\mathbf{E}^a \wedge \mathbf{B}^a)^i - (\mathcal{D}_0 \Phi)^a (\mathcal{D}_i \Phi)^a, \quad (3.22)$$

com as intensidades dos campos elétrico e magnético

$$F^{i0a} = E^{ia}, \quad F^{ija} = -\epsilon_{ijk} B^{ka}. \quad (3.23)$$

Procuramos agora uma solução não-trivial das equações de campo que seja independente do tempo e esfericamente simétrica. Embora não seja necessário, adotamos o gauge temporal, com $A_0^a = 0$, mas $A_i^a \neq 0$. Em primeiro lugar, começaremos

derivando o limite inferior da energia. Para o caso em questão, as equações de campo de segunda ordem poderão então ser escritas como

$$(\mathcal{D}_i \mathcal{D}^i \Phi)^a = 0 \quad (3.24)$$

e

$$(\mathcal{D}_i F^{ij})^a = g \epsilon^{abc} (\mathcal{D}^j \Phi)^b \Phi^c. \quad (3.25)$$

Pode-se ver, a partir da Eq. (3.21), que a densidade de energia para configurações estáticas sem campos elétricos é

$$\tilde{\Theta}^{00} = \frac{1}{4} F_{ij}^a F^{ija} + \frac{1}{2} (\mathcal{D}_i \Phi)^a (\mathcal{D}_i \Phi)^a. \quad (3.26)$$

Conforme Bogomol'nyi [42] salientou, a integral de energia pode ser escrita da seguinte forma:

$$E = \int d^3x \tilde{\Theta}^{00} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{4} [F_{ij}^a \mp \epsilon_{ijk} (\mathcal{D}_k \Phi)^a]^2 \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{ij}^a (\mathcal{D}_k \Phi)^a \right\}. \quad (3.27)$$

A partir desta fórmula, uma vez que

$$\pm \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{ij}^a (\mathcal{D}_k \Phi)^a = \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \nabla_k (F_{ij}^a \Phi^a), \quad (3.28)$$

onde fizemos uso da identidade de Bianchi

$$\epsilon_{ijk} (\mathcal{D}_i F_{jk})^a = 0, \quad (3.29)$$

obtemos, imediatamente,

$$E = \frac{1}{4} \int d^3x [F_{ij}^a \mp \epsilon_{ijk} (\mathcal{D}_k \Phi)^a]^2 \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int d^3x \nabla_k (F_{ij}^a \Phi^a). \quad (3.30)$$

Com uma aplicação do teorema da divergência de Ostrogradsky-Gauss, convertemos a segunda integral do lado direito desta expressão numa integral de superfície bidimensional, produzindo

$$\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int d^3x \nabla_k (F_{ij}^a \Phi^a) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \oint_{\partial S_R^2} (d^2\sigma)_k F_{ij}^a \Phi^a, \quad (3.31)$$

onde ∂S_R^2 denota a superfície fechada da esfera S_R^2 com raio R no espaço de coordenadas. Como veremos mais adiante, a quantidade dada pelo lado direito da Eq. (3.31) é realmente proporcional à carga magnética do monopólo. Uma vez que o primeiro termo na Eq. (3.30) é positivo, concluímos que a energia é limitada por baixo,

$$E \geq \left| \int d^3x B_i^a (\mathcal{D}_i \Phi)^a \right|, \quad (3.32)$$

e esse limite inferior é saturado por funções (potenciais vetoriais e campos de Higgs), que atendem ao sistema de primeira ordem de equações diferenciais

$$F_{ij}^a = \pm \epsilon_{ijk} (\mathcal{D}_k \Phi)^a, \quad (3.33)$$

onde o sinal superior ou inferior deve ser considerado para carga magnética positiva ou negativa. Essas equações são normalmente referidas como as equações de Bogomol'nyi.

Seguindo 't Hooft [2] e Polyakov [44], iniciamos a elaboração de uma solução analítica exata para as equações de campo não-lineares, introduzindo o seguinte ansatz para os campos:

$$\Phi^a(x) = x^a Q(r), \quad A_\mu^a(x) = \epsilon_{\mu ab} x^b W(r), \quad (3.34)$$

onde $r^2 \equiv x^a x^a$ e $\epsilon_{0ab} = 0$. O tensor de campo de gauge é reduzido, então, para

$$F_{ij}^a = 2\epsilon_{ija} W + (\epsilon_{jak} x^k x^i - \epsilon_{iak} x^k x^j) r^{-1} W' - g\epsilon_{ijk} x^k x^a W^2, \quad (3.35)$$

enquanto a derivada covariante toma a forma simples

$$(\mathcal{D}_i \Phi)^a = \delta_{ia} Q + x^i x^a r^{-1} Q' + g(x^i x^a - \delta_{ia} r^2) Q W. \quad (3.36)$$

Para calcular estas expressões, usamos a identidade

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}. \quad (3.37)$$

Substituindo as Eqs. (3.35) e (3.36) dentro da Eq. (3.25), obtemos a equação de movimento para W :

$$W'' + 4r^{-1} W' = g[(gr^2 W - 3) W^2 + (gr^2 W - 1) Q^2]. \quad (3.38)$$

Usou-se, mais uma vez, a Eq. (3.37). Antes de seguirmos adiante, vamos nos concentrar primeiro na condição de fronteira em $r \rightarrow \infty$. Estamos interessados numa solução em que o campo de Higgs não é zero em lugar algum na esfera no infinito do espaço de coordenadas tridimensional, devido ao potencial remanescente. Falando mais explicitamente, insistiremos em ter $\Phi^a \Phi^a \rightarrow 1$ no limite quando r aproxima-se do infinito. Uma forma simples de compreender isto é exigir que

$$Q(r) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} r^{-1}. \quad (3.39)$$

Para garantir que os campos de gauge sejam regulares, devemos supor que o campo W precisará comportar-se como alguma potência negativa de r , no sentido de que

$$W(r) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \alpha r^{-n}, \quad (3.40)$$

onde α é uma constante independente de r . Inserindo as Eqs. (3.39) e (3.40) na Eq. (3.38), obtemos

$$\alpha(n-3)nr^{-2-n} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} -gr^{-2} + g^2\alpha r^{-n} - 3g\alpha^2 r^{-2n} + g^2\alpha^3 r^{2-3n}. \quad (3.41)$$

Sua única solução é dada por

$$n = 2, \quad \alpha = g^{-1}. \quad (3.42)$$

Assim, longe da origem, os campos são encontrados formalmente como sendo

$$\Phi^a(x) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} x^a r^{-1}, \quad A_\mu^a(x) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} g^{-1} \epsilon_{\mu ab} x^b r^{-2}. \quad (3.43)$$

Um ansatz que tem esse comportamento é

$$\Phi^a(x) = \hat{r}^a Q(r), \quad (3.44)$$

$$A_i^a(x) = g^{-1} \epsilon_{abc} \hat{r}^b \nabla_i(\hat{r}^c) W(r), \quad (3.45)$$

onde $\hat{r}^a \equiv x^a r^{-1}$. Quando $r \rightarrow \infty$, impomos as condições limítrofes $Q \rightarrow 1$ e $W \rightarrow 1$. Deve-se observar que $\nabla \cdot A^a = 0$. Por conta da Eq. (3.44), é uma fácil tarefa demonstrar que a derivada covariante é

$$(\mathcal{D}_i \Phi)^a = \hat{r}^i \hat{r}^a Q' + (1 - W)(\delta_{ia} - \hat{r}^i \hat{r}^a) r^{-1} Q, \quad (3.46)$$

que leva a

$$\frac{1}{2} (\mathcal{D}_i \Phi)^a (\mathcal{D}_i \Phi)^a = \frac{Q'^2}{2} + \frac{(1 - W)^2 Q^2}{r^2}. \quad (3.47)$$

Fazendo uso da Eq. (3.45), encontramos que o tensor de campo de gauge torna-se

$$F_{ij}^a = 2g^{-1} \epsilon_{ija} r^{-2} W - g^{-1} \epsilon_{ijk} \hat{r}^k \hat{r}^a r^{-2} W^2 + g^{-1} (\epsilon_{iak} \hat{r}^k \hat{r}^j - \epsilon_{jak} \hat{r}^k \hat{r}^i) (2r^{-2} W - r^{-1} W'), \quad (3.48)$$

a partir do que chegamos a

$$\frac{1}{4} F_{ij}^a F^{ija} = \frac{W'^2}{g^2 r^2} + \frac{(W^2 - 2W)^2}{2g^2 r^4}. \quad (3.49)$$

Para encontrarmos a equação para Q , substituímos a Eq. (3.46) na Eq. (3.24). Isto dá

$$Q'' + 2r^{-1} Q' = 2r^{-2} (1 - W)^2 Q. \quad (3.50)$$

Depois de cálculos bastante longos, que fazem uso das Eqs. (3.46) e (3.48), obtemos a equação para W :

$$W'' - 2r^{-2} W = r^{-2} (W - 3) W^2 + g^2 (W - 1) Q^2. \quad (3.51)$$

Podemos simplificar consideravelmente as Eqs. (3.50) e (3.51) introduzindo os campos

$$H = grQ, \quad K = 1 - W, \quad (3.52)$$

produzindo, assim, as equações diferenciais acopladas

$$r^2 H'' = 2HK^2, \quad (3.53)$$

$$r^2 K'' = (K^2 + H^2 - 1) K. \quad (3.54)$$

É fácil verificar que uma solução desse sistema é dada por

$$H = gr \coth(gr) - 1, \quad K = gr \operatorname{csch}(gr). \quad (3.55)$$

Um exame cuidadoso, verificando o limite em que $r \rightarrow 0$, mostra que $H \rightarrow 0$ e $K \rightarrow 1$. Se prosseguirmos, agora, ao caso limitante do r grande, temos, então, $H \rightarrow gr$ e $K \rightarrow 0$. Em consequência desses resultados, a forma assintótica da Eq. (3.54) é, então, $K'' = g^2 K$, e admite uma solução particular decrescendo como e^{-gr} , presumindo que $g > 0$. Além disso, no limite do r pequeno, a equação para H é do tipo Cauchy-Euler, com solução da forma $H \rightarrow \text{const.} \times r^2$, e a equação para K é o familiar problema $K'' = 0$, que tem a solução $K \rightarrow 1 + \text{const.} \times r$. Vemos, assim, que esses campos são diferenciáveis na origem, garantindo uma solução de energia finita. Prasad e Sommerfield [41] foram os primeiros a obter esse par de funções. Fizeram isso, na realidade, por escolha. O monopólo associado a isso é denominado o monopólo BPS, em nome de Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfield. Decorre, da discussão anterior, que as distribuições de campo para o monopólo BPS são

$$\begin{aligned}\Phi^a(x) &= \frac{x^a}{gr^2} [gr \coth(gr) - 1], \\ A_i^a(x) &= \epsilon_{iab} \frac{x^b}{gr^2} [1 - gr \operatorname{csch}(gr)].\end{aligned}\quad (3.56)$$

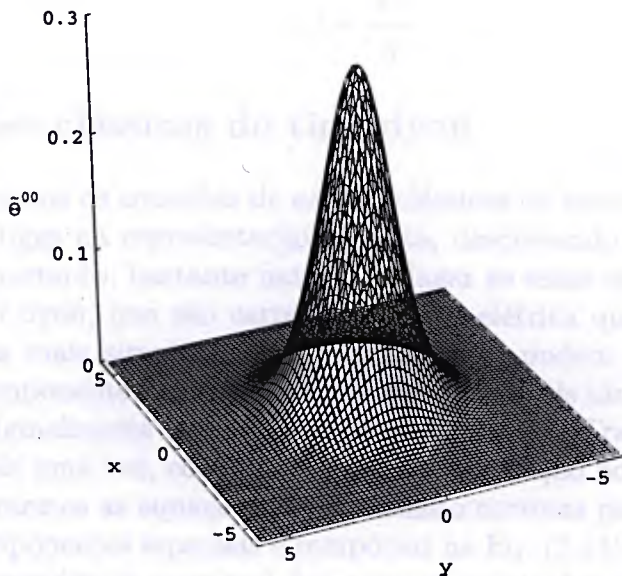


Figura 3.1: A densidade de energia de uma configuração de um monopólo BPS. Note que $\tilde{\Theta}^{00}$ toma seu valor máximo no mesmo ponto em que o campo Φ^a tem seu zero.

A massa do monopólo pode ser calculada, mais facilmente, usando-se a fórmula

$$M = \int d^3x \tilde{\Theta}^{00}, \quad (3.57)$$

com $\tilde{\Theta}^{00}$ dado pela Eq. (3.26). Fizemos um gráfico da densidade de energia BPS, que é mostrada na Fig. 3.1. Em vista das Eqs. (3.47) e (3.49), e lembrando as Eqs. (3.52), encontramos a massa do monopólo em termos das funções H e K :

$$M = \frac{4\pi}{g^2} \int_0^\infty dr \left[K'^2 + \frac{(K^2 - 1)^2}{2r^2} + \frac{H^2 K^2}{r^2} + \frac{(rH' - H)^2}{2r^2} \right]. \quad (3.58)$$

Agora, a Eq. (3.53) permite a identificação

$$\frac{H^2 K^2}{r^2} + \frac{(rH' - H)^2}{2r^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} [(H' - r^{-1}H) H], \quad (3.59)$$

de modo que a Eq. (3.58) é transformada em

$$M = \frac{2\pi}{g^2} [(H' - r^{-1}H) H] \Big|_0^\infty + \frac{4\pi}{g^2} \int_0^\infty dr \left[K'^2 + \frac{(K^2 - 1)^2}{2r^2} \right]. \quad (3.60)$$

Passamos para a variável adimensional $\xi = gr$. Então, por conta das Eqs. (3.55), escrevemos ainda:

$$M = \frac{2\pi}{g} + \frac{2\pi}{g} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2} \{ 1 - 4\xi^3 \coth \xi \operatorname{csch}^2 \xi + [2 + \cosh(2\xi)] \xi^4 \operatorname{csch}^4 \xi \}. \quad (3.61)$$

Esta integral pode ser avaliada de modo elementar para dar

$$M = \frac{4\pi}{g}. \quad (3.62)$$

3.2 Soluções clássicas do tipo dyon

Até agora estudamos as equações de campo clássicas da teoria de gauge $SU(2)$ com um campo de Higgs na representação adjunta, descrevendo um estado com carga magnética. É, portanto, bastante natural indagar se estas equações têm quaisquer soluções do tipo dyon, que são carregadas tanto elétrica quanto magneticamente. Acontece que as mais simples destas configurações podem ser obtidas em forma fechada se os componentes do tempo dos campos vetoriais são também diferentes de zero. Isto foi originalmente sugerido por Julia e Zee [45]. Trataremos deste assunto em seguida. Mais uma vez, concentraremos nossa atenção no caso estático.

Para encontrarmos as equações de movimento corretas para o dyon, separamos, primeiro, os componentes espaciais e temporais na Eq. (3.13). A partir daí, levando em conta a independência temporal dos campos envolvidos, temos, finalmente,

$$(\mathcal{D}_i \mathcal{D}^i \Phi)^a = g\epsilon^{abc} (\mathcal{D}_0 \Phi)^b A_0^c. \quad (3.63)$$

As equações restantes podem ser confirmadas, de maneira semelhante, a partir da Eq. (3.15):

$$(\mathcal{D}_i \mathcal{D}^i A_0)^a = g\epsilon^{abc} (\mathcal{D}_0 \Phi)^b \Phi^c, \quad (3.64)$$

$$(\mathcal{D}_i F^{ij})^a = g\epsilon^{abc} (\mathcal{D}^j \Phi)^b \Phi^c - g\epsilon^{abc} (\mathcal{D}^j A_0)^b A_0^c. \quad (3.65)$$

Isto ocorre, uma vez que

$$E^{ia} = (\mathcal{D}^i A_0)^a. \quad (3.66)$$

A exemplo da discussão que fizemos a respeito dos monopólos ordinários de 't Hooft-Polyakov, somos, então, naturalmente levados, em nossa abordagem, à seguinte solução para A_0^a :

$$A_0^a(x) = \hat{r}^a J(r). \quad (3.67)$$

Presumiremos que os campos Φ^a e A_i^a continuam tendo a forma geral introduzida nas Eqs. (3.44) e (3.45), respectivamente. Como consequência direta deste ansatz particular, o campo de Higgs e A_0^a não se influenciam mutuamente. A consistência dessa informação pode ser verificada escrevendo

$$\epsilon^{abc} A_0^b \Phi^c = \epsilon^{abc} \hat{r}^b \hat{r}^c Q J = 0, \quad (3.68)$$

que também estabelece, claramente, que

$$(\mathcal{D}_0 \Phi)^a = 0. \quad (3.69)$$

Deste resultado segue-se que as equações de campo para Φ^a e A_0^a coincidem exatamente com a Eq. (3.24), que foi reduzida à Eq. (3.53). Assim, podemos concluir, sem mais cálculos, que a Eq. (3.63) é substituída, de modo equivalente, por

$$r^2 \tilde{H}'' = 2\tilde{H} \tilde{K}^2, \quad (3.70)$$

enquanto a Eq. (3.64) é substituída por

$$r^2 \tilde{Y}'' = 2\tilde{Y} \tilde{K}^2, \quad (3.71)$$

onde estabelecemos

$$\tilde{H} = grQ, \quad \tilde{K} = 1 - W, \quad \tilde{Y} = grJ. \quad (3.72)$$

Podemos agora empregar

$$F_{i0}^a = \hat{r}^i \hat{r}^a J' + (1 - W)(\delta_{ia} - \hat{r}^i \hat{r}^a) r^{-1} J, \quad (3.73)$$

em conjunto com as Eqs. (3.46) e (3.48), para trazermos a Eq. (3.65) à forma

$$W'' - 2r^{-2}W = r^{-2}(W - 3)W^2 - g^2(J - Q)(J + Q)(W - 1). \quad (3.74)$$

Isto, por sua vez, pode ser representado de maneira mais compacta com a ajuda das Eqs. (3.72) para produzir

$$r^2 \tilde{K}'' = \tilde{K}^3 + \tilde{H}^2 \tilde{K} - \tilde{Y}^2 \tilde{K} - \tilde{K}. \quad (3.75)$$

Determinamos, assim, um conjunto acoplado de equações diferenciais dado pelas Eqs. (3.70), (3.71) e (3.75). Procuramos soluções para essas equações, de modo que o quadrado do campo de Higgs vá para 1, quando $r \rightarrow \infty$. Felizmente, ficou demonstrado que há uma família de soluções de um único parâmetro, que corresponde

à existência de dyons carregando uma unidade de carga magnética, escolhendo as funções simples

$$\tilde{H} = gr \coth(g\gamma_1^{-1}r) - \gamma_1, \quad \tilde{Y} = \gamma_1^{-1}\gamma_2\tilde{H}, \quad \tilde{K} = g\gamma_1^{-1}r \operatorname{csch}(g\gamma_1^{-1}r), \quad (3.76)$$

com as condições de fronteira regulares

$$\begin{aligned} \tilde{H} &\rightarrow 0, & \tilde{Y} &\rightarrow 0, & \text{e} & \tilde{K} \rightarrow 1 & \text{quando} & r \rightarrow 0, \\ \tilde{H} &\rightarrow gr, & \tilde{Y} &\rightarrow g\gamma_1^{-1}\gamma_2r, & \text{e} & \tilde{K} \rightarrow 0 & \text{quando} & r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Aqui deixamos que γ_1 e γ_2 sejam duas constantes quaisquer, de tal forma que $\gamma_1^2 - \gamma_2^2 = 1$. Se seguirmos agora o mesmo raciocínio como na situação da solução neutra, encontramos, então, que o campo $\tilde{K}$ decai para zero exponencialmente à medida que r se aproxima do infinito. Além disso, algumas das soluções são infinitas na origem; assim, nós as rejeitamos. Desta forma, todos os campos que encontramos são diferenciáveis, em todo lugar do espaço. Essas soluções foram descobertas por Prasad e Sommerfield [41], utilizando o mesmo método usado para o monopólo ordinário. Notamos aqui que a solução carregada magneticamente da nossa versão do modelo de 't Hooft e Polyakov corresponde a $\gamma_1 = 1$.

Em seguida desejamos obter a massa da solução do tipo dyon. Segundo as Eqs. (3.21) e (3.57), portanto, temos

$$M_d = \int d^3x \left[\frac{1}{4} F_{ij}^a F_{ij}^a + \frac{1}{2} F_{i0}^a F_{i0}^a + \frac{1}{2} (\mathcal{D}_i \Phi)^a (\mathcal{D}_i \Phi)^a \right], \quad (3.78)$$

que pode ser representada mais explicitamente, conforme foi feito ao se obter a Eq. (3.60), escrevendo-a como

$$\begin{aligned} M_d &= \frac{4\pi}{g^2} \int_0^\infty dr \left[\tilde{K}'^2 + \frac{(\tilde{K}^2 - 1)^2}{2r^2} + \frac{\tilde{H}^2 \tilde{K}^2}{r^2} + \frac{(r\tilde{H}' - \tilde{H})^2}{2r^2} + \frac{\tilde{Y}^2 \tilde{K}^2}{r^2} + \frac{(r\tilde{Y}' - \tilde{Y})^2}{2r^2} \right] \\ &= \frac{2\pi}{g^2} [(\tilde{H}' - r^{-1}\tilde{H})\tilde{H} + (\tilde{Y}' - r^{-1}\tilde{Y})\tilde{Y}]|_0^\infty + \frac{4\pi}{g^2} \int_0^\infty dr \left[\tilde{K}'^2 + \frac{(\tilde{K}^2 - 1)^2}{2r^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.79)$$

O cálculo da Eq. (3.79) é tratado como anteriormente, com o resultado

$$M_d = \gamma_1^2 M. \quad (3.80)$$

3.3 Realização dos campos físicos

No atual estágio do nosso conhecimento, é de interesse investigarem-se os campos fisicamente observáveis, especialmente os eletromagnéticos. Para esse fim, daremos primeiro uma expressão invariante de gauge para um tensor de campo eletromagnético, denotado por $\mathcal{F}_{\mu\nu}$, que irá se reduzir à definição usual no gauge, onde o campo de Higgs torna-se fixo numa direção única, por exemplo, a direção três no

espaço de isospin. Esse gauge especial é conhecido como o gauge unitário. 't Hooft [2] apresentou a seguinte forma para $\mathcal{F}_{\mu\nu}$:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \hat{\Phi}^a F_{\mu\nu}^a - g^{-1} \epsilon^{abc} \hat{\Phi}^a (\mathcal{D}_\mu \hat{\Phi})^b (\mathcal{D}_\nu \hat{\Phi})^c, \quad (3.81)$$

onde $\hat{\Phi}^a = \Phi^a (\Phi^b \Phi^b)^{-1/2}$. Primeiramente, deveríamos verificar que esta é uma quantidade invariante de gauge. A partir das Eqs. (3.4) e (3.10), temos

$$\delta(\Phi^a F_{\mu\nu}^a) = \epsilon^{abc} F_{\mu\nu}^a \Phi^b \theta^c + \epsilon^{abc} \Phi^a F_{\mu\nu}^b \theta^c = 0. \quad (3.82)$$

Um cálculo semelhante indica que

$$\delta[\epsilon^{abc} \Phi^a (\mathcal{D}_\mu \Phi)^b (\mathcal{D}_\nu \Phi)^c] = 0. \quad (3.83)$$

Juntando as Eqs. (3.82) e (3.83), obtemos o resultado desejado. Em segundo lugar, se presumirmos, simplesmente, que $\hat{\Phi}^a = (0, 0, 1)$, a Eq. (3.81), então, poderá ser diretamente convertida na forma

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3, \quad (3.84)$$

que é, na verdade, a derivada anti-simétrica do potencial de gauge A_μ^3 .

Tendo identificado o tensor de campo eletromagnético, podemos calcular os campos elétrico e magnético e, assim, as cargas elétrica e magnética de nossas soluções. Começamos trabalhando com a solução do tipo monopólo-magnético. Usando as formas assintóticas das Eqs. (3.43), obtemos

$$\Phi^a F_{\mu\nu}^a \xrightarrow{r \rightarrow \infty} g^{-1} \epsilon_{\mu\nu a} x^a r^{-3}. \quad (3.85)$$

Observamos ainda que o campo de Higgs é covariantemente constante no infinito espacial:

$$(\mathcal{D}_\mu \Phi)^a \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \delta_{\mu a} r^{-1} - \delta_{\mu b} x^a x^b r^{-3} - \epsilon_{abc} \epsilon_{\mu b d} x^c x^d r^{-3} = 0, \quad (3.86)$$

em que foi usada a Eq. (3.37). Mais uma vez, o símbolo ϵ foi definido como sendo zero, tão logo um de seus índices tenha o valor 0. Utilizando as Eqs. (3.85) e (3.86), pode-se demonstrar facilmente que o tensor magnético de 't Hooft tem os componentes:

$$\mathcal{F}_{i0} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad \mathcal{F}_{ij} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \hat{\Phi}^a F_{ij}^a \xrightarrow{r \rightarrow \infty} g^{-1} \epsilon_{ijk} x^k r^{-3}, \quad (3.87)$$

devido ao fato de que $\Phi^a \Phi^a$ se aproxima de 1 quando $r \rightarrow \infty$. Assim, os campos elétrico e magnético são dados por

$$\mathcal{E}_i \equiv \mathcal{F}_{i0} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \quad (3.88)$$

e

$$\mathcal{B}_i \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \mathcal{F}_{jk} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2g} \epsilon_{ijk} \epsilon_{jkm} x^m r^{-3} = g^{-1} x^i r^{-3}. \quad (3.89)$$

Com este valor do campo magnético, podemos determinar a carga magnética k , calculando o fluxo magnético através da esfera no infinito. Definimos k da seguinte forma:

$$4\pi k \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \oint_{\partial S_R^2} (d^2\sigma)_k \mathcal{F}_{ij} = \text{fluxo magnético através de } S_\infty^2. \quad (3.90)$$

A última integral pode ser efetuada de maneira trivial,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \oint_{\partial S_R^2} (d^2\sigma)_k \mathcal{F}_{ij} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{gR^2} \oint_{\partial S_R^2} d^2\sigma = \frac{4\pi}{g}, \quad (3.91)$$

e a expressão para k se reduz a

$$gk = 1. \quad (3.92)$$

Esta é a condição de quantização de Schwinger em unidades onde $\hbar = 1$. Com base no indicado acima, concluímos que o campo $\mathcal{B}$ se apresenta como um campo magnético abeliano no infinito radial, que, na realidade, é exatamente o de um monopólo magnético pontual padrão de carga $1/g$ situado na origem. Arafune, Freund e Goebel [46] argumentaram que a carga magnética não se origina na dinâmica; ela provém da estrutura topológica de um tripleto dos campos de Higgs num espaço tridimensional. Eles forneceram critérios para se encontrar a carga magnética simplesmente a partir da topologia de campo. Neste trabalho não discorreremos sobre os métodos topológicos. Em vez disso, gostaríamos de lançar uma luz sobre o fato de que a carga magnética não se acha associada à invariância da ação sob qualquer transformação de simetria.

Para discutirmos isso, definimos a densidade da corrente magnética k^μ e a densidade da corrente elétrica j^μ em termos de $\mathcal{F}_{\mu\nu}$:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu \mathcal{F}_{\rho\sigma} = 2k^\mu, \quad \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (3.93)$$

ou, se parecer mais conveniente,

$$\begin{aligned} k^0 &= \nabla_i \mathcal{B}^i, & k^i &= -\epsilon^i_{jk} \nabla^j \mathcal{E}^k - \partial_0 \mathcal{B}^i, \\ j^0 &= \nabla_i \mathcal{E}^i, & j^i &= \epsilon^i_{jk} \nabla^j \mathcal{B}^k - \partial_0 \mathcal{E}^i. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Estas são essencialmente as equações de Maxwell para um sistema eletromagnético que inclui cargas elétricas e magnéticas. Notamos que a densidade da corrente magnética desaparece num gauge com Φ^a apontando numa direção fixa, uma vez que o tensor de campo $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ será igual à derivada anti-simétrica de um potencial. Podemos, portanto, esperar que a definição de $\mathcal{F}_{\mu\nu}$, conforme dada na Eq. (3.81), atende às equações de Maxwell com $k^\mu = 0$, exceto onde $\Phi^a = 0$, desde que Φ^a possa ser transformado de gauge para apontar numa direção fixa, localmente. Esta é uma maneira de se compreender a possibilidade de uma carga magnética diferente de zero na presente teoria. Em adição, achamos que $k^\mu \rightarrow 0$ para r grande. Ao derivar este resultado, utilizamos a identidade $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\mathcal{D}_\nu F_{\rho\sigma})^a = 0$. Agora estamos, porém, mais interessados na expressão

$$k^\mu = -\frac{1}{2g} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{abc} \partial_\nu \hat{\Phi}^a \partial_\rho \hat{\Phi}^b \partial_\sigma \hat{\Phi}^c, \quad (3.95)$$

que será dada explicitamente, substituindo-se a Eq. (3.81) no primeiro par de equações de Maxwell. Ao determinar o resultado dado acima, exploramos a anti-simetria de $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$. Devido a essa mesma anti-simetria, a corrente k^μ é conservada:

$$\partial_\mu k^\mu = 0. \quad (3.96)$$

Isto significa que a carga magnética obedece a $\dot{k} = 0$, que obviamente não se origina do princípio de ação que determina a dinâmica de Φ^a .

Antes de continuarmos, é conveniente fazer, aqui, uma observação. Uma vez que estamos olhando para Φ^a na borda do espaço, podemos mudar Φ^a para $\hat{\Phi}^a$ no lado direito da Eq. (3.31). Segue-se, então, a partir das nossas suposições sobre o tensor de campo de 't Hooft, que o limite de Bogomol'nyi na Eq. (3.32) pode ser escrito da seguinte forma:

$$E \geq |4\pi k|, \quad (3.97)$$

conforme predito pela Eq. (3.62). Esta é uma consequência do fato de que a solução de Prasad-Sommerfield tem que atender às equações de Bogomol'nyi. Pode-se ver uma justificativa para isso no fato de que as equações de Bogomol'nyi mais a identidade de Bianchi implicam na equação de movimento correspondente a Φ^a .

Quanto à solução do tipo dyon, verificamos que se pode demonstrar que o campo elétrico tem o comportamento

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{F}_{i0} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \hat{r}^i J' = g^{-1} \hat{r}^i r^{-1} \tilde{Y}' - g^{-1} \hat{r}^i r^{-2} \tilde{Y}, \quad (3.98)$$

a partir do qual somos levados à seguinte expressão para a carga elétrica q :

$$q = \int d^3x \nabla_i \mathcal{F}_{i0} = \frac{4\pi}{g} \int_0^\infty dr r \tilde{Y}'' = \frac{8\pi}{g} \int_0^\infty dr \frac{\tilde{Y} \tilde{K}^2}{r}, \quad (3.99)$$

onde levamos em conta a Eq. (3.71). Passando para a variável adimensional $\xi = gr$, encontramos que a carga elétrica pode ser trazida para a forma

$$\frac{1}{\gamma_2} \frac{qg}{8\pi} = \int_0^\infty d\xi (\xi \cosh \xi - \sinh \xi) \xi \operatorname{csch}^3 \xi. \quad (3.100)$$

Isto nos leva a

$$qg = 4\pi\gamma_2. \quad (3.101)$$

Concluiremos esta seção salientando que a forma assintótica do campo magnético continua sendo a mesma como no caso do monopólo ordinário. Isto significa que a solução do tipo dyon carrega uma carga magnética $k = 1/g$.

Capítulo 4

Dinâmica de dois monopólos BPS

No Capítulo anterior, mostramos como são encontradas configurações clássicas de campo para monopólos independentes do tempo do tipo Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield. No presente Capítulo, vamos discutir a dinâmica destes monopólos. Idealmente, gostaria-se partir de uma solução clássica que tem dois ou mais monopólos e com uma dependência não trivial com o tempo. No entanto, presentemente não é possível encontrar soluções de multi-monopólos a partir das equações de campo dependentes do tempo que seguem da lagrangeana (3.1). No entanto, Manton [47] desenvolveu um método em que o movimento clássico de monopólos magnéticos dependentes do tempo, no limite de velocidades relativas baixas, pode ser descrito de maneira adequada por um movimento geodésico no espaço de soluções estáticas de mínima energia em termos das coordenadas coletivas do sistema. Como salientado por Manton, o conhecimento da métrica para este espaço de coordenadas coletivas é suficiente para determinar a dinâmica de baixas energias de um conjunto de monopólos e dyons. Para o caso de dois monopólos, a métrica de Atiyah-Hitchin é a de interesse. Para três ou mais monopólos, a métrica ainda não é conhecida.

Para ilustrar a introdução de coordenadas coletivas na descrição do movimento de monopólos, vamos considerar o caso de um monopólo. No gauge $A_0 = 0$, a solução não singular de um monopólo, conforme visto no Capítulo 3, é dado pelas equações

$$\begin{aligned}\Phi^a(x) &= \frac{x^a}{gr^2} [gr \coth(gr) - 1], \\ A_i^a(x) &= \epsilon_{iab} \frac{x^b}{gr^2} [1 - gr \operatorname{csch}(gr)],\end{aligned}\tag{4.1}$$

com $r = (x^i x^i)^{1/2}$. Esta solução tem quatro coordenadas coletivas, três relacionadas ao centro-de-massa do monopólo, e outra relacionada ao grau de liberdade de gauge. Denotando as três coordenadas do centro-de-massa X_i , a solução acima refere-se a $X_i = 0$. Uma translação como um todo de um monopólo centrado em X_i , tal que as coordenadas sejam dadas por

$$x_i \rightarrow x_i + a_i,\tag{4.2}$$

leva a um monopólo centrado em $X_i - a_i$. Se o monopólo se move com velocidade $\dot{X}_i$, e como sua massa é 4π (com $g = 1$), temos que sua energia cinética associada

ao centro-de-massa é dada por

$$T_X = \frac{1}{2} 4\pi \dot{X}_i \dot{X}_i = 2\pi \dot{X}_i \dot{X}_i. \quad (4.3)$$

A existência de uma quarta coordenada associada aos graus de liberdade de gauge pode ser vista da seguinte maneira. Suponhamos que seja feita uma transformação de gauge dependente do tempo

$$\exp [i\chi(t)\Phi], \quad (4.4)$$

onde $\Phi = \Phi^a \tau^a$. Mantendo $A_0 = 0$, não é difícil mostrar a partir da Eq. (3.21), que o campo elétrico é dada por $\dot{\chi} \mathcal{D}_i \Phi$ e que a energia potencial é constante. Por outro lado, pelas equações de Bogomol'ny, Eq. (3.33), o campo elétrico é dado então por $\dot{\chi} B_i$. Então, a energia cinética resultante é dada por

$$T_\chi = \frac{1}{2} 4\pi \dot{\chi}^2 = 2\pi \dot{\chi}^2. \quad (4.5)$$

Com isto, a lagrangeana em termos dos graus de liberdade coletivos é dada por

$$L = T_X + T_\chi = 2\pi (\dot{X}_i \dot{X}_i + \dot{\chi}^2). \quad (4.6)$$

As equações de movimento derivadas desta lagrangeana têm como solução o movimento com velocidade constante e uma carga elétrica total $Q = 4\pi\dot{\chi}$. Ou seja, a transformação de gauge dá ao monopólo uma carga elétrica - o monopólo torna-se um dyon frente esta transformação de gauge.

Para o movimento de dois monopólos, temos que para uma distância relativa grande, eles tornam-se independentes e não interagentes. Portanto, o movimento dos monopólos é descrito por oito coordenadas coletivas: quatro delas representam as coordenadas X_i do centro de massa e uma fase global que refere-se à carga total dos dois monopólos, e as outras quatro que descrevem as orientações e posições relativas. O argumento de Manton está baseado no fato que identificadas as coordenadas coletivas e o espaço em que estão definidas, é possível descrever o movimento dos monopólos como um movimento geodésico neste espaço.

Na próxima seção, vamos descrever a métrica de Atiyah-Hitchin e derivar as equações para as componentes da métrica. Então, vamos formular o problema de dois monopólos usando o método de Manton e apresentar nossa análise detalhada do limite assintótico integrável do movimento de dois monopólos. Na Seção 4.4, estudamos a integrabilidade do sistema hamiltoniano determinado pela métrica de Atiyah-Hitchin.

4.1 Descrição da métrica de Atiyah-Hitchin

A métrica no espaço de configurações de dois monopólos foi escrita pela primeira vez por Atiyah e Hitchin [48], tendo sido, por isso, batizada de métrica de Atiyah-Hitchin. Eles conseguiram encontrar a métrica exata usando uma série de métodos

teóricos distintos para obter soluções das equações de Bogomol'nyi. Não é o objetivo desta dissertação, fazer uma revisão detalhada destes métodos matemáticos. Para os objetivos de analisar a dinâmica do sistema de dois monopólos magnéticos na linguagem tradicional dos sistemas dinâmicos, baseada no estudo de seções de Poincaré, espectros de potência e expoentes de Lyapunov, é suficiente partir do resultado fundamental de Atiyah-Hitchin.

O comprimento quadrado do deslocamento infinitesimal ds é da forma

$$ds^2 = f^2 d\rho^2 + a^2 \sigma_1^2 + b^2 \sigma_2^2 + c^2 \sigma_3^2, \quad (4.7)$$

onde σ_1 , σ_2 e σ_3 são dados por

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\sin \psi d\vartheta + \sin \vartheta \cos \psi d\varphi, \\ \sigma_2 &= \cos \psi d\vartheta + \sin \vartheta \sin \psi d\varphi, \\ \sigma_3 &= d\psi + \cos \vartheta d\varphi, \end{aligned} \quad (4.8)$$

e a , b , c e f são todos funções somente da variável independente ρ . Para as nossas considerações, supomos que as coordenadas são dadas por ρ , ϑ , φ e ψ . Falando de maneira geral, o espaço pode ser parametrizado em termos de uma variável ρ , que denota a separação entre os monopólos, duas variáveis angulares $\vartheta \in [0, \pi]$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$, que determinam a orientação do eixo que une os dois monopólos, e $\psi \in [0, 2\pi]$, que é o ângulo de rotação em torno desse eixo. Os ângulos ϑ , φ e ψ são denominados ângulos de Euler.

Iremos agora determinar o sistema de equações diferenciais de primeira ordem para os componentes da métrica. Pelo que sabemos, Belinskii, Gibbons, Page e Pope [49] foram os primeiros a derivar essas equações de uma forma de certo modo econômica, que será agora estendida. Para assistir o desenvolvimento da teoria mais adiante, começaremos estudando o tensor métrico fundamental do espaço subjacente. Relançando a Eq. (4.7) na forma riemanniana $g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, é fácil verificar que o tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ pode ser considerado simétrico nos índices α e β , ou seja, $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$. Particularmente, o tensor métrico contravariante $g^{\alpha\beta}$ é recíproco ao tensor $g_{\alpha\beta}$, isto é, $g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$. Explicitamente, os valores dos elementos de $g_{\alpha\beta}$ são dados por

$$\begin{aligned} g_{00} &= f^2, & g_{11} &= a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi, \\ g_{22} &= a^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \psi + c^2 \cos^2 \vartheta, \\ g_{33} &= c^2, & g_{12} &= (b^2 - a^2) \sin \vartheta \sin \psi \cos \psi, \\ g_{23} &= c^2 \cos \vartheta, & g_{01} &= g_{02} = g_{03} = g_{13} = 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

ao passo que os de $g^{\alpha\beta}$ são dados por

$$\begin{aligned} g^{00} &= \frac{1}{f^2}, & g^{11} &= \frac{\cos^2 \psi}{b^2} + \frac{\sin^2 \psi}{a^2}, \\ g^{22} &= \left(\frac{\cos^2 \psi}{a^2} + \frac{\sin^2 \psi}{b^2} \right) \csc^2 \vartheta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^{33} &= \frac{1}{c^2} + \left(\frac{\cos^2 \psi}{a^2} + \frac{\sin^2 \psi}{b^2} \right) \cot^2 \vartheta, \\
g^{12} &= \frac{(a^2 - b^2) \csc \vartheta \sin \psi \cos \psi}{a^2 b^2}, \\
g^{13} &= \frac{(b^2 - a^2) \cot \vartheta \sin \psi \cos \psi}{a^2 b^2}, \\
g^{23} &= - \left(\frac{\cos^2 \psi}{a^2} + \frac{\sin^2 \psi}{b^2} \right) \csc \vartheta \cot \vartheta, \\
g^{01} &= g^{02} = g^{03} = 0.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Com esses valores em mãos, podemos escrever as relações que determinam os componentes da métrica fundamental de acordo com a fórmula: *

$$R_{\lambda\sigma} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\lambda\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\alpha_{\lambda\alpha} + \Gamma^\alpha_{\nu\alpha} \Gamma^\nu_{\lambda\sigma} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} \Gamma^\nu_{\lambda\alpha} = 0, \tag{4.11}$$

onde $\Gamma^\alpha_{\lambda\sigma}$ são geralmente referidos como símbolos de Christoffel da segunda espécie. Essas quantidades relacionam-se ao tensor métrico de uma maneira direta:

$$2 \Gamma^\alpha_{\lambda\sigma} = g^{\alpha\mu} (\partial_\lambda g_{\sigma\mu} + \partial_\sigma g_{\lambda\mu} - \partial_\mu g_{\lambda\sigma}). \tag{4.12}$$

Em decorrência do cálculo dos componentes do tensor $R_{\lambda\sigma}$, que é claramente simétrico, devido à simetria de $\Gamma^\alpha_{\lambda\sigma}$ nos subscritos, as expressões abaixo são obtidas (linhas denotam a diferenciação com relação à coordenada independente ϱ):

$$R_{00} = \left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} \right) \frac{f'}{f} - \frac{a''}{a} - \frac{b''}{b} - \frac{c''}{c} \tag{4.13}$$

e

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \Pi_1 \sin^2 \psi + \Pi_2 \cos^2 \psi, \\
R_{12} &= (\Pi_2 - \Pi_1) \sin \vartheta \sin \psi \cos \psi, \\
R_{22} &= (\Pi_1 \cos^2 \psi + \Pi_2 \sin^2 \psi) \sin^2 \vartheta + \Pi_3 \cos^2 \vartheta, \\
R_{23} &= \Pi_3 \cos \vartheta, \quad R_{33} = \Pi_3,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

com

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= \frac{a^4 - (b^2 - c^2)^2}{2b^2c^2} + \left[\left(\frac{f'}{f} - \frac{b'}{b} - \frac{c'}{c} \right) a' - a'' \right] \frac{a}{f^2}, \\
\Pi_2 &= \frac{b^4 - (a^2 - c^2)^2}{2a^2c^2} + \left[\left(\frac{f'}{f} - \frac{a'}{a} - \frac{c'}{c} \right) b' - b'' \right] \frac{b}{f^2}, \\
\Pi_3 &= \frac{c^4 - (a^2 - b^2)^2}{2a^2b^2} + \left[\left(\frac{f'}{f} - \frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} \right) c' - c'' \right] \frac{c}{f^2}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

*Ficou provado, há muito tempo, que a métrica de Atiyah-Hitchin tem o tensor de Ricci nulo e, assim, pode ser considerada como uma solução no vácuo das equações de Einstein. O desenvolvimento desse fato exige métodos matemáticos avançados além do âmbito deste trabalho e, pelo que sabemos, só foi feito com algum detalhe na Ref. [48].

As conseqüências desses cálculos são manifestadas nas considerações abaixo. As equações $R_{\lambda\sigma} = 0$ são reduzidas a

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad \Pi_3 = 0, \quad (4.16)$$

juntamente com

$$\frac{a' b'}{a b} + \frac{b' c'}{b c} + \frac{c' a'}{c a} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{a^4 + b^4 + c^4}{2a^2 b^2 c^2} \right) f^2. \quad (4.17)$$

Esta, por sua vez, é uma primeira integral das Eqs. (4.16), podendo ser considerada como uma restrição imposta sobre os valores iniciais de a , b e c , e a' , b' e c' , que as equações de segunda ordem então preservam por todo o tempo. Conforme se vê imediatamente, essas equações podem ser obtidas uma da outra por permuta cíclica de a , b e c .

Se introduzirmos aqui as variáveis

$$\alpha = \log a, \quad \beta = \log b, \quad \gamma = \log c, \quad (4.18)$$

encontramos então que a restrição toma a forma

$$4(\alpha' \beta' + \beta' \gamma' + \gamma' \alpha') = [2e^{2(\alpha+\beta)} + 2e^{2(\beta+\gamma)} + 2e^{2(\gamma+\alpha)} - e^{4\alpha} - e^{4\beta} - e^{4\gamma}] e^{-2(\alpha+\beta+\gamma)} f^2. \quad (4.19)$$

Para uma maior redução da Eq. (4.19), colocamos

$$3u = \alpha + \beta + \gamma, \quad 6q = \alpha + \beta - 2\gamma, \quad 2\sqrt{3}s = \alpha - \beta, \quad (4.20)$$

de onde se segue

$$12u'^2 - 12q'^2 - 12s'^2 + \Lambda e^{-2u} f^2 = 0, \quad (4.21)$$

onde

$$\Lambda(q, s) = e^{-8q} - 4e^{-2q} \cosh(2\sqrt{3}s) + 4e^{4q} \sinh^2(2\sqrt{3}s). \quad (4.22)$$

Fomos capazes de determinar um conjunto particular de primeiras integrais da Eq. (4.21), substituindo algumas funções experimentais do tipo hiperbólico, e nossos resultados são as três equações:

$$\begin{aligned} \frac{u'}{f} &= \frac{c}{6ab} - \frac{a+b}{3ab} + \frac{(a-b)^2}{6abc}, \\ \frac{q'}{f} &= \frac{c}{3ab} - \frac{a+b}{6ab} - \frac{(a-b)^2}{6abc}, \\ \frac{s'}{f} &= -\frac{(a-b)(a+b-c)}{2\sqrt{3}abc}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

das quais podemos escrever o resultado desejado deste parágrafo:

$$\frac{a'}{f} = \frac{(b-c)^2 - a^2}{2bc}, \quad \frac{b'}{f} = \frac{(a-c)^2 - b^2}{2ac}, \quad \frac{c'}{f} = \frac{(a-b)^2 - c^2}{2ab}. \quad (4.24)$$

No Apêndice A, demonstramos que é possível obterem-se soluções explícitas para essas equações em termos das integrais elípticas completas de Legendre do primeiro e segundo tipo. São obtidas soluções para $f = abc$ e $f = -b/\rho$. Com o auxílio de cálculos por computador, começando diretamente do sistema acima no caso em que $f = -b/\rho$, geramos os gráficos das funções radiais a , b e $-c$, conforme indicado na Fig. A.1. Fizemos isso usando o algoritmo definido no Apêndice C.

4.2 Formulação do problema

Vamos agora escrever a lagrangeana efetiva para o movimento de dois monopólos em termos das funções a , b , c e f . É da forma

$$2\mathcal{L} = g_{\alpha\beta}\dot{\gamma}^\alpha\dot{\gamma}^\beta = f^2\dot{\varrho}^2 + a^2\omega_x^2 + b^2\omega_y^2 + c^2\omega_z^2. \quad (4.25)$$

Aqui, ω_x , ω_y e ω_z são os componentes da velocidade angular instantânea $\vec{\omega}$, ao longo do conjunto espacial de eixos x , y e z , e podem ser expressos em termos das taxas de variação dos ângulos Eulerianos como

$$\omega_x \equiv \sigma_1/dt, \quad \omega_y \equiv \sigma_2/dt, \quad \omega_z \equiv \sigma_3/dt. \quad (4.26)$$

Tem-se que os momentos canonicamente conjugados associados às coordenadas ϱ , ϑ , φ e ψ são

$$\begin{aligned} p_\varrho &= \mathcal{L}_{\dot{\varrho}} = f^2\dot{\varrho}, & p_\psi &= \mathcal{L}_{\dot{\psi}} = c^2\omega_z, \\ p_\vartheta &= \mathcal{L}_{\dot{\vartheta}} = b^2\omega_y \cos \psi - a^2\omega_x \sin \psi, \\ p_\varphi &= \mathcal{L}_{\dot{\varphi}} = a^2\omega_x \sin \vartheta \cos \psi + b^2\omega_y \sin \vartheta \sin \psi + c^2\omega_z \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Aplicando-se a equação de Lagrange à coordenada radial não-cíclica ϱ , obtemos a equação de movimento

$$\dot{p}_\varrho - \mathcal{L}_\varrho = f^2\ddot{\varrho} + f f' \dot{\varrho}^2 - a a' \omega_x^2 - b b' \omega_y^2 - c c' \omega_z^2 = 0. \quad (4.28)$$

Sob a mesma circunstância, derivamos a equação de movimento correspondente à coordenada ψ :

$$2c c' \omega_z \dot{\varrho} + c^2 \dot{\omega}_z = (a^{-2} - b^{-2}) a^2 b^2 \omega_x \omega_y. \quad (4.29)$$

As duas equações de movimento restantes são

$$\begin{aligned} &2b b' \omega_y \dot{\varrho} \cos \psi - 2a a' \omega_x \dot{\varrho} \sin \psi + c^2 \omega_z \dot{\varphi} \sin \vartheta \\ &= (\dot{\omega}_x \sin \psi + \omega_x \omega_z \cos \psi) a^2 - (\dot{\omega}_y \cos \psi - \omega_y \omega_z \sin \psi) b^2 \end{aligned} \quad (4.30)$$

e

$$\begin{aligned} &2a a' \omega_x \dot{\varrho} \sin \vartheta \cos \psi + 2b b' \omega_y \dot{\varrho} \sin \vartheta \sin \psi + 2c c' \omega_z \dot{\varrho} \cos \vartheta \\ &= [(\dot{\psi} \sin \vartheta \sin \psi - \dot{\vartheta} \cos \vartheta \cos \psi) \omega_x - \dot{\omega}_x \sin \vartheta \cos \psi] a^2 \\ &- [(\dot{\psi} \sin \vartheta \cos \psi + \dot{\vartheta} \cos \vartheta \sin \psi) \omega_y + \dot{\omega}_y \sin \vartheta \sin \psi] b^2 \\ &+ (\omega_z \dot{\vartheta} \sin \vartheta - \dot{\omega}_z \cos \vartheta) c^2. \end{aligned} \quad (4.31)$$

O par de equações sendo conseqüências algébricas dessas duas será, da maneira mais conveniente agora desenvolvida,

$$2b b' \omega_y \dot{\varrho} + b^2 \dot{\omega}_y = (c^{-2} - a^{-2}) a^2 c^2 \omega_x \omega_z, \quad (4.32)$$

$$2a a' \omega_x \dot{\varrho} + a^2 \dot{\omega}_x = (b^{-2} - c^{-2}) b^2 c^2 \omega_y \omega_z. \quad (4.33)$$

Observa-se que φ não aparece explicitamente na densidade da lagrangeana, Eq. (4.25); é, portanto, uma coordenada cíclica, indicando que o correspondente momento generalizado p_φ é uma primeira integral imediata das equações de movimento.

Substituindo

$$\dot{\varrho} = \frac{p_\varrho}{f^2}, \quad (4.34)$$

de forma que

$$\ddot{\varrho} = \frac{\dot{p}_\varrho f - 2p_\varrho \dot{f}}{f^3} = \frac{\dot{p}_\varrho}{f^2} - \frac{2p_\varrho^2 f'}{f^5}, \quad (4.35)$$

e estabelecendo, finalmente, que

$$\mathcal{M}_1 = a^2 \omega_x, \quad \mathcal{M}_2 = b^2 \omega_y, \quad \mathcal{M}_3 = c^2 \omega_z, \quad (4.36)$$

encontramos que as equações de movimento poderão agora ser escritas como

$$\dot{\mathcal{M}}_1 = \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_3, \quad (4.37)$$

$$\dot{\mathcal{M}}_2 = \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right) \mathcal{M}_3 \mathcal{M}_1, \quad (4.38)$$

$$\dot{\mathcal{M}}_3 = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2, \quad (4.39)$$

$$\dot{\varrho} = \frac{p_\varrho}{f^2}, \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_\varrho &= \frac{p_\varrho^2 f'}{f^3} + a a' \omega_x^2 + b b' \omega_y^2 + c c' \omega_z^2 \\ &= \frac{p_\varrho^2 f'}{f^3} + \mathcal{M}_1^2 \frac{a'}{a^3} + \mathcal{M}_2^2 \frac{b'}{b^3} + \mathcal{M}_3^2 \frac{c'}{c^3} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{p_\varrho^2 (f^2)'}{f^4} + \mathcal{M}_1^2 \frac{(a^2)'}{a^4} + \mathcal{M}_2^2 \frac{(b^2)'}{b^4} + \mathcal{M}_3^2 \frac{(c^2)'}{c^4} \right]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

A densidade da hamiltoniana é obtida através da transformação de Legendre

$$\mathcal{H} = p_\varrho \dot{\varrho} + p_\vartheta \dot{\vartheta} + p_\varphi \dot{\varphi} + p_\psi \dot{\psi} - \mathcal{L}, \quad (4.42)$$

que, com o uso das Eqs. (4.25-4.27), torna-se, simplesmente

$$\begin{aligned} 2\mathcal{H} &= f^2 \dot{\varrho}^2 + (2\dot{\psi} + 2\dot{\varphi} \cos \vartheta - \omega_z) \mathcal{M}_3 \\ &\quad + (2\dot{\vartheta} \cos \psi + 2\dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi - \omega_y) \mathcal{M}_2 \\ &\quad + (2\dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - 2\dot{\vartheta} \sin \psi - \omega_x) \mathcal{M}_1 \\ &= f^{-2} p_\varrho^2 + a^{-2} \mathcal{M}_1^2 + b^{-2} \mathcal{M}_2^2 + c^{-2} \mathcal{M}_3^2. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Uma vez que t não aparece implicitamente em $\mathcal{L}$, também não está presente em $\mathcal{H}$; então, a equação canônica de Hamilton diz que $\mathcal{H}$ está conservado. Em acréscimo, há uma outra constante de movimento disponível; a saber, $\mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2^2 + \mathcal{M}_3^2$. Pode-se verificar isto multiplicando-se a Eq. (4.37) por $2\mathcal{M}_1$, a Eq. (4.38) por $2\mathcal{M}_2$, e a Eq. (4.39) por $2\mathcal{M}_3$, e somando, então

$$2\mathcal{M}_1\dot{\mathcal{M}}_1 + 2\mathcal{M}_2\dot{\mathcal{M}}_2 + 2\mathcal{M}_3\dot{\mathcal{M}}_3 = 0, \quad (4.44)$$

e, a partir daí,

$$\mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2^2 + \mathcal{M}_3^2 = \text{constante}. \quad (4.45)$$

Segundo as circunstâncias, isto pode ser expresso explicitamente como

$$\sum_{j=1,2,3} \mathcal{M}_j^2 = p_\vartheta^2 - 2p_\varphi p_\psi \cot \vartheta \csc \vartheta + (p_\varphi^2 + p_\psi^2) \csc^2 \vartheta, \quad (4.46)$$

onde deve ser mencionado que

$$\mathcal{M}_1 = a^2 \omega_x = \frac{p_\varphi \cos \psi - p_\psi \cos \vartheta \cos \psi - p_\vartheta \sin \vartheta \sin \psi}{\sin \vartheta}, \quad (4.47)$$

$$\mathcal{M}_2 = b^2 \omega_y = \frac{p_\varphi \sin \psi - p_\psi \cos \vartheta \sin \psi + p_\vartheta \sin \vartheta \cos \psi}{\sin \vartheta}, \quad (4.48)$$

e

$$\mathcal{M}_3 = c^2 \omega_z = p_\psi. \quad (4.49)$$

4.3 Limite assintótico da dinâmica de dois monopólos

Para estudarmos analiticamente a dinâmica de dois monopólos bem separados, precisamos somente colocar a forma assintótica explícita das funções a , b , c e f para dentro da lagrangeana na Eq. (4.25). Para fazer isso, estabelecemos primeiro que $f = -b/\varrho$. Torna-se, então, uma tarefa simples demonstrar que a densidade da lagrangeana toma a forma

$$2\mathcal{L} = 4(1 - 2\varrho^{-1})^{-1}(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta)^2 + (1 - 2\varrho^{-1})[(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta)\varrho^2 + \dot{\varrho}^2], \quad (4.50)$$

usando-se as Eqs. (B.8) do Apêndice B. Os momentos generalizados associados às coordenadas $\mathbf{q} = (\varrho, \vartheta, \varphi, \psi)$ aparecem de maneira simples como

$$\begin{aligned} p_\varrho &= \mathcal{L}_{\dot{\varrho}} = (1 - 2\varrho^{-1}) \dot{\varrho}, \\ p_\vartheta &= \mathcal{L}_{\dot{\vartheta}} = (1 - 2\varrho^{-1}) \varrho^2 \dot{\vartheta}, \\ p_\psi &= \mathcal{L}_{\dot{\psi}} = 4(1 - 2\varrho^{-1})^{-1}(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta), \\ p_\varphi &= \mathcal{L}_{\dot{\varphi}} = (1 - 2\varrho^{-1}) \varrho^2 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta + 4(1 - 2\varrho^{-1})^{-1}(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta) \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (4.51)$$

de modo que a densidade da hamiltoniana é agora dada por

$$8\mathcal{H} = (1 - 2\varrho^{-1})[p_\psi^2 + 4(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta)\varrho^2 + 4\dot{\varrho}^2], \quad (4.52)$$

ou, de forma equivalente, por

$$\mathcal{H} = \frac{(4 - 4\rho + \rho^2 + 4 \cot^2 \vartheta) p_\psi^2}{8(\rho - 2)\rho} + \frac{p_\vartheta^2 + \rho^2 p_\rho^2 + p_\varphi^2 \csc^2 \vartheta - 2p_\varphi p_\psi \cot \vartheta \csc \vartheta}{2(\rho - 2)\rho}. \quad (4.53)$$

Podemos seguir adiante, calculando as equações de movimento através do formalismo dos parênteses de Poisson. Aplicando-se as equações de Hamilton à variável cíclica φ , obtemos o par de equações

$$\dot{p}_\varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta) \csc^2 \vartheta}{(\rho - 2)\rho}. \quad (4.54)$$

Da forma como está, ψ também é uma coordenada cíclica, cujas equações de Hamilton correspondentes resultam ser

$$\dot{p}_\psi = 0, \quad \dot{\psi} = \frac{(4 - 4\rho + \rho^2 + 4 \cot^2 \vartheta) p_\psi - 4p_\varphi \cot \vartheta \csc \vartheta}{4(\rho - 2)\rho}. \quad (4.55)$$

Podemos dizer, portanto, que a energia e os dois momentos canônicos p_φ e p_ψ são constantes de movimento decorrentes das variáveis ignoráveis t , φ e ψ , respectivamente. É preciso apenas mais uma primeira integral do movimento para se concluir que a hamiltoniana é integrável. De fato, podemos demonstrar que o quadrado do momento angular é constante no tempo. Uma vez que o comportamento da coordenada não-cíclica ϑ com o tempo é dado pela equação de movimento

$$\dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{(\rho - 2)\rho}, \quad (4.56)$$

não é difícil ver que a equação para $\dot{p}_\vartheta$ pode ser escrita, então, como

$$p_\vartheta \dot{p}_\vartheta + (p_\varphi \cos \vartheta - p_\psi)(p_\psi \cos \vartheta - p_\varphi) \dot{\vartheta} \csc^3 \vartheta = 0, \quad (4.57)$$

a partir da qual obtemos

$$p_\vartheta^2 - 2p_\varphi p_\psi \cot \vartheta \csc \vartheta + (p_\varphi^2 + p_\psi^2) \csc^2 \vartheta = \text{constante} = \mathcal{M}^2. \quad (4.58)$$

Com a ajuda das Eqs. (4.51), isto é prontamente transformado em

$$\mathcal{M}^2 = (1 - 2\rho^{-1})^2 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) \rho^4 + p_\psi^2 = \|\vec{\varrho} \wedge \vec{\pi} + p_\psi \hat{\vec{\varrho}}\|^2, \quad (4.59)$$

uma expressão que é simplesmente o quadrado do momento angular total:

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{\varrho} \wedge \vec{\pi} + p_\psi \hat{\vec{\varrho}}, \quad (4.60)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{\vec{\varrho}} &= \frac{\vec{\varrho}}{\|\vec{\varrho}\|}, \\ \vec{\pi} &= (1 - 2\rho^{-1}) \vec{\varrho}, \\ \vec{\varrho} &= (\rho \sin \vartheta \cos \varphi, \rho \sin \vartheta \sin \varphi, \rho \cos \vartheta). \end{aligned} \quad (4.61)$$

O primeiro termo do lado direito da Eq. (4.60) é o momento angular orbital, e o segundo termo é a contribuição de Poincaré que ocorre devido a presença das cargas magnética e elétrica.

Vamos agora escrever a densidade da lagrangeana de um modo mais conveniente. Isto é dado por

$$2\mathcal{L} = (1 - 2\varrho^{-1})\dot{\vec{\varrho}} \cdot \dot{\vec{\varrho}} + \left[\dot{\psi} + \vec{w}(\vec{\varrho}) \cdot \dot{\vec{\varrho}} \right] p_\psi, \quad (4.62)$$

onde introduzimos a seguinte função vetorial:

$$\vec{w} = \left(-\frac{1}{\varrho} \frac{\varrho_2 \varrho_3}{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}, \frac{1}{\varrho} \frac{\varrho_1 \varrho_3}{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}, 0 \right), \quad (4.63)$$

da qual inferimos que

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{w} = -\frac{1}{\varrho^3} \vec{\varrho}. \quad (4.64)$$

Um cálculo simples, usando a Eq. (4.62), determina que os momentos conjugados p_k são da forma

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varrho}_k} = \pi_k + p_\psi w_k. \quad (4.65)$$

Além disso, encontramos que as equações de movimento resultantes podem ser escritas, depois de um pouco de trabalho de álgebra, como

$$\dot{\pi}_k = \frac{1}{\varrho^3} \left(\dot{\varrho}_i \dot{\varrho}_i - \frac{p_\psi^2}{4} \right) \varrho_k + (\dot{\varrho}_i \nabla_k w_i - \dot{\varrho}_i \nabla_i w_k) p_\psi, \quad (4.66)$$

quando se dá conta do fato de que p_ψ é independente do tempo. Em seguida, podemos reescrever o coeficiente do momento canônico p_ψ no lado direito da Eq. (4.66), observando os passos

$$\begin{aligned} \dot{\varrho}_i \nabla_k w_i - \dot{\varrho}_i \nabla_i w_k &= (\delta_{kk'} \delta_{ii'} - \delta_{ik'} \delta_{ki'}) \dot{\varrho}_i \nabla_{k'} w_{i'} \\ &= \epsilon_{jki} \epsilon_{jk'i'} \dot{\varrho}_i \nabla_{k'} w_{i'} = \left[\dot{\vec{\varrho}} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{w}) \right]_k, \end{aligned} \quad (4.67)$$

de modo a exigir que apelemos para a Eq. (4.64). Com este resultado, as equações de movimento podem ser exibidas vetorialmente para darem

$$\dot{\vec{\pi}} = \frac{1}{\varrho^3} \left(\dot{\vec{\varrho}} \cdot \dot{\vec{\varrho}} - \frac{p_\psi^2}{4} \right) \vec{\varrho} - \frac{p_\psi}{\varrho^3} \dot{\vec{\varrho}} \wedge \vec{\varrho}. \quad (4.68)$$

Pode-se entender que esta equação diz que os dyons experimentam uma força de natureza repulsiva proporcional ao quadrado de sua velocidade relativa, uma força de Coulomb atrativa proporcional a p_ψ^2 e uma força de Lorentz proporcional a p_ψ . De fato, Manton [50] estabeleceu que esta é a equação esperada para o movimento relativo de dyons pontuais com carga elétrica relativa p_ψ . Assim, iremos agora interpretar o terceiro momento nas Eqs. (4.51), de uma forma que irá representar a carga elétrica relativa. Segundo esta consideração, podemos esperar ter somente órbitas

de escape para dyons igualmente carregados. Para obtermos mais informações sobre as órbitas, vamos escrever as equações de movimento na forma

$$\dot{\vec{\pi}} = \frac{1}{\varrho^3} \left(\frac{2E}{1 - 2\varrho^{-1}} - \frac{p_\psi^2}{2} \right) \vec{\varrho} - \frac{p_\psi}{\varrho^3} \dot{\vec{\varrho}} \wedge \vec{\varrho}, \quad (4.69)$$

onde a quantidade E é a energia total. A partir dessa equação, segue-se que, quando ϱ é suficientemente grande, as órbitas para $E < p_\psi^2/4$ são fechadas, e para $E > p_\psi^2/4$, abertas. Gostaríamos apenas de salientar que monopólos puros não terão estados ligados. No limite de ϱ grande, o problema das órbitas de dois dyons foi estudado por Gibbons e Manton [51]. Como não estamos interessados nas órbitas de escape, não entraremos em detalhes sobre esta questão aqui, mas nos concentraremos principalmente na questão das órbitas fechadas. Propomos, em seguida, uma prova de sua existência. O estímulo para isto deve-se, essencialmente, ao trabalho de Temple-Raston [10], que apresentou também alguns resultados numéricos sobre o espalhamento clássico de dois monopólos [8]. Um estudo posterior da dinâmica dos monopólos [9] tomou uma direção semelhante à tomada na Ref. [8], tendo sido realizado de um modo particularmente interessante, com o uso do conceito do conjunto de Julia [52]. Encontramos também um estudo [11] na literatura que completa o trabalho iniciado na Ref. [9].

Um modo conveniente de representar o movimento periódico é executar uma variação do procedimento de Hamilton-Jacobi e transformar a hamiltoniana em variáveis de ângulo-ação. A vantagem das variáveis de ângulo-ação é que elas levam a uma avaliação de todas as frequências envolvidas sem exigir uma solução completa do movimento. Iremos agora buscar uma função característica de Hamilton gerando uma transformação canônica, $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})$, pela qual todos os novos momentos são constantes, $\tilde{\mathbf{p}} = \boldsymbol{\alpha}$. Uma vez que a hamiltoniana, Eq. (4.53), é cíclica em φ e ψ , a função característica terá que atender a forma

$$W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = W'(\varrho, \vartheta; \alpha_\varrho, \alpha_\vartheta) + \alpha_\varphi \varphi + \alpha_\psi \psi. \quad (4.70)$$

Pode-se supor ser possível separar todas as coordenadas do problema para se oferecerem evidências de que o sistema é comensurável. Conseqüentemente, segue-se que a função característica desejada pode ser fornecida por

$$W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = W_\varrho(\varrho, \alpha_\varrho) + W_\vartheta(\vartheta, \alpha_\vartheta) + \alpha_\varphi \varphi + \alpha_\psi \psi. \quad (4.71)$$

Obtemos a equação de Hamilton-Jacobi para W estabelecendo $\mathbf{p}$ igual a $\partial W / \partial \mathbf{q}$, e efetuando a substituição na hamiltoniana, que é reduzida, então, a

$$\left(\frac{\partial W_\varrho}{\partial \varrho} \right)^2 + \frac{\alpha_\psi^2 (\varrho - 2)^2}{4\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \left[\left(\frac{\partial W_\vartheta}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{(\alpha_\varphi - \alpha_\psi \cos \vartheta)^2}{\sin^2 \vartheta} \right] = \frac{2\alpha (\varrho - 2)}{\varrho}, \quad (4.72)$$

onde a constante α deve ser identificada com a energia total. Vale notar que toda a dependência sobre ϑ foi segregada na expressão dentro dos colchetes. Assim, esta quantidade tem que ser uma constante:

$$\left(\frac{\partial W_\vartheta}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{(\alpha_\varphi - \alpha_\psi \cos \vartheta)^2}{\sin^2 \vartheta} = \alpha_\vartheta^2. \quad (4.73)$$

As denominadas variáveis de ação, J , são definidas em termos de integrais de linha sobre períodos completos da órbita no plano pq :

$$J(\alpha) = \oint p dq = \oint \frac{\partial W}{\partial q} dq. \quad (4.74)$$

Uma vez que φ é uma coordenada cíclica, o cálculo de J_φ deve ser feito sobre o alcance completo de 2π radianos:

$$J_\varphi = \oint p_\varphi d\varphi = \oint \frac{\partial W}{\partial \varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \alpha_\varphi d\varphi = 2\pi\alpha_\varphi. \quad (4.75)$$

De modo semelhante, J_ψ é dado por

$$J_\psi = 2\pi\alpha_\psi. \quad (4.76)$$

A partir da Eq. (4.73), segue-se que

$$J_\vartheta = \oint p_\vartheta d\vartheta = \oint \frac{\partial W_\vartheta}{\partial \vartheta} d\vartheta = \oint d\vartheta \sqrt{\alpha_\vartheta^2 - (\alpha_\varphi - \alpha_\psi \cos \vartheta)^2 \csc^2 \vartheta}. \quad (4.77)$$

Finalmente, a integral para J_ϱ , a partir das Eqs. (4.72) e (4.73), é

$$J_\varrho = \oint p_\varrho d\varrho = \oint \frac{\partial W_\varrho}{\partial \varrho} d\varrho = \int_{\varrho_- \rightarrow \varrho_+ \rightarrow \varrho_-} d\varrho \sqrt{\frac{k_1}{\varrho^2} + 2\frac{k_2}{\varrho} + k_3}, \quad (4.78)$$

onde

$$-k_1 \equiv \alpha_\vartheta^2 + \alpha_\psi^2, \quad 2k_2 \equiv \alpha_\vartheta^2 - 4\alpha, \quad 4k_3 \equiv 8\alpha - \alpha_\psi^2, \quad (4.79)$$

e $\varrho_\pm$, $\varrho_+ > \varrho_-$, são as raízes reais da expressão sob o sinal de raiz quadrada. Uma vez que $\alpha_\vartheta^2 + \alpha_\psi^2$ tem o significado do quadrado do momento angular total, consideramos, aqui, que $\mathcal{M}$ é sua magnitude, e presumimos que $\mathcal{M} > 0$. Além disso, o movimento que se mantém dentro de certos limites pode ocorrer somente quando $\alpha_\psi^2 - 4\alpha > 0$, em decorrência do que deveremos nos restringir a valores positivos de k_2 . Agora é apropriado observar que o curso completo da integração da integral envolvida na Eq. (4.78) é para ϱ indo de ϱ_- para ϱ_+ e voltando. Se for de ϱ_- para ϱ_+ naquele ramo em que $p_\varrho > 0$, vai de ϱ_+ para ϱ_- no ramo com $p_\varrho < 0$.

O cálculo de J_ϑ , Eq. (4.77), é facilmente realizado utilizando-se somente regras elementares de integração. Transformamos essa integral por meio das substituições $\tan(\vartheta/2) = u$, e $u^2 = x$, sendo o resultado, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} J_\vartheta &= \oint \frac{du}{u} \frac{\sqrt{4\alpha_\vartheta^2 u^2 - [\alpha_\varphi(1+u^2) - \alpha_\psi(1-u^2)]^2}}{1+u^2} \\ &= \int_{-\lambda_4 - \frac{\lambda_2}{2\lambda_1}}^{\lambda_4 - \frac{\lambda_2}{2\lambda_1}} \frac{dx}{x} \frac{\sqrt{\lambda_1 \left[\left(x + \frac{\lambda_2}{2\lambda_1} \right)^2 - \lambda_4^2 \right]}}{1+x} \\ &= \pi \sqrt{-\lambda_1} - \frac{\pi \sqrt{\lambda_1 \lambda_3}}{\sqrt{-\lambda_1}} - \frac{\pi \sqrt{\lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)}}{\sqrt{-\lambda_1}}, \end{aligned} \quad (4.80)$$

onde

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_1} - \frac{\lambda_2^2}{4\lambda_1^2} \equiv -\lambda_4^2, \quad (4.81)$$

e

$$-\lambda_1 \equiv (\alpha_\varphi + \alpha_\psi)^2, \quad \lambda_2 \equiv 4\alpha_\varphi^2 - 2\alpha_\varphi^2 + 2\alpha_\psi^2, \quad -\lambda_3 \equiv (\alpha_\varphi - \alpha_\psi)^2. \quad (4.82)$$

Com o intento de dar seguimento aos cálculos, consideramos o caso em que $\alpha_\varphi + \alpha_\psi > 0$, e $\alpha_\varphi^2 - \alpha_\psi^2 < 0$, de forma que $\lambda_4 \in \mathbb{R}$, sendo o resultado final, então,

$$J_\vartheta = 2\pi\sqrt{\alpha_\vartheta^2 + \alpha_\psi^2} - 2\pi\alpha_\varphi. \quad (4.83)$$

A integral envolvida na Eq. (4.78) pode também ser avaliada de maneira elementar, mas o método da integração complexa é geralmente o mais conveniente. Pode-se demonstrar, de fato (ver Apêndice D), que J_ϱ é dado por

$$J_\varrho = \frac{2\pi k_2}{\sqrt{-k_3}} - 2\pi\sqrt{-k_1} = \frac{\pi\alpha_\psi^2 - 4\pi\alpha}{\sqrt{\frac{1}{4}\alpha_\psi^2 - 2\alpha}} - 2\pi\sqrt{\alpha_\vartheta^2 + \alpha_\psi^2}. \quad (4.84)$$

Podemos agora expressar α_ϑ , α_φ e α_ψ em termos de variáveis de ação:

$$\alpha_\vartheta = \frac{1}{2\pi}\sqrt{(J_\vartheta + J_\varphi)^2 - J_\psi^2}, \quad p_\varphi = \alpha_\varphi = \frac{J_\varphi}{2\pi}, \quad p_\psi = \alpha_\psi = \frac{J_\psi}{2\pi}, \quad (4.85)$$

de modo que a Eq. (4.84) torna-se

$$J \equiv J_\varrho + J_\vartheta + J_\varphi = \frac{\frac{1}{2}J_\psi^2 - 8\pi^2\alpha}{\sqrt{\frac{1}{4}J_\psi^2 - 8\pi^2\alpha}}, \quad (4.86)$$

o que fornece a dependência funcional da energia sobre as variáveis de ação; resolvendo-se para α , fica claro que

$$\alpha = \frac{1}{16\pi^2} \left[J_\psi^2 + \left(\sqrt{J^2 - J_\psi^2} - J \right) J \right]. \quad (4.87)$$

Além disso, se introduzirmos as variáveis de ação nas Eqs. (4.72) e (4.73), com base nas Eqs. (4.85), teremos

$$p_\varrho = \frac{1}{4\pi} \frac{\sqrt{A\varrho^2 + 2B\varrho - C}}{\varrho}, \quad p_\vartheta = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Pv^2 + 2Sv + R}{1 - v^2}}, \quad (4.88)$$

onde, de forma reduzida, escrevemos

$$\begin{aligned} v &\equiv \cos \vartheta, \\ A &\equiv J_\psi^2 - 2J^2 + 2J\sqrt{J^2 - J_\psi^2}, & P &\equiv -(J_\vartheta + J_\varphi)^2, \\ B &\equiv 2J^2 - 2J\sqrt{J^2 - J_\psi^2}, & R &\equiv J_\vartheta^2 + 2J_\vartheta J_\varphi - J_\psi^2, \\ C &\equiv 4(J_\vartheta + J_\varphi)^2, & S &\equiv J_\varphi J_\psi. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Neste ponto, é importante observar que a energia, vista como uma função dos J_k 's, Eq. (4.87), depende somente de uma combinação linear das variáveis de ação, a saber $J_\varrho + J_\vartheta + J_\varphi$, e, por isso, as frequências correspondentes deverão ser idênticas, indicando um caso de dupla degenerescência.

Para encontrarmos as variáveis de ângulo, χ , conjugadas às variáveis J , nós as calculamos com o auxílio das equações de transformação

$$\chi = \frac{\partial W}{\partial J}. \quad (4.90)$$

Para este fim, pode-se derivar uma propriedade importante da função W escrevendo-se sua derivada total no tempo como

$$\frac{dW}{dt} = \sum_k \frac{\partial W}{\partial q_k} \dot{q}_k = \sum_k p_k \dot{q}_k. \quad (4.91)$$

W , portanto, é a integral de linha

$$W = \int_{\Xi_0}^{\Xi} \sum_k p_k dq_k \quad (4.92)$$

tomada ao longo do caminho definido por valores fixos das constantes de separação, α_k 's, onde Ξ_0 denota um ponto fixo e Ξ um ponto móvel do caminho.

Em termos das Eqs. (4.89), as variáveis de ângulo são

$$\begin{aligned} \chi_\varrho &= \frac{\partial W}{\partial J_\varrho} = \int \frac{\partial p_\varrho}{\partial J_\varrho} d\varrho = \frac{\Delta_1}{4\pi} \int d\varrho \frac{\varrho - 2}{\sqrt{A\varrho^2 + 2B\varrho - C}} \\ &= \frac{\Delta_1}{4\pi} \left[\frac{\sqrt{A\varrho^2 + 2B\varrho - C}}{A} - \frac{2A + B}{A\sqrt{-A}} \arcsin\left(\frac{A\varrho + B}{\sqrt{B^2 + AC}}\right) \right] \Big|_{\varrho_0}^{\varrho}, \end{aligned} \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} \chi_\vartheta &= \frac{\partial W}{\partial J_\vartheta} = \int \frac{\partial p_\varrho}{\partial J_\vartheta} d\varrho + \int \frac{\partial p_\vartheta}{\partial J_\vartheta} d\vartheta \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\varrho}{\varrho} \frac{\Delta_1 (\varrho - 2) \varrho - 2\sqrt{C}}{\sqrt{A\varrho^2 + 2B\varrho - C}} + \frac{\sqrt{P}}{2\pi i} \int \frac{dv}{\sqrt{Pv^2 + 2Sv + R}} \\ &= \frac{\Delta_1}{4\pi} \left[\frac{\sqrt{A\varrho^2 + 2B\varrho - C}}{A} - \frac{2A + B}{A\sqrt{-A}} \arcsin\left(\frac{A\varrho + B}{\sqrt{B^2 + AC}}\right) \right] \Big|_{\varrho_0}^{\varrho} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \left[\arcsin\left(\frac{Pv + S}{\sqrt{S^2 - PR}}\right) \Big|_{v_0}^v - \arcsin\left(\frac{1}{\varrho} \frac{B\varrho - C}{\sqrt{B^2 + AC}}\right) \Big|_{\varrho_0}^{\varrho} \right], \end{aligned} \quad (4.94)$$

$$\begin{aligned}
\chi_\varphi &= \frac{\partial W}{\partial J_\varphi} = \int \frac{\partial p_\varrho}{\partial J_\varphi} d\varrho + \int \frac{\partial p_\vartheta}{\partial J_\varphi} d\vartheta + \int \frac{\partial p_\varphi}{\partial J_\varphi} d\varphi \\
&= \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\varrho}{\varrho} \frac{\Delta_1(\varrho-2)\varrho-2\sqrt{C}}{\sqrt{A\varrho^2+2B\varrho-C}} + \frac{\sqrt{P}}{2\pi i} \int \frac{dv}{\sqrt{Pv^2+2Sv+R}} \\
&+ \frac{i}{4\pi} \int dv \frac{(1-v)\sqrt{P-2S+R}+(1+v)\sqrt{P+2S+R}}{(v^2-1)\sqrt{Pv^2+2Sv+R}} + \frac{1}{2\pi} \int d\varphi \\
&= \frac{\Delta_1}{4\pi} \left[\frac{\sqrt{A\varrho^2+2B\varrho-C}}{A} - \frac{2A+B}{A\sqrt{-A}} \arcsin\left(\frac{A\varrho+B}{\sqrt{B^2+AC}}\right) \right] \Big|_{\varrho_0}^{\varrho} \\
&+ \frac{1}{2\pi} \left\{ \arcsin\left(\frac{Pv+S}{\sqrt{S^2-PR}}\right) - \frac{1}{2} \arcsin\left[\frac{R-S+(S-P)v}{(1+v)\sqrt{S^2-PR}}\right] \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} \arcsin\left[\frac{R+S+(S+P)v}{(v-1)\sqrt{S^2-PR}}\right] \right\} \Big|_{v_0}^v - \frac{1}{2\pi} \arcsin\left(\frac{1}{\varrho} \frac{B\varrho-C}{\sqrt{B^2+AC}}\right) \Big|_{\varrho_0}^{\varrho} \\
&+ \frac{1}{2\pi} (\varphi - \varphi_0), \tag{4.95}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_\psi &= \frac{\partial W}{\partial J_\psi} = \int \frac{\partial p_\varrho}{\partial J_\psi} d\varrho + \int \frac{\partial p_\vartheta}{\partial J_\psi} d\vartheta + \int \frac{\partial p_\psi}{\partial J_\psi} d\psi \\
&= \frac{1}{4\pi} \int d\varrho \frac{\Delta_2(\varrho-2)+2J_\psi}{\sqrt{A\varrho^2+2B\varrho-C}} + \frac{1}{2\pi} \int d\psi \\
&+ \frac{i}{4\pi} \int dv \frac{(1-v)\sqrt{P-2S+R}-(1+v)\sqrt{P+2S+R}}{(v^2-1)\sqrt{Pv^2+2Sv+R}} \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\Delta_2\sqrt{A\varrho^2+2B\varrho-C}}{A} - \frac{2J_\psi}{\sqrt{-A}} \arcsin\left(\frac{A\varrho+B}{\sqrt{B^2+AC}}\right) \right. \\
&+ \left. \frac{\Delta_2(2A-B)}{A\sqrt{-A}} \arcsin\left(\frac{A\varrho+B}{\sqrt{B^2+AC}}\right) \right] \Big|_{\varrho_0}^{\varrho} + \frac{1}{2\pi} (\psi - \psi_0) \\
&- \frac{1}{4\pi} \left\{ \arcsin\left[\frac{R-S+(S-P)v}{(1+v)\sqrt{S^2-PR}}\right] + \arcsin\left[\frac{R+S+(S+P)v}{(v-1)\sqrt{S^2-PR}}\right] \right\} \Big|_{v_0}^v, \tag{4.96}
\end{aligned}$$

onde

$$-\Delta_1 \equiv 2J - \frac{2J^2 - J_\psi^2}{\sqrt{J^2 - J_\psi^2}}, \quad \Delta_2 \equiv J_\psi - \frac{J_\psi J}{\sqrt{J^2 - J_\psi^2}}. \quad (4.97)$$

No limite assintótico integrável, o movimento de dois monopólos tem duas frequências. Por intermédio da Eq. (4.87), encontramos

$$\nu_\varrho = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_\varrho} = \frac{\Delta_1}{16\pi^2} = \nu_\vartheta = \nu_\varphi, \quad \nu_\psi = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_\psi} = \frac{\Delta_2 + J_\psi}{16\pi^2}. \quad (4.98)$$

A periodicidade do movimento significa que todos os pares de frequências das variáveis de ângulo atendem a relações racionais da forma

$$\eta_k \nu_k = \eta_{k'} \nu_{k'}, \quad (\text{sem soma}) \quad (4.99)$$

onde η_k e $\eta_{k'}$ são inteiros positivos diferentes de zero. Nesse caso, quando se observa o comportamento do sistema em duas ou mais variáveis de estado, vê-se uma curva fechada. A respectiva seção de Poincaré é muito simples, reduzida para um único ponto ou, possivelmente, vários pontos. Ao contrário, quando observada no espaço de três ou mais variáveis de estado, a trajetória permanecerá sobre um toro bidimensional e prosseguirá para preencher inteiramente essa superfície. Podemos examinar um corte transversal dessa órbita e encontraremos um conjunto de pontos formando uma curva fechada. Esse movimento é descrito como multiplamente periódico. Segundo nossos cálculos, o caso anterior é, portanto, satisfeito, com a condição de

$$\frac{\nu_\psi}{\nu_\varrho} = \frac{\Delta_2 + J_\psi}{\Delta_1} = \frac{J_\psi J - 2J_\psi \sqrt{J^2 - J_\psi^2}}{J_\psi^2 - 2J^2 + 2J \sqrt{J^2 - J_\psi^2}} = \frac{\eta_1}{\eta_2}, \quad (4.100)$$

onde $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{Z}$, sem fatores comuns. Substituindo-se as Eqs. (4.52) e (4.86) na Eq. (4.100), temos, simplesmente,

$$\frac{[24\mu_1 \varrho^{3/2} + (\varrho - 6) \varrho^{1/2} \alpha_\psi^2] \alpha_\psi}{4\sqrt{2} (\alpha_\psi^2 - 4\mu_1 \varrho)^{3/2}} = \frac{\eta_1}{\eta_2}, \quad (4.101)$$

onde

$$2\mu_1 \equiv \mu_2 - 2\mu_2 \varrho^{-1}, \quad \mu_2 \equiv \dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \dot{\vartheta}^2 + \varrho^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta. \quad (4.102)$$

Finalmente, resolvendo a Eq. (4.101) para α_ψ , as duas soluções reais encontradas resultam em

$$\alpha_\psi = \pm 2 \left[\frac{2\mu_1 \beta_3 \varrho}{\beta_2^{1/3} (32\eta_1^2 - 36\eta_2^2 \varrho + 12\eta_2^2 \varrho^2 - \eta_2^2 \varrho^3)} \right]^{1/2}, \quad (4.103)$$

onde pusemos

$$\begin{aligned}
\beta_1 &\equiv (\eta_1^2 - \eta_2^2)^{1/2}, \\
\beta_2 &\equiv 64\beta_1\eta_1^3\eta_2^2 - 64\eta_1^4\eta_2^2 + 288\eta_1^2\eta_2^4 - 216\eta_2^6 \\
&\quad - 72\beta_1\eta_1\eta_2^4\varrho - 120\eta_1^2\eta_2^4\varrho + 108\eta_2^6\varrho + 24\beta_1\eta_1\eta_2^4\varrho^2 \\
&\quad + 24\eta_1^2\eta_2^4\varrho^2 - 18\eta_2^6\varrho^2 - 2\beta_1\eta_1\eta_2^4\varrho^3 - 2\eta_1^2\eta_2^4\varrho^3 + \eta_2^6\varrho^3, \\
\beta_3 &\equiv 16\beta_2^{1/3}\eta_1^2 - \beta_2^{2/3}\varrho - 12\beta_2^{1/3}\eta_2^2\varrho + 32\eta_1^2\eta_2^2\varrho \\
&\quad - 36\eta_2^4\varrho + 2\beta_2^{1/3}\eta_2^2\varrho^2 - 8\eta_1^2\eta_2^2\varrho^2 + 12\eta_2^4\varrho^2 - \eta_2^4\varrho^3.
\end{aligned} \tag{4.104}$$

Desta maneira, derivamos, então, as variáveis de ângulo-ação, expressões para a energia e frequências em termos das variáveis de ação conservadas, e, finalmente, uma fórmula para a carga elétrica em termos das condições iniciais, de modo que o movimento de dois monopólos seja periódico. Para finalizar a seção, observamos que, em decorrência da análise acima, as fórmulas para as variáveis de ângulo não permitem inversão. Além disto, gostaríamos de salientar que a consistência dessas expressões pode ser observada verificando-se que χ muda por unidade quando q passa por um período completo (isto é, em caso de libração, sobre um movimento de um lado para outro de q e, no caso de uma rotação, sobre um caminho de comprimento 2π): $\oint d\chi \equiv 1$. Esta propriedade decorre a partir da definição das variáveis de ângulo.

4.4 Integrabilidade

Uma condição necessária para uma hamiltoniana com quatro graus de liberdade ser integrável é a de possuir quatro primeiras integrais de movimento independentes, cada uma delas permanecendo constante à medida que a solução do espaço de fase octodimensional evolui com o tempo. Uma propriedade fundamental é que as funções constantes $G_1, \dots, G_4$ devem comutar, no sentido de que os parênteses de Poisson dêem zero, isto é,

$$\{G_\ell, G_{\ell'}\}_{PB} \equiv \sum_{j=1,2,3,4} \left(\frac{\partial G_\ell}{\partial q_j} \frac{\partial G_{\ell'}}{\partial p_j} - \frac{\partial G_\ell}{\partial p_j} \frac{\partial G_{\ell'}}{\partial q_j} \right) = 0, \text{ para } \ell, \ell' = 1, \dots, 4, \tag{4.105}$$

onde $\{, \}_{PB}$ é o denominado parênteses de Poisson.

Para o caso em pauta, há três primeiras integrais do movimento conhecidas: a energia, a quantidade dada na Eq. (4.46), e o momento generalizado da variável cíclica φ . Pode-se demonstrar que essas constantes acham-se em involução. É possível também demonstrar diretamente que os $\mathcal{M}_k$'s atendem às relações dos parênteses

$$\{\mathcal{M}_i, \mathcal{M}_j\}_{PB} = \epsilon_{ijk}\mathcal{M}_k, \tag{4.106}$$

onde ϵ_{ijk} é o familiar símbolo anti-simétrico tridimensional com $\epsilon_{123} = 1$.

O formalismo dos parênteses de Poisson contém as equações de movimento de Hamilton

$$\dot{q} = \{q, \mathcal{H}\}_{PB}, \quad \dot{p} = \{p, \mathcal{H}\}_{PB}. \tag{4.107}$$

Os lados direitos das equações para as taxas de variação no tempo dos ângulos eulerianos tomam a forma

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= \omega_y \cos \psi - \omega_x \sin \psi, \\ \dot{\varphi} &= \omega_x \csc \vartheta \cos \psi + \omega_y \csc \vartheta \sin \psi, \\ \dot{\psi} &= \omega_z - \omega_x \cot \vartheta \cos \psi - \omega_y \cot \vartheta \sin \psi,\end{aligned}\tag{4.108}$$

em consonância com as expressões obtidas resolvendo-se o conjunto de Eqs. (4.26) em termos de $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$ e $\dot{\psi}$. Os procedimentos correspondentes para as demais equações são óbvios, e os resultados são dados pelas Eqs. (4.37-4.41).

Sabe-se bem que as transformações canônicas podem ser utilizadas para fornecer um procedimento geral para a solução de problemas mecânicos [53, 54, 55]. Por exemplo, se fosse possível encontrar uma função geratriz transformando $\mathcal{H}$, de forma que as novas coordenadas canônicas sejam todas cíclicas, a nova hamiltoniana seria integrável.

Vamos considerar uma transformação canônica de (q, p) para um novo conjunto $(\tilde{q}, \tilde{p})$, de modo que dois de seus momentos, digamos $\tilde{p}_1$ e $\tilde{p}_2$, sejam constantes do movimento. Para atender a esses requisitos, é suficiente exigir que a nova hamiltoniana $\tilde{\mathcal{H}}$ seja cíclica nas coordenadas $\tilde{q}_1$ e $\tilde{q}_2$. Sob essas condições, as equações de Hamilton aplicam-se como

$$\dot{\tilde{p}}_1 = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{q}_1} = 0, \quad \dot{\tilde{p}}_2 = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{q}_2} = 0.\tag{4.109}$$

A função geratriz do segundo tipo, geralmente denotada por F_2 , produzindo a transformação desejada, é

$$\begin{aligned}F_2 &= \tilde{p}_2 \varphi + \tilde{p}_3 \psi + \tilde{p}_4 \varrho \\ &+ \tilde{p}_1 \arcsin \left[\frac{\tilde{p}_2 \tilde{p}_3 - \tilde{p}_1^2 \cos \vartheta}{\sqrt{(\tilde{p}_1^2 - \tilde{p}_2^2)(\tilde{p}_1^2 - \tilde{p}_3^2)}} \right] \\ &+ \frac{1}{2} (\tilde{p}_2 + \tilde{p}_3) \arcsin \left[\frac{\tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_2 \tilde{p}_3 - \frac{(\tilde{p}_2 + \tilde{p}_3)^2}{\cos \vartheta + 1}}{\sqrt{(\tilde{p}_1^2 - \tilde{p}_2^2)(\tilde{p}_1^2 - \tilde{p}_3^2)}} \right] \\ &+ \frac{1}{2} (\tilde{p}_3 - \tilde{p}_2) \arcsin \left[\frac{(\cos \vartheta + 1) \tilde{p}_2 \tilde{p}_3 - (\cos \vartheta - 1) \tilde{p}_1^2 - \tilde{p}_2^2 - \tilde{p}_3^2}{(\cos \vartheta - 1) \sqrt{(\tilde{p}_1^2 - \tilde{p}_2^2)(\tilde{p}_1^2 - \tilde{p}_3^2)}} \right].\end{aligned}\tag{4.110}$$

As derivadas da função geratriz são

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad \tilde{q} = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}}.\tag{4.111}$$

A primeira metade dessas equações leva a

$$\begin{aligned}p_\vartheta &= \frac{\partial F_2}{\partial \vartheta} = \csc \vartheta \sqrt{\tilde{p}_1^2 \sin^2 \vartheta - \tilde{p}_2^2 - \tilde{p}_3^2 + 2\tilde{p}_2 \tilde{p}_3 \cos \vartheta}, \\ p_\varphi &= \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} = \tilde{p}_4, \quad p_\varphi = \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} = \tilde{p}_2, \quad p_\psi = \frac{\partial F_2}{\partial \psi} = \tilde{p}_3.\end{aligned}\tag{4.112}$$

Substituindo para $\tilde{p}_2$ e $\tilde{p}_3$ em p_ϑ e resolvendo para $\tilde{p}_1^2$, obtém-se, por comparação com a Eq. (4.46), que $\tilde{p}_1^2 = \mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2^2 + \mathcal{M}_3^2$.

Como é evidente a partir das Eqs. (4.112), $\tilde{p}_2$ é o momento conservado p_φ . Assim, a nova hamiltoniana não depende das coordenadas $\tilde{q}_1$ e $\tilde{q}_2$ e, portanto, temos $\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}(\tilde{q}_3, \tilde{q}_4, \tilde{p}_3, \tilde{p}_4; h_1, h_2)$, com $\tilde{p}_1 = h_1$ e $\tilde{p}_2 = h_2$, $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$. Além disso, $\tilde{\mathcal{H}}$ tem dois graus de liberdade, estabelecendo-se h_1 e h_2 . Para colocar isto em outros termos, podemos restringir-nos a um subespaço simplético do espaço de fase.

A metade restante das derivadas da função geratriz é

$$\begin{aligned}\tilde{q}_1 &= \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_1} = \arcsin \left[\frac{\tilde{p}_2 \tilde{p}_3 - \tilde{p}_1^2 \cos \vartheta}{\sqrt{(\tilde{p}_1^2 - \tilde{p}_2^2)(\tilde{p}_1^2 - \tilde{p}_3^2)}} \right], \\ \tilde{q}_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_2} = \varphi + \frac{1}{2} \arcsin \left[\frac{\tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_2 \tilde{p}_3 - \frac{(\tilde{p}_2 + \tilde{p}_3)^2}{\cos \vartheta + 1}}{\sqrt{(\tilde{p}_1^2 - \tilde{p}_2^2)(\tilde{p}_1^2 - \tilde{p}_3^2)}} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \arcsin \left[\frac{(\cos \vartheta + 1) \tilde{p}_2 \tilde{p}_3 - (\cos \vartheta - 1) \tilde{p}_1^2 - \tilde{p}_2^2 - \tilde{p}_3^2}{(\cos \vartheta - 1) \sqrt{(\tilde{p}_1^2 - \tilde{p}_2^2)(\tilde{p}_1^2 - \tilde{p}_3^2)}} \right], \\ \tilde{q}_3 &= \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_3} = \psi + \frac{1}{2} \arcsin \left[\frac{\tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_2 \tilde{p}_3 - \frac{(\tilde{p}_2 + \tilde{p}_3)^2}{\cos \vartheta + 1}}{\sqrt{(\tilde{p}_1^2 - \tilde{p}_2^2)(\tilde{p}_1^2 - \tilde{p}_3^2)}} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \arcsin \left[\frac{(\cos \vartheta + 1) \tilde{p}_2 \tilde{p}_3 - (\cos \vartheta - 1) \tilde{p}_1^2 - \tilde{p}_2^2 - \tilde{p}_3^2}{(\cos \vartheta - 1) \sqrt{(\tilde{p}_1^2 - \tilde{p}_2^2)(\tilde{p}_1^2 - \tilde{p}_3^2)}} \right], \\ \tilde{q}_4 &= \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_4} = \dot{\varrho}.\end{aligned}\tag{4.113}$$

Capítulo 5

Simulações numéricas

Usando os métodos de análise descritos no Capítulo 2, estamos agora na posição de discutir nossos resultados numéricos usando o método de Manton, que descreve a dinâmica de dois monopólos BPS $SU(2)$ a baixas energias usando a métrica de Atiyah-Hitchin no espaço das suas coordenadas coletivas. Começamos reproduzindo na Seção 5.1 os resultados de Temple-Raston [10] para as superfícies de seção de Poincaré. A Seção 5.2 trata da análise espectral das soluções temporais. Finalmente, na Seção 5.3, apresentamos nossos resultados para os expoentes característicos de Lyapunov, os quais são uma medida quantitativa da evolução de trajetórias vizinhas no espaço de fase. Estas duas últimas seções são resultados novos, ainda não publicados.

5.1 Superfícies de seção de Poincaré

Tendo reduzido a hamiltoniana a dois graus de liberdade, podemos exibir o movimento de um par de monopólos BPS utilizando o método das seções de Poincaré. Para o caso quadridimensional em pauta, pode-se obter uma seção de Poincaré a partir dos pontos de intersecção de uma trajetória contínua com um plano bidimensional no espaço de fase. Uma escolha adequada é o plano $\tilde{p}_4\tilde{q}_4$ localizado na posição $\mathcal{M}_1 = \text{constante}$. Uma vez que as equações de movimento são conhecidas, podem-se calcular as posições dos pontos nos quais passa a trajetória através deste plano numa determinada direção. Deve-se notar que o uso de uma seção de Poincaré é bem diverso de um estudo estroboscópico, onde olha-se para a saída do sistema a intervalos de tempo regulares. Ao contrário, o tempo no qual se dá a intersecção do ponto seguinte é variável e deve ser determinado numericamente por interpolação.

O que fazemos, na verdade, é seguir a curva solução das equações de movimento, calculando valores das variáveis necessárias para se especificar o estado do sistema enquanto prosseguimos, e no instante em que $\mathcal{M}_1$ muda de positivo para negativo, registramos o ponto de perfuração no plano definido por $\mathcal{M}_1 = 0$.

Para o fim de se obter uma seção de Poincaré no computador, é preciso que sejam especificados os valores iniciais em algumas das coordenadas. No momento, isto é obtido estabelecendo-se

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \psi = 0, \quad \dot{\varrho} = \dot{\vartheta} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\varphi} = \frac{h_2}{a^2}. \quad (5.1)$$

Usando-se as Eqs. (4.27), segue-se que

$$p_\varrho = 0, \quad p_\vartheta = \mathcal{M}_2 = 0, \quad p_\varphi = \mathcal{M}_1 = h_2 \quad \text{e} \quad p_\psi = \mathcal{M}_3 = c^2 \dot{\psi}, \quad (5.2)$$

e, portanto, a Eq. (4.46) dá

$$\mathcal{M}^2 \equiv \mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2^2 + \mathcal{M}_3^2 = p_\varphi^2 + p_\vartheta^2 + p_\psi^2 = h_2^2 + c^4 \dot{\psi}^2. \quad (5.3)$$

Os gráficos de Poincaré a seguir foram calculados integrando-se numericamente as equações de movimento no caso em que $f = -b/\varrho$. A integração numérica é feita usando-se um método de Runge-Kutta de quarta ordem. O Apêndice C contém uma pequena introdução do algoritmo utilizado neste trabalho. O passo de integração foi, tipicamente, 0.0001, e as trajetórias mais longas tiveram 2^{27} passos. A solução explícita para as Eqs. (4.24) é utilizada para se estimarem os valores para a , b e c ; suas fórmulas podem ser encontradas no Apêndice A. Cada gráfico consiste em quatro conjuntos de condições iniciais, onde o maior ponto branco de cada órbita representa o valor inicial do par (ϱ, p_ϱ) . Escolhemos $h_2 = 37.596$. Os valores iniciais tomados para ς são: 3.11, 3.12, 3.13 e 3.14. Aqui ς acha-se relacionado a ϱ através de $\varrho = 2K[\sin(\varsigma/2)]$. Isto tem o efeito de trazer uma separação de dyons infinita para $\varsigma = \pi$.

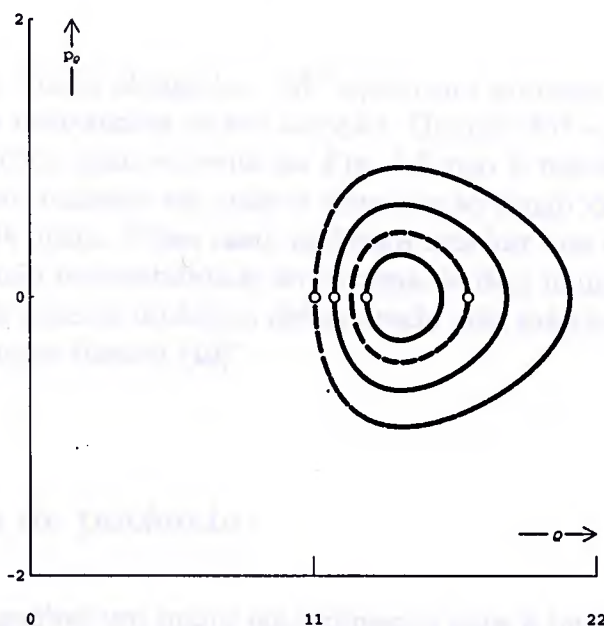


Figura 5.1: Superfícies de seção de Poincaré no plano $p_\varrho\varrho$ localizado na posição $\mathcal{M}_1 = 0$ mostrando os pontos sucessivos de interseção do fluxo do Hamiltoniano definido pela Eq. (4.43) com $\mathcal{M}^2 = 1906.71$.

A Fig. 5.1 é para $\mathcal{M}^2 = 1906.71$. Cada trajetória parece ser composta de um número infinito de pontos distribuídos ao longo de uma curva fechada cuja forma é simples. Esse tipo de movimento é denominado quaseperiódico (isto é, uma superposição de movimentos periódicos). O gráfico seguinte, Fig. 5.2, ainda produz

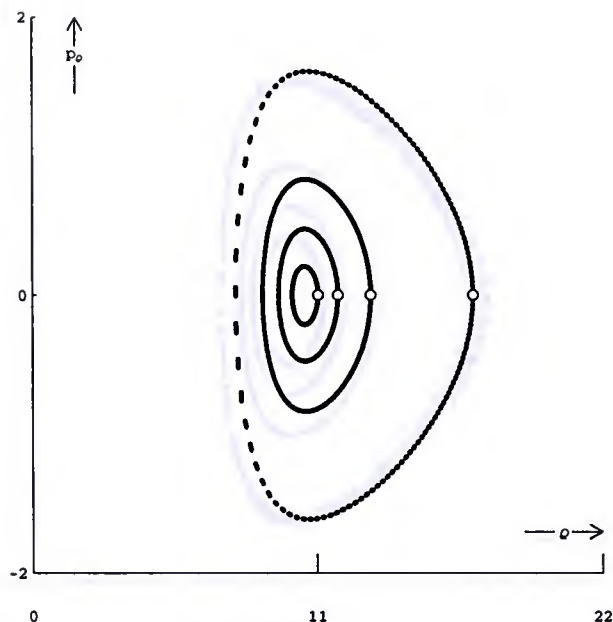


Figura 5.2: Mesmo que na Fig. 5.1, mas com $\mathcal{M}^2 = 2152.95$.

trajetórias fechadas e mais alongadas. $\mathcal{M}^2$ sofreu um aumento e os monopólos se aproximam mais em decorrência de sua atração. Quando $\mathcal{M}^2 = 2237.7$, vemos imediatamente que a órbita mais externa da Fig. 5.3 não é restrita a uma curva no plano. Em vez disso, consiste em pontos situados ao longo de várias curvas que passam uma perto da outra. Nesse caso, podemos concluir que o fluxo é aperiódico. Isto pode sugerir a não integrabilidade do sistema de dois monopólos. O problema da integrabilidade do sistema dinâmico determinado pela métrica de Atiyah-Hitchin foi discutido por Temple-Raston [10].

5.2 Espectros de potência

Na esperança de se ganhar um maior entendimento para a interpretação dos resultados da seção anterior, é agora desejável usar-se a análise do espectro de potências como ferramenta para se encontrarem padrões em conjuntos de dados discretos. Independentemente da natureza dos dados de entrada, a saída da análise espectral é resumida num único gráfico. Ao longo da abscissa desse gráfico acha-se a frequência; ao longo do eixo da ordenada é representada uma medida da energia, ou potência correspondente, que é determinada a partir do método da transformada de Fourier. Tecnicamente falando, o problema de se calcularem os componentes $F_0, F_1, \dots, F_{N-1}$ para a transformada de Fourier a partir de uma sequência discreta no tempo de valores complexos conhecidos $f_0, f_1, \dots, f_{N-1}$ pode ser considerado como o trabalho

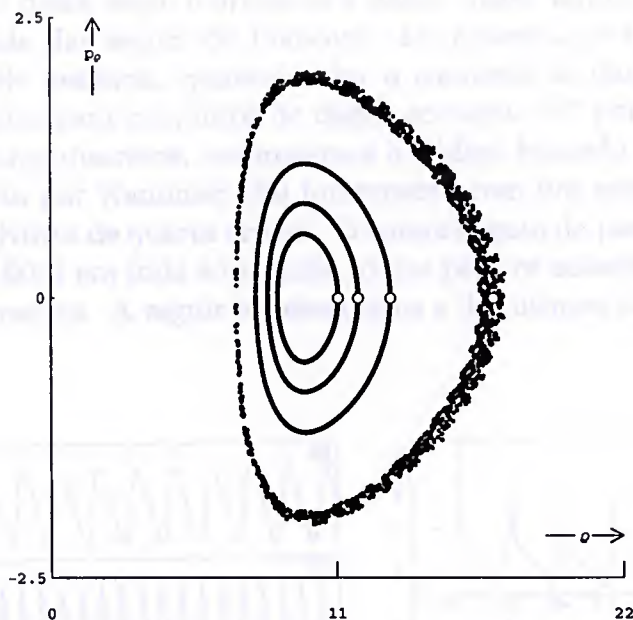


Figura 5.3: Mesmo que na Fig. 5.1, mas com $\mathcal{M}^2 = 2237.7$. Cerca de 13.500 retornos à seção de Poincaré foram contados e plotados para a órbita mais externa.

que realizamos quando executamos a seguinte declaração

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{bmatrix} := \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \chi & \chi^2 & \cdots & \chi^{N-1} \\ 1 & \chi^2 & \chi^4 & \cdots & \chi^{2N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \chi^{N-1} & \chi^{2N-2} & \cdots & \chi^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

onde a matriz $N \times N$ é expressa em termos de potências do número complexo $\chi = e^{-i2\pi/N}$. Dizemos que essa matriz é a matriz de Fourier. Antes de entrarmos no objeto desta seção, é preciso fazer uma observação sobre a velocidade de cálculo. A matriz de Fourier é, em geral, completa, o que significa que N^2 multiplicações são necessárias para a transformada, mas a forma especial dessa matriz permite uma fatorização em matrizes muito simples. Essa idéia forma a base do excepcionalmente eficiente algoritmo FFT. FFT é a sigla de Transformada Rápida de Fourier. O esquema FFT ganha mais velocidade ao se estabelecer $N = 2^M$ para algum $M = 1, 2, \dots$. De fato, o número de operações cai de N^2 para NM . Por exemplo, quando $N = 2^{11} = 2048$, passamos de $N^2 = 4194304$ para $NM = 22528$ operações. Infelizmente, não poderemos entrar em mais detalhes sobre o inteligente esquema da FFT neste trabalho, porque tomaria tempo e espaço demais para se apresentar a matemática necessária.

A técnica da análise espectral é essencialmente fenomenológica, no sentido de que tenta avaliar o caráter qualitativo da dinâmica de um sistema, levando a uma representação que mostra as frequências presentes numa determinada série cronológica.

O objeto principal desta seção é aplicá-la a dados ‘reais’ anteriormente analisados, usando-se o método das seções de Poincaré. De maneira geral, ao fazermos uma análise espectral de potência, quanto maior o conjunto de dados, melhor. Efetuamos nossos cálculos para conjuntos de dados contendo 2^{25} pontos. Para o cálculo técnico dos espectros discretos, empregamos o código baseado na apresentação da FFT dada no texto por Kammler [30] juntamente com um esquema de integração padrão de Runge-Kutta de quarta ordem. O comprimento do passo utilizado na integração foi $\Delta t = 0.0001$ em toda a extensão, o que para os nossos fins, deu resultados suficientemente precisos. A seguir apresentamos e discutimos nossos resultados.

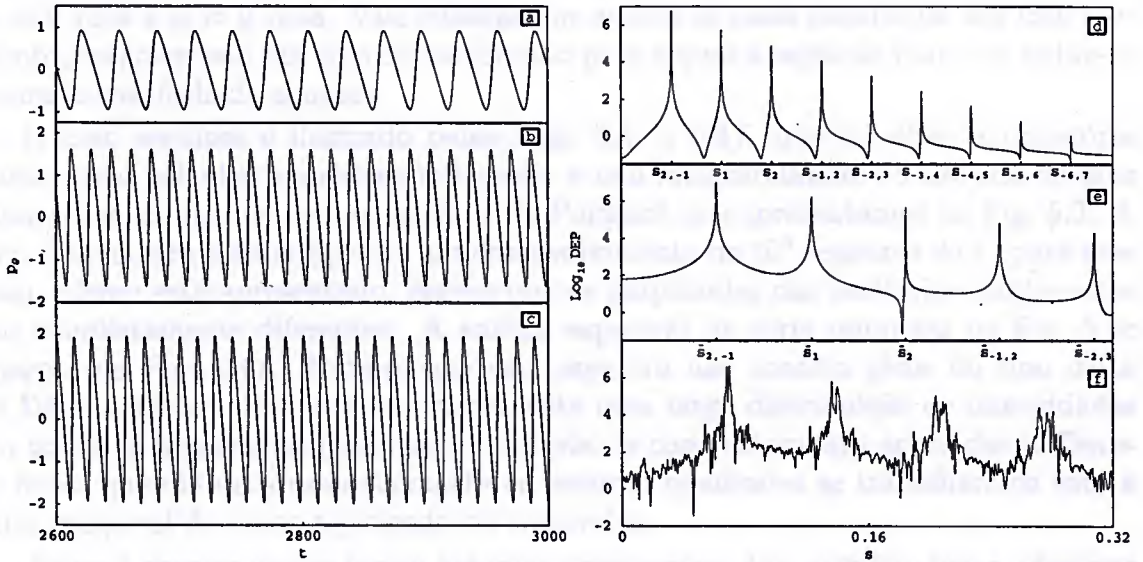


Figura 5.4: (a) e (d): Regime quase-periódico com duas frequências racionalmente independentes s_1 e s_2 . Em (a), a série temporal $p_q(t)$ e em (d) o correspondente espectro de potência. Além das duas frequências básicas s_1 e s_2 , aparecem picos de δ 's de Dirac nas combinações lineares ímpares: $s_{m,n} = ms_1 + ns_2$ onde $m + n =$ inteiro ímpar. (b) e (e): o mesmo que (a) e (d), respectivamente, mas com picos em $\bar{s}_{m,n} = m\bar{s}_1 + n\bar{s}_2$. (c) e (f): regime oscilatório aperiódico, em (c) a série temporal e em (f) o correspondente espectro de potência. Note o espectro largo de frequência em (f) em contraste aos de (d) e (e).

Os cálculos numéricos apresentados a seguir, referem-se às mesmas condições iniciais utilizadas para as seções de Poincaré. No que se refere à interpretação desses cálculos, parece que o nosso modelo tem duas situações experimentais bem específicas. Esses casos são apresentados na Fig. 5.4. As Figs. 5.4a e 5.4d ilustram um caso com um movimento quaseperiódico de duas frequências, correspondente à seção de Poincaré da órbita mais externa da Fig. 5.1; movimento similar está explicitado nas Figs. 5.4b e 5.4e, correspondente à seção de Poincaré da órbita mais externa da Fig. 5.2. Falamos da quaseperiodicidade de duas frequências quando o

número de frequências fundamentais que são ‘misturadas’ é dois. A Fig. 5.4a mostra um exemplo da dinâmica da variável p_ρ dentro de um intervalo apropriado de t , que, de várias maneiras, não se pode distinguir de uma sequência periódica. Tomou-se um espectro de potência de uma série temporal inteira de p_ρ , computada ao longo de um tempo de cerca de 1.35×10^4 . Conforme indicado em detalhes na Fig. 5.4d, o espectro (ou seja, a magnitude quadrada da transformada de Fourier) tem picos do tipo delta de Dirac de intensidades variadas localizados em combinações lineares de inteiros ímpares das duas frequências racionalmente independentes $s_1 \approx 0.0653$ e $s_2 \approx 0.0978$. Como a escala foi escolhida para ser logarítmica para as ordenadas, nesta figura são particularmente enfatizados os valores pequenos. Resultados bastante similares a estes estão ilustrados nas Figs. 5.4b e 5.4e. Neste caso, em particular, também quaseperiódico, as duas frequências fundamentais são dadas por $\bar{s}_1 \approx 0.1234$ e $\bar{s}_2 \approx 0.1848$. Vale lembrar que ambos os casos discutidos, até este momento, caracterizam um tipo de movimento para o qual a seção de Poincaré reduz-se a uma curva fechada simples.

O caso seguinte é ilustrado pelas Figs. 5.4c e 5.4f, que se refere à trajetória para a qual cálculos numéricos indicaram a não integrabilidade do sistema de dois monopólos, de acordo com os gráficos de Poincaré que apresentamos na Fig. 5.3. A Fig. 5.4c mostra a simulação de um desenvolvimento de 10^5 registros de p_ρ para esse caso. Como está apresentado, parece que as amplitudes das oscilações subjacentes são completamente diferentes. A análise espectral da série temporal na Fig. 5.4c aparece na Fig. 5.4f. Nota-se que este espectro não contém picos do tipo delta de Dirac isolados. Podemos ver claramente uma larga distribuição de intensidades em todas as frequências (insinuação indireta de comportamento aperiódico). Deve-se notar que obtemos essencialmente os mesmos resultados se trabalharmos com a série temporal do curso registrado da variável ρ .

Agora é preciso que se façam algumas observações. Em primeiro lugar, observar que, para o primeiro caso quaseperiódico, ilustrado pelas Figs. 5.4a e 5.4d, a escolha das frequências básicas s_1 e s_2 é, de certa forma, arbitrária. Além disso, nós as chamamos racionalmente independentes porque a única solução de $m_1 s_1 + m_2 s_2 = 0$ é $m_1 = m_2 = 0$; a mesma observação aplica-se ao segundo caso quaseperiódico, ilustrado pelas Figs. 5.4b e 5.4e. Em segundo lugar, como se observa na Fig. 5.4d, os picos de frequência correspondentes a combinações lineares complicadas são praticamente impossíveis de detectar. Em terceiro lugar, pode-se dizer com certo grau de confiança que o resultado indicado na Fig. 5.4f produz um espectro que parece apresentar alguns picos amplos, igualmente espaçados em um plano mais afastado. Isto deve-se ao desvio do sinal observado a partir do quaseperiódico. A mensagem teórica é que as órbitas quase-regulares desdobram o esqueleto dos sinais aperiódicos, parecendo ser cruciais para a análise de suas propriedades.

Mencionamos aqui um estudo [56] sobre sistemas conservativos, onde é apresentado um método para a decomposição de espectros de potência. O método proposto neste trabalho obtém uma separação dos espectros, parte caracterizada pela presença de picos pronunciados e outra parte caracterizada pela abundância de intensidades significativas, utilizando somente a distribuição de expoentes de Lyapunov locais [57]. Isto já fica além do âmbito de nossa discussão e não será tratado aqui.

5.3 Expoentes característicos de Lyapunov

Nesta seção, baseada no método numérico desenvolvido na Seção 2.3, apresentaremos resultados explícitos da evolução no tempo da quantidade $L(t)$, que converge para o expoente de Lyapunov máximo quando $t \rightarrow \infty$, para o sistema dinâmico conservativo determinado pela métrica de Atiyah-Hitchin com parâmetros que correspondem as três situações anteriormente analisadas, usando-se a técnica da análise espectral. A primeira e a segunda situação manifestam-se como duas oscilações quaseperiódicas de duas frequências distintas cada, e a terceira como uma série contendo intensidades consideráveis em baixas frequências. Para o cálculo da quantidade em questão, foram utilizadas seqüências temporais de 10^8 pontos que se estenderam até aproximadamente 500 ciclos. O esquema de integração numérica adotado para produzir estas séries foi o tradicional método de Runge-Kutta de quarta ordem em precisão dupla, e o deslocamento no tempo foi tomado como 0.0001. Queremos dar ênfase no fato que empregamos diretamente as equações de Hamilton que definem o sistema de dois monopólos juntamente com as equações diferenciais que simulam o desenvolvimento do vetor ξ , selecionado inicialmente de tal forma que $\|\xi_0\| = 1$. No que se refere às equações que propagam ξ , a matriz Jacobiana associada contém um grande número de termos que não permitem ser explicitados de uma forma simples, e por isso estas equações não serão apresentadas em detalhe nesta dissertação.

Por completeza, é preciso que se façam alguns comentários. Em primeiro lugar, ξ pode aumentar ou diminuir, arbitrariamente, em magnitude com o tempo, potencialmente inviabilizando o cálculo numérico. Este problema pode ser evitado pela substituição do vetor ξ por um novo vetor $\xi' = \xi/\|\xi\|$ após cada deslocamento no tempo. Em segundo lugar, cabe aqui notar que embora a magnitude do expoente resultante depende da norma utilizada (como sempre nesta tese, $\|\cdot\|$ denota a norma Euclideana), os sinais dos expoentes são atributos particulares do sistema dinâmico e não estão sob a influência da estrutura da norma. Em terceiro lugar, gostaríamos de mencionar que as órbitas estudadas neste capítulo evitam qualquer contato com a singularidade de coordenada que existe quando $\varrho = \pi$. Este comentário é relevante dado que a evolução do vetor ξ não segue de forma independente.

Voltando agora ao nosso problema, na Fig. 5.5 apresentamos os resultados para $L(t) = \log(\|\xi(t)\|)/t$ em função do tempo t para os três casos mencionados no início desta seção. Estes resultados numéricos foram obtidos usando o mesmo método que para os expoentes para o modelo de Hénon-Heiles na Seção 2.3. As curvas para os expoentes de Lyapunov apresentadas na Fig. 5.5, que referem-se à órbita mais externa da Fig. 5.1, aqui apresentada na cor vermelha, e à órbita mais externa da Fig. 5.2, apresentada na cor azul, apontam claramente para um valor consistente com zero para $L_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} L(t)$, o que está em concordância com o valor esperado para uma órbita que apresenta um espectro de potência como aquele dado nas Figs. 5.4d e 5.4e. Por outro lado, a curva na cor preta, que refere-se à órbita mais externa da Fig. 5.3, ilustra um tipo de comportamento que sugere que o expoente de Lyapunov máximo é, de fato, distinguível de zero, aproximando-se de um valor positivo. Este fato indica que a órbita associada diverge exponencialmente em uma direção do espaço de fase. Dado que esta divergência é uma característica própria

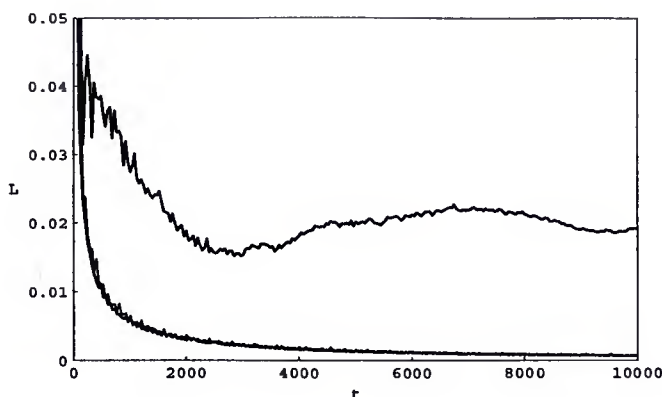


Figura 5.5: Expoentes de Lyapunov como função do tempo para as três situações correspondentes à Fig. 5.4.

para distinguir o comportamento caótico do periódico, podemos concluir que para esta condição inicial o movimento é caótico. Agora, é muito importante relembrar que esta evolução não é característica somente desta particular órbita, pois, como foi tomado um desvio pequeno, mas finito, este resultado engloba toda uma família de condições iniciais. Isto é, o valor assintótico de $L(t)$ não caracteriza somente uma única órbita, mas uma região caótica inteira. Isto pode ser entendido qualitativamente a partir do fato que qualquer órbita pertencente a uma região caótica tende ocupar toda essa região. Desta forma, o valor assintótico de $L(t)$ pode ser interpretado como uma “velocidade média de separação”, a média sendo tomada sobre toda a região caótica.

Na Fig. 5.6 apresentamos três novas curvas para a quantidade $L(t)$ como função do tempo t em uma escala log-log. A curva na cor preta refere-se à órbita mais interna da Fig. 5.1, a curva na cor vermelha refere-se à órbita mais interna da Fig. 5.2 e a curva na cor azul refere-se à órbita mais interna da Fig. 5.3. A partir desta figura, aparentemente temos que para t grande, $L(t) \rightarrow t^{-\alpha}$ para α positivo. Este comportamento também foi observado anteriormente nas Figs. 2.4 e 2.5 para os expoentes do modelo de Hénon-Heiles.

Como conclusão, podemos dizer que nossas simulações dos espectros de potência e expoentes de Lyapunov complementam os estudos pioneiros das superfícies de seção de Poincaré de Temple-Raston [10], e praticamente confirmam a possível não integrabilidade do movimento geodésico de dois monopólos magnéticos. Temple-Raston também obteve indicações sobre a presença de caos no sistema de dois monopólos em outros dois trabalhos [9, 11], onde ele estudou o espalhamento e o confinamento clássicos e verificou alta sensibilidade às condições iniciais. No entanto, nestes trabalhos ele não buscava confirmações independentes como as implementadas aqui para o movimento confinado.

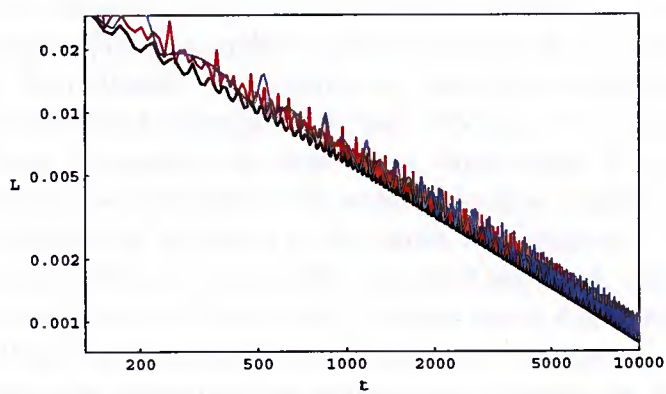


Figura 5.6: Expoentes de Lyapunov como função do tempo em escala log-log para as órbitas mais interiores das Figs. 5.1 (curva na cor preta), 5.2 (curva na cor vermelha) e 5.3 (curva na cor azul).

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas Futuras

Nesta dissertação tratamos do problema de caos dinâmico na interação de baixas energias de dois monopólos magnéticos não-Abelianos de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS). Formulando o problema em termos de coordenadas coletivas dos dois monopólos através da métrica de Atiyah-Hitchin, obtivemos equações de movimento que indicam a presença de caos. Para caracterizar a presença de caos, empregamos as ferramentas tradicionais de análise de caos, a saber, superfícies de seção de Poincaré, espectros de potência e expoentes de Lyapunov. A análise espectral e o cálculo dos expoentes de Lyapunov, pelo que sabemos, não haviam sido ainda feitos anteriormente e são os resultados originais desta dissertação.

Nossos resultados dos espectros de potência e expoentes de Lyapunov complementam os estudos pioneiros das superfícies de seção de Poincaré de Temple-Raston [10]. O conjunto de resultados mostram uma consistência quanto à possível não integrabilidade do movimento geodésico de dois monopólos magnéticos, conforme as indicações originais destas simulações de Temple-Raston. Este mesmo autor, também obteve indicações sobre a presença de caos no sistema de dois monopólos em outros dois trabalhos [9, 11], em que ele estudou trajetórias de espalhamento e trajetórias confinadas, verificando alta sensibilidade às condições iniciais. No entanto, nestes trabalhos não houve confirmações independentes da possível presença de caos através das análises de espectros de potência e expoentes de Lyapunov, como as implementadas aqui nesta dissertação. Como conclusão, podemos dizer que nossas simulações confirmam a indicação da não integrabilidade e da presença de caos no movimento geodésico de dois monopólos magnéticos.

As indicações da presença de caos na dinâmica de configurações de campos de gauge, como as obtidas aqui para o caso muito particular de configurações de monopólo magnético, claramente têm implicações para o problema da dinâmica de sistemas fora do equilíbrio termodinâmico. Este assunto é de interesse amplo na física, com aplicações nas diversas sub-áreas da física da matéria condensada, na física nuclear, na física das partículas elementares e na cosmologia. A altas temperaturas, os modos de longos comprimentos de onda (infravermelho) dominam a dinâmica do sistema e, portanto, é natural se esperar que uma descrição clássica ou semi-clássica possa ser útil para o estudo da dinâmica fora do equilíbrio. Com efeito, como mostrado aqui, as equações de Yang-Mills clássicas são não-integráveis e exibem caos. Neste contexto, o uso das equações clássicas de Yang-Mills discretizadas empregando uma formulação invariante de gauge na rede destas teorias [4] parece

oferecer uma oportunidade muito interessante. Conforme já mencionado anteriormente nesta dissertação, estudos da evolução em tempo real das equações da teoria de Yang-Mills para $SU(2)$ e $SU(3)$ discretizada numa rede mostraram [5] que, mesmo que se comece a simulação com configurações de campo muito fora do equilíbrio, os campos de gauge termalizam muito rapidamente. Termalizar significa que a distribuição de energia sobre a rede apresenta uma forma térmica. Mais precisamente, partindo de configurações iniciais randômicas para os campos de gauge para cada link da rede, estes estudos mostraram que o sistema apresenta comportamento caótico - a distância no espaço de fase entre duas configurações adjacentes cresce exponencialmente no tempo.

Uma questão importante que pretendemos investigar no futuro próximo neste tipo de abordagem das equações de Yang-Mills, refere-se ao problema da dinâmica dissipativa induzida por flutuações quânticas. Em modelos de teorias de campos no contínuo, esta questão vem sendo investigada há algum tempo fazendo uso de equações de evolução efetivas [60]. Neste caso, a dissipação vai influir no grau de caoticidade da dinâmica dos campos e, por conseguinte, pode mudar o cenário de termalização e equipartição de energia entre os diversos campos. Este último aspecto é particularmente importante para o caso do modelo de Higgs não-Abeliano. Obviamente, devido à dissipação, o sistema deixa de ser um sistema dinâmico hamiltoniano.

Apêndice A

Solução das Eqs. 4.24

A escolha de f deve ser uma escolha tal que as equações diferenciais resultantes derivadas das Eqs. (4.24) sejam solucionáveis em termos de funções conhecidas.

Deixamos agora $f = abc$. Assim, as Eqs. (4.24) são equivalentes ao sistema de equações

$$2a'_\varrho = ab^2 - 2abc + ac^2 - a^3, \text{ etc.}, \quad (\text{A.1})$$

onde etc. significa que permutamos a , b e c de maneira cíclica. Ao escrevermos a'_ϱ , consideramos ϱ como a variável independente no cálculo da derivada. Pelas mudanças de variáveis dependentes da forma $\tau = bc$, $\iota = ac$ e $\kappa = ab$, este sistema acoplado torna-se

$$\tau'_\varrho + \iota'_\varrho + 2\tau\iota = 0, \quad \iota'_\varrho + \kappa'_\varrho + 2\iota\kappa = 0, \quad \tau'_\varrho + \kappa'_\varrho + 2\tau\kappa = 0, \quad (\text{A.2})$$

que, pela subtração em pares, dá

$$\begin{aligned} \tau'_\varrho - \kappa'_\varrho + 2\iota(\tau - \kappa) &= 0, & (a) \\ \iota'_\varrho - \kappa'_\varrho + 2\tau(\iota - \kappa) &= 0, & (b) \\ \iota'_\varrho - \tau'_\varrho + 2\kappa(\iota - \tau) &= 0. & (c) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Multiplicando através da Eq. (A.3a) por $\frac{\tau}{\tau - \kappa}$ e da Eq. (A.3b) por $\frac{\iota}{\kappa - \iota}$, e efetuando a soma, obtém-se

$$\frac{\tau(\tau'_\varrho - \kappa'_\varrho)}{\tau - \kappa} - \frac{\iota(\iota'_\varrho - \kappa'_\varrho)}{\iota - \kappa} = \tau [\log(\tau - \kappa)]'_\varrho - \iota [\log(\iota - \kappa)]'_\varrho = 0. \quad (\text{A.4})$$

O truque é estabelecer

$$\begin{aligned} \tau &= z \sec \varsigma \csc \varsigma K^{-1}(\sin \varsigma) E(\sin \varsigma), \\ \iota &= \tau - z \sec \varsigma \csc \varsigma, \quad \text{e} \quad \kappa = \tau - z \cot \varsigma, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

onde z é uma função desconhecida de ς a ser determinada. As integrais elípticas completas de Legendre do primeiro e segundo tipo, $K(q)$ e $E(q)$, para valores de q entre 0 e 1, são definidas como

$$K(q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \varepsilon}}, \quad E(q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varepsilon \sqrt{1 - q^2 \sin^2 \varepsilon}. \quad (\text{A.6})$$

Como se pode verificar por cálculo direto, $K(q)$ atende à equação diferencial linear de segunda ordem

$$(q - q^3) K_q'' + (1 - 3q^2) K_q' - qK = 0, \quad (\text{A.7})$$

ou então, fazendo-se a mudança da variável $q = \sin \varsigma$,

$$\hat{K}_\varsigma'' + (\cot \varsigma - \tan \varsigma) \hat{K}_\varsigma' - \hat{K} = 0, \quad \hat{K}(\varsigma) \equiv K(q), \quad \varsigma = \arcsin q. \quad (\text{A.8})$$

Substituindo-se τ , ι e κ para dentro da Eq. (A.4) leva a

$$z'_\varsigma + \{ [1 - 2K^{-1}(\sin \varsigma) E(\sin \varsigma)] \sec \varsigma \csc \varsigma \} z = 0, \quad (\text{A.9})$$

que, por meio das expressões:

$$\{\log[K(\sin \varsigma)]\}'_\varsigma = \frac{\sec \varsigma E(\sin \varsigma)}{\sin \varsigma K(\sin \varsigma)} - \cot \varsigma \quad \text{e} \quad \{\log[\sin(2\varsigma)]\}'_\varsigma = \cot \varsigma - \tan \varsigma, \quad (\text{A.10})$$

é simplificada para

$$(\log z)'_\varsigma = 2 \{\log[K(\sin \varsigma)]\}'_\varsigma + \{\log[\sin(2\varsigma)]\}'_\varsigma. \quad (\text{A.11})$$

Impondo-se, como o conjunto de condições de fronteira a serem atendidas pelas soluções das Eqs. (A.1), que a , b e c não são iguais e que uma delas, digamos b , é negativa, então $\kappa = ab < 0$ e z será negativo, uma vez que

$$\sec \varsigma \csc \varsigma K^{-1}(\sin \varsigma) E(\sin \varsigma) - \cot \varsigma > 0. \quad (\text{A.12})$$

Integrando-se os dois lados da Eq. (A.11) com relação a ς , produz-se

$$z = -\Lambda K^2(\sin \varsigma) \sin(2\varsigma), \quad (\text{A.13})$$

para algum número positivo Λ . Uma vez que, pela Eq. (A.13),

$$\begin{aligned} \tau - \iota &= z \sec \varsigma \csc \varsigma = -2\Lambda K^2(\sin \varsigma), \\ \kappa &= \tau - z \cot \varsigma = 2\Lambda K(\sin \varsigma) [\cos^2 \varsigma K(\sin \varsigma) - E(\sin \varsigma)], \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

a Eq. (A.3c), que é $[\log(\iota - \tau)]'_\varsigma \varsigma'_\varrho + 2\kappa = 0$, dá a seguinte relação entre ϱ e ς :

$$\begin{aligned} \varsigma'_\varrho &= \frac{2\kappa}{\cot \varsigma - \tan \varsigma - (\log z)'_\varsigma} = -\frac{\kappa}{\{\log[K(\sin \varsigma)]\}'_\varsigma} \\ &= 2\Lambda K^2(\sin \varsigma) \sin \varsigma \cos \varsigma = \Lambda K^2(\sin \varsigma) \sin(2\varsigma) = -z. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

A ED linear (A.8) tem $k = K(\sin \varsigma)$ e $p = K(\cos \varsigma)$ como base das soluções linearmente independentes. Por hipótese, k atende a $k_\varsigma'' + (\cot \varsigma - \tan \varsigma) k'_\varsigma - k = 0$ e p atende a $p_\varsigma'' + (\cot \varsigma - \tan \varsigma) p'_\varsigma - p = 0$. Multiplicando-se a primeira equação por p , a segunda por $-k$ e fazendo-se a soma, obtém-se

$$(pk'_\varsigma - kp'_\varsigma)'_\varsigma + (\cot \varsigma - \tan \varsigma)(pk'_\varsigma - kp'_\varsigma) = 0, \quad (\text{A.16})$$

que se integra imediatamente para dar

$$pk'_\zeta - kp'_\zeta = \Omega \sec \zeta \csc \zeta, \quad (\text{A.17})$$

onde Ω é uma constante de integração. Seu lado esquerdo é igual a

$$\{K(\cos \zeta)E(\sin \zeta) + [E(\cos \zeta) - K(\cos \zeta)]K(\sin \zeta)\} \sec \zeta \csc \zeta. \quad (\text{A.18})$$

Quando ζ se aproxima de 0, $pk'_\zeta - kp'_\zeta$ torna-se assintoticamente igual a $\frac{\pi}{2} \sec \zeta \csc \zeta$, de forma que $\Omega = \frac{\pi}{2}$ (seguem, no Apêndice B, algumas expansões básicas para K e E). Além disso, diferenciando-se

$$-\frac{p}{\pi k} \quad (\text{A.19})$$

resulta em

$$\frac{pk'_\zeta - kp'_\zeta}{\pi k^2} = \frac{1}{k^2 \sin(2\zeta)}, \quad (\text{A.20})$$

que, ao se inspecionar a Eq. (A.15), torna-se ϱ'_ζ para $\Lambda = 1$. A partir disto, fica claro que as soluções de

$$\varrho'_\zeta = \frac{1}{k^2 \sin(2\zeta)} \quad (\text{A.21})$$

são as funções

$$\varrho = -\frac{p}{\pi k} + \text{constante}. \quad (\text{A.22})$$

É geralmente conveniente representar as fórmulas requeridas para a, b, c e $f = abc$ como funções do parâmetro q e do módulo complementar $\bar{q} = \sqrt{1 - q^2}$, produzindo

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{\iota\kappa}{\tau} = \frac{2K(q)[K(q) - E(q)][E(q) - \bar{q}^2 K(q)]}{E(q)}, \\ b^2 &= \frac{\tau\kappa}{\iota} = \frac{2K(q)E(q)[E(q) - \bar{q}^2 K(q)]}{K(q) - E(q)}, \\ c^2 &= \frac{\tau\iota}{\kappa} = \frac{2K(q)E(q)[K(q) - E(q)]}{E(q) - \bar{q}^2 K(q)}, \\ f^2 &= 8K^3(q)E(q)[K(q) - E(q)][E(q) - \bar{q}^2 K(q)]. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Para provar a exatidão das fórmulas para a, b e c nas Eqs. (A.23), é suficiente demonstrar que se atendeu às Eqs. (A.2), observado que a Eq. (A.13) para z e a Eq. (A.15) para ζ'_q mantêm-se. Para este fim, pode-se fazer uso das Eqs. (A.2) para se verificar que

$$\kappa'_q = \tau\iota - \tau\kappa - \iota\kappa, \quad (\text{A.24})$$

que, por meio das Eqs. (A.5), podem também ser escrita como

$$\kappa'_\zeta \zeta'_q = -z^2 - z^2 \hat{K}^{-2} \hat{K}'^2_\zeta. \quad (\text{A.25})$$

Ao se substituir ζ'_q e z , pelos valores dados pelas Eqs. (A.15) e (A.13), respectivamente, a Eq. (A.25) é reduzida a

$$\sin(2\zeta) \hat{K} \hat{K}''_\zeta + 2 \cos(2\zeta) \hat{K} \hat{K}'_\zeta - \sin(2\zeta) \hat{K}^2 = 0, \quad (\text{A.26})$$

que caracteriza a ED linear (A.8) à qual $\hat{K}$ atendeu.

Para o caso restante, $f = -b/\varrho$, podem-se derivar fórmulas explícitas para a , b , c e f de modo praticamente igual ao demonstrado no caso anterior. A prova é bastante direta e requer uma quantidade razoável de fórmulas intermediárias. Os resultados abaixo resumem as fórmulas desejadas:

$$\begin{aligned} ab &= 4K^2(q) - 4K(q)E(q), \\ bc &= -4K(q)E(q), \\ ac &= 4\bar{q}^2 K^2(q) - 4K(q)E(q), \\ \varrho &= 2K(q), \quad q = \sin(\varsigma/2), \quad 2\bar{q}^2 = 1 + \cos \varsigma, \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{4K(q)[K(q) - E(q)][E(q) - \bar{q}^2 K(q)]}{E(q)}, \\ b^2 &= \frac{4K(q)E(q)[K(q) - E(q)]}{E(q) - \bar{q}^2 K(q)}, \\ c^2 &= \frac{4K(q)E(q)[E(q) - \bar{q}^2 K(q)]}{K(q) - E(q)}, \\ f^2 &= \frac{E(q)[K(q) - E(q)]}{K(q)[E(q) - \bar{q}^2 K(q)]}. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Conforme mencionado no texto da seção 4.1, apresentamos abaixo os gráficos das soluções aproximadas das equações diferenciais de primeira ordem para os componentes da métrica de Atiyah-Hitchin no caso em pauta.

Apêndice B

Algumas expansões úteis

A integral definida completa de Legendre completa, $E(k)$, é definida por

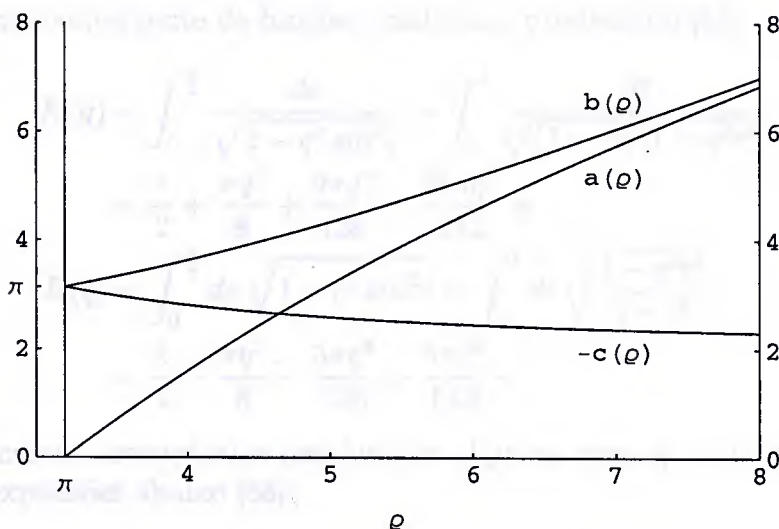


Figura A.1: Gráficos das funções radiais $a(\rho)$, $b(\rho)$ e $-c(\rho)$. Estes foram obtidos pela integração numérica das Eqs. (4.24) com dados iniciais dados por $a(\pi) \simeq 0$ and $b(\pi) = -c(\pi) = \pi$.

Apêndice B

Algumas expansões úteis

As integrais elípticas completas de Legendre do primeiro e segundo tipo, $K(q)$ e $E(q)$, são analíticas para $q < 1$ e podem ser expandidas numa série de potências uniformemente convergente de funções analíticas, produzindo [58]

$$\begin{aligned} K(q) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \varepsilon}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - q^2 t^2)}} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi q^2}{8} + \frac{9\pi q^4}{128} + \frac{25\pi q^6}{512} + \dots, \\ E(q) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varepsilon \sqrt{1 - q^2 \sin^2 \varepsilon} = \int_0^1 dt \sqrt{\frac{1 - q^2 t^2}{1 - t^2}} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi q^2}{8} - \frac{3\pi q^4}{128} - \frac{5\pi q^6}{512} + \dots. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

O comportamento assintótico das funções elípticas para $q \rightarrow 1$, isto é, $\bar{q} \rightarrow 0$, é dado pelas expansões abaixo [58]:

$$\begin{aligned} K(q) &\sim \log\left(\frac{4}{\bar{q}}\right) + \frac{1}{4} \left[\log\left(\frac{4}{\bar{q}}\right) - 1 \right] \bar{q}^2 + \dots, \\ E(q) &\sim 1 + \frac{1}{2} \left[\log\left(\frac{4}{\bar{q}}\right) - \frac{1}{2} \right] \bar{q}^2 + \dots. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Continuamos agora calculando a expansão assintótica para as funções a , b , e c , quando ϱ se torna grande. Iremos primeiramente considerar o caso $f = abc$. Ao se inspecionarem as fórmulas do apêndice anterior quanto ao caso em questão, encontramos que

$$\tau = -2K(q)E(q), \quad \iota = 2K(q)[K(q) - E(q)], \quad \kappa = -2K(q)[E(q) - \bar{q}^2 K(q)]. \quad (\text{B.3})$$

Utilizando-se as Eqs. (B.2), estas tornam-se, respectivamente,

$$bc \sim 2 \log \bar{q}, \quad ac \sim 2 \log^2 \bar{q}, \quad ab \sim 2 \log \bar{q}, \quad (\text{B.4})$$

de onde se conclui que

$$a \sim -\sqrt{2} \log \bar{q}, \quad b \sim -\sqrt{2}, \quad c \sim -\sqrt{2} \log \bar{q}. \quad (\text{B.5})$$

No caso em que $f = -b/\varrho$, devemos basear-nos no fato de que ϱ relaciona-se a q através de $\varrho = 2K(q)$, em conjunto com a expansão assintótica da integral elíptica $K(q)$, para obtermos a forma assintótica

$$\bar{q} \sim 4 \exp(-\varrho/2). \quad (\text{B.6})$$

Agora, se procedermos como acima, com este resultado em mente, teremos então

$$bc \sim -2\varrho, \quad ac \sim -2\varrho, \quad ab \sim \varrho^2 - 2\varrho, \quad (\text{B.7})$$

de onde se derivam

$$a \sim \varrho (1 - 2\varrho^{-1})^{1/2}, \quad b \sim \varrho (1 - 2\varrho^{-1})^{1/2}, \quad c \sim -2 (1 - 2\varrho^{-1})^{-1/2}. \quad (\text{B.8})$$

Apêndice C

Método de Runge-Kutta de quarta ordem

Para o sistema de primeira ordem,

$$\frac{d\Upsilon}{dt} = X(\Upsilon, t), \quad \Upsilon(t_0) = \hat{\Upsilon}_0, \quad (\text{C.1})$$

a versão vetorial da fórmula iterativa para o método de Runge-Kutta é

$$\hat{\Upsilon}_{i+1} = \hat{\Upsilon}_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (\text{C.2})$$

onde o comprimento do passo $h \equiv h_i$ pode variar com i , e os vetores k_1 , k_2 , k_3 e k_4 são definidos como:

$$\begin{aligned} k_1 &= X\left(\hat{\Upsilon}_i, t_i\right), & k_2 &= X\left(\hat{\Upsilon}_i + \frac{1}{2}hk_1, t_i + \frac{1}{2}h\right), \\ k_3 &= X\left(\hat{\Upsilon}_i + \frac{1}{2}hk_2, t_i + \frac{1}{2}h\right), & k_4 &= X\left(\hat{\Upsilon}_i + hk_3, t_i + h\right). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Cada um destes vetores depende também do índice i , mas não indicaremos essa dependência para mantermos as fórmulas mais legíveis.

Demonstramos agora que o método de Runge-Kutta acima contém um erro de somente $O(h^5)$ por passo. O método de prova consiste em compararem-se várias séries de Taylor. A prova que se segue pode ser encontrada na Ref. [59]. Para fins de simplicidade, concentramos nossa atenção na equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{d\Upsilon}{dt} = X(\Upsilon, t), \quad X \in \mathbb{C}^4, \quad (\text{C.4})$$

e na condição inicial $\Upsilon(0) = 0$. A Eq. (C.2) é reduzida para

$$\hat{\Upsilon}_{i+1} = \hat{\Upsilon}_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (\text{C.5})$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= X\left(\hat{\Upsilon}_i, t_i\right), & k_2 &= X\left(\hat{\Upsilon}_i + \frac{1}{2}hk_1, t_i + \frac{1}{2}h\right), \\ k_3 &= X\left(\hat{\Upsilon}_i + \frac{1}{2}hk_2, t_i + \frac{1}{2}h\right), & k_4 &= X\left(\hat{\Upsilon}_i + hk_3, t_i + h\right). \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Deixamos $\Upsilon(t)$ ser a solução exata da Eq. (C.4) atendendo a $\Upsilon(0) = \hat{\Upsilon}_0 = 0$. Introduzimos aqui a abreviação $\delta = h/2$. Portanto, a fórmula de Taylor diz que k_2 pode ser escrito como

$$k_2 = X(\Upsilon_{1/2}, \delta) + X_{\Upsilon}(\Upsilon_{1/2}, \delta)(\Upsilon_0 + \delta k_1 - \Upsilon_{1/2}) + X_{\Upsilon\Upsilon}(\Upsilon_{1/2}, \delta)(\Upsilon_0 + \delta k_1 - \Upsilon_{1/2})^2 + \dots, \quad (C.7)$$

onde $\Upsilon_0 = \Upsilon(0)$, $\Upsilon_{1/2} = \Upsilon(\delta)$, e os subscritos Υ significam derivadas parciais.

Uma vez que sabemos que $\Upsilon(t)$ é uma solução para o problema de valor inicial, temos $\dot{\Upsilon}(0) = X(0, 0) = k_1$. Usando linhas para indicar as derivadas totais com relação a t , de modo que $X' = X_{\Upsilon}X + X_t$, obtemos

$$\Upsilon_{1/2} = \Upsilon_0 + X(0, 0)\delta + \frac{1}{2}X'(0, 0)\delta^2 + \frac{1}{6}X''(0, 0)\delta^3 + \frac{1}{24}X'''(0, 0)\delta^4 + O(h^5). \quad (C.8)$$

Segue-se que

$$\Upsilon_0 + \delta k_1 - \Upsilon_{1/2} = -\frac{1}{2}X'(0, 0)\delta^2 - \frac{1}{6}X''(0, 0)\delta^3 + O(h^4), \quad (C.9)$$

de modo que k_2 , Eq. (C.7), é dado por

$$k_2 = X(\Upsilon_{1/2}, \delta) - X_{\Upsilon}(\Upsilon_{1/2}, \delta) \left[\frac{1}{2}X'(0, 0)\delta^2 + \frac{1}{6}X''(0, 0)\delta^3 \right] + O(h^4). \quad (C.10)$$

Para k_3 , encontramos que

$$k_3 = X(\Upsilon_{1/2}, \delta) + X_{\Upsilon}(\Upsilon_{1/2}, \delta)(\Upsilon_0 + \delta k_2 - \Upsilon_{1/2}) + X_{\Upsilon\Upsilon}(\Upsilon_{1/2}, \delta)(\Upsilon_0 + \delta k_2 - \Upsilon_{1/2})^2 + \dots, \quad (C.11)$$

que, pelo uso da expressão

$$\begin{aligned} \Upsilon_0 &= \Upsilon_{1/2} - X(\Upsilon_{1/2}, \delta)\delta + \frac{1}{2}X'(\Upsilon_{1/2}, \delta)\delta^2 - \frac{1}{6}X''(\Upsilon_{1/2}, \delta)\delta^3 \\ &\quad + \frac{1}{24}X'''(\Upsilon_{1/2}, \delta)\delta^4 + O(h^5), \end{aligned} \quad (C.12)$$

torna-se

$$\begin{aligned} k_3 &= X(\Upsilon_{1/2}, \delta) + \frac{1}{2}X_{\Upsilon}(\Upsilon_{1/2}, \delta)X'(\Upsilon_{1/2}, \delta)\delta^2 - \frac{1}{2}X_{\Upsilon}^2(\Upsilon_{1/2}, \delta)X'(0, 0)\delta^3 \\ &\quad - \frac{1}{6}X_{\Upsilon}(\Upsilon_{1/2}, \delta)X''(\Upsilon_{1/2}, \delta)\delta^3 + O(h^4), \end{aligned} \quad (C.13)$$

onde se utilizou a Eq. (C.10).

Para k_4 , temos, de modo semelhante,

$$k_4 = X(\Upsilon_1, 2\delta) + X_{\Upsilon}(\Upsilon_1, 2\delta)(\Upsilon_0 + 2\delta k_3 - \Upsilon_1) + \dots, \quad (C.14)$$

onde $\Upsilon_1 = \Upsilon(2\delta)$. Uma vez que

$$\begin{aligned}\Upsilon_1 &= \Upsilon_{1/2} + X(\Upsilon_{1/2}, \delta)\delta + \frac{1}{2}X'(\Upsilon_{1/2}, \delta)\delta^2 + \frac{1}{6}X''(\Upsilon_{1/2}, \delta)\delta^3 \\ &\quad + \frac{1}{24}X'''(\Upsilon_{1/2}, \delta)\delta^4 + O(h^5),\end{aligned}\quad (C.15)$$

a subtração da Eq. (C.15) a partir da Eq. (C.12) resulta em

$$\Upsilon_0 - \Upsilon_1 = -2X(\Upsilon_{1/2}, \delta)\delta - \frac{1}{3}X''(\Upsilon_{1/2}, \delta)\delta^3 + O(h^4), \quad (C.16)$$

de forma que k_4 , Eq. (C.14), é

$$\begin{aligned}k_4 &= X(\Upsilon_1, 2\delta) - \frac{1}{3}X_{\mathbf{r}}(\Upsilon_1, 2\delta)X''(\Upsilon_{1/2}, \delta)\delta^3 \\ &\quad + X_{\mathbf{r}}(\Upsilon_1, 2\delta)X_{\mathbf{r}}(\Upsilon_{1/2}, \delta)X'(\Upsilon_{1/2}, \delta)\delta^3 + O(h^4),\end{aligned}\quad (C.17)$$

onde, em acréscimo, apontamos as seguintes relações:

$$\begin{aligned}X(\Upsilon_{1/2}, \delta) &= X(0, 0) + X'(0, 0)\delta + \frac{1}{2}X''(0, 0)\delta^2 + \frac{1}{6}X'''(0, 0)\delta^3 + O(h^4), \\ X(\Upsilon_1, 2\delta) &= X(0, 0) + 2X'(0, 0)\delta + 2X''(0, 0)\delta^2 + \frac{4}{3}X'''(0, 0)\delta^3 + O(h^4), \\ X_{\mathbf{r}}(\Upsilon_1, 2\delta) &= X_{\mathbf{r}}(\Upsilon_{1/2}, \delta) + X'_{\mathbf{r}}(\Upsilon_{1/2}, \delta)\delta + O(h^2).\end{aligned}\quad (C.18)$$

Voltando agora à Eq. (C.5), deduzimos prontamente que

$$\begin{aligned}\hat{\Upsilon}_1 &= \hat{\Upsilon}_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ &= \Upsilon_0 + 2X(0, 0)\delta + 2X'(0, 0)\delta^2 + \frac{4}{3}X''(0, 0)\delta^3 + \frac{2}{3}X'''(0, 0)\delta^4 + O(h^5).\end{aligned}$$

Uma vez que Υ_1 pode ser escrito como

$$\Upsilon_1 = \Upsilon_0 + X(0, 0)h + \frac{1}{2}X'(0, 0)h^2 + \frac{1}{6}X''(0, 0)h^3 + \frac{1}{24}X'''(0, 0)h^4 + O(h^5), \quad (C.19)$$

é fácil verificar que o erro relativo é de ordem quatro:

$$|\hat{\Upsilon}_1 - \Upsilon_1| = O(h^5). \quad (C.20)$$

Apêndice D

Integração da Eq. 4.78

Daremos aqui os passos envolvidos na integração da Eq. (4.78). Nosso tratamento acompanhará o de Brillouin [55]. Como já foi declarado, k_1 é negativo e k_2 , positivo. Presume-se, agora, que k_3 seja negativo. Assim, se houver raízes reais, estas se situarão sobre o eixo real positivo.

Em virtude da natureza de duplo valor do integrando, o modo mais simples de se avaliar a integral será distorcer o curso de integração e separá-lo em partes distintas. A Fig. D.1 apresenta um contorno adequado. Esse contorno consiste em um grande círculo não completo, cujo raio será expandido para ∞ , um pequeno círculo não completo em torno do ponto de ramificação $\varrho = 0$, cujo raio será reduzido para zero, e duas retas ao longo do eixo real negativo separadas por uma distância infinitesimal, com AB prolongando-se de ∞ para 0 e CD de 0 para ∞ . Com ϱ representado no plano complexo, a integral desejada torna-se, então,

$$\int_{\text{ABCDEA}} d\varrho \sqrt{\frac{k_1}{\varrho^2} + 2\frac{k_2}{\varrho} + k_3} = \int_{\text{AB}} + \int_{\text{BC}} + \int_{\text{CD}} + \int_{\text{DEA}}. \quad (\text{D.1})$$

Na circunvizinhança de $\varrho = 0$, a integral ao longo de BC toma a forma

$$i\sqrt{-k_1} \int \frac{d\varrho}{\varrho}. \quad (\text{D.2})$$

Se fizermos a mudança de variável $\varrho = \delta e^{i\beta}$, onde δ é um número positivo pequeno, então, quando β percorre de $-\pi$ para π , temos

$$\int_{\text{BC}} = -\sqrt{-k_1} \int_{-\pi}^{\pi} d\beta = -2\pi\sqrt{-k_1}. \quad (\text{D.3})$$

Para ϱ grande, a integral ao longo da parte circular DEA pode ser escrita como

$$\int d\varrho \sqrt{2\frac{k_2}{\varrho} + k_3} \sim i\sqrt{-k_3} \int d\varrho \left(1 + \frac{k_2}{k_3\varrho}\right), \quad (\text{D.4})$$

que, com o auxílio da substituição $\varrho = Re^{i\beta}$, onde R é arbitrariamente grande, o que se tem é

$$\int_{\text{DEA}} = -\frac{k_2\sqrt{-k_3}}{k_3} \int_{\pi}^{-\pi} d\beta = \frac{2\pi k_2}{\sqrt{-k_3}}. \quad (\text{D.5})$$

Finalmente, vê-se facilmente que

$$\int_{AB} = - \int_{CD}. \quad (D.6)$$

De acordo com a Eq. (D.1), o resultado final é dado por

$$\int_{ABCDEA} d\rho \sqrt{\frac{k_1}{\rho^2} + 2\frac{k_2}{\rho} + k_3} = \frac{2\pi k_2}{\sqrt{-k_3}} - 2\pi\sqrt{-k_1}. \quad (D.7)$$

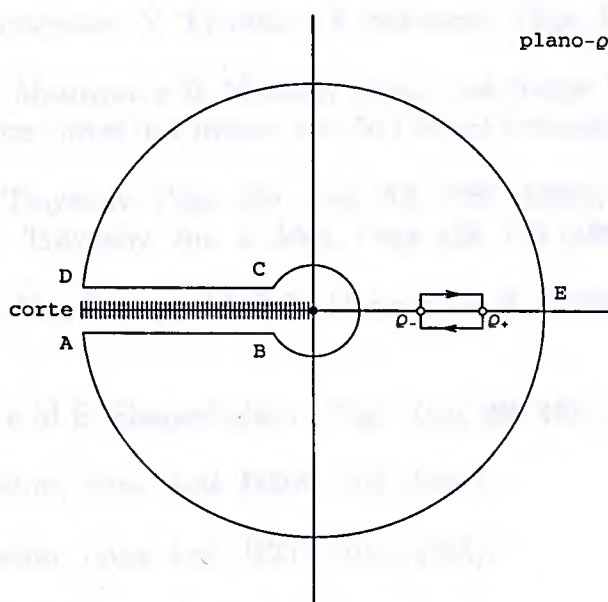


Figura D.1: Os diagramas dos caminhos de integração original e deformado para estudar a Eq. (4.78). A origem é um ponto de ramificação.

Referências

- [1] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. London* **A133**, 60 (1931).
- [2] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B79**, 276 (1974).
- [3] A. Belavin, A. Polyakov, Y. Tyupkin e A. Schwartz, *Phys. Lett.* **B58**, 85 (1975).
- [4] T.S. Biró, S.G. Matinyan e B. Mueller, *Chaos and Gauge Field Theory*, World Scientific Lecture Notes in Physics, vol. 56 (World Scientific, Cingapura 1994).
- [5] B. Müller e A. Trayanov, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3387 (1992); T.S. Biro, C. Gong, B. Mueller e A. Trayanov, *Int. J. Mod. Phys.* **C5**, 113 (1994).
- [6] U. Heinz, C.R. Hu, S. Leupold, S.G. Matinyan e B. Müller, *Phys. Rev.* **D55**, 2464 (1997).
- [7] V.A. Rubakov e M.E. Shaposhnikov, *Phys. Usp.* **39**, 461 (1996).
- [8] M. Temple-Raston, *Phys. Lett.* **B206**, 503 (1988).
- [9] M. Temple-Raston, *Phys. Lett.* **B213**, 168 (1988).
- [10] M. Temple-Raston, *Nucl. Phys.* **B313**, 447 (1989).
- [11] M. Temple-Raston e D. Alexander, *Nucl. Phys.* **B397**, 195 (1993).
- [12] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
- [13] M. Hénon e C. Heiles, *Astron. J.* **69**, 73 (1964).
- [14] E. Ott, *Rev. Mod. Phys.* **53**, 655 (1981); D. Ruelle e F. Takens, *Commun. Math. Phys.* **20**, 167 (1971).
- [15] S. N. Rasband, *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems* (Wiley, New York, 1990).
- [16] J. Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems: With Special Emphasis on Celestial Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, 1973).
- [17] G. D. Birkhoff, *Trans. Amer. Math. Soc.* **18**, 199 (1917).

- [18] J. Guckenheimer e P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer-Verlag, New York, 1983).
- [19] F. G. Gustavson, *Astron. J.* **71**, 670 (1966).
- [20] Y. Chang, M. Tabor e J. Weiss, *J. Math. Phys.* **23**, 531 (1982); T. Bountis, H. Segur e F. Vivaldi, *Phys. Rev. A* **25**, 1257 (1982).
- [21] P. Magnenat, *Astron. and Astrophys.* **77**, 332 (1979).
- [22] R. S. MacKay, 'Period Doubling as a Universal Route to Stochasticity' in *Long-Time Prediction in Dynamics*, eds. C. W. Horton Jr., L. E. Reichl e A. G. Szebehely (Wiley, New York, 1983).
- [23] E. C. Vázquez, W. H. Jefferys e A. Sivaramakrishnan, *Physica* **29D** 84 (1987).
- [24] M. Hénon, *Quart. Appl. Math.* **27**, 291 (1969).
- [25] L. Koopmans, *The Spectral Analysis of Time Series* (Academic Press, New York, 1974).
- [26] R. Strichartz, *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms* (CRC Press, Boca Raton, 1994). 5 5
- [27] P. Bergé, Y. Pomeau e C. Vidal, *Order Within Chaos*, transl. by L. Tuckerman (Wiley, New York, 1984).
- [28] M. Nauenberg e J. Rudnick, *Phys. Rev.* **B24**, 493 (1981).
- [29] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications* (Wiley, New York, 1966).
- [30] D. W. Kammler, *A First Course in Fourier Analysis* (Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000).
- [31] J. P. Gollub e H. L. Swinney, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 927 (1975); V. S. L'vov, A. A. Prdetechenskiĭ e A. I. Chernykh, *Sov. Phys. JETP* **53**, 562 (1981); P. Bryant e C. Jeffries, *Physica* **25D**, 196 (1987).
- [32] G. Benettin, L. Galgani e J.-M. Strelcyn, *Phys. Rev.* **A14**, 2338 (1976).
- [33] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli e J.-M. Strelcyn, *Meccanica* **15**, 9 (1980).
- [34] I. Shimada e T. Nagashima, *Prog. Theor. Phys.* **61**, 1605 (1979).
- [35] J. Frøyland, *Phys. Lett.* **97A**, 8 (1983); A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney e J. A. Vastano, *Physica* **16D**, 285 (1985); M. Sano e Y. Sawada, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1082 (1985); J. M. Greene e J.-S. Kim, *Physica* **24D**, 213 (1987).
- [36] V. I. Oseledec, *Trans. Moscow Math. Soc.* **19**, 197 (1968).

- [37] D. Ruelle, *Publ. Math. IHES* **50**, 275 (1979).
- [38] G. Contopoulos, L. Galgani e A. Giorgilli, *Phys. Rev.* **A18**, 1183 (1978).
- [39] M. D. Hartl, *Phys. Rev.* **D67**, 024005 (2003).
- [40] J.-P. Eckmann e D. Ruelle, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 617 (1985).
- [41] M. K. Prasad e C. M. Sommerfield, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 760 (1975).
- [42] E. B. Bogomol'nyi, *Sov. J. Nucl. Phys.* **24**, 449 (1976).
- [43] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Volume II (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
- [44] A. M. Polyakov, *Sov. Phys. JETP* **41**, 988 (1976).
- [45] B. Julia e A. Zee, *Phys. Rev.* **D11**, 2227 (1975).
- [46] J. Arafune, P. G. O. Freund e C. J. Goebel, *J. Math. Phys.* **16**, 433 (1975).
- [47] N. S. Manton, *Phys. Lett.* **110B**, 54 (1982).
- [48] M. F. Atiyah e N. J. Hitchin, *The Geometry and Dynamics of Magnetic Monopoles* (Princeton University Press, Princeton, 1988).
- [49] V. A. Belinskii, G. W. Gibbons, D. N. Page e C. N. Pope, *Phys. Lett.* **76B**, 433 (1978).
- [50] N. S. Manton, *Phys. Lett.* **154B**, 397 (1985).
- [51] G. W. Gibbons e N. S. Manton, *Nucl. Phys.* **B274**, 183 (1986).
- [52] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (W. H. Freeman, New York, 1983).
- [53] M. Born, *The Mechanics of the Atom* (G. Bell and Sons, London, 1927).
- [54] H. Goldstein, C. P. Poole e J. L. Safko, *Classical Mechanics*, Third Edition (Addison Wesley, San Francisco, 2002).
- [55] L. Brillouin, *L'Atome de Bohr*, Deuxième Édition (Les Presses Universitaires de France, Paris, 1931).
- [56] M. A. Sepúlveda, R. Badii e E. Pollak, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 1226 (1989).
- [57] P. Grassberger, R. Badii e A. Politi, *J. Stat. Phys.* **51**, 135 (1988).
- [58] W. Magnus, F. Oberhettinger e R. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Third Edition (Springer-Verlag, Berlin, 1966).

- [59] G. Birkhoff e G.-C. Rota, *Ordinary Differential Equations*, Fourth Edition (Wiley, New York, 1989).
- [60] M. Morikawa, *Phys. Rev. D***33**, 3607 (1985); M. Gleiser e R.O. Ramos, *Phys. Rev. D***50**, 2441 (1994); A. Berera, M. Gleiser e R.O. Ramos, *Phys. Rev. D***58**, 123508 (1998); R.O. Ramos e F.A. Navarro, *Phys. Rev. D***62**, 085016 (2000).

