IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

87

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.001/95

QUEBRA DE SIMETRIA DE CARGA E ANOMALIA DE NOLEN-SCHIFFER

Luiz Antonio Barreiro

INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA
276
BIBLIOTECA

Orientador

Gastão Inacio Krein

Co-orientador

Alfredo P.N.R Galeão

Janeiro 1995

Agradecimentos

Gostaria de expressar meus agradecimentos àqueles sem os quais este trabalho não teria sido possível.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Gastão Inácio Lima, pela disponibilidade e competência na orientação de meus estudos, bem como pela amizade e preocupação com assuntos relacionados à minha vida acadêmica e sempre demonstrados.

Ao meu co-orientador Prof. Dr. A.P.N.R. Gaião, pelas explicações metodológicas, pelas correções finais desta tese e pela confiança que sempre apresentou em meu trabalho, desde a graduação.

A minha família pelo apoio incondicional.

Aos colegas, professores e funcionários, cujos nomes não estão aqui citados, mas que me ajudaram, de uma forma ou outra, para um melhor convívio durante meus anos de pós-graduação.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

à Bianca.

Agradecimentos

Gostaria de expressar meus agradecimentos àqueles sem os quais esta tese não seria possível.

- Ao meu orientador, Prof. Dr. Gastão Inacio Krein, pela disponibilidade e competência na orientação de meus estudos, bem como pela amizade e preocupação com assuntos relacionados à minha vida academica, sempre demonstrados.

- Ao meu co-orientador Prof. Dr. A.P.N.R. Galeão, pelas explicações esclarecedoras, pelas correções finais desta tese e pela confiança que sempre apresentou no meu trabalho, desde a graduação.

- À minha familia pelo apoio irrestrito.

- Aos colegas, professores e funcionários, cujos nomes não estão aqui citados, mas que contribuiram, de uma forma ou outra, para um melhor convivio durante estes anos no instituto.

- Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

A anomalia Nolen-Schiffer se refere à dificuldade da teoria nuclear tradicional em descrever as diferenças de energias de ligação de núcleos espelhos. Há um consenso de que efeitos de quebra da simetria de carga das interaçẽs fortes sejam responsáveis pela anomalia. Dentre vários efeitos, há evidências de que a mistura entre os mésons vetoriais neutros ρ^0 e ω seja a principal fonte de quebra de simetria de carga nas interações hadrônicas. Nesta tese avaliamos o efeito desta mistura nas diferenças de energias de ligação de núcleos espelhos nas regiões de $A = 16$ e $A = 40$ usando dois modelos relativísticos de partículas independentes para o núcleo. Empregamos um modelo com potenciais fenomenológicos escalar e vetorial to tipo Woods-Saxon e o modelo de Walecka com mésons π, σ, ω e ρ, e o fóton. Investigamos o efeito nas diferenças de energias de ligação dos núcleos espelhos de uma dependência de momentum da amplitude de mistura $\rho^0 - \omega$. Também investigamos o efeito nas energias de ligação de uma modificação da diferença de massas nêutron-próton devido a uma restauração parcial da simetria quiral no núcleo. Concluímos que os efeitos combinados da mistura $\rho^0 - \omega$ e da restauração parcial da simetria quiral são suficientemente fortes para eliminar a anomalia.

Palavras-chaves: simetria de carga, anomalia Nolen-Schiffer, núcleos espelho, misturas de mesons, simetria quiral.

Área do conhecimento: 1.05.04.01-0

Abstract

The Nolen-Schiffer anomaly refers to the difficulty of traditional nuclear theory in describing the binding energy differences of mirror nuclei. There is a consensus that charge symmetry breaking effects of the strong interactions are responsable for the anomaly. Among several effects, there are evidences that the mixing between the neutral vector mesons ρ^0 and ω is the major source of charge symmetry breaking of the hadronic interactions. In this thesis we evaluate the effect of this mixing on the binding energy differences of mirror nuclei in the regions of $A = 16$ and $A = 40$ using two relativistic independent particle models for the nucleus. We employ a model with phenomenological scalar and vector potentials of the Woods-Saxon form and the Walecka model with π, σ, ω, and ρ mesons, and the photon. We investigate the effect on the binding energy differences of mirror nuclei of a possible momentum dependence of the $\rho^0 - \omega$ mixing amplitude. We also investigate the effect on the binding energy differences of a modification of the neutron-proton mass difference due to a partial restoration of chiral symmetry in the nucleus. We conclude that the combined effects of the $\rho^0 - \omega$ mixing and the partial restoration of chiral symmetry are sufficiently strong to eliminate the anomaly.

Key words: charge symmetry, Nolen-Schiffer anomaly, mirror nuclei, meson mixings, chiral symmetry.

Índice

1 Introdução Geral **3**

2 Anomalia Nolen-Schiffer **9**

2.1 Introdução e Definições Básicas 9

2.2 Cálculo da Diferença de Energia Coulombiana 11

2.3 Obtenção Experimental de ΔE_c 13

2.3.1 Espalhamento Elástico de Elétrons 14

2.3.2 Átomos Muônicos 17

2.4 Determinação Teórica de ΔE_c 18

2.4.1 Energia Coulombiana em um Modelo Simples 18

2.4.2 ΔE_c no modelo de partículas independentes 20

2.5 Termos de Correção 23

2.5.1 Movimento de Centro de Massa 23

2.5.2 Efeito da Forma Finita da Distribuição de Carga do Próton 24

2.5.3 Polarização do Vácuo 24

2.5.4 Resultados Finais para as Diferenças de Energias Colombianas . . . 25

2.6 Conclusão 26

3 Forças que Quebram Simetria de Carga **27**

3.1 Introdução 27

3.2 Troca Mesônica Mista 31

3.3 Conclusão 35

4 Modelos Relativísticos **36**

4.1 Introdução 36

4.2 Modelo de Nedjadi e Rook 37

4.2.1 Resultados Numéricos 40

4.3 Modelo de Walecka 41

4.3.1 Equações de Movimento 43

4.3.2 Aproximação de Hartree 44

4.3.3 Aproximação de Hartree-Fock 49

4.4 Resultados Numéricos e Conclusões 53

5 Troca $\rho^0 - \omega$ em Modelos Relativísticos 57

5.1 Introdução e Formalismo Inicial 57

5.2 Cálculo Relativístico da Troca $\rho^0 - \omega$ 59

5.2.1 Cálculo dos termos na equação 5.25 62

5.3 Resultados Numéricos 78

5.4 Conclusões 80

6 Dependência de Momentum da Mistura $\rho^0 - \omega$ e Restauração Parcial da Simetria Quiral 83

6.1 Introdução 83

6.2 Efeito da dependência de momemtum de $G_{\rho\omega}$ 87

6.3 A Quebra e a Restauração da Simetria Quiral no Núcleo 90

6.4 Resultados Numéricos 98

7 Conclusões e Perpectivas Futuras 99

Referências Bibliográficas 102

Capítulo 1

Introdução Geral

A anomalia de Nolen-Schiffer (ANS) [1] se refere ao problema de longa data da teoria nuclear tradicional de descrever as diferenças de massas de núcleos espelho. Dois núcleos são chamados de espelhos quando os dois têm o mesmo número de massa $A = Z + N$, e $Z_1 = n$, $N_1 = n'$, e $Z_2 = n'$, $N_2 = n$, onde n e n' são números inteiros. Os núcleos espelho mais comuns são os com $n' = n - 1$ ou $n' = n - 2$. Historicamente, o estudo das diferenças de massas de núcleos espelho tiveram início com o estudo da diferença de energia coulombiana entre estados fundamentais destes núcleos através da variação do raio nuclear [2]. Com um modelo muito simples para a distribuição de cargas no núcleo, como o de uma esfera uniformemente carregada, já é possivel obter um razoável acordo com os dados esperimentais. Assim, a repulsão coulombiana entre os protons explica, com boa aproximação, a diferença de energia entre núcleos espelho. Isto levou à conclusão, suportada pelas análises de dados de espalhamento núcleon-núcleon, que a interação nuclear forte deve ser praticamente independente da carga.

À medida que os dados experimentais foram se tornando mais precisos, houve a necessidade de se aplicar teorias mais refinadas. No entanto, uma discrepância entre os dados experimentais e os resultados teóricos vem permanecendo, por mais sofisticados que sejam os cálculos. Atualmente, os dados experimentais têm uma qualidade maior que 1%, enquanto que os cálculos teóricos são aproximadamente 7% menores que os resultados experimentais. Estes 7% de discrepância deram origem ao nome de anomalia Nolen-Schiffer. Trata-se de uma discrepância sistemática que se estende por toda a tabela periódica, apesar da consideração de vários efeitos, tanto de estrutura nuclear, quanto referentes à estrutura

e às interações básicas dos núcleons. O valor da discrepância varia de algumas dezenas de KeV's para $A \sim 3$ a algumas centenas de KeV's para $A \sim 100$.

Okamoto [3] foi o primeiro a sugerir que forças que quebram a simetria de carga nas interações fortes sejam as responsáveis pela discrepância entre os valores calculados e experimentais da diferença de energia de ligação no sistema $He^3 - H^3$. Esta idéia foi estendida por Negele [4] para outros núcleos da tabela periódica.

Sob o ponto de vista de um modelo de troca de mesons para a força nuclear, a simetria de carga é quebrada pela diferença de massas do nêutron e do próton, efeitos eletromagnéticos de diversos tipos e a mistura de mesons isovetoriais e iso-escalares neutros. Tanto a diferença de massa nêutron-próton, quanto a mistura de mesons têm sua origem na cromodinâmica quântica (QCD) através da diferença de massas dos quarks u e d. De particular interesse para a anomalia de Nolen-Schiffer é a mistura de mesons vetoriais neutros. Em um cálculo recente, Blunden e Iqbal [5] efetuaram um estudo sistemático de vários efeitos de quebra da simetria de carga nas diferenças de energias de ligação de núcleos espelho com $A = 11$ a $A = 41$. No contexto de um modelo de troca de mesons para a interação núcleon-núcleon, BI incluíram nos diagramas de Feynman relevantes os efeitos devidos à diferença de massa nêutron-próton, e à diferença de massa entre π^0 e $\pi^{\pm}$, e consideraram as misturas de mesons $\rho^0 - \omega$ e $\pi^0 - \eta$. Para a estrutura nuclear, estes autores tomaram um modelo de partículas independentes, com funções de onda de oscilador harmônico. Para o cálculo dos elementos de matriz das interações de troca de mesons entre os núcleons, foi feita uma aproximação não relativística nas amplitudes dadas pelos diagramas de Feynman relevantes. A conclusão geral de BI foi de que 75% da anomalia pode ser explicada com seus cálculos. Ainda mais, BI concluíram que a mistura $\rho^0 - \omega$ fornece, de longe, a maior contribuição para as diferenças de energias de ligação.

Em um recente experimento [6], um valor maior para a amplitude de mistura $\rho^0 - \omega$, que o utilizado por Blunden e Iqbal, foi encontrado. Miller [7] recalculou as diferenças de energia de ligação na aproximação de Blunden e Iqbal usando este novo valor. A conclusão de Miller foi de que grande parte da anomalia poderia ser explicada com este novo valor para a amplitude de mistura.

Uma questão que surge naturalmente é a relativa à consistência de cálculos, como o de

Blunden e Iqbal, que usam modelos diferentes para a estrutura nuclear e para as forças que quebram a simetria de carga das interações fortes. Em princípio, os mesmos mesons que são usados para avaliar os efeitos das quebras de simetria de carga são também responsáveis pela ligação dos núcleos. Neste sentido, seria importante se um mesmo modelo pudesse ser usado para descrever ambos aspectos do problema. Tendo em vista esta consistência, G. Krein, D.P. Menezes e M. Nielsen [8] efetuaram um estudo exploratório do efeito da mistura $\rho^0 - \omega$ para a diferença das auto-energias do próton e do nêutron na matéria nuclear utilizando o modelo de Walecka [9]. Usando o mesmo valor para a amplitude de mistura que o utilizado por Miller [7], estes autores encontraram para a diferença entre as auto-energias, para uma densidade da matéria nuclear correspondente ao interior do núcleo de chumbo, um valor aproximadamente igual a 700 KeV. Este valor é da ordem de grandeza da anomalia Nolen-Schiffer para núcleos grandes!

É um dos objetivos desta tese avaliar o efeito da mistura $\rho^0 - \omega$ nas energias de ligação de núcleos espelhos na região de $A = 16$ e $A = 40$ utilizando modelos relativísticos para o núcleo. Um estudo tal evita aproximações não relativísticas nas amplitudes das interações de troca de mesons e, o que é mais importante, fornece uma consistência com relação às constantes de acoplamento méson-nucleon. Vamos utilizar dois modelos relativísticos para a estrutura nuclear, ambos são modelos de partículas independentes e o efeito da mistura $\rho^0 - \omega$ será calculado usando teoria de perturbação de primeira ordem [10].

Inicialmente, vamos utilizar o modelo introduzido por Nedjadi e Rook [11]. Estes autores foram os primeiros a empregar um modelo relativístico para estudar efeitos coulombianos em núcleos espelho. Este modelo descreve a estrutura nuclear através de uma equação de partícula-única de Dirac, com potenciais fenomenológicos da forma Woods-Saxon, de caráter escalar e vetorial de Lorentz. Neste caso, não teremos consistência de constantes de acoplamento, mas, evitamos a redução não relativística da amplitude de mistura. O outro modelo que vamos utilizar é o modelo de Walecka [9], o mesmo modelo utilizado na Ref. [8] para o estudo da diferença das auto-energias do próton e do nêutron na matéria nuclear. Neste caso sim, teremos consistência de constantes de acoplamento.

Uma questão que tem despertado muito interesse ultimamente foi levantanda recentemente por Goldman, Hendersen e Thomas (GHT) [12]. A questão se refere à dependência

de momentum da amplitude de mistura $\rho^0 - \omega$. O valor empregado para este parâmetro é o extraído de experiências e^+e^-, onde o quadrimomentum dos mesons envolvidos é do tipo tempo (timelike). No entanto, para processos de interação núcleon-núcleon, o quadrimomentum dos mesons trocados entre os núcleons é do tipo espaço (spacelike). A suposição implícita em nossos cáculos, e em *todos* os outros cálculos na literatura envolvendo a mistura $\rho^0 - \omega$ na interação núcleon-núcleon, é que a dependência de momentum no parâmetro de mistura é fraca. GHT colocaram a questão do quanto realista é tal suposição.

Empregando um modelo de quarks simples para a amplitude de mistura, Goldman, Hendersen e Thomas mostraram que a amplitude de mistura é fortemente dependente de momentum e, o mais importante, ela é praticamente igual a zero na região do espaço de momentum relevante para explicar a anomalia de Nolen-Schiffer. Krein, Thomas e Williams [13] investigaram esta questão empregando um modelo de quarks mais realista que o de GHT e obtiveram basicamente o mesmo resultado que GHT.

Em uma publicação recente, Miller [14] criticou o modelo de Krein, Thomas e Williams com base nas predições deste modelo para o processo eletromagnético $\rho - \gamma^*$, onde o elemento de matrix é denotado por $f_\rho(k^2)$ [15]. Examinando os dados experimentais de $e^+e^- \to \rho \to e^+e^-$ em $k^2 = m_\rho^2$ e da reação $\gamma + P \to \rho^0 + \rho$ em $k^2 = 0$, Miller não encontra variação com k^2 de $f_\rho(k^2)$.

Por outro lado, Hatsuda, Henley, Meissner e Krein [16] investigaram a dependência de momentum da amplitude de mistura no contexto das regras de soma da QCD [17]. Neste cálculo, não se emprega modelos de quarks, a amplitude é calculada diretamente empregando os graus de liberdade da QCD, onde os efeitos não perturbativos são parametrizados em termos de condensados de quarks e glúons, cujos valores são fixados na espectroscopia de mesons pesados [17]. O resultado deste cálculo confirma basicamente as predições dos cálculos empregando modelos de quarks.

É também objetivo desta tese investigar o efeito da dependência de momentum da amplitude de mistura para a diferença das energias de ligação de núcleos espelho. Em particular, vamos empregar a predição da Ref. [16]. Como será visto, o efeito da dependência de momentum é de reduzir em 50% a contribuição da troca mista $\rho^0 - \omega$ para a diferença das energias de ligação dos núcleos espelho [18]

Em paralelo às tentativas de explicar a anomalia com base na teoria nuclear empregando graus de liberdade de núcleons e mesons, tais como o cálculo de Blunden e Iqbal [5], outros efeitos foram invocados, principalmente efeitos relacionadas aos graus de liberdade de quarks e glúons. Entre os vários efeitos investigados na literatura, um efeito em particular, proposto por Henley e Krein (HK) [19], tem despertado grande interesse ultimamente. O efeito proposto por HK tem como base a hipótese da restauração parcial da simetria quiral no meio nuclear. Estes autores empregaram o modelo de Nambu e Jona-Lasinio [20] para obter a dependência com a densidade dos quarks constituintes em conjunção com o modelo de Isgur e Karl [21] para obter a massa do nêutron e do próton no meio nuclear. Os valores obtidos para a diferença da massa do nêutron e do próton no meio nuclear são da ordem de magnitude, e de sinal correto, para explicar a anomalia de Nolen-Schiffer. Muitos outros cálculos se seguiram após a sugestão original de HK. Dentre os mais importantes, destacam-se os baseados nas regras de soma da QCD, efetuados por Hatsuda e colaboradores [22]. Estes cálculos confirmam qualitativamente e semi-quantitativamente as predições de HK.

Uma crítica constante aos trabalhos que invocam efeitos de uma restauração parcial da simetria quiral no núcleo é que a dependência com a densidade das massas de núcleons é calculada para uma matéria de quarks ao invés da matéria nuclear. Nestes cálculos, a matéria nuclear é simulada como sendo um meio em que os quarks estão uniformemente distribuídos no espaço. Desta maneira, despreza-se a propriedade de agregação dos quarks no interior dos núcleons, superestimando os efeitos de densidade.

As discussões acima sugerem a seguinte questão. A anomalia Nolen-Schiffer pode ser explicada invocando tanto a mistura $\rho^0 - \omega$, quanto invocando a restauração parcial da simetria quiral. Ambas explicações, no entanto, parecem superestimar os efeitos. Surge então a possibilidade de que a anomalia Nolen-Schiffer possa ser explicada pela conjunção dos efeitos da mistura $\rho^0 - \omega$ e da restauração da simetria quiral. O objetivo final desta tese é investigar a possível conjunção dos efeitos da mistura $\rho^0 - \omega$, com a dependência de momentum prevista pelas regras de soma da QCD [16], e a restauração parcial da simetria quiral no núcleo, de acordo com predições [18] [19].

Esta tese está organizada como segue. No capítulo 2, vamos descrever os estudos que levaram ao estabelecimento da anomalia Nolen-Schiffer e as tentativas para a sua correção.

O capítulo 3 trata das forças que quebram simetria de carga, em uma estrutura não relativística, como uma possível resolução da anomalia. Fica claro que a principal contribuição vem da troca mesônica mista $\rho^0 - \omega$. Os modelos de Nedjadi e Rook e de Walecka são apresentados no capítulo 4. São introduzidos termos de momento magnético anômalo e termos de troca. No capítulo 5 é obtida a contribuição da mistura $\rho^0 - \omega$ relativística. A questão da conjunção dos efeitos da mistura $\rho^0 - \omega$ e da restauração da simetria quiral é investigada no capítulo 6. As conclusões e perspectivas futuras são o objeto do capítulo 7.

Capítulo 2

Anomalia Nolen-Schiffer

2.1 Introdução e Definições Básicas

Para o estudo da anomalia Nolen-Schiffer é conveniente usar-se a formalismo de isospin. Logo após a descoberta do nêutron, o conceito de isospin foi introduzido, em analogia ao conceito de spin, por Heisenberg (1932) e desenvolvido por Wigner (1937). Nessa linguagem, o nêutron e o próton são vistos como estados distintos da mesma partícula, o núcleon, que é representado por um isospinor de duas componentes. Assim, o operador de isospin $\vec{t}$ atua, não no espaço físico, mas em um espaço fictício, o espaço de carga elétrica. Neste espaço de carga as matrizes representando as componentes do operador $\vec{t}$ são idênticas às matrizes de spin de Pauli no espaço usual e, portanto, obedecem à conhecida álgebra SU(2). Seguindo a convenção atual, tem-se

$$t_3 \mid n\rangle = -\frac{1}{2} \mid n\rangle, \quad t_3 \mid p\rangle = \frac{1}{2} \mid p\rangle, \tag{2.1}$$

onde $\mid n\rangle$ e $\mid p\rangle$ representam os estados de nêutron e próton, respectivamente. O operador de isospin total para um núcleo com A nucleons é dado pela soma

$$\vec{T} = \sum_{\alpha=1}^{A} \vec{t}(\alpha) \tag{2.2}$$

e os números quânticos associados ao isospin total são dados por

$$T^2 \mid TM_T\rangle = T(T+1) \mid TM_T\rangle, \quad T_3 \mid TM_T\rangle = M_T \mid TM_T\rangle, \tag{2.3}$$

com $M_T = -T, -T+1, ..., T$. Os $2T+1$ estados $\mid TM_T\rangle$ formam o que se chama de um isomultipleto. De acordo com estas equações

$$M_T = \frac{1}{2}(Z - N), \tag{2.4}$$

onde N é o número de neutrons e Z é o número de protons no núcleo.

Há duas hipóteses a respeito da interação nuclear em relação à sua dependência na carga elétrica, denominadas *independência de carga* e *simetria de carga*. A primeira estabelece que os sistema $p-p$, $n-n$ e $n-p$ têm a mesma interação em qualquer estado de espaço-spin permitido. A implicação, em termos de isospin, é que a interação nos estados com $T=1$ não depende do valor da projeção M_T do isospin. Contudo, como os estados com $T=0$ ocorrem somente para o sistema $n-p$, a interação para $T=0$ pode diferir daquela para $T=1$, sem violação da hipótese de independência de carga. A segunda hipótese, denominada simetria de carga, a qual é menos restritiva, estabelece que os sistemas $n-n$ e $p-p$ devem ter a mesma interação nuclear, mas o sistema $n-p$ pode ter uma interação diferente para o mesmo estado de espaço-spin. Isto, portanto, requer que os dois sub-estados de $T=1$ com $M_T = \pm 1$ tenham a mesma interação, enquanto que aquele com $M_T = 0$ possa ter uma interação diferente.

Conhecida esta nomeclatura, as forças nucleares podem ser classificadas em quatro tipos, a saber [23]:

Forças do *tipo I*: São aquelas que são independentes da carga. Essas forças, V_I, obedecem $[V_I, \vec{T}] = 0$ e, portanto, ou não dependem dos graus de liberdade de isospin ou dependem deles apenas através de $\vec{\tau}(i).\vec{\tau}(j)$, onde $\vec{\tau} = 2\vec{t}$ representa o isospin de cada núcleon. Elas podem ser escritas na forma

$$V_I = a + b\vec{\tau}(i).\vec{\tau}(j), \tag{2.5}$$

onde a e b são operadores que independem de isospin.

Forças do *tipo II*: Forças que quebram independência de carga, mas mantêm simetria de carga, são classificadas como do *tipo II*. Elas incluem uma dempendência no isospin proporcional a $\tau_3(i)\tau_3(j)$, e costumam ser escritas na forma tensorial

$$V_{II} = c\left[\tau_3(i)\tau_3(j) - \frac{1}{3}\vec{\tau}(i).\vec{\tau}(j)\right]. \tag{2.6}$$

Forças do *tipo III*: São forças que quebram tanto, a independência de carga, como a simetria de carga, mas que são simétricas na troca $i \leftrightarrow j$ no espaço de isospin. Elas são escritas como

$$V_{III} = d\left[\tau_3(i) + \tau_3(j)\right]. \tag{2.7}$$

A classe III diferencia entre os sistemas nn e pp, contudo não causa mistura de estados com isospin total $T = 0$ e $T = 1$ em sistemas de dois corpos pois

$$\left[V_{III}, T^2\right] \propto \left[T_3, T^2\right] = 0. \tag{2.8}$$

Forças do *tipo IV*: São forças que, além de quebrarem independência de carga e simetria de carga, causam mistura de isospin. Estas forças são da forma

$$V_{IV} = e\left[\vec{\sigma}(i) - \vec{\sigma}(j)\right].\vec{L}\left[\tau_3(i) - \tau_3(j)\right] + f\left[\vec{\sigma}(i) \times \vec{\sigma}(j)\right].\vec{L}\left[\vec{\tau}(i) \times \vec{\tau}(j)\right]_3, \tag{2.9}$$

onde e e f são operadores independentes de isospin.

2.2 Cálculo da Diferença de Energia Coulombiana

A diferença de energia coulombiana entre pares de estados nucleares pertencendo ao mesmo multipleto de isospin, com os valores da projeção M_T diferindo por uma unidade, tem tido um interesse especial. Estes pares estão ligados pela simples relação

$$\mid TM_T + 1\rangle = \left[(T - M_T)(T + M_T + 1)\right]^{-1/2} T_+ \mid TM_T\rangle, \tag{2.10}$$

onde $T_+ = T_1 + iT_2$ é o operador de levantamento de isospin, com $\mid TM_T\rangle$ e $\mid TM_T + 1\rangle$ sendo chamados de estado pai e estado análogo, respectivamente. Ou seja, o estado análogo é obtido do estado pai pela troca de um nêutron por um próton.

Historicamente, a maneira de se obter as diferenças de energia coulombiana entre estados pai e análogo tem sido através da diferença de massa entre estes estados. Com efeito, a massa de um núcleo pode ser determinada por

$$M = ZM_p + NM_n - BE(Z, N), \tag{2.11}$$

onde M_p e M_n são a massas do próton e do nêutron, respectivamente, e $BE(Z, N)$ é a energia de ligação do núcleo com $A(= Z + N)$ nucleons. A diferença de massa entre dois

núcleos, pai e análogo, membros do mesmo multipleto de isospin, com $A_0 + 1$ nucleons, é dada por

$$\begin{aligned} M_{Z_>} - M_{Z_<} &= (Z_0+1)M_p + N_0 M_n - BE(Z_0+1, N_0) \\ &- [Z_0 M_p + (N_0+1)M_n - BE(Z_0, N_0+1)] \\ &= -\delta_{np} - [BE(Z_0+1, N_0) - BE(Z_0, N_0+1)] \\ &= -\delta_{np} - \{-[E_c(Z_0+1, N_0) - E_c(Z_0, N_0+1)] \\ &+ BE_{NUC}(Z_0+1, N_0) - BE_{NUC}(Z_0, N_0+1)\} \\ &= -\delta_{np} + \Delta E_c, \end{aligned} \tag{2.12}$$

onde $M_{Z_>}$ e $M_{Z_<}$ representam as massas (em MeV) dos membros do isomultipleto com maior e menor carga elétrica respectivamente, e $\delta_{np} = M_n - M_p$ é a diferença de massa entre o nêutron e o próton. $BE_{NUC}(Z, N)$ é a parte da energia de ligação do núcleo devida somente à interação nuclear forte e

$$\Delta E_c = E_c(Z_0+1, N_0) - E_c(Z_0, N_0+1), \tag{2.13}$$

é a diferença de energia coulombiana entre os núcleos. Analisando a derivação de (2.12) observa-se que é feita a importante hipótese de que

$$BE_{NUC}(Z_0+1, N_0) = BE_{NUC}(Z_0, N_0+1), \tag{2.14}$$

que nada mais é que a hipótese de independência de carga. Portanto, tratando-se somente com forças do *tipo I* ou, em outras palavras, se a hipótese de independência de carga for verdadeira, a diferença de massa é explicada simplesmente pela repulsão coulombiana.

Mais especificamente, está-se interessado no problema da diferença de energia coulombiana entre pares de núcleos denominados espelhos. Em liguagem de isospin, estes pares de núcleos formam um isodubleto $T = 1/2$, $M_T(Z_>) = M_T(Z_<) + 1 = 1/2$, onde a notação com $Z_<$ indica o membro com $A_0/2$ protons e $A_0/2 + 1$ neutrons que é o denominado *estado pai* e a notação $Z_>$ indica o membro com $A_0/2 + 1$ protons e $A_0/2$ neutrons que é o denominado *estado análogo*. Considerando o caso especial de núcleos espelhos, é suficiente a hipótese menos restritiva de simetria de carga da interação núcleon-núcleon forte para que a diferença de energia coulombiana seja dada pela equação (2.12). Com efeito, há o

mesmo número de interações $p - n$ (próton-nêutron) em ambos os membros de um par de núcleos espelho, e o número de interações $p - p$ (próton-próton) em um é igual ao número de interações $n - n$ (nêutron-nêutron) no outro. Portanto, em pares espelho somente a simetria de carga é requerida, enquanto que no caso mais geral a hipótese da independência de carga se faz necessária.

Deve-se ressaltar que para grandes valores de T, partindo de um estado pai que também é estado fundamental, chegamos a estados análogos que são estados excitados. Normalmente, nestes casos, ΔE_c é maior que a energia de separação de um nêutron ($\sim 8MeV$). Deste modo, os estados análogos aparecem como ressonâncias, que, no entanto, são suficientemente estreitas para terem suas energias de excitação precisamente medidas, permitindo, assim, um bom teste da independência de carga da interação nuclear.

Outra hipótese, menos evidente, feita no cálculo do deslocamento de energia coulombiana é a de utilizar-se o valor de $\delta_{np_{livre}}$, isto é,

$$\delta_{np} = \delta_{np_{livre}} = 1.29 \text{ MeV}. \tag{2.15}$$

Em outras palavras, é utilizada a diferença de massa entre nêutron e próton no espaço livre, enquanto que a diferença δ_{np} é, estritamente, a diferença de massa no meio nuclear.

2.3 Obtenção Experimental de ΔE_c

Claramente, o conceito de isospin está intimamente relacionado à carga elétrica do sistema nuclear. Tanto do ponto de vista teórico como do experimental, este é um dos campos mais investigados dentro da história da física nuclear, não só pelo fato de que a interação eletromagnética é conhecida exatamente, mas também por serem as experiências ligadas à carga elétrica as de realização mais simples.

Existem vários modos de se obter o deslocamento de energia coulombiana experimentalmente. Alguns destes métodos são bem antigos, datando do início da história da física nuclear. Com o transcorrer dos anos, estes métodos foram se aprimorando e, juntamente com o surgimento de novos métodos mais sofisticados, conseguiu-se elevar o grau de precisão das medidas até se atingir um erro da ordem de 1% nos dias atuais. Serão descritos a seguir, sem muitos detalhes, alguns destes métodos:

Decaimento β^+ - Os primeiros valores experimentais de ΔE_c entre estados fundamentais de núcleos espelho foram deduzidos através do decaimento β^+ do membro $Z_>$, isto é, determinando-se a energia cinética máxima E_β do pósitron emitido. Assim, obtém-se

$$\Delta E_c = E_\beta + m_e + \delta_{np}, \tag{2.16}$$

onde m_e é a massa do elétron.

Reações de troca de carga - São reações onde se tem a troca direta de um dos neutrons do núcleo alvo por um próton. O valor da quantidade de energia Q desta reação é a própria diferença de energia coulombiana, isto é,

$$\Delta E_c = -Q(pn). \tag{2.17}$$

Ressonâncias de estados análogos - Essas ressonâncias são estados análogos de sistemas *nêutron + caroço* que são observados nos espalhamentos de protons pelo mesmo caroço. O deslocamento de energia coulombiana é obtido da energia de ressonância no centro de massa E_{cm} mais a energia de separação de um nêutron B_n do núcleo pai. Portanto, tem-se

$$\Delta E_c = E_{cm} + B_n. \tag{2.18}$$

2.3.1 Espalhamento Elástico de Elétrons

Existem outras maneiras de se obter o deslocamento de energia coulombiana. Lembrando que ela está intimamente ligada à distribuição de carga no núcleo, pode-se obter informações a respeito do deslocamento de energia coulombiana de modo mais indireto do que foi apresentado até aqui. Experiências de espalhamento elástico de elétrons foram as primeiras a serem realizadas para se deduzir o raio de carga nuclear [24]. Medidas de deslocamento isotópico de linhas espectrais [25] também permitem determinar a diferença entre os raios de carga dos respectivos isótopos. Estas técnicas têm sido aprimoradas até, nos dias atuais, atingirem um alto grau de precisão. Restringindo a atenção ao problema de determinar a distribuição de carga do estado fundamental de núcleos, serão descritas a seguir algumas características destas técnicas.

O problema do espalhamento elástico de elétrons tem sido bastante estudado, tanto do ponto de vista teórico, como do experimental. Existem vários trabalhos a respeito deste

tema, desde revisões antigas como a de Hofstadter [26], até revisões recentes como as de Barrett [27], Donnelly e Walecka [28] e Friar e Negele [29].

Claramente, a função de onda completa para um problema de espalhamento elástico deve ser dada por uma onda plana incidente somada a uma onda esférica emergente multiplicada por uma apropriada função denominada amplitude de espalhamento. Assim, em termos matemáticos

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left[e^{i\vec{k}.\vec{x}} + f(\vec{k},\vec{k}')\frac{e^{ikr}}{r}\right], \tag{2.19}$$

onde $\vec{k}' = k\hat{r}$. A amplitude de espalhamento $f(\vec{k},\vec{k}')$, na primeira aproximação de Born, é dada por

$$f(\vec{k},\vec{k}') = f(\vec{q}) = -\frac{m}{2\pi}\int V(\vec{r})e^{i\vec{q}.\vec{r}}d^3r, \tag{2.20}$$

onde $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$. Deve-se, então, encontrar uma maneira de se relacionar estes cálculos teóricos aos resultados experimentais.

Na análise de dados experimentais, as quantidades importantes são o *número de partículas incidentes por unidade de área e por unidade de tempo e o número de partículas espalhadas em um determinado ângulo sólido* $d\Omega$ *por unidade de tempo.* O quociente destas quantidades denomina-se *seção de choque diferencial*, $d\sigma/d\Omega$, isto é

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega = \frac{\text{num. part. espalhadas em } d\Omega \text{ por unid. tempo}}{\text{num. part. incid. por unid. área por unid. tempo}}. \tag{2.21}$$

O denominador desta expressão , ou seja, o fluxo de partículas incidentes, pode ser calculado a partir da corrente de probabilidade

$$\vec{j} = \frac{1}{2im}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*). \tag{2.22}$$

No caso de ondas planas incidentes,

$$\vec{j}_{inc} = \frac{\vec{k}}{m} \tag{2.23}$$

e para as ondas esféricas espalhadas em uma determinada direção $\hat{r}_0$,

$$\vec{j}_{esp}.\hat{r}_0 = \frac{\vec{k}}{m}\frac{|f(\vec{q})|^2}{r^2}. \tag{2.24}$$

Assim, o número de partículas atravessando a área dA, que compreende o ângulo sólido $d\Omega$ é

$$\vec{j}_{esp}.\hat{r}_0 dA = \frac{\vec{k}}{m}\frac{|f(\vec{q})|^2}{r^2}r^2 d\Omega. \tag{2.25}$$

Portanto, de acordo com a definição (2.21), a seção de choque é dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega = \mid f(\vec{q}) \mid^2 d\Omega. \tag{2.26}$$

Os cálculos realizados até agora são para o caso em que projétil e alvo são puntuais. No caso mais realístico de um alvo com dimensão finita, como o núcleo de um átomo, e com a camada de elétrons formando uma blindagem, temos o potencial dado por

$$V(\vec{x}) = \int_V dV(\vec{x}) = -Ze^2 \int d^3r\rho(\vec{r})\frac{e^{-|\vec{z}|/a}}{\mid \vec{z} \mid}, \tag{2.27}$$

onde $\vec{z} = \vec{x} - \vec{r}$, com $\vec{r}$ sendo o raio vetor de um elemento de carga dQ da distribuição de carga e $\vec{x}$ o raio vetor do projétil. O fator $e^{-|\vec{z}|/a}$ é acrescentado devido à blindagem formada pelas camadas de elétrons. Substituindo-se este potencial na equação (2.20), obtém-se

$$f(\vec{q}) = f_p(\vec{q})F(\vec{q}), \tag{2.28}$$

onde $f_p(\vec{q})$ é a amplitude de espalhamento para um alvo puntual e $F(\vec{q})$ é conhecido como fator de forma e é dado pela transformada de Fourier da distribuição de carga. Com efeito,

$$F(\vec{q}) = \int d^3r\rho(\vec{r})e^{i\vec{q}\vec{r}}. \tag{2.29}$$

Assim, a seção de choque diferencial é comumentemente escrita como:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_p \mid F(\vec{q}) \mid^2, \tag{2.30}$$

onde $(d\sigma/d\Omega)_p$ é a seção de choque para um núcleo puntual de carga Ze e $F(\vec{q})$, que pode ser definido pela relação acima, é o chamado fator de forma e leva em conta a dimensão finita do núcleo.

Está claro, pelas expressões apresentadas, que, obtida a seção de choque dos dados experimentais, pode-se encontrar o fator de forma. Uma vez encontrado o fator de forma pode-se obter a distribuição de carga. Entretanto, normalmente não é possível obter o valor de $F(\vec{q})$ para todo valor de $\vec{q}$, pois existem dificuldades experimentais para se medir a seção de choque, tanto para o momento da partícula incidente tendendo a zero, como também para o momento da partícula tendo um valor muito grande. Consequentemente, não se pode inverter a transformada de Fourier (2.29) para se obter a distribuição de carga.

Assim, para se ter uma informação a respeito do tamanho da distribuição de carga, procede-se do seguinte modo. Em primeiro lugar efetua-se uma expansão para pequenos valores de $\vec{q}$ na exponencial em (2.29), obtendo-se

$$F(q) = 1 - \frac{1}{6}q^2\langle r^2\rangle + \frac{1}{120}q^4\langle r^4\rangle - ..., \tag{2.31}$$

onde

$$\langle r^n\rangle = \int \mathrm{d}^3 r r^n \rho(\vec{r}). \tag{2.32}$$

Em segundo lugar, deriva-se $F(q)$ em relação a q^2, obtendo-se,

$$\langle r^2\rangle = -6\left.\frac{\mathrm{d}F(q^2)}{\mathrm{d}q^2}\right|_{q^2=0}. \tag{2.33}$$

Deste modo, o raio médio quadrático da distribuição de carga pode ser obtido medindo-se e extrapolando-se $F(q)$ para pequenos valores de q.

Do ponto de vista prático, considera-se uma distribuição esfericamente simétrica e usualmente se parametriza a distribuição $\rho(r)$ usando alguma forma funcional obtida através de algum modelo. Das análises experimentais de espalhamento de elétrons com energias até 60 MeV, pode-se deduzir somente um parâmetro, sendo usualmente escolhido o raio quadrático médio. Para elétrons com energias de até 300 MeV dois parâmetros são necessários para se obter um melhor acordo com dados experimentais. Uma das formas mais utilizadas é

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp[(r - r_c)/a]}, \tag{2.34}$$

onde r_c é o raio médio e a a difusividade. Para elétrons com energias superiores a 300 MeV são necessários três parâmetros. A forma mais popular é obtida multiplicando-se a expressão anterior por $(1 + wr^2/r_c^2)$, onde o terceiro parâmetro w está ligado à oscilação de $\rho(r)$ próximo à origem.

2.3.2 Átomos Muônicos

O méson μ^-, quando capturado por um átomo, sofre transições eletromagnéticas até atingir o nível de energia mais baixo. Os raios X emitidos neste processo são medidos, especialmente para as transições entre os níveis mais baixos. Já que o méson μ^- é cerca de 270

vezes mais massivo que o elétron, seu raio de Bohr é cerca de 270 vezes menor. Consequentemente, a função de onda do μ^- se sobrepõe sensivelmente à função de onda do núcleo, principalmente para os orbitais mais baixos. Assim, a energia emitida no decaimento entre os níveis mais baixos, mais especificamente a transição $1p - 1s$, pode fornecer importantes informações a respeito da distribuição de carga no núcleo. Devido à forma finita do núcleo e à sobreposição de funções de onda há uma mudança na energia de transição $1p_{3/2} \rightarrow 1s_{1/2}$. No caso de núcleos leves, esta mudança na energia é aproximadamente dada por [30]

$$\Delta E = \frac{1}{6\pi}\left(\frac{Z}{a_\mu}\right)^3 \int r^2 \rho(r) \mathrm{d}^3 r, \tag{2.35}$$

onde $a_\mu = \hbar^2/m_\mu e^2$ é o raio de Bohr do muon. Esta equação mostra a dependência do efeito em relação à distribuição de carga, mais especificamente em relação ao raio quadrático médio.

2.4 Determinação Teórica de ΔE_c

2.4.1 Energia Coulombiana em um Modelo Simples

Para se determinar a diferença de energia coulombiana, deve-se primeiramente conhecer a energia coulombiana total E_c do núcleo, que é a soma de todas as interações coulombianas entre todos os Z protons no núcleo, ou seja,

$$E_c = e \sum_{\alpha<\beta=1}^{A} V_{c_{\alpha\beta}} \left(\frac{1}{2} + t_3(\alpha)\right)\left(\frac{1}{2} + t_3(\beta)\right), \tag{2.36}$$

com o potencial coulombiano $V_{c_{\alpha\beta}}$ dado por

$$V_{c_{\alpha\beta}} = \frac{e}{\mid \vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta \mid}. \tag{2.37}$$

No entanto, a presença do denominador $\mid \vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta \mid$ torna as coisas um pouco complicadas. Assim, para facilidade dos cálculos introduz-se um modelo para se obter o potencial de Coulomb. Este potencial devido aos Z protons, pode ser escrito, supondo que eles formem uma distribuição de carga esfericamente simétrica, $\rho(r)$, como

$$U_c(r) = Ze \int \mathrm{d}^3 r' \rho(r') \left[\frac{1}{r}\theta(r - r') + \frac{1}{r'}\theta(r' - r)\right], \tag{2.38}$$

onde $r = |\vec{r}|$ e $r' = |\vec{r'}|$ e $\rho(\vec{r})$ obedece a propriedade

$$\int \rho(\vec{r})\mathrm{d}^3r = 1. \tag{2.39}$$

O modelo mais simples para a densidade ρ é considerá-la uma distribuição uniforme e esfericamente simétrica de cargas. Portanto, de acordo com este modelo, tem-se

$$\rho(\vec{r}) = \rho(|\vec{r}|) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi R^3} & r \leq R \\ 0 & r > R, \end{cases} \tag{2.40}$$

onde R é o raio da distribuição de carga. Assim, neste modelo obtém-se, para $r \leq R$,

$$\begin{aligned} U_c(r) &= \frac{3Ze}{R^3}\left[\frac{1}{r}\int_0^r r'^2\mathrm{d}r' + \int_r^R r'\mathrm{d}r'\right] \\ &= \frac{Ze}{R}\left\{1 + \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\right\} \end{aligned} \tag{2.41}$$

e para $r > R$

$$\begin{aligned} U_c(r) &= \frac{3Ze}{R^3}\frac{1}{r}\int_0^R r'^2\mathrm{d}r' \\ &= \frac{Ze}{r}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

A energia coulombiana de um núcleo de carga Ze e uma distribuição de carga $\rho(\vec{r})$ é dada classicamente por

$$E_c = \frac{1}{2}Ze\int \mathrm{d}^3r\rho(\vec{r})U_c(\vec{r}), \tag{2.43}$$

onde $U_c(\vec{r})$ é o potencial Coulombiano devido a $Ze\rho(\vec{r})$. Assumindo uma densidade de distribuição de carga esfericamente simétrica encontra-se, usando (2.41-2.42),

$$E_c = \frac{3}{5}\frac{Z^2e^2}{R}. \tag{2.44}$$

Esta expressão não inclui o termo de troca quântico. Usando o modelo de gás de Fermi, Bethe e Bacher [2] obtiveram para o termo de troca o seguinte resultado:

$$E_c^{troca} = -0.460\frac{Z^{4/3}e^2}{R}. \tag{2.45}$$

Levando, ainda, em conta um termo de emparelhamento, proporcional a $(1-(-1)^Z)\frac{e^2}{R}$, e assumindo que

$$R = r_0A^{1/3}, \tag{2.46}$$

consegue-se fitar os dados experimentais sobre as diferenças de energia coulombiana, tomando-se $r_0 = 1.3$ fm [33]. Por outro lado, dados experimentais obtidos do espalhamento de elétrons ou da emissão de raios X de átomos muônicos resultam em $r_0 \sim 1.2$ fm. Assim, já se tem um acordo razoável com resultados experimentais para as diferenças de energia coulombiana dadas em (2.13), indicando que a interação nuclear forte é praticamente independente de carga. Obviamente, resultados teóricos mais precisos necessitam de um modelo mais sofisticado, como o modelo de partículas independentes visto na próxima seção.

2.4.2 ΔE_c no modelo de partículas independentes

Nesta seção descreve-se com algum detalhe a obtenção teórica do deslocamento de energia coulombiana baseada no modelo de partículas independentes.

Considere as Hamiltonianas 1 e 2 descrevendo os núcleos 1 e 2, respectivamente, que diferem um do outro pela troca de um nêutron por um próton. As energias e as funções de onda dos estados fundamentais destes núcleos são obtidas resolvendo-se as equações

$$H_1\Psi_1 = E_1\Psi_1, \qquad H_2\Psi_2 = E_2\Psi_2. \tag{2.47}$$

Está-se interessado na diferença de energia $\Delta E = E_2 - E_1$. Supondo que a força nuclear forte seja independente de carga (no caso de núcleos espelho basta supor simetria de carga) e que o isospin seja um bom número quântico, então a diferença de energia destes núcleos é dada simplesmente pela diferença de energia coulombiana, $\Delta E = \Delta E_c$. Como consequência da aproximação de isospin como bom número quântico pode-se escrever

$$\mid \Psi_2\rangle = [(T - M_T)(T + M_T + 1)]^{-1/2}\, T_+ \mid \Psi_1\rangle, \tag{2.48}$$

onde T_+ é o operador de levantamento de isospin. No caso de núcleos espelho tem-se $\mid \Psi_2\rangle = T_+ \mid \Psi_1\rangle$.

Da hipótese de independência de carga (ou simetria de carga), encontra-se que a diferença de energia é dada por

$$\begin{aligned} \Delta E &= \langle \Psi_2 \mid H_N(2) + H_c(2) \mid \Psi_2\rangle - \langle \Psi_1 \mid H_N(1) + H_c(1) \mid \Psi_1\rangle \\ &= \langle \Psi_2 \mid \Delta H_c \mid \Psi_2\rangle \\ &= \Delta E_c, \end{aligned} \tag{2.49}$$

onde a hamiltoniana foi separada em duas partes, correspondendo às interações nuclear e coulombiana e o operador ΔH_c representa a interação coulombiana do próton extra com os protons restantes no núcleo. O operador ΔH_c é dado por

$$\Delta H_c = \sum_i \frac{e^2}{r_{i,extra}}, \tag{2.50}$$

com $r_{i,extra} = \mid \vec{r}_i - \vec{r}_{extra} \mid$ onde $\vec{r}_i$ são os raios vetores dos protons restantes no núcleo e $\vec{r}_{extra}$ é o raio vetor do próton extra. Já que se tem uma dependência somente na coordenada relativa, com $\Delta H_c(r) = V_0 f(r)$, é conveniente fazermos a expansão

$$f(r) = \sum_{K=0}^{\infty} f_K(r_i, r_j) P_K(\cos\theta_{ij}), \tag{2.51}$$

onde

$$f_K(r_i, r_j) = \frac{2K+1}{2} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\theta_{ij}) f(r) P_K(\cos\theta_{ij}). \tag{2.52}$$

Lembrando que ΔH_c é um operador de dois corpos, para se obter o seu valor esperado no estado $\mid \Psi_2\rangle$ deve-se calcular seus elementos de matriz entre estados do tipo $\mid \alpha\beta : JMTM_T\rangle$, os quais podem ser expandidos em estados com acoplamento LS como

$$\mid (n_\alpha l_\alpha j_\alpha, n_\beta l_\beta j_\beta) : JMTM_T\rangle = \sum_{LS} \begin{bmatrix} l_\alpha & \frac{1}{2} & j_\alpha \\ l_\beta & \frac{1}{2} & j_\beta \\ L & S & J \end{bmatrix} \mid (n_\alpha l_\alpha, n_\beta l_\beta) L, (\frac{1}{2}\frac{1}{2}) S : JMTM_T\rangle. \tag{2.53}$$

Assim, o valor esperado ΔE_c pode ser escrito como uma soma de elementos de matriz do tipo

$$\begin{aligned} &\langle (n_\alpha l_\alpha, n_\beta l_\beta) L, (\frac{1}{2}\frac{1}{2}) S : JMTM_T \mid f(r) \mid (n'_\alpha l'_\alpha, n'_\beta l'_\beta) L, (\frac{1}{2}\frac{1}{2}) S : JMTM_T\rangle \\ &= \sum_{K=0}^{\infty} F_K(\alpha\beta, \alpha'\beta') \langle l_\alpha l_\beta L \mid\mid P_K(\cos\theta_{ij}) \mid\mid l'_\alpha l'_\beta L\rangle, \end{aligned} \tag{2.54}$$

onde a integral radial F_K é chamada integral de Slater e é definida por

$$F_K(\alpha\beta, \alpha'\beta') = \int_0^\infty \mathrm{d}r_i \int_0^\infty \mathrm{d}r_j R_{n_\alpha l_\alpha}(r_i) R_{n_\beta l_\beta}(r_j) f_K(r_i, r_j) R_{n'_\alpha l'_\alpha}(r_i) R_{n'_\beta l'_\beta}(r_j), \tag{2.55}$$

onde $R_{n_\alpha l_\alpha}(r_i)$ são as partes radiais das funções de onda. Quando se necessitam somente elementos diagonais, como é o caso do operador e^2/r, estas integrais podem ser escritas

como combinações lineares de integrais mais simples [34], denominadas integrais de Talmi, que são dadas por

$$I_K(f) = \int_0^\infty R_{1K}^2 f(r)\mathrm{d}r. \tag{2.56}$$

Tomando-se para o potencial de partícula independente o potencial do oscilador harmônico, o qual tem a forma

$$U(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{\nu^2 r^2}{2m}, \tag{2.57}$$

então as funções radiais $R_{n_a l_a}(r_i)$ são funções do oscilador e as integrais de Talmi podem ser resolvidas analiticamente. Portanto, os elementos de matriz da interação coulombiana podem ser escritos em termos de

$$I_l = \int_0^\infty R_{1K}^2 \frac{e^2}{r}\mathrm{d}r = \frac{2(2l)!!}{(2l+1)!!}e^2\left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{1/2}. \tag{2.58}$$

Deve-se ressaltar que se está utilizando, nesta derivação, uma importante propriedade do potencial do oscilador harmônico que é a possibilidade de separação entre movimento de centro de massa e movimento relativo.

Considere-se, por exemplo, a diferença de energia entre os estados fundamentais $(1p_{1/2}^{-1})$ dos núcleos espelho ^{15}O e ^{15}N. Com efeito,

$$\Delta E_c(1p_{1/2}^{-1}) = \langle 1s_{1/2}1p_{3/2}1p_{1/2}\left|\sum_{i=1}^{7}\frac{e^2}{r_{i8}}\right|1s_{1/2}1p_{3/2}1p_{1/2}\rangle, \tag{2.59}$$

considerando funções de onda antissimetrizadas. Usando-se as técnicas apresentadas encontra-se [33]:

$$\begin{aligned}\Delta E_c(1p_{1/2}^{-1}) &= \frac{21}{12}I_0 + 4I_1 + \frac{15}{12}I_2 \\ &= \frac{181}{18}e^2\left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{2.60}$$

O parâmetro do oscilador ν é escolhido de modo a reproduzir o raio médio quadrático do núcleo de camadas fechadas vizinho, neste caso o do ^{16}O. Com efeito, a distribuição de protons do ^{16}O, no modelo de camadas, é dada por

$$\begin{aligned}\rho_{SM}(r) &= \frac{1}{8}\langle^{16}\mathrm{O}|\left\{\sum_{i=1}^{16}\left(\frac{1}{2}+t_3(i)\right)\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\right\}|^{16}\mathrm{O}\rangle \\ &= \frac{1}{8}\frac{1}{4\pi r^2}\left[2R_{1s}^2 + 6R_{1p}^2\right] \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{3/2}2\nu r^2 e^{-\nu r^2}.\end{aligned} \tag{2.61}$$

Então, de acordo com (2.32) encontra-se

$$\langle r^2 \rangle = \frac{9}{4\nu}. \tag{2.62}$$

Usando-se, então, o valor experimental $\langle r^2 \rangle = (2.70 \text{ fm})^2$, obtém-se

$$e^2 \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{1/2} = 0.3192 \text{ MeV}. \tag{2.63}$$

Substituindo-se este resultado em (2.60), encontra-se finalmente $\Delta E_c(1p_{1/2}^{-1}) = 3.254$ MeV, enquanto que o resultado experimental é 3.538 MeV. Pode-se observar que o resultado teórico é cerca de 7% menor que o experimental. Resultados similares são obtidos para outros pares espelho. Assim, para reproduzir os valores experimentais de ΔE_c quando se usam funções de onda do oscilador, o valor de $\sqrt{\nu}$ deve ser incrementado em cerca de 7%. Isto implica em que o valor calculado do raio quadrático médio é cerca de 7% menor que o obtido experimentalmente. Na tentativa de explicar esta diferença entre resultados experimentais e teóricos, vários termos de correção ao modelo vêm sendo acrescentados, sem sucesso, durante a história da anomalia Nolen-Schiffer. A seguir, será feita a descrição de alguns destes termos de correção .

2.5 Termos de Correção

Nesta seção, serão descritos rapidamente alguns dos termos de correção. Para maiores detalhes veja por exemplo [1, 33].

2.5.1 Movimento de Centro de Massa

No cálculo de (2.61) é assumido que o centro de massa, neste caso o centro de massa dos protons, coincide com o centro do potencial de partículas independentes. Corrige-se esta hipótese levando-se em conta o movimento do centro de massa. Com efeito, a distribuição de cargas fica agora escrita como

$$\rho(r) = \frac{1}{Z}\langle \Psi \left| \sum_{i=1}^{A} \left(\frac{1}{2} + t_3(i)\right) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)\delta(\vec{R}) \right| \Psi \rangle, \tag{2.64}$$

onde $\vec{R} = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{A} \vec{r}_i$ é a coordenada do centro de massa e Ψ o estado fundamental do apropriado núcleo. Considerando o potencial do oscilador harmônico pode-se fatorar Ψ do

seguinte modo:

$$\Psi(\vec{r}_i) = \xi_{CM}(\vec{R})\Phi(\vec{r}_i - \vec{R}). \tag{2.65}$$

Efetuando-se os cálculos de $\rho(\vec{r})$ conforme (2.64), a equação (2.62) é substituída por

$$\langle r^2 \rangle = \frac{9}{4\nu} - \frac{1}{16}\frac{3}{2\nu}. \tag{2.66}$$

Os valores de $\sqrt{\nu}$ calculados com esta expressão são cerca de 0.6% menores que os obtidos anteriormente. Neste caso a correção está indo no sentido contrário ao desejado.

2.5.2 Efeito da Forma Finita da Distribuição de Carga do Próton

Da análise de espalhamento elástico de elétrons por protons, é encontrado que a distribuição de carga no próton pode ser aproximada por [30]

$$\rho_{\text{próton}}(r) = \frac{1}{8\pi a^3} e^{-r/a}, \tag{2.67}$$

onde $a^2 = \langle r^2 \rangle_{\text{próton}}/12$. Assim, a distibuição de carga no núcleo é obtida resolvendo-se a integral

$$\rho(\vec{r}) = \int d^3r' \rho_{SM}(\vec{r}\,')\rho_{\text{próton}}(\vec{r} - \vec{r}\,'). \tag{2.68}$$

Com estes cálculos obtêm-se valores de $\sqrt{\nu}$ cerca de 2.6% maiores que os anteriores. Portanto, neste caso a correção está indo no sentido desejado.

2.5.3 Polarização do Vácuo

Uma conhecida correção à interação eletromagnética entre dois protons vem da emissão virtual de pares elétron-positron. Esta emissão calculada na mais baixa ordem resulta em [31]

$$V^P = \frac{2\alpha e^2}{3\pi r} I(r), \tag{2.69}$$

onde

$$I(r) = \int_1^\infty e^{-2krx} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^4}\right)(x^2 - 1)^{1/2} dx. \tag{2.70}$$

α é a constante de estrutura fina e k é o inverso do comprimento de onda Compton do elétron. A inclusão desta correção acresce o valor de ΔE_c em cerca de 0.6%, contribuindo assim para a correção da discrepância.

Tabela 2.1: Diferenças de energia coulombiana e termos de correção calculados com EDM

A	Estado	E_c	E_{ffp}	E_{so}	E_{pv}	E_{ca}	E_{pc}	E_{ec}	E_{per}	Total	Exp.	Dif.
15	$1p_{3/2}^{-1}$	3275	-80	-35	20	125	-100	25	-15	3215	3395	180
	$1p_{1/2}^{-1}$	3200	-75	70	20	105	-140	20	-20	3180	3542	360
17	$1d_{5/2}$	3195	-50	-60	20	85	15	30	-35	3200	3542	340
	$2s_{1/2}$	2910	-40	0	15	95	25	20	-120	2905	3166	260
39	$2s_{1/2}^{-1}$	7085	-100	0	45	160	-195	25	-80	6940	7253	315
	$1d_{3/2}^{-1}$	6955	-95	115	40	125	-205	25	-60	6895	7304	410
41	$1f_{7/2}$	6775	-70	-105	40	120	70	35	-75	6790	7278	490
	$2p_{3/2}$	6465	-65	-30	40	125	180	25	-410	6330	7051	750

2.5.4 Resultados Finais para as Diferenças de Energias Colombianas

Outras possíveis correções, como *efeitos magnéticos, polarização do caroço,* etc, podem ser acrescentadas. No entanto, igualmente ao que ocorre com as correções anteriormente apresentadas, estas também, ou aumentam ou diminuem a anomalia de uma pequena porcentagem sem resolverem o problema. Isto pode ser constatado na tabela 2.1 [32], onde estão compilados, além do termo coulombiano, as contribuições devidas às várias correções apresentadas. As energias são calculadas usando funções de onda obtidas pelo método da Expansão em Matriz Densidade (EDM). Na tabela temos a energia coulombiana E_c, a correção devida à forma finita do próton E_{ffp}, a correção devida à interação spin-orbita E_{so}, a correção devida à polarização do vácuo E_{pv}, a correção devida às correlações de curto alcance E_{ca}, a correção devida à polarização do caroço E_{pc}, a correção na energia cinética E_{ec} devida à diferença de massa entre protons e neutrons e a correção devida a perturbações na energia coulombiana E_{per}. A anomalia Nolen-Schiffer é representada pela última coluna à direita, chamada Dif.

2.6 Conclusão

Apesar do uso dos mais sofisticados métodos de obtenção de funções de onda, o que se observa é que tanto em sistemas de 1 partícula com nos sistemas de 1 buraco a anomalia Nolen-Schiffer permanece. Nota-se que a anomalia é pouco dependente do estado, e tem um pequeno crescimento com o número de massa do núcleo estudado. Refinando-se o cálculo com o acréscimo dos vários termos de correção, a magnitude da anomalia praticamente não se reduz. Assim, deve-se concluir que as hipóteses envolvidas no cálculo da diferença de energia coulombiana não devem ser verdadeiras. Uma força que quebre a simetria de carga ou efeitos mais sutis parecem ser necessários para resolver a anomalia.

Capítulo 3

Forças que Quebram Simetria de Carga

3.1 Introdução

O problema aqui tratado é como calcular a diferença de energia entre dois núcleos espelhos. Dos resultados do capítulo 2, sabe-se que somente a interação coulombiana não explica os dados experimentais. Assim, para resolver este problema, deve-se refletir a respeito das hipóteses feitas no cálculo da diferença de energia coulombiana. A primeira hipótese, representada pela equação (2.14), é a da simetria de carga. Então, no sentido de explicar a anomalia, deve-se considerar uma pequena quebra de simetria de carga pela interação forte.

A possibilidade de uma pequena quebra de simetria de carga nas forças nucleares tem sido objeto de muitos estudos [35, 36]. Evidências diretas para a quebra de simetria de carga podem ser extraídas de dados de espalhamento núcleon-núcleon. De acordo com resultados de Henley e Wilkinson [37], após serem levados em conta os efeitos coulombianos e efeitos devidos à diferença de massa nêutron-próton, o comprimento de espalhamento nêutron-nêutron (a_{nn}) é um pouco menor que o comprimento de espalhamento próton-próton (a_{pp}). Dito de outra maneira, o potencial nuclear nêutron-nêutron deve ser mais repulsivo que o potencial nuclear próton-próton.

É consenso geral que a teoria correta das interações fortes é a cromodinâmica quântica (QCD), cujos graus de liberdade são os quarks e gluons. No entanto, são nucleons e mesons que são observados experimentalmente. Estes últimos, são os graus de liberdade da conhecida teoria de Walecka, apresentada no próximo capítulo. No contexto da teoria

mesônica de Walecka, há poucas fontes de quebra de simetria de carga, além da interação eletromagnética. Devido à diferença de massa nêutron-próton, algumas fontes de quebra de simetria de carga são a troca de um píon e de dois pions, bem como a diferença de massa entre π^+ e π^0. No entanto, esta diferença entre as massas dos pions pode ser completamente explicada através de uma origem eletromagnética.

Outras fontes de quebra de simetria de carga da força nuclear, de importância maior que as apresentadas no parágrafo anterior, são devidas às "misturas" de mesons neutros com isospins diferentes. Mistura de partículas é um fenômeno bem conhecido na teoria das partículas elementares. Mistura ocorre quando uma hamiltoniana perturbada viola alguns números quânticos que são conservados pela hamiltoniana não perturbada. Portanto, a hamiltoniana perturbada possui elementos de matriz não nulos fora da diagonal, no espaço de auto-estados da hamiltoniana não perturbada. Quando a hamiltoniana completa é diagonalizada, o que se obtém é que seus auto-estados são superposições lineares dos auto-estados da hamiltoniana não perturbada; em outras palavras, superposições lineares de auto-estados com números quânticos definidos.

No caso de uma pequena quebra de simetria de carga, o número quântico violado é o isospin. Baseado na teoria mais fundamental que é a QCD, resta então responder a questão da origem das misturas mesônicas. Com efeito, as funções de onda de isospin dos mesons neutros podem ser escritas como

$$| I = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(| u\overline{u}\rangle - | d\overline{d}\rangle\right) \tag{3.1}$$

$$| I = 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(| u\overline{u}\rangle + | d\overline{d}\rangle\right), \tag{3.2}$$

onde u e d representam os quarks *up* e *down*, repectivamente, e $\overline{u}$ e $\overline{d}$ seus respectivos antiquarks (vide Cap 5).

A parte da densidade de lagrangiana (ou hamiltoniana) que quebra a invariância de isospin, é aquela que carrega a dependência nas massas m_d e m_u desses quarks, e é dada por

$$H_m = m_d\overline{d}d + m_u\overline{u}u. \tag{3.3}$$

Calculando o elemento de matriz deste operador entre os estados com $I = 0$ e $I = 1$,

obtém-se facilmente

$$\langle I = 1 \mid H_m \mid I = 0 \rangle = m_u - m_d. \tag{3.4}$$

Assim, conclui-se que a mistura de isospin se deve à diferença de massa entre os quarks u e d.

Neste capítulo, serão consideradas as interações dependentes de carga e serão analisadas suas contribuições para o cálculo da diferença das energias de ligação de núcleos espelho. Um dos pontos centrais a ser considerado é a questão da intensidade destas interações e se são suficientemente fortes para explicar a anomalia Nolen-Schiffer.

Como já foi dito, com base na teoria mesônica de Walecka, as fontes de quebra de simetria de carga são dadas pela mistura de mesons neutros de mesmo spin e paridade, mas com diferentes isospins. O exemplo mais estudado é a mistura $\rho^0 - \omega$, para a qual a razão de mistura é da ordem de 4%. Ou seja, a cada 100 trocas de mesons ρ, quatro delas acabam sendo do tipo $\rho^0 - \omega$. Esta alta taxa é devida à pequena diferença de massa entre estes mesons. Ela pode ser obtida experimentalmente através da produção de pions em colisões elétron-pósitron (e^+e^-). O termo dominante na produção $\pi^+ - \pi^-$ vem de mesons ρ reais. A quebra de simetria de carga entra via conversão de um méson ω em um méson ρ. Estas duas amplitudes são coerentes e, assim, a mistura $\rho^0 - \omega$ pode ser observada como um efeito de interferência. O diagrama relevante deste processo é mostrado na figura 3.1, onde o quadrado representa o elemento de matriz $\langle \rho^0 \mid H_{SB} \mid \omega \rangle$ da mistura. O valor

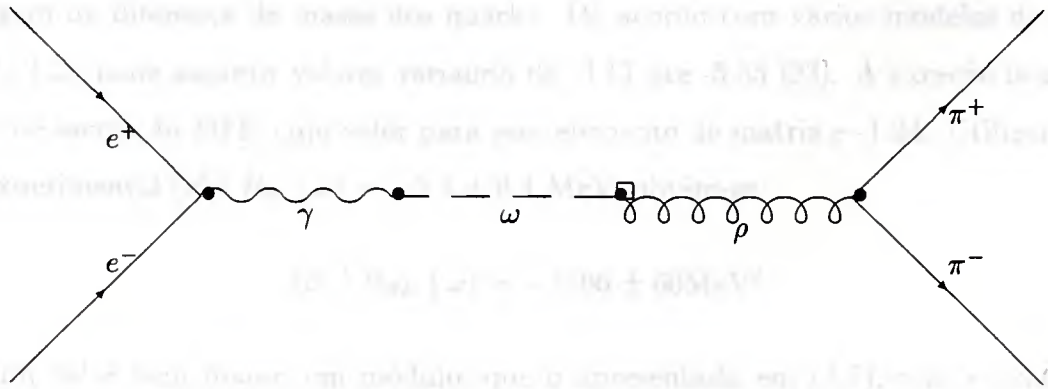

Figura 3.1: Processo de aniquilação $e^+e_- \to \pi^+\pi_-$

experimental para este elemento de matriz pode ser obtido encontrando-se as taxas de decaimento $\Gamma(\omega \to 2\pi)$ e $\Gamma(\rho \to 2\pi)$. Considerando-se que as massa dos mesons ρ^0 e ω são comparáveis, a razão entre as taxas de decaimento é dada por [38]

$$\Gamma(\omega \to 2\pi) = \left| \frac{\langle \rho^0 \mid H_{SB} \mid \omega \rangle}{i m_\rho \Gamma_\rho} \right|^2 \Gamma(\rho \to 2\pi), \tag{3.5}$$

onde m_ρ é a massa do méson ρ e Γ_ρ é a largura de sua ressonância. Utilizando-se os resultados experimentais encontrados na referência [39], é possível obter

$$\mid \langle \rho^0 \mid H_{SB} \mid \omega \rangle \mid \approx 3400\text{MeV}^2. \tag{3.6}$$

O sinal do elemento de matriz, pode ser determinado por efeitos de interferência em processos onde ρ^0 e ω ocorrem em estados intermediários, como o processo $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$. O resultado experimental implica em

$$\langle \rho^0 \mid H_{SB} \mid \omega \rangle = -3400\text{MeV}^2. \tag{3.7}$$

De acordo com Miller, Nefckens e Slaus [23], teoricamente tem-se

$$\langle \rho^0 \mid H_{SB} \mid \omega \rangle = 2m_\rho \langle \rho^0 \mid H_m + H_e \mid \omega \rangle \tag{3.8}$$

O elemento de matriz $\langle \rho^0 \mid H_m + H_e \mid \omega \rangle$ inclui o processo de origem eletromagnética $\rho \to \gamma \to \omega$, o qual contribui com 0.43 ± 0.04 MeV [15]. Como foi visto, $\langle \rho^0 \mid H_m \mid \omega \rangle$ tem sua origem na diferença de massa dos quarks. De acordo com vários modelos de quarks, $\langle \rho^0 \mid H_m \mid \omega \rangle$ pode assumir valores variando de -3.17 até -5.55 [23]. A exceção fica para o modelo de sacola do MIT, cujo valor para este elemento de matriz é -1.24. Utilizando-se o valor experimental $\langle \rho^0 \mid H_m \mid \omega \rangle = -3.1 \pm 0.4$ MeV, obtém-se

$$\langle \rho^0 \mid H_{SB} \mid \omega \rangle = -4500 \pm 60\text{MeV}^2 \tag{3.9}$$

que é um valor bem maior, em módulo, que o apresentado em (3.7), mas é exatamente o valor obtido em recente experimento [6]. Outra fonte de quebra de simetria de carga é a mistura $\pi^0 - \eta$. Espera-se que a contribuição desta mistura seja bem menor que a contribuição $\rho^0 - \omega$, devido à grande diferença de massa entre π^0 e η.

3.2 Troca Mesônica Mista

Usando técnicas padrão para avaliar o diagrama de Feynman da Fig (3.2), MacNamee, Scadron e Coon [38] obtiveram a seguinte amplitude

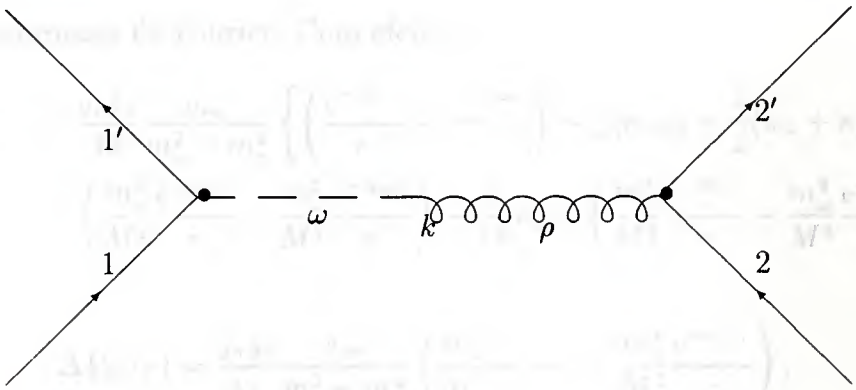

Figura 3.2: Troca $\rho^0 - \omega$

$$T_{\rho\omega} = g_\rho g_\omega g_{\rho\omega} \frac{\overline{\psi}(k_1')\left[\gamma^\mu + i\frac{\kappa_\omega}{2M}(k_1' - k_1)_\lambda \sigma^{\lambda\mu}\right]\psi(k_1)\overline{\psi}(k_2')\tau_3\left[\gamma_\mu + i\frac{\kappa_\rho}{2M}(k_2' - k_2)^\lambda \sigma_{\lambda\mu}\right]\psi(k_2)}{(k^2 - m_\omega^2 + i\varepsilon)(k^2 - m_\rho^2 + i\varepsilon)} + (1 \leftrightarrow 2). \tag{3.10}$$

De maneira análoga, eles também determinaram uma amplitude para o caso da troca mista $\pi^0 - \eta$.

$$T_{\pi\eta} = g_\pi g_\eta g_{\pi\eta} \frac{\overline{\psi}(k_1')\tau_3\gamma_5\psi(k_1)\overline{\psi}(k_2')\gamma_5\psi(k_2)}{(k^2 - m_\pi^2 + i\varepsilon)(k^2 - m_\eta^2 + i\varepsilon)} + (1 \leftrightarrow 2). \tag{3.11}$$

Em seguida eles extraíram um potencial núcleon-núcleon. Para tanto deve-se efetuar uma redução não relativística no sistema de centro de massa dos dois nucleons, juntamente com uma aproximação estática. Com isso, obtém-se

$$\Delta T_{\rho\omega} = g_\rho g_\omega g_{\rho\omega} \frac{1 + \frac{1}{2}\left[\kappa_\omega\kappa_\rho + \frac{1}{2}(\kappa_\omega + \kappa_\rho)\right]\frac{\vec{k}^2}{M^2} - \frac{1}{16}\kappa_\omega\kappa_\rho\frac{\vec{k}^4}{M^4}}{(\vec{k}^2 + m_\omega^2)(\vec{k}^2 + m_\rho^2)} \tag{3.12}$$

$$\Delta T_{\pi\eta} = g_\pi g_\eta g_{\pi\eta} \frac{\frac{\vec{k}^2}{M^2}}{(\vec{k}^2 + m_\pi^2)(\vec{k}^2 + m_\eta^2)}, \tag{3.13}$$

onde $\Delta T = T_{nn} - T_{pp}$. De posse deste resultado, o potencial no espaço de coordenadas pode ser facilmente obtido através da relação :

$$\frac{1}{(\vec{k}^2 + m_i^2)(\vec{k}^2 + m_j^2)} = \frac{1}{m_i^2 - m_j^2}\left(\frac{1}{(\vec{k}^2 + m_j^2)} - \frac{1}{(\vec{k}^2 + m_i^2)}\right), \tag{3.14}$$

e de uma transformada de Fourier. Com efeito,

$$\begin{aligned}\Delta V_{\rho\omega}(r) &= \frac{g_\rho g_\omega}{4\pi}\frac{g_{\rho\omega}}{m_\omega^2 - m_\rho^2}\left\{\left(\frac{e^{-m_\rho r}}{r} - \frac{e^{-m_\omega r}}{r}\right) - \frac{1}{2}[\kappa_\omega\kappa_\rho + \frac{1}{2}(\kappa_\omega + \kappa_\rho)]\right. \\ &\left.\left(\frac{m_\rho^2}{M^2}\frac{e^{-m_\rho r}}{r} - \frac{m_\omega^2}{M^2}\frac{e^{-m_\omega r}}{r}\right) - \frac{1}{16}\kappa_\omega\kappa_\rho\left(\frac{m_\rho^4}{M^4}\frac{e^{-m_\rho r}}{r} - \frac{m_\omega^4}{M^4}\frac{e^{-m_\omega r}}{r}\right)\right\}\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\Delta V_{\pi\eta}(r) = \frac{g_\pi g_\eta}{4\pi}\frac{g_{\pi\eta}}{m_\eta^2 - m_\pi^2}\left(\frac{m_\rho^2}{M^2}\frac{e^{-m_\pi r}}{r} - \frac{m_\eta^2}{M^2}\frac{e^{-m_\omega r}}{r}\right). \tag{3.16}$$

Adicionando estes potenciais ao potencial de Reid, McNamee e seus colaboradores calcularam o comprimento de espalhamento próton-próton e nêutron-nêutron. Para um potencial de Reid puro, é encontrado um comprimento de espalhamento $a_{pp} = a_{nn} = 17.16$ fm. Quando estes potenciais, que quebram simetria de carga, são acrescentados, encontra-se uma diferença nos comprimentos de espalhamento para próton-próton e nêutron-nêutron ($\Delta a = |a_{nn}| - |a_{pp}|$). Os resultados teóricos e experimentais são apresentados na tabela 3.1. Nestes cálculos, foi tomado o valor $g_{\rho\omega} = -3850\text{MeV}^2$ para a constante de acoplamento $\rho^0 - \omega$ e $g_{\pi\eta} = -4200\text{MeV}^2$ para a constante de acoplamento $\pi^0 - \eta$. Nota-se que, apesar da inclusão dos potenciais que quebram simetria de carga, os resultados teóricos explicam somente cerca de 50% dos resultados experimentais. Além disso, deve-se observar que a contribuição $\rho^0 - \omega$ corresponde a mais de 90% do deslocamento, sendo, portanto, muito maior que a contribuição $\pi^0 - \eta$. Este resultado, acaba comprovando a afirmação feita anteriormente.

A dificuldade de se explicar teoricamente as medidas de observáveis de spin do espalhamento de neutrons polarizados por protons polarizados obtidas no IUCF [40], é outro exemplo da necessidade da utilização de potenciais que quebram simetria de carga. Adicionando a contribuição devida às trocas de um píon, de um ρ e à mistura $\rho^0 - \omega$, Miller, Thomas e Williams [41] conseguiram uma boa explicação dos resultados experimentais. Sendo que novamente a contribuição dominante foi a da mistura $\rho^0 - \omega$.

Tabela 3.1: Valores para o deslocamento no comprimento de espalhamento $\Delta a = |a_{nn}| - |a_{pp}|$

	Δa
mistura $\eta\pi$	0.06
mistura $\rho\omega$	0.83
total calculado	0.9
experimental	~ 2

Usando os potenciais (3.15) e (3.16), Blunden e Iqbal [5] calcularam os efeitos de quebra de simetria de carga em núcleos finitos. Além destes potenciais, eles incluíram forças que quebram simetria de carga vindas da interação spin-órbita e da diferença de massa nêutron-próton no potencial de troca de um píon. Em adição à troca de um píon, existem contribuições vindas da troca de dois pions. No entanto, estas últimas são muito pequenas.

No cálculo destas contribuições foram utilizadas funções de onda do oscilador harmônico, com o parâmetro do oscilador escolhido para fitar dados de espalhamento de elétrons. Fatores de forma hadrônicos foram incluídos, os quais modificam as funções de Yukawa presentes na equação (3.15). Sabe-se que os potenciais de troca de um méson não são apropriados para a região de curtas distâncias, e por isto fatores de forma são empregados. Adicionalmente, as funções de onda do oscilador são funções de onda de partículas independentes, portanto não incluem correlações. Assim, Blunden e Iqbal levaram em conta correlações de curto alcance simulando um caroço ("hardcore") no potencial, com a introdução de um corte na função de onda relativa a 0.5 fm. Em outras palavras, os nucleons não podem se aproximar entre si mais que 0.5 fm. Após este corte eles, obrigatoriamente, corrigem a normalização das funções de onda.

Os resultados obtidos são apresentados na tabela 3.2, onde é feita uma comparação com os dados para a discrepância entre resultados teóricos e experimentais (vide cap. anterior), obtidos por Sato [32]. Como constante de acoplamento $\rho^0 - \omega$, é utilizada aquela dada por McNamee e colaboradores, a qual seja

$$g_{\rho\omega} = -3850\text{MeV}^2. \tag{3.17}$$

Tabela 3.2: Contribuição dos potenciais que quebram simetria de carga em comparação com os resultados para a anomalia dados por Sato. Energias estão em keV

A	Estado	EDM	SkII	$\rho-\omega$	rest.	total
15	$1p_{3/2}^{-1}$	250	190	175	-9	166
	$1p_{1/2}^{-1}$	380	290	209	18	227
17	$1d_{5/2}$	300	190	129	-16	113
	$2s_{1/2}$	220	210	200	0	200
39	$2s_{1/2}^{-1}$	370	270	266	0	266
	$1d_{3/2}^{-1}$	540	430	257	18	275
41	$1f_{7/2}$	440	350	167	-17	150
	$2p_{3/2}$	380	340	238	-6	232

E para a constante de acoplamento da mistura $\pi^0-\eta$, é utilizado o valor

$$g_{\pi\eta} = -4200\text{MeV}^2. \tag{3.18}$$

Na primeira coluna tem-se o número de nucleons, na segunda, tem-se o estado de partícula ou de buraco envolvido, na terceira e quarta colunas, tem-se os resultados de Sato usando a Expansão da Matriz Densidade (EDM) e Skyrme II (SkII), na quinta coluna, tem-se a contribuição do potencial devido somente à troca $\rho^0-\omega$. Na sexta coluna tem-se a contribuição devida ao restante dos termos discutidos que quebram simetria de carga (mistura $\pi^0-\eta$, troca de um píon, troca de dois píons, etc). Na última coluna, tem-se a contribuição total dos termos que quebram simetria de carga. Deste modo, Blunden e Iqbal concluíram que os efeitos de quebra de simetria de carga podem explicar aproximadamente 75% da anomalia. Além disso, seus cálculos mostram que a contribuição dos termos ditos restantes é muito pequena, praticamente desprezível.

Em uma publicação mais recente, Miller [7] recalculou as diferenças de energias de ligação na aproximação de Blunden e Iqbal usando um valor maior para o elemento de matriz de mistura $\rho^0-\omega$, em conformidade com um resultado experimental mais recente e

preciso [6]. Usando este novo valor para a mistura, a saber,

$$\langle \rho^0 \mid H \mid \omega \rangle = -4500 \pm 60 \text{ MeV}^2, \tag{3.19}$$

Miller mostrou que o novo resultado do cálculo diminui ainda mais a anomalia.

3.3 Conclusão

Deve-se ressaltar a importância de uma possível resolução do velho problema da anomalia Nolen-Schiffer, utilizando a interação mista $\rho^0 - \omega$, que quebra a simetria de carga. Como foi visto, o potencial efetivo devido à mistura $\rho^0 - \omega$ a ser utilizado na estrutura da equação de Schrödinger, é uma tranformada de Fourier de uma aproximação não relativística do gráfico de troca de um bóson relevante para o espalhamento núcleon-núcleon, Fig (3.2). No entanto, está claro que as trocas mesônicas, incluindo a mistura $\rho^0 - \omega$, têm um caráter relativístico. Assim, por consistência, será interessante analisarmos a troca mista $\rho^0 - \omega$ sob o ponto de vista puramente relativístico. Para tanto, primeiramente é necessário uma descrição relativística da estrutura nuclear. No próximo capítulo, vamos apresentar dois modelos nucleares relativísticos. Ambos os modelos descrevem a estrutura nuclear na aproximação de partículas independentes.

Capítulo 4

Modelos Relativísticos

4.1 Introdução

A teoria tradicional da estrutura nuclear é baseada em descrições convencionais (não-relativísticas) usando a equação de Schrödinger e com a dinâmica determinada por interações efetivas estáticas de dois corpos entre os nucleons. Em alguns casos estas interações efetivas são obtidas, a partir da interação núcleon-núcleon livre, usando a teoria de Brueckner. Em outros, podem ser usadas interações efetivas fenomenológicas, para as quais se assume uma forma funcional conveniente, com parâmetros livres a serem determinados de modo a reproduzir os resultados experimentais. Há também a possibilidade de se obterem potenciais a partir de reduções não -relativísticas de amplitudes de troca de um méson. Estes são conhecidos como potenciais de troca de um méson (OBEP). Mais recentemente, há uma crença de que a pequena energia de ligação nuclear é gerada pelo forte cancelamento entre potenciais escalar e quadrivetorial de grande intensidade. Assim, apesar do sucesso de alguns cálculos não-relativísticos mais sofisticados usando interações efetivas, algumas discrepâncias com os dados experimentais permanecem, indicando que estes tratamentos encontraram suas limitações e estimulando a investigação de novas aproximações.

Arnold e Clark [42] e, posteriormente, Clark, Hamma, Mercer, Ray e Serot [43] mostraram que um tratamento fenomenológico satisfatório para o espalhamento elástico núcleon-núcleo é obtido usando uma teoria relativística para a estrutura nuclear baseada na equação de Dirac. Nesse tratamento, a estrutura nuclear é descrita pela equação de Dirac

$$\left[\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta\left(m + U_s(r)\right) + U_v^0(r)\right]\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}) = E_a\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}), \tag{4.1}$$

onde $U_s(r)$ e $U_v^0(r)$ representam potenciais escalar e vetorial (componente temporal).

Inspirados por estes sucessos obtidos com a equação de Dirac no espalhamento próton-núcleo, Nedjadi e Rook [11] investigaram o efeito de se usar uma descrição relativística para a estrutura nuclear nas diferenças de energia coulombiana de núcleos espelho. Estes autores efetuaram uma redução da equação de Dirac, com os potenciais acima definidos, para uma equação de Schrödinger equivalente. Deve-se observar que o potencial obtido nesta transformação, para ser usado na equação de Schrödinger, torna-se dependente da energia. Isto é uma consequência natural desta redução , sem aproximações não relativísticas, da equação de Dirac para uma equação de Schrödinger. Resolvendo esta equação de Schrödinger equivalente, Nedjadi e Rook obtiveram as componentes superiores de $\mathcal{U}(\vec{x})$ para alguns núcleos de dupla camada fechada. Eles mostraram que a aplicação deste modelo relativístico leva a um acordo com a experiência de qualidade equivalente aos mais sofisticados tratamentos não-relativísticos com forças dependentes da densidade. Adicionalmente, eles estudaram a anomalia Nolen-Schiffer, obtendo resultados semelhantes aos dos cálculos convencionais não relativísticos.

Nas próximas 2 seções analisaremos os modelos relativísticos de Nedjadi e Rook e de Walecka para avaliarmos os efeitos da estrutura nuclear relativística nos núcleos de camada fechada ^{16}O e ^{40}Ca. No capítulo seguinte empregaremos estes modelos para avaliar o efeito da mistura $\rho^0 - \omega$ nas energias de ligação de núcleos espelho.

4.2 Modelo de Nedjadi e Rook

Considerando o sistema esfericamente simétrico e com paridade bem definida, Nedjadi e Rook tomam para os potenciais U_s e U_v^0 uma forma de Woods-Saxon com respectivos raios R_s, R_v, parâmetro de difusividade a_s, a_v e profundidade V_s, V_v. Para protons, Nedjadi e Rook tomam adicionalmente um potencial de Coulomb correspondendo a uma esfera uniformemente carregada de raio R_c (2.41,2.42),

$$V_c(r) = \begin{cases} \frac{Ze^2}{R_c}\left\{1 + \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{r}{R_c}\right)^2\right]\right\} & r < R_c \\ \frac{Ze^2}{r} & r > R_c, \end{cases} \tag{4.2}$$

onde Z é o número atômico do núcleo de camadas fechadas e

$$R_c = 1.25A^{1/3}. \tag{4.3}$$

Estendemos aqui o modelo original incluindo os efeitos dos momentos magnéticos anômalos do próton e do nêutron. Estes são levados em conta com o acréscimo do termo $-\beta i\vec{\alpha}.\nabla\mathcal{V}(r)$, onde

$$\mathcal{V}(r) = \left(\kappa_p\frac{(1+\tau_3)}{2} + \kappa_n\frac{(1-\tau_3)}{2}\right)V_c(r), \tag{4.4}$$

com $\kappa_p = 1.79$ e $\kappa_n = -1.91$ sendo os momentos magnéticos anômalos do próton e do nêutron, respectivamente. Isto leva a

$$\mathcal{H}\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}) = E_a\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}), \tag{4.5}$$

com $\mathcal{H}$ dado por

$$\mathcal{H} = \left[-i\vec{\alpha}.\nabla + \mathcal{W}(r) + \beta\left(M - U_s(r) - i\vec{\alpha}.\nabla\mathcal{V}(r)\right)\right], \tag{4.6}$$

onde definiu-se

$$\mathcal{W}(r) = U_v^0(r) - \frac{1}{2}(1+\tau_3)V_c(r). \tag{4.7}$$

Já que que o sistema é esfericamente simétrico e com paridade bem definida, o rótulo α carrega os usuais números quânticos de momento angular e paridade, além da projeção de isospin ($\alpha = \{a, m\} = \{n, \kappa, m, t\}$).

Neste ponto nos separamos do procedimento de Nedjadi e Rook. Seguimos agora o procedimento de Serot e Walecka [9], o qual consiste em obter duas equações acopladas para as componentes, superior e inferior. Seguindo [9], escrevemos para $\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})$

$$\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}) = \begin{pmatrix} i\frac{G_{n\kappa t}}{r}\Phi_{\kappa m} \\ -\frac{F_{n\kappa t}}{r}\Phi_{-\kappa m} \end{pmatrix}\zeta_t, \tag{4.8}$$

onde

$$\Phi_{\kappa m} = \sum_{m_l m_s}\langle l m_l \frac{1}{2} m_s \mid l\frac{1}{2} j m\rangle Y_{l m_l}(\theta\phi)\xi_{m_S} \tag{4.9}$$

$$j = \mid \kappa \mid -\tfrac{1}{2} \qquad l = \begin{cases} \kappa & \kappa > 0 \\ -(\kappa+1) & \kappa < 0, \end{cases}$$

sendo $-\kappa$ o autovalor do operador K definido como

$$K = \gamma_0 \left[\vec{\Sigma}.\vec{J} - \frac{1}{2}\right] = \gamma_0 \left[\vec{\Sigma}.\vec{L} + 1\right], \tag{4.10}$$

com

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

ξ_{m_s} é um espinor de Pauli de duas componentes e ζ_t é um iso-espinor de duas componentes. Considerando-se que

$$-i\vec{\alpha}.\nabla = \vec{\alpha}.\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}.\vec{p} \\ \vec{\sigma}.\vec{p} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

e

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}.\vec{p}f(|\,\vec{r}\,|) &= -i\frac{\vec{\sigma}.\hat{r}}{r}\left(r\frac{\partial}{\partial r} - \vec{\sigma}.\vec{L}\right) f(|\,\vec{r}\,|) \\ &= -i\vec{\sigma}.\hat{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

obtém-se a equação

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}.\vec{p} \\ \vec{\sigma}.\vec{p} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{W}(r) & 0 \\ 0 & \mathcal{W}(r) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M - U_s & -i\vec{\sigma}.\hat{r}\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}}{\mathrm{d}r} \\ i\vec{\sigma}.\hat{r}\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}}{\mathrm{d}r} & -(M - U_s) \end{pmatrix}\right\} \begin{pmatrix} i\frac{G_{n\kappa t}}{r}\Phi_{\kappa m} \\ -\frac{F_{n\kappa t}}{r}\Phi_{-\kappa m} \end{pmatrix} = E_{n\kappa t} \begin{pmatrix} i\frac{G_{n\kappa t}}{r}\Phi_{\kappa m} \\ -\frac{F_{n\kappa t}}{r}\Phi_{-\kappa m} \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Usando-se, então, os seguintes resultados

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}.\hat{r}\Phi_{\pm\kappa m} &= -\Phi_{\mp\kappa m} \\ \vec{\sigma}.\vec{p}i\frac{G_{n\kappa t}}{r}\Phi_{\kappa m} &= -\frac{1}{r}\left(\frac{\mathrm{d}G_{n\kappa t}}{\mathrm{d}r} + \kappa\frac{G_{n\kappa t}}{r}\right)\Phi_{-\kappa m} \\ \vec{\sigma}.\vec{p}\frac{F_{n\kappa t}}{r}\Phi_{-\kappa m} &= \frac{i}{r}\left(\frac{\mathrm{d}F_{n\kappa t}}{\mathrm{d}r} - \kappa\frac{F_{n\kappa t}}{r}\right)\Phi_{\kappa m}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

obtêm-se as equações radiais

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \frac{\kappa}{r} + \frac{\mathrm{d}\mathcal{V}}{\mathrm{d}r}\right) F_{n\kappa t} + \left(E_{n\kappa t} - \mathcal{W} - M + U_s\right) G_{n\kappa t} = 0 \tag{4.16}$$

e

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+\frac{\kappa}{r}-\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}}{\mathrm{d}r}\right)G_{n\kappa t}-\left(E_{n\kappa t}-\mathcal{W}+M-U_s\right)F_{n\kappa t}=0. \tag{4.17}$$

Estas são as equações diferenciais lineares acopladas cujas soluções nos fornecem as funções de onda relativísticas de partícula única com potenciais de Woods-Saxon.

4.2.1 Resultados Numéricos

Na resolução da equação de Dirac com potenciais de Woods-Saxon, os parâmetros usados para o ^{16}O são

$$\begin{aligned} V_s &= -473.5\text{MeV}, \quad R_s = 3.9\text{fm}, \quad a_s = 0.6\text{fm}, \\ V_v^0 &= 398.5\text{MeV}, \quad R_v = 3.9\text{fm}, \quad a_v = 0.6\text{fm}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

e para o ^{40}Ca são

$$\begin{aligned} V_s &= -457.2\text{MeV}, \quad R_s = 3.95\text{fm}, \quad a_s = 0.8\text{fm}, \\ V_v^0 &= 378.5\text{MeV}, \quad R_v = 3.95\text{fm}, \quad a_v = 0.8\text{fm}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Estas constantes são escolhidas de modo a se obter o melhor ajuste possível às energias de partícula única e ao raio médio quadrático de carga de cada sistema. Os resultados numéricos para o ^{16}O e para o ^{40}Ca são apresentados nas tabelas 4.1 e 4.2, respectivamente.

Tabela 4.1: Espectro de partícula única para o ^{16}O (Energias em MeV)

	Exp.[44]		W-S	
	p	n	p	n
$1s_{1/2}$	-40.±8	—	-38.241	-42.515
$1p_{3/2}$	-18.4	-21.8	-18.293	-22.211
$1p_{1/2}$	-12.1	-15.7	-11.408	-15.263
$1d_{5/2}$	-0.6	-4.17	-1.030	-4.414
$2s_{1/2}$	-0.1	-3.27	0.000	-3.531
$\langle r^2\rangle^{1/2}$	2.73	—	2.65	2.60

Tabela 4.2: Espectro de partícula única para o ^{40}Ca (Energias em MeV)

	Exp.[45]		W-S	
	p	n	p	n
$1s_{1/2}$	-48.5±5.0	—	-46.402	-54.473
$1p_{3/2}$	-36.0±3.0	—	-30.655	-38.322
$1p_{1/2}$	-31.5±3.5	—	-26.504	-34.192
$1d_{5/2}$	-16.0±2.0	—	-15.481	-22.709
$2s_{1/2}$	-12.0±1.0	-18.1	-10.224	-17.268
$1d_{3/2}$	-8.5±2.0	-15.6	-9.347	-16.505
$1f_{7/2}$	-1.4	-8.36	-1.661	-8.279
$\langle r^2\rangle^{1/2}$	3.49	—	3.46	3.39

4.3 Modelo de Walecka

Um novo formalismo para a estrutura nuclear, apresentado por Walecka [9], vem tendo bastante sucesso nos últimos anos. Ele é baseado nos métodos da teoria quântica de campos relativística. Neste formalismo nucleons interagem através da troca de mesons virtuais e, consequentemente, os potencias estáticos não são introduzidos. Esse novo tratamento teórico do núcleo, mais completo e consistente, envolve graus de liberdade dados pelos bárions (p-próton, n-nêutron, ...) e mesons (π, σ, ω, ρ, ...). Como estas partículas são denominadas hadrons, em analogia à Eletrodinâmica Quântica, onde os graus de liberdade são o elétron e o fóton, esta descrição de sistemas de muitos hadrons é denominada Hadrodinâmica Quântica (QHD). É claro que alguns dos métodos tradicionais, não-relativisticos, como métodos variacionais, soma seletiva de diagramas, etc., podem ser imediatamente absorvidos pelo novo formalismo.

O modelo contém nucleons (ψ) interagindo com mesons escalares (ϕ) através de um acoplamento tipo Yukawa ($\overline{\psi}\psi\phi$) e com mesons vetoriais neutros (V_μ) que se acoplam à corrente bariônica conservada ($\overline{\psi}\gamma_\mu\psi$). A densidade de lagrangiana para este modelo é [46]

$$\mathcal{L}_I = \overline{\psi}\left\{\gamma_\mu\left[i\partial^\mu - g_\omega V^\mu - g_\rho\vec{\tau}.\vec{b}^\mu - e\frac{1}{2}(1+\tau_3)A^\mu\right] - (M - g_s\phi - g_\pi\gamma_5\vec{\tau}.\vec{\pi})\right\}\psi$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m_s^2\phi_0^2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}}{2} - m_\omega^2 V_\mu V^\mu\right)\\
&-\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{B}_{\mu\nu}.\vec{B}^{\mu\nu}}{2} - m_\rho^2\vec{b}_\mu\vec{b}^\mu\right) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\\
&+\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\vec{\pi}\partial^\mu\vec{\pi} - m_s^2\vec{\pi}.\vec{\pi}\right) - eA_\mu\left[\left(\vec{b}_\nu\wedge\vec{B}^{\nu\mu}\right)_3 + \left(\vec{\pi}\wedge\left(\partial^\mu\vec{\pi} + g_\rho(\vec{\pi}\wedge\vec{b}^\mu)\right)\right)_3\right]
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

com M, m_σ, m_ω, m_ρ e m_π sendo as massas do núcleon, méson escalar, méson vetorial iso-escalar (ω), méson vetorial isovetorial (ρ) e méson pseudo-escalar isovetorial (π), respectivamente. g_σ, g_ω, g_ρ e g_π são as constantes de acoplamento dos respectivos mesons σ, ω, ρ e π. Finalizando, os tensores de campo $F_{\mu\nu}$, $G_{\mu\nu}$ e $B_{\mu\nu}$ são dados por

$$
F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{4.21}
$$

$$
G_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu \tag{4.22}
$$

$$
\vec{B}_{\mu\nu} = \partial_\mu\vec{b}_\nu - \partial_\nu\vec{b}_\mu - g_\rho(\vec{b}_\mu\wedge\vec{b}_n u). \tag{4.23}
$$

Em adição vamos incluir os momentos magnéticos anômalos do próton e do nêutron devidos ao fóton e aos mesons vetoriais ρ^0 e ω. Neste caso, a densidade de lagrangiana apropriada para o modelo, fica escrita como

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{II} = {} & \overline{\psi}\left\{\gamma_\mu\left[i\partial^\mu - g_\omega V^\mu - g_\rho\vec{\tau}.\vec{b}^\mu - e\frac{1}{2}(1+\tau_3)A^\mu\right] - (M - g_s\phi - g_\pi\gamma_5\vec{\tau}.\vec{\pi})\right\}\psi\\
&+\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m_s^2\phi_0^2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}}{2} - m_\omega^2 V_\mu V^\mu\right)\\
&-\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{B}_{\mu\nu}.\vec{B}^{\mu\nu}}{2} - m_\rho^2\vec{b}_\mu.\vec{b}^\mu\right) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\\
&+\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\vec{\pi}.\partial^\mu\vec{\pi} - m_\pi^2\vec{\pi}.\vec{\pi}\right) - eA_\mu\left[\left(\vec{b}_\nu\wedge\vec{B}^{\nu\mu}\right)_3 + \left(\vec{\pi}\wedge\left(\partial^\mu\vec{\pi} + g_\rho(\vec{\pi}\wedge\vec{b}^\mu)\right)\right)_3\right]\\
&-i\frac{1}{2}\frac{e}{2M}\kappa_p F_{\mu\nu}\overline{\psi}\frac{(1+\tau_3)}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi - i\frac{1}{2}\frac{e}{2M}\kappa_n F_{\mu\nu}\overline{\psi}\frac{(1-\tau_3)}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi\\
&-i\frac{1}{2}\frac{g_\omega}{2M}\kappa_\omega G_{\mu\nu}\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi - i\frac{1}{2}\frac{g_\rho}{2M}\kappa_\rho B_{\mu\nu}\overline{\psi}\tau_3\gamma^\mu\gamma^\nu\psi,
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

onde os termos extras $\kappa_p = 1.79$, $\kappa_n = -1.91$, $\kappa_\omega = -0.12$ e $\kappa_\rho = 3.7$ são os momentos magnéticos anômalos para o próton, nêutron e mesons omega e rho, respectivamente.

4.3.1 Equações de Movimento

As equações de movimento são obtidas a partir das equações de Euler-Lagrange. Para o campo bariônico tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} &= \left\{\gamma_\mu \left[i\partial^\mu - g_\omega V^\mu - g_\rho \vec{\tau}.\vec{b}^\mu - e\frac{1}{2}(1+\tau_3)A^\mu\right] - (M - g_s\phi - g_\pi\gamma_5\vec{\tau}.\vec{\pi})\right\}\psi + \\
&\quad -i\frac{1}{2}\frac{e}{2M}\kappa_p F_{\mu\nu}\frac{(1+\tau_3)}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi - \frac{1}{2}i\frac{e}{2M}\kappa_n F_{\mu\nu}\frac{(1-\tau_3)}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi \\
&\quad -i\frac{1}{2}\frac{g_\omega}{2M}\kappa_\omega G_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi - i\frac{1}{2}\frac{g_\rho}{2M}\kappa_\rho B_{\mu\nu}\tau_3\gamma^\mu\gamma^\nu\psi, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\overline{\psi})} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Portanto, as equações de Euler-Lagrange implicam em que o campo bariônico satisfaça a seguinte equação de Dirac:

$$\begin{aligned}
&\left\{\gamma_\mu \left[i\partial^\mu - g_\omega V^\mu - g_\rho \vec{\tau}.\vec{b}^\mu - e\frac{1}{2}(1+\tau_3)A^\mu\right] - (M - g_s\phi - g_\pi\gamma_5\vec{\tau}.\vec{\pi})\right\}\psi = \\
&i\left[\left(\frac{1}{2}\frac{e}{2M}\kappa_p\frac{(1+\tau_3)}{2} + \frac{1}{2}\frac{e}{2M}\kappa_n\frac{(1-\tau_3)}{2}\right)F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\frac{g_\omega}{2M}\kappa_\omega G_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\frac{g_\rho}{2M}\kappa_\rho B_{\mu\nu}\tau_3\right]\gamma^\mu\gamma^\nu\psi.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Agindo de modo análogo para os campos mesônicos, obtém-se para o campo escalar

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= g_\sigma\overline{\psi}\psi - m_\sigma^2\phi, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} &= \partial_\mu\phi
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m_\sigma^2)\phi = g_\sigma\overline{\psi}\psi. \tag{4.27}$$

Agora, já que

$$\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu V_\nu)} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}, \tag{4.28}$$

para o campo vetorial ω, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu V_\nu)} &= -G^{\mu\nu} + \frac{g_\omega}{2M}\kappa_\omega\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_\nu} &= -g_\omega\overline{\psi}\gamma^\nu\psi + m_\omega^2 V^\nu
\end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} + m_\omega^2 V^\nu = g_\omega \left(\overline{\psi}\gamma^\nu\psi + \frac{\kappa_\omega}{2M}\partial_\mu\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi \right), \tag{4.29}$$

onde $2i\sigma^{\mu\nu} = (\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$. Da conservação da corrente bariônica, $\partial_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu\psi = 0$, e da antissimetria de $G^{\mu\nu}$ e $\sigma^{\mu\nu}$, pode-se reescrever esta equação como

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m_\omega^2)V^\nu = g_\omega \left(\overline{\psi}\gamma^\nu\psi + \frac{\kappa_\omega}{2M}\partial_\mu\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi \right). \tag{4.30}$$

De modo análogo, para o campo ρ, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\vec{b}_\nu)} &= -\vec{B}^{\mu\nu} - e\left[A^\mu(\vec{b}^\nu \wedge \hat{z}) - A^\nu(\vec{b}^\mu \wedge \hat{z})\right] + \frac{g_\rho}{2M}\kappa_\rho\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{b}_\nu} &= -g_\rho\overline{\psi}\gamma^\nu\vec{\tau}\psi + m_\rho^2\vec{b}^\nu - g_\rho\vec{b}_\mu \wedge \vec{B}^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

onde $\hat{z}$ representa o vertor unitário na direção z do espaço de isospin. Destes resultados tem-se

$$\begin{aligned} \partial_\mu\vec{B}^{\mu\nu} + m_\rho^2\vec{b}^\nu &= g_\rho\left(\overline{\psi}\gamma^\nu\tau_3\psi + \vec{b}_\mu \wedge \vec{B}^{\mu\nu} + \frac{\kappa_\rho}{M}\partial_\mu\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\tau_3\psi\right) \\ &\quad -e\partial_\mu\left[A^\mu(\vec{b}^\nu \wedge \hat{z}) - A^\nu(\vec{b}^\mu \wedge \hat{z})\right]. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Para o píon tem-se

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m_\pi^2)\vec{\pi} = g_\pi\overline{\psi}\gamma^5\vec{\tau}\psi - \partial_\mu A^\mu(\vec{\pi} \wedge \hat{z}) + eA_\mu\left(b_0^\mu\vec{\pi} + \vec{\pi}.\vec{b}^\mu\hat{z} + \pi_0\vec{b}^\mu + (\partial^\mu\vec{\pi} \wedge \hat{z})\right) \tag{4.32}$$

e para o campo eletromagnético,

$$\begin{aligned} \partial_\mu\partial^\mu A^\nu &= e\left(\overline{\psi}\gamma^\nu\frac{(1+\tau_3)}{2}\psi + \frac{\kappa_p}{2M}\partial_\mu\overline{\psi}\frac{(1+\tau_3)}{2}\sigma^{\mu\nu}\psi + \frac{\kappa_n}{2M}\partial_\mu\overline{\psi}\frac{(1-\tau_3)}{2}\sigma^{\mu\nu}\psi\right) \\ &\quad +e\left[\left(\vec{b}_\nu \wedge \vec{B}^{\nu\mu}\right)_3 + \left(\vec{\pi} \wedge \left(\partial^\mu\vec{\pi} + g_\rho(\vec{\pi} \wedge \vec{b}^\mu)\right)\right)_3\right]. \end{aligned} \tag{4.33}$$

4.3.2 Aproximação de Hartree

Já que as equações (4.26)-(4.33) são equações de campo quânticas não lineares, suas soluções exatas são extremamente complicadas. Além disso, como as constantes de acoplamento g_σ, g_ω e g_ρ são grandes, soluções perturbativas não são permitidas. Entretanto, algumas simplificações podem ser feitas. Consideremos um sistema esfericamente simétrico de bárions.

Com o aumento da densidade bariônica os termos de fonte (lado direito das equações 4.27 - 4.33) dos campos mesônicos e fotônico tornam-se grandes. Com estes termos suficientemente grandes é possível substituir os operadores dos campos de mesons e do fóton por seus valores esperados no "vácuo". Já que o vácuo, em nosso caso o núcleo de um átomo, tem a paridade como bom número quântico, objetos pseudo-escalares como o píon têm seu valor esperado nulo. Adicionalmente sabemos que todos os núcleos tem uma carga elétrica bem definida. Portanto objetos carregados como os mesons $\rho^{\pm}$ tem seu valor esperado nulo neste vácuo. Este método de simplificação, conhecido como Aproximação de Campo Médio (ACM), pode ser resumido atraves das seguintes aproximações:

$$\begin{aligned}
\phi &\rightarrow \langle\phi\rangle \equiv \phi_0(r) \\
V_\mu &\rightarrow \langle V_\mu\rangle \equiv \delta_{\mu 0} V_0(r) \\
\vec{b}_\mu &\rightarrow \langle\vec{b}_\mu\rangle \equiv \delta_{\mu 0} b_0(r) \\
A_\mu &\rightarrow \langle A_\mu\rangle \equiv \delta_{\mu 0} A_0(r) \\
\vec{\pi} &\rightarrow \langle\vec{\pi}\rangle = 0,
\end{aligned}$$

com $r = \mid \vec{r} \mid$ e onde está sendo considerado que os campos são estáticos. Usando estes resultados podemos reescrever as equações (4.27 - 4.33) como

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - m_\sigma^2\right)\phi(r) = -g_\sigma\langle\overline{\psi}\psi\rangle \tag{4.34}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - m_\omega^2\right)V_0(r) = -g_\omega\left(\langle\overline{\psi}\gamma^0\psi\rangle - \frac{\kappa_\omega}{2M}\langle\partial\overline{\psi}\sigma^{\mu 0}\psi\rangle\right) \tag{4.35}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - m_\rho^2\right)b_0(r) = -g_\rho\left(\langle\overline{\psi}\gamma^0\tau_3\psi\rangle - \frac{\kappa_\rho}{2M}\langle\partial\overline{\psi}\sigma^{\mu 0}\tau_3\psi\rangle\right) \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)A_0(r) &= -e\left(\langle\overline{\psi}\gamma^0\frac{(1+\tau_3)}{2}\psi\rangle - \frac{\kappa_p}{2M}\langle\partial\overline{\psi}\sigma^{\mu 0}\frac{(1+\tau_3)}{2}\psi\rangle\right. \\
&\left. - \frac{\kappa_n}{2M}\langle\partial\overline{\psi}\sigma^{\mu 0}\frac{(1-\tau_3)}{2}\psi\rangle\right),
\end{aligned} \tag{4.37}$$

onde estamos considerando o fato que a carga fica confinada nas linhas de fermions, consequentemente tem-se, além da conservação da corrente bariônica, a conservação da corrente de carga, $\partial_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu\tau_3\psi = 0$. Agora, neste caso,

$$F_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu = -2\vec{\alpha}.\nabla A_0, \tag{4.38}$$

$$G_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} = -2\vec{\alpha}.\nabla V_0 \tag{4.39}$$

e

$$B_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} = -2\vec{\alpha}.\nabla b_0. \tag{4.40}$$

Assim, a equação para o campo bariônico, (4.26), fica reescrita como

$$\left\{i\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - g_{\omega}\gamma_0 V_0 - g_{\rho}\tau_3\gamma_0 b_0 - e\frac{1}{2}(1+\tau_3)\gamma_0 A_0 - (M - g_s\phi)\right\}\psi =$$
$$-i\left[\frac{e}{2M}\left(\kappa_p\frac{(1+\tau_3)}{2} + \kappa_n\frac{(1-\tau_3)}{2}\right)\vec{\alpha}.\nabla A_0 + \frac{g_{\omega}}{2M}\kappa_{\omega}\vec{\alpha}.\nabla V_0 + \frac{g_{\rho}}{2M}\kappa_{\rho}\tau_3\vec{\alpha}.\nabla b_0\right]\psi. \tag{4.41}$$

A equação (4.41) é linear no operador de campo bariônico, pois os campos mesônicos são, agora, campos clássicos. Neste caso, em analogia à equação de Dirac livre, pode-se encontrar soluções da forma

$$\psi(x) = \sum_{\alpha} A_{\alpha}\mathcal{U}_{\alpha}(\vec{x})\exp(-iE_a t). \tag{4.42}$$

Esta leva a

$$\mathcal{H}\mathcal{U}_{\alpha}(\vec{x}) = E_a\mathcal{U}_{\alpha}(\vec{x}), \tag{4.43}$$

com $\mathcal{H}$ dado por

$$\mathcal{H} = \left[-i\vec{\alpha}.\nabla + \mathcal{W}_{ACM}(r) + \beta\left(M - g_{\sigma}\phi_0 - i\vec{\alpha}.\nabla\mathcal{V}_{ACM}(r)\right)\right], \tag{4.44}$$

onde definimos

$$\mathcal{W}_{ACM}(r) = g_{\omega}V_0(r) + g_{\rho}\tau_3 b_0(r) + e\frac{1}{2}(1+\tau_3)A_0(r) \tag{4.45}$$

$$\mathcal{V}_{ACM}(r) = \frac{e}{2M}\left(\kappa_p\frac{(1+\tau_3)}{2} + \kappa_n\frac{(1-\tau_3)}{2}\right)A_0(r) + \frac{g_{\omega}}{2M}\kappa_{\omega}V_0(r) + \frac{g_{\rho}}{2M}\kappa_{\rho}\tau_3 b_0(r). \tag{4.46}$$

De forma análoga ao que foi feito anteriormente, obtemos a seguintes equações acopladas:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \frac{\kappa}{r} + \frac{\mathrm{d}\mathcal{V}_{ACM}}{\mathrm{d}r}\right)F_{n\kappa t} + \left(E_{n\kappa t} - \mathcal{W}_{ACM} - M + g_{\sigma}\phi_0\right)G_{n\kappa t} = 0 \tag{4.47}$$

e

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + \frac{\kappa}{r} - \frac{\mathrm{d}\mathcal{V}_{ACM}}{\mathrm{d}r}\right)G_{n\kappa t} - \left(E_{n\kappa t} - \mathcal{W}_{ACM} + M - g_{\sigma}\phi_0\right)F_{n\kappa t} = 0 \tag{4.48}$$

Resta calcularmos os termos de fonte nas equações (4.34)-(4.37). Tratando primeiramente dos termos já conhecidos [9], temos

$$\begin{aligned}
\langle\overline{\psi}\psi\rangle &= \sum_{\alpha}\overline{\mathcal{U}}_{\alpha}(\vec{x})\mathcal{U}_{\alpha}(\vec{x})\langle A_{\alpha}^{\dagger}A_{\alpha}\rangle \\
&= \sum_{\alpha=n\kappa mt}^{ocupados}\Phi_{\kappa m}^{\dagger}\begin{pmatrix} -i\frac{G_{n\kappa t}}{r} & \frac{F_{n\kappa t}}{r}\vec{\sigma}\hat{r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i\frac{G_{n\kappa t}}{r} \\ -\frac{F_{n\kappa t}}{r}\vec{\sigma}\hat{r}\end{pmatrix}\Phi_{\kappa m} \\
&= \sum_{a=n\kappa t}^{ocupados}\frac{1}{r^2}\left(\mid G_{n\kappa t}\mid^2 - \mid F_{n\kappa t}\mid^2\right)\sum_{m=-j}^{j}\Phi_{\kappa m}^{\dagger}\Phi_{\kappa m} \\
&= \sum_{a=n\kappa t}^{ocupados}\left(\frac{2j_{\kappa}+1}{4\pi r^2}\right)\left(\mid G_{n\kappa t}\mid^2 - \mid F_{n\kappa t}\mid^2\right). \qquad (4.49)
\end{aligned}$$

De modo análogo

$$\langle\psi^{\dagger}\psi\rangle = \sum_{a=n\kappa t}^{ocupados}\left(\frac{2j_{\kappa}+1}{4\pi r^2}\right)\left(\mid G_{n\kappa t}\mid^2 + \mid F_{n\kappa t}\mid^2\right) \qquad (4.50)$$

$$\langle\psi^{\dagger}\tau_3\psi\rangle = \sum_{a=n\kappa t}^{ocupados}\left(\frac{2j_{\kappa}+1}{4\pi r^2}\right)\left(\mid G_{n\kappa t}\mid^2 + \mid F_{n\kappa t}\mid^2\right)2t \qquad (4.51)$$

$$\langle\psi^{\dagger}\frac{(1+\tau_3)}{2}\psi\rangle = \sum_{a=n\kappa t}^{ocupados}\left(\frac{2j_{\kappa}+1}{4\pi r^2}\right)\left(\mid G_{n\kappa t}\mid^2 + \mid F_{n\kappa t}\mid^2\right).(t+1/2) \qquad (4.52)$$

Calculemos, agora, os termos devidos aos momentos magnéticos anômalos. Temos,

$$\begin{aligned}
\langle\partial_{\mu}\overline{\psi}\sigma^{\mu 0}\psi\rangle &= \sum_{\alpha}\overline{\mathcal{V}}_{\alpha}(\vec{x})\sigma^{\mu 0}\mathcal{V}_{\alpha}(\vec{x})\langle A_{\alpha}^{\dagger}A_{\alpha}\rangle \\
&= i\partial_i\sum_{\alpha=n\kappa mt}^{ocupados}\Phi_{\kappa m}^{\dagger}\begin{pmatrix} -i\frac{G_{n\kappa t}}{r} & \frac{F_{n\kappa t}}{r}\vec{\sigma}\hat{r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i\frac{G_{n\kappa t}}{r} \\ -\frac{F_{n\kappa t}}{r}\vec{\sigma}\hat{r}\end{pmatrix}\Phi_{\kappa m} \\
&= -\partial_i\sum_{\alpha=n\kappa mt}^{ocupados}\frac{G_{n\kappa t}F_{n\kappa t}}{r^2}\Phi_{\kappa m}^{\dagger}\left(\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i\right)\frac{r^j}{r}\Phi_{\kappa m} \\
&= -\sum_{a=n\kappa t}^{ocupados}\left(\frac{2j_{\kappa}+1}{2\pi}\right)\nabla.\left(\frac{G_{n\kappa t}F_{n\kappa t}}{r^3}\vec{r}\right). \qquad (4.53)
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\nabla.\left(\frac{G_{n\kappa t}F_{n\kappa t}}{r^3}\vec{r}\right) &= \nabla\left(\frac{G_{n\kappa t}F_{n\kappa t}}{r^3}\right).\vec{r} + \frac{G_{n\kappa t}F_{n\kappa t}}{r^3}\nabla.\vec{r} \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}(GF)}{\mathrm{d}r}. \qquad (4.54)
\end{aligned}$$

Assim, finalmente encontramos

$$\langle \partial_\mu \overline{\psi} \sigma^{\mu 0} \psi \rangle = -2 \sum_{a=n\kappa t}^{ocupados} \left(\frac{2j_\kappa + 1}{4\pi r^2} \right) \frac{\mathrm{d}(GF)}{\mathrm{d}r}. \tag{4.55}$$

De modo análogo,

$$\langle \partial_\mu \overline{\psi} \sigma^{\mu 0} \tau_3 \psi \rangle = -2 \sum_{a=n\kappa t}^{ocupados} \left(\frac{2j_\kappa + 1}{4\pi r^2} \right) \frac{\mathrm{d}(GF)}{\mathrm{d}r} 2t \tag{4.56}$$

$$\langle \partial_\mu \overline{\psi} \sigma^{\mu 0} \frac{(1 \pm \tau_3)}{2} \psi \rangle = -2 \sum_{a=n\kappa t}^{ocupados} \left(\frac{2j_\kappa + 1}{4\pi r^2} \right) \frac{\mathrm{d}(GF)}{\mathrm{d}r} \left(\frac{1}{2} \pm t \right) \tag{4.57}$$

A condição de normalização que gera probabilidade 1 de encontrar o núcleon em algum lugar no espaço é

$$\int_0^\infty \mathrm{d}r \left(|G_{n\kappa t}(r)|^2 + |F_{n\kappa t}(r)|^2 \right) = 1. \tag{4.58}$$

As equações (4.34-4.37) e (4.47-4.48) são equações diferenciais acopladas as quais podem ser resolvidas por um processo autoconsistente. Elas contêm todas as informações a respeito do estado fundamental do núcleo nesta aproximação. Para um dado conjunto de campos de mesons iniciais (na verdade a entrada inicial para os campos mesônicos é escolhida para ser representada por potenciais de Woods-Saxon apropriados), as equações de Dirac (4.47-4.48) podem ser resolvidas utilizando um procedimento padrão do cálculo numérico [47]. A integração é feita indo da origem até um ponto intermediário e vindo do infinito, ou melhor, de um ponto suficientemente distante, para o mesmo ponto intermediário. Ajustando-se o autovalor E é possível casar, neste ponto intermediário, essas duas soluções, encontrando, assim, um determinado autovalor e a autofunção associada. As soluções analíticas nas regiões de r pequeno e r grande permitem impor as apropriadas condições de contorno.

Uma vez determinada a função de onda bariônica, os termos de fonte podem ser calculados e os campos mesônicos recomputados resolvendo-se as equações (4.34-4.37). Por exemplo, para o campo escalar tem-se

$$\phi_0(r) = \int_0^\infty r'^2 \mathrm{d}r' [-g_s \langle \overline{\psi} \psi \rangle_{r'}] \Delta(r, r', m_s), \tag{4.59}$$

onde $\Delta(r, r', m_s)$ é o propagador ou função de Green estática do méson escalar. Na sua forma geral (para qualquer campo mesônico) a função de Green estática é dada por [46]

$$\Delta(r, r', m_i) = -\frac{1}{m_i r r'} \sinh(m_i r_<) \exp(-m_i r_>), \tag{4.60}$$

onde é usada a seguinte notação

$$\text{se } r > r' \begin{cases} r_> = r \\ r_< = r' \end{cases} \tag{4.61}$$

$$\text{se } r < r' \begin{cases} r_> = r' \\ r_< = r \end{cases} \tag{4.62}$$

Deste modo obtidos, os campos mesônicos são novamente utilizados para se calcularem, através da resolução das equações de Dirac (4.47-4.48), as funções de onda dos nucleons. Esse processo iterativo só termina quando é encontrada a autoconsistência.

4.3.3 Aproximação de Hartree-Fock

Nesta seção, correções à teoria do campo médio devidas a termos de troca são introduzidas utilizando a aproximação relativística de Hartree-Fock. Estas correções devem, em princípio, serem incluídas pois contribuem para a energia de ligação. Em adição, contribuições devidas ao méson π que estão ausentes na teoria do campo médio (se o estado fundamental tem paridade bem definida), agora entram como correções nos termos de troca. Para derivar as equações de Hartree-Fock relativísticas de um modo sistemático, usa-se a equação de Dyson

$$G(x,x') = G^0(x,x') + \int \mathrm{d}^4y\mathrm{d}^4z G^0(x,z)\Sigma_{HF}(z,y)G(y,x'), \tag{4.63}$$

onde G (G^0) é o propagador (livre) do bárion. As contribuições de Hartree (direta) e Fock (troca) para a auto-energia Σ_{HF} podem ser separadas de acordo com

$$\Sigma_{HF}(z,y) = \Sigma_H(z)\delta(y-z) - \Sigma_F(z,y). \tag{4.64}$$

De acordo com a definição usual, temos

$$\begin{aligned} iG(x,y) &= \langle \Psi_0 \mid T[\psi(x)\overline{\psi}(y)] \mid \Psi_o \rangle \\ &= \sum_\alpha \mathcal{U}_\alpha(\vec{x})\overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{y})\mathrm{e}^{-i\epsilon_\alpha(x_0-y_0)}[\theta(x_0-y_0)\theta(\epsilon_\alpha-\epsilon_F) - \theta(y_0-x_0)\theta(\epsilon_F-\epsilon_\alpha)], \end{aligned} \tag{4.65}$$

onde $T[...]$ indica o produto ordenado no tempo e se faz uso de (4.42). Substituindo este resultado em (4.63) e negligenciando efeitos de retardamento, ou seja, colocando

$$\Sigma_F(x-y) = \delta(x_0 - y_0)\Sigma_F(\vec{x},\vec{y}) \tag{4.66}$$

encontra-se

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}) &= [-i\vec{\alpha}.\nabla + \beta(M+\Sigma_H)]\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}) - \beta\int \mathrm{d}^3y\Sigma_F(\vec{x},\vec{y})\mathcal{U}_\alpha(\vec{y}) \\ &= E_a\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}), \end{aligned} \tag{4.67}$$

onde se usam as propriedades

$$(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)G_0(x-y) = \delta(x-y) \tag{4.68}$$

e

$$\int \mathrm{d}^3y\mathcal{U}^*_\alpha(\vec{y})\mathcal{U}_\beta(\vec{y}) = \delta_{\alpha,\beta}. \tag{4.69}$$

A contribuição Σ_H representa os termos diretos e pode ser escrita, usando as regras de Feynman padrão, como

$$\begin{aligned} \Sigma_H(z) &= g_\sigma\langle\phi(z)\rangle - g_\omega\gamma_\mu\langle V^\mu(z)\rangle - g_\rho\gamma_\mu\vec{\tau}.\langle\vec{b}^\mu(z)\rangle \\ &\quad + g_\pi\gamma_5\vec{\tau}.\langle\vec{p}(z)\rangle - \frac{1}{2}e\gamma_\mu(1+\tau_3)\langle A^\mu(z)\rangle, \end{aligned} \tag{4.70}$$

onde não se está considerando os termos de momento magnético anômalo. Obviamente, na aproximação de campo médio para um núcleo esférico com a paridade como bom número quântico, obtém-se

$$\beta\Sigma_H^{ACM}(r) = \beta g_\sigma\phi_0(r) - g_\omega V^0(r) - g_\rho\tau_3 b^0(r) - \frac{1}{2}e(1+\tau_3)A^0(r), \tag{4.71}$$

que recupera a aproximação feita na seção anterior. De modo análogo, usando-se as regras de Feynman, é possivel obter-se os termos de troca [48], os quais são dados por

$$\begin{aligned} \Sigma_F(\vec{x},\vec{y}) &= -i\sum_i g_i^2 P_i(\vec{x}-\vec{y})\Gamma_i G(\vec{x},\vec{y})\Gamma_i \\ &= \sum_i g_i^2 P_i(\vec{x}-\vec{y})\Gamma_i \sum_\alpha \mathcal{U}_\alpha(\vec{x})\overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{y})\Gamma_i, \end{aligned} \tag{4.72}$$

onde

$$\Gamma_i = 1, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}, \gamma_5\gamma_\mu, \gamma_5 \tag{4.73}$$

e

$$P_i(\vec{x}-\vec{y}) = \frac{e^{-m_i|\vec{x}-\vec{y}|}}{4\pi \mid \vec{x}-\vec{y} \mid}. \tag{4.74}$$

Após a substituição destes resultados na equação (4.67), pode-se mostrar que na aproximação de Hartree-Fock as equações acopladas a serem resolvidas são

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r}\right) F_{n\kappa t} + (E_{n\kappa t} - \mathcal{W}_{ACM} - M + g_\sigma \phi_0)\, G_{n\kappa t} - X_{n\kappa t} = 0 \tag{4.75}$$

e

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r}\right) G_{n\kappa t} - (E_{n\kappa t} - \mathcal{W}_{ACM} + M - g_\sigma \phi_0)\, F_{n\kappa t} - Y_{n\kappa t} = 0, \tag{4.76}$$

onde definimos

$$Y_{n\kappa t} = Y^\sigma_{n\kappa t} + Y^\omega_{n\kappa t} + Y^\rho_{n\kappa t} + Y^\gamma_{n\kappa t} + Y^\pi_{n\kappa t} \tag{4.77}$$

e

$$X_{n\kappa t} = X^\sigma_{n\kappa t} + X^\omega_{n\kappa t} + X^\rho_{n\kappa t} + X^\gamma_{n\kappa t} + X^\pi_{n\kappa t}, \tag{4.78}$$

com

$$\begin{aligned} Y^\sigma_a(r) &= -g_\sigma^2 m_\sigma \hat{j}^{-2} \sum_{a'} \delta_{tt'} G_{a'}(r) \sum_L |<\kappa \parallel Y_L \parallel \kappa'>|^2 \\ &\int dr' [G_{a'}(r')G_a(r') - F_{a'}(r')F_a(r')] j_L(im_\sigma r_<) h^{(1)}_L(im_\sigma r_>), \end{aligned} \tag{4.79}$$

$$\begin{aligned} X^\sigma_a(r) &= -g_\sigma^2 m_\sigma \hat{j}^{-2} \sum_{a'} \delta_{tt'} F_{a'}(r) \sum_L |<\kappa \parallel Y_L \parallel \kappa'>|^2 \\ &\int dr' [G_{a'}(r')G_a(r') - F_{a'}(r')F_a(r')] j_L(im_\sigma r_<) h^{(1)}_L(im_\sigma r_>), \end{aligned} \tag{4.80}$$

$$\begin{aligned} Y^\omega_a(r) &= g_\omega^2 m_\omega \hat{j}^{-2} \sum_{a'} \delta_{tt'} G_{a'}(r) \sum_L |<\kappa \parallel Y_L \parallel \kappa'>|^2 \\ &\int dr' [G_{a'}(r')G_a(r') + F_{a'}(r')F_a(r')] j_L(im_\omega r_<) h^{(1)}_L(im_\omega r_>) \\ &+ g_\omega^2 m_\omega \hat{j}^{-2} \sum_{a'} \delta_{tt'} F_{a'}(r) \sum_{L\mathcal{J}} <\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa'> \\ &\int dr' [G_{a'}(r') F_a(r') <-\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa'>^* - F_{a'}(r') G_a(r') <\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa'>^*] \\ &j_L(im_\omega r_<) h^{(1)}_L(im_\omega r_>), \end{aligned} \tag{4.81}$$

$$
\begin{aligned}
X_a^{\omega}(r) &= -g_{\omega}^2 m_{\omega} \hat{j}^{-2} \sum_{a'} \delta_{tt'} F_{a'}(r) \sum_L | < \kappa \parallel Y_L \parallel \kappa' > |^2 \\
&\int dr' [G_{a'}(r') G_a(r') + F_{a'}(r') F_a(r')] j_L(im_{\omega} r_<) h_L^{(1)}(im_{\omega} r_>) \\
&-g_{\omega}^2 m_{\omega} \hat{j}^{-2} \sum_{a'} \delta_{tt'} G_{a'}(r) \sum_{L\mathcal{J}} < -\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' > \\
&\int dr' [G_a(r') F_{a'}(r') < \kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa' >^* - F_a(r') G_{a'}(r') < -\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' >^*] \\
&j_L(im_{\omega} r_<) h_L^{(1)}(im_{\omega} r_>), \qquad (4.82)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_a^{\rho}(r) &= g_{\rho}^2 m_{\rho} \hat{j}^{-2} \sum_{a'} (2 - \delta_{tt'}) G_{a'}(r) \sum_L | < \kappa \parallel Y_L \parallel \kappa' > |^2 \\
&\int dr' [G_{a'}(r') G_a(r') + F_{a'}(r') F_a(r')] j_L(im_{\rho} r_<) h_L^{(1)}(im_{\rho} r_>) \\
&+g_{\rho}^2 m_{\rho} \hat{j}^{-2} \sum_{a'} (2 - \delta_{tt'}) F_{a'}(r) \sum_{L\mathcal{J}} < \kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa' > \\
&\int dr' [G_{a'}(r') F_a(r') < -\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' >^* - F_{a'}(r') G_a(r') < \kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa' >^*] \\
&j_L(im_{\rho} r_<) h_L^{(1)}(im_{\rho} r_>), \qquad (4.83)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_a^{\rho}(r) &= -g_{\rho}^2 m_{\rho} \hat{j}^{-2} \sum_{a'} (2 - \delta_{tt'}) F_{a'}(r) \sum_L | < \kappa \parallel Y_L \parallel \kappa' > |^2 \\
&\int dr' [G_{a'}(r') G_a(r') + F_{a'}(r') F_a(r')] j_L(im_{\rho} r_<) h_L^{(1)}(im_{\rho} r_>) \\
&-g_{\rho}^2 m_{\rho} \hat{j}^{-2} \sum_{a'} (2 - \delta_{tt'}) G_{a'}(r) \sum_{L\mathcal{J}} < -\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' > \\
&\int dr' [G_a(r') F_{a'}(r') < \kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa' >^* - F_a(r') G_{a'}(r') < -\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' >^*] \\
&j_L(im_{\rho} r_<) h_L^{(1)}(im_{\rho} r_>), \qquad (4.84)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_a^{\pi} &= (\frac{g_{\pi}}{2M})^2 \hat{j}^{-2} \sum_{a'} (2 - \delta_{tt'}) G_{a'}(r) \Big\{ \frac{\hat{j}^2 \hat{j}'^2}{4\pi} \frac{[G_{a'}(r) G_a(r) + F_{a'}(r) F_a(r)]}{r^2} \\
&+m_{\pi}^3 \sum_L \hat{L}^{-4} | < \kappa \parallel Y_L \parallel -\kappa' > |^2 \sum_{L_1 L_2} [(\kappa + \kappa') + \alpha(L_1)] \int dr' R_{L_1 L_2}(r, r') \\
&\{[(\kappa + \kappa') + \alpha(L_2)] G_{a'}(r') G_a(r') - [(\kappa + \kappa') - \alpha(L_2)] F_{a'}(r') F_a(r')\} \Big\}, \qquad (4.85)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_a^\pi &= -(\frac{g_\pi}{2M})^2 \hat{j}^{-2} \sum_{a'} (2-\delta_{tt'}) F_{a'}(r) \Big\{ \frac{\hat{j}^2 \hat{j}'^2}{4\pi} \frac{[G_{a'}(r)G_a(r) + F_{a'}(r)F_a(r)]}{r^2} \\
&+ m_\pi^3 \sum_L \hat{L}^{-4} | < \kappa \parallel Y_L \parallel -\kappa' > |^2 \sum_{L_1 L_2} [(\kappa+\kappa') - \alpha(L_1)] \int dr' R_{L_1 L_2}(r,r') \\
&\{[(\kappa+\kappa') + \alpha(L_2)] G_{a'}(r') G_a(r') - [(\kappa+\kappa') - \alpha(L_2)] F_{a'}(r') F_a(r')\} \Big\}, \qquad (4.86)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_a^\gamma(r) &= -e^2 \hat{j}^{-2} \sum_{a'(p)} \delta_{tt'} G_{a'}(r) \sum_L \hat{L}^{-2} | < \kappa \parallel Y_L \parallel \kappa' > |^2 \\
&\int dr' [G_{a'}(r') G_a(r') + F_{a'}(r') F_a(r')] \frac{r_<^L}{r_>^{L+1}} \\
&-e^2 \hat{j}^{-2} \sum_{a'(p)} \delta_{tt'} F_{a'}(r) \sum_{L\mathcal{J}} \hat{L}^{-2} < \kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa' > \\
&\int dr' [G_{a'}(r') F_a(r') < -\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' >^* - F_{a'}(r') G_a(r') < \kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa' >^*] \\
&\frac{r_<^L}{r_>^{L+1}}, \qquad (4.87)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_a^\gamma(r) &= e^2 \hat{j}^{-2} \sum_{a'(p)} \delta_{tt'} F_{a'}(r) \sum_L \hat{L}^{-2} | < \kappa \parallel Y_L \parallel \kappa' > |^2 \\
&\int dr' [G_{a'}(r') G_a(r') + F_{a'}(r') F_a(r')] \frac{r_<^L}{r_>^{L+1}} \\
&+e^2 \hat{j}^{-2} \sum_{a'(p)} \delta_{tt'} G_{a'}(r) \sum_{L\mathcal{J}} \hat{L}^{-2} < -\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' > \\
&\int dr' [G_a(r') F_{a'}(r') < \kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel -\kappa' >^* - F_a(r') G_{a'}(r') < -\kappa \parallel T_{\mathcal{J}L} \parallel \kappa' >^*] \\
&\frac{r_<^L}{r_>^{L+1}}. \qquad (4.88)
\end{aligned}
$$

4.4 Resultados Numéricos e Conclusões

Para resolver as equações de Hartree ou Hartree-Fock deve-se, primeiramente, fixar os parâmetros que aparem na densidade de lagrangiana (4.24). As escolhas destes parâmetros, ou melhor, das constantes de acoplamento, usados para o ^{16}O e o ^{40}Ca, são apresentadas na tabela 4.3. Inicialmente, para os mesons σ, ω e ρ^0, foram usadas as massas e constantes

Tabela 4.3: Constantes de acoplamento

	g_s^2	g_ω^2	g_ρ^2
Mat.Nuclear	109.626	190.431	16.3
^{16}O	115.827	201.082	16.3
^{40}Ca	113.556	195.228	16.3

dadas por Horowitz e Serot [46], ajustadas para reproduzir as propriedades da matéria nuclear e para o pion foram usadas aquelas dadas no potencial de Bonn [50]. Utilizando-se estas constantes, foram efetuados os cálculos para os núcleos do ^{16}O e do ^{40}Ca. Os resultados são apresentados nas tabelas 4.4 e 4.5, juntamente com os resultados experimentais [44, 45].

Apesar do razoável acordo com os dados experimentais, o ajuste pode ser melhorado. De acordo com Brockmann e Toki [49], as constantes de acoplamento dependem da densidade, mais especificamente, são inversamente proporcionais à densidade. Isto é, partindo do conjunto de constantes de acoplamento do potencial de Bonn [50], fixado através do espalhamento núcleon-núcleon no espaço livre, Brockmann e Toki [49] mostraram que as renormalizações destas constantes de acoplamento no meio nuclear são tais que estas diminuem com o aumento da densidade nuclear. Consequentemente, para um melhor ajuste com os resultados experimentais, pode-se variar as constantes de acoplamento de acordo com a densidade média do sistema de interesse. Claramente, a matéria nuclear tem maior densidade que o ^{40}Ca que, por sua vez, possui densidade maior que o ^{16}O. Partindo, então, das constantes da materia nuclear, aumentam-se os seus valores até se obter um melhor ajuste, primeiramente para o ^{40}Ca e posteriormente para o ^{16}O. As constantes de acoplamento ajustadas são mostradas na tabela 4.3. Os resultados numéricos obtidos para os núcleos ^{16}O e ^{40}Ca são apresentados na tabela 4.6 e 4.7. Em ambas as tabelas, a primeira coluna apresenta o resultado obtido para os protons e a segunda para os neutrons na aproximação de Hartree, a terceira e quarta colunas, os resultados para protons e neutrons na aproximação de Hartree-Fock, a quarta e quinta colunas apresentam os resultados na aproximação de Hartree com a adição dos termos de momento magnético anômalo. Nas duas últimas colunas estão os resultados experimentais. Deve-se notar que a inclusão dos termos

de troca (aproximação de Hartree-Fock), bem como a dos termos de momento magnético anômalo mudam muito pouco os resultados obtidos já na aproximação de Hartree.

Obtidos os espectros de energia e as respectivas funções de onda, está-se apto para o cálculo, sem aproximações não-relativísticas, da contribuição da troca mista $\rho^0 - \omega$ para a energia de ligação. Este será o tópico do próximo capítulo.

Tabela 4.4: Espectro de partícula única para o ^{16}O (Energias em MeV)

	Exp.[44]		Cte Mat. Nuclear	
	p	n	p	n
$1s_{1/2}$	-40.±8	—	-37.161	-41.369
$1p_{3/2}$	-18.4	-21.8	-16.682	-20.564
$1p_{1/2}$	-12.1	-15.7	-8.777	-12.539
$1d_{5/2}$	-0.6	-4.17	0.000	-3.375
$\langle r^2 \rangle^{1/2}$	2.73	—	2.63	2.60

Tabela 4.5: Espectro de partícula única para o ^{40}Ca (Energias em MeV)

	Exp.[45]		Cte Mat. Nuclear	
	p	n	p	n
$1s_{1/2}$	-48.5±5.0	—	-46.680	-54.928
$1p_{3/2}$	-36.0±3.0	—	-30.706	-38.382
$1p_{1/2}$	-31.5±3.5	—	-25.224	-33.114
$1d_{5/2}$	-16.0±2.0	—	-15.089	-22.584
$2s_{1/2}$	-12.0±1.0	-18.1	-7.316	-14.590
$1d_{3/2}$	-8.5±2.0	-15.6	-6.701	-14.069
$1f_{7/2}$	-1.4	-8.36	-0.645	-7.649
$\langle r^2 \rangle^{1/2}$	3.49	—	3.46	3.39

Tabela 4.6: Espectro de Energia para o $^{16}0$.

	HARTREE		HARTREE-FOCK		HARTREE+MMA		Exp.	
	p	n	p	n	p	n	p	n
$1s_{1/2}$	-39.251	-43.493	-39.187	-43.429	-39.132	-43.553	-40.±8	—
$1p_{3/2}$	-18.464	-22.379	-18.433	-22.349	-18.271	-22.409	-18.4	-21.8
$1p_{1/2}$	-9.792	-13.586	-9.786	-13.570	-9.543	-13.557	-12.1	-15.7
$1d_{5/2}$	-1.127	-4.651	-1.121	-4.643	-0.869	-4.621	-0.6	-4.17
$\langle r^2 \rangle^{1/2}$	2.687	2.658	2.691	2.659	2.692	2.659	2.73	—

Tabela 4.7: Espectro de Energia para o ^{40}Ca.

	HARTREE		HARTREE-FOCK		HARTREE+MMA		Exp.	
	p	n	p	n	p	n	p	n
$1s_{1/2}$	-51.160	-59.535	-51.076	-59.447	-50.904	-59.644	-48.5±5.0	—
$1p_{3/2}$	-34.787	-42.791	-34.637	-42.639	-34.429	-42.886	-36.0±3.0	—
$1p_{1/2}$	-28.735	-36.763	-28.606	-36.738	-28.309	-36.801	-31.5±3.5	—
$1d_{5/2}$	-18.497	-26.125	-18.366	-26.084	-18.001	-26.181	-16.0±2.0	—
$2s_{1/2}$	-9.045	-16.478	-9.008	-16.344	-8.760	-16.421	-12.0±1.0	-18.1
$1d_{3/2}$	-8.836	-15.957	-8.705	-15.828	-8.105	-15.930	-8.5±2.0	-15.6
$1f_{7/2}$	-3.169	-10.350	-3.003	-10.362	-2.441	-10.374	—	-8.36
$\langle r^2 \rangle^{1/2}$	3.45	3.39	3.47	3.40	3.43	3.39	3.49	—

Capítulo 5

Troca $\rho^0 - \omega$ em Modelos Relativísticos

5.1 Introdução e Formalismo Inicial

No final do Cap. 3, ficou clara a necessidade da introdução de potenciais que quebram a simetria de carga. Também ficou claro que, dentro da teoria mesônica, a contribuição mais importante para a quebra de simetria de carga, é a troca mista $\rho^0 - \omega$. No cálculo dessa contribuição, é usualmente efetuada uma aproximação não relativística para se obter um potencial equivalente a ser utilizado na equação de Schrödinger. No entanto, está claro que as trocas mesônicas têm um caráter relativístico. Portanto, por consistência, faz-se necessário efetuar um cálculo relativístico da troca $\rho^0 - \omega$.

Já que a anomalia Nolen-Schiffer é pequena quando comparada às diferenças de energia coulombiana envolvidas, é possível utilizar teoria de perturbações para estudá-la. Esta possibilidade, em especial, é que chamou a atenção de vários pesquisadores e levou à produção de um vasto número de trabalhos aparecendo na literatura. Com o mesmo argumento, a troca $\rho^0 - \omega$ pode ser vista através de um tratamento perturbativo, pois sua contribuição para a energia de ligação é bem pequena, quando comparada às contribuições de trocas mesônicas puras.

Partindo da densidade de lagrangiana dada na equação (4.24), acrescenta-se um termo, a ser tratado perturbativamente, correspondendo à mistura $\rho^0 - \omega$. Assim, nova a densidade de lagrangiana passa a ser escrita como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{II} + \mathcal{L}_{\rho-\omega}, \tag{5.1}$$

onde

$$\mathcal{L}_{\rho-\omega} = g_{\rho\omega} V_\mu b_0^\mu \tag{5.2}$$

e $g_{\rho\omega} = -4500 MeV^2$ é a constante de mistura $\rho^0 - \omega$.

Sabe-se que os campos mesônicos V_μ e b_0^μ obedecem às equações (4.35) e (4.36), cujas soluções podem ser escritas como

$$V_\mu(x) = \int d^4y D^0_{\mu\sigma}(x-y) g_\omega \left[\overline{\psi}\gamma^\sigma\psi + \frac{\kappa_\omega}{2M}\partial_\lambda\overline{\psi}\sigma^{\lambda\sigma}\psi\right], \tag{5.3}$$

$$b^\mu(x) = \int d^4z R^{0^{\mu\nu}}(x-z) g_\rho \left[\overline{\psi}\gamma_\nu\tau_3\psi + \frac{\kappa_\rho}{2M}\partial^\alpha\overline{\psi}\sigma_{\alpha\nu}\tau_3\psi\right], \tag{5.4}$$

onde $D^0_{\mu\sigma}(x-y)$ e $R^{0^{\mu\nu}}(x-z)$ são as funções de Green ou propagadores livres dos mesons vetoriais ω e ρ, dados respectivamente por

$$D^0_{\mu\sigma}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D^0_{\mu\sigma}(k) e^{ik(x-y)}, \tag{5.5}$$

$$R^{0^{\mu\nu}}(x-z) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} R^{0^{\mu\nu}}(k) e^{ik(x-z)}, \tag{5.6}$$

$$\tag{5.7}$$

com $D^0_{\mu\sigma}(k)$ e $R^{0^{\mu\nu}}(k)$, dados por

$$D^0_{\mu\nu}(k) = \left[-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_\omega^2}\right] \frac{1}{k_\lambda^2 - m_\omega^2 + i\varepsilon}, \tag{5.8}$$

$$R^0_{\mu\nu}(k) = \left[-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_\rho^2}\right] \frac{1}{k_\lambda^2 - m_\rho^2 + i\varepsilon}, \tag{5.9}$$

onde ε é um infinitésimo positivo. Já que o méson ω acopla-se à corrente bariônica conservada ($\partial_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu\psi = 0 \Longrightarrow k_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu\psi = 0$) e o méson ρ^0 se acopla à corrente de cargas, também conservada ($\partial_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu\tau_3\psi = 0 \Longrightarrow k_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu\tau_3\psi = 0$), pode-se desprezar os termos $k_\mu k_\nu$ em ambos os propagadores nas equações (5.8) e (5.9), substituindo-as por

$$D^0_{\mu\sigma}(k) = -\frac{g_{\mu\sigma}}{k^2 - m_\omega^2 + i\varepsilon}, \tag{5.10}$$

$$R^{0\mu\sigma}(k) = -\frac{g_{\mu\sigma}}{k^2 - m_\rho^2 + i\varepsilon}. \tag{5.11}$$

Com isso, tem-se todo o arsenal necessário para o cálculo da contribuição da mistura $\rho^0 - \omega$ para a energia de ligação . Isto será visto na próxima seção .

5.2 Cálculo Relativístico da Troca $\rho^0 - \omega$

De posse dos resultados da seção anterior, parte-se da ação devida à mistura $\rho^0 - \omega$. Usando-se as expressões (5.3) e (5.4) em (5.2), essa contribuição para a ação pode ser escrita como

$$\begin{aligned} S_{\rho\omega} &= g_{\rho\omega} \int \mathrm{d}^4x V_\mu(x) b_0^\mu(x) \\ &= g_{\rho\omega} \int \mathrm{d}^4x \mathrm{d}^4y \mathrm{d}^4z D_{\mu\sigma}(x-y) g_\omega \left[\overline{\psi}(y)\gamma^\sigma\psi(y) + \frac{\kappa_\omega}{2M}\partial_\lambda\overline{\psi}(y)\sigma^{\lambda\sigma}\psi(y)\right] \\ &\quad \times R^{\mu\nu}(x-z) g_\rho \left[\overline{\psi}(z)\gamma_\nu\tau_3\psi(z) + \frac{\kappa_\rho}{2M}\partial^\alpha\overline{\psi}(z)\sigma_{\alpha\nu}\tau_3\psi(z)\right]. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Separando-se a integração em x, tem-se

$$\begin{aligned} I_\sigma^\nu &= \int \mathrm{d}^4x D_{\mu\sigma}(x-y) R^{\mu\nu}(x-z) \\ &= \int \mathrm{d}^4x \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi^4)} \frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi^4)} D_{\mu\sigma}(k) R^{\mu\nu}(q) e^{ik(x-y)} e^{iq(x-z)} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi^4)} D_{\mu\sigma}(k) R^{\mu\nu}(-k) e^{ik(z-y)}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Usando-se, agora, as expressões (5.10) e (5.11), obtém-se

$$\begin{aligned} I_\sigma^\nu &= \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi^4)} \frac{-g_{\mu\sigma}}{k^2 - m_\omega^2 + i\varepsilon} \frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 - m_\rho^2 + i\varepsilon} e^{ik(z-y)} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi^4)} \frac{-g_{\sigma\nu}}{m_\omega^2 - m\rho^2} \left\{ \frac{1}{k^2 - m_\omega^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{k^2 - m_\rho^2 + i\varepsilon} \right\} e^{ik(z-y)} \\ &= \frac{1}{m_\omega^2 - m\rho^2} \left\{ D_\sigma^\nu(z-y) - R_\sigma^\nu(z-y) \right\}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Portanto, mudando a variável z para x, pode-se escrever

$$\begin{aligned} S_{\rho\omega} &= \frac{g_{\rho\omega}}{m_\omega^2 - m\rho^2} \int \mathrm{d}^4x \mathrm{d}^4y \left\{ D_\sigma^\nu(x-y) - R_\sigma^\nu(x-y) \right\} \\ &\quad \times g_\omega \left[\overline{\psi}(x)\gamma^\sigma\psi(x) + \frac{\kappa_\omega}{2M}\partial_\lambda\overline{\psi}(x)\sigma^{\lambda\sigma}\psi(x)\right] \\ &\quad \times g_\rho \left[\overline{\psi}(y)\gamma_\nu\tau_3\psi(y) + \frac{\kappa_\rho}{2M}\partial^\alpha\overline{\psi}(y)\sigma_{\alpha\nu}\tau_3\psi(y)\right] \end{aligned} \tag{5.15}$$

e, já que $S = \int \mathrm{d}t L$, tem-se

$$\begin{aligned} L_{\rho\omega} &= \frac{g_{\rho\omega}}{m_\omega^2 - m\rho^2} \int \mathrm{d}^3x \mathrm{d}^4y \left\{ D_\sigma^\nu(x-y) - R_\sigma^\nu(x-y) \right\} \\ &\quad \times g_\omega \left[\overline{\psi}(x)\gamma^\sigma\psi(x) + \frac{\kappa_\omega}{2M}\partial_\lambda\overline{\psi}(x)\sigma^{\lambda\sigma}\psi(x)\right] \\ &\quad \times g_\rho \left[\overline{\psi}(y)\gamma_\nu\tau_3\psi(y) + \frac{\kappa_\rho}{2M}\partial^\alpha\overline{\psi}(y)\sigma_{\alpha\nu}\tau_3\psi(y)\right]. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Para se obter a energia, deve-se encontrar a hamiltoniana da troca $\rho^0 - \omega$, a qual se sabe ser dada, a partir da lagrangiana, por

$$H = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \Phi_\alpha)}(\partial_0 \Phi_\alpha) - L. \tag{5.17}$$

O termo dependente do momento é dado por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \Phi_\alpha)}(\partial_0 \Phi_\alpha) &= \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \psi)}(\partial_0 \psi) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \overline{\psi})}(\partial_0 \overline{\psi}) \\
&= \frac{g_{\rho\omega} g_\rho g_\omega}{m_\omega^2 - m\rho^2} \int \mathrm{d}^3x \mathrm{d}^4y \left\{ D_\sigma^\nu(x-y) - R_\sigma^\nu(x-y) \right\} \\
&\times \left\{ \frac{\kappa_\rho}{2M} \partial_0 \left(\overline{\psi}(y) \sigma_{0\nu} \tau_3 \psi(y) \right) \left[\overline{\psi}(x) \gamma^\sigma \psi(x) + \frac{\kappa_\omega}{2M} \partial_\lambda \overline{\psi}(x) \sigma^{\lambda\sigma} \psi(x) \right] \right. \\
&\left. + \frac{\kappa_\omega}{2M} \partial_0 \left(\overline{\psi}(x) \sigma^{0\sigma} \psi(x) \right) \left[\overline{\psi}(y) \gamma_\nu \tau_3 \psi(y) + \frac{\kappa_\rho}{2M} \partial^\alpha \overline{\psi}(y) \sigma_{\alpha\nu} \tau_3 \psi(y) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Subtraindo, desta expressão, a lagrangiana, obtém-se

$$\begin{aligned}
H_{\rho\omega} &= \frac{g_{\rho\omega} g_\rho g_\omega}{m_\omega^2 - m\rho^2} \int \mathrm{d}^3x \mathrm{d}^4y \left[D_\sigma^\nu(x-y) - R_\sigma^\nu(x-y) \right] \\
&\times \left\{ \frac{\kappa_\omega}{2M} \frac{\kappa_\rho}{2M} \partial_0 \left(\overline{\psi}(x) \sigma^{0\sigma} \psi(x) \right) \partial_0 \left(\overline{\psi}(y) \sigma_{0\nu} \tau_3 \psi(y) \right) \right. \\
&- \left[\overline{\psi}(x) \gamma^\sigma \psi(x) + \frac{\kappa_\omega}{2M} \partial_i \overline{\psi}(x) \sigma^{i\sigma} \psi(x) \right] \\
&\times \left. \left[\overline{\psi}(y) \gamma_\nu \tau_3 \psi(y) + \frac{\kappa_\rho}{2M} \partial^j \overline{\psi}(y) \sigma_{j\nu} \tau_3 \psi(y) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Fazendo-se, então, a transformada de Fourier dos propagadores para o espaço dos momentos, acaba-se por obter

$$\begin{aligned}
H_{\rho\omega} &= \frac{g_{\rho\omega} g_\rho g_\omega}{m_\omega^2 - m\rho^2} \int \mathrm{d}^3x \mathrm{d}^4y \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \left\{ D_{\mu\nu}(k) - R_{\mu\nu}(k) \right\} e^{ik(x-y)} \\
&\times \left\{ -\frac{\kappa_\omega}{2M} \frac{\kappa_\rho}{2M} k_0^2 \left(\overline{\psi}(x) \sigma^{0\mu} \psi(x) \right) \left(\overline{\psi}(y) \sigma^{0\nu} \tau_3 \psi(y) \right) + \right. \\
&- \left[\overline{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) + i \frac{\kappa_\omega}{2M} k_i \overline{\psi}(x) \sigma^{i\mu} \psi(x) \right] \\
&\times \left. \left[\overline{\psi}(y) \gamma^\nu \tau_3 \psi(y) + i \frac{\kappa_\rho}{2M} k_j \overline{\psi}(y) \sigma^{j\nu} \tau_3 \psi(y) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

No caso em que se têm termos que quebram simetria de carga, a equação (2.12) fica reescrita como

$$\Delta E_c = M_{Z_>} - M_{Z_<} + \delta_{np} + BE_{NUC}(A_0 + 1n) - BE_{NUC}(A_0 + 1p). \tag{5.21}$$

Para se obter a contribuição da troca mista $\rho^0 - \omega$, pode-se considerar os núcleos espelho como sendo aproximadamente formados por um caroço esférico ao qual se adiciona (retira) ora um próton, ora um nêutron, sem a destruição da simetria esférica deste caroço. Ou seja, acrescenta-se (retira-se) o próton ou o nêutron em um nível vazio (ocupado) deste caroço. Com efeito, considerando um núcleo de camadas fechadas com A_0 nucleons mais um nêutron representado pelo estado $\mid A_0 + n\rangle$ e seu estado espelho representado por $\mid A_0 + p\rangle$, a violação da hipótese (2.14) devido à contribuição da mistura $\rho^0 - \omega$ é dada por

$$\begin{aligned} BE_{NUC}(A_0 + 1n) \; - \; & BE_{NUC}(A_0 + 1p) = \\ = \; & \langle A_0 + n \mid H_{\rho\omega} \mid A_0 + n\rangle - \langle A_0 + p \mid H_{\rho\omega} \mid A_0 + p\rangle \\ = \; & \sum_{\alpha>\beta}^{A_0+n} \langle \alpha, \beta \mid H_{\rho\omega} \mid \alpha, \beta\rangle - \sum_{\alpha>\beta}^{A_0+p} \langle \alpha, \beta \mid H_{\rho\omega} \mid \alpha, \beta\rangle \\ = \; & \sum_{\beta}^{A_0} \left[\langle n, \beta \mid H_{\rho\omega} \mid n, \beta\rangle - \langle p, \beta \mid H_{\rho\omega} \mid p, \beta\rangle\right]. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Cada elemento de matriz de $H_{\rho\omega}$ é dado por

$$\begin{aligned} \langle \xi\eta \mid H_{\rho\omega} \mid \xi\eta\rangle \; = \; & \frac{g_{\rho\omega} g_\rho g_\omega}{m_\omega^2 - m\rho^2} \int \mathrm{d}^3x \mathrm{d}^4y \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \left[D_{\mu\nu}(k) - R_{\mu\nu}(k)\right] e^{ik(x-y)} \\ & \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \Big\{ -\frac{\kappa_\omega}{2M}\frac{\kappa_\rho}{2M} k_0^2 \left(\overline{\mathcal{U}}_\alpha(x)\sigma^{0\mu}\mathcal{U}_\beta(x)\right)\left(\overline{\mathcal{U}}_\gamma(y)\sigma^{0\nu}\tau_3\mathcal{U}_\delta(y)\right) \\ & - \overline{\mathcal{U}}_\alpha(x)\left[\gamma^\mu + i\frac{\kappa_\omega}{2M}k_i\sigma^{i\mu}\right]\mathcal{U}_\beta(x)\overline{\mathcal{U}}_\gamma(y)\left[\gamma^\nu + i\frac{\kappa_\rho}{2M}k_j\sigma^{j\nu}\right]\tau_3\mathcal{U}_\delta(y)\Big\} \\ & \times e^{i(\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta)x_0} e^{i(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta)y_0} \langle \xi\eta \mid A_\alpha^\dagger A_\beta A_\gamma^\dagger A_\delta \mid \xi\eta\rangle. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Pode-se, agora, efetuar a integral em y_0 obtendo-se $(2\pi)\delta(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta - k_0)$ e, com isso, efetuar a integral em k_0, resultando

$$\begin{aligned} \langle \xi\eta \mid H_{\rho\omega} \mid \xi\eta\rangle \; = \; & \frac{g_{\rho\omega}}{m_\omega^2 - m\rho^2} \int \mathrm{d}^3x \mathrm{d}^3y \\ & \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \left\{D_{\mu\nu}(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta, \vec{k}) - R_{\mu\nu}(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta, \vec{k})\right\} e^{-i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{y})} \\ & \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \Big\{ -\kappa_\omega\kappa_\rho(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta)^2 \left(\overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x})\sigma^{0\mu}\mathcal{U}_\beta(\vec{x})\right)\left(\overline{\mathcal{U}}_\gamma(y)\sigma^{0\nu}\tau_3\mathcal{U}_\delta(y)\right) + \\ & - \overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x})\left[g_\omega\gamma^\mu + i\kappa_\omega k_i\sigma^{i\mu}\right]\mathcal{U}_\beta(\vec{x})\overline{\mathcal{U}}_\gamma(y)\left[g_\rho\gamma^\nu + i\kappa_\rho k_j\sigma^{j\nu}\right]\tau_3\mathcal{U}_\delta(y)\Big\} \\ & \times e^{i(\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta + \epsilon_\gamma - \epsilon_\delta)x_0} \langle \xi\eta \mid A_\alpha^\dagger A_\beta A_\gamma^\dagger A_\delta \mid \xi\eta\rangle. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Usando-se o fato de que ambos os propagadores são proporcionais a $g_{\mu\nu}$, pode-se multiplicar os termos, obtendo-se

$$\begin{aligned}
\langle \xi\eta \mid H_{\rho\omega} \mid \xi\eta \rangle &= -\frac{g_{\rho\omega} g_\rho g_\omega}{m_\omega^2 - m\rho^2} \int \mathrm{d}^3x \mathrm{d}^3y \\
&\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \left\{ D_{\mu\nu}(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta, \vec{k}) - R_{\mu\nu}(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta, \vec{k}) \right\} e^{-i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{y})} \\
&\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \Big\{ \overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x})\gamma^\mu \mathcal{U}_\beta(\vec{x}) \overline{\mathcal{U}}_\gamma(\vec{y})\gamma_\mu \mathcal{U}_\delta(\vec{y}) \\
&+ \frac{\kappa_\omega}{2M}\frac{\kappa_\rho}{2M}(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta)^2 \overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x})\sigma^{0\mu}\mathcal{U}_\beta(\vec{x})\overline{\mathcal{U}}_\gamma(y)\sigma_{0\mu}\tau_3\mathcal{U}_\delta(y) \\
&+ i\frac{\kappa_\rho}{2M} k_i \overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x})\gamma_\mu \mathcal{U}_\beta(\vec{x})\overline{\mathcal{U}}_\gamma(y)\sigma^{i\mu}\tau_3\mathcal{U}_\delta(y) \\
&+ i\frac{\kappa_\omega}{2M} k_i \overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x})\sigma^{i\mu}\mathcal{U}_\beta(\vec{x})\overline{\mathcal{U}}_\gamma(y)\gamma_\mu\tau_3\mathcal{U}_\delta(y) \\
&- \frac{\kappa_\omega}{2M}\frac{\kappa_\rho}{2M} k_i k^j \overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x})\sigma^{i\mu}\mathcal{U}_\beta(\vec{x})\overline{\mathcal{U}}_\gamma(y)\sigma_{j\mu}\tau_3\mathcal{U}_\delta(y) \Big\} \\
&e^{i(\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta + \epsilon_\gamma - \epsilon_\delta)x_0} \langle \xi\eta \mid A_\alpha^\dagger A_\beta A_\gamma^\dagger A_\delta \mid \xi\eta \rangle. \qquad (5.25)
\end{aligned}$$

5.2.1 Cálculo dos termos na equação 5.25

Para se calcular cada termo em (5.25), necessitam-se alguns resultados preliminares. Usando-se a notação $\alpha = n_\alpha, \kappa_\alpha, m_\alpha$ e $-\alpha = n_\alpha, -\kappa_\alpha, m_\alpha$, tem-se

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x})\gamma^\mu\mathcal{U}_\beta(\vec{x}) &= \frac{1}{r_x^2}\begin{pmatrix} ig_\alpha(r_x)\Phi_\alpha \\ -f_\alpha(r_x)\Phi_{-\alpha} \end{pmatrix}^\dagger \gamma_0\gamma^\mu \begin{pmatrix} ig_\beta(r_x)\Phi_\beta \\ -f_\beta(r_x)\Phi_{-\beta} \end{pmatrix} \zeta^\dagger_{\tau_\alpha}\zeta_{\tau_\beta} \\
&= \frac{1}{r_x^2}\Big\{ g_\alpha^*(r_x) g_\beta \left[\Phi_\alpha^\dagger \gamma_{11}^\mu \Phi_\beta\right] - f_\alpha^*(r_x) f_\beta \left[\Phi_{-\alpha}^\dagger \gamma_{22}^\mu \Phi_{-\beta}\right] \\
&+ i g_\alpha^*(r_x) f_\beta \left[\Phi_\alpha^\dagger \gamma_{12}^\mu \Phi_{-\beta}\right] + i f_\alpha^*(r_x) g_\beta \left[\Phi_{-\alpha}^\dagger \gamma_{22}^\mu \Phi_\beta\right] \Big\} \delta_{\tau_\alpha,\tau_\beta}, \qquad (5.26)
\end{aligned}$$

onde

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}) = \begin{pmatrix} \gamma_{11}^\mu & \gamma_{12}^\mu \\ \gamma_{21}^\mu & \gamma_{22}^\mu \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \right). \qquad (5.27)$$

Portanto, tem-se

$$\overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x})\gamma^0\mathcal{U}_\beta(\vec{x}) = \frac{1}{r_x^2}\left\{ g_\alpha g_\beta \left[\Phi_\alpha^\dagger \Phi_\beta\right] + f_\alpha f_\beta \left[\Phi_{-\alpha}^\dagger \Phi_{-\beta}\right] \right\} \qquad (5.28)$$

$$\overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x})\gamma^i\mathcal{U}_\beta(\vec{x}) = \frac{i}{r_x^2}\left\{ g_\alpha f_\beta \left[\Phi_\alpha^\dagger \sigma^i \Phi_{-\beta}\right] + f_\alpha g_\beta \left[\Phi_{-\alpha}^\dagger \sigma^i \Phi_\beta\right] \right\}. \qquad (5.29)$$

De modo análogo, tem-se

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x})\sigma^{\lambda\mu}\mathcal{U}_\beta(\vec{x}) &= \frac{1}{r_x^2}\left\{g_\alpha^*(r_x)g_\beta\left[\Phi_\alpha^\dagger\sigma_{11}^{\lambda\mu}\Phi_\beta\right] - f_\alpha^*(r_x)f_\beta\left[\Phi_{-\alpha}^\dagger\sigma_{22}^{\lambda\mu}\Phi_{-\beta}\right]\right.\\ &\left.+ig_\alpha^*(r_x)f_\beta\left[\Phi_\alpha^\dagger\sigma_{12}^{\lambda\mu}\Phi_{-\beta}\right] + if_\alpha^*(r_x)g_\beta\left[\Phi_{-\alpha}^\dagger\sigma_{22}^{\lambda\mu}\Phi_\beta\right]\right\}. \qquad (5.30)\end{aligned}$$

Mas

$$\sigma^{\lambda\mu} = \frac{1}{2i}\left(\gamma^\lambda\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\lambda\right), \qquad (5.31)$$

com,

$$\gamma^\lambda\gamma^\mu = \begin{pmatrix}\gamma_{11}^\lambda & \gamma_{12}^\lambda\\ \gamma_{21}^\lambda & \gamma_{22}^\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_{11}^\mu & \gamma_{12}^\mu\\ \gamma_{21}^\mu & \gamma_{22}^\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma_{11}^\lambda\gamma_{11}^\mu + \gamma_{12}^\lambda\gamma_{21}^\mu & \gamma_{11}^\lambda\gamma_{12}^\mu + \gamma_{12}^\lambda\gamma_{22}^\mu\\ \gamma_{21}^\lambda\gamma_{11}^\mu + \gamma_{22}^\lambda\gamma_{21}^\mu & \gamma_{21}^\lambda\gamma_{12}^\mu + \gamma_{22}^\lambda\gamma_{22}^\mu\end{pmatrix}. \qquad (5.32)$$

Assim,

$$\begin{aligned}(\gamma^\lambda\gamma^\mu)_{11} &= (\gamma_{11}^\lambda\gamma_{11}^\mu + \gamma_{12}^\lambda\gamma_{21}^\mu) \longrightarrow \sigma_{11}^{ij} = -\varepsilon^{ijk}\sigma^k; \quad \sigma_{11}^{0i} = 0\\ (\gamma^\lambda\gamma^\mu)_{12} &= (\gamma_{11}^\lambda\gamma_{12}^\mu + \gamma_{12}^\lambda\gamma_{22}^\mu) \longrightarrow \sigma_{12}^{ij} = 0; \quad \sigma_{12}^{0i} = -i\sigma^i\\ (\gamma^\lambda\gamma^\mu)_{21} &= (\gamma_{21}^\lambda\gamma_{11}^\mu + \gamma_{22}^\lambda\gamma_{21}^\mu) \longrightarrow \sigma_{21}^{ij} = 0; \quad \sigma_{21}^{0i} = -i\sigma^i\\ (\gamma^\lambda\gamma^\mu)_{22} &= (\gamma_{21}^\lambda\gamma_{12}^\mu + \gamma_{22}^\lambda\gamma_{22}^\mu) \longrightarrow \sigma_{22}^{ij} = -\varepsilon^{ijk}\sigma^k; \quad \sigma_{22}^{0i} = 0.\end{aligned} \qquad (5.33)$$

Usando-se estes resultados, encontra-se

$$\overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x})\sigma^{ij}\mathcal{U}_\beta(\vec{x}) = \frac{-\varepsilon^{ijk}}{r_x^2}\left\{g_\alpha g_\beta\left[\Phi_\alpha^\dagger\sigma^k\Phi_{-\beta}\right] - f_\alpha f_\beta\left[\Phi_{-\alpha}^\dagger\sigma^k\Phi_\beta\right]\right\} \qquad (5.34)$$

$$\overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x})\sigma^{0i}\mathcal{U}_\beta(\vec{x}) = \frac{i}{r_x^2}\left\{g_\alpha f_\beta\left[\Phi_\alpha^\dagger\sigma^i\Phi_{-\beta}\right] - f_\alpha g_\beta\left[\Phi_{-\alpha}^\dagger\sigma^i\Phi_\beta\right]\right\}. \qquad (5.35)$$

Obtidos estes resultados, pode-se voltar à (5.25) e calcular cada termo separadamente.

Primeiro Termo

O primeiro termo é dado por

$$\begin{aligned}\text{Termo} - 1 &= -\frac{g_{\rho\omega}g_\rho g_\omega}{m_\omega^2 - m\rho^2}\int r_x^2 \mathrm{d}r_x r_y^2 \mathrm{d}r_y \int \mathrm{d}\Omega_x \int \mathrm{d}\Omega_y\\ &\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\left\{D_{\mu\nu}(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta, \vec{k}) - R_{\mu\nu}(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta, \vec{k})\right\} e^{-i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{y})}\\ &\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}\overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x})\gamma^\mu\mathcal{U}_\beta(\vec{x})\overline{\mathcal{U}}_\gamma(\vec{x})\gamma_\mu\tau_3\mathcal{U}_\delta(\vec{x})\\ &= -\frac{g_{\rho\omega}g_\rho g_\omega}{m_\omega^2 - m\rho^2}\int r_x^2 \mathrm{d}r_x r_y^2 \mathrm{d}r_y \sum_{\alpha\beta\gamma\delta}\int \mathrm{d}\Omega_x \int \mathrm{d}\Omega_y\\ &\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\left\{D_{\mu\nu}(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta, \vec{k}) - R_{\mu\nu}(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta, \vec{k})\right\} e^{-i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{y})}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{r_x^2 r_y^2}\Big\{g_\alpha g_\beta g_\gamma g_\delta \left[\Phi_\alpha^\dagger \Phi_\beta\right]\left[\Phi_\gamma^\dagger \Phi_\delta\right] + g_\alpha g_\beta f_\gamma f_\delta \left[\Phi_\alpha^\dagger \Phi_\beta\right]\left[\Phi_{-\gamma}^\dagger \Phi_{-\delta}\right] \\
& + f_\alpha f_\beta g_\gamma g_\delta \left[\Phi_{-\alpha}^\dagger \Phi_{-\beta}\right]\left[\Phi_\gamma^\dagger \Phi_\delta\right] + f_\alpha f_\beta f_\gamma f_\delta \left[\Phi_{-\alpha}^\dagger \Phi_{-\beta}\right]\left[\Phi_{-\gamma}^\dagger \Phi_{-\delta}\right] \\
& - \left[-g_\alpha f_\beta g_\gamma f_\delta \left[\Phi_\alpha^\dagger \vec{\sigma} \Phi_{-\beta}\right].\left[\Phi_\gamma^\dagger \vec{\sigma} \Phi_{-\delta}\right] + g_\alpha f_\beta f_\gamma g_\delta \left[\Phi_\alpha^\dagger \vec{\sigma} \Phi_{-\beta}\right].\left[\Phi_{-\gamma}^\dagger \vec{\sigma} \Phi_\delta\right]\right. \\
& \left. f_\alpha g_\beta g_\gamma f_\delta \left[\Phi_{-\alpha}^\dagger \vec{\sigma} \Phi_\beta\right].\left[\Phi_\gamma^\dagger \vec{\sigma} \Phi_{-\delta}\right] - f_\alpha g_\beta f_\gamma g_\delta \left[\Phi_{-\alpha}^\dagger \vec{\sigma} \Phi_\beta\right].\left[\Phi_{-\gamma}^\dagger \vec{\sigma} \Phi_\delta\right]\right]\Big\} \\
& \tau_\gamma \delta_{\tau_\alpha,\tau_\beta}\delta_{\tau_\gamma,\tau_\delta} \\
= & -\frac{g_{\rho\omega} g_\rho g_\omega}{m_\omega^2 - m\rho^2}\int \mathrm{d}r_x \mathrm{d}r_y \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} g_\omega g_\rho \left\{g_\alpha g_\beta g_\gamma g_\delta I_{\alpha\beta\gamma\delta} + g_\alpha g_\beta f_\gamma f_\delta I_{\alpha\beta-\gamma-\delta}\right. \\
& + f_\alpha f_\beta g_\gamma g_\delta I_{-\alpha-\beta\gamma\delta} + f_\alpha f_\beta f_\gamma f_\delta I_{-\alpha-\beta-\gamma-\delta} \\
& - [-g_\alpha f_\beta g_\gamma f_\delta J_{\alpha-\beta\gamma-\delta} + g_\alpha f_\beta f_\gamma g_\delta J_{\alpha-\beta-\gamma\delta} \\
& \left. + f_\alpha g_\beta g_\gamma f_\delta J_{-\alpha\beta\gamma-\delta} - f_\alpha g_\beta f_\gamma g_\delta J_{-\alpha\beta-\gamma\delta}]\right\} \tau_\gamma \delta_{\tau_\alpha,\tau_\beta}\delta_{\tau_\gamma,\tau_\delta},
\end{aligned}
\tag{5.36}
$$

onde, já que todos os termos da expressão (5.36) terão partes angulares semelhantes, foram definidas as integrais angulares angulares do tipo

$$
I_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) = I^{(\omega)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) - I^{(\rho)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) \tag{5.37}
$$

e

$$
J_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) = J^{(\omega)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) - J^{(\rho)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y), \tag{5.38}
$$

com

$$
I^{(\omega)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) = \int \mathrm{d}\Omega_x \mathrm{d}\Omega_y \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{y})}}{\vec{k}^2 + p_\omega^2 - i\varepsilon}\left[\Phi_\alpha^\dagger \Phi_\beta\right]\left[\Phi_\gamma^\dagger \Phi_\delta\right] \tag{5.39}
$$

e

$$
J^{(\omega)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) = \int \mathrm{d}\Omega_x \mathrm{d}\Omega_y \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{y})}}{\vec{k}^2 + p_\omega^2 - i\varepsilon}\left[\Phi_\alpha^\dagger \vec{\sigma} \Phi_\beta\right].\left[\Phi_\gamma^\dagger \vec{\sigma} \Phi_\delta\right], \tag{5.40}
$$

onde

$$
p_\omega^2 = m_\omega^2 - (\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta)^2. \tag{5.41}
$$

Obviamente, as integrais $I^{(\rho)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y)$ e $J^{(\rho)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y)$ para o propagador do méson ρ são obtidas simplesmente substituindo-se p_ρ no lugar de p_ω, ou seja, colocando-se a massa do méson ρ (m_ρ) no lugar da massa do méson ω (m_ω) na equação (5.41).

Consideram-se primeiramente os termos independentes de spin. Fazendo-se uso da decomposição da onda plana em ondas esféricas,

$$
e^{i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{y})} = (4\pi)^2 \sum_{l,l'=0}^{\infty} \sum_{\substack{m_l=-l \\ m_{l'}=-l'}}^{l,l'} i^{l-l'} j_l(kr_x) j_{l'}(kr_y) Y_{lm_l}(\Omega_x) Y^*_{lm_l}(\Omega_k) Y^*_{l'm_{l'}}(\Omega_x) Y_{l'm_{l'}}(\Omega_k), \tag{5.42}
$$

pode-se escrever

$$
\begin{aligned}
I^{(\omega)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{k^2 + p_\omega^2 - i\varepsilon} (4\pi)^2 \sum_{l,l'=0}^{\infty} \sum_{\substack{m_l=-l \\ m_{l'}=-l'}}^{l,l'} i^{l-l'} j_l(kr_x) j_{l'}(kr_y) \\
&\times \int \mathrm{d}\Omega_x \Phi^\dagger_\alpha Y_{lm_l}(\Omega_x) \Phi_\beta \int \mathrm{d}\Omega_y \Phi^\dagger_\gamma Y^*_{l'm_{l'}}(\Omega_y) \Phi_\delta \int \mathrm{d}\Omega_k Y^*_{lm_l}(\Omega_k) Y_{l'm_{l'}}(\Omega_k) \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m_l=-l}^{l} I^{(\omega)}_l(r_x, r_y) (-1)^{m_l} \langle l_\alpha \frac{1}{2} j_\alpha m_\alpha \mid Y_{lm_l} \mid l_\beta \frac{1}{2} j_\beta m_\beta \rangle \\
&\times \langle l_\gamma \frac{1}{2} j_\gamma m_\gamma \mid Y_{l-m_l} \mid l_\delta \frac{1}{2} j_\delta m_\delta \rangle, \qquad (5.43)
\end{aligned}
$$

onde se definiu

$$
I^{(\omega)}_l(r_x, r_y) = \int_0^\infty \mathrm{d}k \frac{k^2}{k^2 + p_\omega^2 - i\varepsilon} j_l(kr_x) j_{l'}(kr_y). \qquad (5.44)
$$

Calcula-se primeiramente a integral radial. Já que o integrando é uma função par, pode-se passar essa integral para os limites $-\infty$ a $+\infty$, dividindo-a por 2 e, então , resolvendo-se a integral por resíduos. Como as funções de Bessel, $j_l(r)$, têm comportamento senoidal para $r \to \infty$, reescreve-se $j_l(r)$ em termos de funções de Hankel,

$$
j_l(r) = \frac{1}{2} \left[h^{(1)}_l(r) + h^{(2)}_l(r) \right], \qquad (5.45)
$$

com comportamento, para $r \to \infty$, dado por

$$
\begin{aligned}
h^{(1)}_l(r) &\to -ir^{-1} e^{i[r - \frac{1}{2} l\pi]} \qquad (5.46) \\
h^{(2)}_l(r) &\to ir^{-1} e^{-i[r - \frac{1}{2} l\pi]}. \qquad (5.47)
\end{aligned}
$$

Com isso a integral radial fica escrita como

$$
\begin{aligned}
I^{(\omega)}_l(r_x, r_y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \frac{k^2}{k^2 + p_\omega^2} \frac{1}{4} \Big\{ & h^{(1)}_l(r_x) h^{(1)}_l(r_y) + h^{(2)}_l(r_x) h^{(2)}_l(r_y) \\
& + h^{(1)}_l(r_x) h^{(2)}_l(r_y) + h^{(2)}_l(r_x) h^{(1)}_l(r_y) \Big\}. \qquad (5.48)
\end{aligned}
$$

Pode-se, agora, passar essa integral para o plano complexo e, de acordo com o comportamento apresentado em (5.46) e (5.47), fechar o contorno por cima ou por baixo. Obviamente, para o primeiro termo deve-se fechá-lo por cima e para o segundo, por baixo. O terceiro e quarto termos requerem um pouco mais de análise. No caso em que r_x é maior que r_y, o terceiro termo deve ter seu contorno fechado por cima e o quarto termo, por

baixo. No caso contrário ($r_y > r_x$) fecham-se os contornos do terceiro e quarto termos por baixo e por cima, respectivamente. Já que se tem dois polos em $\pm ip$, acaba-se por obter

$$\begin{aligned} I_l^{(\omega)}(r_x, r_y) &= -\frac{\pi p_\omega}{4}\Big\{h_l^{(1)}(ip_\omega r_x)h_l^{(1)}(ip_\omega r_y) + \theta(r_x - r_y)h_l^{(1)}(ip_\omega r_x)h_l^{(2)}(ip_\omega r_y) + \\ &\quad + \theta(r_y - r_x)h_l^{(2)}(ip_\omega r_x)h_l^{(1)}(ip_\omega r_y)\Big\}. \end{aligned} \tag{5.49}$$

onde se usou o fato de que $h_l^{(2)}(ir) = (-1)^l h_l^{(1)}(-ir)$.

Passa-se, agora, ao cálculo dos elementos de matriz. Usando-se o teorema de Wigner-Eckart, tem-se

$$\langle l_\alpha \frac{1}{2} j_\alpha m_\alpha \mid Y_{lm_l} \mid l_\beta \frac{1}{2} j_\beta m_\beta\rangle = \frac{(-1)^{l-j_\beta+j_\alpha}}{(2j_\alpha+1)^{1/2}}\langle l m_l j_\beta m_\beta \mid l j_\beta j_\alpha m_\alpha\rangle\langle l_\alpha \frac{1}{2} j_\alpha \mid\mid Y_l \mid\mid l_\beta \frac{1}{2} j_\beta\rangle. \tag{5.50}$$

Usando-se então alguns resultados da teoria do momento angular (veja, por exemplo, Edmonds [52]), tem-se

$$\langle l_\alpha \frac{1}{2} j_\alpha \mid\mid Y_l \mid\mid l_\beta \frac{1}{2} j_\beta\rangle = (-1)^{j_\alpha+\frac{1}{2}+j_\beta+l}\left[(2j_\alpha+1)(2j_\beta+1)\right]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} l_\alpha & j_\alpha & \frac{1}{2} \\ j_\beta & l_\beta & l \end{Bmatrix} \langle l_\alpha \mid\mid Y_l \mid\mid l_\beta\rangle, \tag{5.51}$$

com

$$\langle l_\alpha \mid\mid Y_l \mid\mid l_\beta\rangle = (-1)^{l_\alpha}\left[\frac{(2l_\alpha+1)(2l_\beta+1)(2l+1)}{4\pi}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^{l_\alpha-l}}{(2l_\beta+1)^{\frac{1}{2}}}\langle l_\alpha 0 l 0 \mid l_\alpha l l_\beta 0\rangle. \tag{5.52}$$

Unindo-se estes resultados, acaba-se por encontrar

$$\begin{aligned} \langle l_\alpha \frac{1}{2} j_\alpha m_\alpha \mid Y_{lm_l} \mid l_\beta \frac{1}{2} j_\beta m_\beta\rangle &= (-1)^{j_\alpha+\frac{1}{2}+l+l_\alpha}\left[\frac{(2l_\alpha+1)(2j_\beta+1)(2l+1)}{4\pi}\right]^{\frac{1}{2}}\langle l_\alpha 0 l 0 \mid l_\alpha l l_\beta 0\rangle \\ &\quad \times \langle l m_l j_\beta m_\beta \mid l j_\beta j_\alpha\rangle \begin{Bmatrix} l_\alpha & j_\alpha & \frac{1}{2} \\ j_\beta & l_\beta & l \end{Bmatrix}. \end{aligned} \tag{5.53}$$

Substituindo-se o resultado (5.53) em (5.43) e lembrando-se de (5.37), obtém-se

$$\begin{aligned} I_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) &= \frac{2}{\pi}\sum_l \left(I_l^{(\omega)}(r_x, r_y) - I_l^{(\rho)}(r_x, r_y)\right)(-1)^{m_\alpha - m_\beta}(-1)^{j_\alpha+j_\gamma+l_\alpha+l_\gamma+1} \\ &\quad \times \left[(2l_\alpha+1)(2j_\beta+1)(2l_\gamma+1)(2j_\delta+1)\right]^{\frac{1}{2}}\frac{(2l+1)}{4\pi} \\ &\quad \times \langle l_\alpha 0 l 0 \mid l_\alpha l l_\beta 0\rangle\langle l_\gamma 0 l 0 \mid l_\gamma l l_\delta 0\rangle \\ &\quad \times \langle l m_\alpha - m_\beta j_\beta m_\beta \mid l j_\beta j_\alpha m_\alpha\rangle\langle l m_\alpha - m_\beta j_\delta m_\delta \mid l j_\delta j_\gamma m_\gamma\rangle \\ &\quad \times \begin{Bmatrix} l_\alpha & j_\alpha & \frac{1}{2} \\ j_\beta & l_\beta & l \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l_\gamma & j_\gamma & \frac{1}{2} \\ j_\delta & l_\delta & l \end{Bmatrix}, \end{aligned} \tag{5.54}$$

onde $I_l^{(\omega)}$ (e, analogamente, $I_l^{(\rho)}$) é dado em (5.49).

Volta-se novamente à expressão (5.36). Analisam-se, agora, os termos dependentes de spin, ou seja, os termos que contêm a integral $J_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Com efeito, procedendo-se de modo análogo ao seguido na obtenção de (5.43), encontra-se

$$\begin{aligned}
J^{(\omega)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) &= \frac{2}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m_l=-l}^{l} I_l^{(\omega)}(r_x, r_y) \\
&\quad (-1)^{m_l}\langle l_\alpha \frac{1}{2} j_\alpha m_\alpha \mid Y_{lm_l}\vec{\sigma} \mid l_\beta \frac{1}{2} j_\beta m_\beta\rangle . \langle l_\gamma \frac{1}{2} j_\gamma m_\gamma \mid Y_{l-m_l}\vec{\sigma} \mid l_\delta \frac{1}{2} j_\delta m_\delta\rangle \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m_l=-l}^{l} I_l^{(\omega)}(r_x, r_y) \\
&\quad \sum_{m_l=-l}^{l}(-1)^{m_l}\langle l_\alpha \frac{1}{2} j_\alpha m_\alpha \mid Y_{lm_l}\vec{\sigma} \mid l_\beta \frac{1}{2} j_\beta m_\beta\rangle\langle l_\gamma \frac{1}{2} j_\gamma m_\gamma \mid Y_{l-m_l}\vec{\sigma} \mid l_\delta \frac{1}{2} j_\delta m_\delta\rangle \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m_l=-l}^{l} I_l^{(\omega)}(r_x, r_y) \\
&\quad \sum_{m_l m_s}(-1)^{m_l+m_s}\langle l_\alpha \frac{1}{2} j_\alpha m_\alpha \mid Y_{lm_l}\sigma^1_{m_s} \mid l_\beta \frac{1}{2} j_\beta m_\beta\rangle \\
&\quad \langle l_\gamma \frac{1}{2} j_\gamma m_\gamma \mid Y_{l-m_l}\sigma^1_{-m_s} \mid l_\delta \frac{1}{2} j_\delta m_\delta\rangle \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m_l=-l}^{l} I_l^{(\omega)}(r_x, r_y) \\
&\quad \sum_{m_l m_s}\sum_{jm}\sum_{j'm'}\langle l m_l 1 m_s \mid l 1 j m\rangle\langle l - m_l 1 - m_s \mid l 1 j' m'\rangle \\
&\quad \times(-1)^m\langle l_\alpha \frac{1}{2} j_\alpha m_\alpha \mid (Y_l\sigma^1)^j_m \mid l_\beta \frac{1}{2} j_\beta m_\beta\rangle\langle l_\gamma \frac{1}{2} j_\gamma m_\gamma \mid (Y_l\sigma^1)^{j'}_{m'} \mid l_\delta \frac{1}{2} j_\delta m_\delta\rangle,
\end{aligned}$$

onde $I_l^{(\omega)}(r_x, r_y)$ é dado pela expressão (5.49). Usando-se a propriedade de simetria do coeficiente de Clebsch-Gordon,

$$\langle l - m_l 1 - m_s \mid l 1 j' m'\rangle = (-1)^{l+1+j'}\langle l m_l 1 m_s \mid l 1 j' - m'\rangle, \tag{5.55}$$

e a relação de ortogonalidade

$$\sum_{m_l m_s}\langle l m_l 1 m_s \mid l 1 j m\rangle\langle l m_l 1 m_s \mid l 1 j' - m'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{m-m'}, \tag{5.56}$$

encontra-se

$$J^{(\omega)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) = \frac{2}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty} I_l^{(\omega)}(r_x, r_y)\sum_j(-1)^{j+l+1}$$

$$\sum_m (-1)^m \langle l_\alpha \frac{1}{2} j_\alpha m_\alpha \mid (Y_l \sigma^1)^j_m \mid l_\beta \frac{1}{2} j_\beta m_\beta \rangle . \langle l_\gamma \frac{1}{2} j_\gamma m_\gamma \mid (Y_l \sigma^1)^j_{-m} \mid l_\delta \frac{1}{2} j_\delta m_\delta \rangle . \tag{5.57}$$

Usando-se novamente resultados da teoria do momento angular dados em [52], tem-se

$$\begin{aligned} &\langle l_\alpha \frac{1}{2} j_\alpha m_\alpha \mid (Y_l \sigma^1)^j_m \mid l_\beta \frac{1}{2} j_\beta m_\beta \rangle = \\ &= \frac{(-1)^{j-j_\beta+j_\alpha}}{(2j_\alpha+1)^{1/2}} \langle j m j_\beta m_\beta \mid j j_\beta j_\alpha m_\alpha \rangle \langle l_\alpha \frac{1}{2} j_\alpha \mid\mid (Y_l \sigma^1)^j \mid\mid l_\beta \frac{1}{2} j_\beta \rangle, \end{aligned} \tag{5.58}$$

onde

$$\begin{aligned} \langle l_\alpha \frac{1}{2} j_\alpha \mid\mid (Y_l \sigma^1)^j \mid\mid l_\beta \frac{1}{2} j_\beta \rangle &= \langle l_\alpha \mid\mid Y_l \mid\mid l_\beta \rangle \langle \frac{1}{2} \mid\mid \vec{\sigma} \mid\mid \frac{1}{2} \rangle \\ &\quad [(2j_\alpha+1)(2j_\beta+1)(2j+1)]^{1/2} \begin{Bmatrix} l_\alpha & l_\beta & l \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ j_\alpha & j_\beta & j \end{Bmatrix}, \end{aligned} \tag{5.59}$$

com

$$\langle l_\alpha \mid\mid Y_l \mid\mid l_\beta \rangle = (-1)^{l_\alpha} \left[\frac{(2l_\alpha+1)(2l_\beta+1)(2l+1)}{4\pi} \right]^{1/2} \frac{(-1)^{l_\alpha - l}}{(2l_\beta+1)^{1/2}} \langle l_\alpha 0 l 0 \mid l_\alpha l l_\beta 0 \rangle \tag{5.60}$$

e

$$\langle \frac{1}{2} \mid\mid \vec{\sigma} \mid\mid \frac{1}{2} \rangle = \sqrt{6}. \tag{5.61}$$

Usando-se todos estes resultados, acaba-se por obter

$$\begin{aligned} \langle l_\alpha \frac{1}{2} j_\alpha m_\alpha \mid (Y_l \sigma^1)^j_m \mid l_\beta \frac{1}{2} j_\beta m_\beta \rangle &= (-1)^{j+j_\alpha-j_\beta+l} \left[3 \frac{(2l_\alpha+1)(2l+1)(2j_\beta+1)(2j+1)}{2\pi} \right]^{1/2} \\ &\quad \langle l_\alpha 0 l 0 \mid l_\alpha l l_\beta 0 \rangle \times \langle j m j_\beta m_\beta \mid j j_\beta j_\alpha m_\alpha \rangle \begin{Bmatrix} l_\alpha & l_\beta & l \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ j_\alpha & j_\beta & j \end{Bmatrix}. \end{aligned} \tag{5.62}$$

É usado, então, este resultado em (5.57), o qual substituído em (5.38), acaba em

$$\begin{aligned} J_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) &= \frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \left(I_l^{(\omega)}(r_x, r_y) - I_l^{(\rho)}(r_x, r_y) \right) \sum_j (-1)^{j+l+1} (-1)^{m_\alpha - m_\beta} (-1)^{j_\alpha - j_\beta + j_\gamma - j_\delta} \\ &\quad \frac{3}{2\pi} [(2l_\alpha+1)(2l_\gamma+1)(2j_\beta+1)(2j_\delta+1)]^{1/2} (2l+1)(2j+1) \end{aligned}$$

$$\times\langle l_\alpha 0 l 0 \mid l_\alpha l l_\beta 0\rangle\langle l_\gamma 0 l 0 \mid l_\gamma l l_\delta 0\rangle$$

$$\times\langle j m_\alpha - m_\beta j_\beta m_\beta \mid j j_\beta j_\alpha m_\alpha\rangle\langle j - m_\alpha + m_\beta j_\delta m_\delta \mid j j_\delta j_\gamma m_\gamma\rangle$$

$$\times\begin{Bmatrix} l_\alpha & l_\beta & l \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ j_\alpha & j_\beta & j \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l_\gamma & l_\delta & l \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ j_\gamma & j_\delta & j \end{Bmatrix}. \tag{5.63}$$

Segundo Termo

O segundo termo em (5.25) é dado por

$$\begin{aligned}
\text{Termo} - 2 \;=\; & -\frac{g_{\rho\omega}g_\rho g_\omega}{m_\omega^2 - m\rho^2}\int r_x^2 \mathrm{d}r_x r_y^2 \mathrm{d}r_y \int \mathrm{d}\Omega_x \int \mathrm{d}\Omega_y \\
& \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\left\{D_{\mu\nu}(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta, \vec{k}) - R_{\mu\nu}(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta, \vec{k})\right\} e^{-i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{y})} \\
& \sum_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\kappa_\omega}{2M}\frac{\kappa_\rho}{2M}(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta)^2 \overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x})\sigma^{0\mu}\mathcal{U}_\beta(\vec{x})\overline{\mathcal{U}}_\gamma(\vec{x})\sigma_{0\mu}\tau_3\mathcal{U}_\delta(\vec{x}) \\
= \; & -\frac{g_{\rho\omega}g_\rho g_\omega}{m_\omega^2 - m\rho^2}\int r_x^2 \mathrm{d}r_x r_y^2 \mathrm{d}r_y \sum_{\alpha\beta\gamma\delta}\int \mathrm{d}\Omega_x \int \mathrm{d}\Omega_y \\
& \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\left\{D_{\mu\nu}(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta, \vec{k}) - R_{\mu\nu}(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta, \vec{k})\right\} e^{-i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{y})} \\
& \frac{\kappa_\omega}{2M}\frac{\kappa_\rho}{2M}(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta)^2 \frac{1}{r_x^2 r_y^2}\left\{g_\alpha f_\beta g_\gamma f_\delta \left[\Phi_\alpha^\dagger \vec{\sigma}\Phi_{-\beta}\right]\cdot\left[\Phi_\gamma^\dagger \vec{\sigma}\Phi_{-\delta}\right]\right. \\
& -g_\alpha f_\beta f_\gamma g_\delta \left[\Phi_\alpha^\dagger \vec{\sigma}\Phi_{-\beta}\right]\cdot\left[\Phi_{-\gamma}^\dagger \vec{\sigma}\Phi_\delta\right] \\
& -f_\alpha g_\beta g_\gamma f_\delta \left[\Phi_{-\alpha}^\dagger \vec{\sigma}\Phi_\beta\right]\cdot\left[\Phi_\gamma^\dagger \vec{\sigma}\Phi_{-\delta}\right] \\
& \left.+f_\alpha g_\beta f_\gamma g_\delta \left[\Phi_{-\alpha}^\dagger \vec{\sigma}\Phi_\beta\right]\cdot\left[\Phi_{-\gamma}^\dagger \vec{\sigma}\Phi_\delta\right]\right\}\tau_\gamma \delta_{\tau_\alpha,\tau_\beta}\delta_{\tau_\gamma,\tau_\delta} \\
= & -\frac{g_{\rho\omega}g_\rho g_\omega}{m_\omega^2 - m\rho^2}\int \mathrm{d}r_x \mathrm{d}r_y \sum_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\kappa_\omega}{2M}\frac{\kappa_\rho}{2M}(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta)^2 \\
& \{g_\alpha f_\beta g_\gamma f_\delta J_{\alpha-\beta\gamma-\delta} - g_\alpha f_\beta f_\gamma g_\delta J_{\alpha-\beta-\gamma\delta} \\
& -f_\alpha g_\beta g_\gamma f_\delta J_{-\alpha\beta\gamma-\delta} + f_\alpha g_\beta f_\gamma g_\delta J_{-\alpha\beta-\gamma\delta}\}\tau_\gamma \delta_{\tau_\alpha,\tau_\beta}\delta_{\tau_\gamma,\tau_\delta},
\end{aligned} \tag{5.64}$$

onde $J_{\alpha\beta\gamma\delta}$ é dado em (5.63).

Terceiro Termo

O terceiro termo é dado por

$$\begin{aligned}
\text{Termo} - 3 \;=\; & -\frac{g_{\rho\omega}g_\rho g_\omega}{m_\omega^2 - m\rho^2}\int r_x^2 \mathrm{d}r_x r_y^2 \mathrm{d}r_y \int \mathrm{d}\Omega_x \int \mathrm{d}\Omega_y \\
& \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\left\{D_{\mu\nu}(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta, \vec{k}) - R_{\mu\nu}(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta, \vec{k})\right\} e^{-i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{y})}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} i\frac{\kappa_\rho}{2M} k_i \overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x})\gamma_\mu \mathcal{U}_\beta(\vec{x})\overline{\mathcal{U}}_\gamma(\vec{y})\sigma_{i\mu}\tau_3\mathcal{U}_\delta(\vec{y}) \\
= & -\frac{g_{\rho\omega}g_\rho g_\omega}{m_\omega^2 - m\rho^2}\int r_x^2 \mathrm{d}r_x r_y^2 \mathrm{d}r_y \sum_{\alpha\beta\gamma\delta}\int \mathrm{d}\Omega_x \int \mathrm{d}\Omega_y \\
& \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\left\{D_{\mu\nu}(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta, \vec{k}) - R_{\mu\nu}(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta, \vec{k})\right\} e^{-i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{y})} \\
& i\frac{\kappa_\rho}{2M}\frac{1}{r_x^2 r_y^2}\left\{i\left(g_\alpha g_\beta g_\gamma f_\delta\left[\Phi_\alpha^\dagger\Phi_\beta\right]\left[\Phi_\gamma^\dagger\vec{k}.\vec{\sigma}\Phi_{-\delta}\right] + g_\alpha g_\beta f_\gamma g_\delta\left[\Phi_\alpha^\dagger\Phi_\beta\right]\left[\Phi_{-\gamma}^\dagger\vec{k}.\vec{\sigma}\Phi_\delta\right]\right.\right. \\
& + f_\alpha f_\beta g_\gamma f_\delta\left[\Phi_{-\alpha}^\dagger\Phi_{-\beta}\right]\left[\Phi_\gamma^\dagger\vec{k}.\vec{\sigma}\Phi_{-\delta}\right] + f_\alpha f_\beta f_\gamma g_\delta\left[\Phi_{-\alpha}^\dagger\Phi_{-\beta}\right]\left[\Phi_{-\gamma}^\dagger\vec{k}.\vec{\sigma}\Phi_\delta\right]\Big) \\
& -\Big[g_\alpha f_\beta g_\gamma g_\delta\left[\Phi_\alpha^\dagger\Phi_\gamma^\dagger\vec{k}.(\vec{\sigma}^{(1)}\times\vec{\sigma}^{(2)})\Phi_{-\beta}\Phi_\delta\right] \\
& -g_\alpha f_\beta f_\gamma f_\delta\left[\Phi_\alpha^\dagger\Phi_{-\gamma}^\dagger\vec{k}.(\vec{\sigma}^{(1)}\times\vec{\sigma}^{(2)})\Phi_{-\beta}\Phi_{-\delta}\right] \\
& -f_\alpha g_\beta g_\gamma g_\delta\left[\Phi_{-\alpha}^\dagger\Phi_\gamma^\dagger\vec{k}.(\vec{\sigma}^{(1)}\times\vec{\sigma}^{(2)})\Phi_\beta\Phi_\delta\right] \\
& +f_\alpha g_\beta f_\gamma f_\delta\left[\Phi_{-\alpha}^\dagger\Phi_\gamma^{-\dagger}\vec{k}.(\vec{\sigma}^{(1)}\times\vec{\sigma}^{(2)})\Phi_\beta\Phi_{-\delta}\right]\Big]\Big\}\,\tau_\gamma\delta_{\tau_\alpha,\tau_\beta}\delta_{\tau_\gamma,\tau_\delta} \\
= & -\frac{g_{\rho\omega}g_\rho g_\omega}{m_\omega^2 - m\rho^2}\int \mathrm{d}r_x \mathrm{d}r_y \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} i\frac{\kappa_\rho}{2M} \\
& \{g_\alpha g_\beta g_\gamma f_\delta K_{\alpha\beta\gamma-\delta}(r_x, r_y) + g_\alpha g_\beta f_\gamma g_\delta K_{\alpha\beta-\gamma\delta}(r_x, r_y) \\
& +f_\alpha f_\beta g_\gamma f_\delta K_{-\alpha-\beta\gamma-\delta}(r_x, r_y) + f_\alpha f_\beta f_\gamma g_\delta K_{-\alpha-\beta-\gamma\delta}(r_x, r_y) \\
& -[g_\alpha f_\beta g_\gamma g_\delta L_{\alpha-\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) - g_\alpha f_\beta f_\gamma f_\delta L_{\alpha-\beta-\gamma-\delta}(r_x, r_y) \\
& -f_\alpha g_\beta g_\gamma g_\delta L_{-\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) + f_\alpha g_\beta f_\gamma f_\delta L_{-\alpha\beta-\gamma-\delta}(r_x, r_y)]\}\,\tau_\gamma\delta_{\tau_\alpha,\tau_\beta}\delta_{\tau_\gamma,\tau_\delta}, \qquad (5.65)
\end{aligned}
$$

onde de modo análogo aos casos anteriores, se definiu

$$K_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) = K^{(\omega)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) - K^{(\rho)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) \qquad (5.66)$$

e

$$L_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) = L^{(\omega)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) - L^{(\rho)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y), \qquad (5.67)$$

com

$$K^{(\omega)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) = \int \mathrm{d}\Omega_x \mathrm{d}\Omega_y \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{y})}}{\vec{k}^2 + p_\omega^2 - i\varepsilon}\left[\Phi_\alpha^\dagger\Phi_\beta\right]\left[\Phi_\gamma\vec{k}.\vec{\sigma}\Phi_\delta\right] \qquad (5.68)$$

e

$$L^{(\omega)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) = \int \mathrm{d}\Omega_x \mathrm{d}\Omega_y \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{y})}}{\vec{k}^2 + p_\omega^2 - i\varepsilon}\left[\Phi_\alpha^\dagger\Phi_\gamma^\dagger\vec{k}.(\vec{\sigma}^{(1)}\times\vec{\sigma}^{(2)})\Phi_\beta\Phi_\delta\right]. \qquad (5.69)$$

Com o mesmo procedimento seguido anteriormente, pode-se escrever

$$K^{(\omega)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k}{(2\pi)^3}\frac{k^2}{k^2 + p_\omega^2 - i\varepsilon}(4\pi)^2 \sum_{l,l'=0}^{\infty}\sum_{\substack{m_l=-l \\ m_{l'}=-l'}}^{l,l'} i^{l-l'} j_l(kr_x) j_{l'}(kr_y)$$

$$k \int d\Omega_x \Phi_\alpha^\dagger Y_{lm_l}(\Omega_x)\Phi_\beta \int d\Omega_y \Phi_\gamma^\dagger Y^*_{l'm_{l'}}(\Omega_y)\vec{\sigma}\Phi_\delta . \int d\Omega_k \hat{k} Y^*_{lm_l}(\Omega_k) Y_{l'm_{l'}}(\Omega_k). \tag{5.70}$$

Usando-se então, o fato de que

$$\vec{\sigma}.\hat{k} = \sum_{m_s}(-1)^{m_s}\sigma_{m_s}\hat{k}_{-m_s} = \sum_{m_s}(-1)^{m_s}\sigma_{m_s}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{1,m_s}(\Omega_k), \tag{5.71}$$

tem-se

$$\int d\Omega_k \hat{k}_{m_s} Y^*_{lm_l}(\Omega_k) Y_{l'm_{l'}}(\Omega_k) = -\langle 10l0 \mid l'1lm_l\rangle\langle l' - m_{l'}1m_s \mid l'1l - m_l\rangle. \tag{5.72}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} K^{(\omega)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) &= \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^3}\frac{k^3}{k^2 + p_\omega^2 - i\varepsilon}(4\pi)^2 \sum_{l,l'=0}^{\infty}\sum_{\substack{m_l=-l\\ m_{l'}=-l'}}^{l,l'} i^{l-l'} j_l(kr_x) j_{l'}(kr_y) \\ &\times\langle l_\alpha \frac{1}{2} j_\alpha m_\alpha \mid Y_{lm_l} \mid l_\beta \frac{1}{2} j_\beta m_\beta\rangle(-1)^{m_l'+1}\langle 10l0 \mid 1ll'0\rangle \\ &\sum_{m_s}(-1)^{m_s}\langle l_\gamma \frac{1}{2} j_\gamma m_\gamma \mid Y_{l'-m_l'}\sigma_{m_s} \mid l_\delta \frac{1}{2} j_\delta m_\delta\rangle\langle l' - m_l' 1 m_s \mid l'1l - m_l\rangle. \end{aligned} \tag{5.73}$$

Acoplando o harmônico esférico ao operador de spin, tem-se

$$Y_{l'-m_l'}\sigma_{m_s}\sum_{jm}\langle l' - m_l' 1 m_s \mid l'1jm\rangle(Y_{l'}\sigma)^j_m, \tag{5.74}$$

e com este resultado, encontra-se

$$\begin{aligned} K^{(\omega)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) &= \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^3}\frac{k^3}{k^2 + p_\omega^2 - i\varepsilon}(4\pi)^2 \sum_{l,l'=0}^{\infty}\sum_{\substack{m_l=-l\\ m_{l'}=-l'}}^{l,l'} i^{l-l'} j_l(kr_x) j_{l'}(kr_y)\langle 10l0 \mid 1ll'0\rangle \\ &\times\langle l_\alpha \frac{1}{2} j_\alpha m_\alpha \mid Y_{lm_l} \mid l_\beta \frac{1}{2} j_\beta m_\beta\rangle \\ &(-1)^{m_l'+1}\sum_{m_s}(-1)^{m_s}\sum_{jm}\langle l_\gamma \frac{1}{2} j_\gamma m_\gamma \mid (Y_{l'}\sigma)^j_m \mid l_\delta \frac{1}{2} j_\delta m_\delta\rangle \\ &\langle l' - m_l' 1 m_s \mid l'1jm\rangle\langle l' - m_l' 1 m_s \mid l'1l - m_l\rangle \\ &= \sum_{l,l'=0}^{\infty} K_{ll'}(r_x, r_y)\langle 10l0 \mid 1ll'0\rangle \\ &\sum_m(-1)^{m+1}\langle l_\alpha \frac{1}{2} j_\alpha m_\alpha \mid Y_{l-m} \mid l_\beta \frac{1}{2} j_\beta m_\beta\rangle\langle l_\gamma \frac{1}{2} j_\gamma m_\gamma \mid (Y_{l'}\sigma)^l_m \mid l_\delta \frac{1}{2} j_\delta m_\delta\rangle, \end{aligned} \tag{5.75}$$

onde foi definida a integral

$$K_{ll'}^{(\omega)}(r_x, r_y) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k}{(2\pi)^3} \frac{k^3}{k^2 + p_\omega^2 - i\varepsilon} (4\pi)^2 i^{l-l'} j_l(kr_x) j_{l'}(kr_y). \tag{5.76}$$

Os elementos de matriz em (5.75) já foram calculados anteriormente, com os resultados (5.53) e (5.62), restando obter a função $K_{ll'}$. Para tanto, deve-se ressaltar o fato de que devido à simetria do coeficiente de Clebsch-Gordon $\langle 10l0 \mid 1ll'0\rangle$, devemos ter $l - l' = 2n - 1$ (número ímpar). Em outras palavras, devido a essa simetria as funções de Bessel em (5.76) têm paridades opostas, que juntamente com k^3 formam uma função par. Assim, pode-se passar os limites da integral em k de 0 a ∞ para $-\infty$ a ∞ como havia sido feito anteriormente, possibilitando a integração pelo teorema dos resíduos. Feito isso, a integral (5.76) resulta em

$$\begin{aligned} K_{ll'}^{(\omega)}(r_x, r_y) &= -(i)^{l-l'} \frac{\pi}{4} i p_\omega^2 \left\{ h_l^{(1)}(ip_\omega r_x) h_l^{(1)}(ip_\omega r_y) + \theta(r_x - r_y) h_l^{(1)}(ip_\omega r_x) h_l^{(2)}(ip_\omega r_y) + \right. \\ &\quad \left. + \theta(r_y - r_x) h_l^{(2)}(ip_\omega r_x) h_l^{(1)}(ip_\omega r_y) \right\}. \end{aligned} \tag{5.77}$$

Com este resultado, juntamente com (5.53) e (5.62) e lembrando (5.66), obtém-se

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{l,l'=0}^{\infty} \left(K_{ll'}^{(\omega)}(r_x, r_y) - K_{ll'}^{(\rho)}(r_x, r_y) \right) \langle 10l0 \mid 1ll'0\rangle \\ &\quad (-1)^{2j_\alpha + j_\beta - j_\delta + j_\gamma + 1/2 + m_\alpha - m_\beta + l' + l_\beta + 1} (2l+1) \\ &\quad \left[\frac{3}{2} (2l_\alpha + 1)(2j_\beta + 1)(2j_\delta + 1)(2l_\gamma + 1)(2l' + 1) \right]^{1/2} \\ &\quad \langle l_\alpha 0 l 0 \mid l_a l phall_\beta 0\rangle \langle l_\gamma 0 l 0 \mid l_\gamma l' l_\delta 0\rangle \\ &\quad \langle l m_\alpha - m_\beta j_\beta m_\beta \mid l j_\beta j_\alpha m_\alpha\rangle \langle l m_\beta - m_\alpha j_\delta m_\delta \mid l j_\delta j_\gamma m_\gamma\rangle \\ &\quad W(l_\alpha j_\alpha l_\beta j_\beta; \frac{1}{2} l) \begin{Bmatrix} l_\gamma & l_\delta & l' \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ j_\gamma & j_\delta & l \end{Bmatrix}. \end{aligned} \tag{5.78}$$

Precisamos, agora, calcular a contribuição da expressão (5.69). Com efeito, sabendo que

$$\vec{k}.(\vec{\sigma}^{(1)} \times \vec{\sigma}^{(2)}) = i\sqrt{2} \sum_n (-1)^n k_{-n} \sum_{m_s} \langle 1 m_s 1 n - m_s \mid 111 n\rangle \sigma_{m_s}^{(1)} \sigma_{n-m_s}^{(2)} \tag{5.79}$$

obtém-se

$$L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(\omega)}(r_x, r_y) = -\int \frac{\mathrm{d}k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{\vec{k}^2 + p_\omega^2 - i\varepsilon} (4\pi)^2 \sum_{ll'} \sum_{m_l m_l'} i^{l-l'} j_l(kr_x) j_l(kr_y)$$

$$k\sqrt{2}\sum_n(-1)^n k_{-n}\sum_{m_s}\langle 1m_s 1n - m_s \mid 111n\rangle$$
$$\int d\Omega_x \Phi^\dagger_\alpha \sigma_{m_s}\Phi_\beta Y_{lm_l}\int d\Omega_y \Phi^\dagger_\gamma \sigma_{n-m_s}\Phi_\delta Y^*_{l'm'_l}\int d\Omega_k \hat{k}_{-n} Y^*_{lm_l}Y_{l'm'_l} \quad (5.80)$$

A integral em Ω_k já foi obtida em (5.72). Usando-se, então, propriedades de simetria e ortogonalidade dos coeficientes de Clebsch-Gordon, obtém-se

$$\begin{aligned} L^{(\omega)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) &= +i\int \frac{dk}{(2\pi)^3}\frac{k^2}{\vec{k}^2 + p^2_\omega - i\varepsilon}(4\pi)^2\sum_{ll'}\sum_{m_l m'_l} i^{l-l'} j_l(kr_x) j_l(kr_y) \\ &[6(2l+1)]^{1/2}\langle 10l0 \mid 1ll'0\rangle \sum_j W(11l'l;1j) \\ &\sum_m (-1)^m \langle l_\alpha \frac{1}{2} j_\alpha m_\alpha \mid (Y_l\sigma^1)^j_m \mid l_\beta \frac{1}{2} j_\beta m_\beta\rangle . \langle l_\gamma \frac{1}{2} j_\gamma m_\gamma \mid (Y_l\sigma^1)^j_{-m} \mid l_\delta \frac{1}{2} j_\delta m_\delta\rangle \end{aligned} \quad (5.81)$$

Deve-se notar que, tanto a integral em k, como os elementos de matriz angulares, já foram obtidos em (5.62). Portanto pode-se escrever o resultado final como

$$\begin{aligned} L_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) &= \sum_{ll'}\left(K^{(\omega)}_{ll'}(r_x, r_y) - K^{(\rho)}_{ll'}(r_x, r_y)\right)(-1)^{j_\alpha - j_\beta + j_\gamma - j_\delta + m_\alpha - m_\beta + l + l'}\frac{3}{\pi^2} \\ &[(2l_\alpha+1)(2j_\delta+1)(2j_\beta+1)(2l_\gamma+1)(2l'+1)]^{1/2}(2l+1)\langle 10l0 \mid 1ll'0\rangle \\ &\langle l_\alpha 0l0 \mid l_a lphall_\beta 0\rangle\langle l_\gamma 0l'0 \mid l_\gamma l'l_\delta 0\rangle \sum_j (2j+1)W(11ll';1j) \\ &\langle jm_\alpha - m_\beta j_\beta m_\beta \mid jj_\beta j_\alpha m_\alpha\rangle\langle jm_\beta - m_\alpha j_\delta m_\delta \mid jj_\delta j_\gamma m_\gamma\rangle \\ &\begin{Bmatrix} l_\alpha & l_\beta & l \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ j_\alpha & j_\beta & j \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l_\gamma & l_\delta & l' \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ j_\gamma & j_\delta & j \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Quarto Termo

O quarto termo em (5.25) é praticamente idêntico ao terceiro termo e é dado por

$$\begin{aligned} \text{Termo} - 4 &= -\frac{g_{\rho\omega}g_\rho g_\omega}{m^2_\omega - m\rho^2}\int r^2_x dr_x r^2_y dr_y \int d\Omega_x \int d\Omega_y \\ &\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left\{D_{\mu\nu}(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta, \vec{k}) - R_{\mu\nu}(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta, \vec{k})\right\} e^{-i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{y})} \\ &\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} i\frac{\kappa_\omega}{2M} k_i \overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x})\sigma^{i\mu}\mathcal{U}_\beta(\vec{x})\overline{\mathcal{U}}_\gamma(\vec{y})\gamma_\mu\tau_3\mathcal{U}_\delta(\vec{y}) \\ &= -\frac{g_{\rho\omega}g_\rho g_\omega}{m^2_\omega - m\rho^2}\int dr_x dr_y \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} i\frac{\kappa_\omega}{2M} \end{aligned}$$

$$\{g_\alpha g_\beta g_\gamma f_\delta K_{\gamma-\delta\alpha\beta}(r_x,r_y) + g_\alpha g_\beta f_\gamma g_\delta K_{-\gamma\delta\alpha\beta}(r_x,r_y)$$
$$+f_\alpha f_\beta g_\gamma f_\delta K_{\gamma-\delta-\alpha-\beta}(r_x,r_y) + f_\alpha f_\beta f_\gamma g_\delta K_{-\gamma\delta-\alpha-\beta}(r_x,r_y)$$
$$-[g_\alpha f_\beta g_\gamma g_\delta L_{\gamma\delta\alpha-\beta}(r_x,r_y) - g_\alpha f_\beta f_\gamma f_\delta L_{-\gamma-\delta\alpha-\beta}(r_x,r_y)$$
$$-f_\alpha g_\beta g_\gamma g_\delta L_{\gamma\delta-\alpha\beta}(r_x,r_y) + f_\alpha g_\beta f_\gamma f_\delta L_{-\gamma-\delta-\alpha\beta}(r_x,r_y)]\}\,\tau_\gamma\delta_{\tau_\alpha,\tau_\beta}\delta_{\tau_\gamma,\tau_\delta}. \tag{5.83}$$

Quinto Termo

O quinto termo em (5.25) é dado por

$$\begin{aligned}
\text{Termo}-5 &= \frac{g_{\rho\omega}g_\rho g_\omega}{m_\omega^2 - m\rho^2}\int r_x^2 \mathrm{d}r_x r_y^2 \mathrm{d}r_y \int \mathrm{d}\Omega_x \int \mathrm{d}\Omega_y \\
&\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\left\{D_{\mu\nu}(\epsilon_\gamma-\epsilon_\delta,\vec{k}) - R_{\mu\nu}(\epsilon_\gamma-\epsilon_\delta,\vec{k})\right\} e^{-i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{y})} \\
&\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\kappa_\omega}{2M}\frac{\kappa_\rho}{2M}k_i k^j \overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x})\sigma^{i\mu}\mathcal{U}_\beta(\vec{x})\overline{\mathcal{U}}_\gamma(\vec{y})\sigma_{j\mu}\tau_3\mathcal{U}_\delta(\vec{y}) \\
&= -\frac{g_{\rho\omega}g_\rho g_\omega}{m_\omega^2 - m\rho^2}\int r_x^2 \mathrm{d}r_x r_y^2 \mathrm{d}y \sum_{\alpha\beta\gamma\delta}\int \mathrm{d}\Omega_x \int \mathrm{d}\Omega_y \\
&\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\left\{D_{\mu\nu}(\epsilon_\gamma-\epsilon_\delta,\vec{k}) - R_{\mu\nu}(\epsilon_\gamma-\epsilon_\delta,\vec{k})\right\} e^{-i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{y})} \\
&\frac{\kappa_\omega}{2M}\frac{\kappa_\rho}{2M}\frac{1}{r_x^2 r_y^2}\left\{g_\alpha f_\beta g_\gamma f_\delta\left[\Phi_\alpha^\dagger \vec{k}.\vec{\sigma}\Phi_{-\beta}\right]\left[\Phi_\gamma^\dagger \vec{k}.\vec{\sigma}\Phi_{-\delta}\right]\right. \\
&+g_\alpha f_\beta f_\gamma g_\delta\left[\Phi_\alpha^\dagger \vec{k}.\vec{\sigma}\Phi_{-\beta}\right]\left[\Phi_{-\gamma}^\dagger \vec{k}.\vec{\sigma}\Phi_\delta\right] \\
&+f_\alpha g_\beta g_\gamma f_\delta\left[\Phi_{-\alpha}^\dagger \vec{k}.\vec{\sigma}\Phi_\beta\right]\left[\Phi_\gamma^\dagger \vec{k}.\vec{\sigma}\Phi_{-\delta}\right] \\
&+f_\alpha g_\beta f_\gamma g_\delta\left[\Phi_{-\alpha}^\dagger \vec{k}.\vec{\sigma}\Phi_\beta\right]\left[\Phi_{-\gamma}^\dagger \vec{k}.\vec{\sigma}\Phi_\delta\right] \\
&+\left[g_\alpha g_\beta g_\gamma g_\delta\left[\Phi_\alpha^\dagger\Phi_\gamma^\dagger\left(k^2-(\vec{k}.\vec{\sigma}^{(1)})(\vec{k}.\vec{\sigma}^{(2)})\right)\Phi_\beta\Phi_\delta\right]\right. \\
&-g_\alpha g_\beta f_\gamma f_\delta\left[\Phi_\alpha^\dagger\Phi_{-\gamma}^\dagger\left(k^2-(\vec{k}.\vec{\sigma}^{(1)})(\vec{k}.\vec{\sigma}^{(2)})\right)\Phi_\beta\Phi_{-\delta}\right] \\
&-f_\alpha f_\beta g_\gamma g_\delta\left[\Phi_{-\alpha}^\dagger\Phi_\gamma^\dagger\left(k^2-(\vec{k}.\vec{\sigma}^{(1)})(\vec{k}.\vec{\sigma}^{(2)})\right)\Phi_{-\beta}\Phi_\delta\right] \\
&\left.\left.+f_\alpha f_\beta f_\gamma f_\delta\left[\Phi_{-\alpha}^\dagger\Phi_\gamma^{-\dagger}\left(k^2-(\vec{k}.\vec{\sigma}^{(1)})(\vec{k}.\vec{\sigma}^{(2)})\right)\Phi_{-\beta}\Phi_{-\delta}\right]\right]\right\}\tau_\gamma\delta_{\tau_\alpha,\tau_\beta}\delta_{\tau_\gamma,\tau_\delta} \\
&= \frac{g_{\rho\omega}g_\rho g_\omega}{m_\omega^2 - m\rho^2}\int \mathrm{d}r_x \mathrm{d}r_y \sum_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\kappa_\omega}{2M}\frac{\kappa_\rho}{2M} \\
&\{g_\alpha f_\beta g_\gamma f_\delta M_{\alpha-\beta\gamma-\delta}(r_x,r_y) + g_\alpha f_\beta f_\gamma g_\delta M_{\alpha-\beta-\gamma\delta}(r_x,r_y) \\
&+f_\alpha g_\beta g_\gamma f_\delta M_{-\alpha\beta\gamma-\delta}(r_x,r_y) + f_\alpha g_\beta f_\gamma g_\delta M_{-\alpha\beta-\gamma\delta}(r_x,r_y) \\
&+[g_\alpha g_\beta g_\gamma g_\delta N_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x,r_y) - g_\alpha g_\beta f_\gamma f_\delta N_{\alpha\beta-\gamma-\delta}(r_x,r_y) \\
&-f_\alpha f_\beta g_\gamma g_\delta N_{-\alpha-\beta\gamma\delta}(r_x,r_y) + f_\alpha f_\beta f_\gamma f_\delta N_{-\alpha-\beta-\gamma-\delta}(r_x,r_y)]\}\,\tau_\gamma\delta_{\tau_\alpha,\tau_\beta}\delta_{\tau_\gamma,\tau_\delta},
\end{aligned}$$

(5.84)

onde, de modo análogo aos casos anteriores, se definiu

$$M_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) = M^{(\omega)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) - M^{(\rho)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) \tag{5.85}$$

e

$$N_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) = N^{(\omega)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) - N^{(\rho)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y), \tag{5.86}$$

com

$$M^{(\omega)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) = \int \mathrm{d}\Omega_x \mathrm{d}\Omega_y \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{y})}}{\vec{k}^2 + p_\omega^2 - i\varepsilon} \left[\Phi^\dagger_\alpha \vec{k}.\vec{\sigma}\Phi_\beta\right] \left[\Phi_\gamma \vec{k}.\vec{\sigma}\Phi_\delta\right] \tag{5.87}$$

e

$$N^{(\omega)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) = k_\omega^2 I^{(\omega)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) - M^{(\omega)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y). \tag{5.88}$$

Com o mesmo procedimento usando anteriormente, pode-se escrever

$$\begin{aligned} M^{(\omega)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) \;=\; & \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{k^2 + p_\omega^2 - i\varepsilon} (4\pi)^2 \sum_{l,l'=0}^{\infty} \sum_{\substack{m_l=-l \\ m_{l'}=-l'}}^{l,l'} i^{l-l'} j_l(kr_x) j_{l'}(kr_y) \\ & \sum_{m_s m'_s} k^2 \int \mathrm{d}\Omega_x \Phi^\dagger_\alpha Y_{lm_l}(\Omega_x) \sigma_{m_s} \Phi_\beta \int \mathrm{d}\Omega_y \Phi^\dagger_\gamma Y^*_{l'm_{l'}}(\Omega_y) \sigma_{m_s} \Phi_\delta \\ & \int \mathrm{d}\Omega_k \hat{k}_{-m_s} \hat{k}_{-m'_s} Y^*_{lm_l}(\Omega_k) Y_{l'm_{l'}}(\Omega_k). \end{aligned} \tag{5.89}$$

Usando-se então o fato de que

$$\begin{aligned} & \int \mathrm{d}\Omega_k \hat{k}_{-m_s} \hat{k}_{-m'_s} Y^*_{lm_l}(\Omega_k) Y_{l'm'_l}(\Omega_k) = \\ & = (-1)^{m_l} \frac{4\pi}{3} \int \mathrm{d}\Omega_k Y_{1-m_s} Y_{1-m'_s} Y_{l-m_l} Y_{l'm_{l'}} \\ & = (-1)^{m_l} \sum_{LM} (2L+1) \left[(2l+1)(2l'+1)\right]^{1/2} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & l & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 & L \\ -m_s & -m'_s & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & l & l' \\ -M & -m_l & -m'_l \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5.90}$$

juntamente com as propriedades de simetria dos coeficientes de Clebsch-Gordon e acoplando os harmônicos esféricos com os operadores de spin, obtém-se

$$\begin{aligned}
K^{(\omega)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k}{(2\pi)^3} \frac{k^4}{k^2 + p_\omega^2 - i\varepsilon} (4\pi)^2 \sum_{l,l'=0}^{\infty} \sum_{\substack{m_l=-l \\ m_{l'}=-l'}}^{l,l'} i^{l-l'} j_l(kr_x) j_{l'}(kr_y) \\
&\sum_{m'_s} (-1)^{l'+m'_l} \langle l_\alpha \frac{1}{2} j_\alpha m_\alpha \mid (Y_l\sigma)^j_m \mid l_\beta \frac{1}{2} j_\beta m_\beta \rangle \langle l_\gamma \frac{1}{2} j_\gamma m_\gamma \mid (Y_l\sigma)^{j'}_{m'} \mid l_\delta \frac{1}{2} j_\delta m_\delta \rangle \\
&\langle l' - m'_l 1 m'_s \mid l' 1 j' m' \rangle \sum_{LM} [(2l+1)(2L+1)]^{1/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & l & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\sum_{m_s} \langle 1 m'_s 1 m_s \mid 1 1 L M \rangle \langle L M l m_l \mid L l l' m'_l \rangle \langle l m_l 1 m_s \mid l 1 j m \rangle. \qquad (5.91)
\end{aligned}$$

A soma em m_s pode ser efetuada, resultando em um coeficiente de Wigner. Usando-se novamente propriedades de simetria e ortogonalidade dos coeficientes coeficientes de Clebsch-Gordon, obtém-se

$$\begin{aligned}
M^{(\omega)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) &= \sum_{ll'} M^{(\omega)}_{ll'}(r_x, r_y) \\
&\sum_{jm} (-1)^{j+m} \langle l_\alpha \frac{1}{2} j_\alpha m_\alpha \mid (Y_l\sigma)^j_m \mid l_\beta \frac{1}{2} j_\beta m_\beta \rangle \langle l_\gamma \frac{1}{2} j_\gamma m_\gamma \mid (Y_l\sigma)^{j'}_{m'} \mid l_\delta \frac{1}{2} j_\delta m_\delta \rangle \\
&\sum_L (2L+1) \left[(2l+1)(2l'+1)\right]^{1/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & l & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} W(11l'l; Lj), \qquad (5.92)
\end{aligned}$$

onde se definiu a integral

$$M^{(\omega)}_{ll'}(r_x, r_y) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k}{(2\pi)^3} \frac{k^4}{k^2 + p_\omega^2 - i\varepsilon} (4\pi)^2 i^{l-l'} j_l(kr_x) j_{l'}(kr_y). \qquad (5.93)$$

Os elementos de matriz já foram resolvidos anteriormente com o resultado (5.62). Resta-nos obter a função $M^{(\omega)}_{ll'}$. Para tanto, deve-se ressaltar o fato de que, devido à simetria dos coeficientes de Clebsch-Gordon, deve-se ter $l - l' = 2n$ (número par). Em outras palavras, devido a essa simetria as duas funções de Bessel têm a mesma paridade, e, juntamente com k^4, formam uma função par. Assim, novamente pode-se passar os limites da integral em k de 0 a ∞ para $-\infty$ a ∞ como havia sido feito anteriormente, possibilitando a integração pelo teorema dos resíduos. Feito isto a integral (5.93) resulta em

$$M^{(\omega)}_{ll'}(r_x, r_y) = (i)^{l-l'} \frac{\pi}{4} p_\omega^3 \left\{ h_l^{(1)}(ip_\omega r_x) h_l^{(1)}(ip_\omega r_y) + \theta(r_x - r_y) h_l^{(1)}(ip_\omega r_x) h_l^{(2)}(ip_\omega r_y) + \right.$$

$$+\theta(r_y - r_x)h_l^{(2)}(ip_\omega r_x)h_l^{(1)}(ip_\omega r_y)\Big\}\,. \tag{5.94}$$

Com este resultado, juntamente com o resultado (5.62) e de acordo com (5.85), obtém-se

$$\begin{aligned}
M_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) \;=\; & \frac{3}{\pi^2}\sum_{l,l'=0}^{\infty}\left(M_{ll'}^{(\omega)}(r_x,r_y) - M_{ll'}^{(\rho)}(r_x,r_y)\right)(-1)^{2j_\alpha - j_\beta - j_\delta + j_\gamma + l'}(2l+1) \\
& [(2l_\alpha+1)(2j_\beta+1)(2j_\delta+1)(2l'+1)]^{1/2} \\
& \langle l_\alpha 0 l 0 \mid l_a l phall_\beta 0\rangle\langle l_\gamma 0 l 0 \mid l_\gamma l' l_\delta 0\rangle \\
& \sum_j (2j+1)\langle j m_\alpha - m_\beta j_\beta m_\beta \mid j j_\beta j_\alpha m_\alpha\rangle\langle j m_\beta - m_\alpha j_\delta m_\delta \mid j j_\delta j_\gamma m_\gamma\rangle \\
& \begin{Bmatrix} l_\alpha & l_\beta & l' \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ j_\alpha & j_\beta & l \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l_\gamma & l_\delta & l' \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ j_\gamma & j_\delta & l \end{Bmatrix} \\
& \sum_L (-1)^L(2L+1)^{1/2}\langle 1010 \mid 11L0\rangle\langle L0l0 \mid Lll'0\rangle W(11l'l;Lj).
\end{aligned} \tag{5.95}$$

Introduzindo-se todos esses resultados em (5.25), obtém-se, finalmente,

$$\begin{aligned}
\langle \xi\eta \mid H_{\rho\omega} \mid \xi\eta\rangle \;=\; & -\frac{g_{\rho\omega}g_\rho g_\omega}{m_\omega^2 - m\rho^2}\int \mathrm{d}r_x \mathrm{d}r_y \sum_{\alpha\beta\gamma\delta}\Big\{ g_\alpha g_\beta g_\gamma g_\delta\left(I_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{\kappa_\omega}{2M}\frac{\kappa_\rho}{2M}N_{\alpha\beta\gamma\delta}\right) \\
& + g_\alpha g_\beta f_\gamma f_\delta\left(I_{\alpha\beta-\gamma-\delta} - \frac{\kappa_\omega}{2M}\frac{\kappa_\rho}{2M}N_{\alpha\beta-\gamma-\delta}\right) \\
& + f_\alpha f_\beta g_\gamma g_\delta\left(I_{-\alpha-\beta\gamma\delta} + \frac{\kappa_\omega}{2M}\frac{\kappa_\rho}{2M}N_{-\alpha-\beta\gamma\delta}\right) \\
& + f_\alpha f_\beta f_\gamma f_\delta\left(I_{-\alpha-\beta-\gamma-\delta} + \frac{\kappa_\omega}{2M}\frac{\kappa_\rho}{2M}N_{-\alpha-\beta-\gamma-\delta}\right) \\
& + g_\alpha f_\beta g_\gamma f_\delta\left[\left(1 + \frac{\kappa_\omega}{2M}\frac{\kappa_\rho}{2M}(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta)\right)J_{\alpha-\beta\gamma-\delta} + \frac{\kappa_\omega}{2M}\frac{\kappa_\rho}{2M}M_{\alpha-\beta\gamma-\delta}\right] \\
& - g_\alpha f_\beta f_\gamma g_\delta\left[\left(1 + \frac{\kappa_\omega}{2M}\frac{\kappa_\rho}{2M}(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta)\right)J_{\alpha-\beta-\gamma\delta} + \frac{\kappa_\omega}{2M}\frac{\kappa_\rho}{2M}M_{\alpha-\beta-\gamma\delta}\right] \\
& - f_\alpha g_\beta g_\gamma f_\delta\left[\left(1 + \frac{\kappa_\omega}{2M}\frac{\kappa_\rho}{2M}(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta)\right)J_{-\alpha\beta\gamma-\delta} + \frac{\kappa_\omega}{2M}\frac{\kappa_\rho}{2M}M_{-\alpha\beta\gamma-\delta}\right] \\
& + f_\alpha g_\beta f_\gamma g_\delta\left[\left(1 + \frac{\kappa_\omega}{2M}\frac{\kappa_\rho}{2M}(\epsilon_\gamma - \epsilon_\delta)\right)J_{-\alpha\beta-\gamma\delta} + \frac{\kappa_\omega}{2M}\frac{\kappa_\rho}{2M}M_{-\alpha\beta-\gamma\delta}\right] \\
& + g_\alpha g_\beta g_\gamma f_\delta\left(\frac{\kappa_\rho}{2M}K_{\alpha\beta\gamma-\delta}(r_x,r_y) + \frac{\kappa_\omega}{2M}K_{\gamma-\delta\alpha\beta}(r_x r_y)\right) \\
& + g_\alpha g_\beta f_\gamma g_\delta\left(\frac{\kappa_\rho}{2M}K_{\alpha\beta-\gamma\delta}(r_x,r_y) + \frac{\kappa_\omega}{2M}K_{-\gamma\delta\alpha\beta}(r_x,r_y)\right) \\
& + f_\alpha f_\beta g_\gamma f_\delta\left(\frac{\kappa_\rho}{2M}K_{-\alpha-\beta\gamma-\delta}(r_x r_y) + \frac{\kappa_\omega}{2M}K_{\gamma-\delta-\alpha-\beta}(r_x r_y)\right) \\
& + f_\alpha f_\beta f_\gamma g_\delta\left(\frac{\kappa_\rho}{2M}K_{-\alpha-\beta-\gamma\delta}(r_x,r_y) + \frac{\kappa_\omega}{2M}K_{-\gamma\delta-\alpha-\beta}(r_x,r_y)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-g_\alpha f_\beta g_\gamma g_\delta \left(\frac{\kappa_\rho}{2M} L_{\alpha-\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) + \frac{\kappa_\omega}{2M} L_{\gamma\delta\alpha-\beta}(r_x, r_y)\right) \\
&+g_\alpha f_\beta f_\gamma f_\delta \left(\frac{\kappa_\rho}{2M} L_{\alpha-\beta-\gamma-\delta}(r_x, r_y) + \frac{\kappa_\omega}{2M} L_{-\gamma-\delta\alpha-\beta}(r_x, r_y)\right) \\
&+f_\alpha g_\beta g_\gamma g_\delta \left(\frac{\kappa_\rho}{2M} L_{-\alpha\beta\gamma\delta}(r_x, r_y) + \frac{\kappa_\omega}{2M} L_{\gamma\delta-\alpha\beta}(r_x, r_y)\right) \\
&- f_\alpha g_\beta f_\gamma f_\delta \left(\frac{\kappa_\rho}{2M} L_{-\alpha\beta-\gamma-\delta}(r_x, r_y) + \frac{\kappa_\omega}{2M} L_{-\gamma-\delta-\alpha\beta}(r_x, r_y)\right)\Big\} \\
&\tau_\gamma \delta_{\tau_\alpha,\tau_\beta} \delta_{\tau_\gamma,\tau_\delta} \langle \xi\eta \mid A^\dagger_\alpha A_\beta A^\dagger_\gamma A_\delta \mid \xi\eta \rangle. \qquad (5.96)
\end{aligned}
$$

5.3 Resultados Numéricos

Para se resolverem as equações obtidas na seção anterior, necessita-se das funções de onda relativísticas e das respectivas energias de partícula única para o núcleo em questão. Para isso, deve-se resolver as equações obtidas no capítulo anterior, seja para o caso das equações obtidas com os potenciais de Woods-Saxon, seja para as equações obtidas na aproximação de Hartree ou Hartree-Fock.

Os parâmetros usados nos potenciais de Woods-Saxon para o ^{16}O são

$$
\begin{aligned}
V_s &= -473.5\text{MeV}, \quad R_s = 3.9\text{fm}, \quad a_s = 0.6\text{fm}, \\
V_v^0 &= 398.5\text{MeV}, \quad R_v = 3.9\text{fm}, \quad a_v = 0.6\text{fm}.
\end{aligned} \qquad (5.97)
$$

e para o ^{40}Ca são

$$
\begin{aligned}
V_s &= -457.2\text{MeV}, \quad R_s = 3.95\text{fm}, \quad a_s = 0.8\text{fm}, \\
V_v^0 &= 378.5\text{MeV}, \quad R_v = 3.95\text{fm}, \quad a_v = 0.8\text{fm}.
\end{aligned} \qquad (5.98)
$$

As constantes de acoplamento usadas na lagrangiana (4.24) para ^{16}O e ^{40}Ca, como já foi dito no capítulo 4, são ajustadas, partindo-se daquelas para a matéria nuclear infinita dadas por Horowitz e Serot [46], de modo a reproduzir as energias de partícula única próximas ao nível de Fermi e o raio médio quadrático de carga de cada sistema e sao dadas na tabela 4.3

Para o cálculo com os resultados obtidos com o potencial de Woods-Saxon, são utilizadas as constantes g_ρ e g_ω livres dadas pelo potencial de Bonn [50], as quais são

$$
g_\omega^2 \approx 253.84 \qquad g_\rho^2 \approx 10.17 \qquad (5.99)
$$

Para os demais cálculos, foram utilizadas as constantes ajustadas do capítulo anterior.

A tabela 5.1 mostra os resultados para $BE_{NUC}(A_0+1n) - BE_{NUC}(A_0+1p)$ na Eq.(5.22) para os núcleos com *ímpares* próximo aos núcleos de camadas fechadas ^{16}O e ^{40}Ca. As duas primeiras colunas são óbvias e representam o número de massa do núcleo e o estado em questão. A terceira e quarta colunas são os resultados de Sato [32] usando a Expansão da Matriz Densidade (EDM) e interação de Skyrme II (SkII). As colunas restantes dão os resultados obtidos aqui para a mistura $\rho^0 - \omega$ usando as funções de onda e energias de partícula única obtidas com potenciais de Wood-Saxon (W-S), com a aproximação de Hartree (H), com a aproximação de Hartree-Fock (H-F) e com a aproximação de Hartree acrescentando-se os termos de momento magnético anômalo (H+MMA), respectivamente.

Tabela 5.1: Anomalia Nolen-Schiffer e a contribuição $\rho^0 - \omega$

		dif.			$\rho^0 - \omega$		
A	Estado	EDM	SkII	W-S	H	H-F	H+MMA
15	$1p_{3/2}^{-1}$	250	190	190.5	263.7	263.9	264.7
	$1p_{1/2}^{-1}$	380	290	187.8	257.1	257.5	257.9
17	$1d_{5/2}$	300	190	164.6	209.8	210.2	210.4
	$2s_{1/2}$	220	210				
39	$2s_{1/2}^{-1}$	370	270	219.4	285.8	286.1	286.4
	$1d_{3/2}^{-1}$	540	430	336.1	413.8	414.5	415.3
41	$1f_{7/2}$	440	350	268.1	320.6	321.6	322.8
	$2p_{3/2}$	380	340				

Por outro lado, se são utilizadas as constantes livres dadas em (5.99), também para os cálculos nas aproximações de Hartree e Hartree-Fock, tem-se um fator multiplicativo de 0.79, para o oxigênio e 0.81 para o cálcio, nos respectivos resultados da tabela 5.1. Deste modo, acaba-se por obter a tabela 5.2. Deve-se notar uma inversão de nossas predições com relação às de Sato para o sistema $A = 15$. Esta inversão pode ser devida ao fato de estarmos desprezando os efeitos de polarização do caroço, que, para A's pequenos, podem

Tabela 5.2: Contribuição $\rho^0 - \omega$ com constantes de acoplamento livres

		dif.			$\rho^0 - \omega$		
A	Estado	EMD	SkII	W-S	H	H-F	H+MMA
15	$1p_{3/2}^{-1}$	250	190	190.5	208.3	208.5	209.1
	$1p_{1/2}^{-1}$	380	290	187.8	203.1	203.4	203.7
17	$1d_{5/2}$	300	190	164.6	165.7	166.1	166.2
	$2s_{1/2}$	220	210				
39	$2s_{1/2}^{-1}$	370	270	219.4	231.5	231.7	232.0
	$1d_{3/2}^{-1}$	540	430	336.1	335.2	335.7	336.4
41	$1f_{7/2}$	440	350	268.1	259.7	260.5	261.5
	$2p_{3/2}$	380	340				

ser importantes.

Os resultados deste capítulo foram submetidos para publicação recentemente [10].

5.4 Conclusões

Em todos os cálculos, a saber, Woods-Saxon (W-S), Hartree (H), Hartree-Fock (H-F) e Hartree + Mom. Mag. Anômalo (H + MMA), os resultados são satisfatórios e encorajadores. Deve-se notar que os resultados obtidos com o uso de potenciais de Woods-Saxon são um pouco menores que os demais. No entanto, isto se deve ao fato de se estar utilizando neste caso as constantes de acoplamento livres, cujo o valor para o produto $g_\omega g_\rho$ é um pouco menor do que o valor deste mesmo produto usando as constantes ajustadas, como foi feito nos demais casos. Isto pode ser comprovado pela tabela 5.2 onde são utilizadas as constantes livres em todos os casos.

É claro que em cálculos cujos objetivos seriam o estudo detalhado de todos os efeitos que podem contribuir, em princípio, para a diferença de energias de ligação de núcleos espelhos, como os mencionados no Capítulo 2, tais como polarização do caroço, movimento de centro de massa, etc, também devem ser estudados no contexto da equação de Dirac. No

entanto, baseados em experiências anteriores com cálculos relativísticos, pode-se esperar que a soma de todos estes efeitos não deve invalidar a conclusão de que a troca mista $\rho^0 - \omega$ seja a principal fonte de quebra da simetria de carga. Talvez um aspecto particularmente interessante seja o estudo da polarização de caroço num modelo do tipo Walecka. Este estudo seria interessante tendo em vista o fato de que a pequena energia de ligação nuclear é o resultado do cancelamento entre potenciais escalar e vetorial de grande intensidade e, portanto, o desemparelhamento de um núcleon poderia em princípio provocar uma grande polarização sobre o caraço. No entanto, estudos preliminares [53], onde equação de Dirac é resolvida num campo médio mesônico deformado, indicam que, como no caso não relativístico, a polarização do caroço não parece ser muito importante para a diferença das energias de ligação.

Em resumo, os resultados deste capítulo mostram que a anomalia de Nolen-Schiffer pode ser resolvida no contexto de teorias relativísticas para a estrutura nuclear através da consideração da troca mista $\rho^0 - \omega$ na interação núcleon-núcleon. Modelos relativísticos têm sido empregados com relativo sucesso em vários campos da física nuclear e o presente estudo pode ser considerado como sendo mais um dos sucessos destes modelos. Como foi salientado anteriormente, modelos relativísticos do tipo do modelo de Walecka fornecem uma estrutura teórica consistente para o estudo de efeitos que envolvem troca de mesons. Ao se empregar o modelo de Walecka, evita-se a aproximação não relativistica dos elementos de matriz das interações básicas e, talvez o aspecto mais importante, tem-se uma consistência entre as constantes de acoplamento g_ω e g_ρ que contribuem para a estrutura nuclear e para a interação que envolve a troca mista $\rho^0 - \omega$. Convém salientar que nos cálculos efetuados anteriormente a estrutura nuclear está desvinculada do efeito da mistura $\rho^0 - \omega$. Neste sentido, o cálculo empregando os potenciais Woods-Saxon como no modelo de Nedjadi e Rook são similares aos não relativísticos, tendo o mérito, no entanto, de evitar a redução não relativística da amplitude de mistura $\rho^0 - \omega$. A consistência é obtida com o emprego do modelo de Walecka.

Para finalizar, temos então que, aparentemente, a resolução da anomalia de Nolen-Schiffer está satisfatoriamente baseada na mistura $\rho^0 - \omega$. No entanto, há uma questão levantanda recentemente por Goldman, Hendersen e Thomas [12] que tem despertado grande

interesse ultimamente. A questão se refere à dependência de momentum do parâmetro de mistura $g_{\rho\omega}$ introduzida na Eq. (5.2). O valor empregado para este parâmetro é o extraído de experiências e^+e^-, onde o quadrimomentum dos mesons envolvidos é do tipo tempo. No entanto, para processos de interação núcleon-núcleon, o quadrimomentum dos mesons trocados entre os nucleons é do tipo espaço. A suposição implícita em nossos cálculos, e em *todos* os outros cálculos na literatura envolvendo a mistura $\rho^0 - \omega$ na interação núcleon-núcleon, é que a dependência de momentum no parâmetro de mistura é fraca. Goldman, Henderson e Thomas colocaram a questão do quanto realista é tal suposição. Este assunto é o objeto do próximo capítulo.

Capítulo 6

Dependência de Momentum da Mistura $\rho^0 - \omega$ e Restauração Parcial da Simetria Quiral

6.1 Introdução

Concluímos no capítulo anterior que incluindo-se a troca mista $\rho^0 - \omega$ na força núcleon-núcleon é possível explicar de forma consistente a anomalia de Nolen-Schiffer empregando o modelo de Walecka. No entanto, como mencionamos ao final desse capítulo, Goldman, Hendersen e Thomas (GHT) [12] levantaram a questão da dependência de momentum da mistura $\rho^0 - \omega$. O valor da constante $g_{\rho\omega}$ empregado em nosso cálculo, como também o empregado em todos os cálculos na literatura onde a mistura $\rho^0 - \omega$ é incluida na força núcleon-núcleon, é aquele extraído experimentalmente do processo de produção de píons em colisões elétron-pósitron. Nestas colisões o processo de mistura ocorre da seguinte maneira (ver Fig. 3.1): o par e^+e^- se aniquila num fóton, o qual se transforma num méson ω, este se transforma num méson ρ^0, o qual decai em dois píons. Nestes processos de aniquilação, o quadrimomento k^2 dos mésons é do tipo tempo, i.e. $k^2 > 0$. Por outro lado, no processo da interação núcleon-núcleon, ver Fig. 3.2, os mésons trocados são virtuais e, portanto, têm momentum do tipo espaço, i.e. $k^2 < 0$. A hipótese implícita nos cálculos empregando a mistura $\rho^0 - \omega$ é que a amplitude de mistura é constante ou, se não o for, ela depende fracamente do momentum. A questão levantada por GHT se refere à legitimidade de tal hipótese.

Em seu estudo inicial [12], GHT utilizaram um modelo de quarks simples para a amplitude de mistura. Considerando a diferença de massa entre o quark *up* e o *down*, a amplitude

de mistura $\rho^0 - \omega$ é gerada por um loop de quarks intermediador, ver Fig. 6.1: o méson ω, com quadrimomento k^μ, se dissocia em um par quark-antiquark, o qual se recombina para formar o méson ρ^0. Haverá, também, uma contribuição de efeitos eletromagnéticos, mas

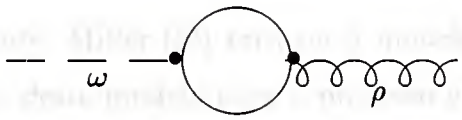

Figura 6.1: Modelo GHT

esta será muito menor que o efeito vindo da diferença de massa dos quarks. Funções de vértice quark-méson simples são introduzidas, e propagadores de quarks livres são usados no cálculo do loop. Uma vez tendo calculado a amplitude, a contribuição da mistura ao potencial núcleon-núcleon no espaço de momentum é dada por

$$V(k) = -\frac{g_\rho g_\omega F_{N\rho}(k^2) F_{N\omega}(k^2) < \rho^0 | H | \omega >}{(k^2 - m_\rho^2)(k^2 - m_\omega^2)} \tag{6.1}$$

onde $< \rho^0 | H | \omega >$ é a amplitude de mistura calculada com modelo de quarks. O potencial no espaço de coordenadas, $V(r)$, é a transformada de Fourier de $V(k)$. As conclusões básicas de GHT foram: (i) a amplitude de mistura é fortemente dependente do quadrimomento, (ii) há um nó no potencial em $r \sim 0.9 fm$ e (iii) devido ao nó, o potencial muda de sinal e assim sua importância é grandemente suprimida.

Devido ao fato de GHT terem empregado um modelo de quarks muito simples para a amplitude de mistura, o resultado de seu estudo que apontou uma forte dependência de momentum não foi levado muito a sério inicialmente. A crítica mais importante que foi levantada se refere ao uso de propagadores de quarks livres no cálculo da integral de loop. No entanto, em um estudo posterior de Krein, Thomas e Williams [13], esta aproximação

de quarks livres no loop foi evitada. Os autores da Ref. [13] empregaram propagadores de quarks confinados, i.e., os propagadores usados não possuem polos e, portanto, os quarks nunca alcançam a camada de massa. O resultado obtido foi similar ao de GHT: a amplitude de mistura é fortemente dependente de momentum e, o mais importante, ela é praticamente igual a zero na região do espaço de momentum relevante para explicar a anomalia de Nolen-Schiffer.

Em uma publicação recente, Miller [14] criticou o modelo de Krein, Thomas e Williams com base nas predições deste modelo para o processo eletromagnético $\rho - \gamma^*$, onde o elemento de matrix é denotado por $f_\rho(k^2)$ [15]. Examinando os dados experimentais de $e^+e^- \to \rho \to e^+e^-$ em $k^2 = m_\rho^2$ e da reação $\gamma + P \to \rho^0 + \rho$ em $k^2 = 0$, Miller não encontra variação com k^2 de $f_\rho(k^2)$. No entanto, como foi salientado por Krein [51], a transposição do modelo da Ref. [13] para processos eletromagnéticos deve ser feita com muito cuidado, pois é necessário levar em conta a simteria de calibre da interação eletromagnética. Isto é, o vértice quark-fóton deve obedecer à identidade de Ward-Takahashi, ao passo que o vértice quark-méson não está sujeito a tal restrição.

Em um outro cálculo recente, Hatsuda, Henley, Meissner e Krein [16] investigaram a dependência de momentum da amplitude de mistura no contexto das regras de soma da QCD [17]. Neste cálculo, não se empregam modelos de quarks. A amplitude é calculada diretamente empregando-se os graus de liberdade da QCD, onde os efeitos não perturbativos são parametrizados em termos de condensados de quarks e glúons, cujos valores são fixados na espectroscopia de mésons pesados [17]. O resultado deste cálculo confirma basicamente as predições dos cálculos empregando modelos de quarks.

Tendo em vista estes resultados, vamos investigar a seguir o efeito da dependência de momentum da amplitude de mistura para a diferença das energias de ligação de núcleos espelho. Em particular, vamos empregar a predição da Ref. [16]. Como será visto, o efeito da dependência de momentum é de reduzir em 50% a contribuição da troca mista $\rho^0 - \omega$ para a energia de ligação calculada no capítulo anterior.

Em paralelo às tentativas de explicar a anomalia com base na teoria nuclear empregando graus de liberdade de núcleons e mésons, tais como o cálculo de Blunden e Iqbal [5], outros efeitos, mais sutis, foram investigados. Estas tentativas invocam os graus de liberdade de

quarks e glúons. Entre os vários efeitos investigados na literatura, um efeito em particular, proposto por Henley e Krein [19], tem despertado grande interesse ultimamente. Ele tem como base a hipótese da restauração parcial da simetria quiral no meio nuclear. De acordo com esta hipótese, as massas dos hádrons no meio nuclear mudam devido a uma mudança nos condensados de quarks que são afetados pela presença do mar de Fermi. Em particular, cálculos baseados no modelo de Nambu e Jona-Lasinio [20] predizem que o valor das massas dos quarks constituintes no meio nuclear deve ser menor do que seu valor no espaço livre. Portanto, num contexto de um modelo de quarks constituintes, as massas dos hádrons devem ser afetadas também. Em particular, devido à diferença entre as massas de corrente dos quarks u e d, a massa do próton é afetada de maneira diferente da massa do nêutron. Segundo Henley e Krein, este efeito não é usualmente levado em conta no termo $BE(A)$ da Eq. 2.12 e, portanto, deve ser incluído de alguma forma. Estes autores levam em conta este efeito através da quantidade δ_{np} na Eq. 2.12, a diferença entre as massas do nêutron e do próton.

Henley e Krein [19] empregaram o modelo de Nambu e Jona-Lasinio para obter a dependência com a densidade dos quarks constituintes em conjunção com o modelo de Isgur e Karl [21] para obter a massa do nêutron e do próton no meio nuclear. Os valores obtidos para a diferença δ_{np} no meio nuclear são da ordem de magnitude, e de sinal correto, para explicar a anomalia de Nolen-Schiffer.

Muitos outros cálculos se seguiram após a sugestão original de Henley e Krein. Dentre os mais importantes, destacam-se os baseados nas regras de soma da QCD, efetuados por Hatsuda e colaboradores [22]. Estes cálculos confirmam qualitativamente as predições da Ref. [19], e quantitativamente encontram valores menores que os preditos em [19].

Uma crítica constante aos trabalhos que invocam efeitos de uma restauração parcial da simetria quiral no núcleo é que a dependência com a densidade das massas de núcleons é calculada para uma matéria de quarks ao invés da matéria nuclear. Nestes cálculos, a matéria nuclear é simulada como sendo um meio em que os quarks estão uniformemente distribuídos no espaço. Desta maneira, despreza-se as propriedades de agregação dos quarks no interior dos núcleons. Claramente, os efeitos de densidade são, então, superestimados.

As discussões acima nos sugerem a seguinte questão. Como vimos, a anomalia de Nolen-

Schiffer pode ser explicada invocando-se, tanto a mistura $\rho^0 - \omega$, quanto a restauração parcial da simetria quiral. Ambas explicações, no entanto, como discutido nesta seção, parecem superestimar os efeitos: (1) a dependência de momentum de $< \rho|H|\omega >$ diminui o efeito da troca mista, (2) desprezando-se o fato de que os quarks se agregam no interior de nucleons superestima-se a densidade de quarks e, portanto, o efeito da restauração da simetria quiral. Surge então a possibilidade de que a anomalia de Nolen-Schiffer possa ser explicada pela conjunção dos efeitos da mistura $\rho^0 - \omega$ e da restauração da simetria quiral. Esta questão será investigada a seguir.

6.2 Efeito da dependência de momemtum de $g_{\rho\omega}$

Nesta seção vamos indicar muito brevemente como os parâmetros fenomenológicos da amplitude de mistura $\rho^0 - \omega$ são determinados na técnica das regras de soma da QCD.

Fenomenologicamente, a amplitude de mistura é definida através do gráfico de Feynman mostrado na figura 6.2.

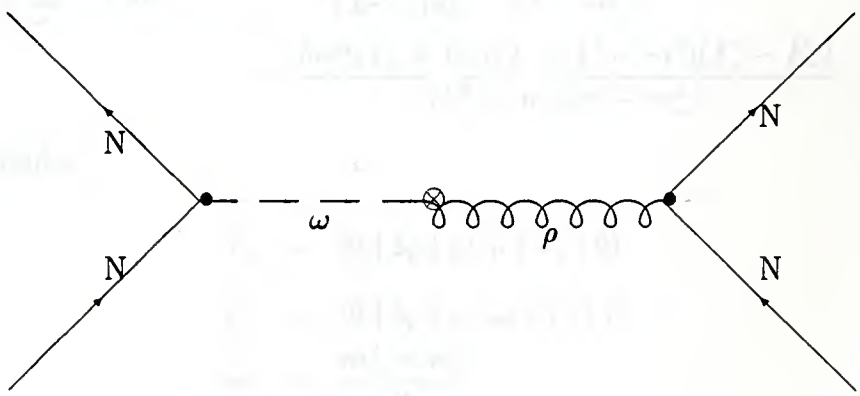

Figura 6.2: Troca $\rho - \omega$

A cruz na figura 6.2, denota o acoplamento $\rho - \omega$, $g_{\rho\omega}(k^2)$, o qual é escrito em termos do propagador misto como:

$$\begin{aligned} P^{\rho\omega}_{\mu\nu}(k^2) &= i\int d^4x e^{ikx} < 0|T[b_\mu(x)V_\nu(0)|0 > \\ &= \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{g_{\rho\omega}(k^2)}{(k^2 - m_\rho^2 + i\varepsilon)(k^2 - m_\omega^2 + i\varepsilon)}, \end{aligned} \tag{6.2}$$

onde $|0>$ é o estado de vácuo.

Para encontrar $g_{\rho\omega}(k^2)$, começa-se com a relação de dispersão (sem subtração) para $P^{\rho\omega}_{\mu\nu}(k^2)$:

$$ReP^{\rho\omega}_{\mu\nu}(k^2) = \mathcal{P}\int \frac{ds}{\pi}\frac{ImP^{\rho\omega}_{\mu\nu}(s)}{s-k^2} \,. \tag{6.3}$$

Usando a identidade simbólica

$$\frac{1}{x+i\eta} = \mathcal{P}\frac{1}{x} - i\pi\delta(x)\,, \tag{6.4}$$

pode-se separar a parte real e imaginária de $P^{\rho\omega}_{\mu\nu}$ saturando os estados intermediários na Eq. (6.2) com estados de ρ e um ω. A parte imaginária é dada por:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\sum_{\mu} ImP^{\rho\omega}_{\mu\mu}(s) &= \pi\langle 0 \mid b_\mu \mid \rho\rangle\langle\rho \mid V_\mu \mid 0\rangle\delta(s-m_\rho^2) \\ &+ \pi\langle 0 \mid b_\mu \mid \omega\rangle\langle\omega \mid V_\mu \mid 0\rangle\delta(s-m_\omega^2)\,.\end{aligned} \tag{6.5}$$

Substituindo esta na relação de dispersão, Eq. (6.3), obtém-se a parte real de $P^{\rho\omega}_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\sum_{\mu} ReP^{\rho\omega}_{\mu\mu}(k^2) &= -\left(\frac{F_\rho}{k^2-m_\rho^2} - \frac{F_\omega}{k^2-m_\omega^2}\right) \\ &= \frac{\delta m^2(F_\rho+F_\omega)/2 - (k^2-m^2)(F_\rho-F_\omega)}{(k^2-m_\rho^2)(k^2-m_\omega^2)}\end{aligned} \tag{6.6}$$

onde foram definidos

$$\begin{aligned}F_\rho &= \langle 0 \mid b_\mu \mid \rho\rangle\langle\rho \mid V_\mu \mid 0\rangle \\ F_\omega &= \langle 0 \mid b_\mu \mid \omega\rangle\langle\omega \mid V_\mu \mid 0\rangle \\ m^2 &= \frac{m_\rho^2+m_\omega^2}{2} \\ \delta m^2 &= m_\rho^2 - m_\omega^2\,.\end{aligned}$$

Por outro lado, de acordo com (6.2), tem-se que:

$$\frac{1}{3}\sum_{\mu} ReP^{\rho\omega}_{\mu\mu}(k^2) = \frac{-g_{\rho\omega}(k^2)}{(k^2-m_\rho^2)(k^2-m_\omega^2)}\,. \tag{6.7}$$

Portanto, quando comparada a (6.6), tem-se que a amplitude de mistura é dada por:

$$\begin{aligned}g_{\rho\omega}(k^2) &= \delta m^2(F_\rho+F_\omega)/2 - (k^2-m^2)(F_\rho-F_\omega) \\ &= g_{\rho\omega}(m^2)\left\{1+\lambda\left(\frac{k^2}{m^2}-1\right)\right\}\end{aligned} \tag{6.8}$$

Note-se que $g_{\rho\omega}(m^2)$ é a matriz de mistura $\langle \rho \mid H_{SB} \mid \omega \rangle$ medida no processo $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$. O parâmetro λ, é definido como:

$$\lambda = -m^2(F_\rho - F_\omega)/g_{\rho\omega}(m^2) \,. \tag{6.9}$$

Este é o parâmetro fundamental para a variação com k^2 , i.e., a variação com o momentum da amplitude de mistura é devida à diferença $F_\rho \neq F_\omega$. Em todos os cálculos envolvendo a mistura $\rho^0 - \omega$ há a suposição implícita, sem qualquer justificativa teórica ou experimental, de que $F_\rho = F_\omega$.

A tarefa das regras de soma da QCD é determinar o parâmetro λ. Como mostrado na Ref. [16], $\lambda \neq 0$ é devido à quebra de isospin na QCD, a qual é devida à diferença de massas dos quarks de corrente u e d, $\delta_{ud} = m_u - m_d$. Na técnica das regras de soma da QCD, o parâmetro λ recebe uma contribuição direta de δ_{ud} e outra indireta, através da razão entre os condensados de quarks u e d, dada por $\gamma \equiv < \bar{d}d > / < \bar{u}u > \neq 1$. Não vamos discutir aqui como o parâmetro λ se relaciona com δ_{ud} e γ, pois isto nos desviaria muito dos nossos objetivos. Vamos, no entanto, simplesmente apresentar o resultado derivado na Ref. [16] e usá-lo para investigar o efeito da dependência de momentum na diferença de energias de ligação dos núcleos espelhos. O resultado final é que o intervalo de valores estimado para o parâmetro λ é:

$$1.43 \leq \lambda \leq 1.85 \,. \tag{6.10}$$

Portanto, voltando às equações do capítulo anterior, no lugar da constante de acoplamento $g_{\rho\omega}$, vamos utilizar:

$$g_{\rho\omega}(k^2) = g_{\rho\omega}(m^2)\left[1 + \lambda\left(\frac{k^2}{m^2} - 1\right)\right] . \tag{6.11}$$

Isto implica que na Eq. (5.54) deve ser efetuada a seguinte troca:

$$I_l^{(\omega)}(r_x, r_y) - I_l^{(\rho)}(r_x, r_y) \longrightarrow I_l^{(\omega)}(r_x, r_y)\left[1 - \lambda\left(\frac{p_\omega^2}{m^2} + 1\right)\right] - I_l^{(\rho)}(r_x, r_y)\left[1 - \lambda\left(\frac{p_\rho^2}{m^2} + 1\right)\right] . \tag{6.12}$$

Essa mesma troca deve ser feita na Eq. (5.63). Trocas análogas a esta também devem ser efetuadas em (5.78), (5.82) e (5.95).

Efetuadas todas as alterações acima, obtém-se, por exemplo, para a diferença das energias do estado $1d_{3/2}^{-1}$ no sistema com 39 nucleons, que a variação da contribuição da troca

$\rho - \omega$ com o parâmetro λ, é dada pela figura 6.3. Resultados análogos a este são obtidos para todos os outros estados cálculados.

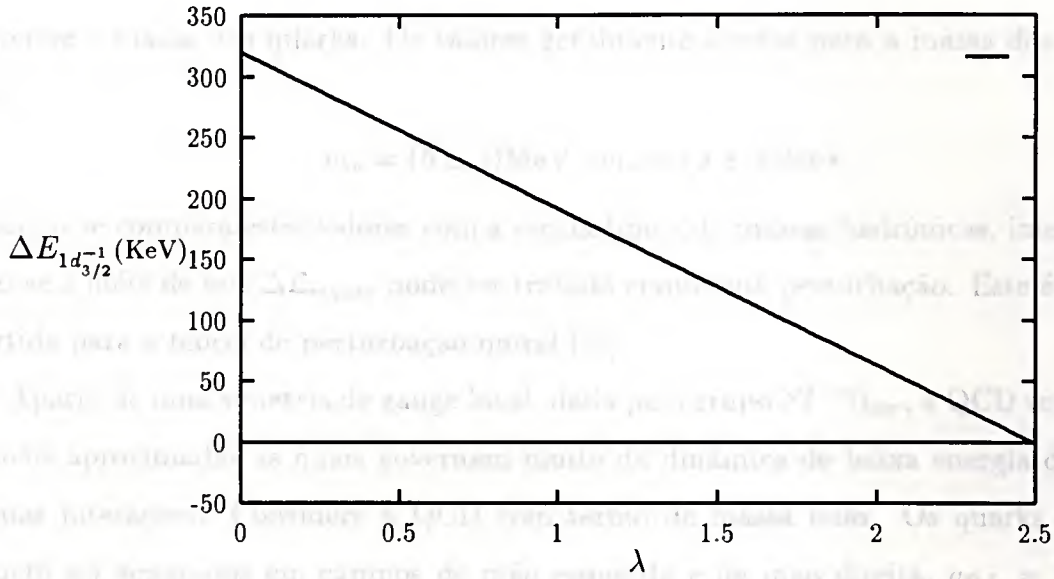

Figura 6.3: Acoplamento $\rho - \omega$ como função de λ.

Dentro da janela de valores de λ determinada, na melhor das hipóteses ($\lambda = 1.43$), a contribuição da mistura $\rho - \omega$ é cerca de 50% menor que o valor necessário para se eliminar a anomalia.

6.3 A Quebra e a Restauração da Simetria Quiral no Núcleo

Nesta seção vamos, muito resumidamente, apresentar o cálculo de Henley e Krein [19] para a diferença das massas do nêutron e do próton no meio nuclear. Vamos, inicialmente, discutir a simetria quiral no contexto da QCD e, em seguida, apresentar o cálculo da Ref. [19].

A lagrangiana da QCD para os dois sabores de quarks u e d é dada por

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{q} i \gamma_\mu (\partial^\mu - igG^\mu) q - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu} + \Delta\mathcal{L}_{massa} \tag{6.13}$$

onde $q = (u, d)$ e

$$\mathcal{G}^{\mu\nu} = \partial^\mu G_g^\nu - \partial^\nu G_g^\mu + ig[G_g^\mu, G_g^\nu], \tag{6.14}$$

com G_g^μ representando o campo dos gluons e g é a constante de acoplamento quark-glúon. O termo

$$\Delta\mathcal{L}_{massa} = -m_u\overline{u}u - m_d\overline{d}d \tag{6.15}$$

se refere à massa dos quarks. Os valores geralmente aceitos para a massa dos quarks são [54]

$$m_u = (5 \pm 2)\text{MeV} \quad m_d = (9 \pm 3)\text{MeV} \tag{6.16}$$

Quando se compara estes valores com a escala típica de massas hadrônicas, imediatamente tem-se a idéia de que $\Delta\mathcal{L}_{massa}$ pode ser tratado como uma perturbação. Este é o ponto de partida para a teoria de perturbação quiral [54].

Aparte de uma simetria de gauge local, dada pelo grupo $SU(3)_{cor}$, a QCD tem simetrias globais aproximadas as quais governam muito da dinâmica de baixa energia dos hadrons e suas interações. Considere a QCD com termo de massa nulo. Os quarks sem massa podem ser separados em campos de mão esquerda e de mão direita, $q_{R,L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)q$. Já que o acoplamento aos gluons não muda a quiralidade, os quarks de mão esquerda permanecem desacoplados dos quarks de mão direita, enquanto eles não tiverem massa. Em outras palavras, $\mathcal{L}_{QCD}$ com $\Delta\mathcal{L}_{massa} = 0$ é invariante sob as transformações do grupo quiral $SU(2)_R \otimes SU(2)_L$, isto é, o grupo das transformações globais separadas

$$q_{R,L} \rightarrow exp\left[i\alpha^a_{R,L}\frac{\lambda^a}{2}\right]q_{R,L} \tag{6.17}$$

onde $\lambda^a (a = 1, 2, 3)$ são as matrizes de Pauli.

O termo de massa $\Delta\mathcal{L}_{massa}$ quebra *explicitamente* a simetria quiral $SU(2)_R \otimes SU(2)_L$. Ele envolve a densidade escalar $\overline{q}q = \overline{q}_L q_R + \overline{q}_R q_L$, a qual mistura os quarks de mão esquerda e os quarks de mão direita.

Há evidências, tanto da fenomenologia hadrônica de baixas energias como de cálculos da QCD na rede, de que a simetria quiral é também *espontaneamente* quebrada. Se a simetria quiral fosse trivialmente realizada na natureza, ou seja, no modo Wigner (aparte de uma pequena quebra explícita devida à massa dos quarks), se esperaria que o espectro hadrônico apresentasse, sistematicamente, pares de estados com paridade positiva e paridade negativa (dois tipos de prótons com paridade positiva e com paridade negativa existiriam). Claramente isto não acontece. A simetria da lagrangiana não é repassada para

o estado fundamental. Isto é conhecido como quebra espontânea de simetria. Em outras palavras, a simetria quiral é realizada na natureza no modo Nambu-Goldstone. Neste caso, a simetria quebrada da lagrangiana aparece na natureza através do surgimento de uma partícula sem massa que carrega os números quânticos da simetria, conhecida como bóson de Goldstone. No caso da quebra da simetria quiral, o bóson de Goldstone envolvido deve ser uma partícula pseudo-escalar. A massa exepcionalmente pequena do píon (uma ordem de grandeza menor que a escala típica das massas hadrônicas) sugere interpretá-lo como sendo o bóson de Goldstone, ou melhor, o remanescente do bóson de Goldstone, pois sua massa não é exatamente igual a zero, a qual, seria devida às pequenas massas dos quarks u e d.

Como já dissemos, a quebra espontânea de simetria quiral é um fenômeno de baixas energias e o acoplamento quark-glúon é cerca de 137 vezes mais intenso que o elétron-fóton, portanto, não permitindo o uso de teoria de perturbação, como no caso da QED. No entanto, como não existem métodos sistemáticos confiáveis em teoria quântica de campos para tratar problemas não-perturbativos, torna-se necessário o emprego de métodos numéricos extramamente sofisticados em supercomputadores ou, então, de modelos fenomenológicos. Ultimamente, o modelo de Nambu–Jona-Lasinio (NJL) [20] tem sido amplamente empregado para estudar o fenômeno da quebra espontânea da simetria quiral na QCD.

No modelo de NJL, a densidade de lagrangiana da interação quark-glúon da QCD é modelada, para os propósitos da quebra de simetria quiral, por uma densidade de lagrangiana de interação puntual de quatro férmions:

$$\mathcal{L}_{NJL} = \overline{q}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)q + G[(\overline{q}q)^2 + (\overline{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2] \tag{6.18}$$

onde $\vec{\tau}$ são as matrizes de Pauli e m é a matriz diagonal

$$m = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix} \tag{6.19}$$

Não é difícil mostrar que, da mesma forma que na QCD, a densidade de lagrangiana do modelo NJL é invariante quiral, quando $m_u = m_d = 0$.

A estratégia usual para o estudo da quebra espontânea da simetria quiral é encontrar não perturbativamente o propagador de quarks do modelo. No limite de massas $m_u = m_d = 0$, a

simetria é espontaneamente quebrada se: (1) um termo de massa no propagador for gerado pela interação e, (2) se a energia do vácuo, calculada com este propagador, for menor que a energia calculada com um propagador sem termo de massa. Propagadores com e sem termo de massa são dados por:

$$\begin{array}{ccc} \text{Propagador Livre} & & \text{Propagador Interagente} \\ S^{(0)}(p) = \frac{1}{\not p + i\varepsilon} & \rightarrow & S(p) = \frac{1}{\not p - \Sigma + i\varepsilon}, \end{array} \tag{6.20}$$

onde Σ é a auto-energia, a qual pode ser escrita de maneira geral como:

$$\Sigma(p) = [1 - A(p)]\not p + M(p)\,, \tag{6.21}$$

onde $M(p)$ é o termo de massa. Portanto, a questão é saber se $M(p) \neq 0$.

A autonergia Σ pode ser determinada através da equação de Schwinger-Dyson na aproximação de Hartree-Fock:

$$\Sigma = 6iG \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \{Tr[S(q)] - S(q) - \gamma_5 Tr[S(q)\gamma_5] + \gamma_5 S(q)\gamma_5\}\,. \tag{6.22}$$

Substituindo a expressão para o propagador interagente, Eq. (6.20), encontra-se que:

$$\begin{aligned} A(p) &= 1\,, \\ M(p) &= M\,, \end{aligned} \tag{6.23}$$

onde M obedece a seguinte equação auto-consistente:

$$M = 6iG \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{4M}{q^2 - M^2 + i\varepsilon}. \tag{6.24}$$

Quando m_u e m_d são não nulos, tem-se que M é uma matriz, dada por

$$M = \begin{pmatrix} M_u & 0 \\ 0 & M_d \end{pmatrix}, \tag{6.25}$$

onde M_u e M_d são determinadas auto-consistentemente pelas equações:

$$M_u = m_u + 3M_u I(M_u) + \frac{7}{2} M_d I(M_d), \tag{6.26}$$

$$M_d = m_d + 3M_d I(M_d) + \frac{7}{2} M_u I(M_u), \tag{6.27}$$

onde

$$I(M) = \frac{2G}{\pi^2}\int_0^{\Lambda} dq q^2 \frac{1}{(q^2+M^2)^{1/2}}, \tag{6.28}$$

onde Λ é momentum de corte (cutoff), o qual é necessário pois o modelo não é renormalizável. Usando os seguintes valores para os parâmetros do modelo, $\Lambda = 800MeV$, $m_u = 4.0MeV$, $m_d = 10.0MeV$ e $G\Lambda^2 = 1.85$, obtêm-se [55] bons resultados para a massa do méson π, para as massas dos quarks constituintes M_u e M_d, para o parâmetro de ordem, etc.

Não é difícil mostrar que [20] a densidade de energia do vácuo calculada com o propagador com termo de massa é, de fato, menor que a energia calculada com o propagador sem massa.

A altas temperaturas e densidades, acredita-se que a QCD sofra duas transições de fase: o desconfinamento da cor e a restauração da simetria quiral. A temperaturas e densidades moderadas, como no caso dos núcleos, o desconfinamento e a restauração da simetria quiral não serão completas, mas apenas parciais. Na presença de uma mar de Fermi de quarks, a única coisa que muda nas equações para M_u e M_d é o limite inferior da integral da Eq. (6.28)

$$I(M) = \frac{2G}{\pi^2}\int_{k_F}^{\Lambda} dq q^2 \frac{1}{(q^2+M^2)^{1/2}} \tag{6.29}$$

onde o momento de Fermi esta relacionado à densidade de quarks ρ_q através de

$$\rho_q = \frac{2k_F^3}{\pi^2} \tag{6.30}$$

A Eq. (6.29) mostra claramente que, quando $k_F \to \Lambda$ a simetria quiral é restaurada e $M \to m$.

Para se efetuar o cálculo da diferença de massa nêutron-próton no meio resta um último ingrediente. É necessario se conhecer a dependência da massa do núcleon em relação às massas dos quarks constituintes. Existem vários modelos de quarks constituintes para hadrons, sendo que um dos mais bem sucedidos é o modelo de Isgur e Karl [21]. Neste modelo, a diferença de massa nêutron-próton, $\delta_{np} = M_n - M_p$, pode ser expressa em termos da diferença de massa $\delta_{ud} = M_u - M_d$ e da massa média $M = \frac{1}{2}(M_d + M_u)$, do seguinte modo:

$$\delta_{np} = (1 - AM^{-3/2} - BM^{-9/4} - 0.08)\delta_{ud} - CM^{1/4} - DM^{-5/4} \tag{6.31}$$

onde os termos têm origens diversas: $A = (3K/4)^{1/2}$, onde K vem do deslocamento de energia de ponto-zero. $B = 5A^{3/2}\alpha_s/9\sqrt{\pi}$ é devido à interação hiperfina de cor, onde α_s é a constante de acoplamento forte. $C = 2A^{1/2}\alpha_{em}/3\sqrt{\pi}$ e $D = AC/3$, onde α_{em} é a constante de estrutura fina eletromagnética. O último termo dentro do parênteses é devido a um efeito hiperfino de cor de segunda ordem.

Usando os parâmetros $A = (199.4\text{MeV})^{3/2}$ e $\alpha_s = 1.63$ dados por Isgur [56], Henley e Krein obtiveram o resultado apresentado na figura 6.4, o qual mostra $\delta_{np} = (M_n - M_p)$ em função da densidade.

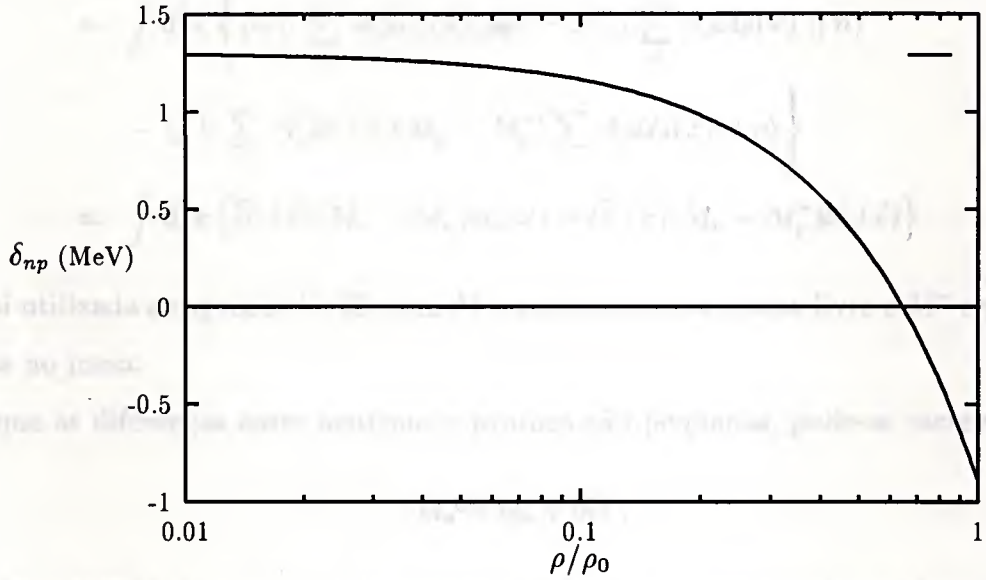

Figura 6.4: δ_{np} como função de ρ/ρ_0.

É interessante notar que δ_{np} pode até mudar de sinal com o aumento da densidade. Na referência [57] o resultado geral obtido, também é de um decréscimo na diferença de massa nêutron-próton no meio. Nesta última referência são estudados modelos completamente diferentes, incluindo modelo de quarks constituintes relativísticos, modelo baseado nas regras de soma da QCD, etc.

Henley e Krein propõem usar na equação (2.12) δ_{np} do meio, e não $\delta_{np}(livre)$. Assim, deve-se acrescentar um termo $(-\delta_{np}(livre)+\delta_{np})$ à equação (2.12). Estes autores estimaram o efeito desta diferença de massas para as regiões de densidade média correspondentes aos

núcleos com $A = 16$ e $A = 40$, obtendo valores da ordem da anomalia Nolen-Schiffer.

Uma questão importante é saber como se comporta em detalhe esta diferença de massa para núcleos espelhos específicos [58]. Os dados experimentais para as diferenças de energias de ligação mostram uma tendência bem característica para buracos ou partículas, evidenciando os efeitos de camada. A seguir esta questão será examinada no contexto do modelo de Walecka discutido anteriormente.

No modelo de partículas independentes, a correção pode ser calculada pela expressão:

$$\begin{aligned}
\Delta E(\delta_{np}) &= \int \mathrm{d}^3x \left\{ \langle n \,|\!: \overline{\psi}(\vec{x})(M_n - M_n^*)\psi(\vec{x}) :|\, n\rangle - \langle p \,|\!: \overline{\psi}(\vec{x})(M_p - M_p^*)\psi(\vec{x}) \,|\, p\rangle \right\} \\
&= \int \mathrm{d}^3x \left\{ \langle n \,|\!: \sum_\alpha A_\alpha^\dagger \overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x})(M_n - M_n^*) \sum_\beta A_\beta \mathcal{U}_\beta(\vec{x}) :|\, n\rangle \right. \\
&\qquad \left. - \langle p \,|\!: \sum_\alpha A_\alpha^\dagger \overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x})(M_p - M_p^*) \sum_\beta A_\beta \mathcal{U}_\beta(\vec{x}) :|\, p\rangle \right\} \\
&= \int \mathrm{d}^3x \left\{ \overline{\mathcal{U}}_n(\vec{x})(M_n - M_n^*)\mathcal{U}_n(\vec{x}) - \overline{\mathcal{U}}_p(\vec{x})(M_p - M_p^*)\mathcal{U}_p(\vec{x}) \right\} \qquad (6.32)
\end{aligned}$$

onde foi utilizada a expresão (4.42) com M representando a massa livre e M^* representando a massa no meio.

Já que as diferenças entre neutrons e protons são pequenas, pode-se escrever

$$\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_p + \delta\mathcal{U} \,. \qquad (6.33)$$

Como $M - M^*$ já é um termo de primeira ordem na aproximação, pode-se desprezar o termo $\delta\mathcal{U}$ em (6.33). Assim, dentro destas aproximações, a Eq. (6.32) pode ser escrita como:

$$\Delta E(\delta_{np}) = \int \mathrm{d}^3x \overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x})(\delta_{np}(livre) - \delta_{np})\mathcal{U}_\alpha(\vec{x}) \,, \qquad (6.34)$$

onde α representa o estado do núcleon.

Para o que segue, vamos parametrizar δ_{np} como

$$\delta_{np} = \delta_{np}(livre) - \mathcal{A}\frac{\rho}{\rho_0} \qquad (6.35)$$

onde $\mathcal{A}$ é uma constante de proporcionalidade e ρ_0 é a densidade da matéria nuclear. Fazemos esta parametrização pois, tanto para o modelo de Henley e Krein [19], como para o modelo da Ref. [57], a Eq. (6.35) é uma boa aproximação, para valores de ρ menores que

ρ_0. Um modelo diferente, de Saito e Thomas [59], o qual estuda a variação dos condensados de quarks no meio nuclear, também fornece uma dependência com a densidade para δ_{np} como a dada pela Eq. (6.35). O valor preciso de $\mathcal{A}$ varia de modelo para modelo, cobrindo o intervalo de 1 MeV a 2 MeV.

Com o uso da expressão (6.35), pode-se escrever a correção como

$$\Delta E(\delta_{np}) = \mathcal{A} \int \mathrm{d}^3x \overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x}) \mathcal{U}_\alpha(\vec{x}) \frac{\rho(\vec{x})}{\rho_0} \tag{6.36}$$

Deve-se notar que toda a dependência de modelo no valor do parâmetro de ordem quiral e o modo como a estrutura do núcleon responde à mudança deste parâmetro está contida somente na constante $\mathcal{A}$. Observando (6.36), nota-se que a forma como a simetria quiral é parcialmente restaurada depende somente da função de onda nuclear, é independente do valor de $\mathcal{A}$.

Analizando a expressão (6.36), pode-se tirar algumas conclusões qualitativas preliminares. O termo $\overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x})\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})$ representa uma densidade de probabilidade no estado α a qual deve ter um pico no entorno da posição de maior probabilidade do núcleon nesse estado. Já $\rho(\vec{x}) = \sum_\alpha \overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x})\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})$, com a somatória varrendo os estados ocupados, é a densidade do núcleo em questão . Portanto, se considerarmos, por exemplo, um núcleo de camada fechada mais um núcleon (o estado α é um estado de partícula), haverá uma menor superposição da quantidade $\overline{\mathcal{U}}_\alpha(\vec{x})\mathcal{U}_\alpha(\vec{x})$ com $\rho(\vec{x})$ do que se considerássemos o mesmo núcleo de camada fechada menos um núcleon, ou seja, se α fosse um estado de buraco. Assim, a correção dada pela integral (6.36) nos fornece uma contribuição bem maior no caso de buracos do que no caso de partículas, que é exatamente a sistemática mostrada pela maioria dos dados experimentais da anomalia Nolen-Schiffer.

Introduzindo as funções de onda relativísticas de Walecka, (4.8), em (6.36), obtém-se

$$\begin{aligned}
\Delta E(\delta_{np}) &= \frac{\mathcal{A}}{\rho_0} \int r^2 \mathrm{d}r \frac{1}{r^2} \left(\mid G_\alpha(r) \mid^2 - \mid F_\alpha(r) \mid^2 \right) \int \mathrm{d}\Omega \Phi_\alpha^\dagger \Phi_\alpha \\
&\quad \sum_\beta \left(\frac{2j_\beta + 1}{4\pi r^2} \right) \left(\mid G_\beta(r) \mid^2 - \mid F_\beta(r) \mid^2 \right) \\
&= \frac{\mathcal{A}}{4\pi\rho_0} \int \mathrm{d}r \frac{1}{r^2} \left(\mid G_\alpha(r) \mid^2 - \mid F_\alpha(r) \mid^2 \right) \sum_\beta (2j_\beta + 1) \left(\mid G_\beta(r) \mid^2 - \mid F_\beta(r) \mid^2 \right) .
\end{aligned} \tag{6.37}$$

Tabela 6.1: Contribuição da diferença de massa nêutron-próton no meio, para a energia de ligação

		dif.		$\Delta E(\delta_{np})$			
A	Estado	EMD	SkII	W-S	H	H-F	H+MMA
15	$1p_{3/2}^{-1}$	250	190	417.2	452.1	453.0	453.9
	$1p_{1/2}^{-1}$	380	290	381.8	369.9	370.5	371.0
17	$1d_{5/2}$	300	190	224.4	253.6	254.1	254.3
	$2s_{1/2}$	220	210				
39	$2s_{1/2}^{-1}$	370	270	339.7	398.3	398.7	399.2
	$1d_{3/2}^{-1}$	540	430	446.1	487.3	488.5	489.1
41	$1f_{7/2}$	440	350	418.8	457.4	455.7	457.6
	$2p_{3/2}$	380	340				

6.4 Resultados Numéricos

Como foi dito, o parâmetro $\mathcal{A}$ é o único termo que carrega toda a dependência do modelo. De acordo com vários modelos hadrônicos, o intervalo de valores que o parâmetro $\mathcal{A}$ pode assumir vai de 1 MeV a 2 MeV. Para os cálculos aqui apresentados, foi adotado o valor $\mathcal{A} = 2$ MeV, que é o resultado obtido com o modelo de Nambu Jona-Lasinio. Na tabela 6.1, temos uma comparação entre a anomalia calculada por Sato [32] utilizando EMD e SkII e os resultados aqui obtidos para os diversos modelos relativísticos de partículas independentes considerados. Vê-se que, basicamente, nenhuma anomalia resta, para uma escolha apropriada do valor de $\mathcal{A}$ dentro do intervalo mencionado.

Capítulo 7

Conclusões e Perpectivas Futuras

A conclusão geral desta tese é que os efeitos de quebra de simetria de carga gerados pela troca mista $\rho^0 - \omega$ e pela restauração parcial da simetria quiral são suficientemente fortes para explicar a anomalia de Nolen-Schiffer.

Eram três nossos objetivos principais nesta tese. Inicialmente, motivados pelos resultados não relativísticos de Blunden e Iqbal [5] e de Miller [7], e pelo estudo preliminar de Krein, Menezes e Nielsen [8] usando o modelo de Walecka para a matéria nuclear, investigamos os efeitos da troca mista $\rho^0 - \omega$ em modelos relativísticos para o núcleo. Empregamos o modelo de Nedjadi e Rook [11] e o modelo de Walecka [9] para descrever a estrutura de partículas independentes dos núcleos. A interação devida à troca mista $\rho^0 - \omega$ foi tratada em teoria de perturbação de primeira ordem. Usando o valor experimental atualmente aceito para a amplitude de mistura $\rho^0 - \omega$ [27], nossos cálculos mostram que o efeito da troca mista $\rho^0 - \omega$ é suficientemente grande para explicar a anomalia.

O outro objetivo da tese era investigar a questão da dependência de momentum da amplitude de mistura $\rho^0 - \omega$. Esta questão foi levantada por Goldman, Hendersen e Thomas [12]. Apesar dos cálculos iniciais destes autores serem passíveis de críticas devido ao modelo de quarks simples empregado, outros cálculos baseados em modelos mais realistas, como os das Refs. [13], [16], mostram que a questão levantada originalmente pode ser de relevância. Mostramos no capítulo 6 desta tese que a dependência de momentum da amplitude de mistura, como predita pelos cálculos baseados nas regras de soma da QCD [16], provoca uma diminuição do efeito da mistura $\rho^0 - \omega$ da ordem de 50%.

O objetivo final da tese era investigar quantitativamente o efeito conjunto da troca

mista $\rho^0 - \omega$ e de uma restauração parcial da simetria quiral no núcleo. Esta investigação foi motivada pelo estudo anterior, da dependência de momentum da amplitude de mistura e a consequente dimuição do efeito da troca mista $\rho^0 - \omega$. Devido ao fracasso continuado da teoria nuclear tradicional para explicar a anomalia Nolen-Schiffer, outros efeitos baseados em graus de liberdade de quarks foram invocados na literautura com o objetivo de resolver a questão. O efeito proposto por Henley e Krein [19], baseado na hipótese da restauração parcial da simetria quiral tem despertado considerável interesse na literatura. Os resultados de nossos cálculos mostram que a predição de uma diminuição linear com a densidade nuclear da diferença entre as massas do nêutron e do próton pode explicar a sistemática da anomalia. O valor do efeito é dependente do modelo hadrônico.

Certamente que o assunto não foi esgotado nesta tese. Sob o ponto de vista de estrutura nuclear relativística, é premente um estudo dos efeitos da deformação nuclear. Como discutimos no capítulo 5, um núcleon desemparelhado pode provocar polarizações no caroço devido aos fortes campos nucleares de sinais contrários. Isto implica em resolver a equação de Dirac em campos deformados. Com isto, torna-se possível um estudo sistemático de todos núcleos espelho (como também de estados análogos) ao longo da tabela periódica. Trata-se de um cálculo muito sofisticado, que somente nos ùltimos anos têm sido efetuados na literatura.

Talvez a questão mais importante, do ponto de vista da interação núcleon-núcleon básica, que permanece em aberto é a referente à dependência de momentum da amplitude de mistura. A crítica de Miller [14] aos modelos do tipo da Ref. [13] deve ser estudada com cuidado. Talvez fosse interessante investigar com as técnicas das regras de soma da QCD a dependência de momemtum dos processos eletromagnéticos invocados por Miller para criticar aqueles modelos.

Outro assunto que certamente merece um estudo mais detalhado, o qual não tem consequências somente para a anomalia Nolen-Schiffer, é a interrelação entre a restauração da simetria quiral e a quebra de isospin. O problema da quebra e restauração da simetria quiral na QCD é um dos assuntos que têm despertado grande interesse na literatura e muito estudo, tanto teórico quanto experimental, parece ainda ser necessário para um melhor entendimento deste fenômeno. No que se refere à anomalia Nolen-Schiffer, perma-

nece a questão da restauração da simetria quiral no núcleo, mesmo no contexto de modelos hadrônicos como o de Nambu-Jona-Lasinio, de se levar em conta os efeitos de aglomeração dos quarks em núcleons.

Como conclusão final, podemos dizer que a situação a respeito da anomalia Nolen-Schiffer tem progredido enormemente nos últimos anos. Certamente que muitos aspectos ainda permanecem a ser estudados até que ela tenha sido resolvida completamente. Um aspecto importante que tem se revelado ao longo dos anos é que a anomalia Nolen-Schiffer tem sido fonte de novos aspectos interessantes a respeito das interações hadrônicas e muitas surpresas ainda podem surgir.

Referências Bibliográficas

[1] J.A. Nolen e J.P. Schiffer, Annu. Rev. Nucl. Sci. 19(1969)471.

[2] H.A. Bethe e R.F. Bacher Rev. Mod. Phys. 8(1936)82.

[3] K. Okamoto Phys. Lett. 11(1964)150.

[4] J.W. Negele, Nucl. Phys. A165(1971)305.

[5] P.G. Blunden and M.J. Iqbal, Phys. Lett. B 198 (1987) 14.

[6] L.M. Barkov et al., Nucl. Phys. B 256 (1985) 365.

[7] G.A. Miller, Nucl. Phys. A 518 (1989) 345.

[8] G. Krein, D.P. Menezes and M. Nielsen, Phys. Let. B 294 (1992) 7.

[9] B.D. Serot e J.D. Walecka, Adv. Nucl. Phys. 16 (1985) 1.

[10] L.A. Barreiro, A.P. Galeão e G. Krein, submetido para publicação em Phys. Lett. B

[11] Y. Nedjadi e J.R. Rook, Nucl. Pys. A 484 (1988) 525

[12] T. Goldman, J.A. Henderson e A.W. Thomas, Few Body Systems 12 (1992) 123.

[13] G. Krein, A.W. Thomas e A.G. Williams, Phys. Lett. B 317 (1993) 293.

[14] G.A. Miller, proceedings a serem publicado de I International Symposium on Symmetries in Subatomic Physics, Taipei-Taiwan, Junho 1994.

[15] P. Langacker, Phys. Rev. D 20 (1979) 2983.

[16] T. Hatsuda, E.M. Henley, Th. Meissner e G. Krein, Phys. Rev. C 49 (1994) 452.

[17] M.A. Shifiman, A.I. Vainstein e V.I.Akharov, Nucl. Phys. B157(1979)385
S.Narison, *QCD Spectral Sum Rules*, World Scientific, Singapore, 1990.

[18] L.A. Barreiro, A.P. Galeão e G. Krein, em preparação.

[19] E.M. Henley e G. Krein, Phys. Rev. Lett. 62(1989)2586.

[20] Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122 (1961) 345.

[21] N. Isgur e G. Karl, Phys. Rev. D 20 (1979) 1191.

[22] T. Hatsuda, H. Hogassen e M. Prakash, Phys. Rev. C 42 (1990) 2212; *ibid.* Phys. Rev. Lett. 66 (1991) 3851.

[23] G.A. Miller, B.M.K. Nefckens e I. Slaus, Phys. Rep. 194 (1990) 1.

[24] E.M. Lyman, A.D. Hanson e M.B. Scott, Phys. Rev. 94(1951)626.

[25] J.E. Rosenthal e G. Breit, Phys. Rev. 41 (1932) 459.

[26] R. Hofstadter, Rev. Mod. Phys. 28(1956)214.

[27] R.C Barrett, Rep. Prog. Phys. 37(1974)1.

[28] T.W. Donnelly e J.D. Walecka, Nucl. Phys. A 201 (1973)81.

[29] L.J. Friar e J.W. Negele, Adv. Nucl. Phys. 8(1975)219.

[30] L.R.B. Elton, Nuclear Sizes (1961) Oxford:Clarendon Press.

[31] L.L. Foldy e E. Eriksen, Phys. Rev. 95(1954)1048.

[32] H. Sato, Nucl.Phys. A 269 (1976) 378.

[33] S. Shlomo, Rep. Prog. Phys. 41(1978)957.

[34] R. Thieberger, Nucl. Phys. 2(1956)533.

[35] K. Okamoto e C. Lucas, Nucl. Phys. B2(1967)347.

[36] E.M. Henley e T.E. Keliher, Nucl. Phys. A189(1972)632.

[37] E.M. Henley e D.H. Wilkinson, em Few particle problems in the nuclear interaction, ed. I. Slaus, S.A. Moszkowski, R.P. Haddock e W.T.H. van Oers, North-Holland, Amsterdam, 1972.

[38] P.C. MacNaemee, M.D. Scadron e S.A. Coon Nucl. Phys. A 249 (1975) 483.

[39] Particle Data Group, Phys. Lett. B 50 (1974).

[40] L.D. Knutson e colab., Nucl. Phys. A 508 (1990) 185; Phys. Rev. Lett. 66 (1991) 1410. S.E. Vigdor e colab., Phys. Rev. C 46 (1992) 410.

[41] G.A. Miller, A.W. Thomas e A.G. Williams, Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 2567; Phys. Rev. C 36 (1987) 1956.

[42] L.G. Arnold e B.C. Clark, Phys. Lett. B 84 (1979) 46

[43] B.C. Clark, S. Hama, R.L. Merces, L. RaY e B.D. Serot, Phys. Rev. Lett 50 (1983) 1644.

[44] D. Vautherin e D.M. Brink, Phys. Rev. C (1972) 626.

[45] L. Ray e P.E. Hodgson, Phys. Rev. C 20 (1979) 2403.

[46] C.J. Horowitz and B.D. Serot, Nucl.Phys. A 368 (1981) 503.

[47] Computational Nuclear Physics 2, K. Langarke, J.A. Maruhn e S.E. Koonin (Editores), Springer-Verlag, 1993

[48] H.F. Boersma e R. Malfliet, Phys. Rev. C 49 (1994) 1495.

[49] Brockmann e Toki, Phys. Rev. Lett. 68 (1992) 3408.

[50] R. Mackleidt, K. Holinde e A. Elster, Phys. Rep. 149 (1987) 1.

[51] G. Krein, proceedings a serem publicado de I International Symposium on Symmetries in Subatomic Physics, Taipei-Taiwan, Junho 1994.

[52] A.R. Edmonds, Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton University Press (1974).

[53] W.Köepf e G.Krein, comunicação privada.

[54] J. Gasser e H. Leutwyler, Phys. Rep. 87(1982)77.

[55] V. Bernard e U.G. Meissner, Nucl. Phys. A 489(1988)647.

[56] N. Isgur, Phys. Rev. D21(1980)779.

[57] T. Hatsuda, H. Hogaasen e M. Prakash, State University of New York at Stony Brook Report No. NTG-90-19, 1990 (não publicado).

[58] T.D. Cohen, R.J. Furnstahl e M.K. Banerjee, Phys. Rev. C43(1991)357.

[59] Saito e Thomas, preprint ADP-94-4/T 146, submetido para o Physics Letters B.