



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Andressa Carla Rodrigues

As quatro operações matemáticas:
das dificuldades ao processo ensino e aprendizagem

São José do Rio Preto
2019

Andressa Carla Rodrigues

As quatro operações matemáticas:
das dificuldades ao processo ensino e aprendizagem

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Rita de Cássia Pavan Lamas

São José do Rio Preto
2019

R696q Rodrigues, Andressa Carla

As quatro operações matemáticas : das dificuldades ao processo ensino e aprendizagem / Andressa Carla Rodrigues. -- São José do Rio Preto, 2019

84 f. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientadora: Rita de Cássia Pavan Lamas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Números naturais. 3. Operações e propriedades. 4. Algoritmos. 5. Material dourado. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Andressa Carla Rodrigues

As quatro operações matemáticas:
das dificuldades ao processo ensino e aprendizagem

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof^a. Dr^a. Rita de Cássia Pavan Lamas
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto
Orientadora

Prof. Dr^a. Rúbia Barcelos Amaral Schio
UNESP – Câmpus de Rio Claro

Prof. Dr^a. Évelin Meneguesso Barbaresco
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
05 de abril de 2019

Dedico este trabalho aos meus pais, João Carlos e Jerônima, aos quais sou eternamente grata pelas bênçãos da vida e pela minha formação pessoal e profissional.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por tudo, por permitir que eu realizasse mais este sonho, dando-me sabedoria para lidar com todas as situações, proporcionando-me grandes aprendizados em mais esta etapa da minha vida.

Aos meus pais, gratidão por todos os ensinamentos e pelo apoio na conquista de tantos sonhos, sendo este mais um e importante.

Ao meu irmão Carlos André, pela compreensão de não ter ido ao show dos Rolling Stones na cidade de São Paulo, que ocorreu na mesma data da prova de acesso ao PROFMAT 2016.

Ao meu amigo Cléber (Lion), muito obrigada pelo envio do link das inscrições do PROFMAT 2016 e por me incentivar durante todo o curso.

Ao Flávio, o meu carinho e amor pela compreensão das minhas ausências e pela alegria demonstrada nas minhas conquistas.

À minha querida orientadora, Prof^ª Dr^a Rita de Cássia Pavan Lamas, que com toda a sua simplicidade, serenidade, sabedoria, competência e seu conhecimento me auxiliou nas orientações, ajudando-me nessa caminhada. Obrigada pela confiança, generosidade e por ter dedicado o seu tempo nesta dissertação.

Ao PROFMAT, pela oportunidade de fazer este curso, e a todos os professores envolvidos neste projeto, que compartilharam conhecimentos e experiências importantes para minha formação.

Obrigada aos meus amigos que participaram, direta ou indiretamente, desta conquista, incentivando-me em todos os momentos, dividindo sonhos e alegrias.

A Sara Lima, diretora da escola onde a pesquisa de campo para este trabalho foi realizada, obrigada por acreditar neste trabalho, pelo incentivo de realizar este sonho, pela disponibilização de sala e materiais para a realização das atividades.

Aos alunos participantes deste trabalho, muito obrigada por terem se dedicado a cada atividade proposta com determinação, comprometimento e foco.

“Conheça todas as teorias, domine todas as técnicas, mas, ao tocar
uma alma humana, seja apenas outra alma humana”.

Carl Gustav Jung.

(MOREIRA, 2018, p. 206).

RESUMO

No decorrer dos anos, pelas experiências vivenciadas em sala de aula, nos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, cada vez mais foram observadas dificuldades dos alunos nos cálculos simples, em problemas na matemática e na física. Erros conceituais, nos algoritmos, motivaram-nos a escrever este trabalho para auxiliar professores no processo ensino e aprendizagem das quatro operações no conjunto dos números naturais, a fim de amenizar as dificuldades dos alunos. O objetivo do trabalho é avaliar e diagnosticar dificuldades nos cálculos que envolvem as operações fundamentais e básicas da matemática, aprimorando a forma de ensiná-las aos alunos. Conceitos importantes serão apresentados, como o sistema de numeração decimal, a definição do conjunto dos números naturais e as quatro operações matemáticas. Os algoritmos da decomposição e usual serão explorados com o uso do ábaco de papel e com o material dourado, destacando-se as propriedades associativa e comutativa da adição, assim como as distributiva, associativa e comutativa da multiplicação. Considerando as dificuldades apresentadas no diagnóstico, propõem-se atividades com o material dourado explorando conceitos e instigando o uso dos algoritmos para a compreensão das trocas das ordens, quando necessário. Em síntese, este trabalho apresenta uma metodologia alternativa para melhorar o desempenho dos alunos nos cálculos que envolvem as quatro operações.

Palavras-chave: Números Naturais. Operações e Propriedades. Algoritmos da Decomposição e Usual. Material Dourado. Ensino e Aprendizagem.

ABSTRACT

Over the years, experiences in the classroom, the Final Years of Elementary School and High School have seen more and more difficulties for students in simple calculations, problems in mathematics and in physics. Conceptual errors in the algorithms motivated us to write this work to help teachers in the teaching and learning process of the four operations in the set of natural numbers in order to ease the students' difficulties. The purpose of this paper is to evaluate and diagnose difficulties in calculations involving fundamental and basic mathematical operations, improving the way students are taught. Important concepts will be presented, such as the decimal numbering system, the definition of the set of natural numbers and the four mathematical operations. The usual decomposition algorithms will be explored with the use of the paper abacus and the gold material, emphasizing the associative and commutative properties of addition, as well as the distributive, associative and commutative multiplication. Considering the difficulties presented in the diagnosis, activities are proposed with the golden material exploring concepts and instigating the use of the algorithms to understand the order exchanges, when necessary. In summary, this paper presents an alternative methodology to improve students' performance in the calculations involving the four operations.

Keywords: Natural Numbers. Operations and Properties. Decomposition and Usual Algorithms. Gold Material. Teaching and Learning.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Resposta do Aluno C.	17
Figura 2 - Resposta do Aluno A.	17
Figura 3 - Resposta do Aluno B.	18
Figura 4 - Resposta do Aluno C.	18
Figura 5 - Resposta do Aluno B.	19
Figura 6 - Resposta do Aluno C.	19
Figura 7 - Ábaco Japonês – Soroban.	22
Figura 8 - Ábaco Romano.	22
Figura 9 - Ábaco de Pinos.	22
Figura 10 - Material das Contas Douradas.	23
Figura 11 - Peças do Material Dourado.	24
Figura 12 – Representação do Número 218 no Ábaco de Papel.	24
Figura 13 - Esquema do Algoritmo da Divisão.	45
Figura 14 - Algoritmo da Divisão - Método Curto.	48
Figura 15 - Resposta do Aluno A.	51
Figura 16 - Resposta do Aluno B.	52
Figura 17 - Resposta do Aluno C.	52
Figura 18 - Resolução da Situação-Problema.	53
Figura 19 - Resolução da Situação-Problema.	54
Figura 20 - Resposta do Aluno A.	56
Figura 21 - Resposta do Aluno B.	57
Figura 22 - Resposta do Aluno C.	57
Figura 23 - Resolução da Situação-Problema.	59
Figura 24 - Resposta do Aluno A.	60
Figura 25 - Resposta do Aluno A.	64
Figura 26 - Resposta do Aluno A.	65
Figura 27 - Resposta do Aluno C.	66
Figura 28 - Resposta do Aluno A.	67
Figura 29 - Resposta do Aluno C.	67
Figura 30 - Resposta do Aluno A.	69
Figura 31 - Resposta do Aluno C.	69

Figura 32 - Resposta do Aluno A.	71
Figura 33 - Resposta do Aluno A.	74
Figura 34 - Resposta do Aluno A.	75
Figura 35 - Resposta do Aluno A.	76
Figura 36 - Resposta do Aluno A.	77

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Decomposição do Número Natural 1981.	26
Quadro 2 - Algoritmo da Decomposição - Adição.	31
Quadro 3 - Algoritmo Usual (ou Simplificado) - Adição.	32
Quadro 4 - Aplicação do Algoritmo da Decomposição - Subtração.	34
Quadro 5 - Algoritmo usual (ou Simplificado) - Subtração.	35
Quadro 6 - Algoritmo da Decomposição - Multiplicação.	40
Quadro 7 - Algoritmo Usual - Multiplicação.	40
Quadro 8 - Algoritmo da Decomposição - Multiplicação.	41
Quadro 9 - Algoritmo Usual - Multiplicação.	41
Quadro 10 - Primeira Etapa da Divisão.	45
Quadro 11 - Segunda Etapa da Divisão.	46
Quadro 12 - Terceira Etapa da Divisão.	46
Quadro 13 - Representação da Divisão, usando Ábaco de Papel com o Material Dourado.	47
Quadro 14 - Algoritmo da Divisão - Parte 1.	49
Quadro 15 - Algoritmo da Divisão - Parte 2.	49
Quadro 16 - Algoritmo da Divisão - Parte 3.	50
Quadro 17 - Algoritmo da Divisão - Parte 4.	50
Quadro 18 - Aplicação do Algoritmo da Decomposição.	54
Quadro 19 - Aplicação do Algoritmo da Decomposição.....	55
Quadro 20 - Esquema da Situação-Problema.	58
Quadro 21 - Etapas da Subtração pelo Algoritmo da Decomposição.	59
Quadro 22 - Contagem de Elementos.	63
Quadro 23 - Ilustração da Divisão com Zero no Quociente com o Material Dourado.	73
Quadro 24 - Ilustração da Divisão com Zero no Quociente com o Algoritmo Usual. .	74

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Representação do Número 1981, segundo as Classes e Ordens.	25
--	----

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO	14
2 - ASPECTOS METODOLÓGICOS E PROVA DIAGNÓSTICA	16
2.1 - Aspectos Metodológicos	16
2.2 - Prova Diagnóstica	16
3 - O CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS	20
3.1 - Decomposição de um Número Natural	21
4 - OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS DO CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS	28
4.1 - Adição	28
4.1.1 - Propriedades da Adição	28
4.1.2 - Algoritmos	31
4.1.3 - Algoritmo da Adição	31
4.2 - Subtração	33
4.2.1 - Algoritmo da Subtração	33
4.3 - Multiplicação	35
4.3.1 - Propriedades da Multiplicação	36
4.3.2 - Algoritmo da Multiplicação	40
4.4 - Divisão	42
4.4.1 - Algoritmo da Divisão	44
5 - O USO DO MATERIAL DOURADO PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DA ADIÇÃO E DA SUBTRAÇÃO	51
5.1 - O Algoritmo da Adição com o uso do Material Dourado	53
5.1.1 - Resultados dos alunos para a Adição	56
5.2 - O Algoritmo da Subtração com o uso do Material Dourado	58
5.2.1 - Resultados dos alunos para a Subtração	60
6 - O ALGORITMO DA MULTIPLICAÇÃO COM O USO DO MATERIAL DOURADO	62
6.1 - A Multiplicação quando os Dois Fatores têm Apenas o Algarismo da Unidade	62
6.2 - A Multiplicação quando Um dos Fatores tem Dois Algarismos e o Outro Fator tem um Algarismo	65

6.3 - A Multiplicação quando os Dois Fatores têm Dois Algarismos	68
7 - O ALGORITMO DA DIVISÃO COM O USO DO MATERIAL	
DOURADO	71
7.1 - A Divisão quando o Divisor tem Apenas o Algarismo da Unidade	71
7.2 - A Divisão quando o Divisor tem Dois Algarismos	76
8 - CONSIDERAÇÕES GERAIS	78
REFERÊNCIAS	79
APÊNDICE A – Prova Diagnóstica	80
APÊNDICE B – Atividades Aplicadas aos Alunos Durante o Processo Ensino e Aprendizagem	83

1 - INTRODUÇÃO

Ao longo dos anos, como docente, percebia o quanto alguns alunos apresentavam certa facilidade em resolver determinados problemas, como calcular as raízes de uma equação de 2º grau com uma incógnita, mas se atrapalhavam quando tinham que determinar, por exemplo, o comprimento de uma circunferência ou calcular o raio da circunferência dado o comprimento. Tal dificuldade era mais explícita quando, nesses casos, as incógnitas envolvidas podiam ter como medidas números decimais.

Com a experiência e as situações vivenciadas em sala de aula, tais dificuldades ficaram mais claras e evidentes quando tive a oportunidade de lecionar na disciplina de Física, tanto nos Anos Finais do Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. Nesses casos, a complexidade estava nos cálculos envolvidos e não na teoria, como muitos poderiam pensar, já que, na área da Física, a parte teórica é carregada de informações, leis e fórmulas que os alunos precisam associar de modo conjunto para chegar ao resultado esperado como, por exemplo, calcular a densidade de um corpo, ou, dada a massa de um corpo e a sua densidade, determinar o volume desse corpo.

Nesses exemplos, as operações envolvidas são a multiplicação e a divisão. Operações básicas com que, ao longo dos anos escolares, os alunos se deparam, em situações diretas ou indiretas, na Matemática e nas disciplinas afins, como Física e Química. Porém, todos os problemas mencionados se resumem ao cálculo simples, relacionados aos conteúdos previstos para os Anos Iniciais e Finais do Ensino Fundamental, talvez por falta de pré-requisitos ou poucas resoluções de problemas, ou ainda, por não ter tempo hábil para compreender os cálculos, facilitando o processo ensino e aprendizagem.

Assim, os objetivos deste trabalho são avaliar e diagnosticar os déficits apresentados nos cálculos que envolvem as operações fundamentais e básicas da matemática e esclarecê-las, a fim de proporcionar aos alunos envolvidos maior entendimento nas resoluções para os conteúdos futuros, tanto na Matemática quanto na Física e na Química.

No Capítulo 2 será apresentada uma análise das respostas do exercício 3 (Apêndice A), dadas pelos alunos da pesquisa na prova diagnóstica. Nos Capítulos 3 e 4 introduziremos o Conjunto dos Números Naturais e as Operações Fundamentais em $\mathbb{N}$, respectivamente.

Nos Capítulos 5, 6 e 7 apresentaremos as atividades desenvolvidas com o auxílio do material dourado, a fim de amenizar as dificuldades e resolver os problemas apresentados em cálculos básicos, mostrando os resultados obtidos pelos alunos durante o ano de 2018.

Os estudantes que contribuíram para a realização deste trabalho foram nomeados como alunos A, B e C, sendo que os alunos A e C estão no 7º ano e o aluno B no 5º ano do Ensino Fundamental, e foram indicados por seus professores por apresentar dificuldades importantes nas operações básicas.

2 - ASPECTOS METODOLÓGICOS E PROVA DIAGNÓSTICA

2.1 Aspectos Metodológicos

Este trabalho é composto de uma parte teórica relacionada aos pré-requisitos para o desenvolvimento das quatro operações básicas da matemática e resultados da prática desses conteúdos adaptados ao uso do material dourado.

Inicialmente, foram selecionados, pelos docentes de matemática, 10 alunos que apresentavam dificuldades acentuadas nos cálculos que envolvem as quatro operações básicas com números naturais. Eram alunos do 5º ao 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola do interior do Estado de São Paulo. Dentre esses alunos, apenas três concordaram em participar desta pesquisa, denominados Aluno A, Aluno B e Aluno C.

As atividades práticas foram desenvolvidas durante os meses de fevereiro a dezembro de 2018, em período contrário ao da escola, semanalmente, com duração de 70 minutos, a partir da análise realizada pela aplicação da prova diagnóstica (Apêndice A) no início de fevereiro, de modo a diagnosticar que tipos de erros e quais dificuldades os alunos A, B e C apresentavam em relação às quatro operações. Lorenzato (2010, p. 50) afirma que “[...] o erro é pista (dica) para a realização de sondagem às suas possíveis causas. [...] falta de atenção, pressa, chute, falha de raciocínio, falta de estudo, mau uso ou má interpretação da linguagem oral ou escrita da matemática [...]”.

Durante o desenvolvimento das atividades práticas, buscou-se identificar qual era de fato o conhecimento dos alunos com relação aos aspectos teóricos para resolver problemas envolvendo as quatro operações com os números naturais, com o uso do material didático, o material dourado.

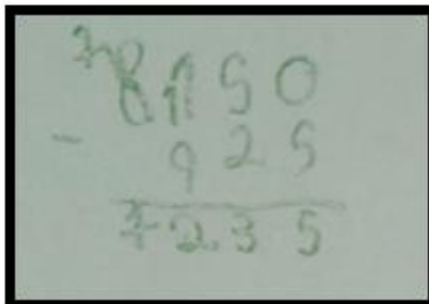
2.2 - Prova Diagnóstica

Nessa aplicação, foi verificado que, na questão 3d (Apêndice A), os três alunos aplicaram o algoritmo usual e fizeram o cálculo corretamente. Lorenzato (2010, p. 50) completa “[...] que acerto pode camuflar erro”.

A seguir é apresentada a análise das respostas dos alunos na resolução da questão 3 (Apêndice A), a qual evidencia os problemas apresentados por eles, nas operações básicas.

O aluno C errou a questão 3b (Figura 1), a partir de um erro na subtração da ordem das unidades, tendo trocado $(0 - 5)$ por $(5 - 0)$. Apesar desta falta, ele percebeu que na ordem das centenas não era suficiente tal subtração e fez a troca correta.

Figura 1 - Resposta do Aluno C.



The image shows a handwritten subtraction problem on a grid background. The top number is 38150 and the bottom number is 925. A horizontal line separates them. Below the line, the result is written as 37235. The error is in the units place, where 0 minus 5 was incorrectly calculated as 5, requiring a borrow from the tens place.

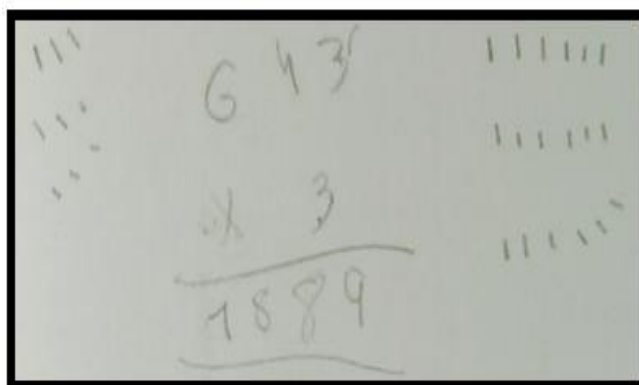
$$\begin{array}{r} 38150 \\ - 925 \\ \hline 37235 \end{array}$$

Fonte: Arquivo da autora.

Na Figura 2 (questão 3a), o Aluno A utilizou o algoritmo usual e, ao realizar a multiplicação na ordem das dezenas, cometeu um erro ao multiplicar 3 por 4.

Nas Figuras 3 e 4, ambas referentes às questões 3a (Apêndice A), tanto o Aluno B quanto o aluno C usaram o fato de a multiplicação representar uma soma de parcelas iguais. Eles também fizeram uso do algoritmo usual da adição, mas cometeram um erro ao somar os algarismos da ordem das centenas. Percebe-se que o Aluno B (Figura 3), ao somar os algarismos da ordem da centena $1 + 6 + 6 + 6$, colocou o resultado 17, enquanto o Aluno C (Figura 4), também ao somar os algarismos da ordem da centena $1 + 6 + 6 + 6$, obteve como resultado o 16.

Figura 2 - Resposta do Aluno A.



The image shows a handwritten multiplication problem on a grid background. The top number is 643 and the bottom number is 3. A horizontal line separates them. Below the line, the result is written as 1889. The error is in the tens place, where 4 multiplied by 3 was incorrectly calculated as 8, instead of the correct 12.

$$\begin{array}{r} 643 \\ \times 3 \\ \hline 1889 \end{array}$$

Fonte: Arquivo da autora.

Figura 3 - Resposta do Aluno B.

$$\begin{array}{r} 643 \\ 643 \\ 643 \\ \hline 1.729 \end{array}$$

Fonte: Arquivo da autora.

Figura 4 - Resposta do Aluno C.

$$\begin{array}{r} 643 \\ + 643 \\ 643 \\ \hline 1629 \end{array}$$

Fonte: Arquivo da autora.

Na análise da questão 3c, o Aluno A não fez o exercício e, ao ser questionado, disse ter muitas dificuldades ao realizar as multiplicações em que os dois fatores apresentam dois algarismos. Também ressaltou que fica perdido nessas resoluções e não compreende quando precisa “pular” uma casa para continuar a multiplicação.

Na Figura 5, o Aluno B cometeu o erro de multiplicação na primeira passagem do algoritmo. Percebe-se que ao lado da resolução ele “construiu” a tabuada do 9, e ao ser questionado sobre como foi feita essa construção, disse que foi uma técnica vista em um vídeo na internet, e que decorou o jeito de fazê-la. Nesse sentido, corroboramos Tatto e Scapin (2004, p. 66), “aprender [...] de cor é mais agradável e não exige relacionar, aplicar, concluir... Assim, passamos a aceitar tudo o que nos é imposto, o que nos é transmitido pela mídia e pela sociedade, sem fazer qualquer análise”. Na sequência, o Aluno B também não fez a multiplicação usando o algarismo correspondente à dezena (Figura 5). Ele somou $9 + 1 + 1 = 11$ e terminou a resolução.

Na Figura 6, o Aluno C aplicou, corretamente, a primeira passagem do algoritmo da ordem das unidades, porém, não fez a multiplicação do algarismo da dezena. Ao ser questionado sobre o porquê de não ter continuado a multiplicação, afirmou achar que tinha terminado a conta. Observe que este aluno também construiu a tabuada ao lado da resolução, e quando foi questionado sobre como ela foi feita, disse que vai somando de 9 em 9.

Figura 5 - Resposta do Aluno B.

Handwritten mathematical work of Aluno B. On the left, a multiplication problem is shown: $9 \times 19 = 170$. On the right, a vertical addition problem is shown: $9 + 18 = 27$, $9 + 27 = 36$, $9 + 36 = 45$, $9 + 45 = 54$, $9 + 54 = 63$, $9 + 63 = 72$, $9 + 72 = 81$, and $9 + 81 = 90$.

Fonte: Arquivo da autora.

Figura 6 - Resposta do Aluno C.

Handwritten mathematical work of Aluno C. On the left, a multiplication problem is shown: $8 \times 19 = 152$. On the right, a multiplication table is shown, listing products from $9 \times 0 = 0$ to $9 \times 10 = 90$.

Fonte: Arquivo da autora.

A análise da prova diagnóstica nos mostrou ser necessário, trabalhar a decomposição dos números naturais, visando à compreensão das trocas das ordens e das operações básicas. Esses e demais aspectos teóricos relacionados aos números naturais serão tratados nos Capítulos 3 e 4.

3 - O CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

Desde a Pré-história, quando surgiram os primeiros números, o homem teve a necessidade de contar e medir para avaliar as diferentes quantidades de uma grandeza. Assim, cada civilização, a partir da ideia que tinha e da sua cultura, criava suas próprias formas de registrar essas quantidades.

Após milhares de anos de realização de contagens de diversos tipos, como nos sistemas de numeração egípcio, mesopotâmico ou babilônico, romano e maia, foi criado pelos hindus o sistema de numeração decimal, mas foram os árabes que aperfeiçoaram e divulgaram o sistema de numeração indo-arábico, que hoje é aceito no mundo todo e que será utilizado como base de nosso trabalho.

Segundo Lima (2017), decorridos milênios, podemos descrever o conjunto $\mathbb{N}$ dos Números Naturais que foi caracterizado pelo matemático italiano Giuseppe Peano, no limiar do século XX, pelos axiomas de Peano:

1. Existe uma função injetiva $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. A imagem $s(n)$ de cada número natural $n \in \mathbb{N}$ chama-se *sucessor* de n . Ou seja, todo número natural tem um único sucessor; números diferentes têm sucessores diferentes.
2. Existe um único número natural $1 \in \mathbb{N}$ tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, existe um único número natural 1 que não é sucessor de nenhum outro.
3. Se um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ e $s(X) \subset X$ (isto é, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$) então $X = \mathbb{N}$. Ou seja, se um conjunto de números naturais contém o 1 e contém também o sucessor de cada um dos seus elementos, então esse conjunto contém todos os números naturais.

O terceiro axioma é conhecido como *Princípio da Indução Finita* e significa que todo número natural n pode ser obtido a partir de 1, tomando-se o seu sucessor $s(1)$, o sucessor deste, $s(s(1))$, e assim por diante. Assim, 1, $s(1)$, $s(s(1))$, ... , são os elementos do Conjunto dos Números Naturais $\mathbb{N}$. Considerando $s(1) = 2$, $s(s(1)) = 3$, ... , e pelos axiomas de Peano, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

O Princípio da Indução Finita também pode ser enunciado, segundo Lima (1982, p. 27), da seguinte maneira: “Seja $\wp$ uma propriedade referente a números naturais. Se 1 gozar da propriedade $\wp$ e se, do fato de um número natural n gozar de $\wp$, poder-se concluir que

$n + 1$ também goza da propriedade $\wp$, então, todos os números naturais gozam dessa propriedade”.

Segundo Lima (2014, p. 24), “um engenhoso processo chamado *Sistema de Numeração Decimal* permite representar todos os números naturais com o auxílio dos símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9”. Esses símbolos são chamados de algarismos.

O símbolo zero foi criado pelos hindus para representar a ausência de quantidades.

A história da matemática contém muitas anomalias e uma delas é a de que a mais antiga ocorrência indubitável de um zero na Índia se acha em uma inscrição de 876 anos atrás, isto é, mais de dois séculos depois da primeira referência aos nove outros símbolos. Não se sabe sequer se o número zero [...] surgiu em conjunção com os outros nove símbolos numéricos indianos. É bem possível que o zero seja originário do mundo grego, talvez de Alexandria, e que tenha sido transmitido à Índia depois que o sistema de numeração decimal posicional já estava estabelecido. [...] embora os gregos tivessem o conceito do nada, eles nunca o interpretaram como um número como fizeram os indianos (PIRES, 2013, p. 20).

Introduziremos na Seção 3.1 os conceitos referentes às quatro operações básicas nos Números Naturais. Estas, por sua vez, são importantíssimas, não apenas para a Matemática, mas também para a realização de cálculos nas áreas afins, como na Física e na Química.

3.1 - Decomposição de um Número Natural

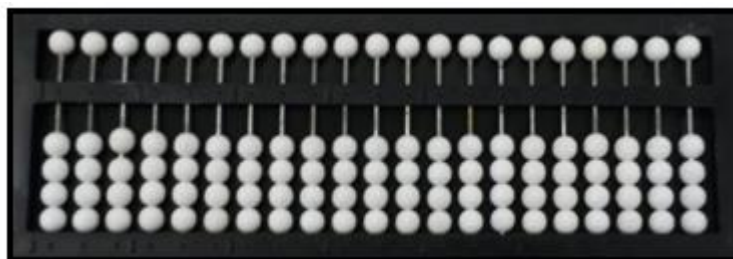
Desde os homens primitivos, notava-se a necessidade de se criar uma máquina de calcular, pois eles usavam as mãos para realizar cálculos que nem sempre eram possíveis, principalmente quando se tratava de números muito grandes.

Segundo Cardoso (1998, p. 13), “[...] foram das pedrinhas do homem primitivo que saíram os primeiros modelos de ábaco. Gregos e babilônicos reclamam sua invenção, que se deu há 5000 anos, sendo os chineses os responsáveis pelo aperfeiçoamento do modelo atual”.

Nas Figuras 7, 8, 9 e 12 são apresentados alguns modelos de ábacos e nas Figuras 10 e 11, o Material Dourado, ambos auxiliando na contagem que se desenvolveram ao longo do tempo.

Ábaco Japonês – Soroban (Figura 7): tem uma bolinha na parte superior de cada haste, que vale 5 unidades, e 4 na parte inferior, que valem 1 unidade cada.

Figura 7 - Ábaco Japonês - Soroban.



Fonte: Arquivo da autora.

Ábaco Romano (Figura 8): este ábaco era dividido em colunas, cada uma delas representava uma ordem decimal.

Figura 8 - Ábaco Romano.

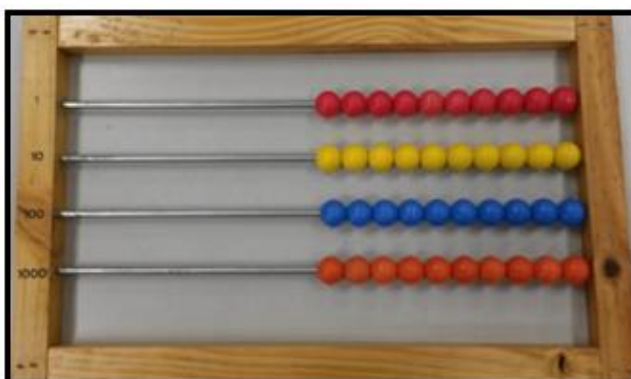


Fonte: Internet: www.descompliqueamatematica.blogspot.com/2013/04/tipos-de-abaco-e-sua-história.html.

Acesso em: 23 abr. 2018.

Ábaco de Pinos (Modelo Hindu) (Figura 9): os pinos são colocados sobre uma haste de madeira e neles inserimos quantas bolinhas forem necessárias para representar o número. Cada pino representa uma ordem decimal.

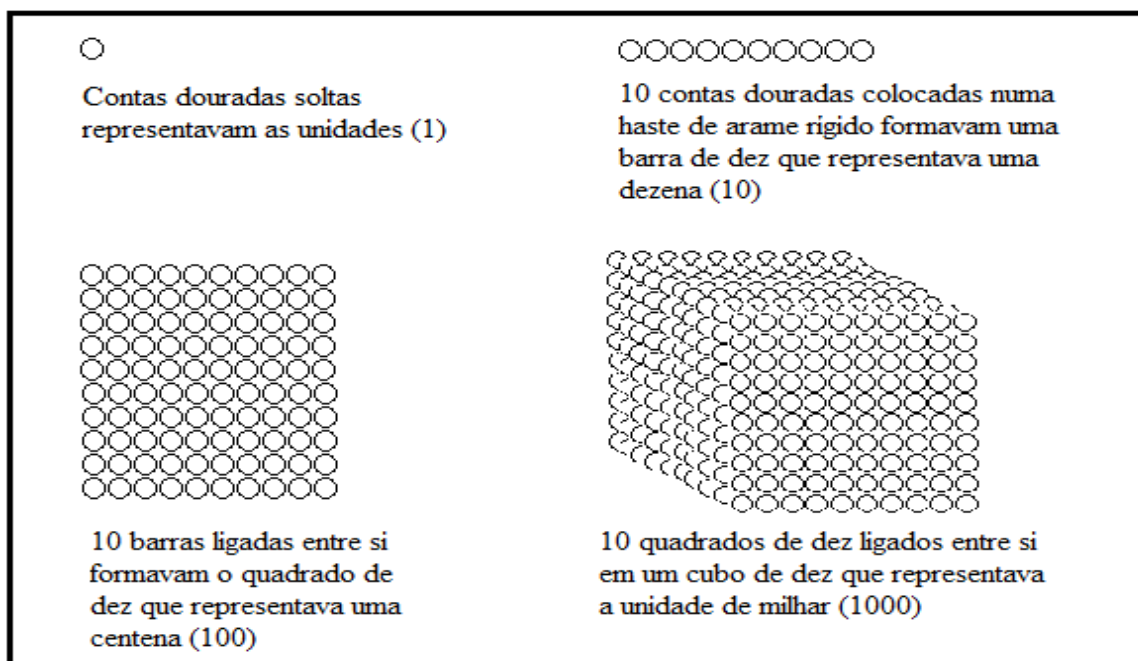
Figura 9 - Ábaco de Pinos.



Fonte: Arquivo da autora.

Material dourado: segundo Cardoso (1998, p. 18), “[...] é um dos muitos materiais idealizados pela médica e educadora italiana Maria Montessori (1870-1952) para o trabalho com a matemática. Inicialmente, o Material Dourado era conhecido como “Material das Contas Douradas” [...], como ilustrado na Figura 10.

Figura 10 - Material das Contas Douradas.

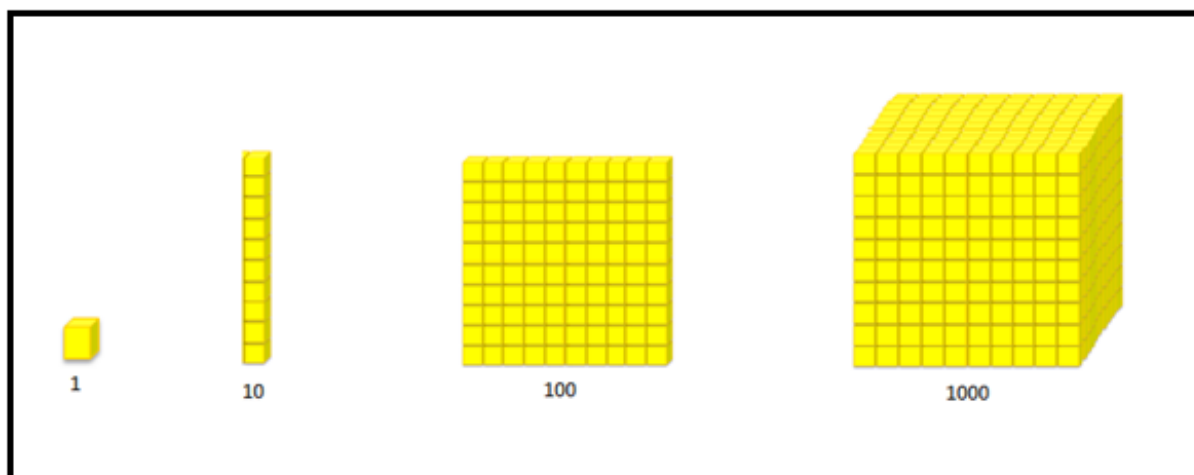


Fonte: Elaborada pela autora.

Atualmente, o material dourado é encontrado em forma de madeira, como ilustrado na Figura 11.

Embora esse material permitisse que as próprias crianças compusessem as dezenas e centenas, a imprecisão das medidas dos quadrados e cubos se constituía num problema ao serem realizadas atividades para números decimais e raiz quadrada. [...] Foi por isso que Lubienska de Lenval, seguidor de Montessori, fez uma modificação no material inicial e o construiu em madeira na forma que encontramos atualmente (CARDOSO, 1998, p. 19).

Figura 11 - Peças do Material Dourado.



Fonte: Elaborada pela autora.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, mais conhecidos como PCN, nos 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, também é proposto o uso do Material Dourado como recurso para a compreensão de conteúdos ligados à radiciação (raiz quadrada e raiz cúbica) e ao volume (cubo e paralelepípedo) de uma maneira lúdica, para que os alunos possam visualizar concretamente tais conceitos.

Ábaco de papel (Figura 12): é também chamado de “quadro valor de lugar”. O seu uso pode auxiliar na compreensão das trocas das ordens de grandezas realizadas nas operações básicas.

Ábaco de papel é a denominação [...] para o material “quadro valor de lugar”, juntamente com uma adaptação das peças do material dourado apresentadas e cortadas em papel quadriculado de 1 cm x 1 cm. O “quadro valor de lugar” é chamado de ábaco, pois sua estrutura se assemelha ao ábaco de pinos, e também porque é um contador (CARDOSO, 1998, p. 27).

Figura 12 - Representação do Número 218 no Ábaco de papel.

centena	dezena	unidade
□ □		o o o o o o o o
2	1	8

Fonte: Elaborada pela autora.

Com a introdução do sistema de numeração decimal, ou seja, sistema na base 10, o aluno deve ter uma compreensão sobre a posição que cada número ocupa, podendo decompô-lo, segundo as suas ordens, na escrita aditiva e multiplicativa.

Para a leitura e a escrita por extenso, separamos o número, agrupando as ordens de 3 em 3, da direita para a esquerda, formando as classes. Veja, na Tabela 1, as ordens das duas primeiras classes e a representação, por exemplo, do número 1 981.

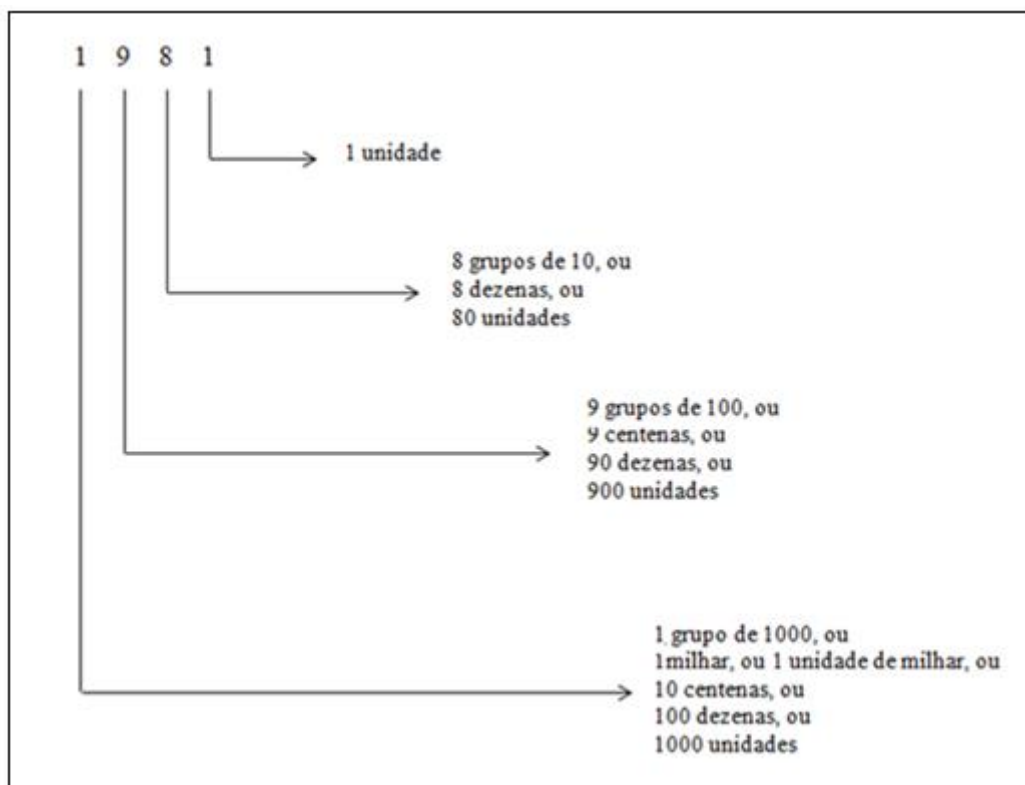
Tabela 1 - Representação do Número 1 981, segundo as Classes e Ordens.

Classe dos milhares			Classe das unidades		
Ordens			Ordens		
6 ^a	5 ^a	4 ^a	3 ^a	2 ^a	1 ^a
Centena de milhar	Dezena de milhar	Unidade de milhar	Centena	Dezena	Unidade
		1	9	8	1

Fonte: Elaborada pela autora.

Também podemos explicitar a decomposição do número natural 1 981, como no Quadro 1, ressaltando que o número 1 981 tem 4 algarismos, logo, possui 4 ordens e duas classes.

Quadro 1 – Decomposição do Número Natural 1 981.



Fonte: Elaborado pela autora.

No Quadro 1, mostramos com clareza a posição que cada algarismo ocupa e a quantidade que cada ordem representa. Assim, o aluno vai se familiarizando com a necessidade das trocas exigidas em determinados cálculos.

A decomposição apresentada no Quadro 1 pode ser sintetizada nos princípios aditivo e multiplicativo.

Na escrita aditiva é feita a decomposição do número 1 981, separando-o nas quantidades indicadas em cada posição, de acordo com as ordens e classes.

- *Escrita aditiva:* $1981 = 1000 + 900 + 80 + 1$

Já na escrita multiplicativa, usamos a escrita aditiva como base e evidenciamos a quantidade que cada ordem apresenta de modo simplificado. No exemplo, há uma unidade de milhar, nove centenas, oito dezenas e uma unidade.

- *Escrita multiplicativa:* $1981 = 1 \times 1000 + 9 \times 100 + 8 \times 10 + 1$

A partir desses princípios, espera-se que o aluno adquira conhecimento para analisar cada número e, assim, possa realizar cálculos, compreendendo e entendendo alguns

procedimentos como “emprestar um zero na divisão” ou “pular uma casa quando multiplicamos dois números com dois algarismos cada”.

No próximo capítulo apresentamos as operações fundamentais em $\mathbb{N}$ com as suas principais propriedades. Acreditamos que, se relacionarmos os conceitos do sistema de numeração decimal vistos na Seção 3.1 com as ideias das operações e suas propriedades vinculadas aos algoritmos, os alunos poderão atingir êxitos nos cálculos básicos. Aqui, optamos pelo algoritmo da decomposição e o algoritmo usual (ou simplificado).

4 - OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS DO CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

Conforme Rosa Neto, Mendonça e Smith (1990, p. 68), “[...] uma relação f é uma operação num conjunto A , se f for uma função de $A \times A$ em A ”. Ou seja, uma operação é uma função que permite associar dois elementos de um conjunto a um terceiro elemento pertencente ao mesmo conjunto.

São definidas duas operações no Conjunto dos Números Naturais $\mathbb{N}$: a adição e a multiplicação. Considere-se $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, em que $s(n)$ é o sucessor de n . Segundo Lima (2017, p. 2), essas operações são caracterizadas pelas seguintes igualdades:

- i. $a + 1 = s(a)$;
- ii. $a + s(b) = s(a + b)$, isto é, $a + (b + 1) = (a + b) + 1$;
- iii. $a \cdot 1 = a$;
- iv. $a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a$.

Na sequência, definiremos a operação Adição com base nas igualdades (i) e (ii), e a Multiplicação com base nas igualdades (iii) e (iv).

4.1 - Adição

Dados dois números naturais a e b em $\mathbb{N}$, a adição é a operação em $\mathbb{N}$ que faz corresponder o par (a, b) à soma (ou total) $a + b$, que sempre pertencerá a $\mathbb{N}$. Ou seja, é a operação

$$\begin{aligned} +: \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ (a, b) &\rightarrow a + b \end{aligned}$$

Assim, dizemos que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é fechado em relação à adição. (Um conjunto é fechado em relação a uma dada operação, quando o resultado dessa operação, é ainda um elemento desse conjunto).

Os números a e b são chamados de *parcelas* e $a + b$ é chamado de *soma* ou *total*.

4.1.1 - Propriedades da Adição

Associativa (ou associatividade): dados os números naturais a , b e c em $\mathbb{N}$,

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Demonstração:

Vamos provar a propriedade pelo Princípio da Indução Finita sobre c .

Consideremos $a, b \in \mathbb{N}$ fixos e $c \in \mathbb{N}$.

Para $c = 1$, a igualdade $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ é verdadeira pela igualdade em (ii) na página 28.

Suponhamos a propriedade válida para $c = n$. Então, $(a + b) + n = a + (b + n)$, será a hipótese de indução.

Provaremos que a propriedade é verdadeira para $c = n + 1$, ou seja,

$$(a + b) + (n + 1) = a + [b + (n + 1)].$$

Temos:

$$\begin{aligned} (a + b) + (n + 1) &\stackrel{(1)}{=} [(a + b) + n] + 1 \stackrel{(2)}{=} [a + (b + n)] + 1 \stackrel{(3)}{=} a + [(b + n) + 1] = \\ &\stackrel{(4)}{=} a + [b + (n + 1)], \end{aligned}$$

em que as igualdades (1), (3) e (4) decorrem da igualdade (ii) (p. 28) e a igualdade (2) corresponde à hipótese de indução.

Assim,

$$(a + b) + (n + 1) = a + [b + (n + 1)].$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, a propriedade é válida para quaisquer números naturais a, b e c em $\mathbb{N}$.

Exemplo: dados os números naturais 3, 4 e 5 em $\mathbb{N}$, temos:

$$(3 + 4) + 5 = 3 + (4 + 5).$$

O *Lema 1*, a seguir, é um importante resultado que será usado na demonstração da propriedade comutativa.

Lema 1: dado o número natural m , $m \in \mathbb{N}$, $m + 1 = 1 + m$.

Demonstração:

Vamos provar a igualdade pelo Princípio da Indução Finita sobre m .

Para $m = 1$, a propriedade é verdadeira pela igualdade (i) (p. 28).

Suponhamos a propriedade válida para $m = t$, ou seja, $t + 1 = 1 + t$.

Provaremos que a propriedade é verdadeira para $m = t + 1$, ou seja,

$$(t + 1) + 1 = 1 + (t + 1).$$

Temos,

$$(t + 1) + 1 \stackrel{(1)}{=} (1 + t) + 1 \stackrel{(2)}{=} 1 + (t + 1),$$

em que a igualdade (1) deve-se à hipótese de indução e a igualdade (2) à propriedade associativa da adição.

Logo, pelo Princípio da Indução Finita, $m + 1 = 1 + m$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

De modo análogo, temos $1 + m = m + 1$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Comutativa (ou comutatividade): dados os números naturais a, b em $\mathbb{N}$, temos:

$$a + b = b + a.$$

Demonstração:

Vamos provar a propriedade pelo Princípio da Indução Finita sobre b .

Consideremos $a \in \mathbb{N}$ fixo.

Para $b = 1$, $a + 1 = 1 + a$, pelo *Lema 1*.

Suponhamos que $a + b = b + a$, para algum $b = n$, ou seja, $a + n = n + a$, que será a hipótese de indução.

Provaremos que a propriedade é verdadeira para $b = n + 1$, ou seja,

$$a + (n + 1) = (n + 1) + a.$$

Temos,

$$a + (n + 1) \stackrel{(1)}{=} (a + n) + 1 \stackrel{(2)}{=} (n + a) + 1 \stackrel{(3)}{=} 1 + (n + a) \stackrel{(4)}{=} (1 + n) + a \stackrel{(5)}{=} (n + 1) + a,$$

em que a igualdade (1) é justificada pela igualdade (ii) na página 28; a igualdade (2) deve-se à hipótese de indução; as igualdades (3) e (5) referem-se ao *Lema 1* e a igualdade (4) ocorre devido a propriedade associativa da adição.

Assim,

$$a + (n + 1) = (n + 1) + a.$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, a propriedade $a + b = b + a$ é válida para quaisquer números naturais a e b em $\mathbb{N}$.

Exemplo: dados os números naturais 4 e 5 em $\mathbb{N}$, temos:

$$4 + 5 = 5 + 4.$$

4.1.2 - Algoritmos

Os algoritmos das operações básicas são esquemas que facilitam a obtenção do resultado dessas operações.

4.1.3 - Algoritmo da Adição

No início do aprendizado da Adição de Números Naturais, são apresentadas estratégias para que o aluno possa compreender e realizar os cálculos. Aqui vamos apresentar dois algoritmos da adição: o usual, aquele que usamos frequentemente sem fazer a decomposição dos números, explicitamente, e o da decomposição.

O *algoritmo da decomposição* é aquele em que decompomos cada número nas suas respectivas ordens. Embora seja proposto o desenvolvimento desse algoritmo até o 5º ano, muitas vezes não é sistematizado a contento, e isso pode influenciar nos cálculos a partir do 6º ano. O método usual passa a ser utilizado já a partir do 6º ano.

No Quadro 2, mostraremos a aplicação do algoritmo da decomposição para resolver a situação-problema: numa escola há 389 meninos e 595 meninas. Qual é o total de alunos dessa escola?

Quadro 2 - Algoritmo da Decomposição - Adição.

C			D		U		
595	→	500	+	90	+	5	(1)
+ 389	→	+ 300	+	80	+	9	(2)
		800	+	170	+	14	(3)
		800	+	170	+	(10 + 4)	(4)
		800	+	(170+10)	+	4	(5)
		800	+	180	+	4	(6)
		800	+	(100+80)	+	4	(7)
		(800+100)	+	80	+	4	(8)
		900	+	80	+	4	(9)
				984			(10)

Fonte: Elaborado pela autora.

Observe no Quadro 2 em (1) e (2) que decompomos, primeiramente, cada número na sua respectiva ordem. Em seguida, efetuamos a soma, por ordem, sem nos preocuparmos com os excessos, obtendo como resultado o que é apresentado em (3). Verificamos que tanto o 14 quanto 170 excederam as suas ordens e, em (4), decompomos o 14 como 10 (1 dezena) mais 4 (unidades). Em (5), aplicamos a propriedade associativa da adição agrupando 170 com 10 (1 dezena excedida da ordem das unidades), totalizando 180, ou seja, 100 (1 centena) mais 80 (8 dezenas), o que pode ser verificado em (7). Em (8), aplicamos a associatividade e agrupamos 800 com 100 (1 centena excedida da ordem das dezenas). Finalizamos em (10), com a soma (ou total) de 984 alunos.

O *algoritmo usual (ou simplificado) para adição* é aquele em que somamos as unidades de mesma ordem, sem escrever explicitamente a decomposição dos números, tornando o processo mais curto que no algoritmo da decomposição.

O Quadro 3 apresenta um exemplo de aplicação desse algoritmo.

Quadro 3 - Algoritmo Usual
(ou Simplificado) - Adição.

C	D	U	
¹ 5	¹ 9	5	(11)
+ 3	8	9	
9	8	4	(12)

Fonte: Elaborado pela autora.

Observa-se que em (11) o número 1 na dezena corresponde à dezena excedida na ordem das unidades, ou seja, 14 unidades = 1 dezena + 4 unidades, e o número 1, na centena, corresponde à centena excedida na ordem das dezenas, ou seja, 18 dezenas = 1 centena + 8 dezenas. Em (12), finalizamos somando os algarismos correspondentes às ordens num total de 984 alunos.

O material dourado será utilizado como uma ferramenta para melhor compreensão desses algoritmos, como apresentaremos no Capítulo 5.

Com esses dois algoritmos e também com o material dourado a disposição, os alunos terão ferramentas para conseguir compreender e realizar os cálculos com as operações básicas, como apresentaremos no Capítulo 5.

4.2 - Subtração

A princípio, a subtração não é operação em $\mathbb{N}$, pois dados, por exemplo, dois números naturais 10 e 16 em $\mathbb{N}$, $10 - 16 = -6$, e o -6 não pertence ao conjunto dos números naturais. Mas Pires (2013, p. 55) enfatiza que “[...], resolve situações-problemas particulares com números naturais [...], em que é preciso e possível determinar o resto, o excesso ou a diferença entre eles”.

Dizemos que o Conjunto dos Números Naturais $\mathbb{N}$ não é fechado em relação à subtração.

Desta forma, definimos a operação subtração em $\mathbb{N}$ do seguinte modo: dados dois números naturais, a e b , em $\mathbb{N}$, a operação subtração em $\mathbb{N}$ faz corresponder ao par (a, b) , à diferença $a - b$ com $a \geq b$, que sempre pertencerá a $\mathbb{N}$. Ou seja,

$$\begin{aligned} - : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ (a, b) &\rightarrow a - b \end{aligned}$$

Em $a - b$, o número a é chamado de *minuendo*, o número b é chamado de *subtraendo* e $a - b$ é chamado à diferença entre a e b .

4.2.1 - Algoritmo da Subtração

Como na adição, apresentamos o algoritmo usual e o algoritmo da decomposição realizando, em ambos, a diferença das unidades do minuendo de mesma ordem com as unidades do subtraendo de mesma ordem. Analisemos que, quando necessário, devemos decompor as unidades de ordem superior para podermos determinar a diferença.

O *algoritmo da decomposição* é utilizado do mesmo modo que na operação adição, decompondo cada número nas suas respectivas ordens, para fazer as diferenças.

No Quadro 4, mostramos um exemplo de aplicação do algoritmo da decomposição, evidenciando as trocas necessárias para a finalização do cálculo.

Pierre tem R\$ 253,00 e vai comprar uma camisa que custa R\$ 98,00. Com quantos reais ele ainda vai ficar?

Para saber com quantos reais Pierre vai ficar, ele precisa tirar 98 de 253, ou seja, deve efetuar a diferença $253 - 98$.

Quadro 4 - Aplicação do Algoritmo da Decomposição - Subtração.

	CDU		C	D	U		C	D	U		
	253		200	+	50	+	(100 + 100)	+	(40 + 10)	+	3
	- 98	(1) →	-		90	+	-		90	+	8
	C		D		U		C		D		U
	(100 + 100)	+	40	+	(10 + 3)		100	+	(100 + 40)	+	(10 + 3)
(3) →	-		90	+	8	(4) →	-		90	+	8
			C		D		U				
			100	+	140	+	13				
(5) →			-		90	+	8				
			100	+	50	+	5				
			155								

Fonte: Elaborado pela autora.

Observando o Quadro 4, da esquerda para a direita em (1), decompomos cada número na sua respectiva ordem. Em seguida, verificamos que não é possível, a princípio, efetuarmos a subtração, pois, na ordem das unidades, o número 3 é menor que o número 8, e também, na ordem das dezenas, o número 50 é menor do que o número 90.

Para resolver essa situação, em (2), decomparamos o número 200 como $100 + 100$ e o número 50 como $40 + 10$. Utilizando a propriedade associativa da adição, trocamos uma dezena na ordem das unidades em (3) e também uma centena na ordem das dezenas em (4), e em (5) obtemos $100 + 140 + 13$. Efetuamos a subtração seguindo as ordens da direita para esquerda, e obtemos $13 - 8 = 5$ e $140 - 90 = 50$. Finalizamos com a adição $100 + 50 + 5$, resultando na soma 155.

Com o auxílio do material dourado, os alunos poderão esclarecer, ainda mais, as dúvidas com relação às trocas, como exemplificadas nos Quadros 4, como será apresentado no Capítulo 5.

Durante a exposição dos cálculos relacionados com a subtração, devemos evitar “o pede emprestado” e ter o hábito em falar de trocas para que o aluno possa compreender os procedimentos da resolução. Lorenzato (2010, p. 48) enfatiza que “[...] a linguagem matemática [...] pode tornar-se um forte complicador para a aprendizagem da matemática e, por isso, demanda especial atenção do professor”.

No *algoritmo usual (ou simplificado)* para subtração são realizadas as diferenças das unidades de mesma ordem, sem decompor explicitamente os números, tornando o processo curto. Um exemplo é apresentado no Quadro 5.

Quadro 5 - Algoritmo Usual
(ou Simplificado) - Subtração.

C	D	U	
¹ 2	¹⁴ 5	¹ 3	(6)
-	9	8	
1	5	5	(7)

Fonte: Elaborado pela autora.

No Quadro 5, observe que o número 1, na unidade, corresponde a uma dezena que trocamos, na ordem das dezenas, para que fosse transformada em unidades, totalizando 13 unidades, e fosse possível realizar a diferença, isto é, $13 - 8 = 5$ unidades. Observemos que agora restam 4 dezenas, as quais são insuficientes para a realização do cálculo. Trocamos em (6) uma centena do número 2, na ordem das centenas, transformamos em dezenas, totalizando 14 dezenas, e assim temos $14 - 9 = 5$ dezenas. Finalizamos com uma centena restante, resultando em (7) à diferença 155.

Na Seção 5.2 esses dois algoritmos serão apresentados com o uso do material dourado, com o objetivo de auxiliar na compreensão dos cálculos matemáticos.

4.3 - Multiplicação

Dados dois números naturais a e b em $\mathbb{N}$, a Multiplicação em $\mathbb{N}$ é a operação que faz corresponder o par ordenado (a, b) ao produto $a \cdot b$, que sempre pertencerá a $\mathbb{N}$. Ou seja,

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ (a, b) &\rightarrow a \cdot b \end{aligned}$$

Dizemos que o Conjunto dos Números Naturais $\mathbb{N}$ é fechado em relação à Multiplicação.

Os números a e b são chamados de *fatores*, ou a (1º número) é chamado de *multiplicador* e b (2º número) é chamado de *multiplicando*.

Podemos relacionar o produto $a \cdot b$ em $\mathbb{N}$ como uma soma de a parcelas iguais a b , ou seja,

$$a \cdot b = \underbrace{b + b + \dots + b}_{a \text{ parcelas}}$$

4.3.1 - Propriedades da Multiplicação

Distributiva (ou distributividade): dados os números a , b e c em $\mathbb{N}$, temos:

1) Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ ou } (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a.$$

2) Propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c, \quad b > c.$$

Aqui, faremos a demonstração da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição em $\mathbb{N}$. Para a demonstração da propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração, o leitor poderá consultar Domingues (1991, p. 91) ou Guidorizzi (2000, p. 2).

Demonstração 1) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Vamos provar a propriedade pelo Princípio da Indução Finita sobre c , $c \in \mathbb{N}$.

Fixamos $a, b \in \mathbb{N}$.

Para $c = 1$, temos $a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a$ pela igualdade em (iv) na página 28.

Suponha a propriedade válida para $c = n$, ou seja, $a \cdot (b + n) = a \cdot b + a \cdot n$, que será a hipótese de indução.

Provaremos que a propriedade é verdadeira para $c = n + 1$, ou seja,

$$a \cdot [b + (n + 1)] = a \cdot b + a \cdot (n + 1)$$

Temos,

$$a \cdot [b + (n + 1)] \stackrel{(1)}{=} a \cdot [(b + n) + 1] \stackrel{(2)}{=} a \cdot (b + n) + a \stackrel{(3)}{=} (a \cdot b + a \cdot n) + a =$$

$$\stackrel{(4)}{=} a \cdot b + (a \cdot n + a) \stackrel{(5)}{=} a \cdot b + a \cdot (n + 1),$$

em que a igualdade (1) é válida por (ii) (p. 28); as igualdades (2) e (5) são válidas pela igualdade (iv) (p. 28); a igualdade (3) deve-se à hipótese de indução e a igualdade (4) refere-se à propriedade associativa da adição.

Assim,

$$a \cdot [b + (n + 1)] = a \cdot b + a \cdot (n + 1).$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, com a, b e c em $\mathbb{N}$.

Agora vejamos que é verdadeira a igualdade $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$, $\forall a, b$ e $c \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

Vamos provar a propriedade pelo Princípio da Indução Finita sobre a , $a \in \mathbb{N}$.

Fixamos $b, c \in \mathbb{N}$.

Para $a = 1$, $(b + c) \cdot 1 = b + c$ e $b \cdot 1 + c \cdot 1 = b + c$ pela igualdade em (iii) na página 28.

Suponha a propriedade válida para $a = n$, ou seja, $(b + c) \cdot n = b \cdot n + c \cdot n$, que será a hipótese de indução.

Provaremos que a propriedade é verdadeira para $a = n + 1$, ou seja,

$$(b + c) \cdot (n + 1) = b \cdot (n + 1) + c \cdot (n + 1).$$

Temos,

$$\begin{aligned} (b + c) \cdot (n + 1) &\stackrel{(1)}{=} (b + c) \cdot n + (b + c) \stackrel{(2)}{=} b \cdot n + c \cdot n + (b + c) = \\ &\stackrel{(3)}{=} b \cdot n + (c \cdot n + b) + c \stackrel{(4)}{=} b \cdot n + (b + c \cdot n) + c = \\ &\stackrel{(5)}{=} (b \cdot n + b) + c \cdot n + c \stackrel{(6)}{=} b \cdot (n + 1) + c \cdot (n + 1). \end{aligned}$$

em que a igualdade (1) é válida por (iv) (p. 28); a igualdade (2) deve-se à hipótese de indução; as igualdades (3) e (5) referem-se à propriedade associativa da adição; a igualdade (4) se dá pela propriedade comutativa da adição e a igualdade (6) é válida por (iv) (p. 28).

Assim,

$$(b + c) \cdot (n + 1) = b \cdot (n + 1) + c \cdot (n + 1).$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$, $\forall a, b, c$ em $\mathbb{N}$.

Exemplo: dados os números naturais 2, 4 e 6 em $\mathbb{N}$, temos:

$$2 \cdot (4 + 6) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 \text{ ou } (4 + 6) \cdot 2 = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 2.$$

Associativa (ou associatividade): dados os números naturais a, b e c em $\mathbb{N}$, temos:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Demonstração:

Vamos provar a propriedade pelo Princípio da Indução Finita sobre c .

Consideremos $a, b \in \mathbb{N}$ fixos e $c \in \mathbb{N}$.

Para $c = 1$, temos $(a \cdot b) \cdot 1 = a \cdot b$ e $a \cdot (b \cdot 1) = a \cdot b$. Ambas as igualdades são verdadeiras pela igualdade (iii) (p. 28).

Suponha a propriedade válida para $c = n$, ou seja, $(a \cdot b) \cdot n = a \cdot (b \cdot n)$ que será a hipótese de indução.

Provaremos que a propriedade é verdadeira para $c = n + 1$, ou seja,

$$(a \cdot b) \cdot (n + 1) = a \cdot [b \cdot (n + 1)].$$

Temos,

$$\begin{aligned} (a \cdot b) \cdot (n + 1) &\stackrel{(1)}{=} (a \cdot b) \cdot n + a \cdot b \stackrel{(2)}{=} a \cdot (b \cdot n) + a \cdot b \stackrel{(3)}{=} a \cdot (b \cdot n + b) = \\ &\stackrel{(4)}{=} a \cdot [b \cdot (n + 1)], \end{aligned}$$

em que as igualdades (1) e (4) são válidas por (iv) (p. 28); a igualdade (2) deve-se à hipótese de indução e a igualdade (3) pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Assim,

$$(a \cdot b) \cdot (n + 1) = a \cdot [b \cdot (n + 1)].$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $\forall a, b$ e c em $\mathbb{N}$.

Exemplo: dados os números naturais 5, 6 e 7 em $\mathbb{N}$, temos:

$$(5 \cdot 6) \cdot 7 = 5 \cdot (6 \cdot 7).$$

O *Lema 2*, a seguir, é um importante resultado para a demonstração da propriedade comutativa.

Lema 2: dado o número natural m , $m \in \mathbb{N}$, $1 \cdot m = m$.

Demonstração:

Vamos provar a igualdade pelo Princípio da Indução Finita sobre m .

Para $m = 1$, a igualdade é verdadeira, pois $1 \cdot 1 = 1$, por (iii) (p. 28).

Suponhamos a propriedade válida para $m = t$. Daí, $1 \cdot t = t$, que será a hipótese de indução.

Provaremos que a propriedade é verdadeira para $m = t + 1$, ou seja,

$$1 \cdot (t + 1) = t + 1.$$

Temos,

$$1 \cdot (t + 1) \stackrel{(1)}{=} 1 \cdot t + 1 \stackrel{(2)}{=} t + 1,$$

em que a igualdade (1) é válida por (iv) (p.28) e a igualdade (2) deve-se à hipótese de indução.

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, $1 \cdot m = m$, com $m \in \mathbb{N}$.

Comutativa (ou comutatividade): dados os números naturais a e b em $\mathbb{N}$, temos:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Demonstração:

Vamos provar a propriedade pelo Princípio da Indução Finita sobre b .

Considere $a \in \mathbb{N}$, com a fixo.

Para $b = 1$, temos $a \cdot 1 = a$ pela igualdade (iii) (p. 28), e a igualdade $1 \cdot a = a$ pelo *Lema 2*.

Suponhamos que a propriedade é verdadeira para $b = n$, isto é, $a \cdot n = n \cdot a$, que será a hipótese de indução.

Provaremos que a propriedade é válida para $b = n + 1$, ou seja,

$$a \cdot (n + 1) = (n + 1) \cdot a.$$

Temos,

$$a \cdot (n + 1) \stackrel{(1)}{=} a \cdot n + a \stackrel{(2)}{=} n \cdot a + a \stackrel{(3)}{=} (n + 1) \cdot a,$$

em que a igualdade (1) é válida pela por (iv) (p. 28); a igualdade (2) deve-se à hipótese de indução e a igualdade (3) se dá pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Assim,

$$a \cdot (n + 1) = (n + 1) \cdot a.$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall a, b$ em $\mathbb{N}$.

Exemplo: dados os números naturais 3 e 8 em $\mathbb{N}$,

$$3 \cdot 8 = 8 \cdot 3.$$

4.3.2 - Algoritmo da Multiplicação

Apresentaremos o algoritmo da decomposição e o algoritmo usual da multiplicação realizando, em ambos, o que Rosa Neto, Mendonça e Smith (1990, p. 85) sugerem: “Para multiplicar um número a por um número b , multiplicamos as unidades de cada ordem do multiplicador pelas unidades de cada ordem do multiplicando e, em seguida, adicionamos os produtos encontrados”.

Os Quadros 6 e 7 apresentam, por exemplo, a multiplicação de 26 por 3, quando o multiplicador tem dois algarismos e o multiplicando um algarismo, por meio dos algoritmos da decomposição e usual (ou simplificado).

Quadro 6 - Algoritmo da
Decomposição - Multiplicação.

D	U	
20	+ 6	(1)
x	3	
60	+ 18	(2)
60	+ (10 + 8)	(3)
(60 + 10)	+ 8	(4)
70	+ 8	(5)
78		(6)

Fonte: Elaborado pela autora.

Quadro 7 - Algoritmo Usual
- Multiplicação.

D	U	
12	6	(7)
x	3	
78		(8)

Fonte: Elaborado pela autora.

No Quadro 6, em (1), decompomos o número 26 nas suas respectivas ordens. Na sequência, aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, obtendo os resultados em (2). Porém, observa-se ainda que em (2) a ordem das unidades excede as 9 unidades. Assim, decompomos o número 18 como apresentado em (3). Utilizando a propriedade associativa da adição em (4), agrupamos as dezenas e as unidades e, em (5), colocamos a soma das dezenas, obtendo o total em (6).

Já no Quadro 7, realizamos a mesma multiplicação, utilizando o algoritmo usual ou o simplificado. Repare que nesse cálculo aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação

em relação à adição, fazendo $6 \times 3 = 18$ unidades e $3 \times 2 = 6$ dezenas. Em (7), observe que o algarismo 1, na dezena acima do 2, corresponde à dezena excedida na ordem das unidades e, por isso, trocamos 10 unidades por uma dezena, como pode ser esclarecido em (3) e (4) no Quadro 6. Finalizamos a multiplicação em (8) fazendo $3 \times 2 = 6$ mais uma dezena, o que corresponde em (4) e (5) no Quadro 6, obtendo como resultado o produto 78, obtido pela multiplicação entre os fatores 26 e 3.

Com a apresentação desses dois modelos de algoritmos para a multiplicação, podemos mostrar aos alunos as propriedades existentes entre as operações adição e multiplicação e, através dos exercícios, esperar que eles possam compreendê-las e estender o raciocínio para multiplicações mais elaboradas, como aquelas em que os dois fatores aparecem com dois algarismos e que trabalharemos a seguir.

Nos Quadros 8 e 9, mostramos pelos algoritmos da decomposição e usual (ou simplificado) a multiplicação quando os dois fatores são compostos por dois algarismos. Por exemplo, quando efetuamos a multiplicação de 23 por 25.

Quadro 8 - Algoritmo da Decomposição - Multiplicação.

C		D		U	
		20	+	5	
x		20	+	3	
		60	+	15	(1)
400	+	100			(2)
400	+	160	+	15	(3)
400	+	(100+60)	+	(10+5)	(4)
(400+100)	+	60	+	(10+5)	(5)
(400+100)	+	(60+10)	+	5	(6)
500	+	70	+	5	(7)
575					(8)

Fonte: Elaborado pela autora.

Quadro 9 - Algoritmo Usual - Multiplicação.

C	D	U	
¹ 12	5		(9)
x	2	3	(10)
	7	5	(11)
5	0	0	(12)
5	7	5	(13)

Fonte: Elaborado pela autora.

De modo análogo, os Quadros 8 e 9 apresentam o mesmo método que mostramos nos Quadros 6 e 7. Veja no Quadro 8 que a propriedade associativa da adição aparece nos cálculos em (4) e (5) e também em (5) e (6), e a distributiva da multiplicação em relação à adição em

(1) e (2), evidenciando a importância desses conceitos no início da aprendizagem das operações básicas.

Observe no Quadro 8, em (1), que aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição começando com o algarismo 3 representado na ordem das unidades, obtendo os valores $3 \times 5 = 15$, e depois $3 \times 20 = 60$. Em seguida, efetuamos a distributividade pela ordem das dezenas, resultando em $20 \times 5 = 100$ e $20 \times 20 = 400$. Logo, em (3), somamos os resultados obtidos em (1) e (2). Como houve excessos, tanto na ordem das dezenas quanto na ordem das unidades, decomparamos os números 15 e 160, como apresentado em (4). Utilizando a propriedade associativa da adição em (5) e (6), agrupamos as centenas e as dezenas e, em (7), colocamos a soma das dezenas e das centenas, obtendo como resultado final a soma 575, mostrada em (8).

No Quadro 9 realizamos a mesma multiplicação, mas pelo algoritmo usual. Porém, o aluno precisa ter compreendido todo o processo relacionado ao algoritmo da decomposição para compreendê-lo.

Observe que em (10) aplicamos a distributividade, fazendo $3 \times 5 = 15$ unidades e $3 \times 2 = 6$ dezenas. Em (11), temos o total 75, correspondendo a 7 dezenas (6 dezenas mais 1 dezena excedida da ordem das unidades) e 5 unidades, o que pode ser esclarecido em (5) e (6) no Quadro 8. Em (9), o algarismo 1, na dezena, acima do 2, corresponde à dezena excedida na ordem das unidades, na qual fizemos a troca de 10 unidades por 1 dezena.

Na sequência, em (12), temos 500, que é o resultado da aplicação da distributividade referente ao algarismo 2 da dezena, pois $2 \times 5 = 10$ dezenas (1 centena) e $2 \times 2 = 4$ centenas, totalizando 5 centenas (500 unidades). Veja que em (9) o algarismo 1 na ordem da centena corresponde à centena excedida na ordem das dezenas, o que pode ser esclarecido em (5) e (6) no Quadro 8. Em (13), finalizamos somando os resultados de (11) e (12), obtendo o produto 575.

4.4 - Divisão

A Divisão de Números Naturais em $\mathbb{N}$ não é formalmente considerada uma operação em $\mathbb{N}$ (embora denominada assim), pois nem sempre é possível encontrar um número natural que seja o quociente de outros dois números naturais. Ainda, as propriedades que destacamos para a Adição e a Multiplicação não são válidas para a divisão. Por exemplo, dados dois números naturais 8 e 4 em $\mathbb{N}$, $8 \div 4 = 2$ e $4 \div 8 = 0,5$, ou seja, a divisão não é comutativa.

Pires (2003, p. 58) afirma que “[...] a divisão não tem a propriedade do fechamento para o conjunto dos números naturais. Mas [...] resolve situações-problema particulares, que envolvem números naturais (denominados dividendo e divisor), em que é preciso e possível determinar o quociente e o resto”.

Domingues (1991) sintetiza a operação Divisão pelo *Teorema 1*.

Teorema 1: dados $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, existe um único par de números $q, r \in \mathbb{N}$ de maneira que $a = b \cdot q + r$ ($r < b$), onde q é o quociente e r é o resto da divisão de a por b .

Simbolicamente,

$$\begin{aligned} \div: \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ (a, b) &\rightarrow (q, r) \end{aligned}$$

Demonstração:

Seja $b \in \mathbb{N}$ e $b \neq 0$.

Considere subconjuntos do conjunto dos números naturais, tais que,

$$\begin{aligned} \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, b-1\} \cup \{b, b+1, b+2, \dots, 2b-1\} \cup \{2b, 2b+1, 2b+2, \dots, 3b-1\} \cup \\ \dots \cup \{qb, qb+1, qb+2, \dots, (q+1)b-1\} \cup \dots \end{aligned}$$

Todos os subconjuntos são disjuntos, isto é, se considerarmos dois subconjuntos quaisquer, a intersecção entre eles é vazia.

Tomemos a pertencente ao subconjunto S de $\mathbb{N}$,

$$S = \{qb, qb+1, qb+2, \dots, (q+1)b-1\}.$$

Logo,

$$qb \leq a \leq (q+1)b-1.$$

Aplicando a propriedade distributiva, temos:

$$qb \leq a \leq qb + b - 1.$$

Como $a \in S$, $a = qb + r$. Em particular,

- se $a = qb$, então $r = 0$ e,
- se $a = qb + b - 1$, então $r = b - 1$.

Daí, $qb \leq qb + r \leq qb + b - 1$. Subtraindo qb de todos os termos, temos $0 \leq r \leq b - 1 < b$.

Assim, provamos que dados $a, b \in \mathbb{N}$, existem $q, r \in \mathbb{N}$ de tal modo que podemos escrever:

$$a = bq + r, \text{ com } 0 \leq r < b.$$

Considere $a, b \in \mathbb{N}$, com $a = 18$ e $b = 5$. Podemos escrever $18 = 5 \cdot 3 + 3$, com $0 \leq 3 < 5$ satisfazendo a condição para r ; mas, também, podemos escrever $18 = 5 \cdot 2 + 8$,

levando-nos a acreditar que q e r não são únicos. Porém, veja que $18 = 5 \cdot 2 + 8$ não satisfaz a condição para r , o que nos indica que a unicidade do *Teorema 1* está relacionada ao intervalo de r .

Mostremos a unicidade de q e r .

Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, e suponha que existam $r, r_1 \in \mathbb{N}$, com $r \neq r_1$, tal que:

- $a = bq + r$, com $0 \leq r < b$. (1)

- $a = bq_1 + r_1$, com $0 \leq r_1 < b$. (2)

De $r < b$ e $r_1 < b$, $r - r_1 < b$, a diferença entre as igualdades em (1) e (2),

$$a - a = bq + r - (bq_1 + r_1) = bq + r - bq_1 - r_1.$$

Assim,

$$0 = bq - bq_1 + (r - r_1).$$

Logo, $b(q_1 - q) = r - r_1$, ou seja, $r - r_1$ é múltiplo de b , e $r - r_1 \geq b$, o que é absurdo.

Daí, $r = r_1$.

Consequentemente, $b(q_1 - q) = 0$, $b \neq 0$. Então, $q_1 = q$.

Portanto, dados $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, existe um único par de números $q, r \in \mathbb{N}$ tais que $a = b \cdot q + r$ ($r < b$).

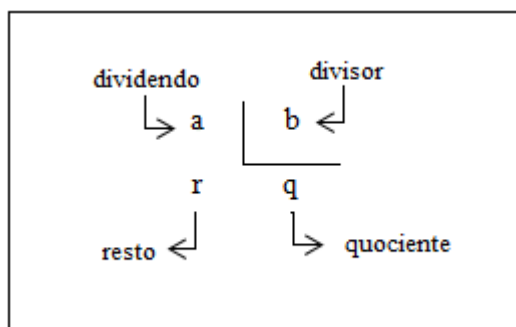
Esse *Teorema 1* é conhecido como *Algoritmo da Divisão ou Divisão Euclidiana*.

A partir dessas considerações, apresentaremos o algoritmo da divisão de modo a facilitar os cálculos que estejam associados às situações-problema que envolvam a operação divisão como, por exemplo, repartir igualmente, ou quantas vezes uma quantidade cabe dentro da outra.

4.4.1 - Algoritmo da Divisão

Apresentamos o esquema do algoritmo usual da divisão, como ilustrado na Figura 13, e consideramos o método longo, ou seja, aquele em que o processo realizado envolverá a operação subtração sucessivas vezes e o aluno precisará do auxílio da tabuada. Esse processo deve ser desenvolvido tanto para as divisões exatas quanto para as divisões não exatas.

Figura 13 - Esquema do Algoritmo da Divisão.



Fonte: Elaborada pela autora.

Um exemplo simples e importante para que haja a compreensão do algoritmo é quando, em uma situação-problema relacionada à divisão, o dividendo tem dois algarismos e o divisor um algarismo. Por exemplo: João tem 84 figurinhas e quer reparti-las igualmente entre 6 pessoas. Quantas figurinhas receberá cada pessoa? Para resolver o problema, basta efetuar a divisão 84 por 6.

Nos Quadros 10, 11 e 12, respectivamente, apresentamos cada etapa da divisão. Observe que na divisão apresentada no Quadro 10 restaram 2 dezenas que não podem ser divididas por 6.

Quadro 10 - Primeira Etapa da Divisão.

D	U		
8	4	6	
- 6		1	
2		D	U

Escrevemos o esquema conforme a Figura 13. Repartimos igualmente 8 dezenas entre as 6 pessoas, que dá 1 dezena para cada pessoa. Então, $1 \times 6 = 6$ dezenas e, fazendo a subtração, restam 2 dezenas.

Podemos escrever $8 = 6 \cdot 1 + 2$.

Fonte: Elaborado pela autora.

Nessa etapa, é importante que o aluno tenha familiaridade tanto com relação ao esquema da Figura 13 quanto ao sistema de numeração trabalhado na Seção 3.1 para amenizar possíveis dificuldades nas trocas necessárias na execução do algoritmo.

No Quadro 11 ilustramos que há a necessidade de fazer a troca, pois não podemos repartir igualmente 2 dezenas entre as 6 pessoas. Então, trocamos 2 dezenas por 20 unidades e, somando com as 4 unidades iniciais, passamos a ter 24 unidades.

Quadro 11 - Segunda Etapa da Divisão.

D	U		
8	4	6	
- 6		1	
24	D	U	

Duas dezenas não podem ser divididas por 6. Então, trocamos as duas dezenas por 20 unidades e, com as 4 unidades que tínhamos, passamos a ter 24 unidades.

Fonte: Elaborado pela autora.

Na ilustração do Quadro 12, temos 24 unidades que são divididas por 6 pessoas, dando 4 unidades para cada uma. Ressaltamos que o aluno não terá dificuldade em finalizar a divisão se todo o processo relacionado com as trocas tiver sido bem apresentado e compreendido por ele. Observe que o resto da divisão é zero e, então, essa divisão é exata.

Quadro 12 - Terceira Etapa da Divisão.

D	U		
8	4	6	
- 6		1	4
24	D	U	
- 24			
00			

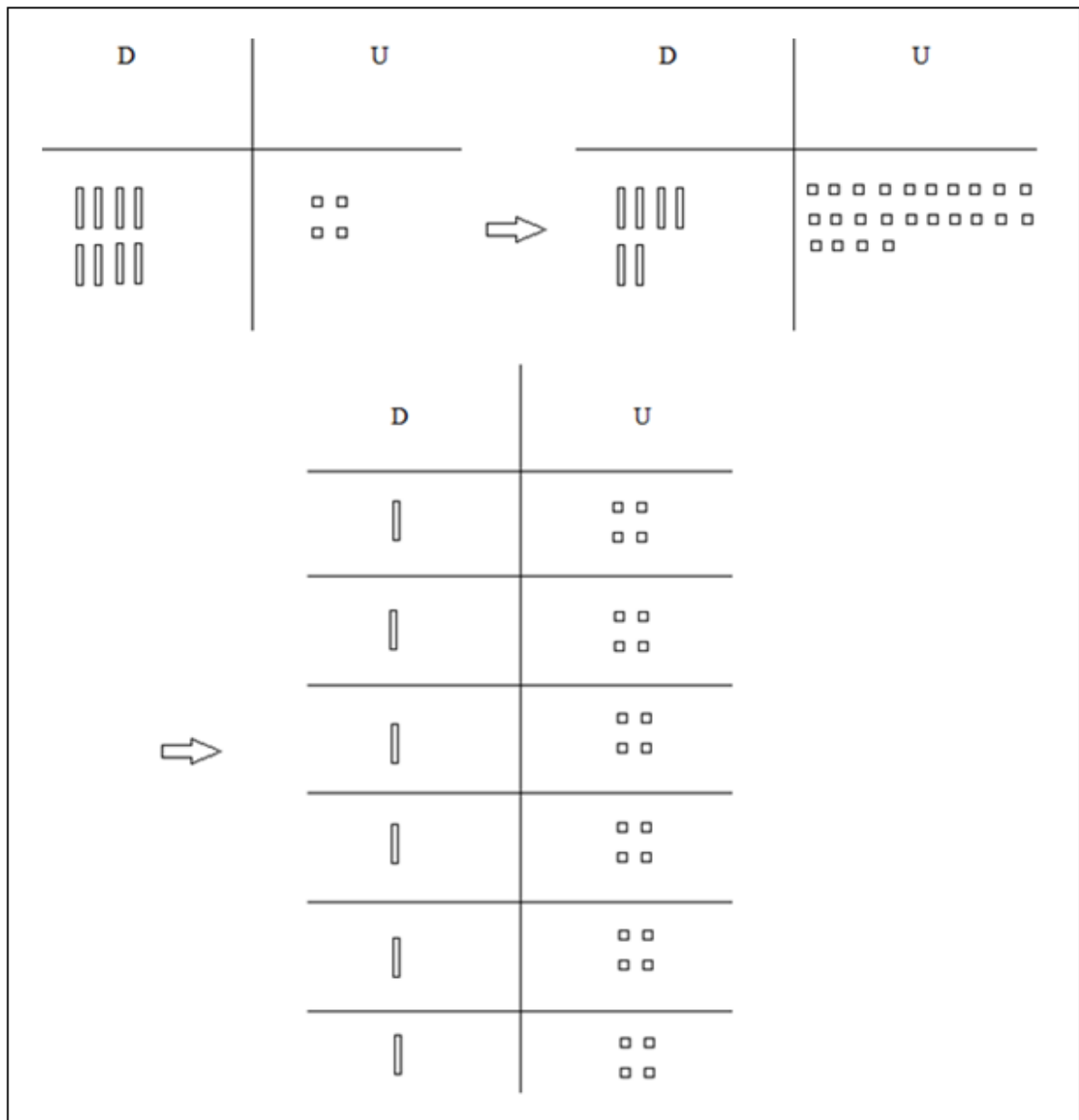
Repartimos igualmente as 24 unidades por 6, que dão 4 unidades. Então, $4 \cdot 6 = 24$ unidades e fazendo a subtração temos resto 0 (zero). Podemos escrever $24 = 4 \cdot 6 + 0$.

No total, cada pessoa terá 14 figurinhas (1 dezena + 4 unidades).

Fonte: Elaborado pela autora.

No Quadro 13 representamos através do material dourado e com o ábaco de papel a resolução do exercício anterior para reforçar e esclarecer alguma dúvida referente às trocas. Observa-se que não conseguimos distribuir, igualmente, a mesma quantidade de barras e de cubinhos para cada pessoa, indicando a necessidade das trocas das barras. Então, distribuímos uma barra para cada pessoa, restando duas barras a ser trocadas por 20 cubinhos, as quais, juntando com os 4 cubinhos que tínhamos, totalizaram 24 cubinhos. Em seguida, repartimos os 24 cubinhos entre as seis pessoas e, assim, cada pessoa terá uma barra (1 dezena) e 4 cubinhos (4 unidades). Portanto, cada pessoa terá 14 figurinhas.

Quadro 13 - Representação da Divisão usando o Ábaco de Papel com o Material Dourado.



Fonte: Elaborado pela autora.

No decorrer das várias atividades propostas pelo professor e considerando o nível de entendimento do algoritmo da divisão, o aluno não precisará escrever D U para evidenciar as ordens e poderá fazer as subtrações mentalmente, reescrevendo o algoritmo do método longo para o método curto (ou simplificado), como na Figura 14.

Figura 14 - Algoritmo da Divisão - Método Curto.

$$\begin{array}{r}
 \overline{)84} \\
 \underline{6} \\
 24 \\
 \underline{24} \\
 0
 \end{array}$$

Fonte: Elaborada pela autora.

No processo de divisão da Figura 14, a subtração não aparece explicitamente. O cálculo é feito mentalmente. Observe na segunda linha que o algarismo 2 (duas dezenas) é o resto da divisão de 8 por 6, que resultou em 1 dezena. Utilizamos $1 \cdot 6 = 6$ dezenas na repartição e, então, transformamos as 2 dezenas que sobraram em 20 unidades. “Descemos o 4” e temos 24 unidades. No entanto, quando nos referimos a “descemos o 4”, queremos destacar que somamos as 20 unidades com as 4 unidades iniciais. O algarismo 4 no quociente representa mais 4 unidades para cada pessoa. Na terceira linha, o algarismo zero (0) representa o resto da divisão de 24 por 6, pois $4 \cdot 6 = 24$ e $24 - 24 = 0$. Assim, temos o quociente 14 e o resto 0, o que também pode ser representado por $84 = 14 \cdot 6 + 0$.

Outro exemplo importante é a divisão cujo dividendo tem dois ou mais algarismos, o divisor tem dois algarismos e o resto é diferente de zero, como na situação-problema a seguir.

Um homem colheu 195 laranjas para vendê-las em uma feira. Ele quer distribuí-las em sacos de modo que cada saco contenha 12 laranjas. Quantos sacos são necessários para embalar as 195 laranjas?

Nessa situação-problema, queremos saber quantos grupos de 12 laranjas cabem em 195 laranjas, ou seja, faremos a divisão de 195 por 12 usando o algoritmo usual pelo método longo (Quadro 14).

Quadro 14 - Algoritmo da Divisão - Parte 1.

CDU 1 9 5 0 CDU → CDU 19 5 1 2 CDU	Uma centena não pode ser dividida por 12 de modo a obter centena. Por isso, que no quociente, na casa da centena, aparece o algarismo 0 (zero) indicando ausência da ordem das centenas. A partir dessa análise, sabemos que o quociente terá dois algarismos. Então, trocamos 1 centena por 10 dezenas e, com as 9 dezenas que tínhamos, passamos a ter 19 dezenas, como ilustrado no esquema acima à direita pelo arco.
---	--

Fonte: Elaborado pela autora.

Observa-se no Quadro 14 que o arco está empregado no raciocínio da troca, mas Cardoso (1998, p. 59) ressalta que “na verdade a importância do raciocínio não está na colocação do arco, mas na estimativa inicial de quais ordens aparecerão no resultado. A estimativa [...] deve ser feita no início, a partir da análise da quantidade a ser dividida pelo número de grupo proposto”. Então, a partir dessa etapa, dividimos as dezenas, como no Quadro 15.

Quadro 15 - Algoritmo da Divisão - Parte 2.

CDU 19 5 1 2 CDU - 0 7 1 2 CDU	Repartimos igualmente as 19 dezenas por 12, dando 1 dezena para cada saco e restando 7 dezenas a serem distribuídas igualmente.
--	--

Fonte: Elaborado pela autora.

Na divisão apresentada no Quadro 15 restaram 7 dezenas, que não podem ser divididas por 12. Então, como ilustrado no Quadro 16, transformamos as 7 dezenas em 70 unidades e, somando-as com as 5 unidades iniciais, obtemos 75 unidades (Quadro 16).

Quadro 16 - Algoritmo da Divisão - Parte 3.

<table> <tr> <td>C</td> <td>D</td> <td>U</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>19</td> <td>5</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>-</td> <td>12</td> <td></td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>75</td> <td></td> <td>C</td> <td>D</td> </tr> </table>	C	D	U				19	5	1	2	-	12		0	1		75		C	D	Como 7 unidades não podem ser repartidas igualmente por 12, trocamos as 7 dezenas por 70 unidades e, com as 5 que já tínhamos, passamos a ter 75 unidades.
C	D	U																			
	19	5	1	2																	
-	12		0	1																	
	75		C	D																	

Fonte:

Elaborado pela autora.

Na ilustração do Quadro 17, são 75 unidades que, divididas por 12, dão 6 unidades. Usamos, então, $6 \cdot 12 = 72$ unidades e $75 - 72 = 3$ unidades, o que também pode ser representado por $195 = 16 \cdot 12 + 3$. Essa divisão é classificada como não exata, pois o resto é diferente de zero.

Quadro 17 – Algoritmo da Divisão - Parte 4.

<table> <tr> <td>C</td> <td>D</td> <td>U</td> </tr> <tr> <td></td> <td>19</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>-</td> <td>12</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>75</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>- 72</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>03</td> <td></td> </tr> </table>	C	D	U		19	5	-	12			75			- 72			03		<table> <tr> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1 6</td> </tr> <tr> <td>C</td> <td>D U</td> </tr> </table>	1	2	0	1 6	C	D U
C	D	U																							
	19	5																							
-	12																								
	75																								
	- 72																								
	03																								
1	2																								
0	1 6																								
C	D U																								

Repartimos igualmente as 75 unidades por 12, que dá 6 unidades para cada saco e $6 \cdot 12 = 72$ unidades, restando 3 unidades. No total, cada saco terá uma dezena mais 6 unidades (16 laranjas), restando 3 unidades.

Fonte: Elaborado pela autora.

No Capítulo 5 a seguir serão apresentadas as análises com relação à prática do ensino das operações com o uso do Material Dourado relativas com os alunos A, B e C.

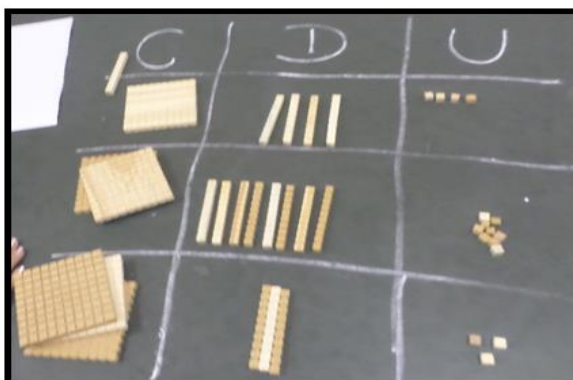
5 - O USO DO MATERIAL DOURADO PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DA ADIÇÃO E DA SUBTRAÇÃO

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos com a utilização do material dourado para que os alunos compreendessem as trocas necessárias das ordens para a realização da adição e subtração de Números Naturais. Muitos alunos fazem trocas automáticas, não sabem que quando utilizam a expressão “vai um” estão fazendo trocas de ordens. Pires (2013, p. 85) ressalta que “o problema na aprendizagem do sistema de numeração [...] está na relação do agrupamento com a escrita numérica. [...] as crianças não relacionam as unidades, as dezenas e as centenas com o “vai um” ou “pede emprestado””.

Inicialmente foi proposto para cada aluno A, B e C da pesquisa que usassem o material dourado para a realização de um cálculo direcionado (Apêndice B – Atividade 1). O objetivo era avaliar a familiaridade com esse recurso didático e, a partir daí, utilizá-lo para esclarecer sobre as trocas das ordens necessárias nos cálculos matemáticos.

O Aluno A errou a questão 1: Efetue $144 + 289$ (Apêndice B – Atividade 1), como pode ser observado na Figura 15. Nota-se que ele faz a representação dos números corretamente, respeitando a posição de cada um. Na ordem das unidades, fez a soma correta dos algarismos $4 + 9 = 13$. Também percebeu que era necessário fazer a troca dos 10 cubinhos (10 unidades) por uma barra da dezena, e esta foi colocada na quarta linha na coluna da dezena (Figura 15). Ao realizar a soma na ordem das dezenas $4 + 8 + 1 = 13$ (dezenas), ele trocou as 10 barras (10 dezenas) por uma barra (1 dezena) e a colocou na ordem das centenas, ao invés de tê-la trocado pela placa da centena. Assim, o aluno finalizou o cálculo obtendo como resultado da adição o número 333.

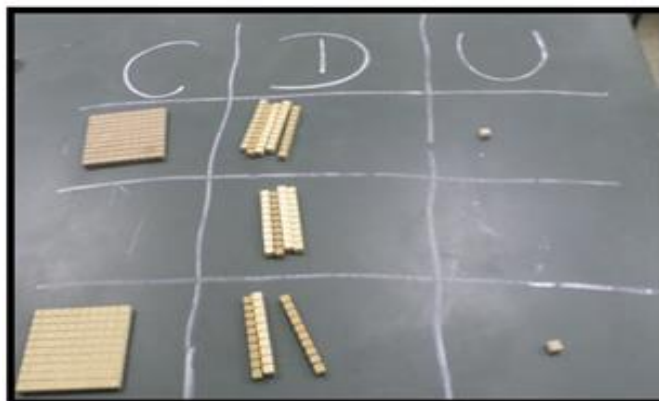
Figura 15 - Resposta do Aluno A.



Fonte: Arquivo da autora.

O Aluno B fez a representação de cada número corretamente (Figura 16) na questão 2: Efetue $151 + 40$ (Apêndice B – Atividade 1), porém não somou as barras das dezenas e, quando questionado sobre o que havia feito, disse que não prestou atenção no cálculo que tinha de realizar.

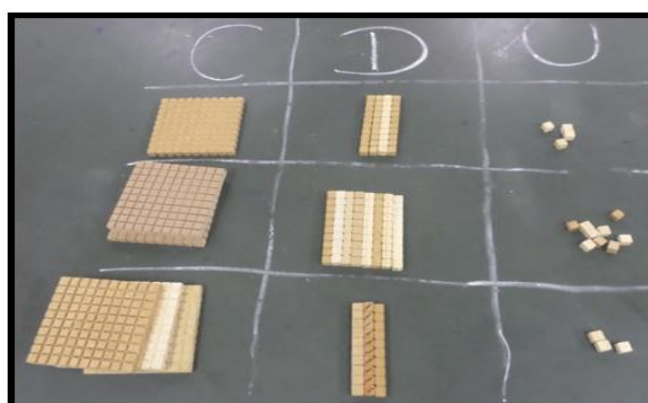
Figura 16 - Resposta do Aluno B.



Fonte: Arquivo da autora.

Na Figura 17, o Aluno C representou corretamente os números da questão 3 (Apêndice B - Atividade 1). Fez as trocas necessárias na ordem das unidades substituindo 10 cubinhos (10 unidades) por uma barra que foi colocada na quarta linha do ábaco de papel. Ele tirou as 10 barras da ordem das dezenas e não colocou a placa da centena, cometendo o erro no resultado final.

Figura 17 - Resposta do Aluno C.



Fonte: Arquivo da autora.

Já na Atividade 1 foi possível detectar que havia um déficit em relação as trocas das ordens.

A seguir são apresentadas as atividades trabalhadas pela pesquisadora, com o Material Dourado, com o intuito de melhorar a aprendizagem desses alunos com relação às operações

adição e subtração, visando esclarecer as dúvidas quando as trocas forem necessárias e reforçar o sistema de numeração decimal, baseado nas análises anteriores.

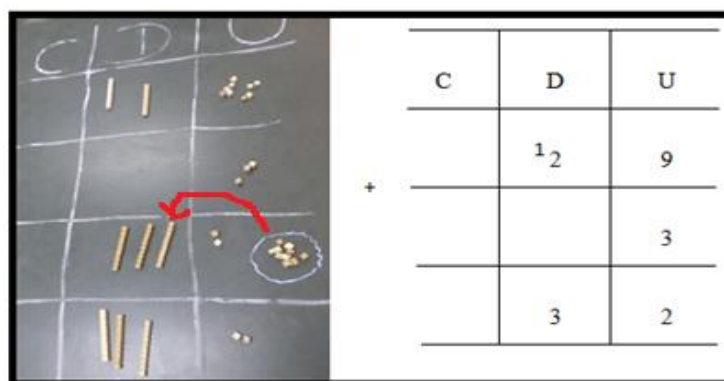
5.1 - O Algoritmo da Adição com o uso do Material Dourado

O principal objetivo dessa prática foi elaborar uma atividade para que os alunos pudessem perceber as relações entre as peças do material dourado e compreendessem as suas trocas no sistema de numeração decimal. A importância dessa compreensão nos fez explorar métodos que pudessem auxiliar nessa aprendizagem a fim de amenizar as dificuldades apresentadas nas resoluções como, por exemplo, nas atividades propostas no Apêndice A, e proporcionar segurança quando houver necessidade de realizarem, também, cálculos com números decimais.

Na Figura 18 foi apresentada a operação de adição quando o número da ordem das unidades é excedido. Utilizamos o ábaco de papel com o material dourado à esquerda, o algoritmo usual (ou prático) à direita e, no Quadro 18, o algoritmo da decomposição para ilustrarem a situação-problema:

Marcelo tem 29 figurinhas e ganhou de seu irmão mais 3. Quantas figurinhas ele tem no total? O problema pede para adicionarmos 29 com 3.

Figura 18 - Resolução da Situação-Problema.



Fonte: Arquivo da autora.

Observe à esquerda, na segunda linha, que distribuímos as duas barras (duas dezenas) e os nove cubinhos (nove unidades) como na decomposição em (1) no Quadro 18. Na quarta linha, à esquerda (Figura 18), adicionamos as quantidades de unidades de mesma ordem e temos duas barras e 12 cubinhos. Reagrupamos as ordens que atingiram uma dezena ou mais, como destacamos no Quadro 18. Em (3) e (4), aplicando a propriedade associativa da adição,

iniciamos a troca dos 10 cubinhos pela barra da dezena, a qual foi colocada na ordem das dezenas indicada pela seta na Figura 18. Com isso, foi possível a compreensão da troca na ordem das dezenas, como ilustrado na segunda linha à direita da Figura 18. Finalizamos, em ambas, a soma das quantidades referentes à mesma ordem, resultando em 32.

Quadro 18 - Aplicação do Algoritmo da Decomposição.

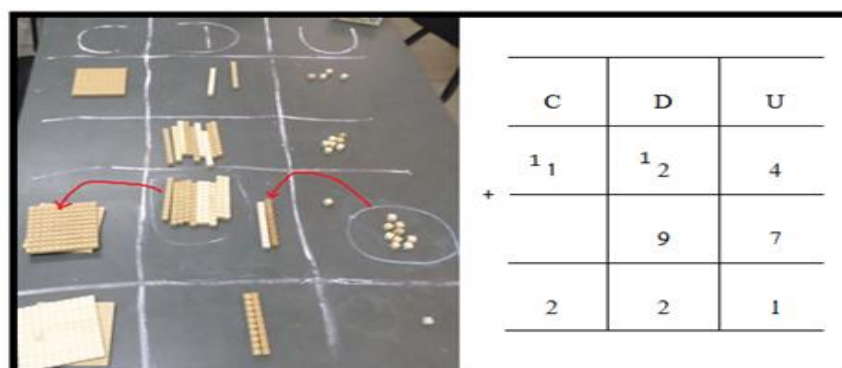
C	D	U	
	20	+ 9	(1)
		3	
	20	+ 12	(2)
	20	+ (10+2)	(3)
	(20+10)	+ 2	(4)
	30	+ 2	(5)
	32		(6)

Fonte: Elaborado pela autora.

Na Figura 19, trabalhamos a operação de adição envolvendo as trocas, tanto na ordem das unidades, quanto na ordem das dezenas para a situação-problema: Pierre fará uma viagem da cidade X para a cidade Z, passando pela cidade Y. Sairá da cidade X e percorrerá 124 km, chegando à cidade Y. Em seguida, percorrerá mais 97 km pela mesma rodovia, chegando ao destino na cidade Z. Quantos quilômetros foram percorridos?

Nesse exemplo, também ressaltamos a importância do aluno compreender o sistema de numeração decimal sugerido na Seção 3.1 e que, juntamente com o material dourado, ele possa compreender as trocas quando o número de cada ordem é excedido.

Figura 19 - Resolução da Situação-Problema.



Fonte: Arquivo da autora.

Observe no algoritmo usual (Figura 19) que a soma na ordem das unidades resultou em 11. Esse valor ultrapassou as 9 unidades em sua ordem e, por isso, o algarismo 1 que está um pouco acima do algarismo 2 na ordem das dezenas, na segunda linha, representa a troca de 10 unidades por uma dezena. Do mesmo modo, à esquerda (Figura 19), na quarta linha, mas com o material dourado, temos 11 cubinhos na ordem das unidades, na qual trocamos 10 cubinhos por uma barra indicada na ilustração.

Usando o mesmo raciocínio, observa-se na quarta linha (Figura 19), tanto na ilustração com o uso do material dourado, quanto com o uso do algoritmo usual, que a soma na ordem das dezenas resultou em 12 dezenas, valor que ultrapassou as 9 dezenas. Por isso, o algarismo 1 um pouco acima do número 1 na ordem das centenas, no algoritmo usual, também representa a troca das 10 dezenas por 1 centena, resultando em 221 km.

Desse modo, podemos comparar os métodos utilizados na Figura 19 com o Quadro 19. Observa-se que ele mostra todas as decomposições passo a passo, as trocas realizadas e ainda dá ênfase na propriedade associativa da adição em (4) e (5), proporcionando a comparação entre os métodos e ajudando o aluno na compreensão do cálculo. Em (6), agrupamos as dezenas e finalizamos em (7), totalizando 221.

Quadro 19 - Aplicação do Algoritmo da Decomposição.

C		D		U	
100	+	20	+	4	(1)
		90	+	7	
100	+	110	+	11	(2)
100	+	(100 + 10)	+	(10 + 1)	(3)
(100 + 100)	+	10	+	(10 + 1)	(4)
200	+	(10 + 10)	+	1	(5)
200	+	20	+	1	(6)
221					(7)

Fonte: Elaborado pela autora.

Os dois exemplos ilustrados pelas Figuras 18 e 19 e pelo Quadro 19 foram expostos aos alunos A, B e C, para as explicações e explorações de conceitos. Para cada exposição, foram destinadas seis semanas com uma aula de 70 minutos distribuídos entre explicações,

trocas de informações referentes aos questionamentos dos alunos participantes e resoluções de exercícios em conjunto e individual, para a compreensão da teoria com a prática.

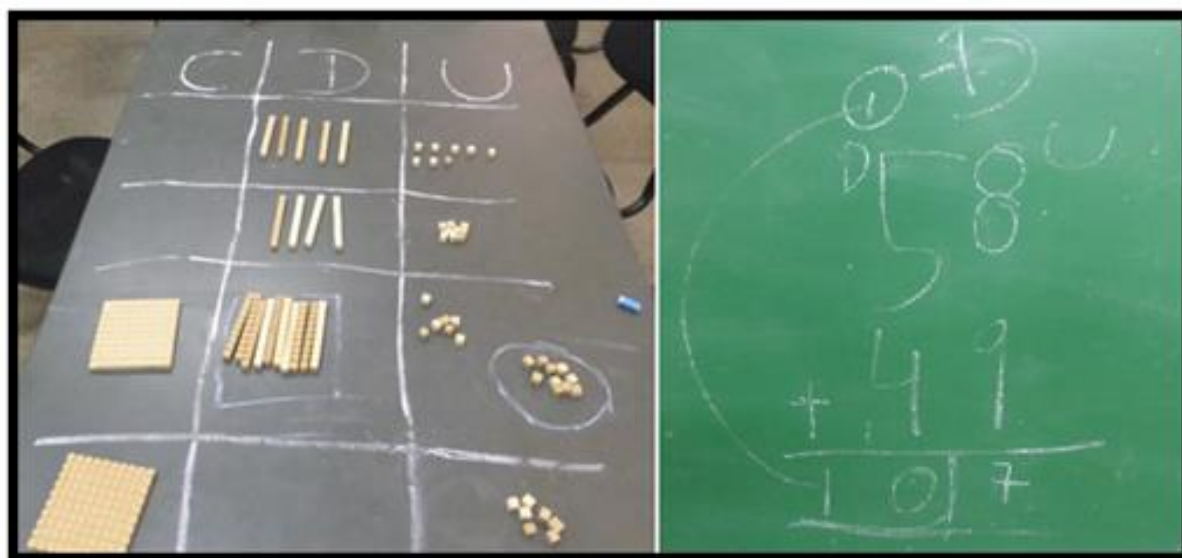
5.1.1 - Resultados dos Alunos para a Adição

Após o desenvolvimento do trabalho apresentado na Seção 5.1, outras atividades foram propostas aos alunos A, B e C e, os resultados são apresentados a seguir.

As Figuras 20, 21 e 22 mostram três cálculos realizados pelos alunos A, B e C, do Apêndice B Atividade 2, sem interferências da pesquisadora, tanto com o uso do material dourado quanto com o do algoritmo usual.

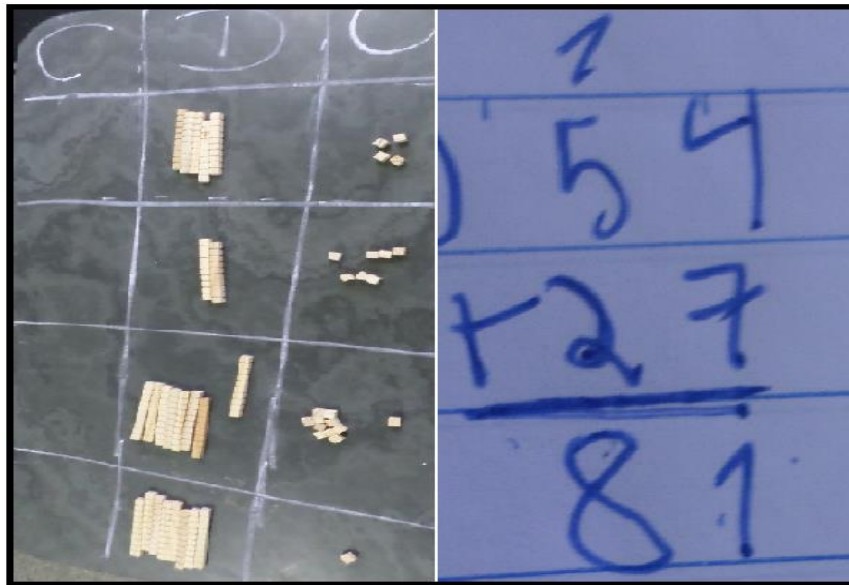
Os três alunos apresentaram os resultados obtidos nos cálculos com êxito e destacando as trocas que foram necessárias para a realização desses cálculos. Em especial, o Aluno A (Figura 20) apresentou-se muito seguro nos procedimentos, colocando a posição que cada número representa nas suas respectivas ordens. Embora não tenha utilizado o algoritmo da decomposição, pois disse que achou muito trabalhoso e longo ter que decompor cada número, ele fez o cálculo mental ao manipular o material dourado.

Figura 20 - Resposta do Aluno A.



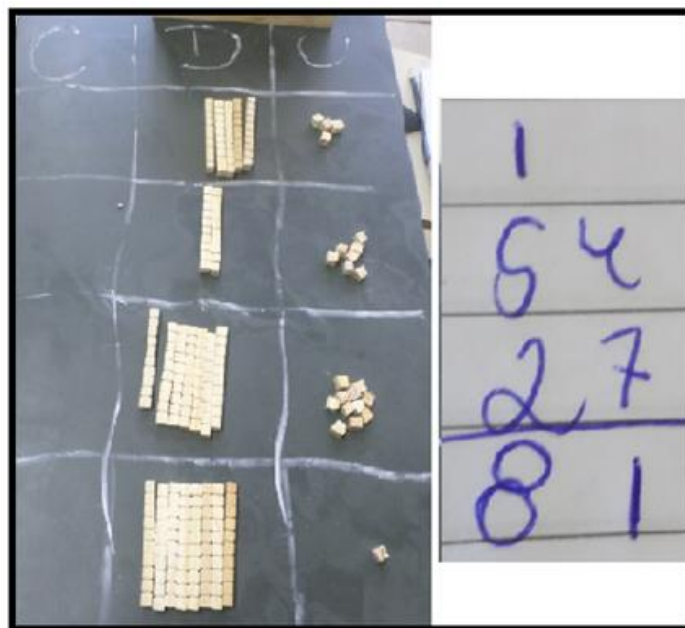
Fonte: Arquivo da autora.

Figura 21 - Resposta do Aluno B.



Fonte: Arquivo da autora.

Figura 22 - Resposta do Aluno C.



Fonte: Arquivo da autora.

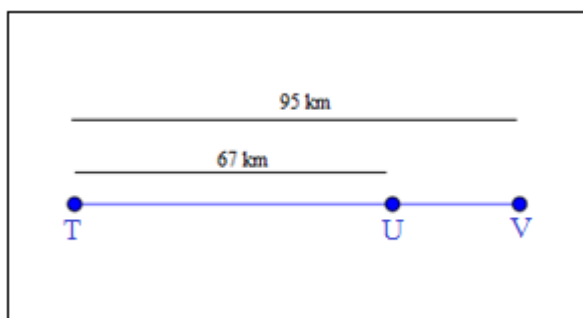
Com o empenho dos alunos durante as aulas e as explorações de conceitos trabalhados, verificamos que houve uma melhora no desempenho dos alunos. Foi nítida a evolução que os alunos tiveram no decorrer das atividades.

5.2 - O Algoritmo da Subtração com o uso do Material Dourado

Na Figura 23 trabalhamos a operação subtração usando os métodos apresentados na Seção 4.2 incluindo o material dourado, de modo a tentar orientar o aluno a compreender a necessidade das trocas, reforçada pelo Quadro 4. No exemplo a seguir, exploraremos a situação-problema quando há uma quantidade inferior para se realizar a diferença entre as ordens das unidades e das dezenas, respectivamente.

As cidades T, U e V ficam à beira de uma rodovia. De T até V há 95 quilômetros e de T até U há 67 quilômetros. Quantos quilômetros de estrada separam U e V? Os dados do problema estão ilustrados no Quadro 20.

Quadro 20 - Esquema da Situação-Problema.

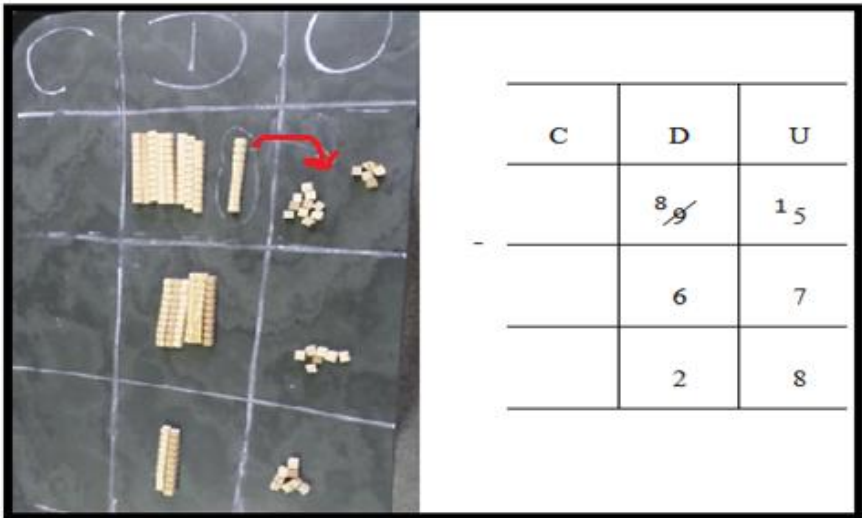


Fonte: Arquivo da autora.

Na Figura 23 à direita, na ordem das unidades, não conseguimos tirar 5 de 7, isto é, $5 - 7$. Então, trocamos uma dezena, na segunda linha na ordem das dezenas ($9 - 1 = 8$), por 10 unidades, totalizando $10 + 5 = 15$ unidades. Daí, subtraímos os algarismos da ordem das unidades $15 - 7 = 8$ e, em seguida, os algarismos da ordem das dezenas, obtendo 28 km.

Veja à esquerda da Figura 23 que fizemos o cálculo usando o material dourado. A ilustração da seta indica que trocamos uma barra (1 dezena) na ordem das dezenas por 10 cubinhos (10 unidades) para que fosse possível subtrair a ordem das unidades $15 - 7 = 8$, e finalizamos a subtração obtendo 28.

Figura 23 - Resolução da Situação-Problema.



Fonte: Arquivo da autora.

No Quadro 21, detalhamos os passos que foram utilizados na ilustração da Figura 23. Na etapa (1), descompomos o minuendo e o subtraendo de acordo com as suas ordens e separamos as dezenas do minuendo ($80 + 10$). Em seguida, na etapa (2) pela propriedade associativa da adição, trocamos uma dezena (10 unidades) que, com o 5 que tínhamos, totalizou 15 unidades. Na etapa 3, realizamos a subtração para cada ordem, obtendo a diferença 28.

Quadro 21 - Etapas da Subtração pelo Algoritmo da Decomposição.

	D		U			D		U	
	90	+	5		(1) →	(80 + 10)	+	5	(2) →
-	60	+	7			- 60	+	7	

Fonte: Elaborado pela autora.

Para cada exposição foram destinadas três semanas, com uma aula de 70 minutos distribuídos entre explicações, trocas de informações referentes aos questionamentos dos alunos participantes e exercícios aplicados para reforçar o processo ensino e aprendizagem.

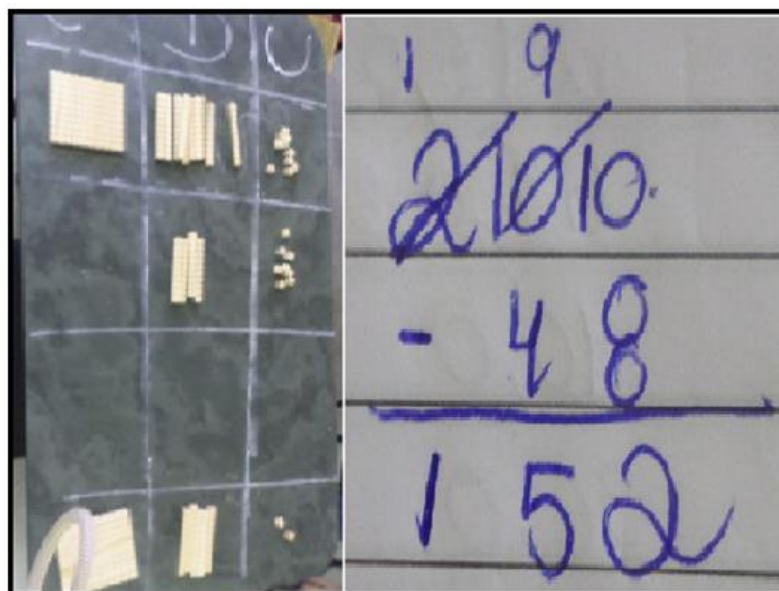
Na Seção 5.2.1, apresentamos os resultados obtidos após as aulas expositivas, evidenciando todo o processo de resolução com a decomposição de números naturais, também utilizando o ábaco de papel com o material dourado e o algoritmo usual aplicado à subtração de números naturais.

5.2.1 - Resultados dos Alunos para a Subtração

Na abordagem ilustrada no Quadro 21, os alunos puderam ter mais clareza em relação às trocas necessárias para a realização dos cálculos. Porém, como o algoritmo da decomposição é mais longo e trabalhoso, eles optaram por fazerem os cálculos com o algoritmo usual.

A Figura 24 ilustra a resposta do Aluno A para a situação-problema: João tinha R\$ 200,00 e gastou R\$ 48,00 com jogos de computadores. Quantos reais ainda restaram?

Figura 24 - Resposta do Aluno A.



Fonte: Arquivo da autora.

Observe à esquerda (Figura 24) que o Aluno A apresentou a resolução com o uso do material dourado. Ele fez a troca de uma placa (1 centena) por 10 barras (10 dezenas) e, também, 1 barra (1 dezena) por 10 cubinhos (10 unidades) para realizar o cálculo

corretamente. Veja à direita da Figura 24 que essa troca é ilustrada, por ele, no algoritmo usual, evidenciando a necessidade das trocas para a realização da subtração.

No entanto, o Aluno A disse que “apesar do material dourado me auxiliar nas trocas, é mais fácil fazer direto pelo algoritmo usual”. Aqui, verificou-se uma evolução com relação às trocas e ao processo como um todo.

No Capítulo 6 será apresentada a operação multiplicação nos moldes expostos na Seção 4.3.2.

6 - O ALGORITMO DA MULTIPLICAÇÃO COM O USO DO MATERIAL DOURADO

Neste capítulo, apresentamos as atividades trabalhadas com a operação multiplicação, que teve duração de três meses, com a participação dos alunos A e C. O Aluno B não participou das atividades.

Antes de iniciarmos as atividades, os alunos disseram estar inseguros, pois não conseguiam fazer as multiplicações, principalmente quando os dois fatores apresentavam dois algarismos. O Aluno C relatou que “a multiplicação é difícil para mim, pois envolve a tabuada e tenho dificuldades em sabê-la de cor. Porém, num cálculo, eu consigo montar a tabuada ao lado e resolver o problema, mas tenho dúvidas”.

Aqui, buscamos motivar o aluno para a importância de aprender a operação multiplicação, que será fundamental para os anos seguintes, ajudando não só na Matemática, mas também nas disciplinas Física e Química.

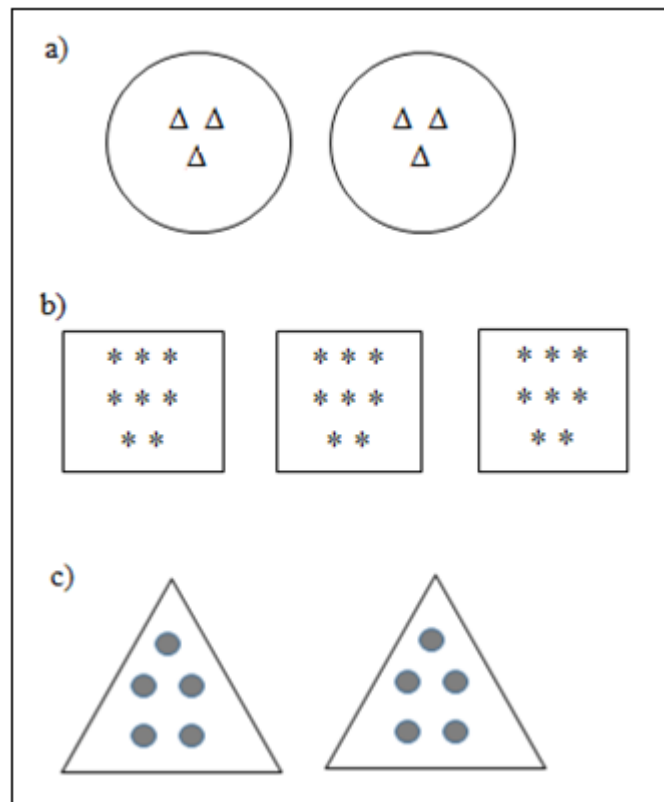
O processo ensino e aprendizagem da operação multiplicação foi dividido em três seções:

1. Quando os dois fatores têm apenas o algarismo da unidade;
2. Quando um dos fatores tem dois algarismos e o outro fator tem um algarismo;
3. Quando os dois fatores têm dois algarismos.

6.1 - A Multiplicação quando os Dois Fatores têm Apenas o Algarismo da Unidade

Iniciamos com os conceitos vistos na Seção 4.3 quando relacionamos a multiplicação como adição de parcelas iguais. Para instigar os alunos a perceberem a relação da multiplicação com a operação adição, aplicamos os exemplos que estão ilustrados no Quadro 22.

Quadro 22 - Contagem de Elementos.

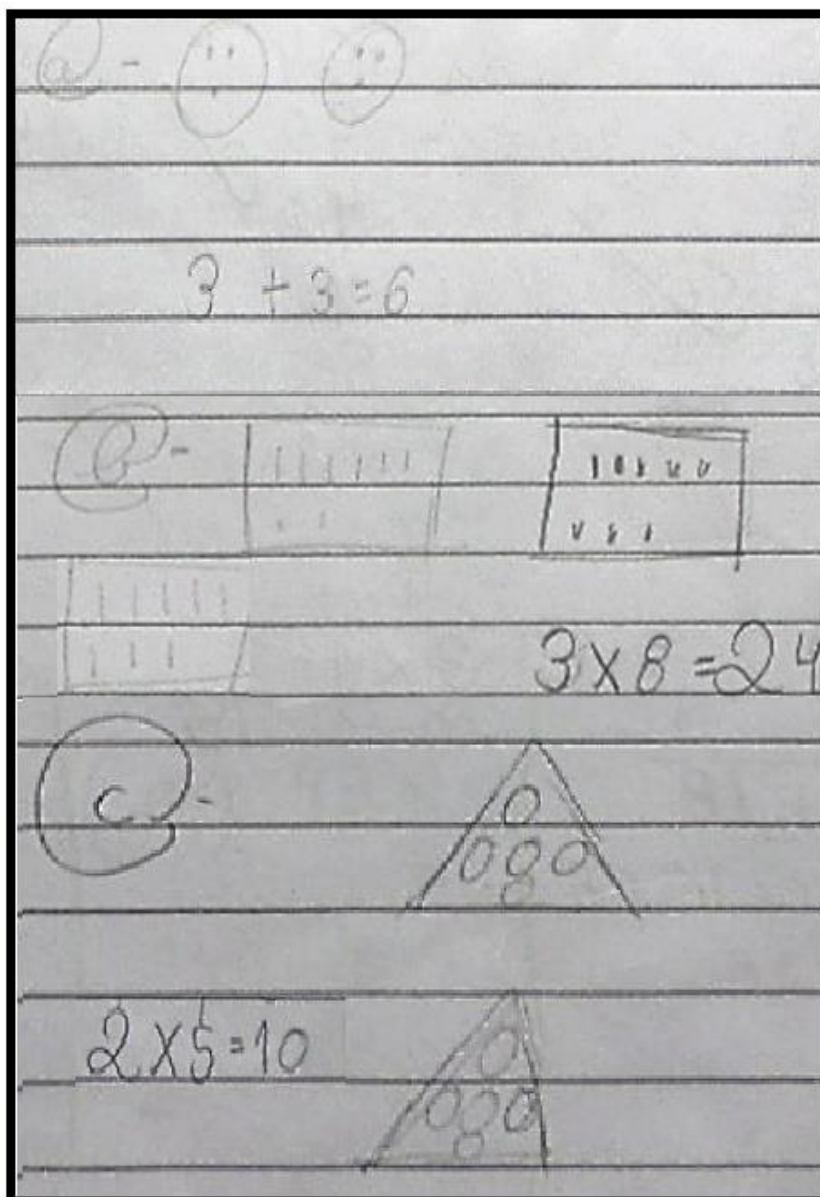


Fonte: Elaborado pela autora.

Nessa abordagem, cada aluno tinha que apresentar o número de elementos nas situações representadas no Quadro 22 pelos itens (a), (b) e (c) para elaborarmos as estratégias iniciais para a multiplicação. Os alunos resolveram mentalmente, porém usaram a adição.

Foi solicitado a eles que escrevessem de outra forma, usando outra operação. O Aluno A deu a resposta para o item (a) usando apenas a adição e, para os itens (b) e (c) (Figura 25), efetuou a multiplicação. Ao ser questionado, informou que “no item (b) há três grupos e cada grupo possui 8 elementos, totalizando 24 elementos. Já no item (c), há dois grupos que contêm 5 elementos cada um, totalizando 10 elementos”.

Figura 25 - Resposta do Aluno A.

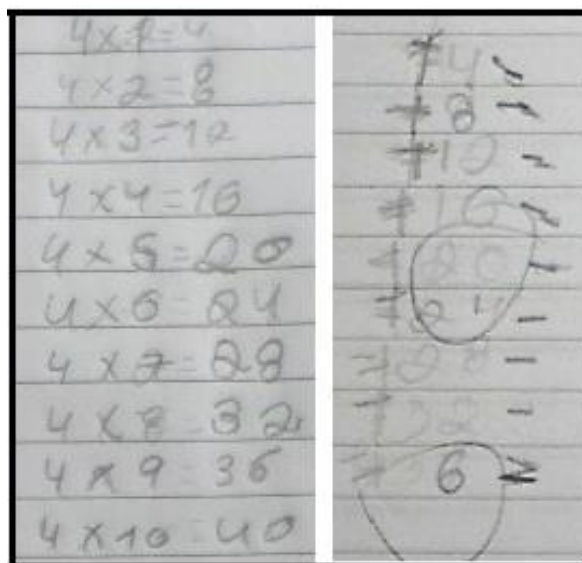


Fonte: Arquivo da autora.

Ao término dessa atividade, os alunos associaram esses exemplos (Figura 25) com a tabuada. Então, foi pedido que eles fizessem as tabuadas do 1 até ao 9 da maneira que preferissem. Para nossa surpresa, os alunos as construíram usando o raciocínio da adição para descobrirem o próximo número da sequência e não pela memorização, como era esperado. Para executar essa atividade, os alunos gastaram 40 minutos.

Na Figura 26 mostramos a tabuada do 4 construída pelo Aluno A. Observe que, à direita, ele coloca o algarismo 4 e o símbolo da adição nas demais linhas para determinar o próximo número da sequência e, à esquerda, escreve no método tradicional.

Figura 26 - Resposta do Aluno A.



Fonte: Arquivo da autora.

Durante a montagem, observou-se que ambos usaram a técnica da contagem dos dedos para determinar o próximo número da sequência e, assim, finalizaram a atividade com êxito, usando o mesmo raciocínio para as demais tabuadas.

6.2 - A Multiplicação quando Um dos Fatores tem Dois Algarismos e o Outro Fator tem Um Algarismo

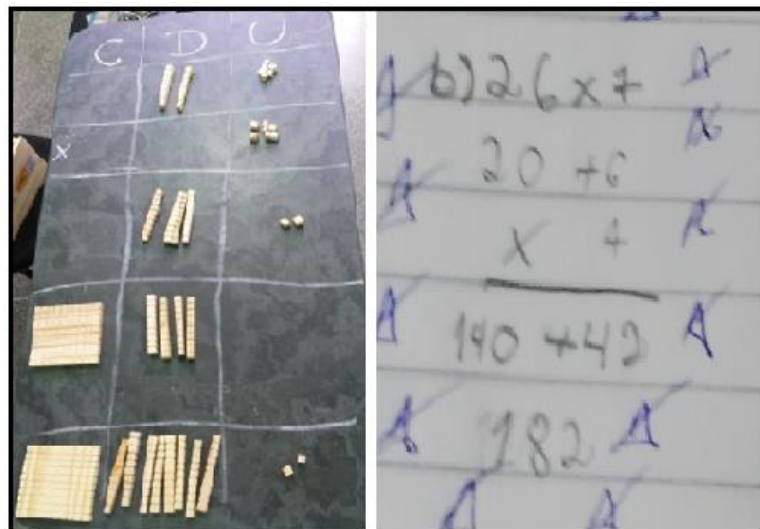
Foi apresentado, inicialmente, aos alunos o algoritmo da decomposição da Seção 4.3.2 e o Quadro 6, a fim de explorar todos os passos realizados para obter o resultado final.

A princípio, os alunos reclamaram devido o cálculo ser mais longo e, também, ser necessário separar os algarismos de acordo com as suas ordens. Porém, eles mostraram segurança nas resoluções dos exercícios propostos.

Na sequência da atividade, foi sugerido aos estudantes que usassem o material dourado com o conhecimento já adquirido para adição e subtração nas Seções 5.1 e 5.2 a fim de resolver o seguinte problema: na escola de Pierre há 7 classes de 26 alunos cada. Qual é o total de alunos nessa escola?

Tal resolução apresentada na Figura 27 exibe a resposta do Aluno C obtida para o problema proposto.

Figura 27 - Resposta do Aluno C.



Fonte: Arquivo da autora.

Nesta análise, observe que, à esquerda, utilizando o material dourado, na quarta e quinta linhas (Figura 27), o Aluno C aplica a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (Seção 4.3.1) e a propriedade associativa da adição (Seção 4.1.1), colocando os resultados separadamente nas suas respectivas ordens e, à direita, a aplicação do algoritmo usual. Observa-se que na penúltima linha à direita (Figura 27) o aluno C não fez a separação nas respectivas ordens, mas finalizou corretamente.

As Figuras 28 e 29 mostram mais resultados obtidos pelos alunos nas resoluções de exercícios (Apêndice B – Atividade 3).

Destacamos na Figura 28 à direita (item e) que o Aluno A fez a decomposição e, separadamente, usou o algoritmo usual da adição para finalizar o cálculo. Observe que, ao aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, ele atentou-se para as ordens ocupadas por cada número, finalizando corretamente.

Figura 28 - Respostas do Aluno A.

Handwritten student work for Aluno A. The left side shows the calculation of 106×4 using decomposition: $100 + 6$, $\times 4$, $400 + 24$, $400 + 20 + 4$, resulting in 424 . The right side shows the calculation of 43×6 using decomposition: $40 + 3$, $\times 6$, $240 + 18$, $240 + 10 + 8$, resulting in 258 . There are also some additional numbers written on the right side, such as 240 , 40 , and 8 .

Fonte: Arquivo da autora.

Já o Aluno C aplicou corretamente o algoritmo da decomposição (Figura 29). Ele decompôs cada algarismo na sua respectiva ordem e aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Porém, observe que, na terceira linha do algoritmo, ele não fez a decomposição tanto em (a) quanto em (c) e, quando questionado, disse “eu sei a ordem que cada algarismo ocupa, apenas fiz direto para simplificar a conta”.

Figura 29 - Respostas do Aluno C.

Handwritten student work for Aluno C. The left side shows the calculation of 61×8 using decomposition: $60 + 1$, $\times 8$, $480 + 8$, resulting in 488 . The right side shows the calculation of 34×5 using decomposition: $30 + 4$, $\times 5$, $150 + 20$, resulting in 170 .

Fonte: Arquivo da autora.

No decorrer de todas as atividades que envolviam a multiplicação, notamos os problemas com as tabuadas, mas cada aluno usou sua própria estratégia para conseguir resolver os exercícios: ora construíam a tabuada numa folha de rascunho usando a adição, ora usavam os dedos ou os risquinhos para auxiliar na contagem da sequência.

Concluimos esta etapa observando que os resultados foram positivos. A compreensão na adição foi essencial para o desempenho dos alunos na multiplicação. A próxima seção envolve a multiplicação quando os dois fatores são compostos por dois algarismos, situação em que os alunos apresentavam as maiores dificuldades.

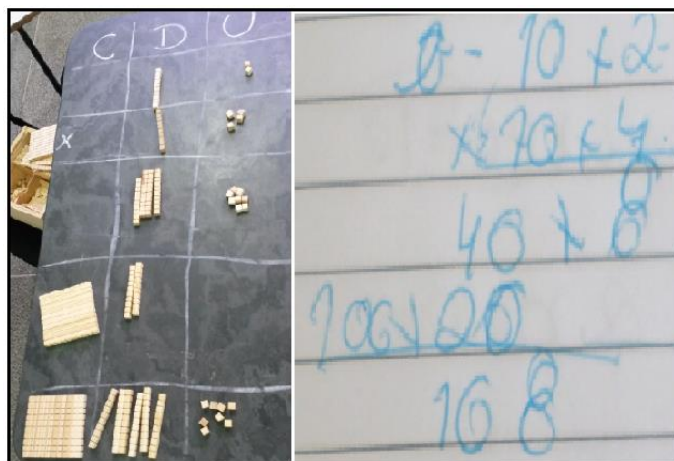
6.3 - A Multiplicação quando os Dois Fatores têm Dois Algarismos

Inicialmente, foi enfatizado o algoritmo da decomposição apresentado na Seção 4.3.2 pelo Quadro 8, destacando, principalmente, a posição de cada algarismo de acordo com a sua ordem. Não utilizamos o material dourado para a resolução do exercício, pois o objetivo era que os alunos relembressem o que foi feito para a adição na Seção 5.1 e estendessem o raciocínio para a multiplicação. Todas as explicações tiveram por objetivo amenizar os problemas que apresentaram inicialmente, analisados no Capítulo 2, e destacados pelas Figuras 5 e 6.

Depois das explicações e discussões, mais uma vez os alunos reclamaram, dizendo que os cálculos eram muito longos e teriam que ficar separando cada algarismo nas suas ordens. Tanto o Aluno A quanto o Aluno C tiveram dificuldades na tabuada e usaram a abordagem apresentada na Seção 6.1. Porém, os mesmos conseguiram fazer os exercícios propostos corretamente e, ainda, foram desafiados a tentar resolver os exercícios com o material dourado, retomando o que foi trabalhado na Seção 5.1.

Observa-se nas Figuras 30 e 31 que os alunos A e C, respectivamente, fizeram as resoluções dos exercícios (Apêndice B – Atividade 3.1) usando o material dourado e o algoritmo da decomposição para confirmar o resultado, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e organizando os algarismos de acordo com as suas respectivas ordens.

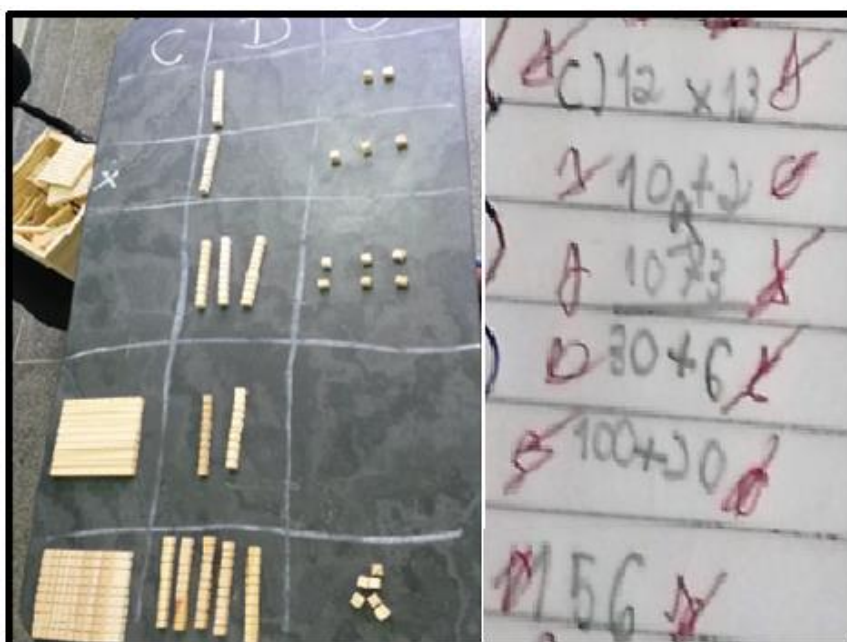
Figura 30 - Resposta do Aluno A.



Fonte: Arquivo da autora.

Em especial, o Aluno A reclamava que tinha muitas dificuldades nesse tipo de multiplicação e, quando proposto, não resolveu o exercício da prova diagnóstica (Apêndice A - Exercício 3c). Mas, no final dessa atividade, falou “que bom que quando aprendemos dá vontade de fazer mais”. Já o Aluno C, não continuava a multiplicação quando o multiplicando era composto por dois algarismos (ver Capítulo 2 e destacado pela Figura 6) e, a partir dessa atividade, sentiu-se mais seguro e confiante nas resoluções.

Figura 31 - Resposta do Aluno C.



Fonte: Arquivo da autora.

Concluímos que para o sucesso das atividades apresentadas neste capítulo foi necessário à compreensão de todo o processo do algoritmo da decomposição.

Os alunos pediram mais exercícios para complementar e aperfeiçoar suas respostas, já que, neste capítulo, relataram que tinham dificuldades em relação à operação multiplicação.

Os resultados em relação à multiplicação nos motivaram na preparação para o ensino da operação divisão no Capítulo 7, visando trabalhar os conhecimentos prévios já adquiridos nas seções anteriores.

7 - O ALGORITMO DA DIVISÃO COM O USO DO MATERIAL DOURADO

Neste capítulo, o trabalho desenvolvido teve duração de três aulas de 70 minutos cada, e foi baseado nas Seções 4.4 e 4.4.1, moldado e desenvolvido perante as discussões com o Aluno A (por motivos particulares, tanto o Aluno B quanto o Aluno C não participaram da atividade). Foram vários exercícios diretos (do tipo efetue) ou aplicados em situações-problemas: quando o divisor tem apenas um algarismo da unidade e quando tem dois algarismos referentes às ordens da dezena e unidade.

7.1 - A Divisão quando o Divisor tem Apenas o Algarismo da Unidade

Foi proposto um exercício do tipo efetue (Apêndice B – Atividade 4) composto por quatro itens, cujas respostas estão ilustradas na Figura 32, servindo para diagnosticar possíveis problemas.

Figura 32 - Respostas do Aluno A.

a) $15 \overline{) 5}$ + 15 3 00	b) $24 \overline{) 6}$ - 24 4 00
c) $24 \overline{) 2}$ - 24 12 00	d) $100 \overline{) 4}$ - 100 25 00

Fonte: Arquivo da autora.

Nesta atividade, o Aluno A não teve problemas para tais resoluções. Porém, observa-se que nos itens (c) e (d) ele coloca direto no quociente o número 12, e no item (d), o número 25, respectivamente. Isso nos sugere que ele pensou no número que multiplicado por 2 dá 24, e também no número que multiplicado por 4 dê 100. Quando perguntado a respeito de qual estratégia havia usado, ele disse “eu fui fazendo a tabuada do 2 até chegar ao 24 e depois a

tabuada do 4 até chegar ao 100, e terminei a conta”. Percebe-se que ele não usou o algoritmo detalhado, especificando as ordens e as trocas necessárias.

Logo, aproveitamos a descrição do exercício anterior (Figura 32) para revisar o processo detalhado do algoritmo da divisão e a necessidade de desagrupamento de ordens, facilitando a operação.

Aplicamos uma situação-problema, na qual é típica a ocorrência de erros: quando, na operação divisão, o dividendo ou o quociente possuem zeros alternados ou terminam em zero(s). As dificuldades aparecem porque os alunos, normalmente, seguem uma sequência de etapas sem significado.

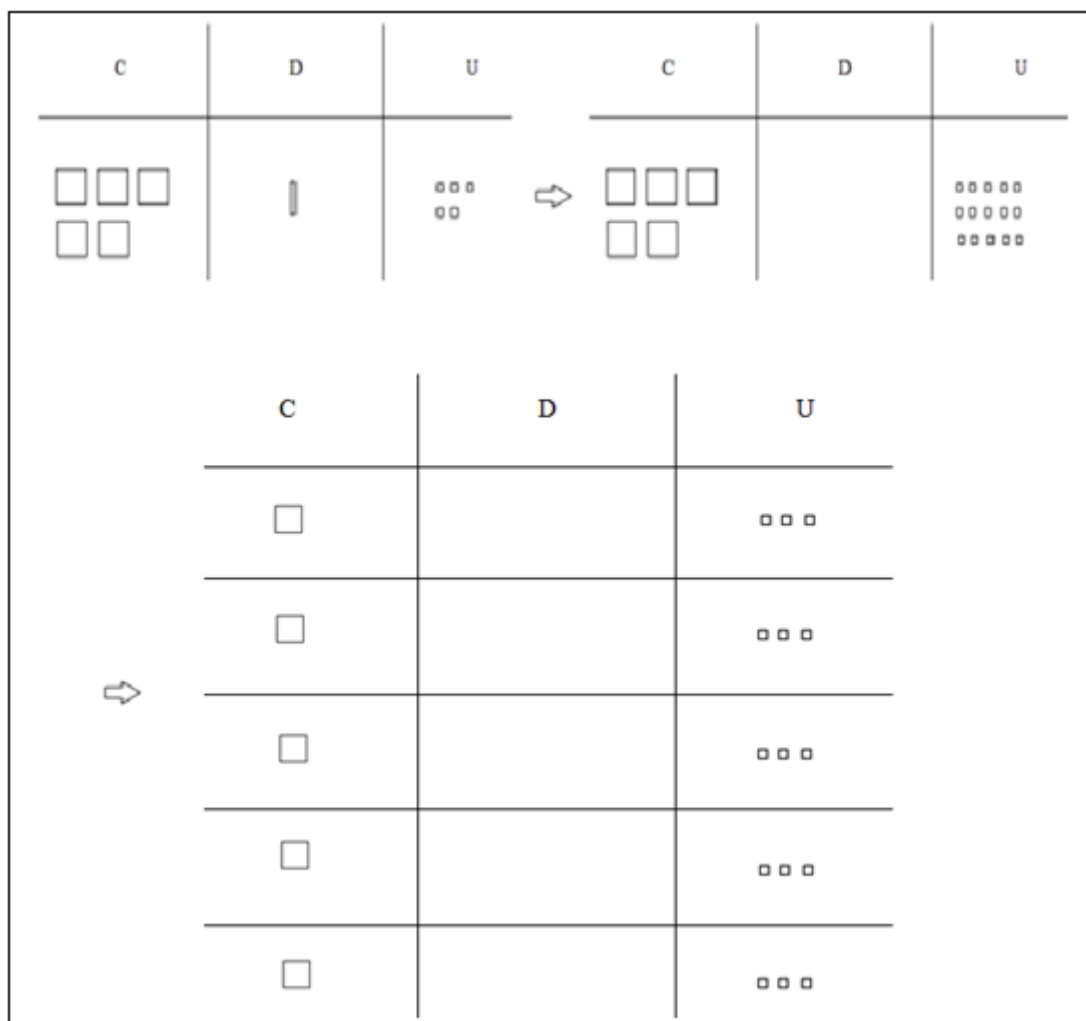
Foi proposto o seguinte problema: um fogão está sendo vendido por R\$ 515,00 em cinco prestações iguais. Qual é o valor de cada prestação?

Automaticamente, o Aluno A usou o algoritmo da divisão (Seção 4.4.1, p. 45), não mais como na atividade anterior (Figura 32). Ele dividiu 5 centenas por 5, que deu 1 (uma centena no quociente). Mas ficou inseguro, pois, na ordem das dezenas, não conseguiu repartir 1 dezena em 5. Então, ele juntou o número 15 e finalizou com o quociente 13. Na sequência, foi pedido que ele fizesse a operação inversa para comprovar o resultado. O aluno percebeu que alguma coisa estava errada, pois o resultado da verificação deu 65, mas o dividendo é 515.

A partir desse fato, incluímos o material dourado com o ábaco de papel a fim de explicar o erro cometido e amenizar possíveis dúvidas.

Observa-se no Quadro 23 a abordagem que utilizamos para explicar o problema ao aluno. Inicialmente, distribuímos 1 placa para cada prestação, mas não conseguimos repartir 1 barra em 5. Logo, é necessário a troca da barra (1 dezena) pelos cubinhos (10 unidades) e, conseqüentemente, haverá ausência de barras na ordem das dezenas. Juntamos os 10 cubinhos com os 5 que tínhamos, totalizando 15 cubinhos e, distribuímos 3 cubinhos para cada prestação. Assim, cada prestação (ou grupo) terá 1 placa (1 centena) e 3 cubinhos (3 unidades). Portanto, o valor de cada prestação será de R\$ 103,00.

Quadro 23 - Ilustração da Divisão com Zero no Quociente com o Material Dourado.



Fonte: Elaborado pela autora.

Ao término da explicação, foi feita a resolução pelo algoritmo da divisão (Quadro 24). Repartimos igualmente 5 centenas em 5, o que dá 1 centena, indicando que o quociente dessa divisão terá três algarismos. Ao continuar a divisão na ordem das dezenas, verificamos a necessidade de se fazer a troca de 1 dezena por 10 unidades, pois não conseguimos dividir igualmente 1 dezena em 5. Por isso, no quociente e na ordem das dezenas, apareceu o algarismo zero para indicar a ausência na ordem da dezena. Veja que, à direita do Quadro 24 e indicado pelo arco, juntamos as 10 unidades com as 5 que já tínhamos, totalizando 15 unidades. Dividimos 15 por 5, resultando em 3 unidades com resto zero. Portanto, o valor de cada prestação é R\$ 103,00.

Quadro 24 - Ilustração da Divisão com Zero no Quociente pelo Algoritmo Usual.

C	D	U			
5	1	5		5	
-5				1	
0	1				C D U

⇒

C	D	U			
5	1	5		5	
-5				1	0 3
0				15	C D U
				-15	
				00	

Fonte: Elaborado pela autora.

As abordagens ilustradas nos Quadros 23 e 24, em respectivo, juntamente com o auxílio do material dourado, principalmente quando há a necessidade de se fazer trocas para realizar a operação divisão, proporcionará ao aluno a compreensão de tal operação e possibilitará resultados positivos quando ele se deparar com situações semelhantes ao exemplo ilustrado no Quadro 24 e obtiver êxito nas resoluções dos exercícios propostos.

A fim de instigar o Aluno A a resolver mais exercícios, foi proposta a seguinte situação-problema que envolve um conteúdo trabalhado no 6º ano do Ensino Fundamental: 2016 é ano bissexto? Justifique a resposta. Dizemos que há dois tipos de anos bissextos: os que são múltiplos de 4 (ou divisíveis por 4), mas não de 100 (ou não podem ser divisíveis por 100) e, os que são múltiplos de 400 (ou divisíveis por 400).

A Figura 33 mostra a resposta do aluno, que ficou satisfeito em conseguir resolver o problema corretamente.

Figura 33 - Resposta do Aluno A.

The image shows a student's handwritten work on lined paper. At the top, the student has written '2016 : 4 = 504' twice. Below this, they have written '16' and '00'.

Fonte: Arquivo da autora.

Observa-se que ele não conseguiu repartir igualmente duas unidades de milhares em 4, estimando que o quociente terá três algarismos. Então, ele as transformou em 20 centenas que, divididas por 4, resultam em 5 centenas e resto zero. Em seguida, o aluno agrupou o zero com o algarismo 1 (1 dezena) e percebeu que não havia a possibilidade de dividir por 4. Por isso, colocou o algarismo zero no quociente para indicar a ausência da dezena. Daí, o aluno trocou 1 dezena por 10 unidades e juntou com as 6 unidades que já tinha, ficando com 16 unidades; repartiu igualmente as 16 unidades por 4, obtendo 4 unidades, e terminou com o quociente 504 e resto zero, concluindo que o ano é bissexto.

Na Figura 34 mostramos as respostas obtidas pelo Aluno A nas resoluções dos exercícios propostos, do tipo efetue (Apêndice B – Atividade 5), e concluímos que houve um aprendizado, trazendo confiança ao aluno nas resoluções e segurança para avançar à próxima seção.

Figura 34 - Respostas do Aluno A.

a)
$$\begin{array}{r} 715 \overline{) 143} \\ -5 \\ \hline 21 \\ -20 \\ \hline 015 \\ -15 \\ \hline 00 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 4320 \overline{) 720} \\ -42 \\ \hline 012 \\ -12 \\ \hline 000 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} 1110 \overline{) 123} \\ -9 \\ \hline 021 \\ -18 \\ \hline 003 \\ -000 \\ \hline 000 \end{array}$$

Fonte: Arquivo da autora.

Com o intuito de reforçar os processos aplicados ao algoritmo da divisão, foi proposto na Seção 7.2 exercícios do tipo efetue sem o uso do material dourado, para que o aluno pudesse exercitar os procedimentos compreendidos nas atividades anteriores em divisões quando o divisor tem dois algarismos.

7.2 - A Divisão quando o Divisor tem Dois Algarismos

Nesta seção, aproveitando as discussões da Seção 7.1, foram apresentados ao Aluno A os exercícios do tipo efetue (Apêndice B – Atividade 6) para que ele os resolvesse. A ideia era testar se o aluno tinha compreendido as resoluções da Seção 7.1, estendendo agora para divisões com divisores contendo dois algarismos.

A Figura 35 mostra as respostas do aluno para os exercícios propostos. Observe nos itens (a), (b), (c) e (d) que o aluno apresenta todo o processo que foi trabalhado na seção anterior. Em especial, nos itens (a) e (d), ele faz todo processo como trabalhamos no Quadro 24 e, ao lado das resoluções, indica que usou a tabuada do 14 e do 32, respectivamente, para ir descobrindo o número procurado para o quociente, diferente de como mostramos na Figura 32.

Figura 35 - Respostas do Aluno A.

The image shows four handwritten examples of division problems with two-digit divisors, labeled a, b, c, and d.

- a)** Division of 532 by 14. The student shows the long division process, with the quotient 38. To the right, a multiplication table for 14 is shown, listing multiples from 14 to 112.
- b)** Division of 2016 by 24. The student shows the long division process, with the quotient 84. To the right, a multiplication table for 24 is shown, listing multiples from 24 to 216.
- c)** Division of 3000 by 150. The student shows the long division process, with the quotient 20. To the right, a multiplication table for 150 is shown, listing multiples from 150 to 300.
- d)** Division of 960 by 32. The student shows the long division process, with the quotient 30. To the right, a multiplication table for 32 is shown, listing multiples from 32 to 96.

Fonte: Arquivo da autora.

As respostas dadas pelo Aluno A (Figura 35) indicam que ele conseguiu compreender o processo do algoritmo da divisão. E, depois de ter concluído, ele disse estar satisfeito em poder conseguir realizar cálculos que antes não conseguia.

No último dia das atividades, baseando-se nos resultados positivos e com o intuito de inserir um problema que envolvesse um conteúdo geralmente trabalhado no 7º ano do Ensino Fundamental, a Regra de Três Simples, foi proposto ao Aluno A que resolvesse a seguinte situação problema:

Pierre é técnico em informática e presta serviços domiciliares. Em três horas de trabalho, ele recebeu R\$ 150,00. Quantas horas Pierre terá que trabalhar para receber R\$ 900,00?

A Figura 36 ilustra a montagem da situação-problema, e a resolução dada pelo Aluno A, evidenciando todos os passos utilizados que envolveram as operações trabalhadas no conjunto dos números naturais, reforçando a importância de todo o processo ensino e aprendizagem que foi desenvolvido nos capítulos anteriores, para conteúdos futuros e que, esse ensino bem compreendido, poderá ser estendido aos números decimais.

Figura 36 - Resposta do Aluno A.

Handwritten student work on lined paper showing a problem setup and two methods of solving a direct proportion problem.

Problem Setup:

R\$	horas
150	3
900	x = 18

Method 1 (Cross-multiplication):

$$\frac{150}{3} = \frac{900}{x}$$

$$150x = 2700$$

$$x = \frac{2700}{150}$$

$$x = 18$$

Method 2 (Rule of Three):

2700	150
- 150	18
1200	
1200	
000	

8 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento deste trabalho foi baseado nas dificuldades apresentadas pelos alunos em cálculos básicos envolvendo as quatro operações básicas da matemática, na prova diagnóstica, e também nos questionamentos no ambiente escolar.

Os professores do Ensino Médio, das disciplinas de Matemática, Física e Química, da escola onde foram realizadas as atividades práticas, questionavam sobre a grande dificuldade dos alunos ao realizarem, principalmente, cálculos com multiplicações e divisões.

As análises apontaram que essas deficiências eram recorrentes de falhas nos pré-requisitos das operações adição e subtração, envolvendo as suas propriedades importantíssimas para a compreensão dos algoritmos da decomposição e usual.

A compreensão do sistema de numeração decimal, através da decomposição dos números naturais com as suas respectivas ordens, foi importante para o entendimento de todo o processo nos algoritmos. O material dourado auxiliou nesta compreensão. A cada operação iniciada, o aluno usava o conhecimento já adquirido para resolver os problemas.

Destacamos os resultados positivos que os alunos do 7º ano tiveram durante as atividades relacionadas à operação de multiplicação com o uso do algoritmo da decomposição e do material dourado. Com isso, conseguiram avançar na operação da divisão, mais motivados e confiantes no aprendizado.

Percebemos que houve uma melhora na aprendizagem e ressaltamos que a interação entre a teoria e a prática, foi importante para o aluno assimilar todo o processo de ensino e ter segurança nas resoluções de exercícios.

Finalizamos este trabalho com a certeza de que é possível proporcionar um ensino de qualidade relacionado aos cálculos com as quatro operações matemáticas, de forma a suprir dificuldades que os alunos apresentam desde o Ensino Fundamental. Pretendemos no futuro ampliar essa pesquisa para a prática com os números decimais.

REFERÊNCIAS

- CARDOSO, V. C. **Materiais didáticos para as quatro operações**. 4 ed. São Paulo: IME/USP, 1998.
- DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de aritmética**. São Paulo: Atual, 1991.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000.
- LIMA, E. L. **Análise real funções de uma variável**. 12 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017. v.1.
- LIMA, E. L. **Curso de análise**. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1982. v. 1.
- LIMA, E. L. **Número e funções reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. 3 ed. Campinas: Autores Associados, 2010.
- MOREIRA, A. **Cura e autocura – uma visão médico-espírita**. Belo Horizonte: AME, 2018.
- PIRES, C. M. C. **Números naturais e operações**. São Paulo: Melhoramentos, 2013.
- RAUNAIMER, A. *et al.* **Ábaco mesopotâmico**. [s.l.]: Descomplicando A Matemática, 2013. Disponível em: <http://descompliqueamatematica.blogspot.com/2013/04/tipos-de-abaco-e-sua-historia.html>. Acesso em: 23 abr. 2018.
- ROSA NETO, E.; MENDONÇA, E. R de; SMITH, M. L. **Matemática para o magistério**. São Paulo: Ática, 1990.
- TATTO, F.; SCAPIN, I. J. Matemática: porque o nível elevado de rejeição? **Revista de Ciências Humanas**, Frederico Westphalen, v. 5, n. 5, p. 57-70, 2004. Disponível em: <http://revistas.fw.uri.br/index.php/revistadech/article/view/245>. Acesso em: 05 fev. 2018.

APÊNDICE A**Prova Diagnóstica**

1. O Censo de 2 000 apontou que a população de Goiás era de 5 003 228 habitantes. Esse número tem:

a) quantos algarismos? Quantas classes?

b) Escreva por extenso o número de habitantes de Goiás.

2. Em seu aniversário, Júlia ganhou 50 reais de seu tio e 100 reais de seu avô em vale-presentes de uma livraria. Comprou 3 livros de 35 reais cada um. Escreva a expressão numérica correspondente e responda: quanto dinheiro Júlia ainda tem?

3. Calcule:

a) o triplo de 643.

b) a diferença entre 8 150 e 925.

c) o produto de 19 por ele mesmo.

d) a soma de 586 e 434.

4. O saldo bancário de Pierre era de R\$ 850,00. Com esse dinheiro, ele pretendia pagar as seguintes contas:

- Dentista: R\$ 132,00
- Faxineira: R\$ 85,00
- Cantina da escola: R\$ 106,00
- Telefone celular: R\$ 45,00
- Posto de gasolina: R\$ 360,00
- Energia elétrica: R\$ 280,00

a) Qual o total que será pago por Pierre?

b) O saldo bancário de Pierre é suficiente para o pagamento dessas despesas? Por quê?

5. Certa máquina é capaz de produzir oito réguas em cada minuto. Quantas réguas esta máquina consegue produzir em 15 minutos?

- a) 104
- b) 110
- c) 112
- d) 128
- e) 120

6. Os times ganham três pontos por vitória, um ponto por empate e nenhum em caso de derrota. Até hoje, cada time já disputou vinte jogos. Se um desses times venceu oito jogos e perdeu outros oito, quantos pontos ele tem até agora?

- a) 23
- b) 25
- c) 26
- d) 27
- e) 28

7. Numa multiplicação, um dos fatores é 67 e o produto é 871. Qual é o outro fator?

- a) 12.
- b) 13.
- c) 14.
- d) 15.
- e) 16.

APÊNDICE B

Atividades Aplicadas aos Alunos Durante o Processo Ensino e Aprendizagem

Atividade 1 – Cada aluno deverá fazer o cálculo, individualmente e sem consulta, usando apenas o material dourado e o ábaco de papel.

Questões:

- 1) Aluno A. Efetue $144 + 289$.
- 2) Aluno B. Efetue $151 + 40$.
- 3) Aluno C. Efetue $144 + 289$.

Atividade 2 – Cada aluno deverá fazer o cálculo, individualmente e sem consulta, usando apenas o material dourado e o ábaco de papel.

Questões:

- 1) Aluno A. Efetue $58 + 49$.
- 2) Aluno B. Efetue $54 + 27$.
- 3) Aluno C. Efetue $54 + 27$.

Atividade 3 – Cada aluno deverá fazer o cálculo, individualmente e sem consulta.

Questões:

- 1) Aluno A. Efetue:
 - d) 106×4 .
 - e) 43×6 .
- 2) Aluno C. Efetue:
 - a) 61×8 .
 - b) 34×5 .

Atividade 3.1 – Cada aluno deverá fazer o cálculo, individualmente e sem consulta.

Questões:

- 1) Aluno A. Efetue:
 - b) 12×14 .

2) Aluno C. Efetue:

c) 12×13 .

Atividade 4 – O aluno deverá fazer o cálculo, sem consulta.

Aluno A. Efetue:

a) $15 \div 5$.

b) $24 \div 6$.

c) $24 \div 2$.

d) $100 \div 4$.

Atividade 5 – O aluno deverá fazer o cálculo, sem consulta.

Aluno A. Efetue:

a) $715 \div 5$.

b) $4320 \div 6$.

c) $1710 \div 9$

Atividade 6 - O aluno deverá fazer o cálculo, sem consulta.

Aluno A. Efetue:

a) $532 \div 14$.

b) $2616 \div 12$.

c) $3000 \div 50$

d) $960 \div 32$