



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro - SP

Carla Patrícia Ferreira dos Santos

Fundamentos de Geometria e Astronomia Esférica

**Rio Claro - SP
2020**



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro - SP

Fundamentos de Geometria e Astronomia Esférica

Carla Patrícia Ferreira dos Santos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Mestrado Profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Rio Claro - SP.

Orientador
Prof. Dr. Lucas Antonio Caritá

Rio Claro - SP
2020

S237f Santos, Carla Patrícia Ferreira dos
Fundamentos de Geometria e Astronomia Esférica / Carla Patrícia
Ferreira dos Santos. -- Rio Claro, 2020
170 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual
Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio
Claro
Orientador: Lucas Antonio Caritá

1. Geometria Esférica. 2. Trigonometria Esférica. 3. Geometrias
não Euclidianas. 4. Astronomia de Posição. 5. Astronomia Esférica. I.
Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de
Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

TERMO DE APROVAÇÃO

Carla Patrícia Ferreira dos Santos

FUNDAMENTOS DE GEOMETRIA E ASTRONOMIA ESFÉRICA

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática, Mestrado Profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Lucas Antonio Caritá
Orientador

Prof. Dr. João Peres Vieira
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP)

Prof. Dr. Francisco Carlos Rocha Fernandes
Universidade do Vale do Paraíba (UNIVAP)

Rio Claro - SP, 13 de outubro de 2020

Aos meus pais e irmão que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus que permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo de minha vida, e não somente nestes anos como universitária, mas que em todos os momentos é o maior mestre que alguém pode conhecer.

À Unesp pela oportunidade de fazer o curso.

Ao meu orientador Lucas Antonio Caritá pelas horas dedicadas a mim, pelo suporte, pelas correções e incentivos.

À professora Marta Cilene Gadotti por me auxiliar no começo dessa caminhada.

À minha família por sempre acreditarem em mim.

Aos meus pastores pelas orações.

Aos meus amigos pelas horas de consolo, incentivo e alegrias.

Aos membros da banca pela gentileza, pelas correções e sugestões.

*“Se vi mais longe,
foi porque estava sobre os ombros de gigantes”.*
Isaac Newton

Resumo

Os portugueses, diante dos desafios da navegação, proporcionaram grande desenvolvimento e aplicabilidade de técnicas advindas da Geometria Esférica, Astronomia e seus elementos para localização terrestre. Nesse contexto, este trabalho tem por objetivo fundamentar a teoria da Geometria Esférica, apresentando e demonstrando resultados, para posteriormente aplicá-los em Astronomia de Posição. O texto traz uma revisão histórica relacionando a navegação portuguesa e o uso da Geometria Esférica, apresenta definições e resultados matemáticos sobre Geometria e Trigonometria Esférica, faz um estudo acerca de congruência de triângulos esféricos, demonstra a Lei dos Senos, a Lei dos Cossenos e outros teoremas oriundos dessas leis e aborda resoluções de triângulos esféricos retângulos e oblíquângulos. Este trabalho também traz aplicações nos triângulos terrestre e astronômico, desenvolvendo fórmulas que relacionam coordenadas terrestres e celestes úteis para solucionar problemas de localização e estudar a dinâmica do movimento dos astros.

Palavras-chave: Geometria Esférica, Trigonometria Esférica, Geometrias não Euclidianas, Astronomia de Posição, Astronomia Esférica.

Abstract

The Portuguese, facing the challenges of navigation, provided great development and applicability of techniques arising from Spherical Geometry, Astronomy and its elements for terrestrial location. In this context, this work aims to support the theory of Spherical Geometry, presenting and demonstrating results, to later apply them in Position Astronomy. The text provides a historical review relating Portuguese navigation with the use of Spherical Geometry, presents definitions and mathematical results on Spherical Geometry and Trigonometry, makes a study about the congruence of spherical triangles, demonstrates the Law of Senos, the Law of Cosines and others theorems from these laws, it carries out resolutions of spherical right and obliquated triangles. This work also brings applications in the terrestrial and astronomical triangles, developing formulas that relate terrestrial and celestial coordinates which are useful for solving location problems and studying the dynamics of the movement of the stars.

Keywords: Spherical Geometry, Spherical Trigonometry, Non Euclidean Geometries, Position Astronomy, Spherical Astronomy.

Lista de Figuras

1.1	Como calcular o raio da Terra segundo Wallace (1823-1913).	29
2.1	Superfície esférica.	37
2.2	Círculo máximo.	38
2.3	Eixo e pontos diametralmente opostos (antípodas).	38
2.4	Círculos máximos de uma esfera cortando-se mutuamente.	39
2.5	Distância esférica.	40
2.6	Ângulo esférico.	40
2.7	Triângulo esférico.	41
2.8	Triângulo esférico tri-retângulo.	42
2.9	Triângulo esférico e seu triedro correspondente.	43
2.10	Triângulos esféricos simétricos.	44
2.11	Triângulo equilátero/equiângulo.	45
2.12	Um lado é menor que a soma dos outros dois e maior que sua diferença.	45
2.13	A soma dos três lados de um triângulo esférico é menor que 360° .	47
2.14	Polos de um círculo máximo em uma esfera de centro O.	47
2.15	Triângulo esférico ABC e as retas tangentes I e N.	48
2.16	Medição do ângulo esférico.	48
2.17	Triângulos polares.	49
2.18	Triângulos polares ABC e A'B'C'.	49
2.19	Triângulos polares para o Teorema de Lagrange.	50
2.20	Fuso esférico A.	52
2.21	Área do triângulo esférico.	52
3.1	Teoremas sobre senos e cossenos esféricos.	55
3.2	Congruência de triângulos esféricos: Caso AAA.	62
3.3	Congruência de triângulos esféricos: Caso ALA.	63
3.4	Congruência de triângulos esféricos: Caso LLL.	64
3.5	Congruência de triângulos esféricos: Caso LAL.	65
3.6	Triângulo esférico retângulo.	68
4.1	Triângulo obliquângulo.	73
5.1	Polos geográficos.	90
5.2	Principais paralelos terrestres.	91
5.3	Coordenadas geográficas.	92
5.4	Triângulo terrestre.	93
5.5	UNESP e Observatório da UNIVAP.	95
5.6	Pontos A a Oeste e B a Leste.	97

5.7	Distâncias entre Rio Claro e algumas cidades estrangeiras ilustradas com Google Maps.	99
5.8	Esfera celeste.	100
5.9	Vertical/ Zênite e Nadir.	100
5.10	Esfera celeste e horizonte.	101
5.11	Horizontes.	102
5.12	Horizonte aparente.	102
5.13	Paralelos e meridianos celeste.	103
5.14	Meridiano local.	103
5.15	Círculos verticais e círculos de altura.	104
5.16	Sentido direto e retrógrado.	104
5.17	Coordenadas horizontais.	105
5.18	Relação entre coordenadas retilíneas e horizontais.	107
5.19	Eclíptica, solstícios e equinócios.	108
5.20	Coordenadas equatoriais.	109
5.21	Relação coordenadas retilíneas e equatoriais.	111
5.22	Coordenadas horizontais e equatoriais	111
5.23	Coordenadas eclípticas.	112
5.24	Relação coordenadas retilíneas e eclípticas.	114
5.25	Coordenadas horárias.	115
6.1	Hora sideral.	117
6.2	Comparação entre Sol verdadeiro e Sol médio.	119
6.3	Passagem completa do Sol verdadeiro.	119
6.4	Hora solar verdadeira.	120
6.5	Dia solar e dia sideral.	120
6.6	Fusos horários do mundo.	121
6.7	Movimento aparente dos astros.	124
6.8	Latitude e altura do polo celeste.	125
6.9	Cálculo da altura do polo.	126
7.1	Exemplos de triângulo de posição astronômico.	128
7.2	Triângulo de posição astronômico com $\phi > 0$ e $\delta > 0$	129
7.3	Triângulo de posição astronômico com $\phi < 0$ e $\delta < 0$	131
7.4	Triângulo de posição astronômico com $\phi < 0$ e $\delta > 0$	134
7.5	Triângulo de posição astronômico com $\phi > 0$ e $\delta < 0$	136
7.6	Estrelas circumpolares.	142
7.7	Azimute do nascer e ocaso do Sol em Rio Claro durante os solstícios.	143
7.8	Passagem de um astro pelo círculo das seis horas.	144
7.9	Passagem do astro pelo primeiro vertical.	146
7.10	Elongação de um astro.	148
7.11	Distância angular entre os astros A e B.	153
7.12	O Cruzeiro do Sul.	155

Lista de Tabelas

5.1	Latitudes e longitudes de alguns locais (Norte: N, Sul: S, Leste: E e Oeste: W)	94
5.2	Equinócios e solstícios no hemisfério norte e hemisfério sul.	108
5.3	Resumo do sistema de coordenadas	115

Sumário

Introdução	23
1 O Desenvolvimento da Geometria ao Longo da História Humana	27
1.1 As Geometrias não Euclidianas	28
1.2 A Geometria Esférica e os Navegantes Portugueses	30
1.3 Os Portugueses e a Determinação da Longitude	31
2 Geometria Esférica	37
2.1 Elementos Básicos da Geometria Esférica	37
2.2 Congruências de Triângulos Esféricos	42
2.3 Algumas Propriedades para Triângulos Esféricos	44
3 Trigonometria Esférica	55
3.1 Lei dos Senos e Cossenos Esféricos	55
3.2 Congruências de Triângulos Esféricos Revisitadas	61
3.3 Fórmulas dos Cinco Elementos	65
3.4 Propriedades nos Triângulos Esféricos Retângulos	67
4 Resolução de Triângulos Esféricos Obliquângulos	73
4.1 Fórmulas de Borda	73
4.1.1 1º Caso de Resolução de Triângulos Obliquângulos	74
4.1.2 2º Caso de Resolução de Triângulos Obliquângulos	76
4.2 Analogias de Delambre e de Napier	80
4.2.1 Fórmulas de Delambre	80
4.2.2 Fórmulas de Napier	84
4.2.3 3º Caso de Resolução de Triângulos Obliquângulos	86
4.2.4 4º Caso de Resolução de Triângulos Obliquângulos	87
4.2.5 5º Caso de Resolução de Triângulos Obliquângulos	87
4.2.6 6º Caso de Resolução de Triângulos Obliquângulos	88
5 Introdução à Astronomia de Posição	89
5.1 Geodésia	89
5.1.1 Modelo Esférico	89
5.1.2 Esfera e Triângulo Terrestre	90
5.1.3 Cálculo de Distâncias na Terra	93
5.2 A Esfera Celeste	99
5.3 Coordenadas Celestes	104
5.3.1 Coordenadas Horizontais	104

5.3.2	Coordenadas Equatoriais	107
5.3.3	Coordenadas Eclípticas	112
5.3.4	Coordenadas Horárias	114
5.3.5	Resumo dos Sistemas de Coordenadas	114
6	Medida do Tempo e Movimento Aparente	117
6.1	Generalidades sobre Medida do Tempo	117
6.1.1	Tempo Sideral	117
6.1.2	Tempo Solar	118
6.1.3	Fusos Horários	121
6.2	Generalidades sobre o Movimento Aparente	122
6.2.1	Altura do Polo em Relação ao Horizonte	125
7	O Triângulo de Posição Astronômico	127
7.1	Relações entre Distância Zenital, Ângulo Horário, Azimute e Declinação	128
7.2	Estudo Analítico do Movimento Diurno	138
7.2.1	Passagem de um Astro pelo Meridiano do Lugar	138
7.2.2	Passagem de um Astro pelo Horizonte	140
7.2.3	Passagem de um Astro pelo Círculo das Seis Horas	144
7.2.4	Passagem do Astro pelo Primeiro Vertical	146
7.2.5	Elongação	148
7.3	Distância Angular Entre Dois Astros	153
8	Considerações Finais	159
	Referências	161
A	Apêndice: Lema Auxiliar para o Teorema 3.4	165
B	Apêndice: Identidades da Trigonometria Plana	169

Introdução

Acredita-se que as especulações a respeito sobre a natureza do Universo existam desde os tempos pré-históricos. A busca por entender o que nos cerca sempre foi constante na vida do ser humano. Ante essas indagações, entender o formato do nosso planeta, os astros celestes, suas medidas, movimentos e distâncias em relação à Terra, fomentaram a busca de matemáticos e astrônomos Egípcios, Babilônicos e Gregos.

Por volta de 550 a.C, o matemático grego Tales de Mileto introduziu na Grécia os fundamentos da geometria e da astronomia egípcia. Acredita-se que ele, juntamente com seu discípulo Anaximandro (610-546 a.C), foram os primeiros a propor modelos celestes baseados no movimento dos astros, não mais aceitando este fato como consequência de ação dos deuses. Entre os matemáticos gregos da antiguidade que observaram e conjecturaram sobre a esfericidade da Terra e o movimento dos astros, podemos citar: Pitágoras (572-497 a.C), Filolaus de Cretona (470-390 a.C), Eudóxio de Cnidos (408-344 a.C), Aristóteles (384-322 a.C), Aristarco de Samos (310-230 a.C), Eratóstenes (276-194 a.C), Hiparco (160-125 a.C) e Ptolomeu (85-165 d.C).

Todos estes matemáticos foram responsáveis por fundamentar o movimento dos astros, a esfericidade terrestre, o comprimento do raio da Terra, explicaram as fases da Lua, conceitos que foram utilizados até o renascimento, no século XVI. Vale ressaltar que, durante a época desses matemáticos, a Matemática estava passando por um processo de formalização, ou seja, estava começando a ser apresentada de maneira formal com axiomas, lemas e teoremas.

Já assumindo a abordagem mais formal, podemos citar os trabalhos do matemático Euclides (300 a.C), em especial o seu “Os Elementos”. Dentre os axiomas propostos por Euclides, iremos abordar o quinto postulado e suas consequências. O quinto postulado de Euclides diz: “É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos”. Matemáticos da antiguidade e Idade Média (como: Proclus, Nasiredin, John Wallis) acreditavam que este postulado fosse na verdade um teorema e tentaram demonstrá-lo, porém não obtiveram sucesso.

O começo do século XIX encontrou os geômetras ainda na busca de uma “prova” para o quinto postulado de Euclides, porém sem sucesso. Mas, ao longo dessa busca de tantos séculos, frutos foram acumulados junto de um entendimento de novas Geometrias, denominadas não Euclidianas. Essas geometrias receberam esse nome pelo fato de não mais serem explicadas pelos fundamentos desenvolvidos por Euclides e, como ocorre frequentemente na Matemática, quando a descoberta de novas geometrias ocorreu, não foi feita por um único homem. Dentre os matemáticos envolvidos dessa época, pode-se destacar o húngaro Jano Bolyai (1802-1860), o russo Nikolai Lo-

bachevsky (1793-7856), o alemão Felix Klein (1849-1925) e o italiano Georg Friedrich Riemann (1826-1866). Essas geometrias foram denominadas por: Geometria Elíptica, Geometria Hiperbólica e Geometria Esférica.

Destacando a Geometria Esférica, esta foi imprescindível para o desenvolvimento da geografia de localização e para a navegação portuguesa. Essa navegação teve grande salto com a formalização da Geometria Esférica, fato que também ajudou a formalizar novos conceitos à prática. Interessantemente, antes mesmo da oficialização das novas geometrias, os gregos, na antiguidade, já utilizavam a Geometria Esférica intuitivamente para estudar Astronomia. Foi essa civilização que propôs o conceito de esfera celeste, iniciando os primeiros estudos em Astronomia de Posição (também conhecida como Astronomia Esférica), a qual diz respeito fundamentalmente às direções na qual os corpos celestes são vistos, sem se preocupar com sua distância.

Nesse contexto, este trabalho tem por objetivo fundamentar a teoria da Geometria Esférica, apresentando e demonstrando resultados, para, posteriormente, aplicá-los em Astronomia de Posição.

No primeiro Capítulo, apresentam-se detalhes históricos que levaram à descoberta e ao desenvolvimento da Geometria Esférica e sua aplicação na prática das navegações portuguesas. No segundo Capítulo, demonstram-se teoremas e proposições à respeito da Geometria Esférica. No terceiro Capítulo, encontram-se demonstrações de teoremas à respeito da Trigonometria Esférica. O quarto Capítulo está dedicado ao estudo da resolução de triângulos esféricos quaisquer, ainda no contexto da trigonometria. No quinto Capítulo, apresenta-se uma introdução à Astronomia de Posição e Geodésia. O sexto Capítulo aborda particularidades sobre medida do tempo e movimento aparente da esfera celeste. Finaliza-se o trabalho em seu sétimo Capítulo, onde estão aplicações dos conceitos estudados nos capítulos anteriores no estudo analítico do movimento diurno.

Como principais referências bibliográficas, no que diz respeito à Geometria e Trigonometria Esférica, foram utilizados os seguintes textos: Gamael (1948), Pedro (1955), Adames (2005), Oliveira e Saraiva (2013) e Caritá (2018). No que diz respeito à Astronomia de Posição, foram utilizados como base: Oliveira e Saraiva (2013), Boczko (1984), Lima-Neto (2020), Gamael (1948) e Pedro (1955). Eventualmente, outros textos foram utilizados e aparecerão citados ao longo da dissertação.

Objetivo Geral

Fundamentar a teoria da Geometria Esférica, apresentando e demonstrando resultados, para, posteriormente, aplicá-los em Astronomia de Posição.

Objetivos Específicos

- Contextualizar historicamente a Geometria Esférica;
- Definir elementos básicos da Geometria Esférica;
- Enunciar e demonstrar a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos, assim como teoremas oriundos destes;
- Demonstrar propriedades para triângulos esféricos retângulos e oblíquângulos;
- Definir elementos básicos da Astronomia de Posição;

- Aplicar o conteúdo matemático estudado à Astronomia de Posição, criando fórmulas úteis e solucionando problemas contextualizados.

1 O Desenvolvimento da Geometria ao Longo da História Humana

Os seres humanos nos primórdios, já percebiam a geometria existente na natureza, mas a consideravam apenas como uma forma de expressar as coisas do mundo ao redor. Segundo Eves (1992), pelas necessidades humanas, se passa a conjecturar formas geométricas simples como: retângulos, quadrados e triângulos, assim como conceitos de vertical, horizontal, paralelismo e perpendicularismo. Muito provavelmente, a observação para a concepção de curvas e círculos também possa ter ocorrido por meio da visualização do contorno do Sol, da Lua, das formas do arco-íris e das sementes de flores e frutos.

Com passar do tempo, o homem elevou a geometria “intuitiva” ao status de Ciência. Acredita-se que este fato ocorreu no antigo Egito. Quanto a isso, Heródoto do século V a.C. defendeu a seguinte tese:

“Eles diziam que este rei [Sesóstris] dividiria a terra entre os egípcios de modo a dar a cada um deles um lote quadrado de igual tamanho e impondo-lhes o pagamento de um tributo anual. Mas a qualquer homem despojado pelo rio de uma parte de sua terra teria de ir a Sesóstris e notificar-lhe o ocorrido. Ele então mandava homens observarem e medirem o quanto a terra se tornara menor, para que o proprietário pudesse pagar sobre o que restara, proporcionalmente ao tributo total. Dessa maneira parece-me que a geometria teve origem, sendo mais tarde levada até a Helade”. (EVES, 1992).

Observa-se então que a geometria passou de uma mera observação para uma geometria colocada em prática. Mas esta movimentação de construção de uma geometria de modo científico não se deu apenas no Egito. Ao redor dos principais rios que cercavam os povos antigos, a geometria se desenvolveu de maneira semelhante, na região dos rios Tigre e Eufrates, na Mesopotâmia, o Indo e o Ganges, na região centro-sul da Ásia, o Hwang Ho, e o Yangtzé na Ásia oriental.

O próximo passo para seu desenvolvimento foi a passagem da Geometria já considerada científica para a geometria demonstrativa. As mudanças econômicas e políticas dos últimos séculos do segundo milênio antes de Cristo fizeram com que o poder do Egito e da Babilônia diminuíssem. A partir disso, os gregos passaram a ser protagonistas de uma nova maneira de estudar a geometria. Eles acreditavam que não cabia mais somente uma geometria empírica e assim a geometria sofreu uma transição.

As principais fontes de informação acerca da geometria descritiva grega não datam exatamente de sua época de produção. A principal fonte a qual se tem acesso é chamado

de sumário Eumediano de Proclus, no qual há vários comentários sobre o trabalho desenvolvido pelo matemático Euclides. Vale ressaltar que Proclus viveu no século V d.C., mais de um milênio depois do início da geometria grega.

Pode-se destacar três grandes geômetras gregos: Euclides, Arquimedes e Apolônio (235 a.C.). Eles também foram responsáveis por fornecer uma nova maneira ao discurso da matemática descritiva pelo desenvolvimento da axiomática formal.

Dos trabalhos performados pelos matemáticos citados acima, o que mais se destaca foi intitulado “Os Elementos”, escrito por Euclides. Segundo Eves (1992), apesar dos matemáticos modernos darem ênfase ao trabalho que foi desenvolvido por Euclides, os trabalhos escritos por Arquimedes e Apolônio não possuem menor importância. Estes trabalhos se completam e fornecem uma boa base geométrica, amplamente utilizada hoje. Arquimedes, em um dos seus trabalhos de geometria sólida, escreveu pela primeira vez as fórmulas para as áreas da superfície e da calota esférica, assim como a fórmula para o cálculo do volume da esfera. Por sua vez, Apolônio foi um astrônomo de méritos, desenvolvendo estudos em vários temas matemáticos e adquiriu fama pelos estudos das Seções Cônicas. Também merecem menção: Menelau (100 d.C), Cláudio Ptolomeu (85-165 d.C) e Pappus (320 d.C.), que continuaram o trabalho dos anteriores. Nas seções a seguir se encontram uma breve história sobre o estudo das Geometrias não euclidianas.

1.1 As Geometrias não Euclidianas

Este novo campo da geometria se deu devido as tentativas de deduzir o postulado das paralelas de Euclides, que está contido em seu livro “Os Elementos”. Muitos matemáticos propuseram a negação deste postulado, possibilitando a criação de novas Geometrias. Dentre estes matemáticos, daremos destaque ao húngaro Jano Bolyai (1802-1860), ao russo Nikolai Lobachevsky (1793-1856), ao alemão Felix Klein (1849-1925) e ao italiano Georg Friedrich Riemann (1826-1866).

Essas novas Geometrias foram nomeadas em 1871 pelo matemático Klein: Geometria Hiperbólica, Geometria Parabólica e Geometria Elíptica.

O postulado das paralelas de Euclides tinha suas limitações, por exemplo, ele deixava de ser útil quando se tratava de determinar a posição da mais distante nebulosa da constelação da Ursa Maior. Então, para aperfeiçoar o métodos de medir distâncias inacessíveis por meio de ângulos e distâncias desconhecidas, observou-se que era necessário o estudo do “elemento” chamado círculo.

A navegação sem “terra à vista” só foi possível quando os homens passaram a se orientar pela posição das estrelas. Um fato histórico que Hogben (1970) traz é que foram os fenícios que transformaram a estrela Polar na estrela Polar dos marinheiros. Os fenícios também popularizaram o uso do calendário. Naquela época, os homens já utilizavam a latitude e a longitude, porém, não havia ainda a representação em mapas devido a superfície esférica da Terra.

Acredita-se que a crença da esfericidade da Terra seja bem mais antiga do que se pensa. De acordo com Hawking (2005), os matemáticos Aristóteles (384-322 a.C.) e Ptolomeu (87-150 a.C.) já incorporavam em suas deduções que a Terra era uma esfera e não um plano. De acordo com os estudos de Aristóteles, durante eclipses lunares, a sombra na Lua era sempre redonda e ao observar um navio se afastando oceano adentro, o casco desaparecia antes das velas. Com isso Aristóteles conjecturou que a Terra era de fato esférica. Da mesma forma, após sua morte, Ptolomeu continuou

os estudos do modelo de universo que predizia com mais precisão os movimentos dos astros. Hogben (1970) também disserta que Pitágoras (570-495 a.C.) já falava sobre este conceito em seus ensinamentos, assim como Demócrito (460-370 a.C.).

No século XIX, o naturalista A.R. Wallace (1823-1913), nome associado ao de Darwin, sugeriu o seguinte método para medir o raio da circunferência da Terra:

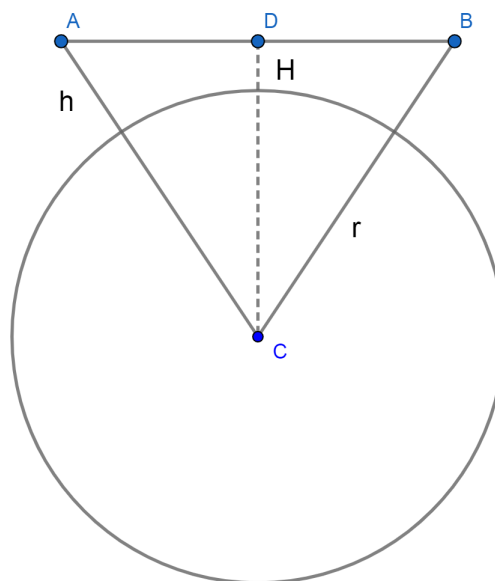
“Com as extremidades superiores A e B, separadas por uma distância medida AB num canal reto, são fincadas no solo até ficarem ambas à mesma altura h sobre o nível das águas. Exatamente a meio das duas estacas, finca-se uma terceira de maneira que sua extremidade superior D, fique sobre a linha de visão de A para B. Como a superfície da Terra é, pois, a das águas do canal é de fato encurvada, a altura H de D sobre o nível das águas será um pouco menor que h ” (HOGBEN, 1970).

Verifiquemos este método de A. R. Wallace sobre a possibilidade de se calcular o raio da Terra. Para isso, precisaremos dos seguintes resultados:

1. Se dois lados de um triângulo são congruentes, os ângulos que lhes são opostos também são; e, se dois ângulos são congruentes os lados opostos também são;
2. O quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma dos quadrados dos catetos.

A Figura 1.1 exhibe os dois pontos A e B como extremos superiores de duas estacas de altura h fincadas verticalmente na Terra, que possui raio r . O ponto D é o extremo superior de uma estaca, com altura H , localizada exatamente no meio do caminho das duas estacas anteriores, também fincada verticalmente, de modo que ADB estejam alinhados.

Figura 1.1: Como calcular o raio da Terra segundo Wallace (1823-1913).



Fonte: A autora.

Matematicamente, pode-se expressar que:

$$AC = r + h = BC$$

O triângulo ABC é um triângulo isósceles, então $AD = \frac{1}{2}AB = DB$.

Assim, CD é perpendicular a AB e DBC é um triângulo retângulo. Então:

$$DB^2 + DC^2 = BC^2$$

$$DB^2 + (r + H)^2 = (r + h)^2$$

$$DB^2 + r^2 + 2rH + H^2 = r^2 + 2rh + h^2$$

$$DB^2 + H^2 - h^2 = 2rh - 2rH$$

$$DB^2 + H^2 - h^2 = 2r(h - H)$$

$$r = \frac{DB^2 + H^2 - h^2}{2(h - H)}$$

Como a distância de DB é muito grande comparada a altura das estacas, pode-se aproximar r desprezando o termo $H^2 - h^2$. Então:

$$r = \frac{\frac{1}{2}DB^2}{h - H} = \frac{\frac{1}{8}AB^2}{h - H}$$

Perceba que é possível calcular o raio da Terra apenas utilizando elementos dos quais se conhecem as dimensões. Logo, no século XIX, existiam possibilidades de cálculos com a geometria esférica da Terra.

Com essa breve discussão acerca da origem da Geometria Esférica e como os homens a usavam intuitivamente, a seguinte pergunta pode, então, surgir: Como a Geometria Esférica foi importante para os navegantes e como essa se desenvolveu até os dias de hoje?

1.2 A Geometria Esférica e os Navegantes Portugueses

De acordo com Penteadó (2011), os portugueses no século XVI veneravam toda a matemática e manuscritos desenvolvidos na antiguidade, mesmo assim, isso não os impedia de criticar e melhorar estas obras diante dos novos problemas que teriam que solucionar. O português Pedro Nunes (1502-1578) desenvolveu seus trabalhos sobre navegação e cartas náuticas observando detalhadamente as verdades dos escritos da Antiguidade Clássica. Esta foi uma característica dos renascentistas portugueses ligados à cultura dos descobrimentos. Pedro Nunes não era navegador, mas realizou leituras das obras clássicas de Aristóteles, Arquimedes (287-212 a.C.), Copérnico (1473-1543), Ptolomeu, Euclides, Paccioli (1445-1517), Vitruvius (séc I a.C) e as melhorou. Também traduziu o “Tratado da Esfera” do autor Johannes de Sacrobosco (1195-1256), sobre o qual discutiremos mais a frente.

Segundo Albuquerque (1987), alguns navegantes da época levavam consigo conhecimentos obtidos com os textos clássicos. Porém, empiricamente percebiam que haviam algumas contradições e fatos que na realidade não funcionavam como esperado. Assim,

os homens passaram a ter necessidade de rever conhecimentos geográficos, matemáticos e astronômicos das obras da Antiguidade Clássica, e esta revisão se desenvolveria à luz da experiência e experimentação.

Nos séculos XV e XVI, os portugueses não possuíam os mesmos conhecimentos matemáticos já disseminados em toda a Europa, caso que se observa, por exemplo, no fato dos algarismos hindu-arábicos serem utilizados na maioria dos países da Europa no século XII e, em Portugal isso apenas ocorreu a partir do século XV (MARCOLIN, 2013). Ubiratan D’ambrosio¹ justifica esse fato devido ao país ter se fechado após a expulsão dos invasores mouros no século XII.

Sabe-se que a navegação na época dos descobrimentos dependia basicamente de conhecimentos astronômicos e estes, por sua vez, eram fundados na matemática. Assim, de acordo com Marcolin (2013), os portugueses e os espanhóis praticavam neste período a aritmética, a geometria e a astronomia ainda desenvolvida na antiguidade.

Mesmo ante os desafios da falta de tecnologias mais avançadas para aquele período histórico, os portugueses conseguiram ser bem-sucedidos graças a Dom Henrique no século XV, que foi o patrono dos descobrimentos, ao desenvolver técnicas e tecnologias marítimas na região de Sagres. D’ambrosio diz que “o desenvolvimento da caravela, navio estável, ágil, rápido e mortífero, foi um grande avanço tecnológico”.

Perante à lista de conquistas portuguesas, podemos citar: Ceuta foi conquistada em 1415, Gil Eanes superou o cabo Bojada em 1434, Bartolomeu Dias dobrou o cabo da Boa Esperança em 1488, Vasco da Gama abriu caminho para as Índias em 1499, Pedro Álvares Cabral chegou ao Brasil em 1500 e Fernão Dias descobriu passagem para o oceano Pacífico em 1520.

De acordo com Marcolin (2013), mesmo sem conhecimento matemático avançado, os portugueses romperam barreiras devido ao conhecimento empírico, pois entre os navegantes alguns conheciam astronomia, outros sabiam calcular distâncias e outros entendiam de cartografia².

A troca de informações científicas entre os reinos era difícil nesse momento de Portugal, porém ainda atraía algumas personalidades importantes como: em 1475, Colombo e seu irmão Bartolomeu Colombo tiveram um encontro em Lisboa; em 1480 o alemão Martín Beháim (1459-1507) foi à região portuguesa e introduziu a trigonometria no país. Beháim, em 1492, ao retornar para Nuremberg, sua cidade de origem, apresentou o Erdapfel, o primeiro globo terrestre conhecido.

Dadas as devidas apresentações, podemos discorrer e conjecturar a respeito de como a astronomia e a matemática foram de fato aplicadas nas navegações portuguesas.

1.3 Os Portugueses e a Determinação da Longitude

Comandados pelo infante Dom Henrique, os portugueses adaptaram inicialmente processos de navegação utilizados para navegar pelo Mediterrâneo. Esta técnica era chamada de rumo e estima e usava a longitude do lugar pela altura do meridiano do Sol ou de outras estrelas.

¹vide: Entrevista de Ubiratan D’ambrosio. Revista Fapesp. “O rei dos Mares” disponível em <http://revistapesquisa.fapesp.br/2013/10/17/os-reis-dos-mares/>. Acessado 27/04/2019

²conjunto de estudos e operações científicas, técnicas e artísticas que orienta os trabalhos de elaboração de cartas geográficas/ descrição ou tratado sobre mapas. Dicionário Google. Acessado 01/05/2019.

Pereira (2014) define latitude e longitude da seguinte maneira³: a latitude é definida dependente da superfície de referência utilizada e longitude é medida em graus, de zero a 180° para Leste ou para Oeste, a partir do Meridiano de Greenwich, e não há uma posição natural para marcar a longitude. Latitude é o ângulo entre o plano do equador e a superfície de referência. A Latitude mede-se para Norte e para Sul do Equador, entre 90° sul, no Polo Sul e 90° norte, no Polo Norte. A Latitude pode ser facilmente determinada a partir da Estrela Polar. A Estrela Polar⁴ tem esse nome porque é a única que permanece sempre fixa no firmamento num ponto coincidente com a projeção do eixo da Terra.

Estes conceitos acima são necessários para se entender o pensamento dos navegantes na resolução do problema de definir a longitude no século XV e XVI. Canas (1995) cita em seu trabalho que a coordenada geográfica longitude era uma das mais difíceis de serem determinadas, pois era preciso informação rigorosa a respeito do horário local, o que implicava técnicas de relojoaria mais sofisticadas, que até então não existiam.

Ante todas as dificuldades de navegação sem terra à vista, o padre Jesuíta Cristovão Bruno escreveu, em 1628, a obra “A arte de navegar”. Padre Bruno era italiano de origem, porém viveu em Portugal, onde lecionou nos colégios de Coimbra e Santo Antão da Companhia de Jesus. Além desta obra, Bruno escreveu mais dois trabalhos dedicados à navegação: “Regimento que P.e. Cristovão Bruno da Companhia de Jesus, por ordem de S.M. dá aos pilotos das naus⁵ da Índia para fazerem a experiência sobre a invenção de leste ao oeste” e “Tratado da arte de navegar pelo R. do P.E. Cristovão Bruno da Companhia de Jesus”. Não se tem certeza sobre a sua ligação com o mar e a marinha, também não há relatos sobre quais funções possa ter desempenhado a bordo.

A obra “A Arte de Navegar”, escrita por padre Bruno, é dividida em duas partes, sendo que a primeira fala “Dos princípios e fundamentos comuns a toda a arte de navegar” e a segunda é sobre “Caminho do Leste a Oeste” (CANAS, 1995).

Focaremos apenas na segunda parte, dado o objetivo da reflexão aqui exercitada. Esta segunda parte ainda foi subdividida em dois tratados.

O primeiro tratado explica o que é a longitude e problemas existentes à sua determinação: “É de quanta importância seja esta ciência, e quão útil para toda a navegação e em particular os pilotos pretenderão, ainda que de balde, descobrir algum modo para saberem esta distância de Leste a Oeste” (CANAS, 1995). Ao iniciar seus pensamentos para sanar os problemas da longitude, Bruno primeiramente apontou os erros mais frequentes cometidos pelos navegantes em seus cálculos. Em sua primeira elucidação, utilizando resultados geométricos já conhecidos, a semelhança de arcos entre dois pontos da esfera celeste, concluiu que havendo a estrela Polar como ponto fixo facilmente se determina o meridiano no lugar, ou seja, a direção Norte-Sul. Porém, o problema da determinação da longitude persistia, pois não existe um “ponto fixo” a Leste ou Oeste. Padre Bruno completa ainda:

“Se vê que havendo no céu algum ponto fixo de Leste a Oeste
facilmente se saberá o seu comprimento e por falta dele nos falta

³Baseado num contexto atual da Geografia, sabendo que o meridiano de Greenwich não havia sido nomeado no século XV.

⁴A Estrela Polar destaca-se no céu no Hemisfério Norte da Terra, a partir do Hemisfério Sul pode-se utilizar o Cruzeiro do Sul como referência no céu.

⁵Denominação genérica dada a navios de grande porte com capacidade de 200 pessoas até o século XV usados em viagens de grande percurso.

esta ciência, pois todos os planetas e estrelas continuamente se movem de Leste para Oeste”. (CANAS, 1995).

O problema em questão era o erro dos cálculos de rumo e estima quando o ponto de chegada eram rumos afastados do Norte ou do Sul.

O segundo erro apontado por Cristovão Bruno derivava do fato de se estimar a altura do Sol. O erro era pequeno, porém quando somado a observação de outros astros que eram necessários em uma viagem náutica, os rumos ficavam fora de seu objetivo de chegada a Leste ou a Oeste. Outro fator citado por Bruno é o fato de se perder a precisão na planificação das cartas de navegar, dado que a Terra é esférica, o que também acarretava em novos erros de cálculos. Com todas essas indagações a respeito dos erros cometidos, no segundo tratado, Bruno explica e exemplifica diversos métodos para a determinação da longitude.

O primeiro método para determinar a longitude era por meio dos eclipses lunares. Esse método consistia em, a partir da observação dos eclipses da Lua, dado que ocorrem ao mesmo tempo em qualquer lugar da Terra, poderia se calcular a diferença de horários entre dois pontos diferentes. Na prática, tornava-se necessário uma tabela contendo dados de eclipses. Outro fator necessário era estimar a hora, e para esse problema, Bruno aconselhou utilização do Globo terrestre criado por Tycho Brahe (1546-1601). Este globo possuía um círculo horário em torno do Pólo e era dividido em vinte e quatro horas. Outra forma para estimar a hora seria pelo astrolábio⁶. Cristovão Bruno ainda aconselha que para determinação da altura das estrelas não seja utilizado a balestilha⁷. É proposto para obtenção de alturas, a utilização de um quadrante⁸, no qual possa se fixar a altura quando bem apontado, sendo este o método mais seguro para determinar tal medida.

O segundo método para determinar a longitude utilizava um relógio. Poderia ser relógio de areia (ampulheta) ou até um relógio d'água.

“Uma das hipóteses apresentadas consistia em utilizar um relógio de areia que medisse uma hora. Tirava-se a altura do Sol, navegava-se essa hora, indicada pelo relógio, após o que se tirava novamente a altura. A diferença entre a altura observada é quinze graus, o que seria o que o Sol tinha variado, era a diferença de longitude” (CANAS, 1995).

Porém o método de utilizar a observação do Sol em uma hora também tinha suas falhas, pois havia casos que o Sol não variava quinze graus em uma hora. Outro problema observado era a precisão dos relógios afetada pelo balanço do mar e pelo material utilizado em sua construção. No caso da areia, observou-se que nos primeiros minutos ela caía mais rápido, pelo fato da quantidade de areia existente na parte superior do recipiente ser grande e exercer maior pressão. No caso da água, devido as variações

⁶Instrumento náutico antigo, em forma esférica ou de círculo graduado, com haste móvel, usado para observar e determinar a altura do Sol e das estrelas e medir a latitude e a longitude do lugar onde se encontra o observador [Usado pelos gregos desde 200 a.C.]. Disponível em dicionário Google. Acessado 01/05/2019.

⁷Instrumento usado pelos navegadores para medir a altura dos astros. Disponível em dicionário Google. Acessado 01/05/2019.

⁸O quadrante é na sua forma mais rudimentar, e tal como o nome indica, um instrumento que consiste num quarto de círculo graduado ao qual está fixo um fio de prumo. Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Quadrante>. Acessado 01/05/2019.

de temperatura, ela também poderia variar de quantidade dentro do recipiente. O objetivo deste método era que, por meio da diferença de horas entre o local de partida e o de chegada, fosse inferida a diferença de longitude.

No terceiro e último método, Cristovão Bruno sugere o uso das retardações da Lua. Por meio das fases da Lua e da posição relativa entre a Lua e o Sol, percebe-se que, em cada uma das suas fases, a Lua vai se “atrasando” quatro quintos de hora diários. O Sol, por outro lado, também sofre movimento de retardação, cerca de um grau por dia. Para determinar a longitude por este método, era necessária uma tabela da diferença das distâncias entre o Sol e a Lua. Para determinar a longitude, era necessário observar a hora em que o Sol se põe e compará-la com a tabela. Se o valor observado for menor que o tabelado, estará o barco mais a Leste. Se o valor for maior, mais a Oeste. Os possíveis erros observados nesse método foram os erros de paralaxe⁹ e da refração dos astros, que podiam enganar o observador em suas medições. Canas (1995) ainda cita em seu texto que os gregos tinham noção que a diferença da longitude podia ser calculada pela diferença de horários entre dois locais. Apesar dos conselhos e sugestões de Cristovão Bruno, o problema de determinar com rigor a diferença entre horários locais permaneceu, o que acarretou na permanência da dificuldade para determinar a longitude até o século XVIII.

Dentre os materiais disponíveis aos portugueses na era das navegações ainda podemos citar “O Tratado da Esfera”, traduzido por Pedro Nunes para o português e contendo seus comentários acerca dos temas ali tratados. A obra, originalmente escrita por Sacrobosco, foi uma das obras sobre astronomia mais difundidas em toda Europa no século XII, segundo Penteado (2011). Essa era dividida em quatro capítulos, sendo que o primeiro trata da forma da Terra (esfera, centro e eixo), o segundo “círculos dos quais se compõe a esfera material” (PENTEADO, 2011), o terceiro descreve o movimento dos astros e a influência do clima e o último capítulo “os círculos e movimentos dos planetas, e sobre as causas dos eclipses” (PENTEADO, 2011). A obra compunha o estudo do *quadrivium* (estudo da Música, Aritmética, Astronomia e Geometria) e abordava o tema de navegação e astronomia sob um olhar matemático, de forma que pudessem ser colocados em prática pelos marinheiros. Pedro Nunes tinha a preocupação de fazer uma exposição cuidadosa para que todos pudessem entender claramente suas obras. Ante a tradução, Nunes criticava a obra e a aperfeiçoava:

“Vendo eu que o Tratado da Esfera e a Teoria do Sol e da Lua, com o primeiro livro de Geografia de Ptolomeu são aqueles princípios que deve ter qualquer pessoa que deseja saber alguma coisa de Cosmografia. Por carecerem disso os que não sabem latim os tirei em nossa linguagem. Acrescentei-lhes algumas anotações para que se pudesse entender mais facilmente. No final coloquei uns tratados que compus sobre a carta de marear e o regimento da altura, porque não sou tão confiado de minhas coisas que acreditasse que por si queriam vê-las, e indo nesta companhia alguma hora por acerto se abrirá o livro neles”. (PENTEADO, 2011)

As obras de Cristovão Bruno e Pedro Nunes ambas foram voltadas à determinação

⁹Desvio aparente da agulha de um instrumento de medida, quando não observada de uma direção vertical a ela. Disponível em dicionário Google. Acessado dia 11/11/2019.

da longitude e latitude, nas quais podia-se encontrar sugestões para a resolução desse problema¹⁰.

A necessidade de determinar a longitude vinha de longa data, desde 1494, tendo a primeira referência feita em 1505 em “*Esmeraldo de Situ Orbis* de Pacheco Pereira” (CANAS, 1995). Todas as indagações surgiram com a assinatura do Tratado de Tordeilhas. O texto do tratado previa um prazo de dez meses para determinar um meridiano que dividisse o mundo em duas zonas de influência. Canas (1995) ainda complementa que, pelo fato de existir grandes dificuldades para obtenção da longitude, havia prêmios em dinheiro a quem solucionasse tal problema e talvez este tenha sido o que motivou Bruno a escrever seu tratado.

Enfim, o problema da determinação de uma localização de forma mais precisa apenas foi solucionado no século XVIII com o modelo nº 4 de John Harrison (1693-1776), que numa viagem de nove semanas à Jamaica apenas se atrasou cinco segundos. Tudo se resolveu com a tecnologia do cronometro de Harrison (que era relojoeiro), com o qual se tornou possível conhecer duas coordenadas de qualquer local. Mesmo após a criação de tantos recursos para a localização, ainda não havia ferramentas que funcionavam para todas (ou a maioria) das condições climáticas.

Com os avanços das ondas de rádio e a corrida espacial entre a União Soviética e o Estados Unidos, foram lançados os primeiros satélites na órbita do planeta. Logo, esse movimento possibilitou as primeiras pesquisas para desenvolver um software de localização para uso militar chamado NAVSTAR/GPS (*Navigation Satellite with time Ranging/ Global Position System*), sendo a autoria atribuída a três americanos: o astrofísico Ivan Getting, o engenheiro Bradford Parkinson e o físico Roger L. Easton. Tal tecnologia, posteriormente, foi aberta a civis. Hoje, o GPS trata-se de um conjunto de 24 satélites orbitando a Terra, a uma altura aproximada de 20.200 km acima do nível do mar, permitindo a receptores conhecerem sua posição em qualquer lugar sobre a Terra com muita precisão. O sistema de GPS é dividido em três segmentos: os Satélites, as Estações de Gerenciamento e os aparelhos utilizados pelos usuários (PEREIRA, 2014).

As estações são localizadas estrategicamente nas proximidades da linha do Equador, no Colorado (EUA), Havaí (no Pacífico), Kwajalein (Ilhas Marshal, no Pacífico), Ilha de Ascensão (no Atlântico Sul) e Ilha de Diego Garcia (no Índico). As estações rastreiam, calibram e sincronizam os relógios dos satélites. Para uma maior qualidade dos dados e sua precisão lança-se mão de um terceiro segmento: o usuário, pois desse depende da qualidade do software de processamento do receptor usado e da antena.

¹⁰Vide: Penteadó (2011) para detalhes de resoluções propostas.

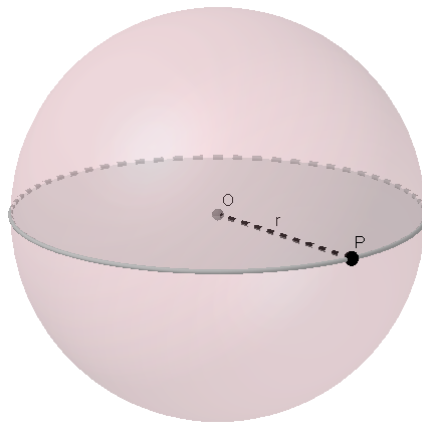
2 Geometria Esférica

A Geometria Esférica é uma geometria (não Euclidiana) estabelecida sob a superfície de uma esfera. Por sua vez, a Trigonometria Esférica é uma ramificação desta geometria, na qual são estudados triângulos e ângulos esféricos com os teoremas que os relacionam. Este ramo da Matemática possui grande aplicabilidade em Geodésia e Astronomia. Ressalta-se que, no presente texto, supõe-se que o leitor tenha conhecimentos prévios da Geometria Euclidiana plana e espacial.

2.1 Elementos Básicos da Geometria Esférica

Definição 2.1. (*Esfera*) - Considere O um ponto e r um número real positivo. Chama-se esfera (ou superfície esférica) o lugar geométrico dos pontos P do espaço, cujas distâncias a O são iguais a r . Denomina-se o ponto O como o centro da esfera. Observe a Figura 2.1.

Figura 2.1: Superfície esférica.



Fonte: A autora.

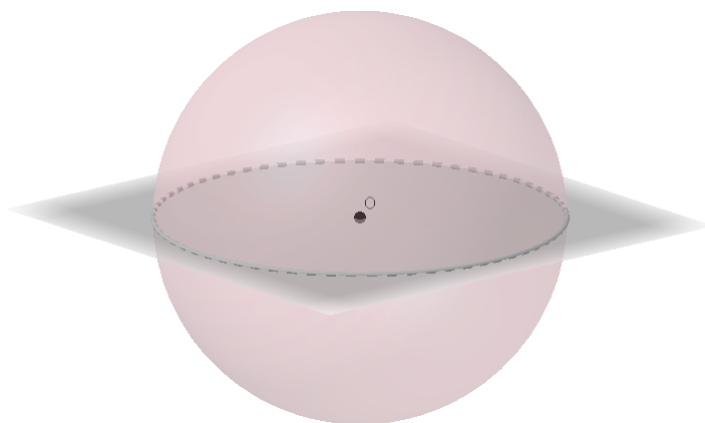
Proposição 2.2. *A interseção de uma superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é uma circunferência de mesmo centro e raio da superfície esférica.*

Demonstração. Considere S uma superfície esférica de centro O e raio $r > 0$ e Θ um plano contendo O .

A interseção entre o plano Θ e a superfície esférica S é o conjunto de pontos de Θ que distam r de O . Portanto é uma circunferência, contida em Θ , com centro em O e raio r . \square

Definição 2.3. (*Círculo Máximo*) - Circunferências obtidas de acordo com a Proposição 2.2 são denominadas círculos máximos. Observe a Figura 2.2.

Figura 2.2: Círculo máximo.

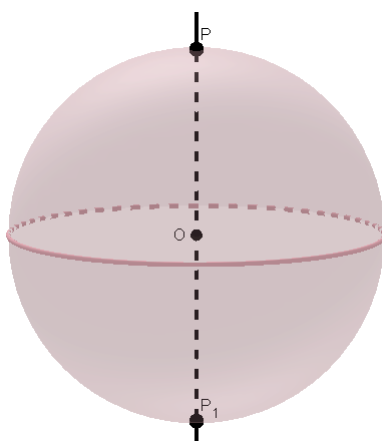


Fonte: A autora.

Definição 2.4. (*Eixo da Esfera*) - Considere uma esfera com centro O . Chama-se eixo da esfera qualquer reta que passa por O .

Definição 2.5. (*Pontos Diametralmente Opostos*) - Os dois pontos oriundos da intersecção de um eixo com a esfera são chamados diametralmente opostos (ou antípodas). Observe a Figura 2.3.

Figura 2.3: Eixo e pontos diametralmente opostos (antípodas).



Fonte: A autora.

Proposição 2.6. Por dois pontos dados sobre uma esfera sempre passa um círculo máximo. Se estes pontos não forem antípodas este círculo máximo é único.

Demonstração. Considere dois pontos P e Q quaisquer e distintos sobre uma esfera de centro O.

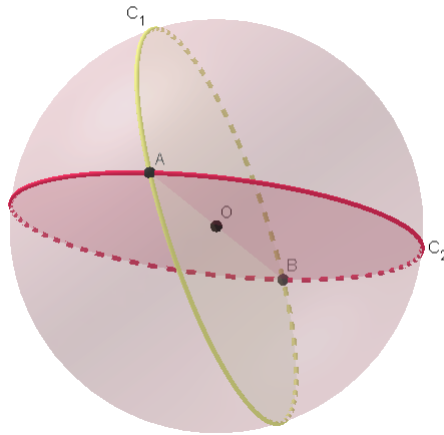
Se P e Q não são antípodas, então os pontos P, Q e O não são colineares e definem um único plano que, interseccionado com a esfera, produz um único círculo máximo.

No caso de P e Q antípodas, os pontos P, Q e O são colineares e podem pertencer simultaneamente a infinitos planos, produzindo infinitas possibilidades de círculos máximos.

Portanto, sempre passa pelo menos um círculo máximo por dois pontos distintos dados em uma esfera. \square

Proposição 2.7. *Dois círculos máximos de uma esfera cortam-se mutuamente em duas partes iguais.*

Figura 2.4: Círculos máximos de uma esfera cortando-se mutuamente.



Fonte: A autora.

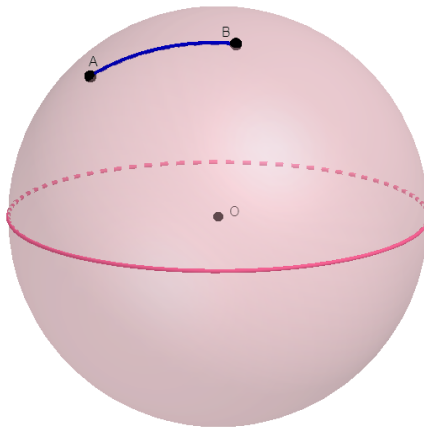
Demonstração. Considere dois círculos máximos C_1 e C_2 em uma esfera de centro O e raio r. Sejam A e B os dois pontos produzidos pela interseção entre C_1 e C_2 . Observe a Figura 2.4.

O segmento \overline{OA} é igual a r, da mesma forma o segmento \overline{OB} também é igual a r.

Logo, $\overline{OA} + \overline{OB} = 2r$ e percebemos que A, O e B estão alinhados. Sabendo que $2r$ é o diâmetro dos círculos máximos dessa esfera, segue que o arco de círculo máximo \widehat{AB} equivale a metade dos círculos máximos C_1 e C_2 . \square

Definição 2.8. (*Distância Esférica*) - A distância entre os pontos A e B de uma esfera é o comprimento do menor arco do círculo máximo que passa por esses pontos. Observe a Figura 2.5.

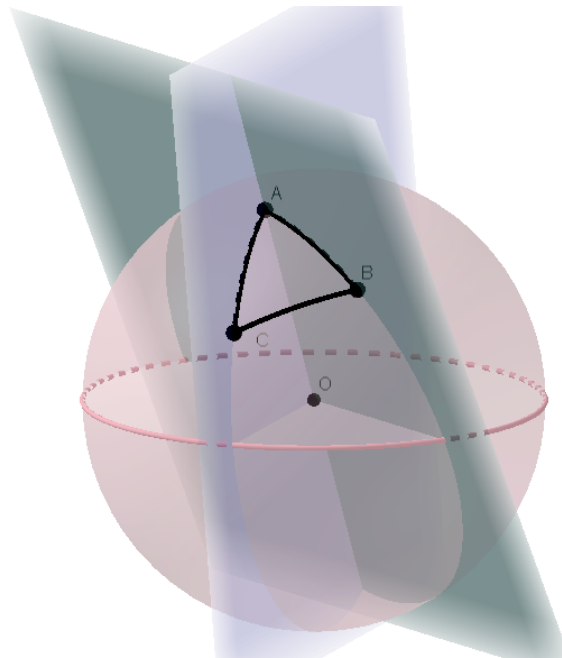
Figura 2.5: Distância esférica.



Fonte: A autora.

Definição 2.9. (*Ângulo Esférico*) - Ângulo esférico é o ângulo formado por dois arcos de círculos máximos com uma extremidade em comum. Sua medida é a mesma do ângulo euclidiano formado pelo diedro definido pelos dois planos que contém esses arcos. Observe a Figura 2.6.

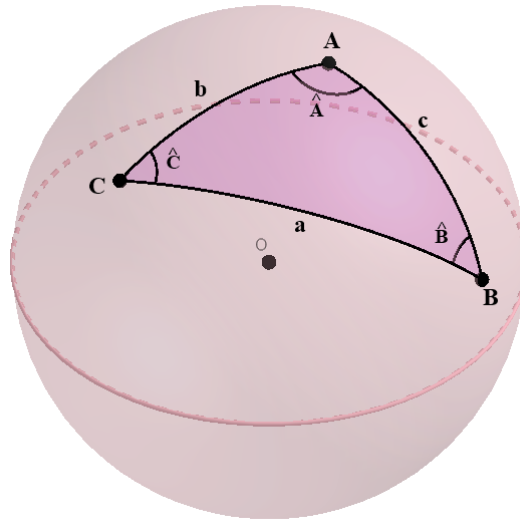
Figura 2.6: Ângulo esférico.



Fonte: A autora.

Definição 2.10. (*Triângulo Esférico*) - Em uma superfície esférica, três pontos não pertencentes a um mesmo círculo máximo, ligados pelos arcos de círculos máximos que definem suas distâncias, determinam um triângulo esférico. Tais pontos são denominados vértices do triângulo esférico. Observe a Figura. 2.7.

Figura 2.7: Triângulo esférico.



Fonte: A autora.

Observação 2.11. Perceba que pelas Definições 2.8, 2.9 e 2.10, os lados e os ângulos internos de um triângulo esférico ABC sempre satisfazem: $0^\circ < a < 180^\circ$, $0^\circ < b < 180^\circ$, $0^\circ < c < 180^\circ$, $0^\circ < \hat{A} < 180^\circ$, $0^\circ < \hat{B} < 180^\circ$ e $0^\circ < \hat{C} < 180^\circ$.

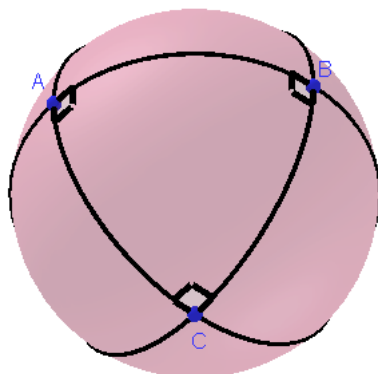
Vale ressaltar que os elementos de um triângulo esférico são os mesmos de um triângulo no plano: três vértices, três lados e três ângulos internos.

Diferentemente de um triângulo no plano, a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que 180° , logo podemos classificá-lo em relação aos seus ângulos como:

- Acutângulo (três ângulos agudos);
- Retângulo (um ângulo reto);
- Bi-Retângulo (dois ângulos retos);
- Tri-Retângulo (três ângulos retos); e
- Obtusângulo (três ângulos obtusos).

Veja na Figura 2.8 um triângulo esférico tri-retângulo, o qual corresponde a $\frac{1}{8}$ da esfera.

Figura 2.8: Triângulo esférico tri-retângulo.



Fonte: A autora.

Quanto à classificação em relação ao tamanho dos seus lados, o triângulo no plano e o triângulo esférico são nomeados da mesma forma: Escaleno, Isósceles e Equilátero. Outro fato sobre os lados de um triângulo esférico é que estes são medidos em ângulos. O que permite dizer que um lado mede x graus. Desta forma pode-se ainda classificar os triângulos esféricos como retiláteros, bi-retiláteros e tri-retiláteros, conforme tenha um, dois, ou três lados iguais a 90° , respectivamente.

A seguir algumas propriedades do Triângulo Esférico:

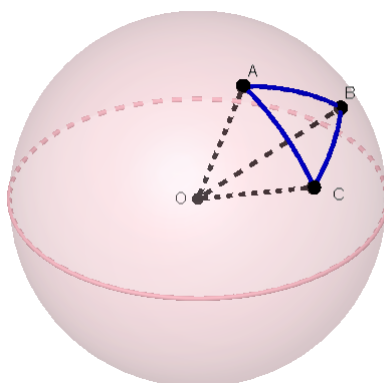
1. Num triângulo esférico um lado é menor que a soma dos outros dois e maior que a sua diferença.
2. O maior ângulo de um triângulo esférico se opõe ao maior lado de mesma medida.
3. Num triângulo esférico isósceles os ângulos opostos aos lados iguais são iguais.
4. Todo triângulo esférico equilátero é equiângulo e todo equiângulo é equilátero.
5. A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que 180° e menor que 540° .
6. A soma dos três lados de um triângulo esférico é menor que 360° .

Neste trabalho, estarão a prova de algumas dessas propriedades. Todavia, para isso, previamente é necessário algumas definições e resultados. A partir deste momento, ao longo do texto, considere a esfera com raio unitário.

2.2 Congruências de Triângulos Esféricos

Seja uma esfera com centro O e um triângulo esférico com vértices A , B e C sobre essa esfera. Considere o triedro definido pelas semirretas \vec{OA} , \vec{OB} e \vec{OC} .

Figura 2.9: Triângulo esférico e seu triedro correspondente.



Fonte: A autora.

Os ângulos planos (ângulos triédricos) \widehat{AOB} , \widehat{AOC} e \widehat{BOC} têm a mesma medida que os lados que lhes correspondem no triângulo esférico. Os ângulos diedros do triedro entre os planos AOB com AOC, AOB com BOC e AOC com BOC têm a mesma medida que os ângulos esféricos \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} , respectivamente conforme a Figura 2.9.

Sabe-se da Geometria Espacial que dois triedros são congruentes quando os ângulos planos e o ângulos diedros de um deles são respectivamente iguais aos ângulos planos e aos ângulos diedros do outro e dispostos na mesma ordem. Se os elementos iguais do segundo forem dispostos em ordem inversa, os dois diedros são simétricos.

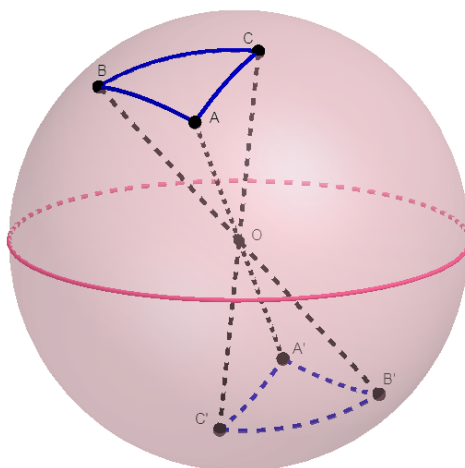
Baseado nisto, segue a seguinte definição para congruência de triângulos esféricos:

Definição 2.12. (*Triângulos Congruentes*) - Os triângulos esféricos correspondentes a triedros congruentes de uma mesma esfera (ou esferas iguais), são também chamados de congruentes.

Observação 2.13. Note que dois triângulos esféricos serão congruentes quando seus três lados e seus três ângulos assim os forem.

Definição 2.14. (*Triângulos Simétricos*) - Dois triângulos esféricos cujos vértices são diametralmente opostos (Figura 2.10) são chamados de simétricos, assim como os triedros correspondentes.

Figura 2.10: Triângulos esféricos simétricos.



Fonte: A autora.

Em relação à congruência de triângulos esféricos, é verdadeira a seguinte afirmação, demonstrada no capítulo seguinte. Dois triângulos esféricos de uma mesma esfera ou esferas iguais, cujas partes estão dispostas na mesma ordem, são congruentes desde que:

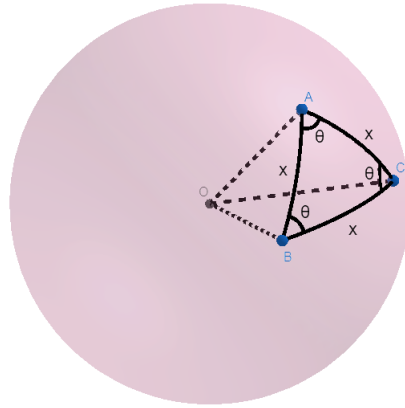
- (a) dois lados e o ângulo compreendido entre eles de um dos triângulos sejam iguais às partes correspondentes do outro triângulo;
- (b) dois ângulos e o lado adjacente de um dos triângulos sejam iguais aos elementos correspondentes do outro triângulo;
- (c) os três lados de um deles sejam iguais aos três lados do outro; e
- (d) os três ângulos de um deles sejam iguais aos três ângulos do outro.

Observação 2.15. Um triângulo esférico de uma esfera dada é, portanto, determinado desde que se conheçam dois lados e o ângulo compreendido, ou dois ângulos e o lado compreendido, ou os três lados, ou ainda, os três ângulos.

2.3 Algumas Propriedades para Triângulos Esféricos

Teorema 2.16. *Um triângulo esférico é equilátero se, e somente se, é equiângulo.*

Figura 2.11: Triângulo equilátero/equiângulo.



Fonte: A autora.

Demonstração. Considere o triângulo esférico ABC disposto como na Figura 2.11.

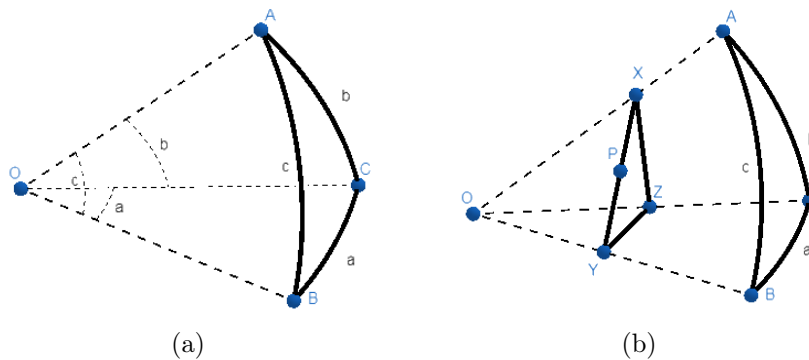
(\implies) Suponha o triângulo ABC equilátero. Deste modo, o triedro definido pelas semirretas \vec{OA} , \vec{OB} e \vec{OC} possui todos os ângulos planos iguais, pois os ângulos planos do triedro definem os lados do triângulo esférico ABC.

Assim, se todos os ângulos planos do triedro são iguais, os ângulos diedros também são. Como os ângulos diedros definem os ângulos esféricos, segue que os ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} são iguais. Portanto o triângulo ABC é equiângulo.

(\impliedby) Considere o triângulo ABC tal que $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$. Desse modo, os ângulos diedros do triedro definido pelas semirretas \vec{OA} , \vec{OB} e \vec{OC} são iguais. Isto implica que os ângulos planos do triedro também são iguais. Assim, os lados do triângulo ABC são iguais. Portanto o triângulo ABC é equilátero. \square

Teorema 2.17. Num triângulo esférico, um lado é menor que a soma dos outros dois e maior que sua diferença.

Figura 2.12: Um lado é menor que a soma dos outros dois e maior que sua diferença.



Fonte: A autora.

Demonstração. Considere o triângulo esférico ABC, com lados a,b e c em uma esfera de centro O, onde os elementos estão dispostos de acordo com a Figura 2.12 (a).

Caso os lados a , b e c sejam iguais, o teorema é verdadeiro.

Caso contrário, sobre OA , tome um ponto X qualquer; sobre OB , tome um ponto Y qualquer e sobre XY , tome um ponto P de modo que $X\hat{O}P = A\hat{O}C$. Sobre OC tome um ponto Z de modo que $OZ = OP$ (Veja uma representação dessa construção na Figura 2.12 (b)).

Considerando os pontos X , Y e Z , obtemos o triângulo XYZ no qual $XP = XZ$, pois os triângulos euclidianos XOZ e XOP são congruentes (caso LAL). Note também que pela construção descrita, tem-se $X\hat{O}Z = A\hat{O}C = X\hat{O}P$.

Pela desigualdade triangular da geometria plana no triângulo XYZ , temos

$$XZ + ZY > XY$$

Então,

$$XZ + ZY > XP + PY$$

Como $XP = XZ$ temos que

$$ZY > PY$$

Dessa forma,

$$Z\hat{O}Y > P\hat{O}Y$$

Somando $X\hat{O}Z$ em ambos os membros da desigualdade:

$$X\hat{O}Z + Z\hat{O}Y > X\hat{O}Z + P\hat{O}Y$$

Isto é

$$X\hat{O}Z + Z\hat{O}Y > X\hat{O}P + P\hat{O}Y$$

Como $X\hat{O}P + P\hat{O}Y = X\hat{O}Y$, segue que

$$X\hat{O}Z + Z\hat{O}Y > X\hat{O}Y \tag{2.1}$$

Percebe-se que $X\hat{O}Z = b$, $Z\hat{O}Y = a$ e $X\hat{O}Y = c$. Dessa forma, da Equação (2.1), temos que

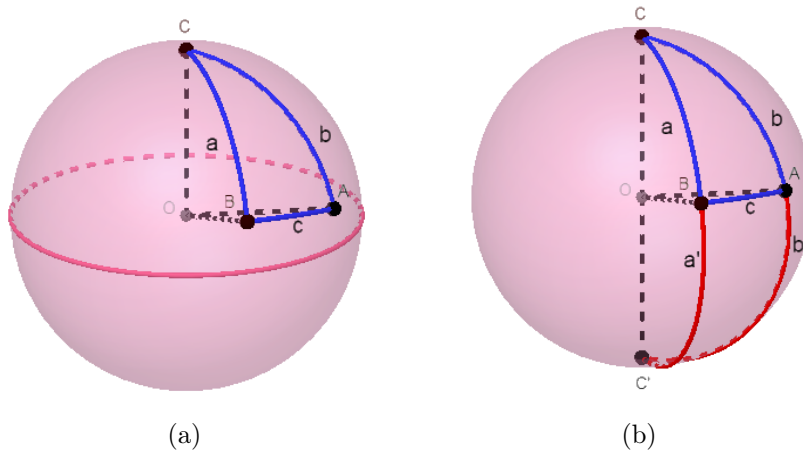
$$a + b > c$$

e segue o resultado. □

Teorema 2.18. *A soma dos três lados de um triângulo esférico é menor que 360° .*

Demonstração. Considere o triângulo esférico ABC , com lados a , b e c , conforme disposto na Figura 2.13 (a). Seja C' o antípoda do ponto C , formando o triângulo esférico ABC' , com lados a' , b' e c , conforme disposto na Figura 2.13 (b).

Figura 2.13: A soma dos três lados de um triângulo esférico é menor que 360° .



Fonte: A autora.

De acordo com o Teorema 2.17, segue que

$$c < a' + b' \tag{2.2}$$

Nota-se também que $a + a' = 180^\circ$ e $b + b' = 180^\circ$.

Então,

$$a + a' + b + b' = 360^\circ \tag{2.3}$$

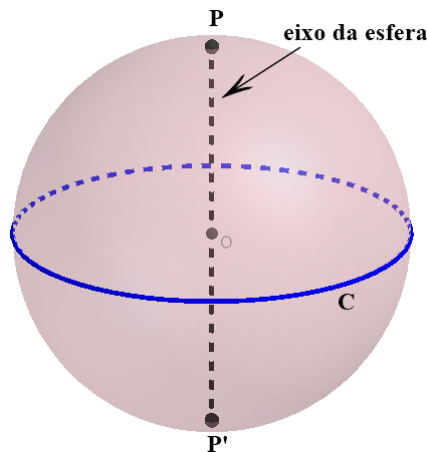
Portanto, das Equações (2.2) e (2.3), segue que

$$360^\circ = a + a' + b + b' = a + b + (a' + b') > a + b + c$$

Ou seja, os lados a , b e c de um triângulo esférico satisfazem $a + b + c < 360^\circ$ \square

Definição 2.19. (*Polos*) - Considere C um círculo máximo dado em uma esfera de centro O e o eixo da esfera, perpendicular ao plano do círculo C , que fura este plano em O . Os dois pontos P e P' , produzidos pela interseção deste eixo com a esfera, são chamados de polos do círculo máximo C . Observe a Figura 2.14.

Figura 2.14: Polos de um círculo máximo em uma esfera de centro O .

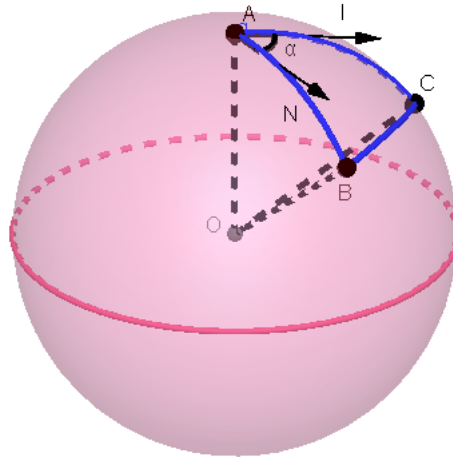


Fonte: A autora.

Observação 2.20. Observa-se que a distância de um polo a um ponto qualquer de seu círculo máximo é sempre igual a 90° .

Seja o triângulo esférico ABC em uma esfera com centro O , onde $\widehat{A} = \alpha$, conforme a Figura 2.15. Considere, no ponto A , as retas tangentes I e N que formam um ângulo α .

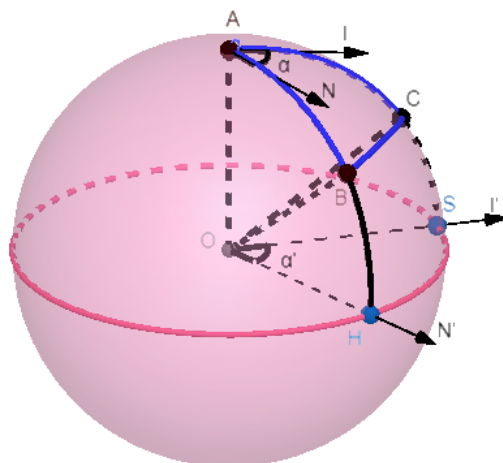
Figura 2.15: Triângulo esférico ABC e as retas tangentes I e N .



Fonte: A autora.

A partir de O traçam-se as retas I' e N' paralelas a I e N , respectivamente, formando o ângulo $\alpha' = \alpha$. Assim tem-se que as retas I' e N' são perpendiculares ao segmento de reta OA . Prolonga-se os lados AC e AB do triângulo esférico até encontrarem as retas N' e I' nos pontos H e S . Considere o arco formado por \widehat{HS} .

Figura 2.16: Medição do ângulo esférico.



Fonte: A autora.

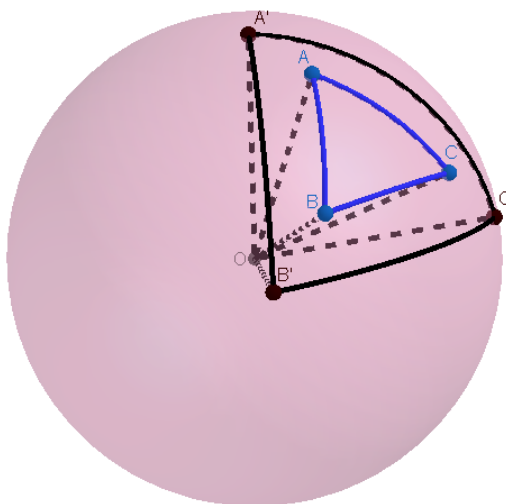
O ângulo α é um ângulo central e é medido pelo arco compreendido entre seus lados, logo pode-se concluir que \widehat{HS} mede o ângulo α e portanto $\alpha = \alpha' = \widehat{HS}$

Observe que os arcos \widehat{AH} e \widehat{AS} medem um quarto do círculo máximo (ou seja, 90°). O ponto A é o polo do arco \widehat{HS} .

Observação 2.21. Perceba que um ângulo esférico é medido pelo arco cujo polo é o próprio vértice desse ângulo.

Definição 2.22. (*Triângulos Polares*) - Um triângulo esférico ABC é polar de outro triângulo esférico $A'B'C'$ quando os vértices do primeiro são polos dos lados do segundo. Observe a Figura 2.17.

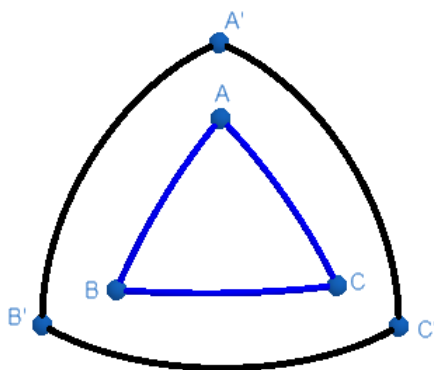
Figura 2.17: Triângulos polares.



Fonte: A autora.

Proposição 2.23. Considere os triângulos esféricos ABC e $A'B'C'$. Se $A'B'C'$ é polar de ABC , então ABC é polar de $A'B'C'$.

Figura 2.18: Triângulos polares ABC e $A'B'C'$.



Fonte: A autora.

Demonstração. Considere os triângulos dispostos como na Figura 2.18.

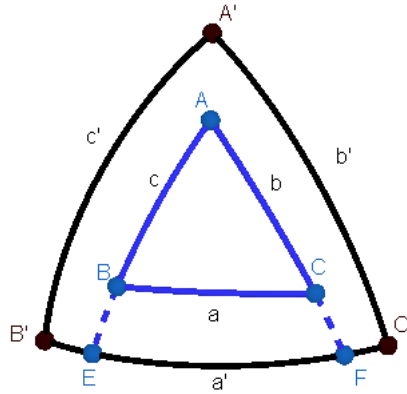
Sabe-se que A é polar ao arco $\widehat{B'C'}$, B é polar ao arco $\widehat{A'C'}$ e C é polar ao arco $\widehat{A'B'}$. Deve-se provar que A' é polar ao arco \widehat{BC} , B' é polar ao arco \widehat{AC} e C' é polar ao arco \widehat{AB} .

Para provar que A' é polar ao arco \widehat{BC} , basta provar que os arcos $\widehat{A'B}$ e $\widehat{A'C}$ medem ambos 90° . Como B é polar ao arco $\widehat{A'C'}$ tem-se que $\widehat{A'B} = 90^\circ$, conforme desejado. Por outro lado, como C é polo de $\widehat{A'B'}$ segue também que $\widehat{A'C} = 90^\circ$.

Dessa forma, A' é polar ao arco \widehat{BC} . De forma análoga se prova que B' é polar ao arco \widehat{AC} e C' é polar ao arco \widehat{AB} . \square

Teorema 2.24. (*Teorema de Lagrange*) - Em dois triângulos polares o lado de um e o ângulo do outro cujo vértice é polo deste lado são suplementares.

Figura 2.19: Triângulos polares para o Teorema de Lagrange.



Fonte: A autora.

Demonstração. Norteados pela Figura 2.19, deve-se provar:

$$\widehat{A} + a' = 180^\circ$$

$$\widehat{B} + b' = 180^\circ$$

$$\widehat{C} + c' = 180^\circ$$

Primeiramente, prolonga-se os lados b e c até determinarem os pontos E e F no segundo triângulo, conforme a Figura 2.19. Então:

$$\widehat{B'F} = 90^\circ \quad (2.4)$$

$$\widehat{C'E} = 90^\circ \quad (2.5)$$

pois B' é polo de \widehat{AC} com F pertencendo ao círculo máximo contendo \widehat{AC} e C' é polo de \widehat{AB} com E pertencendo ao círculo máximo contendo \widehat{AB} (Observação 2.20).

Somando as Equações (2.4) e (2.5) temos:

$$\widehat{B'F} + \widehat{C'E} = 180^\circ \quad (2.6)$$

Sabe-se que

$$\widehat{B}F = \widehat{B}E + \widehat{EF} \quad (2.7)$$

$$\widehat{C}E = \widehat{EF} + \widehat{C}F \quad (2.8)$$

Substituindo as Equações (2.7) e (2.8) em (2.6).

$$\widehat{B}E + \widehat{EF} + \widehat{EF} + \widehat{C}F = 180^\circ$$

$$a' + \widehat{EF} = 180^\circ$$

Como A é polo de \widehat{EF} , tem-se $\widehat{EF} = \widehat{A}$ (Observação 2.21). Então

$$\widehat{A} + a' = 180^\circ$$

De modo análogo, prova-se para os outros lados. □

Teorema 2.25. *A soma dos ângulos de um triângulo esférico é maior que 180° e menor que 540° .*

Demonstração. Considere o triângulo ABC e o seu triângulo polar A'B'C' cujos lados são a' , b' , c' , dispostos conforme a Figura 2.19.

Pelo Teorema 2.24 tem-se:

$$\widehat{A} + a' = 180^\circ$$

$$\widehat{B} + b' = 180^\circ$$

$$\widehat{C} + c' = 180^\circ$$

Por adição tem-se:

$$(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) + (a' + b' + c') = 540^\circ$$

Mas pelo Teorema 2.18:

$$a' + b' + c' < 360^\circ$$

O que implica em

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > 180^\circ$$

Também, como $a' + b' + c' > 0$, certamente tem-se que

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 540^\circ$$

Dessa forma

$$180^\circ < \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 540^\circ$$

□

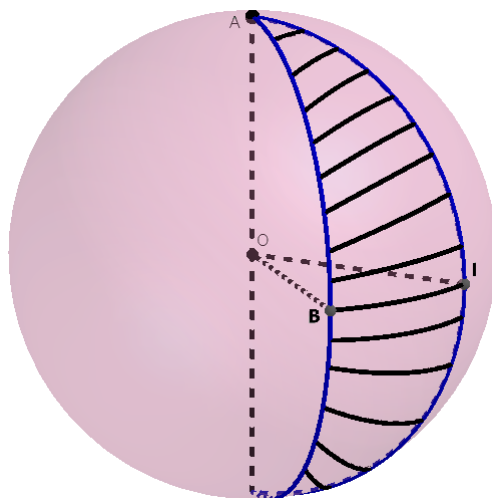
Definição 2.26. (*Excesso Esférico*) - Seja s a soma dos ângulos de um triângulo esférico. Chama-se excesso esférico a diferença $E = s - 180^\circ$.

Definição 2.27. (*Fuso*) - Chama-se fuso a porção da superfície esférica compreendida entre dois semi-círculos máximos que têm extremos comuns. Os pontos comuns desses semi-círculos máximos são denominados vértices do fuso. O ângulo fuso é o ângulo diedro formado pelos planos dos semi-círculos máximos que definem o fuso.

É prática comum denominar um fuso de A, se um de seus vértices for o ponto A.

O ângulo fuso se mede pelo arco de círculo máximo, compreendido entre os dois arcos de círculos que definem o próprio fuso, no qual os vértices do fuso são polos. Observe a Figura 2.20, note que \widehat{BI} é a medida do ângulo fuso A.

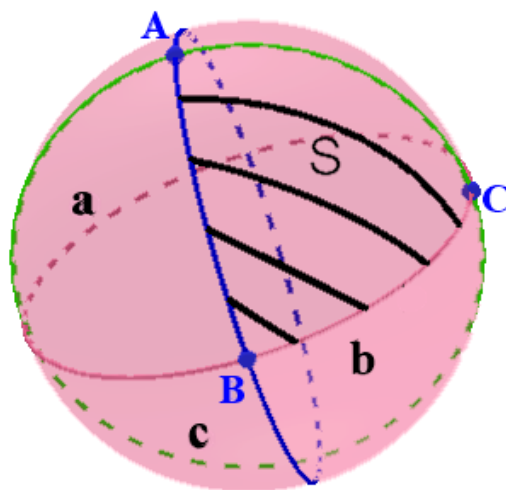
Figura 2.20: Fuso esférico A.



Fonte: A autora.

Teorema 2.28. - *A área do triângulo esférico é proporcional ao excesso esférico.*

Figura 2.21: Área do triângulo esférico.



Fonte: A autora.

Demonstração. Sabendo que a área da esfera pode ser calculada por $A = 4\pi r^2$ (Veja uma demonstração em Dolce e Pompeo (2013)), chamando f a área do fuso de n graus, temos:

$$f = \frac{4\pi r^2 n}{360^\circ} = \frac{\pi r^2 n}{90^\circ} \quad (2.9)$$

Considere a esfera de centro O sobre o qual três planos passando por O se interceptam dois a dois, determinando oito triângulos esféricos, conforme Figura 2.21.

Nos quatro triângulos visíveis na Figura 2.21 e cujas áreas são S, a, b e c. Pode-se verificar que:

$$S + a = f_C$$

$$S + b = f_A$$

$$S + c = f_B$$

em que f_A é a área do fuso cujo vértice é A, f_B é a área do fuso cujo vértice é B e f_C é a área do fuso cujo vértice é C. Somando as igualdades acima tem-se:

$$2S + S + a + b + c = f_A + f_B + f_C$$

Mas $S + a + b + c = \frac{1}{2}$ área da esfera = $2\pi r^2$.

Assim,

$$2S = f_A + f_B + f_C - 2\pi r^2$$

$$S = \frac{1}{2}(f_A + f_B + f_C) - \pi r^2$$

Da Equação (2.9) sabe-se que: $f_A = \frac{\pi r^2 \hat{A}}{90^\circ}$, $f_B = \frac{\pi r^2 \hat{B}}{90^\circ}$ e $f_C = \frac{\pi r^2 \hat{C}}{90^\circ}$. Logo,

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi r^2 \hat{A}}{90^\circ} + \frac{\pi r^2 \hat{B}}{90^\circ} + \frac{\pi r^2 \hat{C}}{90^\circ} \right) - \pi r^2$$

$$S = \frac{\pi r^2 \hat{A} + \pi r^2 \hat{B} + \pi r^2 \hat{C}}{180^\circ} - \pi r^2$$

$$S = \frac{\pi r^2}{180^\circ} (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - 180^\circ) \quad (2.10)$$

A Equação (2.10) fornece a área do triângulo esférico cujos ângulos são \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} .

Conforme a Definição 2.26, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - 180^\circ$ é o excesso esférico. Portanto a área do triângulo esférico é dada por:

$$S = \frac{\pi r^2 E}{180^\circ}$$

Com isso tem-se que a área S de um triângulo esférico é proporcional ao seu excesso esférico E. □

Observação 2.29. Perceba que a Equação (2.10) fornece uma fórmula para a área de um triângulo esférico em função de seus três ângulos.

Feitas as devidas considerações à respeito de algumas propriedades da esfera e dos triângulos esféricos, pode-se estudar a trigonometria nesses.

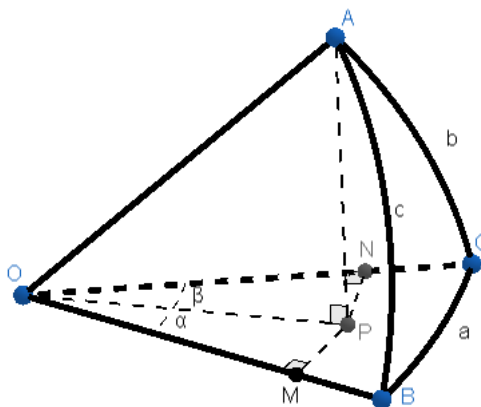
3 Trigonometria Esférica

Nesta parte, encontrar-se-ão as resoluções de senos e cossenos nos triângulos esféricos e as suas consequências. Ressalta-se que nesse texto supõe-se que o leitor tenha conhecimentos prévios de trigonometria plana.

3.1 Lei dos Senos e Cossenos Esféricos

Como forma de orientação para as próximas demonstrações, observe a Figura 3.1 representando um triângulo esférico ABC em uma esfera de centro O.

Figura 3.1: Teoremas sobre senos e cossenos esféricos.



Fonte: A autora.

Considere uma reta perpendicular ao plano OBC que passa pelo vértice A do triângulo esférico e P o ponto de interseção dessa reta com o plano OBC. Nesse caso, define-se o segmento AP como perpendicular ao plano OBC. Por processo semelhante, partindo de P, consegue-se os segmentos PM e PN, perpendiculares aos segmentos OB e OC, respectivamente. Desse modo, os triângulos euclidianos APN, APM, ONP, OMP e OPA são retângulos. Sendo assim, são verdadeiras as seguintes igualdades:

$$OA^2 = AP^2 + OP^2 \quad (3.1)$$

$$AM^2 = AP^2 + PM^2 \implies AP^2 = AM^2 - PM^2 \quad (3.2)$$

$$OP^2 = OM^2 + PM^2 \quad (3.3)$$

$$AN^2 = AP^2 + PN^2 \implies AP^2 = AN^2 - PN^2 \quad (3.4)$$

$$OP^2 = ON^2 + PN^2 \quad (3.5)$$

Substituindo as Equações (3.2) e (3.3) em (3.1), segue:

$$OA^2 = AM^2 - PM^2 + OM^2 + PM^2 \implies OA^2 = AM^2 + OM^2$$

O que implica que o triângulo euclidiano OMA é também retângulo.

Substituindo as Equações (3.4) e (3.5) em (3.1), segue:

$$OA^2 = AN^2 - PN^2 + ON^2 + PN^2 \implies OA^2 = AN^2 + ON^2$$

O que implica que o triângulo euclidiano ONA é também retângulo.

Portanto, todos os triângulos euclidianos APN, APM, ONP, OMP, OPA, OMA e ONA são retângulos.

Do triângulo retângulo euclidiano ONA, uma vez que o ângulo do vértice O coincide com o lado b do triângulo esférico, segue que

$$\cos(b) = \frac{ON}{OA} \quad (3.6)$$

$$\text{sen}(b) = \frac{AN}{OA} \quad (3.7)$$

Do triângulo retângulo euclidiano OMA, uma vez que o ângulo do vértice O coincide com o lado c do triângulo esférico, segue que:

$$\cos(c) = \frac{OM}{OA} \quad (3.8)$$

$$\text{sen}(c) = \frac{AM}{OA} \quad (3.9)$$

Do triângulo retângulo euclidiano OMP, denotando por α o ângulo com vértice em O, segue que:

$$\cos(\alpha) = \frac{OM}{OP} \quad (3.10)$$

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{MP}{OP} \quad (3.11)$$

Do triângulo retângulo euclidiano ONP, denotando por β o ângulo com vértice em O, segue que:

$$\cos(\beta) = \frac{ON}{OP} \quad (3.12)$$

$$\text{sen}(\beta) = \frac{NP}{OP} \quad (3.13)$$

Observa-se adicionalmente que dos triângulos euclidianos APN e APM, segue que:

$$\cos(\widehat{N}) = \frac{NP}{AN}$$

$$\text{sen}(\widehat{N}) = \frac{AP}{AN}$$

$$\cos(\widehat{M}) = \frac{MP}{AM}$$

$$\text{sen}(\widehat{M}) = \frac{AP}{AM}$$

Mas como \widehat{M} e \widehat{N} são os mesmos ângulos diedros que definem os ângulos \widehat{B} e \widehat{C} , respectivamente, segue pela Definição 2.9, também que:

$$\cos(\widehat{C}) = \frac{NP}{AN} \quad (3.14)$$

$$\text{sen}(\widehat{C}) = \frac{AP}{AN} \quad (3.15)$$

$$\cos(\widehat{B}) = \frac{MP}{AM} \quad (3.16)$$

$$\text{sen}(\widehat{B}) = \frac{AP}{AM} \quad (3.17)$$

Feitas as devidas considerações, pode-se enunciar e demonstrar os principais resultados a respeito de trigonometria em triângulos esféricos.

Teorema 3.1. (*Leis dos Cossenos Esféricos*) - Considere um triângulo esférico de vértices A , B e C , com ângulos internos medindo \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} e cujos lados opostos medem a , b e c , respectivamente, como na Figura 3.1. Então, são verdadeiras:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(\widehat{A})$$

$$\cos(b) = \cos(a) \cdot \cos(c) + \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(\widehat{B})$$

$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b) \cdot \cos(\widehat{C})$$

Demonstração. Como $\alpha + \beta = a$ e pelas Equações (3.8) e (3.10) tem-se:

$$\begin{aligned} OM = OA \cdot \cos(c) &\implies OP \cdot \cos(\alpha) = OA \cdot \cos(c) \implies \\ &\implies OP \cdot \cos(a - \beta) = OA \cdot \cos(c) \end{aligned}$$

Usando a Relação (B.1) do Apêndice B com as Equações (3.12) e (3.13):

$$\begin{aligned} OP(\cos(a) \cdot \cos(\beta) + \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(\beta)) &= OA \cdot \cos(c) \implies \\ \implies OP \left(\cos(a) \frac{ON}{OP} + \text{sen}(a) \frac{NP}{OP} \right) &= OA \cdot \cos(c) \end{aligned}$$

Daí, com o auxílio da Equação (3.6), segue que

$$OA \cdot \cos(c) = OA \cdot \cos(b) \cdot \cos(a) + NP \cdot \text{sen}(a) \quad (3.18)$$

Das Equações (3.14) e (3.7) tem-se $NP = \cos(\widehat{C}).AN$ e $AN = \text{sen}(b).OA$. Isto é

$$NP = \cos(\widehat{C}).\text{sen}(b).OA$$

Substituindo na Equação (3.18), segue:

$$OA.\cos(c) = OA.\cos(b)\cos(a) + OA.\text{sen}(b)\cos(\widehat{C})\text{sen}(a)$$

Ou seja,

$$\cos(c) = \cos(a).\cos(b) + \text{sen}(a).\text{sen}(b).\cos(\widehat{C})$$

Isto demonstra uma das três relações propostas. Para as duas restantes, as demonstrações são análogas. \square

Observação 3.2. As fórmulas do Teorema 3.1 também são conhecidas como Fórmulas dos Quatro Elementos, pois são compostas por quatro elementos de um triângulo esférico (três lados e um ângulo). Este teorema é de grande importância na Trigonometria Esférica, porque é o ponto de partida para a dedução das demais fórmulas fundamentais.

Teorema 3.3. (*Leis dos Senos Esféricos*) - Considere um triângulo esférico de vértices A , B e C , com ângulos internos medindo \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} e cujos lados opostos medem a , b e c , respectivamente, como na Figura 3.1. Então,

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(\widehat{A})} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\widehat{B})} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\widehat{C})}$$

Demonstração. Das Equações (3.9) e (3.17), segue:

$$\text{sen}(c) = \frac{AM}{OA} \implies AM = OA.\text{sen}(c)$$

e

$$\text{sen}(\widehat{B}) = \frac{AP}{AM} \implies AM = \frac{AP}{\text{sen}(\widehat{B})}$$

onde $\text{sen}(\widehat{B}) \neq 0$, uma vez que $0^\circ < \widehat{B} < 180^\circ$ (Observação 2.11).

Desse modo,

$$OA.\text{sen}(c) = \frac{AP}{\text{sen}(\widehat{B})} \tag{3.19}$$

Das Equações (3.7) e (3.15), segue:

$$\text{sen}(b) = \frac{AN}{OA} \implies AN = OA.\text{sen}(b)$$

e

$$\text{sen}(\widehat{C}) = \frac{AP}{AN} \implies AN = \frac{AP}{\text{sen}(\widehat{C})}$$

onde $\text{sen}(\widehat{C}) \neq 0$, uma vez que $0^\circ < \widehat{C} < 180^\circ$ (Observação 2.11).

Desse modo,

$$OA.\text{sen}(b) = \frac{AP}{\text{sen}(\widehat{C})} \tag{3.20}$$

Das Equações (3.19) e (3.20), conclui-se que

$$\frac{AP}{OA} = \text{sen}(c) \cdot \text{sen}(\widehat{B}) = \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(\widehat{C})$$

Que implica

$$\frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\widehat{B})} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\widehat{C})}$$

Assim demonstra-se uma das igualdades. A outra é obtida de modo análogo. \square

Teorema 3.4. (*Fórmulas Adicionais dos Quatro Elementos*) - Considere um triângulo esférico de vértices A , B e C , com ângulos internos medindo \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} e cujos lados opostos medem a , b e c , respectivamente, como na Figura 3.1. Então,

$$\cos(\widehat{A}) = -\cos(\widehat{B}) \cdot \cos(\widehat{C}) + \text{sen}(\widehat{B}) \cdot \text{sen}(\widehat{C}) \cdot \cos(a)$$

$$\cos(\widehat{B}) = -\cos(\widehat{A}) \cdot \cos(\widehat{C}) + \text{sen}(\widehat{A}) \cdot \text{sen}(\widehat{C}) \cdot \cos(b)$$

$$\cos(\widehat{C}) = -\cos(\widehat{A}) \cdot \cos(\widehat{B}) + \text{sen}(\widehat{A}) \cdot \text{sen}(\widehat{B}) \cdot \cos(c)$$

Demonstração. Apresenta-se, a seguir, duas demonstrações diferentes para este Teorema.

Demonstração utilizando o Teorema 2.24:

Considere o Teorema 3.1 aplicado no triângulo polar $A'B'C'$ do triângulo ABC (Veja Figura 2.19):

$$\cos(a') = \cos(b') \cdot \cos(c') + \text{sen}(b') \cdot \text{sen}(c') \cdot \cos(\widehat{A}') \quad (3.21)$$

$$\cos(b') = \cos(a') \cdot \cos(c') + \text{sen}(a') \cdot \text{sen}(c') \cdot \cos(\widehat{B}') \quad (3.22)$$

$$\cos(c') = \cos(a') \cdot \cos(b') + \text{sen}(a') \cdot \text{sen}(b') \cdot \cos(\widehat{C}') \quad (3.23)$$

Do Teorema 2.24 segue:

$$a' = 180^\circ - \widehat{A}$$

$$b' = 180^\circ - \widehat{B}$$

$$c' = 180^\circ - \widehat{C}$$

$$\widehat{A}' = 180^\circ - a$$

$$\widehat{B}' = 180^\circ - b$$

$$\widehat{C}' = 180^\circ - c$$

Substituindo as considerações anteriores nas Equações (3.21), (3.22) e (3.23):

$$\cos(180^\circ - \widehat{A}) = \cos(180^\circ - \widehat{B}) \cdot \cos(180^\circ - \widehat{C}) + \text{sen}(180^\circ - \widehat{B}) \cdot \text{sen}(180^\circ - \widehat{C}) \cdot \cos(180^\circ - a)$$

$$\cos(180^\circ - \widehat{B}) = \cos(180^\circ - \widehat{A}) \cdot \cos(180^\circ - \widehat{C}) + \text{sen}(180^\circ - \widehat{A}) \cdot \text{sen}(180^\circ - \widehat{C}) \cdot \cos(180^\circ - b)$$

$$\cos(180^\circ - \widehat{C}) = \cos(180^\circ - \widehat{A}) \cdot \cos(180^\circ - \widehat{B}) + \sin(180^\circ - \widehat{A}) \cdot \sin(180^\circ - \widehat{B}) \cdot \cos(180^\circ - c)$$

Pelas Relações (B.21) e (B.22) do Apêndice B tem-se:

$$-\cos(\widehat{A}) = -\cos(\widehat{B}) \cdot (-\cos(\widehat{C})) + \sin(\widehat{B}) \cdot \sin(\widehat{C}) \cdot (-\cos(a))$$

$$-\cos(\widehat{B}) = -\cos(\widehat{A}) \cdot (-\cos(\widehat{C})) + \sin(\widehat{A}) \cdot \sin(\widehat{C}) \cdot (-\cos(b))$$

$$-\cos(\widehat{C}) = -\cos(\widehat{A}) \cdot (-\cos(\widehat{B})) + \sin(\widehat{A}) \cdot \sin(\widehat{B}) \cdot (-\cos(c))$$

De onde segue

$$\cos(\widehat{A}) = -\cos(\widehat{B}) \cdot \cos(\widehat{C}) + \sin(\widehat{B}) \cdot \sin(\widehat{C}) \cdot \cos(a)$$

$$\cos(\widehat{B}) = -\cos(\widehat{A}) \cdot \cos(\widehat{C}) + \sin(\widehat{A}) \cdot \sin(\widehat{C}) \cdot \cos(b)$$

$$\cos(\widehat{C}) = -\cos(\widehat{A}) \cdot \cos(\widehat{B}) + \sin(\widehat{A}) \cdot \sin(\widehat{B}) \cdot \cos(c)$$

O que conclui a primeira demonstração.

Demonstração utilizando o Lema A.1 do Apêndice A:

Do Teorema 3.1, segue que

$$\cos(\widehat{A}) = \frac{\cos(a) - \cos(b) \cdot \cos(c)}{\sin(b) \cdot \sin(c)} \quad (3.24)$$

$$\cos(\widehat{B}) = \frac{\cos(b) - \cos(a) \cdot \cos(c)}{\sin(a) \cdot \sin(c)} \quad (3.25)$$

$$\cos(\widehat{C}) = \frac{\cos(c) - \cos(a) \cdot \cos(b)}{\sin(a) \cdot \sin(b)} \quad (3.26)$$

onde $\sin(a) \neq 0$, $\sin(b) \neq 0$ e $\sin(c) \neq 0$ pela Observação 2.11.

Por outro lado, também tem-se que $\cos^2(a) < 1$, $\cos^2(b) < 1$ e $\cos^2(c) < 1$. Além disso, pela Relação (B.3) do Apêndice B e lembrando que a , b e c são menores que 180° , é notório que $\sin(a) = \sqrt{1 - \cos^2(a)}$, $\sin(b) = \sqrt{1 - \cos^2(b)}$ e $\sin(c) = \sqrt{1 - \cos^2(c)}$.

Denotando $x = \cos(a)$, $y = \cos(b)$, $z = \cos(c)$, $m = \cos(\widehat{A})$, $n = \cos(\widehat{B})$ e $p = \cos(\widehat{C})$ tem-se, das Equações (3.24), (3.25) e (3.26), que

$$m = \frac{x - yz}{\sqrt{1 - y^2} \sqrt{1 - z^2}}$$

$$n = \frac{y - xz}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - z^2}}$$

$$p = \frac{z - xy}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - y^2}}$$

Então, são satisfeitas as hipóteses do Lema A.1, demonstrado no Apêndice A, o que implica

$$\begin{aligned} x &= \frac{m + np}{\sqrt{1 - n^2}\sqrt{1 - p^2}} \\ y &= \frac{n + mp}{\sqrt{1 - m^2}\sqrt{1 - p^2}} \\ z &= \frac{p + mn}{\sqrt{1 - m^2}\sqrt{1 - n^2}} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \cos(a) &= \frac{\cos(\widehat{A}) + \cos(\widehat{B})\cos(\widehat{C})}{\operatorname{sen}(\widehat{B})\operatorname{sen}(\widehat{C})} \\ \cos(b) &= \frac{\cos(\widehat{B}) + \cos(\widehat{A})\cos(\widehat{C})}{\operatorname{sen}(\widehat{A})\operatorname{sen}(\widehat{C})} \\ \cos(c) &= \frac{\cos(\widehat{C}) + \cos(\widehat{A})\cos(\widehat{B})}{\operatorname{sen}(\widehat{A})\operatorname{sen}(\widehat{B})} \end{aligned}$$

pois \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} também são menores que 180° , fazendo com que $\operatorname{sen}(\widehat{A}) = \sqrt{1 - \cos^2(\widehat{A})}$, $\operatorname{sen}(\widehat{B}) = \sqrt{1 - \cos^2(\widehat{B})}$ e $\operatorname{sen}(\widehat{C}) = \sqrt{1 - \cos^2(\widehat{C})}$.

Dessa forma:

$$\cos(\widehat{A}) = -\cos(\widehat{B}) \cdot \cos(\widehat{C}) + \operatorname{sen}(\widehat{B}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{C}) \cdot \cos(a)$$

$$\cos(\widehat{B}) = -\cos(\widehat{A}) \cdot \cos(\widehat{C}) + \operatorname{sen}(\widehat{A}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{C}) \cdot \cos(b)$$

$$\cos(\widehat{C}) = -\cos(\widehat{A}) \cdot \cos(\widehat{B}) + \operatorname{sen}(\widehat{A}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{B}) \cdot \cos(c)$$

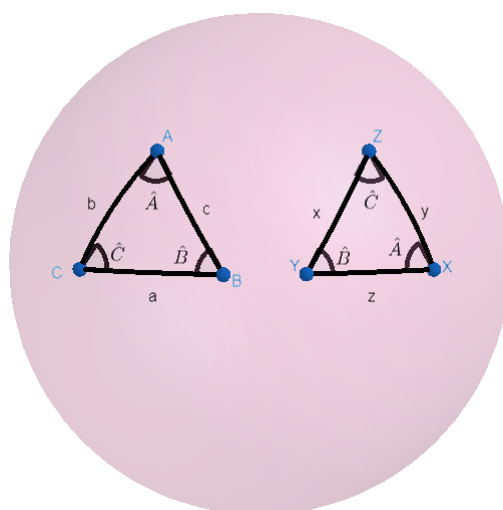
O que conclui a segunda demonstração. □

3.2 Congruências de Triângulos Esféricos Revisitadas

No Capítulo 2, a Seção 2.2 termina apresentando quatro casos de congruências de triângulos esféricos. O objetivo nesta parte do trabalho é apresentar uma demonstração matemática para cada caso. Para os teoremas que seguem, considera-se sempre triângulos na mesma esfera (ou em esferas iguais).

Teorema 3.5. (1° Caso - AAA) *Se dois triângulos esféricos têm os três ângulos esféricos congruentes, então os triângulos são congruentes.*

Figura 3.2: Congruência de triângulos esféricos: Caso AAA.



Fonte: A autora.

Demonstração. Considere os triângulos esféricos de lados a , b e c e x , y e z , com ângulos congruentes \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} dispostos de acordo com a Figura 3.2.

No primeiro triângulo, do Teorema 3.4, segue que

$$\cos(a) = \frac{\cos(\hat{A}) + \cos(\hat{B}) \cos(\hat{C})}{\sin(\hat{B}) \sin(\hat{C})}$$

$$\cos(b) = \frac{\cos(\hat{B}) + \cos(\hat{A}) \cos(\hat{C})}{\sin(\hat{A}) \sin(\hat{C})}$$

$$\cos(c) = \frac{\cos(\hat{C}) + \cos(\hat{A}) \cos(\hat{B})}{\sin(\hat{A}) \sin(\hat{B})}$$

No segundo triângulo, do Teorema 3.4, segue que

$$\cos(x) = \frac{\cos(\hat{A}) + \cos(\hat{B}) \cos(\hat{C})}{\sin(\hat{B}) \sin(\hat{C})}$$

$$\cos(y) = \frac{\cos(\hat{B}) + \cos(\hat{A}) \cos(\hat{C})}{\sin(\hat{A}) \sin(\hat{C})}$$

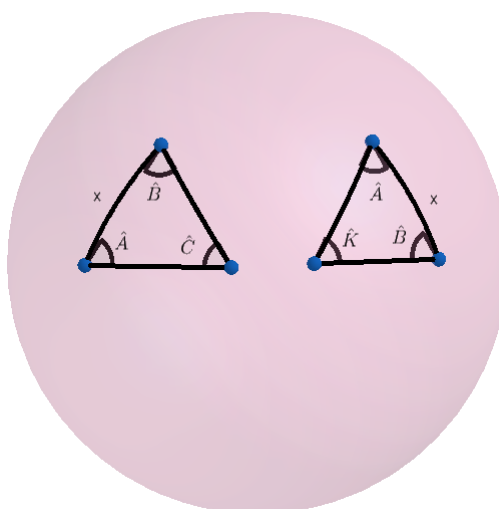
$$\cos(z) = \frac{\cos(\hat{C}) + \cos(\hat{A}) \cos(\hat{B})}{\sin(\hat{A}) \sin(\hat{B})}$$

Dessa forma tem-se $\cos(a) = \cos(x)$, $\cos(b) = \cos(y)$ e $\cos(c) = \cos(z)$

Portanto $a = x$, $b = y$ e $c = z$, pois o cosseno é unicamente determinado entre 0° e 180° . Sendo assim, os triângulos são congruentes. \square

Teorema 3.6. (*2º Caso - ALA*) Se dois triângulos esféricos têm dois ângulos esféricos e o lado adjacente a eles congruentes, então os triângulos são congruentes.

Figura 3.3: Congruência de triângulos esféricos: Caso ALA.



Fonte: A autora.

Demonstração. Considere os triângulos esféricos com ângulos congruentes \hat{A} e \hat{B} e lado adjacente a esses ângulos com medida x , dispostos de acordo com a Figura 3.3.

No primeiro triângulo, do Teorema 3.4, segue que

$$\cos(x) = \frac{\cos(\hat{C}) + \cos(\hat{A}) \cos(\hat{B})}{\text{sen}(\hat{A}) \text{sen}(\hat{B})} \quad (3.27)$$

No segundo triângulo, do Teorema 3.4, segue que

$$\cos(x) = \frac{\cos(\hat{K}) + \cos(\hat{A}) \cos(\hat{B})}{\text{sen}(\hat{A}) \text{sen}(\hat{B})} \quad (3.28)$$

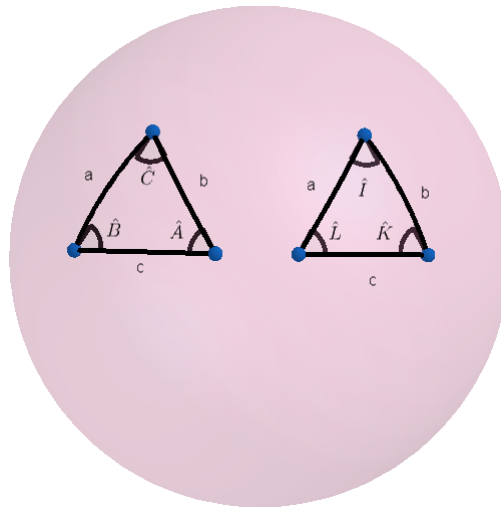
Segue das Equações (3.27) e (3.28):

$$\frac{\cos(\hat{C}) + \cos(\hat{A}) \cos(\hat{B})}{\text{sen}(\hat{A}) \text{sen}(\hat{B})} = \frac{\cos(\hat{K}) + \cos(\hat{A}) \cos(\hat{B})}{\text{sen}(\hat{A}) \text{sen}(\hat{B})} \implies \cos(\hat{C}) = \cos(\hat{K}) \implies \hat{C} = \hat{K}$$

pois o cosseno é unicamente determinado entre 0° e 180° . Sendo assim, os triângulos são congruentes, pois retoma-se o caso do Teorema 3.5 (AAA). \square

Teorema 3.7. (3º Caso - LLL) *Se dois triângulos esféricos têm os três lados congruentes, então os triângulos são congruentes.*

Figura 3.4: Congruência de triângulos esféricos: Caso LLL.



Fonte: A autora.

Demonstração. Considere os triângulos esféricos de ângulos \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} e \widehat{K} , \widehat{L} e \widehat{I} com lados congruentes a , b e c dispostos de acordo com a Figura 3.4.

No primeiro triângulo, do Teorema 3.1, segue que

$$\cos(\widehat{A}) = \frac{\cos(a) - \cos(b) \cdot \cos(c)}{\sin(b) \cdot \sin(c)}$$

$$\cos(\widehat{B}) = \frac{\cos(b) - \cos(a) \cdot \cos(c)}{\sin(a) \cdot \sin(c)}$$

$$\cos(\widehat{C}) = \frac{\cos(c) - \cos(a) \cdot \cos(b)}{\sin(a) \cdot \sin(b)}$$

No segundo triângulo, do Teorema 3.1, segue que

$$\cos(\widehat{K}) = \frac{\cos(a) - \cos(b) \cdot \cos(c)}{\sin(b) \cdot \sin(c)}$$

$$\cos(\widehat{L}) = \frac{\cos(b) - \cos(a) \cdot \cos(c)}{\sin(a) \cdot \sin(c)}$$

$$\cos(\widehat{I}) = \frac{\cos(c) - \cos(a) \cdot \cos(b)}{\sin(a) \cdot \sin(b)}$$

Dessa forma tem-se

$$\cos(\widehat{A}) = \cos(\widehat{K}) \implies \widehat{A} = \widehat{K}$$

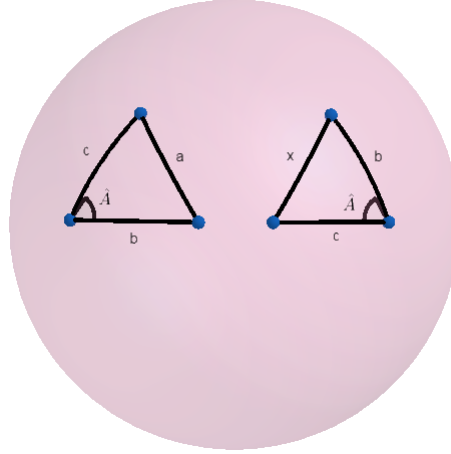
$$\cos(\widehat{B}) = \cos(\widehat{L}) \implies \widehat{B} = \widehat{L}$$

$$\cos(\widehat{C}) = \cos(\widehat{I}) \implies \widehat{C} = \widehat{I}$$

pois o cosseno é unicamente determinado entre 0° e 180° . Sendo assim, os triângulos são congruentes, pois retoma-se o caso do Teorema 3.5 (AAA). \square

Teorema 3.8. (4° Caso - LAL) Se dois triângulos esféricos têm dois lados e o ângulo entre eles congruentes, então os triângulos são congruentes.

Figura 3.5: Congruência de triângulos esféricos: Caso LAL.



Fonte: A autora.

Demonstração. Considere os triângulos esféricos com dois lados congruentes b e c e com o ângulo \hat{A} entre eles também congruente, dispostos de acordo com a Figura 3.5.

No primeiro triângulo, do Teorema 3.1, segue que

$$\cos(\hat{A}) = \frac{\cos(a) - \cos(b) \cdot \cos(c)}{\sin(b) \cdot \sin(c)} \quad (3.29)$$

No segundo triângulo, do Teorema 3.1, segue que

$$\cos(\hat{A}) = \frac{\cos(x) - \cos(b) \cdot \cos(c)}{\sin(b) \cdot \sin(c)} \quad (3.30)$$

Segue das Equações (3.29) e (3.30):

$$\frac{\cos(a) - \cos(b) \cos(c)}{\sin(b) \sin(c)} = \frac{\cos(x) - \cos(b) \cos(c)}{\sin(b) \sin(c)} \implies \cos(a) = \cos(x) \implies a = x$$

pois o cosseno é unicamente determinado entre 0° e 180° . Sendo assim, os triângulos são congruentes, pois retoma-se o caso do Teorema 3.7 (LLL). \square

3.3 Fórmulas dos Cinco Elementos

Nesta parte do trabalho serão apresentadas as Fórmulas dos Cinco Elementos e as Fórmulas das Cotangentes, resultados derivados das Fórmulas dos Quatro Elementos (Lei dos Cossenos) e Lei dos Senos, desenvolvidas na Seção 3.1. Nas demonstrações ainda se adota como suporte a Figura 3.1.

O teorema seguinte apresenta as Fórmulas dos Cinco Elementos, que relacionam três lados e dois ângulos de um triângulo esférico.

Teorema 3.9. (*Fórmulas dos Cinco Elementos*) - Considere um triângulo esférico de vértices A , B e C , com ângulos internos medindo \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} e cujos lados opostos medem a , b e c , respectivamente, como na Figura 3.1. Então, são verdadeiras:

$$\operatorname{sen}(a) \cdot \cos(\widehat{C}) = \operatorname{sen}(b) \cdot \cos(c) - \cos(b) \cdot \operatorname{sen}(c) \cdot \cos(\widehat{A})$$

$$\operatorname{sen}(a) \cdot \cos(\widehat{B}) = \operatorname{sen}(c) \cdot \cos(b) - \cos(c) \cdot \operatorname{sen}(b) \cdot \cos(\widehat{A})$$

$$\operatorname{sen}(b) \cdot \cos(\widehat{A}) = \operatorname{sen}(c) \cdot \cos(a) - \cos(c) \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \cos(\widehat{B})$$

$$\operatorname{sen}(b) \cdot \cos(\widehat{C}) = \operatorname{sen}(a) \cdot \cos(c) - \cos(a) \cdot \operatorname{sen}(c) \cdot \cos(\widehat{B})$$

$$\operatorname{sen}(c) \cdot \cos(\widehat{B}) = \operatorname{sen}(a) \cdot \cos(b) - \cos(a) \cdot \operatorname{sen}(b) \cdot \cos(\widehat{C})$$

$$\operatorname{sen}(c) \cdot \cos(\widehat{A}) = \operatorname{sen}(b) \cdot \cos(a) - \cos(b) \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \cos(\widehat{C})$$

Demonstração. Considere o triângulo esférico ABC conforme a Figura 3.1, no qual $\alpha + \beta = a$.

Da Equação (3.11), tem-se que:

$$MP = OP \cdot \operatorname{sen}(\alpha) = OP \cdot \operatorname{sen}(a - \beta)$$

O que, pela Relação (B.2) do Apêndice B, implica em

$$MP = OP \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \cos(\beta) - OP \cdot \cos(a) \cdot \operatorname{sen}(\beta) \quad (3.31)$$

Das Equações (3.16) e (3.9) tem-se $MP = AM \cdot \cos(\widehat{B})$ e $AM = OA \cdot \operatorname{sen}(c)$, ou seja:

$$MP = OA \cdot \operatorname{sen}(c) \cdot \cos(\widehat{B}) \quad (3.32)$$

Das Equações (3.12) e (3.6) tem-se $ON = OP \cdot \cos(\beta)$ e $ON = OA \cdot \cos(b)$, ou seja:

$$OP \cdot \cos(\beta) = OA \cdot \cos(b) \quad (3.33)$$

Das Equações (3.14) e (3.7) tem-se $NP = AN \cdot \cos(\widehat{C})$ e $AN = OA \cdot \operatorname{sen}(b)$, ou seja:

$$NP = OA \cdot \operatorname{sen}(b) \cdot \cos(\widehat{C})$$

Mas da Equação (3.13), segue $NP = OP \cdot \operatorname{sen}(\beta)$, então:

$$OP \cdot \operatorname{sen}(\beta) = OA \cdot \operatorname{sen}(b) \cdot \cos(\widehat{C}) \quad (3.34)$$

Substituindo as Equações (3.32), (3.33) e (3.34) na Equação (3.31), segue que:

$$OA \cdot \operatorname{sen}(c) \cdot \cos(\widehat{B}) = OA \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \cos(b) - OA \cdot \cos(a) \cdot \operatorname{sen}(b) \cdot \cos(\widehat{C})$$

Ou seja,

$$\operatorname{sen}(c) \cdot \cos(\widehat{B}) = \operatorname{sen}(a) \cdot \cos(b) - \cos(a) \cdot \operatorname{sen}(b) \cdot \cos(\widehat{C})$$

De maneira análoga é possível provar todas as outras fórmulas enunciadas neste teorema. \square

Agora, como consequência, utilizando as Fórmulas dos Cinco Elementos e a Lei dos Senos, obtém-se as Fórmulas das Cotangentes.

Teorema 3.10. (*Fórmulas das Cotangentes*) - Considere um triângulo esférico de vértices A , B e C , com ângulos internos medindo \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} e cujos lados opostos medem a , b e c , respectivamente, como na Figura 3.1. Então, são verdadeiras:

$$\text{sen}(a) \cdot \text{cotg}(c) = \text{sen}(\hat{B}) \cdot \text{cotg}(\hat{C}) + \cos(a) \cdot \cos(\hat{B})$$

$$\text{sen}(a) \cdot \text{cotg}(b) = \text{sen}(\hat{C}) \cdot \text{cotg}(\hat{B}) + \cos(a) \cdot \cos(\hat{C})$$

$$\text{sen}(b) \cdot \text{cotg}(a) = \text{sen}(\hat{C}) \cdot \text{cotg}(\hat{A}) + \cos(b) \cdot \cos(\hat{C})$$

$$\text{sen}(b) \cdot \text{cotg}(c) = \text{sen}(\hat{A}) \cdot \text{cotg}(\hat{C}) + \cos(b) \cdot \cos(\hat{A})$$

$$\text{sen}(c) \cdot \text{cotg}(a) = \text{sen}(\hat{B}) \cdot \text{cotg}(\hat{A}) + \cos(c) \cdot \cos(\hat{B})$$

$$\text{sen}(c) \cdot \text{cotg}(b) = \text{sen}(\hat{A}) \cdot \text{cotg}(\hat{B}) + \cos(c) \cdot \cos(\hat{A})$$

Demonstração. Partindo do Teorema 3.9, considere a fórmula:

$$\text{sen}(b) \cdot \cos(\hat{C}) = \text{sen}(a) \cdot \cos(c) - \cos(a) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(\hat{B}) \quad (3.35)$$

Dividindo a Equação (3.35) por $\text{sen}(c)$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen}(b) \cdot \cos(\hat{C})}{\text{sen}(c)} &= \frac{\text{sen}(a) \cdot \cos(c)}{\text{sen}(c)} - \frac{\cos(a) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(\hat{B})}{\text{sen}(c)} \\ \text{sen}(a) \cdot \text{cotg}(c) &= \frac{\text{sen}(b) \cdot \cos(\hat{C})}{\text{sen}(c)} + \cos(a) \cdot \cos(\hat{B}) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Do Teorema 3.3, segue que:

$$\frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\hat{C})} \implies \text{sen}(c) = \frac{\text{sen}(b) \cdot \text{sen}(\hat{C})}{\text{sen}(\hat{B})} \quad (3.37)$$

Substituindo a Equação (3.37) na (3.36) tem-se

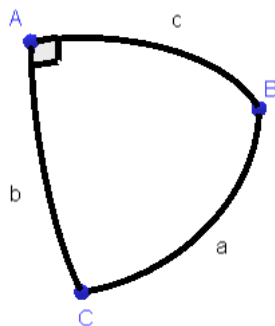
$$\text{sen}(a) \cdot \text{cotg}(c) = \text{sen}(\hat{B}) \cdot \text{cotg}(\hat{C}) + \cos(a) \cdot \cos(\hat{B})$$

As demais equações são demonstradas analogamente, partindo das outras fórmulas do Teorema 3.9. \square

3.4 Propriedades nos Triângulos Esféricos Retângulos

Nesta seção serão estudadas as resoluções dos teoremas demonstrados anteriormente em triângulos esféricos retângulos. A nomenclatura dos elementos de triângulos esféricos retângulos é análoga a dos triângulos planos retângulos. Observe a Figura 3.6, o lado a é oposto ao ângulo reto $\hat{A} = 90^\circ$ e recebe o nome de hipotenusa. O lado b é o cateto oposto ao ângulo \hat{B} e adjacente ao ângulo \hat{C} . Já o lado c é o cateto oposto ao ângulo \hat{C} e adjacente ao ângulo \hat{B} .

Figura 3.6: Triângulo esférico retângulo.



Fonte: A autora.

Num triângulo esférico retângulo tem-se cinco elementos desconhecidos uma vez que um dos ângulos é reto. Sendo $\widehat{A} = 90^\circ$, dados dois elementos os demais ficam determinados.

Como os elementos dados serão dois quaisquer dentre cinco, pode-se determinar o número de casos utilizando combinação, ou seja:

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2!3!} = \frac{20}{2} = 10$$

Porém desses 10 casos, há algumas repetições, de forma que ao descartá-las, restam apenas 6 casos distintos.

1. São dados dois ângulos agudos.
2. São dados um ângulo agudo e a hipotenusa.
3. São dados um ângulo agudo e o seu cateto adjacente.
4. São dados um ângulo agudo e o seu cateto oposto.
5. São dados um cateto e a hipotenusa.
6. São dados os dois catetos.

Proposição 3.11. *O cosseno da hipotenusa é igual ao produto dos cossenos dos catetos.*

Demonstração. Considere um triângulo esférico retângulo de modo que $\widehat{A} = 90^\circ$, disposto de acordo com a Figura 3.6. Pelo Teorema 3.1 tem-se que:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\widehat{A})$$

Como, neste caso, $\cos(\widehat{A}) = \cos(90^\circ) = 0$, então:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c)$$

Logo, está provado. □

Observação 3.12. A Proposição 3.11 também é conhecida como o Teorema de Pitágoras para Triângulos Retângulos Esféricos.

Proposição 3.13. *O seno de um cateto é igual ao produto dos senos da hipotenusa e do ângulo oposto ao referido cateto.*

Demonstração. Considere um triângulo esférico retângulo de modo que $\widehat{A} = 90^\circ$, disposto de acordo com a Figura 3.6. Pelo Teorema 3.3 tem-se que:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(\widehat{A})} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\widehat{B})} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\widehat{C})}$$

Como, neste caso, $\text{sen}(\widehat{A}) = \text{sen}(90^\circ) = 1$, assim:

$$\text{sen}(a) = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\widehat{B})} \text{ e } \text{sen}(a) = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\widehat{C})}$$

Isto implica que:

$$\text{sen}(b) = \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(\widehat{B})$$

$$\text{sen}(c) = \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(\widehat{C})$$

Logo, está provado. □

Proposição 3.14. *O cosseno da hipotenusa é igual ao produto das cotangentes dos ângulos adjacentes.*

Demonstração. Considere um triângulo esférico retângulo de modo que $\widehat{A} = 90^\circ$, disposto de acordo com a Figura 3.6. Pelo Teorema 3.4 tem-se que:

$$\cos(\widehat{A}) = -\cos(\widehat{B}) \cdot \cos(\widehat{C}) + \text{sen}(\widehat{B}) \cdot \text{sen}(\widehat{C}) \cdot \cos(a)$$

Como, neste caso, $\cos(\widehat{A}) = \cos(90^\circ) = 0$, então:

$$\begin{aligned} -\cos(\widehat{B}) \cdot \cos(\widehat{C}) + \text{sen}(\widehat{B}) \cdot \text{sen}(\widehat{C}) \cdot \cos(a) &= 0 \implies \\ \text{sen}(\widehat{B}) \cdot \text{sen}(\widehat{C}) \cdot \cos(a) &= \cos(\widehat{B}) \cdot \cos(\widehat{C}) \end{aligned}$$

Assim,

$$\cos(a) = \frac{\cos(\widehat{B}) \cdot \cos(\widehat{C})}{\text{sen}(\widehat{B}) \cdot \text{sen}(\widehat{C})} \implies \cos(a) = \cotg(\widehat{B}) \cdot \cotg(\widehat{C})$$

Logo, está provado. □

Proposição 3.15. *O cosseno de um dos ângulos não retos é igual ao produto do cosseno do lado oposto pelo seno do outro ângulo não reto.*

Demonstração. Considere um triângulo esférico retângulo de modo que $\widehat{A} = 90^\circ$, disposto de acordo com a Figura 3.6. Pelo Teorema 3.4 tem-se que:

$$\cos(\widehat{B}) = -\cos(\widehat{A}) \cdot \cos(\widehat{C}) + \text{sen}(\widehat{A}) \cdot \text{sen}(\widehat{C}) \cdot \cos(b)$$

$$\cos(\widehat{C}) = -\cos(\widehat{A}) \cdot \cos(\widehat{B}) + \text{sen}(\widehat{A}) \cdot \text{sen}(\widehat{B}) \cdot \cos(c)$$

Como $\widehat{A} = 90^\circ$, tem-se $\text{sen}(\widehat{A}) = 1$ e $\cos(\widehat{A}) = 0$, isto implica que:

$$\cos(\widehat{B}) = \text{sen}(\widehat{C}) \cdot \cos(b)$$

$$\cos(\widehat{C}) = \text{sen}(\widehat{B}) \cdot \cos(c)$$

Logo, está provado. □

Proposição 3.16. *A cotangente da hipotenusa é igual ao produto da cotangente de um cateto pelo cosseno do ângulo a ele adjacente.*

Demonstração. Considere um triângulo esférico retângulo de modo que $\widehat{A} = 90^\circ$, disposto de acordo com a Figura 3.6. Pelo Teorema 3.10 tem-se:

$$\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{cotg}(a) = \operatorname{sen}(\widehat{C}) \cdot \operatorname{cotg}(\widehat{A}) + \cos(b) \cdot \cos(\widehat{C})$$

$$\operatorname{sen}(c) \cdot \operatorname{cotg}(a) = \operatorname{sen}(\widehat{B}) \cdot \operatorname{cotg}(\widehat{A}) + \cos(c) \cdot \cos(\widehat{B})$$

Como $\widehat{A} = 90^\circ$, tem-se que $\operatorname{cotg}(\widehat{A}) = 0$, assim:

$$\operatorname{cotg}(a) \cdot \operatorname{sen}(b) = \cos(b) \cdot \cos(\widehat{C}) \implies \operatorname{cotg}(a) = \frac{\cos(b)}{\operatorname{sen}(b)} \cdot \cos(\widehat{C}) \implies$$

$$\operatorname{cotg}(a) = \operatorname{cotg}(b) \cdot \cos(\widehat{C})$$

e

$$\operatorname{cotg}(a) \cdot \operatorname{sen}(c) = \cos(c) \cdot \cos(\widehat{B}) \implies \operatorname{cotg}(a) = \frac{\cos(c)}{\operatorname{sen}(c)} \cdot \cos(\widehat{B}) \implies$$

$$\operatorname{cotg}(a) = \operatorname{cotg}(c) \cdot \cos(\widehat{B})$$

Logo, está provado. □

Proposição 3.17. *A cotangente de um ângulo não reto é igual ao produto da cotangente do seu cateto oposto pelo seno do cateto adjacente a ele.*

Demonstração. Considere um triângulo esférico retângulo de modo que $\widehat{A} = 90^\circ$, disposto de acordo com a Figura 3.6. Pelo Teorema 3.10 tem-se:

$$\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{cotg}(c) = \operatorname{sen}(\widehat{A}) \cdot \operatorname{cotg}(\widehat{C}) + \cos(b) \cdot \cos(\widehat{A})$$

$$\operatorname{sen}(c) \cdot \operatorname{cotg}(b) = \operatorname{sen}(\widehat{A}) \cdot \operatorname{cotg}(\widehat{B}) + \cos(c) \cdot \cos(\widehat{A})$$

Como $\widehat{A} = 90^\circ$, tem-se que $\operatorname{sen}(\widehat{A}) = 1$ e $\cos(\widehat{A}) = 0$, isto implica que:

$$\operatorname{cotg}(\widehat{C}) = \operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{cotg}(c)$$

$$\operatorname{cotg}(\widehat{B}) = \operatorname{sen}(c) \cdot \operatorname{cotg}(b)$$

Logo, está provado. □

Obtém-se assim pelas Proposições 3.11, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16 e 3.17 um conjunto de dez fórmulas funcionais em triângulos esféricos retângulos (com ângulo reto em \widehat{A}). São elas:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) \tag{3.38}$$

$$\operatorname{sen}(b) = \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{B}) \tag{3.39}$$

$$\operatorname{sen}(c) = \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{C}) \tag{3.40}$$

$$\cos (a) = \cotg (\widehat{B}) \cdot \cotg (\widehat{C}) \quad (3.41)$$

$$\cos (\widehat{B}) = \operatorname{sen} (\widehat{C}) \cdot \cos (b) \quad (3.42)$$

$$\cos (\widehat{C}) = \operatorname{sen} (\widehat{B}) \cdot \cos (c) \quad (3.43)$$

$$\cotg (a) = \cotg (b) \cdot \cos (\widehat{C}) \quad (3.44)$$

$$\cotg (a) = \cotg (c) \cdot \cos (\widehat{B}) \quad (3.45)$$

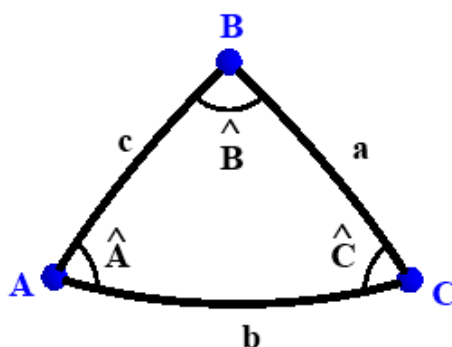
$$\cotg (\widehat{B}) = \operatorname{sen} (c) \cdot \cotg (b) \quad (3.46)$$

$$\cotg (\widehat{C}) = \operatorname{sen} (b) \cdot \cotg (c) \quad (3.47)$$

4 Resolução de Triângulos Esféricos Obliquângulos

Neste capítulo, serão estudados os seis casos de resolução de triângulos esféricos obliquângulos¹.

Figura 4.1: Triângulo obliquângulo.



Fonte: A autora.

Considere a Figura 4.1. Estas resoluções são obtidas em função dos lados e ângulos do triângulo esférico obliquângulo. Os seis casos são:

1° Caso: Dados os 3 lados a , b , c .

2° Caso: Dados os 3 ângulos \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} .

3° Caso: Dados a , b , \hat{C} , isto é: dois lados e o ângulo compreendido.

4° Caso: Dados \hat{A} , \hat{B} , c , isto é: dois ângulos e o lado adjacente.

5° Caso: Dados a , b , \hat{A} , isto é: dois lados e o ângulo oposto a um deles.

6° Caso: Dados \hat{A} , \hat{B} , a , isto é: dois ângulos e o lado oposto a um deles.

4.1 Fórmulas de Borda

As fórmulas de bordas são as resoluções obtidas por meio dos Teoremas 3.1 e 3.4 e apresentam os 2 primeiros casos de resolução dos triângulos obliquângulos. Para as demonstrações a seguir, considere a Figura 4.1.

¹Triângulos que não possuem ângulos retos.

4.1.1 1º Caso de Resolução de Triângulos Obliquângulos

Caso: Dados os 3 lados a, b, c , calcular \hat{A}, \hat{B} e \hat{C} .

Abordagem: Usar o Teorema 4.1.

Teorema 4.1. (*Fórmulas dos Marinheiros*) - Considere um triângulo esférico de vértices A, B e C , com ângulos internos medindo \hat{A}, \hat{B} e \hat{C} e cujos lados opostos medem a, b e c , respectivamente, como na Figura 4.1. Considerando s a metade do perímetro do triângulo, são verdadeiras:

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(s-b) \cdot \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen}(s) \cdot \operatorname{sen}(s-a)}$$

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(s-a) \cdot \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen}(s) \cdot \operatorname{sen}(s-b)}$$

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(s-a) \cdot \operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen}(s) \cdot \operatorname{sen}(s-c)}$$

Demonstração. Do Teorema 3.1, segue:

$$\begin{aligned} \cos(a) &= \cos(b) \cdot \cos(c) + \operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c) \cdot \cos(\hat{A}) \implies \\ \cos(\hat{A}) &= \frac{\cos(a) - \cos(b) \cdot \cos(c)}{\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c)} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Somando 1 a ambos os membros da Equação (4.1).

$$1 + \cos(\hat{A}) = 1 + \left(\frac{\cos(a) - \cos(b) \cdot \cos(c)}{\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c)} \right) \quad (4.2)$$

Desenvolvendo a Equação (4.2) tem-se que:

$$1 + \cos(\hat{A}) = \frac{\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c) + \cos(a) - \cos(b) \cdot \cos(c)}{\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c)} \implies$$

$$1 + \cos(\hat{A}) = \frac{\cos(a) - (\cos(b) \cdot \cos(c) - \operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c))}{\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c)}$$

E pela Relação (B.1) do Apêndice B:

$$1 + \cos(\hat{A}) = \frac{\cos(a) - \cos(b+c)}{\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c)} \quad (4.3)$$

Aplicando a Relação (B.5) do Apêndice B na Equação (4.3), tem-se:

$$2 \cos^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \frac{\cos(a) - \cos(b+c)}{\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c)} \quad (4.4)$$

Agora, aplicando a Relação (B.9) do Apêndice B na Equação (4.4):

$$2 \cos^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \frac{-2 \operatorname{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{a-b-c}{2}\right)}{\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c)} \quad (4.5)$$

Aplicando a Relação (B.11) do Apêndice B, tem-se:

$$2 \cos^2 \left(\frac{\hat{A}}{2} \right) = \frac{-2 \operatorname{sen} \left(\frac{a+b+c}{2} \right) \cdot \left(-\operatorname{sen} \left(\frac{b+c-a}{2} \right) \right)}{\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c)} = \frac{2 \operatorname{sen} \left(\frac{a+b+c}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{b+c-a}{2} \right)}{\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c)} \quad (4.6)$$

Por outro lado, subtraindo a Equação (4.1) de 1 e rearranjando convenientemente, tem-se que:

$$1 - \cos(\hat{A}) = 1 - \left(\frac{\cos(a) - \cos(b) \cdot \cos(c)}{\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c)} \right) \quad (4.7)$$

Desenvolvendo a Equação (4.7) tem-se:

$$1 - \cos(\hat{A}) = \frac{\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c) - \cos(a) + \cos(b) \cdot \cos(c)}{\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c)} \implies$$

$$1 - \cos(\hat{A}) = \frac{-\cos(a) + (\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c) + \cos(b) \cdot \cos(c))}{\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c)}$$

E pela Relação (B.1) do Apêndice B:

$$1 - \cos(\hat{A}) = \frac{-\cos(a) + \cos(b-c)}{\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c)} \quad (4.8)$$

Aplicando a Relação (B.4) do Apêndice B na Equação (4.8), tem-se:

$$2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\hat{A}}{2} \right) = \frac{\cos(b-c) - \cos(a)}{\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c)} \quad (4.9)$$

Aplicando as Relações (B.9) e (B.11) do Apêndice B na Equação (4.9), tem-se que:

$$2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\hat{A}}{2} \right) = \frac{-2 \operatorname{sen} \left(\frac{a+b-c}{2} \right) \cdot \left(-\operatorname{sen} \left(\frac{a+c-b}{2} \right) \right)}{\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c)} = \frac{2 \operatorname{sen} \left(\frac{a+b-c}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{a+c-b}{2} \right)}{\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c)} \quad (4.10)$$

Sendo assim, das Equações (4.6) e (4.10), se deduz:

$$\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\hat{A}}{2} \right) = \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{b+a-c}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{a+c-b}{2} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{a+b+c}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{b+c-a}{2} \right)} \quad (4.11)$$

Sendo s a metade do perímetro do triângulo, tem-se:

$$a + b + c = 2s \implies -a + a + a + b + c = 2s \implies b + c - a = 2s - 2a = 2(s - a)$$

Isto implica,

$$\frac{1}{2}(b + c - a) = s - a$$

Da mesma forma, tem-se:

$$a + b + c = 2s \implies a - b + b + b + c = 2s \implies a - b + c = 2s - 2b = 2(s - b)$$

Isto implica,

$$\frac{1}{2}(a - b + c) = s - b$$

De modo análogo também tem-se:

$$a + b + c = 2s \implies a + b + c + c - c = 2s \implies b + a - c = 2s - 2c = 2(s - c)$$

Isto implica,

$$\frac{1}{2}(b + a - c) = s - c$$

Substituindo as considerações acima na Equação (4.11), obtém-se:

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(s - b) \cdot \operatorname{sen}(s - c)}{\operatorname{sen}(s) \cdot \operatorname{sen}(s - a)} \quad (4.12)$$

E isto prova uma das fórmulas propostas. Analogamente se demonstra:

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(s - a) \cdot \operatorname{sen}(s - c)}{\operatorname{sen}(s) \cdot \operatorname{sen}(s - b)}$$

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(s - a) \cdot \operatorname{sen}(s - b)}{\operatorname{sen}(s) \cdot \operatorname{sen}(s - c)}$$

□

Observação 4.2. O Teorema 4.1 fornece as Fórmulas dos Marinheiros, que recebem esse nome por serem utilizadas na determinação da hora no mar.

4.1.2 2º Caso de Resolução de Triângulos Obliquângulos

Caso: Dados os 3 ângulos \widehat{A} , \widehat{B} , \widehat{C} , calcular os 3 lados a , b , c .

Abordagem: Usar o Teorema 4.3.

Teorema 4.3. (*Fórmulas Adicionais dos Marinheiros*) - Considere um triângulo esférico de vértices A , B e C , com ângulos internos medindo \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} e cujos lados opostos medem a , b e c , respectivamente, como na Figura 4.1. Considerando S a metade da soma dos ângulos internos do triângulo, são verdadeiras:

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{\cos(S) \cdot \cos(S - \widehat{A})}{\cos(S - \widehat{B}) \cdot \cos(S - \widehat{C})}$$

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{b}{2}\right) = -\frac{\cos(S) \cdot \cos(S - \widehat{B})}{\cos(S - \widehat{A}) \cdot \cos(S - \widehat{C})}$$

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{c}{2}\right) = -\frac{\cos(S) \cdot \cos(S - \widehat{C})}{\cos(S - \widehat{A}) \cdot \cos(S - \widehat{B})}$$

Demonstração. Apresenta-se, a seguir, duas demonstrações diferentes para este Teorema.

Demonstração utilizando o Teorema 3.4:

Do Teorema 3.4 tem-se:

$$\cos(\widehat{A}) = -\cos(\widehat{B}) \cdot \cos(\widehat{C}) + \sin(\widehat{B}) \cdot \sin(\widehat{C}) \cdot \cos(a)$$

Isto é

$$\cos(a) = \frac{\cos(\widehat{A}) + \cos(\widehat{B}) \cdot \cos(\widehat{C})}{\sin(\widehat{B}) \cdot \sin(\widehat{C})} \quad (4.13)$$

Subtraindo a Equação (4.13) de 1, tem-se:

$$\begin{aligned} 1 - \cos(a) &= 1 - \left(\frac{\cos(\widehat{A}) + \cos(\widehat{B}) \cdot \cos(\widehat{C})}{\sin(\widehat{B}) \cdot \sin(\widehat{C})} \right) \implies \\ 1 - \cos(a) &= \frac{-\cos(\widehat{A}) + (\sin(\widehat{B}) \cdot \sin(\widehat{C}) - \cos(\widehat{B}) \cdot \cos(\widehat{C}))}{\sin(\widehat{B}) \cdot \sin(\widehat{C})} \implies \\ 1 - \cos(a) &= \frac{-\cos(\widehat{A}) - (\cos(\widehat{B}) \cdot \cos(\widehat{C}) - \sin(\widehat{B}) \cdot \sin(\widehat{C}))}{\sin(\widehat{B}) \cdot \sin(\widehat{C})} \end{aligned}$$

E pela Relação (B.1) do Apêndice B:

$$\begin{aligned} 1 - \cos(a) &= \frac{-\cos(\widehat{A}) - \cos(\widehat{B} + \widehat{C})}{\sin(\widehat{B}) \cdot \sin(\widehat{C})} \implies \\ 1 - \cos(a) &= - \left(\frac{\cos(\widehat{A}) + \cos(\widehat{B} + \widehat{C})}{\sin(\widehat{B}) \cdot \sin(\widehat{C})} \right) \end{aligned}$$

Aplicando a Relação (B.4) do Apêndice B, tem-se:

$$2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right) = - \left(\frac{\cos(\widehat{B} + \widehat{C}) + \cos(\widehat{A})}{\sin(\widehat{B}) \cdot \sin(\widehat{C})} \right)$$

E, usando a Relação (B.8) do Apêndice B, segue:

$$2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{-2 \cos\left(\frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\widehat{B} + \widehat{C} - \widehat{A}}{2}\right)}{\sin(\widehat{B}) \cdot \sin(\widehat{C})} \quad (4.14)$$

Por outro lado, somando 1 na Equação (4.13), tem-se:

$$\begin{aligned} 1 + \cos(a) &= 1 + \left(\frac{\cos(\widehat{A}) + \cos(\widehat{B}) \cdot \cos(\widehat{C})}{\sin(\widehat{B}) \cdot \sin(\widehat{C})} \right) \implies \\ 1 + \cos(a) &= \frac{\cos(\widehat{A}) + (\sin(\widehat{B}) \cdot \sin(\widehat{C}) + \cos(\widehat{B}) \cdot \cos(\widehat{C}))}{\sin(\widehat{B}) \cdot \sin(\widehat{C})} \end{aligned}$$

E pela Relação (B.1) do Apêndice B:

$$1 + \cos(a) = \frac{\cos(\widehat{B} - \widehat{C}) + \cos(\widehat{A})}{\text{sen}(\widehat{B}) \cdot \text{sen}(\widehat{C})}$$

Aplicando a Relação (B.5) do Apêndice B, tem-se:

$$2 \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\cos(\widehat{B} - \widehat{C}) + \cos(\widehat{A})}{\text{sen}(\widehat{B}) \cdot \text{sen}(\widehat{C})}$$

E, usando a Relação (B.8) do Apêndice B, segue:

$$2 \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{2 \cos\left(\frac{\widehat{A} + \widehat{B} - \widehat{C}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\widehat{B} - \widehat{C} - \widehat{A}}{2}\right)}{\text{sen}(\widehat{B}) \cdot \text{sen}(\widehat{C})} \quad (4.15)$$

Das Equações (4.14) e (4.15), segue:

$$\text{tg}^2\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{\cos\left(\frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\widehat{B} + \widehat{C} - \widehat{A}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\widehat{A} + \widehat{B} - \widehat{C}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\widehat{B} - \widehat{C} - \widehat{A}}{2}\right)} \quad (4.16)$$

Da Relação (B.10) do Apêndice B segue que $\cos\left(\frac{\widehat{B} - \widehat{C} - \widehat{A}}{2}\right) = \cos\left(\frac{\widehat{A} + \widehat{C} - \widehat{B}}{2}\right)$ e a Equação (4.16) vira:

$$\text{tg}^2\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{\cos\left(\frac{\widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{A}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\widehat{B} + \widehat{C} - \widehat{A}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\widehat{A} + \widehat{B} - \widehat{C}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\widehat{A} + \widehat{C} - \widehat{B}}{2}\right)} \quad (4.17)$$

Como $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2S$, tem-se que:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2S \implies \widehat{A} + \widehat{C} - \widehat{B} = 2(S - \widehat{B}) \implies \frac{\widehat{A} + \widehat{C} - \widehat{B}}{2} = S - \widehat{B}$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2S \implies \widehat{B} + \widehat{C} - \widehat{A} = 2(S - \widehat{A}) \implies \frac{\widehat{B} + \widehat{C} - \widehat{A}}{2} = S - \widehat{A}$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2S \implies \widehat{A} + \widehat{B} - \widehat{C} = 2(S - \widehat{C}) \implies \frac{\widehat{A} + \widehat{B} - \widehat{C}}{2} = S - \widehat{C}$$

Com as considerações anteriores, da Equação (4.17) chega-se em:

$$\text{tg}^2\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{\cos(S) \cdot \cos(S - \widehat{A})}{\cos(S - \widehat{B}) \cdot \cos(S - \widehat{C})}$$

De forma análoga, se demonstra as demais fórmulas.

Demonstração utilizando os Teoremas 2.24 e 4.1:

Considere o Teorema 4.1 aplicado no triângulo polar A'B'C' do triângulo ABC (Veja a Figura 2.19):

$$\text{tg}^2\left(\frac{\widehat{A}'}{2}\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{b' + a' - c'}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{a' + c' - b'}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{a' + b' + c'}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{b' + c' - a'}{2}\right)} \quad (4.18)$$

Do Teorema 2.24 pode-se dizer:

$$\begin{aligned} a' &= 180^\circ - \widehat{A} \\ b' &= 180^\circ - \widehat{B} \\ c' &= 180^\circ - \widehat{C} \\ \widehat{A}' &= 180^\circ - a \\ \widehat{B}' &= 180^\circ - b \\ \widehat{C}' &= 180^\circ - c \end{aligned}$$

Substituindo as considerações anteriores na Equação (4.18):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2\left(\frac{180^\circ - a}{2}\right) &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ - \widehat{A} + 180^\circ - \widehat{B} - (180^\circ - \widehat{C})}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ - \widehat{A} + 180^\circ - \widehat{C} - (180^\circ - \widehat{B})}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ - \widehat{A} + 180^\circ - \widehat{B} + 180^\circ - \widehat{C}}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ - \widehat{B} + 180^\circ - \widehat{C} - (180^\circ - \widehat{A})}{2}\right)} \implies \\ \operatorname{tg}^2\left(90^\circ - \frac{a}{2}\right) &= \frac{\operatorname{sen}\left(90^\circ + \frac{-\widehat{A} - \widehat{B} + \widehat{C}}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(90^\circ + \frac{-\widehat{A} - \widehat{C} + \widehat{B}}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(270^\circ + \frac{-\widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{C}}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(90^\circ + \frac{-\widehat{B} - \widehat{C} + \widehat{A}}{2}\right)} \implies \\ \operatorname{tg}^2\left(90^\circ - \frac{a}{2}\right) &= \frac{\operatorname{sen}\left(90^\circ - \frac{\widehat{A} + \widehat{B} - \widehat{C}}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(90^\circ - \frac{\widehat{A} + \widehat{C} - \widehat{B}}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(270^\circ - \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(90^\circ - \frac{\widehat{B} + \widehat{C} - \widehat{A}}{2}\right)} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Pelas Relações (B.12), (B.13) e (B.20) do Apêndice B a Equação (4.19) fica:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\widehat{A} + \widehat{B} - \widehat{C}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\widehat{A} + \widehat{C} - \widehat{B}}{2}\right)}{-\cos\left(\frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\widehat{B} + \widehat{C} - \widehat{A}}{2}\right)}$$

Isto é

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{\cos\left(\frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\widehat{B} + \widehat{C} - \widehat{A}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\widehat{A} + \widehat{B} - \widehat{C}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\widehat{A} + \widehat{C} - \widehat{B}}{2}\right)} \quad (4.20)$$

Fazendo $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2S$, tem-se:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2S \implies \widehat{A} + \widehat{C} - \widehat{B} = 2(S - \widehat{B}) \implies \frac{\widehat{A} + \widehat{C} - \widehat{B}}{2} = S - \widehat{B}$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2S \implies \widehat{B} + \widehat{C} - \widehat{A} = 2(S - \widehat{A}) \implies \frac{\widehat{B} + \widehat{C} - \widehat{A}}{2} = S - \widehat{A}$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2S \implies \widehat{A} + \widehat{B} - \widehat{C} = 2(S - \widehat{C}) \implies \frac{\widehat{A} + \widehat{B} - \widehat{C}}{2} = S - \widehat{C}$$

Com as considerações anteriores, da Equação (4.20) chega-se em:

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{\cos(S) \cdot \cos(S - \widehat{A})}{\cos(S - \widehat{B}) \cdot \cos(S - \widehat{C})}$$

De forma análoga se demonstra as demais fórmulas. \square

4.2 Analogias de Delambre e de Napier

As Analogias de Napier e Delambre são fórmulas de aplicação deduzidas a partir das Fórmulas de Borda.

4.2.1 Fórmulas de Delambre

Teorema 4.4. (*Fórmulas de Delambre*) - Considere um triângulo esférico de vértices A , B e C , com ângulos internos medindo \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} e cujos lados opostos medem a , b e c , respectivamente, como na Figura 4.1. São verdadeiras:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{c}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) \quad (4.21)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{c}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) \quad (4.22)$$

$$\cos\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{c}{2}\right)} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) \quad (4.23)$$

$$\cos\left(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{c}{2}\right)} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) \quad (4.24)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{a-c}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) \quad (4.25)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}-\hat{C}}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a-c}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) \quad (4.26)$$

$$\cos\left(\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{a+c}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) \quad (4.27)$$

$$\cos\left(\frac{\hat{A}-\hat{C}}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a+c}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{2}\right)} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) \quad (4.28)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{b-c}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) \quad (4.29)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{b-c}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) \quad (4.30)$$

$$\cos\left(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{b+c}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a}{2}\right)} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) \quad (4.31)$$

$$\cos\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{b+c}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}\right)} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) \quad (4.32)$$

Demonstração. Primeiramente note que para x entre 0° e 180° , tem-se $\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)} = |\operatorname{sen}(x)| = \operatorname{sen}(x)$. Também observe que pela Equação (4.6):

$$2 \cos^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{b+c-a}{2}\right)}{\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c)} \implies \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{b+c-a}{2}\right)}{\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c)}} \quad (4.33)$$

Considere $a + b + c = 2s$. Assim:

$$\cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \sqrt{\frac{\text{sen}(s) \cdot \text{sen}(s-a)}{\text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c)}}} \quad (4.34)$$

De modo análogo obtêm-se:

$$\cos\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) = \sqrt{\frac{\text{sen}(s) \cdot \text{sen}(s-b)}{\text{sen}(a) \cdot \text{sen}(c)}}} \quad (4.35)$$

$$\cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) = \sqrt{\frac{\text{sen}(s) \cdot \text{sen}(s-c)}{\text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)}}} \quad (4.36)$$

Por outro lado, pela Equação (4.10), tem-se também que:

$$2 \text{sen}^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \frac{2 \text{sen}\left(\frac{a+b-c}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{a+c-b}{2}\right)}{\text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c)} \implies \text{sen}\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \sqrt{\frac{\text{sen}\left(\frac{a+b-c}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{a+c-b}{2}\right)}{\text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c)}}} \quad (4.37)$$

Considerando $a + b + c = 2s$, então

$$\text{sen}\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \sqrt{\frac{\text{sen}(s-b) \cdot \text{sen}(s-c)}{\text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c)}}} \quad (4.38)$$

De modo análogo obtêm-se:

$$\text{sen}\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) = \sqrt{\frac{\text{sen}(s-a) \cdot \text{sen}(s-c)}{\text{sen}(a) \cdot \text{sen}(c)}}} \quad (4.39)$$

$$\text{sen}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) = \sqrt{\frac{\text{sen}(s-a) \cdot \text{sen}(s-b)}{\text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)}}} \quad (4.40)$$

Segue demonstração da Equação (4.21):

Pela Relação (B.2) do Apêndice B, tem-se:

$$\text{sen}\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) \quad (4.41)$$

Substituindo as Equações (4.34), (4.35), (4.38) e (4.39) na Equação (4.41), segue que:

$$\begin{aligned} \text{sen}\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right) &= \sqrt{\frac{\text{sen}^2(s-b) \cdot \text{sen}(s-c) \cdot \text{sen}(s)}{\text{sen}^2(c) \cdot \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)}}} + \sqrt{\frac{\text{sen}^2(s-a) \cdot \text{sen}(s-c) \cdot \text{sen}(s)}{\text{sen}^2(c) \cdot \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)}}} = \\ &= \sqrt{\frac{\text{sen}(s) \cdot \text{sen}(s-c)}{\text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)}}} \cdot \frac{\text{sen}(s-b)}{\text{sen}(c)} + \sqrt{\frac{\text{sen}(s) \cdot \text{sen}(s-c)}{\text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)}}} \cdot \frac{\text{sen}(s-a)}{\text{sen}(c)} \end{aligned}$$

Evidenciando o radical, tem-se:

$$\text{sen}\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right) = \frac{\text{sen}(s-a) + \text{sen}(s-b)}{\text{sen}(c)} \cdot \sqrt{\frac{\text{sen}(s) \cdot \text{sen}(s-c)}{\text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)}}} \quad (4.42)$$

Observando que o radical aparece na Equação (4.36), tem-se:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(s-a) + \operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen}(c)} \cdot \cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) \quad (4.43)$$

Como $a+b+c=2s \implies c=2s-a-b$ e pelas Relações (B.6) e (B.10) do Apêndice B, tem-se:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right) = \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{c}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\operatorname{sen}(c)} \cdot \cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) \quad (4.44)$$

Note que, usando a Relação (B.23) do Apêndice B, tem-se:

$$2 \operatorname{sen}\left(\frac{c}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{c}{2}\right) = \operatorname{sen}(2 \cdot \frac{c}{2}) = \operatorname{sen}(c) \quad (4.45)$$

Isto é $\operatorname{sen}(c) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{c}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{c}{2}\right)$. Substituindo na Equação (4.44), se obtém:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right) = \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{c}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{c}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{c}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{c}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)$$

Ou seja:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{c}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) \quad (4.46)$$

Logo, está provada a Equação (4.21). Analogamente, se prova as Equações (4.25) e (4.29).

Segue demonstração da Equação (4.22):

Partindo da Relação (B.2) do Apêndice B, tem-se:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) \quad (4.47)$$

Substituindo as Equações (4.34), (4.35), (4.38) e (4.39) na Equação (4.47), tem-se:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right) &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2(s-b) \cdot \operatorname{sen}(s-c) \cdot \operatorname{sen}(s)}{\operatorname{sen}^2(c) \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b)}}} - \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2(s-a) \cdot \operatorname{sen}(s-c) \cdot \operatorname{sen}(s)}{\operatorname{sen}^2(c) \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b)}}} = \\ &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s) \cdot \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b)}}} \cdot \frac{\operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen}(c)} - \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s) \cdot \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b)}}} \cdot \frac{\operatorname{sen}(s-a)}{\operatorname{sen}(c)} \end{aligned}$$

Evidenciando o radical, tem-se:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(s-b) - \operatorname{sen}(s-a)}{\operatorname{sen}(c)} \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s) \cdot \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b)}}} \quad (4.48)$$

Observando que o radical aparece na Equação (4.36), tem-se:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(s-b) - \operatorname{sen}(s-a)}{\operatorname{sen}(c)} \cdot \cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) \quad (4.49)$$

Como $a+b+c=2s \implies c=2s-a-b$ e pela Relação (B.7) do Apêndice B, tem-se:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right) = \frac{2 \cos\left(\frac{c}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\operatorname{sen}(c)} \cdot \cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right) \quad (4.50)$$

Substituindo a Equação (4.45) na Equação (4.50):

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right) = \frac{2 \cos\left(\frac{c}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{c}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{c}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right) \implies \operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{c}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)$$

Logo, está provada a Equação (4.22). Analogamente, se prova as Equações (4.26) e (4.30).

Segue demonstração da Equação (4.23):

Partindo da Relação (B.1) do Apêndice B, tem-se:

$$\cos\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right) = \cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right) \quad (4.51)$$

Substituindo as Equações (4.34), (4.35), (4.38) e (4.39) na Equação (4.51), tem-se:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right) &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2(s) \cdot \operatorname{sen}(s-a) \cdot \operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen}^2(c) \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b)}}} - \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2(s-c) \cdot \operatorname{sen}(s-a) \cdot \operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen}^2(c) \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b)}}} = \\ &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-a) \cdot \operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b)}}} \cdot \frac{\operatorname{sen}(s)}{\operatorname{sen}(c)} - \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-a) \cdot \operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b)}}} \cdot \frac{\operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen}(c)} \end{aligned}$$

Evidenciando o radical, tem-se:

$$\cos\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(s) - \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen}(c)} \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-a) \cdot \operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b)}}} \quad (4.52)$$

Observando que o radical aparece na Equação (4.40), tem-se:

$$\cos\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(s) - \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen}(c)} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right) \quad (4.53)$$

Como $a + b + c = 2s \implies 2s - c = a + b$ e pela Relação (B.7) do Apêndice B, tem-se:

$$\cos\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right) = \frac{2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{c}{2}\right)}{\operatorname{sen}(c)} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right) \quad (4.54)$$

Substituindo a Equação (4.45) na Equação (4.54):

$$\cos\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right) = \frac{2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{c}{2}\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{c}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{c}{2}\right)} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right) \implies \cos\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{c}{2}\right)} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)$$

Logo, está provada a Equação (4.23). Analogamente, se prova as Equações (4.27) e (4.31).

Segue demonstração da Equação (4.24):

Partindo da Relação (B.1) do Apêndice B, tem-se:

$$\cos\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right) = \cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right) \quad (4.55)$$

Substituindo as Equações (4.34), (4.35), (4.38) e (4.39) na Equação (4.55), tem-se:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right) &= \sqrt{\frac{\text{sen}^2(s) \cdot \text{sen}(s-a) \cdot \text{sen}(s-b)}{\text{sen}^2(c) \cdot \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)}} + \sqrt{\frac{\text{sen}^2(s-c) \cdot \text{sen}(s-a) \cdot \text{sen}(s-b)}{\text{sen}^2(c) \cdot \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)}} = \\ &= \sqrt{\frac{\text{sen}(s-a) \cdot \text{sen}(s-b)}{\text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)}} \cdot \frac{\text{sen}(s)}{\text{sen}(c)} + \sqrt{\frac{\text{sen}(s-a) \cdot \text{sen}(s-b)}{\text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)}} \cdot \frac{\text{sen}(s-c)}{\text{sen}(c)} \end{aligned}$$

Evidenciando o radical, tem-se:

$$\cos\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right) = \frac{\text{sen}(s) + \text{sen}(s-c)}{\text{sen}(c)} \cdot \sqrt{\frac{\text{sen}(s-a) \cdot \text{sen}(s-b)}{\text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)}} \quad (4.56)$$

Observando que o radical aparece na Equação (4.40), tem-se:

$$\cos\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right) = \frac{\text{sen}(s) + \text{sen}(s-c)}{\text{sen}(c)} \cdot \text{sen}\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right) \quad (4.57)$$

Como $a + b + c = 2s \implies 2s - c = a + b$ e pela Relação (B.6) do Apêndice B, tem-se:

$$\cos\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right) = \frac{2 \text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{c}{2}\right)}{\text{sen}(c)} \cdot \text{sen}\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right) \quad (4.58)$$

Substituindo a Equação (4.45) na Equação (4.58):

$$\cos\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right) = \frac{2 \text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{c}{2}\right)}{2 \text{sen}\left(\frac{c}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{c}{2}\right)} \cdot \text{sen}\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right) \implies \cos\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{c}{2}\right)} \cdot \text{sen}\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)$$

Logo, está provada a Equação (4.24). Analogamente, se prova as Equações (4.28) e (4.32). \square

Partindo das Fórmulas de Delambre, pode-se deduzir as Fórmulas de Napier.

4.2.2 Fórmulas de Napier

Teorema 4.5. (*Fórmulas de Napier*) - Considere um triângulo esférico de vértices A , B e C , com ângulos internos medindo \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} e cujos lados opostos medem a , b e c , respectivamente, como na Figura 4.1. São verdadeiras:

$$\text{tg}\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)} \cdot \text{cotg}\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right) \quad (4.59)$$

$$\text{tg}\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)} \cdot \text{cotg}\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right) \quad (4.60)$$

$$\text{tg}\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right)} \cdot \text{tg}\left(\frac{c}{2}\right) \quad (4.61)$$

$$\text{tg}\left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right)} \cdot \text{tg}\left(\frac{c}{2}\right) \quad (4.62)$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} \right) = \frac{\cos \left(\frac{a-c}{2} \right)}{\cos \left(\frac{a+c}{2} \right)} \cdot \operatorname{cotg} \left(\frac{\widehat{B}}{2} \right) \quad (4.63)$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\widehat{A} - \widehat{C}}{2} \right) = \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{a-c}{2} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{a+c}{2} \right)} \cdot \operatorname{cotg} \left(\frac{\widehat{B}}{2} \right) \quad (4.64)$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{a+c}{2} \right) = \frac{\cos \left(\frac{\widehat{A} - \widehat{C}}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} \right)} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{b}{2} \right) \quad (4.65)$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{a-c}{2} \right) = \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\widehat{A} - \widehat{C}}{2} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} \right)} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{b}{2} \right) \quad (4.66)$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} \right) = \frac{\cos \left(\frac{b-c}{2} \right)}{\cos \left(\frac{b+c}{2} \right)} \cdot \operatorname{cotg} \left(\frac{\widehat{A}}{2} \right) \quad (4.67)$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} \right) = \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{b-c}{2} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{b+c}{2} \right)} \cdot \operatorname{cotg} \left(\frac{\widehat{A}}{2} \right) \quad (4.68)$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{b+c}{2} \right) = \frac{\cos \left(\frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} \right)} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{a}{2} \right) \quad (4.69)$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{b-c}{2} \right) = \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} \right)} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{a}{2} \right) \quad (4.70)$$

Demonstração. As Fórmulas de Napier são obtidas através das Fórmulas de Delambre, da seguinte forma: Dividindo a Equação (4.21) pela Equação (4.23), tem-se

$$\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} \right)} = \frac{\frac{\cos \left(\frac{a-b}{2} \right)}{\cos \left(\frac{c}{2} \right)}}{\frac{\cos \left(\frac{a+b}{2} \right)}{\cos \left(\frac{c}{2} \right)}} \cdot \frac{\cos \left(\frac{\widehat{C}}{2} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{\widehat{C}}{2} \right)}$$

Isto é:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} \right) = \frac{\cos \left(\frac{a-b}{2} \right)}{\cos \left(\frac{a+b}{2} \right)} \cdot \operatorname{cotg} \left(\frac{\widehat{C}}{2} \right)$$

Logo, está provada a Equação (4.59). Analogamente, se prova as Equações (4.63) e (4.67).

Dividindo a Equação (4.22) pela Equação (4.24), tem-se

$$\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2} \right)} = \frac{\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{a-b}{2} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{c}{2} \right)}}{\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{a+b}{2} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{c}{2} \right)}} \cdot \frac{\cos \left(\frac{\widehat{C}}{2} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{\widehat{C}}{2} \right)}$$

Isto é:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2} \right) = \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{a-b}{2} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{a+b}{2} \right)} \cdot \operatorname{cotg} \left(\frac{\widehat{C}}{2} \right)$$

Logo, está provada a Equação (4.60). Analogamente, se prova as Equações (4.64) e (4.68).

Dividindo a Equação (4.24) pela Equação (4.23), tem-se:

$$\frac{\cos\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right)} = \frac{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{c}{2}\right)} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)}{\frac{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{c}{2}\right)} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)} \implies \frac{\cos\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{\cos\left(\frac{c}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{c}{2}\right)}$$

Isto é:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right)} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{c}{2}\right)$$

Logo, está demonstrado provada a Equação (4.61). Analogamente, se prova as Equações (4.65) e (4.69).

Dividindo a Equação (4.22) pela Equação (4.21), tem-se

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right)} = \frac{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{c}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)}{\frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{c}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)} \implies \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \frac{\cos\left(\frac{c}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{c}{2}\right)}$$

Isto é:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right)} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{c}{2}\right)$$

Logo, está provada a Equação (4.62). Analogamente, se prova as Equações (4.66) e (4.70). \square

Observação 4.6. Considere que X representa qualquer elemento de um triângulo esférico (ângulo ou lado). Nas seguintes seções, serão apresentadas situações que envolvem $\operatorname{sen}(X)$ no processo de resolução de triângulos esféricos obliquângulos. O seno não é unicamente determinado entre 0° e 180° , portanto:

- Se no processo se chegar em $\operatorname{sen}(X) < 1$, a solução é possível e pode haver então duas, uma ou nenhuma solução, conforme os ângulos e lados obtidos satisfizerem ou não as relações que devem existir entre ângulos e lados. É necessário que ao maior ângulo corresponda o maior lado. Isto é uma consequência da Lei dos Senos. Além do mais, os Teoremas 2.18 e 2.25 devem ser satisfeitos. Portanto os valores de X que não satisfizerem a essa condição, devem ser rejeitados.
- Se $\operatorname{sen}(X) > 1$, o problema não admite solução alguma.
- Se $\operatorname{sen}(X) = 1$, então $X = 90^\circ$.

Com os resultados das Analogias de Delambre, Napier e a Observação 4.6, pode-se discutir os demais casos das resoluções dos Triângulos Obliquângulos, conforme as próximas seções.

4.2.3 3º Caso de Resolução de Triângulos Obliquângulos

Caso: Dados 2 lados a e b e o ângulo compreendido entre eles \widehat{C} . Calcular c , \widehat{A} e \widehat{B} .

Abordagem: As Analogias de Napier dadas pelas Equações (4.59) e (4.60), permitem calcular $\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}$ e $\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}$, de onde se deduz \widehat{A} e \widehat{B} . Conhecidos os ângulos \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} e os lados a e b , se calcula o valor de c pela Lei dos Senos (Teorema 3.3):

$$\text{sen}(c) = \frac{\text{sen}(a) \cdot \text{sen}(\widehat{C})}{\text{sen}(\widehat{A})}$$

ou

$$\text{sen}(c) = \frac{\text{sen}(b) \cdot \text{sen}(\widehat{C})}{\text{sen}(\widehat{B})}$$

Para solucionar, considere a Observação 4.6. Assim, está resolvido o terceiro caso.

4.2.4 4º Caso de Resolução de Triângulos Obliquângulos

Caso: Dados 2 ângulos \widehat{A} e \widehat{B} e o lado c adjacente a eles. Calcular os lados a e b e o ângulo \widehat{C} .

Abordagem: As Analogias de Napier dadas pelas Equações (4.61) e (4.62), permitem calcular $\frac{a+b}{2}$ e $\frac{a-b}{2}$, de onde se deduz a e b . Conhecidos os ângulos \widehat{A} e \widehat{B} , os lados a , b e c , se calcula pela Lei dos Senos (Teorema 3.3) o ângulo \widehat{C} :

$$\text{sen}(\widehat{C}) = \frac{\text{sen}(\widehat{A}) \text{sen}(c)}{\text{sen}(a)}$$

ou

$$\text{sen}(\widehat{C}) = \frac{\text{sen}(\widehat{B}) \text{sen}(c)}{\text{sen}(b)}$$

Para solucionar, considere a Observação 4.6. Assim, está resolvido o quarto caso.

4.2.5 5º Caso de Resolução de Triângulos Obliquângulos

Caso: Dados 2 lados a e b e o ângulo \widehat{A} oposto a um deles. Calcular o lado c e os ângulos \widehat{B} e \widehat{C} .

Abordagem: Conhecidos o ângulo \widehat{A} , os lados a e b , se calcula pela Lei dos Senos (Teorema 3.3) o ângulo \widehat{B} :

$$\text{sen}(\widehat{B}) = \frac{\text{sen}(b) \cdot \text{sen}(\widehat{A})}{\text{sen}(a)}$$

Para solucionar, considere a Observação 4.6. Com as devidas considerações, pelas Analogias de Napier (4.60) e (4.62) (Teorema 4.5) encontra-se os valores do lado c e do ângulo \widehat{C} :

$$\text{cotg}\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right) = \frac{\text{tg}\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)} \quad (4.71)$$

$$\text{cotg}\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right) = \frac{\text{tg}\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)} \quad (4.72)$$

$$\text{tg}\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{\text{tg}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)} \quad (4.73)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)} \quad (4.74)$$

Assim, está resolvido o quinto caso.

4.2.6 6º Caso de Resolução de Triângulos Obliquângulos

Caso: Dados 2 ângulos \widehat{A} , \widehat{B} e o lado a oposto a um deles. Calcular os lados b , c e o ângulo \widehat{C} .

Abordagem: Conhecidos os ângulos \widehat{A} , \widehat{B} e o lado a , se calcula pela Lei dos Senos (Teorema 3.3) o lado b :

$$\operatorname{sen}(b) = \frac{\operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{B})}{\operatorname{sen}(\widehat{A})}$$

Para solucionar, considere a Observação 4.6. Após, determina-se o ângulo \widehat{C} e o lado c , pelas Analogias de Napier (Teorema 4.5), como nas Equações (4.71), (4.72), (4.73) e (4.74). Assim está resolvido o sexto caso.

5 Introdução à Astronomia de Posição

5.1 Geodésia

5.1.1 Modelo Esférico

Nesta seção, serão estudados conceitos e definições a respeito da esfera terrestre e algumas relações entre esses conceitos e a trigonometria esférica apresentada nos capítulos anteriores. As considerações desta discussão serão baseadas nas bibliografias Moriconi (2018), Maes (2019), Bacelar (2020), Gamael (1948), Pena (2020), Boyer (2010) e Siqueira (2018).

O fato da Terra ser redonda é motivo de uma discussão absurda que tornou-se contemporânea, porém antes de Cristo os Babilônicos já assumiam e relatavam indícios de uma Terra Esférica. Mas de fato a Terra é esférica?

Segundo Maes (2019) a teoria terraplanista é completamente inaceitável, uma vez que não possui provas científicas que a embase. É uma teoria que se dá puramente de forma empírica ou teorias da conspiração. Em seu artigo, Maes (2019) mostra que grande parte dessa desinformação vem de vídeos produzidos por usuários de plataformas digitais e por culpa de algoritmos de buscas que influenciam seus usuários a sempre assistirem vídeos sobre curiosidades conspiratórias. O jornal *The Guardian* já fez um alerta sobre o perigo da desinformação ou de informações falsas serem aceitas como verdades e até questionou a responsabilidade dessas plataformas e das empresas criadoras dos algoritmos de busca quanto a este fato (MAES, 2019). Diante dessa discussão, é necessário que os cientistas se engajem na divulgação da Ciência de forma mais simples, para que a informação seja acessível a todos os públicos. Dessa forma, o público terá informação de qualidade para refutar falsas teorias, como a da Terra plana.

Na natureza, raramente encontram-se esferas perfeitas, nesse sentido, o modelo que mais se aproxima do formato da Terra seria uma Terra Geóide. Este conceito consiste em expressar a forma da Terra levando em consideração suas dimensões e forma, com diversas deformações e diferenças de altitude e profundidade. De fato, diversos fatores impossibilitam o planeta ser exatamente redondo. Embora a Terra apresente uma forma geóide, nas aplicações é perfeitamente considerável um modelo esférico. No modelo da Terra esférica, se encontram os polos geográficos nomeados de Norte e Sul, o eixo NS (Norte-Sul), os Paralelos e Meridianos.

Alguns livros relatam que, antes da viagem de Colombo em 1492, acreditava-se que a Terra era achatada e, portanto, havia a possibilidade de “cair” no infinito se muito perto da borda terrestre. Porém, quando o navegador português Gil Eanes em 1434 contornou o Cabo Bojador, já havia desmitificado esse problema. Até o século XVII,

alguns povos não letrados, acreditavam que apenas poderia se viver na parte do topo da Terra esférica, todavia, com a Ciência de Isaac Newton, este fato tornou-se apenas mito, pois a gravidade foi elucidada.

Não se sabe ao certo quem ou quando se concebeu a esfericidade da Terra. Contudo ela, foi observada e estuda pelo grego Aristóteles (384-322 a.C), que formulou seis argumentos para prová-la empiricamente. Um deles é o fato da sombra lunar ser esférica. Outro fato observado foi que no céu haviam elementos fixos (sempre na mesma posição) e outros que variavam sua posição, chamado pelos gregos de “Errantes”, sabe-se hoje que tratam-se de planetas. Segundo Boyer (2010), Aristóteles ainda relatou uma estimativa da circunferência da Terra de aproximadamente 60 mil km. Erastóstenes de Cirene (276-194 a.C) também estudou a esfericidade da Terra e calculou a sua circunferência em cerca de 37 mil km.

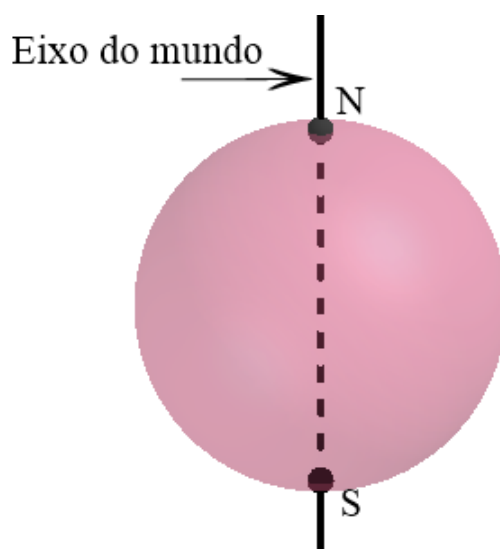
Toda a discussão sobre a esfericidade da Terra teve fim quando Alekseievitch Gagarin, cosmonauta russo, em 1961, avistou a Terra do espaço pela primeira vez e afirmou que era possível ver os rios e as dobras do terreno, o que de fato foi comprovado pela primeira foto da Terra tirada a bordo da nave americana Apollo, 17 em 1972, intitulada de “Esfera Azul” (SIQUEIRA, 2018).

5.1.2 Esfera e Triângulo Terrestre

Definição 5.1. (*Eixo do Mundo*) - Chama-se eixo do mundo o eixo no qual a esfera terrestre apresenta rotação.

Definição 5.2. (*Polos Geográficos*) - São chamados de polos geográficos (norte e sul) os pontos antípodas da esfera terrestre associados ao eixo do mundo. Observe a Figura 5.1.

Figura 5.1: Polos geográficos.

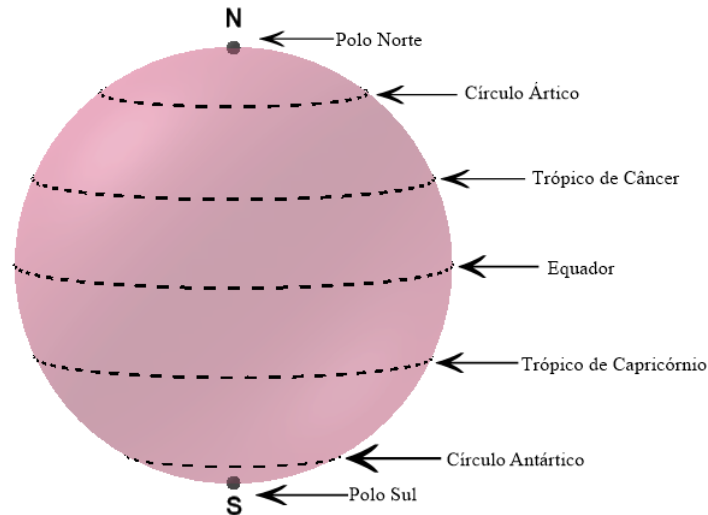


Fonte: A autora.

Definição 5.3. (*Paralelos Terrestres*) - Os círculos perpendiculares ao eixo do mundo são chamados de paralelos terrestres. O círculo máximo (paralelo máximo) é denomi-

nado Equador e divide a esfera terrestre em dois hemisférios, nomeados de Norte e Sul conforme o polo que contém. Observe a Figura 5.2.

Figura 5.2: Principais paralelos terrestres.



Fonte: A autora.

Definição 5.4. (*Meridianos Terrestres*) - Os círculos máximos que passam pelos polos geográficos são chamados de meridianos. Todos os meridianos são perpendiculares aos círculos paralelos¹. Observe a Figura 5.3.

Por um ponto qualquer da esfera terrestre, pode-se traçar um paralelo e um meridiano. Para esse ponto, a posição do paralelo e meridiano (coordenadas geográficas) em relação a um ponto fixo da esfera terrestre dará a localização sobre a esfera.

Definição 5.5. (*Longitude*) - O meridiano que passa por Greenwich² é chamado de primeiro meridiano ou Meridiano de Greenwich. Este meridiano dá origem a coordenada geográfica longitude. A longitude é denotada por λ e é medida em graus, de zero a 180° para Leste ou para Oeste³ do Meridiano de Greenwich.

Na prática, usa-se o sinal negativo para indicar a posição W e positivo para a posição E. Desse modo, pode-se escrever:

$$-180^\circ(W) \leq \lambda \leq 180^\circ(E)$$

Definição 5.6. (*Latitude*) - Latitude é o arco do meridiano, medido em graus, de um ponto até o equador. A latitude é denotada por ϕ e é medida de zero a 90° para Norte ou para Sul do equador.

Na prática, usa-se o sinal negativo para indicar a posição S e positivo para a posição N. Desse modo, pode-se escrever:

$$-90^\circ(S) \leq \phi \leq 90^\circ(N)$$

¹Em particular, todos os meridianos são perpendiculares ao Equador.

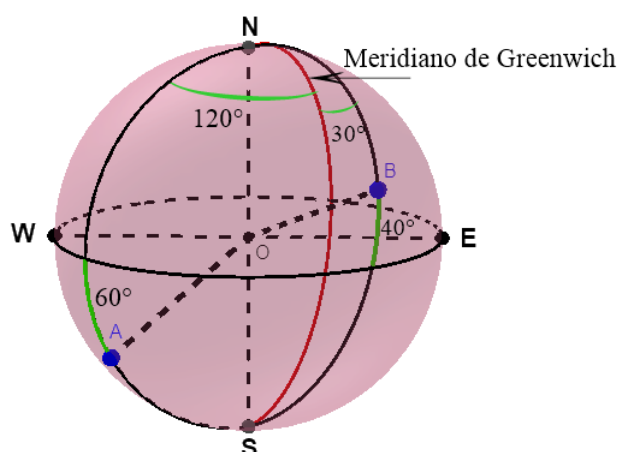
²Cidade na Inglaterra

³Usa-se a nomenclatura W e E respectivamente, *West* e *East* (Oeste e Leste em inglês)

Observação 5.7. Os dois círculos paralelos traçados a $23^{\circ}27'4''$ de latitude Norte ou Sul (vide Figura 5.2), são respectivamente o Trópico de Câncer e o Trópico de Capricórnio, estes limitam a zona equatorial. Da mesma forma os círculos traçados a $66^{\circ}33'$ de latitude Norte e Sul são respectivamente o círculo polar Ártico e o círculo polar Antártico, estes limitam as zonas polares.

A partir das considerações feitas sobre coordenadas geográficas é possível localizar um ponto na esfera terrestre. Diz-se, por exemplo, na Figura 5.3), que o ponto A tem latitude 60° S e longitude 120° W. Já o ponto B, latitude 40° N e longitude 30° E.

Figura 5.3: Coordenadas geográficas.

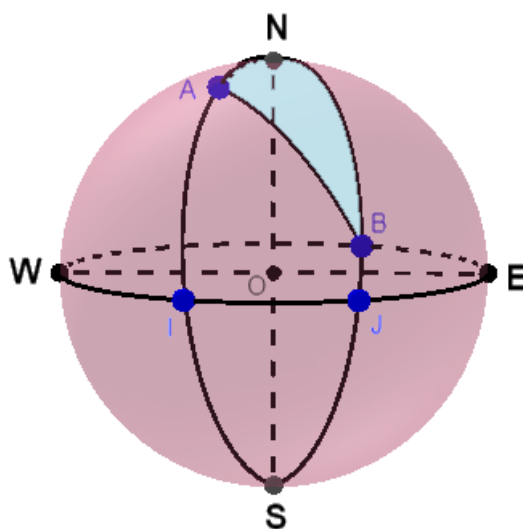


Fonte: A autora.

Definição 5.8. (*Triângulo Terrestre*) - Sejam dois pontos A e B da esfera terrestre dos quais sabe-se as latitudes e as longitudes respectivas. Considerando os meridianos desses pontos e o círculo máximo contendo os pontos A e B, o triângulo NAB (conforme a Figura 5.4) é um triângulo esférico e por sua vez um triângulo terrestre, onde o arco \widehat{AB} é a distância geográfica entre os pontos A e B. O arco \widehat{AB} é a distância mais curta entre esses pontos sobre a esfera terrestre.

⁴Notação para medida em graus, minutos e segundos. Cada $1^{\circ} = 60' = 3600''$

Figura 5.4: Triângulo terrestre.



Fonte: A autora.

A determinação das distâncias geográficas constitui uma aplicação da Trigonometria Esférica. Conforme a Figura 5.4, no triângulo esférico NAB , o arco \widehat{AN} é o complementar da latitude de A e o arco \widehat{BN} é o complementar da latitude de B . O ângulo esférico em N é medido sobre o equador no arco \widehat{IJ} e é dado imediatamente em função das longitudes dos pontos A e B .

Observação 5.9. Para calcular a distância entre dois pontos A e B na superfície terrestre, pode-se considerar o triângulo terrestre exibido na Figura 5.4 e aplicar o Teorema 3.1 (Lei dos Cossenos):

$$\cos(\widehat{AB}) = \cos(\widehat{NA}) \cdot \cos(\widehat{NB}) + \sin(\widehat{NA}) \cdot \sin(\widehat{NB}) \cdot \cos(\widehat{N}) \quad (5.1)$$

Sendo assim, a medida do arco \widehat{AB} , representa a distância entre A e B . Obtém-se tal medida fazendo:

$$\widehat{AB} = \arccos(\cos(\widehat{NA}) \cdot \cos(\widehat{NB}) + \sin(\widehat{NA}) \cdot \sin(\widehat{NB}) \cdot \cos(\widehat{N}))$$

Definição 5.10. (*Milha Marítima*) - A milha marítima internacional, também conhecida como milha náutica, é considerada equivalente a 1852 metros ou aproximadamente $1'$ (1 minuto) de qualquer arco de um círculo máximo da esfera terrestre. O raio médio dessa esfera é 6367 quilômetros.

A partir da Definição 5.10, pode-se converter uma distância dada em graus para quilômetros. Exemplo: Para uma distância avaliada em $20^{\circ}18'$, tem-se: $(20 \times 60) + 18 = 1218$ milhas marítimas ou $1218 \times 1852 = 2255736 \text{ m} = 2255,736 \text{ Km}$.

5.1.3 Cálculo de Distâncias na Terra

Utilizando os conceitos estudados anteriormente, com a fórmula fornecida pela Equação (5.1), calcula-se nesta seção distâncias entre dois pontos do planeta Terra.

Observação 5.11. Para calcular a distância entre dois locais A e B, primeiramente observa-se que se o local B, por exemplo (vide Figura 5.4), estiver no hemisfério Norte, o arco \widehat{BN} é igual ao complemento da latitude de B, por outro lado se B estiver no hemisfério Sul, o arco \widehat{BN} será igual a 90° mais a latitude. Se as longitudes de A e B forem ambas leste ou ambas oeste, o arco \widehat{IJ} (vide Figura 5.4) será igual a diferença das longitudes. Se, pelo contrário, uma estiver a leste e outra a oeste, o arco \widehat{IJ} será igual a soma das longitudes. Se esta soma for maior que 180° tira-se a soma de 360° e utiliza-se o resultado.

A título de exemplo, abaixo apresenta-se algumas localizações⁵:

Tabela 5.1: Latitudes e longitudes de alguns locais (Norte: N, Sul: S, Leste: E e Oeste: W).

Cidade	Latitude	Longitude
Rio de Janeiro	22,09° S	43,2166° W
Nova York	40,8166° N	73,9666° W
Londres	51,5166° N	0,1° W
São Francisco (Califórnia)	37,5333° N	122,2166° W
Paris	48,8333° N	2,3333° E
Sidnei	33,865143° S	151,2099° E
Moscou	55,7166° N	37,566° E
Ilha de Páscoa	27,15° S	109,425° W
São Paulo	23,5495° S	46,6388° W
Manaus	3,1333° S	60° W
Natal	5,7833° S	35,1833° W
Belo Horizonte	19,8333° S	43,95° W
Curitiba	49,2733° S	25,4284° W
Campinas	22,9073° S	47,0601° W
Piracicaba	22,7237° S	47,6468° W
São José dos Campos	23,1840° S	45,8841° W
Ajapí (Distrito de Rio Claro)	22,2819° S	47,0601° W
Rio Claro	22,41° S	47,56° W
Machu Picchu	13,15° S	72,52° W
Cidade do Cabo	33,92584° S	18,42322° E
Atenas	37,9816° N	23,7308° E
UNESP (Rio Claro)	22,3833° S	47,5333° W
Observatório (UNIVAP)	23,208° S	45,9637° W

Distância entre a UNESP/Rio Claro e o Observatório de Astronomia e Física Espacial da UNIVAP/São José dos Campos

A distância entre a UNESP *câmpus* Rio Claro e o Observatório de Astronomia e Física Espacial da Universidade do Vale do Paraíba - UNIVAP *câmpus* Urbanova/São José dos Campos (Ver Figura 5.5).

⁵As localizações das cidades brasileiras foram obtidas no site IBGE (2010).

Figura 5.5: UNESP e Observatório da UNIVAP.



(a) IGCE - UNESP



(b) Observatório da UNIVAP

Fonte: UNESP (2019)/UNIVAP (2018).

As localizações são:

- UNESP: Latitude $22,3833^\circ$ S e Longitude $47,5333^\circ$ W;
- Observatório da UNIVAP: Latitude $23,208^\circ$ S e Longitude $45,9637^\circ$ W.

Sendo o ponto A a UNESP e o ponto B o Observatório da UNIVAP, com as duas latitudes ao Sul, pela Observação 5.11, tem-se:

$$\widehat{N\hat{A}} = 90^\circ + 22,3833^\circ = 112,3833^\circ$$

$$\widehat{N\hat{B}} = 90^\circ + 23,208^\circ = 113,208^\circ$$

Sendo as duas longitudes a Oeste, o arco \widehat{IJ} (vide Figura 5.4) que mede o ângulo \widehat{N} , pela Observação 5.11, é igual à diferença das longitudes. Assim:

$$\widehat{N} = 47,5333^\circ - 45,9637^\circ = 1,5696^\circ$$

Pelo Teorema 3.1 e a Equação (5.1), tem-se:

$$\cos(\widehat{AB}) = \cos(\widehat{N\hat{A}}) \cdot \cos(\widehat{N\hat{B}}) + \sin(\widehat{N\hat{A}}) \cdot \sin(\widehat{N\hat{B}}) \cdot \cos(\widehat{N})$$

O que implica

$$\cos(\widehat{AB}) = \cos(113,208^\circ) \cdot \cos(112,3833^\circ) + \sin(113,208^\circ) \cdot \sin(112,3833^\circ) \cdot \cos(1,5696^\circ) \implies$$

$$\cos(\widehat{AB}) = 0,999577544 \implies \widehat{AB} \cong 1,66^\circ$$

Transformando $1,66^\circ = (99,6)'$, o que implica que a distância da UNESP à UNIVAP é 99,6 milhas marítimas ou $99,6 \times 1852 = 184459,2 \text{ m} = 184,4592 \text{ km}$.

Distância entre Rio Claro SP e algumas cidades estrangeiras

Pode-se calcular também a distância de Rio Claro a Machu Picchu. Vide Figura 5.7(a).

As localizações são:

- Rio Claro: Latitude $22,41^\circ$ S e Longitude $47,56^\circ$ W;
- Machu Picchu: Latitude $13,15^\circ$ S e Longitude $72,52^\circ$ W.

Sendo o ponto A Rio Claro e o ponto B Machu Picchu, com as duas latitudes ao Sul, pela Observação 5.11, tem-se:

$$\widehat{NA} = 90^\circ + 22,41^\circ = 112,41^\circ$$

$$\widehat{NB} = 90^\circ + 13,15^\circ = 103,15^\circ$$

Sendo as duas longitudes a Oeste, o arco \widehat{IJ} (vide Figura 5.4) que mede o ângulo \widehat{N} , pela Observação 5.11, é igual à diferença das longitudes. Assim:

$$\widehat{N} = 72,52^\circ - 47,56^\circ = 24,96^\circ$$

Pelo Teorema 3.1 e a Equação (5.1), tem-se:

$$\cos(\widehat{AB}) = \cos(\widehat{NA}) \cdot \cos(\widehat{NB}) + \sin(\widehat{NA}) \cdot \sin(\widehat{NB}) \cdot \cos(\widehat{N})$$

O que implica

$$\cos(\widehat{AB}) = \cos(112,41^\circ) \cdot \cos(103,15^\circ) + \sin(112,41^\circ) \cdot \sin(103,15^\circ) \cdot \cos(24,96^\circ) \implies$$

$$\cos(\widehat{AB}) = 0,902888451 \implies \widehat{AB} \cong 25,45^\circ$$

Transformando $25,45^\circ = (1527)'$, o que implica que a distância de Rio Claro a Machu Picchu é 1527 milhas marítimas ou $1527 \times 1852 = 2828004 \text{ m} = 2828,004 \text{ km}$.

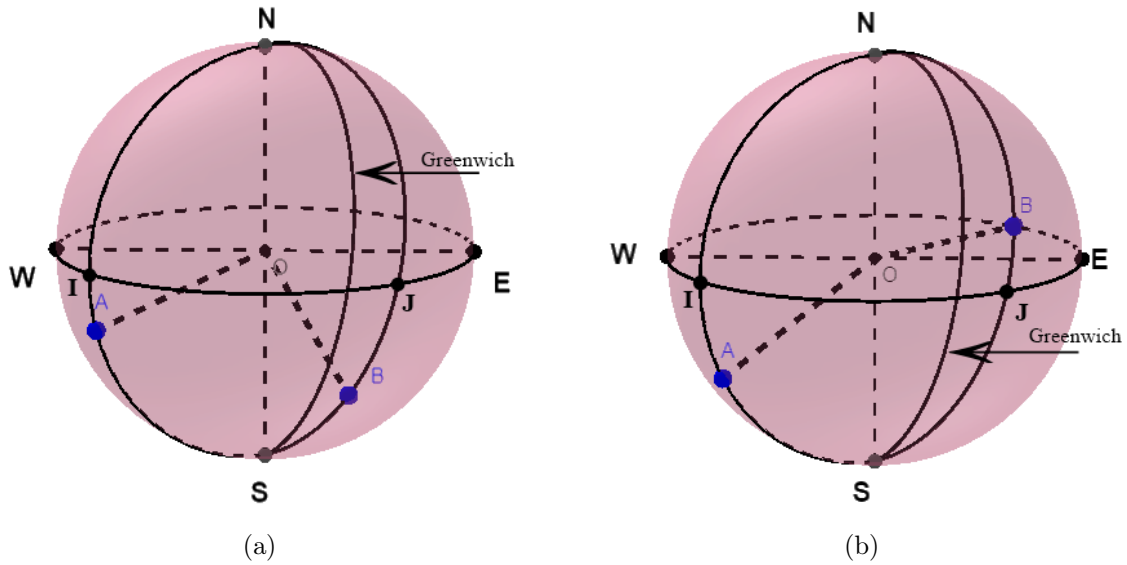
Da mesma forma calcula-se a distância entre Rio Claro e Cidade do Cabo (África do Sul). Vide Figura 5.7(b).

As localizações são:

- Rio Claro: Latitude $22,41^\circ$ S e Longitude $47,56^\circ$ W;
- Cidade do Cabo: Latitude $33,92584^\circ$ S e Longitude $18,42322^\circ$ E.

Sendo o ponto A Rio Claro e o ponto B Cidade do Cabo, com as duas latitudes ao Sul, conforme a Figura 5.6 (a), pela Observação 5.11, tem-se:

Figura 5.6: Pontos A a Oeste e B a Leste.



Fonte: A autora.

$$\widehat{NA} = 90^\circ + 22,41^\circ = 112,41^\circ$$

$$\widehat{NB} = 90^\circ + 33,92584^\circ = 123,92584^\circ$$

Sendo uma das longitudes a Oeste e outra a Leste, o arco \widehat{IJ} (vide Figura 5.6 (a)) que mede o ângulo \widehat{N} , pela Observação 5.11, é igual à soma das longitudes. Assim:

$$\widehat{N} = 18,42322^\circ + 47,56^\circ = 65,98322^\circ$$

Pelo Teorema 3.1 e a Equação (5.1), tem-se:

$$\cos(\widehat{AB}) = \cos(\widehat{NA}) \cdot \cos(\widehat{NB}) + \sin(\widehat{NA}) \cdot \sin(\widehat{NB}) \cdot \cos(\widehat{N})$$

O que implica

$$\cos(\widehat{AB}) = \cos(112,41^\circ) \cdot \cos(123,92584^\circ) + \sin(112,41^\circ) \cdot \sin(123,92584^\circ) \cdot \cos(65,98322^\circ) \implies$$

$$\cos(\widehat{AB}) = 0,524984389 \implies \widehat{AB} \cong 58,33^\circ$$

Transformando $58,33^\circ = (3499,8)'$, o que implica que a distância de Rio Claro à Cidade do Cabo é 3499,8 milhas marítimas ou $3499,8 \times 1852 = 6481629,6 \text{ m} = 6481,6296 \text{ km}$.

Da mesma forma calcula-se a distância entre Rio Claro e Atenas (Grécia). Vide Figura 5.7 (c).

As localizações são:

- Rio Claro: Latitude $22,41^\circ \text{ S}$ e Longitude $47,56^\circ \text{ W}$;
- Atenas: Latitude $37,9816^\circ \text{ N}$ e Longitude $23,7308^\circ \text{ E}$.

Sendo o ponto A Rio Claro e o ponto B Atenas, com uma latitude ao Sul e outra ao Norte, conforme a Figura 5.6 (b), pela Observação 5.11, tem-se:

$$\widehat{NA} = 90^\circ + 22,41^\circ = 112,41^\circ$$

$$\widehat{NB} = 90^\circ - 37,9816^\circ = 52,0184^\circ$$

Sendo uma das longitudes a Oeste e outra a Leste, o arco \widehat{IJ} (vide Figura 5.6 (b)) que mede o ângulo \widehat{N} , pela Observação 5.11, é igual à soma das longitudes. Assim:

$$\widehat{N} = 23,7308^\circ + 47,56^\circ = 71,2908^\circ$$

Pelo Teorema 3.1 e Equação (5.1), tem-se:

$$\cos(\widehat{AB}) = \cos(\widehat{NA}) \cdot \cos(\widehat{NB}) + \sin(\widehat{NA}) \cdot \sin(\widehat{NB}) \cdot \cos(\widehat{N})$$

O que implica

$$\cos(\widehat{AB}) = \cos(112,41^\circ) \cdot \cos(52,0184^\circ) + \sin(112,41^\circ) \cdot \sin(52,0184^\circ) \cdot \cos(71,2908^\circ) \implies$$

$$\cos(\widehat{AB}) = 0,0008772909359 \implies \widehat{AB} \cong 90,05^\circ$$

Transformando $90,05^\circ = (5403)'$, o que implica que a distância de Rio Claro à Atenas é 5403 milhas marítimas ou $5403 \times 1852 = 10006356 \text{ m} = 10006,356 \text{ km}$.

De forma análoga, calcula-se também a distância entre Rio Claro e Sidnei (Austrália). Vide Figura 5.7 (d).

As localizações são:

- Rio Claro: Latitude $22,41^\circ \text{ S}$ e Longitude $47,56^\circ \text{ W}$;
- Sidnei: Latitude $33,865143^\circ \text{ S}$ e Longitude $151,2099^\circ \text{ E}$.

Sendo o ponto A Rio Claro e o ponto B Sidnei, com ambas latitudes ao Sul, conforme a Figura 5.6 (a), pela Observação 5.11, tem-se:

$$\widehat{NA} = 90^\circ + 22,41^\circ = 112,41^\circ$$

$$\widehat{NB} = 90^\circ + 33,865143^\circ = 123,865143^\circ$$

Sendo uma das longitudes a Oeste e outra a Leste, o arco \widehat{IJ} (vide Figura 5.6 (b)) que mede o ângulo \widehat{N} , pela Observação 5.11, é igual à soma das longitudes. Assim:

$$\widehat{N} = 151,2099^\circ + 47,56^\circ = 198,7699^\circ$$

Pelo Teorema 3.1 e Equação (5.1), tem-se:

$$\cos(\widehat{AB}) = \cos(\widehat{NA}) \cdot \cos(\widehat{NB}) + \sin(\widehat{NA}) \cdot \sin(\widehat{NB}) \cdot \cos(\widehat{N})$$

O que implica

$$\cos(\widehat{AB}) = \cos(112,41^\circ) \cdot \cos(123,865143^\circ) + \sin(112,41^\circ) \cdot \sin(123,865143^\circ) \cdot \cos(198,7699^\circ) \implies$$

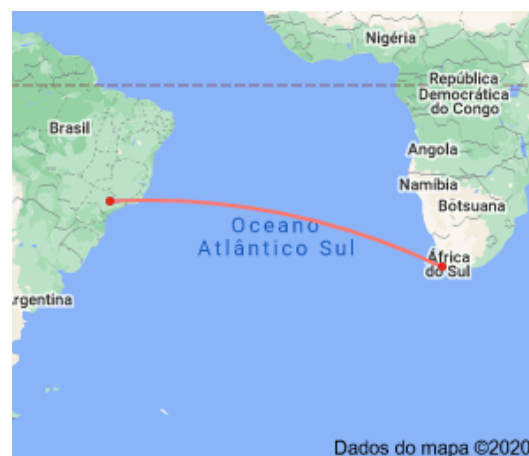
$$\cos(\widehat{AB}) = -0,514380852 \implies \widehat{AB} \cong 120,95^\circ$$

Transformando $120,95^\circ = (7257)'$, o que implica que a distância de Rio Claro à Atenas é 7257 milhas marítimas ou $7257 \times 1852 = 13439964 \text{ m} = 13439,964 \text{ km}$.

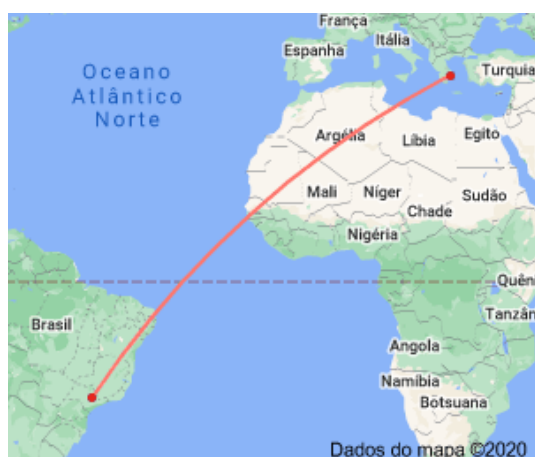
Figura 5.7: Distâncias entre Rio Claro e algumas cidades estrangeiras ilustradas com Google Maps.



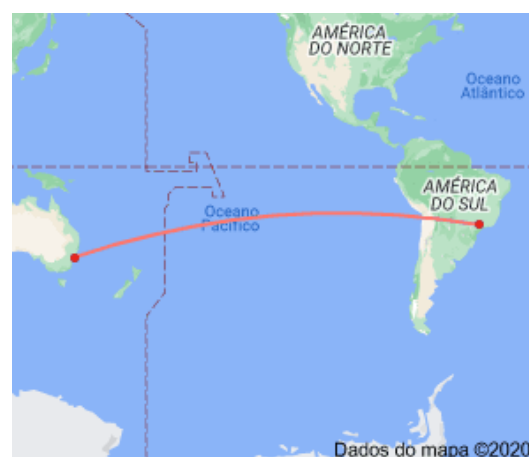
(a) Rio Claro - Machu Picchu



(b) Rio Claro - Cidade do Cabo



(c) Rio Claro - Atenas



(d) Rio Claro - Sidnei

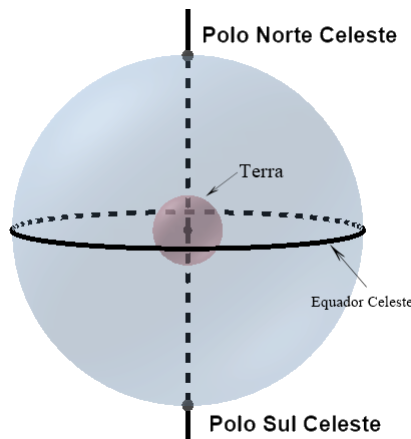
Fonte: A autora.

5.2 A Esfera Celeste

A ideia de Esfera Celeste remete ao tempo dos astrônomos gregos antigos, que conjecturavam que o céu enrustado de estrelas fosse uma grande esfera, na qual a Terra estaria envolta. A partir de tal conjectura, surgiu o conceito formal de Esfera Celeste.

Definição 5.12. (*Esfera Celeste*) - *Esfera celeste é uma esfera imaginária gigantesca, centrada na Terra, girando em torno de um eixo que é o prolongamento do eixo de rotação da Terra (eixo do mundo). Observe a Figura 5.8.*

Figura 5.8: Esfera celeste.



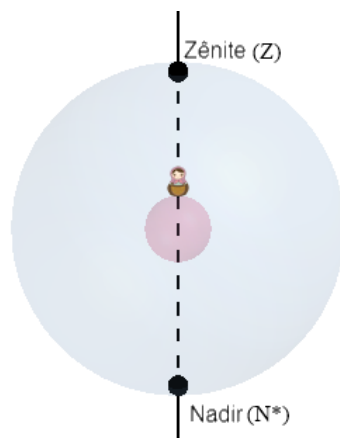
Fonte: A autora.

Definição 5.13. (*Polos Celestes*) - O Polo Celeste Norte é o ponto em que o prolongamento do eixo de rotação da Terra intercepta a esfera celeste no hemisfério norte. Da mesma maneira o Polo Celeste Sul é o ponto em que o prolongamento do eixo de rotação da Terra intercepta a esfera celeste no hemisfério sul. O Polo Celeste Norte (PN) pode ser conhecido também como Austral ou Antártico. Já o Polo Celeste Sul (PS) pode ser chamado também de Ártico ou Boreal. Observe a Figura 5.8.

Definição 5.14. (*Vertical do Observador*⁶) - Vertical do observador é o eixo da esfera celeste que passa pelo ponto no qual se encontra o observador. Observe a Figura 5.9

Definição 5.15. (*Zênite e Nadir*) - Os dois pontos diametralmente opostos produzidos pela intersecção da vertical com a esfera celeste são chamados Zênite (Z) e Nadir (N*), sendo o primeiro o ponto localizado acima do observador e o segundo o ponto localizado abaixo. Observe a Figura 5.9

Figura 5.9: Vertical/ Zênite e Nadir.

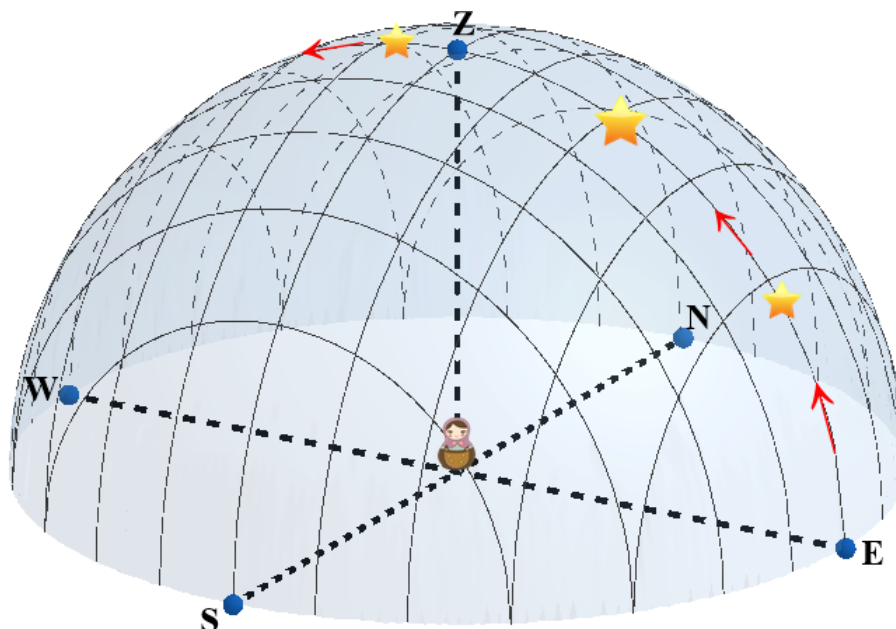


Fonte: A autora.

⁶Quando, ao longo da dissertação, o termo “vertical” for citado, esse se referirá à vertical do observador da Definição 5.14.

Definição 5.16. (*Horizonte do Observador*⁷) - *Horizonte do observador é o plano tangente à Terra e perpendicular à vertical do lugar em que se encontra o observador. Observe a Figura 5.10.*

Figura 5.10: Esfera celeste e horizonte.



A autora.

Observação 5.17. Devido às dimensões gigantescas da esfera celeste, também pode-se considerar o observador como o seu centro. Na esfera celeste, supõe-se a projeção dos astros, que se movem em movimento aparente de Leste (E) para Oeste (W). Vide Figura 5.10.

Observação 5.18. Na prática, para as contas, muitas vezes se considera o raio da esfera celeste como unitário.

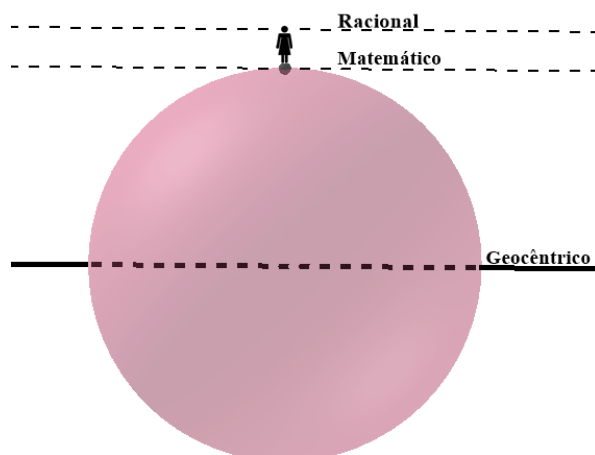
Observação 5.19. Algumas bibliografias subdividem ainda o Horizonte como: Horizonte Matemático, Horizonte Racional, Horizonte Geocêntrico e Horizonte Aparente.

- Horizonte Matemático - é o que toca a superfície da Terra nos pés do observador;
- Horizonte Racional - é o que passa pelo olho do observador;
- Horizonte Geocêntrico - é o que passa pelo centro da Terra;

Vide Figura 5.11.

⁷Quando for citado ao longo da dissertação horizonte, este irá se referir ao horizonte do observador Definição 5.16.

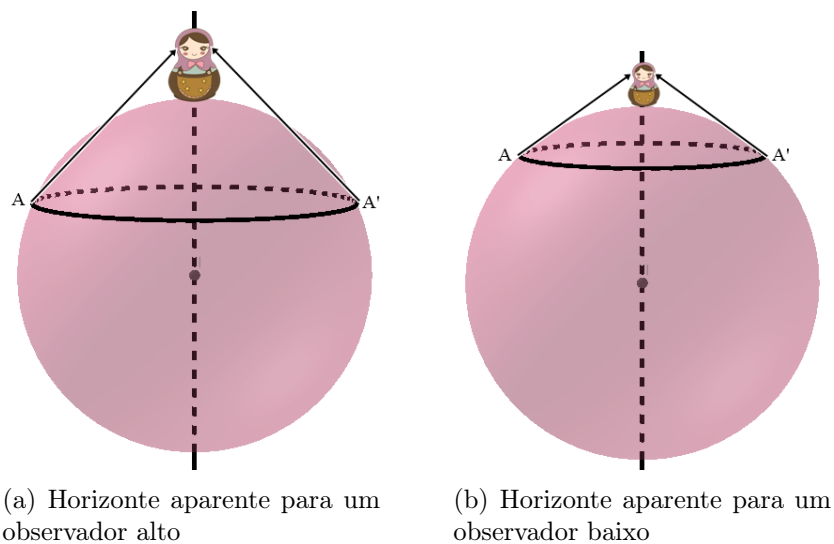
Figura 5.11: Horizontes.



Fonte: A autora.

- Horizonte Aparente (ou Ordinário) - é a linha pela qual parecem se interceptar a esfera celeste e a Terra aos olhos do observador. Evidentemente esse horizonte aumenta ou diminui de acordo com a altura do observador. Vide Figura 5.12.

Figura 5.12: Horizonte aparente.



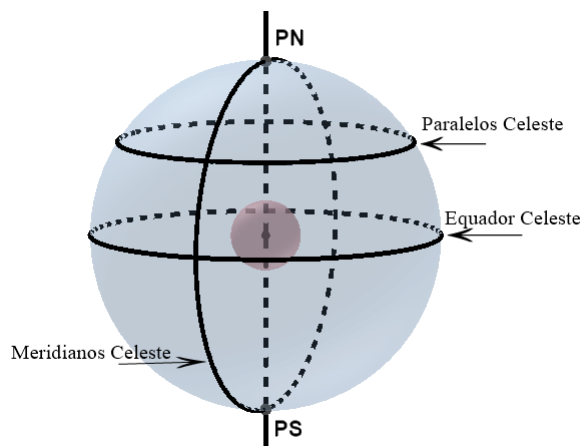
Fonte: A autora.

Definição 5.20. (*Equador Celeste*) - Equador celeste é o círculo máximo em que o plano do equador da Terra intercepta a esfera celeste.

Definição 5.21. (*Paralelos Celestes*) - São chamados de paralelos celestes os círculos menores determinados pela interseção sobre a esfera celeste e planos paralelos ao plano do equador. Observe a Figura 5.13.

Definição 5.22. (*Meridianos Celestes*) - São chamados de meridianos celestes os círculos máximos cujos planos contém os dois polos celestes. Tais meridianos dividem ao meio o equador celeste e todos os paralelos celestes. Observe a Figura 5.13.

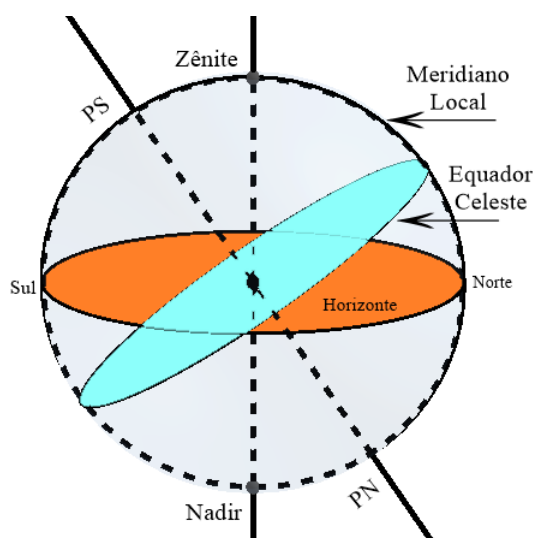
Figura 5.13: Paralelos e meridianos celeste.



Fonte: A autora.

Definição 5.23. (*Meridiano Local*) - Meridiano local é o meridiano celeste que passa também pelo Zênite. Também é conhecido como Meridiano do Lugar. Observe a Figura 5.14.

Figura 5.14: Meridiano local.

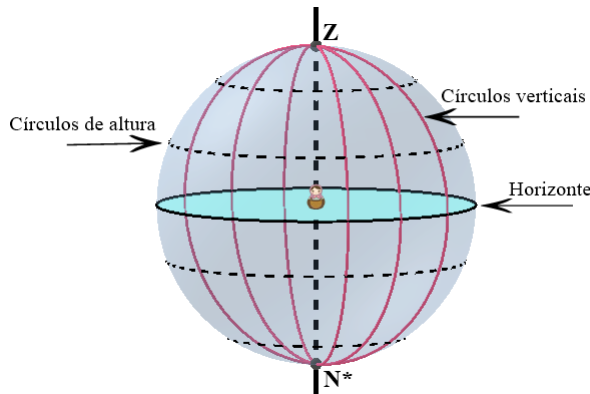


Fonte: A autora.

Definição 5.24. (*Círculos de Altura*) - Círculos da esfera celeste paralelos ao horizonte são chamados de círculos de altura. São também conhecidos como almucântaras ou paralelos de altura. Observe a Figura 5.15.

Definição 5.25. (*Círculos Verticais*) - *Círculo vertical é qualquer semicírculo máximo da esfera celeste cujo plano contém a vertical do lugar. Os círculos verticais começam no Zênite e terminam no Nadir. Observe a Figura 5.15.*

Figura 5.15: Círculos verticais e círculos de altura.



Fonte: A autora.

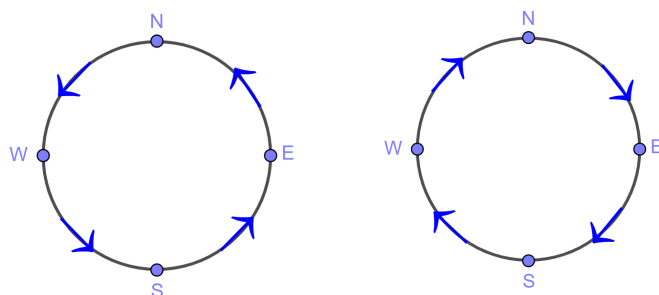
Com as devidas definições, a próxima seção abordará conceitos de localização na esfera celeste.

5.3 Coordenadas Celestes

Existem várias formas de se localizar um ponto na esfera celeste, de maneira que cada forma possui diferentes características como base para essa localização.

Antes de apresentar os diferentes sistemas de coordenadas, é necessário definir sentidos para rotação. Adota-se o sentido direto (S-E-N-W-S) e retrógrado (S-W-N-E-S), conforme a Figura 5.16.

Figura 5.16: Sentido direto e retrógrado.



(a) Sentido direto

(b) Sentido retrógrado

Fonte: A autora.

5.3.1 Coordenadas Horizontais

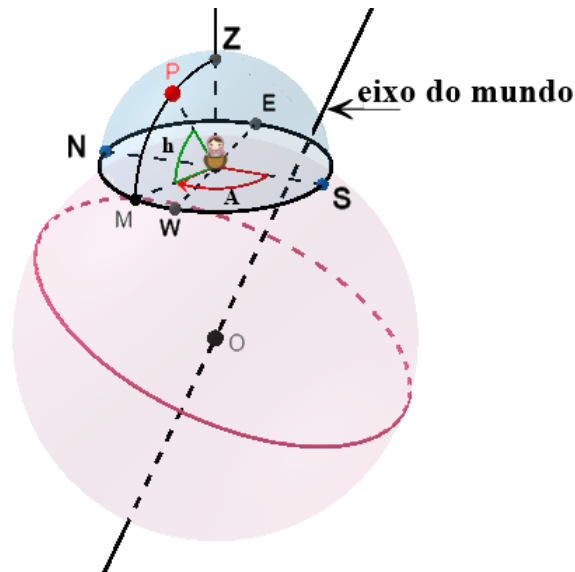
Este sistema utiliza o plano horizonte do observador como referencial. As principais coordenadas horizontais são Azimute e Altura.

Definição 5.26. (*Altura*) - *Altura é o arco medido sobre o círculo vertical do astro P com origem no horizonte e fim no astro. Denotada pela letra h e com medida entre -90° e 90° .*

Observe a Figura 5.17, o arco \widehat{MP} é a altura do ponto P acima do horizonte.

$$-90^\circ \leq h \leq 90^\circ$$

Figura 5.17: Coordenadas horizontais.



Fonte: A autora.

Definição 5.27. (*Distância Zenital*) - *Denomina-se o complemento da altura como distância zenital, isto é, a medida do arco sobre o círculo vertical com origem no Zênite e fim no astro. Denotada pela letra z e com medida entre 0° e 180° .*

De acordo com a Definição 5.27, tem-se:

$$h + z = 90^\circ$$

e

$$0^\circ \leq z \leq 180^\circ$$

Definição 5.28. (*Azimute*) - *Denomina-se o arco medido sobre o horizonte desde o ponto sul (meridiano) até o círculo vertical do astro como azimute. Denotado pela letra A, o azimute varia entre 0° e 360° , medido no sentido retrógrado.*

Observe a Figura 5.17, o arco \widehat{SM} é o azimute A do ponto P.

$$0^\circ \leq A \leq 360^\circ$$

Observação 5.29. O sistema horizontal é um sistema local, pois depende do lugar e do instante do observador fixo na Terra.

Relação entre as coordenadas retilíneas e as horizontais

Como referencial considere eixos ortogonais tendo como origem o centro da esfera celeste de raio r na posição do observador, conforme a Figura 5.18, onde o eixo z é a vertical do observador, o eixo x é a linha norte-sul e o eixo y é a linha leste-oeste. Têm-se então os planos: zOx (plano meridiano), xOy (plano do horizonte) e zOy (plano do primeiro vertical).

Do triângulo OBC (o ponto B é a projeção ortogonal de P sobre o plano do horizonte e C é a projeção do ponto B no eixo x), tem-se:

$$x = OC = OB \cdot \cos(A) \quad (5.2)$$

Do triângulo OPB , tem-se:

$$OB = OP \cdot \cos(h) = r \cdot \cos(h) \quad (5.3)$$

Das Equações (5.2) e (5.3), segue:

$$x = r \cdot \cos(A) \cdot \cos(h)$$

Do triângulo OBC , tem-se:

$$y = CB = OB \cdot \sin(A) \quad (5.4)$$

Das Equações (5.3) e (5.4), segue:

$$y = r \cdot \cos(h) \cdot \sin(A)$$

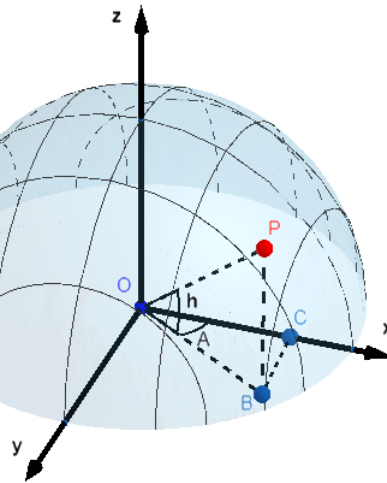
Do triângulo OPB , tem-se:

$$z = PB = r \cdot \sin(h)$$

Deste modo, considerando o referencial adotado, tem-se a seguinte relação entre as coordenadas retilíneas e as horizontais:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(A) \cdot \cos(h) \\ y = r \cdot \cos(h) \cdot \sin(A) \\ z = r \cdot \sin(h) \end{cases}$$

Figura 5.18: Relação entre coordenadas retilíneas e horizontais.



Fonte: A autora.

5.3.2 Coordenadas Equatoriais

Este sistema utiliza como plano referencial o do Equador Celeste e suas principais coordenadas são a Ascensão Reta e a Declinação. Dessa forma, suas coordenadas não dependem da posição do observador no globo.

Definição 5.30. (*Eclíptica*) - Chama-se eclíptica o círculo formado pelo movimento aparente do Sol no referencial da Terra. Observe a Figura 5.19.

A Eclíptica possui 4 pontos principais que são: os equinócios de março e setembro (pontos de Áries e Libra) e os solstícios de junho e dezembro (esses são os dois pontos mais afastados do plano do equador).

O equinócio de março acontece próximo a 21 de março de cada ano. Ele ocorre devido ao Sol cruzar o equador celeste, indo do hemisfério sul ao hemisfério norte. Na Terra os raios solares incidem diretamente sobre o Equador. Já o equinócio de setembro ocorre próximo a 23 de setembro, de forma que o Sol cruza o Equador indo do hemisfério norte para o hemisfério sul. Os raios do Sol também incidem diretamente sobre o Equador.

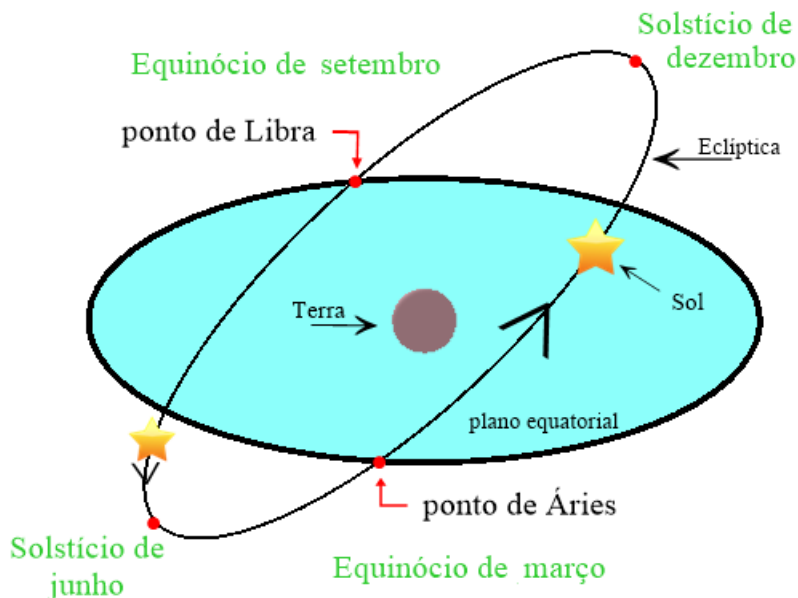
O solstício de junho acontece próximo a 21 de junho de cada ano. Ele ocorre devido ao Sol estar na máxima inclinação norte incidindo diretamente na região do Trópico de Câncer na Terra. Já o solstício de dezembro ocorre próximo a 21 de dezembro, quando o Sol está na sua inclinação máxima sul, incidindo diretamente na região do Trópico de Capricórnio na Terra.

Observação 5.31. As palavras solstício e equinócio vêm do latim: *sol+sticium* que significa Sol parado e *aequus+nox* que significa noites iguais.

Definição 5.32. (*Ponto de Áries*) - O Ponto de Áries é um ponto do equador celeste, ocupado pelo Sol no equinócio de março, isto é, quando o Sol cruza o equador vindo do hemisfério sul. Denotado por γ , este ponto é um dos pontos da intersecção entre a eclíptica e o equador celeste. Observe a Figura 5.19.

Definição 5.33. (*Ponto de Libra*) - O Ponto de Libra é o ponto diametralmente oposto ao Ponto de Áries. É o ponto ocupado pelo Sol no equinócio de setembro, isto é, quando o Sol cruza o equador vindo do hemisfério norte. Denotado por Ω , este ponto é um dos pontos da intersecção entre a eclíptica e o equador celeste. Observe a Figura 5.19.

Figura 5.19: Eclíptica, solstícios e equinócios.



Fonte: A autora.

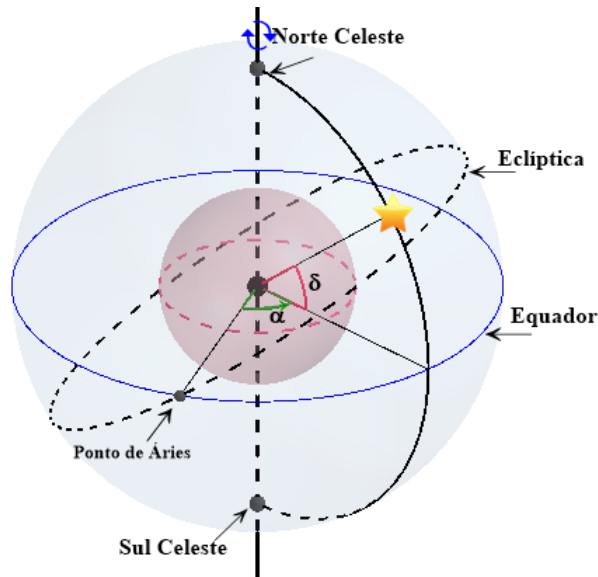
Observação 5.34. Os solstícios e os equinócios demarcam os momentos de transição entre as estações do ano. As mudanças dependem do hemisfério e ocorrem de acordo com a Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Equinócios e solstícios no hemisfério norte e hemisfério sul.

Mês	Hemisfério Norte	Hemisfério Sul
Março	Equinócio de Primavera (entrada da primavera)	Equinócio de Outono (entrada do outono)
Junho	Solstício de Verão (entrada do verão)	Solstício de Inverno (entrada do inverno)
Setembro	Equinócio de Outono (entrada do outono)	Equinócio de Primavera (entrada da primavera)
Dezembro	Solstício de Inverno (entrada do inverno)	Solstício de Verão (entrada do verão)

Definição 5.35. (*Ascensão Reta*) - Ascensão reta é o arco medido sobre o equador celeste, com origem no meridiano que passa pelo ponto de Áries e fim no meridiano do astro. Denotado por α , varia entre 0° e 360° , medido no sentido direto.

Figura 5.20: Coordenadas equatoriais.



Fonte: A autora.

Observe a Figura 5.20:

$$0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$$

Observação 5.36. Também é comum a coordenada ascensão reta ser medida em horas: $0h \leq \alpha \leq 24h$.

Definição 5.37. (*Declinação*) - Declinação é o arco medido sobre o meridiano do astro, com origem no equador celeste e extremidade no astro. Denotada por δ e com medida entre -90° e 90° .

Observe a Figura 5.20:

$$-90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$$

Definição 5.38. (*Distância Polar*) - Denomina-se o complemento da declinação como distância polar, isto é, o arco sobre o meridiano do astro com origem no Polo Norte e fim no astro. Denotada por Δ e com medida entre 0° e 180° .

De acordo com a Definição 5.38, tem-se:

$$\delta + \Delta = 90^\circ$$

e

$$0^\circ \leq \Delta \leq 180^\circ$$

Observação 5.39. O sistema equatorial não depende do lugar e instante de observação.

Relação entre as coordenadas Retilíneas e Equatoriais:

Como referencial considere os eixos ortogonais tendo como origem o centro da esfera celeste no centro da Terra, conforme a Figura 5.21, onde o eixo z é a eixo do mundo, a linha dos equinócios o eixo y e a linha dos solstícios o eixo x . Dessas informações têm-se:

Do triângulo OPB (o ponto B é a projeção ortogonal de P sobre o plano do equador e C é a projeção de B no eixo y), tem-se:

$$z = PB = OP \cdot \text{sen}(\delta) = r \cdot \text{sen}(\delta)$$

Do triângulo OPB, tem-se:

$$OB = r \cdot \text{cos}(\delta) \quad (5.5)$$

Do triângulo OBC, tem-se:

$$y = OC = OB \cdot \text{cos}(\alpha) \quad (5.6)$$

Das Equações (5.5) e (5.6), segue:

$$y = r \cdot \text{cos}(\delta) \cdot \text{cos}(\alpha)$$

Do triângulo OBC, tem-se:

$$x = CB = OB \cdot \text{sen}(\alpha) \quad (5.7)$$

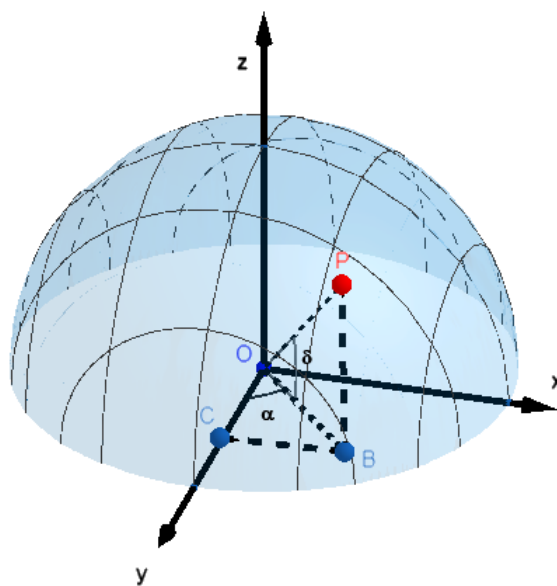
Das Equações (5.5) e (5.7), segue:

$$x = r \cdot \text{cos}(\delta) \cdot \text{sen}(\alpha)$$

Deste modo, considerando o referencial adotado, tem-se a seguinte relação entre as coordenadas retilíneas e as equatoriais:

$$\begin{cases} x = r \cdot \text{cos}(\delta) \cdot \text{sen}(\alpha) \\ y = r \cdot \text{cos}(\delta) \cdot \text{cos}(\alpha) \\ z = r \cdot \text{sen}(\delta) \end{cases}$$

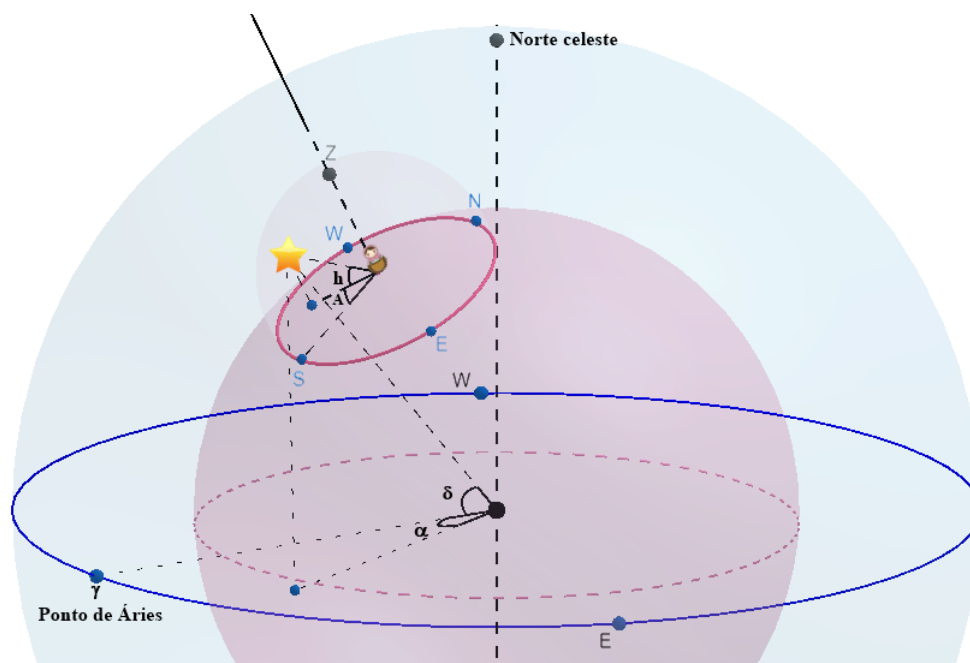
Figura 5.21: Relação coordenadas retilíneas e equatoriais.



Fonte: A autora.

A Figura 5.22 exibe uma comparação das Coordenadas Horizontais e Coordenadas Equatoriais referentes a um mesmo astro.

Figura 5.22: Coordenadas horizontais e equatoriais



Fonte: A autora.

5.3.3 Coordenadas Eclípticas

Neste sistema de coordenadas, o plano principal é o plano da Eclíptica. As coordenadas principais são a Latitude Celeste e a Longitude Celeste⁸.

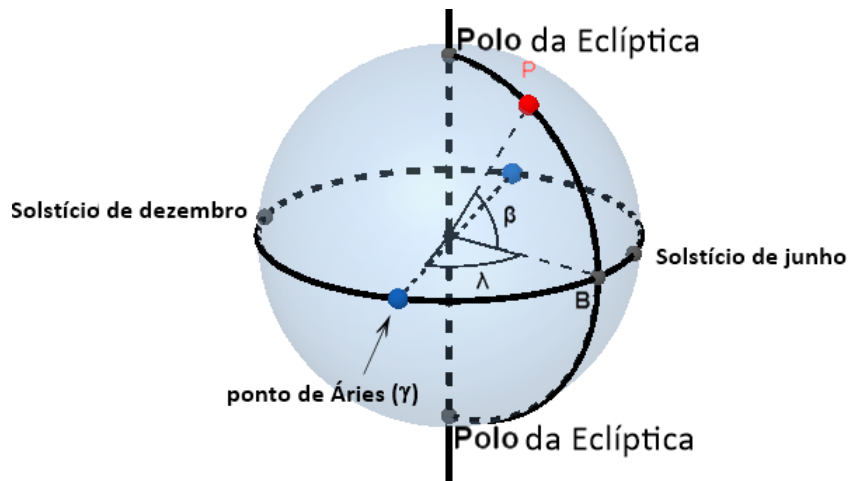
Definição 5.40. (*Círculo de Longitude*) - Chama-se círculo de longitude qualquer círculo máximo que contenha os polos⁹ da Eclíptica.

Definição 5.41. (*Latitude Celeste*) - É a medida do círculo de longitude compreendida entre a Eclíptica e o astro. Denotada pela letra β , varia de -90° a 90° a partir da Eclíptica.

Vide Figura 5.23, o arco \widehat{BP} representa a latitude celeste do ponto P:

$$-90^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$$

Figura 5.23: Coordenadas eclípticas.



Fonte: A autora.

A latitude do Sol é constantemente nula por mover-se sobre a Eclíptica. Também, segundo Gamael (1948), a latitude do polo norte é igual a $66^\circ 33'$ e o eixo do mundo e a curva Eclíptica formam um ângulo de $23^\circ 27'$.

Definição 5.42. (*Longitude Celeste*) - Longitude celeste é a medida do arco compreendido entre o ponto de Áries e o círculo de longitude que contém o astro. Denotada pela letra λ , varia de 0° a 360° a partir do ponto de Áries, no sentido direto.

Vide Figura 5.23, o arco entre γ e B determina a longitude celeste do ponto P:

$$0^\circ \leq \lambda \leq 360^\circ$$

Observação 5.43. As longitudes do Sol no início de cada estação do ano (vide Figura 5.19), coincide com a sua ascensão reta.

⁸Ao longo do texto, se utilizará apenas Latitude e Longitude, quando não houver perigo de confusão.

⁹Se necessário, confira a Definição 2.19 no Capítulo 2.

- 21 de março $\lambda = 0^\circ$ (Sol no ponto de Áries);
- 21 de junho $\lambda = 90^\circ$ (Sol no solstício de junho);
- 23 de setembro $\lambda = 180^\circ$ (Sol no ponto de Libra);
- 21 de dezembro $\lambda = 270^\circ$ (Sol do solstício de dezembro).

Observação 5.44. As coordenadas eclípticas são utilizadas quando são estudados fenômenos que dependem do movimento de translação do planeta Terra.

Relação entre as coordenadas Retilíneas e as Eclípticas:

Como referencial considere eixos ortogonais tendo como origem o centro da esfera celeste no centro da Terra, conforme a Figura 5.24, onde o eixo x é a linha onde ocorrem os solstícios e o eixo y é a linha onde ocorrem os equinócios (pontos de Áries e Libra). Dessas informações têm-se:

Do triângulo OPB (o ponto B é a projeção ortogonal de P sobre o plano eclíptico e C é a projeção de B no eixo y), tem-se:

$$z = PB = OP \cdot \text{sen}(\beta) = r \cdot \text{sen}(\beta) \quad (5.8)$$

Do triângulo OPB, tem-se:

$$OB = r \cdot \text{cos}(\beta) \quad (5.9)$$

Do triângulo OBC, tem-se:

$$y = OC = OB \cdot \text{cos}(\lambda) \quad (5.10)$$

Das Equações (5.9) e (5.10), segue:

$$y = r \cdot \text{cos}(\beta) \cdot \text{cos}(\lambda)$$

Do triângulo OBC, tem-se:

$$x = CB = OB \cdot \text{sen}(\lambda) \quad (5.11)$$

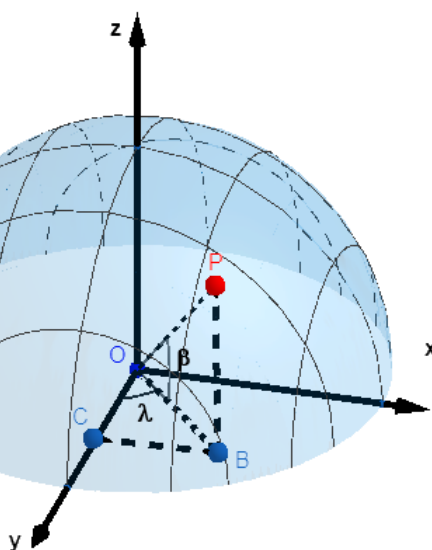
Das Equações (5.9) e (5.11), segue:

$$x = r \cdot \text{cos}(\beta) \cdot \text{sen}(\lambda)$$

Deste modo, considerando o referencial adotado, tem-se a seguinte relação entre as coordenadas retilíneas e as equatoriais:

$$\begin{cases} x = r \cdot \text{cos}(\beta) \cdot \text{sen}(\lambda) \\ y = r \cdot \text{cos}(\beta) \cdot \text{cos}(\lambda) \\ z = r \cdot \text{sen}(\beta) \end{cases}$$

Figura 5.24: Relação coordenadas retilíneas e eclípticas.



Fonte: A autora.

5.3.4 Coordenadas Horárias

O sistema de coordenadas horárias, assim como o sistema equatorial, têm como plano fundamental o plano do equador. Neste caso, as coordenadas principais são a Declinação e o Ângulo Horário.

A declinação é a mesma definida para coordenadas equatoriais (Definição 5.37). Vide Figura 5.25, o arco \widehat{PB} representa a declinação do astro P:

$$-90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$$

Definição 5.45. (*Ângulo Horário*) - Chama-se ângulo horário a medida do arco ao longo do equador medido entre o círculo de declinação do astro e o meridiano local. Denotado por H , varia de 0° até 360° no sentido retrógrado.

Na Figura 5.25, o arco \widehat{BS} representa o ângulo horário do astro P:

$$0^\circ \leq H \leq 360^\circ$$

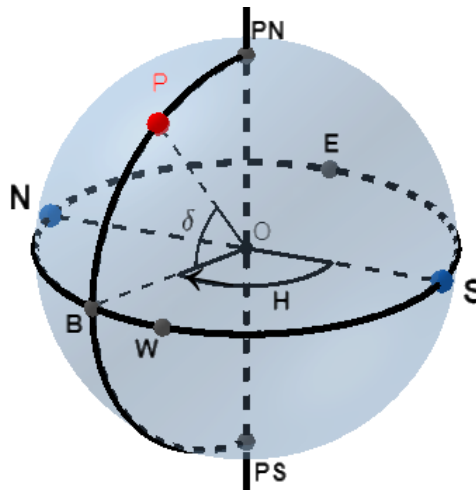
Observação 5.46. Também é comum a coordenada ângulo horário ser medida em horas: $0h \leq H \leq 24h$.

Observação 5.47. O sistema horário de coordenadas não depende do lugar e instante de observação.

5.3.5 Resumo dos Sistemas de Coordenadas

Segue Tabela 5.3 informativa e comparativa de todos os sistemas de coordenadas estudados nessa seção.

Figura 5.25: Coordenadas horárias.



Fonte: A autora.

Tabela 5.3: Resumo do sistema de coordenadas

Coordenadas	Horizontais	Equatoriais
Plano Fundamental	Plano do Horizonte	Plano do Equador
Ponto de Partida	ponto Sul	ponto de Áries
Sentido	retrógrado	direto
Coordenada 1	Altura (h) $-90^\circ \leq h \leq 90^\circ$	Declinação (δ) $-90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$
Coordenada 2	Azimute (A) $0^\circ \leq A \leq 360^\circ$	Ascensão Reta (α) $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$
Coordenadas	Eclípticas	Horárias
Plano Fundamental	Plano da Eclíptica	Plano do Equador
Ponto de Partida	ponto de Áries	ponto Sul
Sentido	direto	retrógrado
Coordenada 1	Latitude Celeste (β) $-90^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$	Declinação (δ) $-90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$
Coordenada 2	Longitude Celeste (λ) $0^\circ \leq \lambda \leq 360^\circ$	Ângulo Horário (H) $0^\circ \leq H \leq 360^\circ$

6 Medida do Tempo e Movimento Aparente

6.1 Generalidades sobre Medida do Tempo

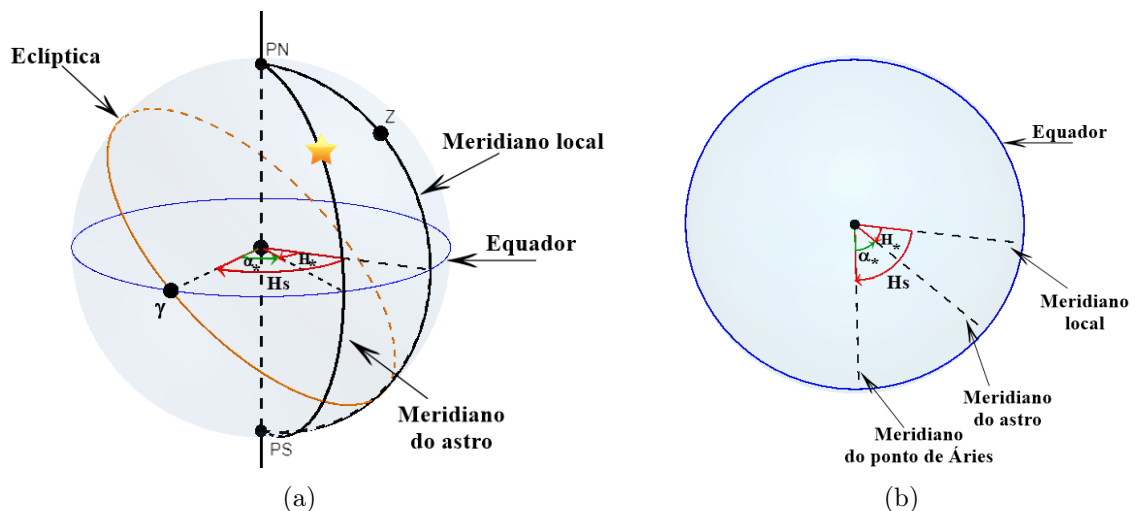
A medida do tempo baseia-se no movimento de rotação da Terra, que causa a rotação aparente da esfera celeste. No tempo solar, toma-se como referência o Sol e toma-se o ponto de Áries como referência para o tempo sideral.

6.1.1 Tempo Sideral

O tempo sideral baseia-se no movimento aparente do ponto de Áries.

Definição 6.1. (*Hora sideral*) - Denomina-se hora sideral, denotada por H_s , o arco compreendido entre o meridiano local e o ponto de Áries, isto é, hora sideral é o ângulo horário do ponto de Áries. Observe a Figura 6.1 (a).

Figura 6.1: Hora sideral.



Fonte: A autora.

Observação 6.2. Para um dado astro, conforme ilustra a Figura 6.1 (b), tem-se que $H_s = H_* + \alpha_*$, onde H_* é o ângulo horário do astro e α_* é a ascensão reta do astro.

Definição 6.3. (*Dia sideral*) - Denomina-se dia sideral o intervalo de tempo decorrido entre duas passagens sucessivas do ponto de Áries pelo meridiano local. O dia sideral é constante em duração e equivale ao tempo de uma rotação da Terra em torno do próprio eixo.

6.1.2 Tempo Solar

O tempo solar baseia-se no movimento aparente do Sol.

Denota-se por H_{\odot} o ângulo horário solar, isto é, o arco compreendido entre o meridiano local e o Sol.

Definição 6.4. (*Hora Solar Verdadeira*) - Denomina-se hora solar verdadeira, denotada por T_{\odot} , o ângulo horário do Sol acrescido de 12h.

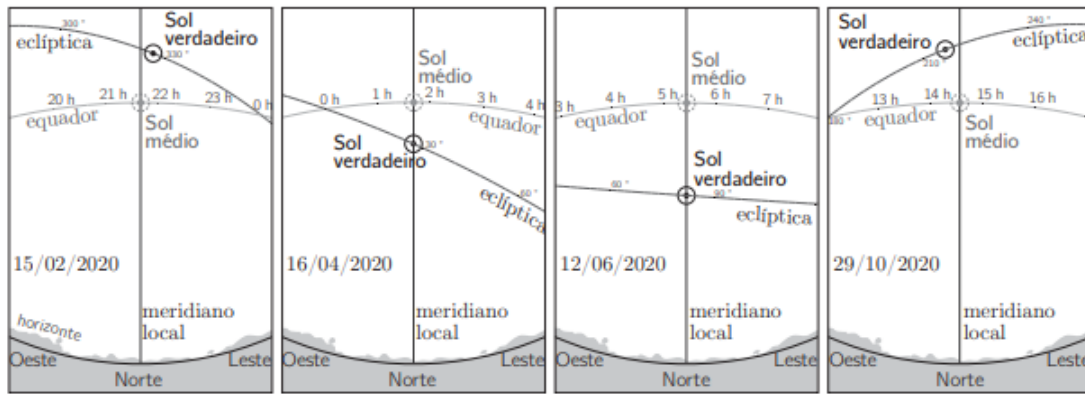
Definição 6.5. (*Hora Solar Média*) - Denomina-se hora solar média, também conhecida como hora civil, denotada por T_{\odot}^- , o ângulo horário do Sol médio acrescido de 12h.

O Sol médio, referido na Definição 6.5, é um Sol fictício que se move ao longo da linha do equador celeste. Enquanto o Sol verdadeiro se movimenta ao longo da eclíptica com uma velocidade não uniforme, o Sol médio se movimenta com velocidade uniforme. O conceito do Sol médio foi criado justamente porque para medir o tempo baseado no Sol, seria melhor que o mesmo se movimentasse em velocidade uniforme.

Pode-se pensar no Sol médio como uma projeção aproximada do Sol verdadeiro ao longo do equador celeste. Todavia, não passa de uma aproximação, pois os movimentos podem não estar sincronizados dependendo da época do ano. Segundo Lima-Neto (2020), o Sol verdadeiro pode estar atrasado em relação ao Sol médio (como por exemplo em 29/10/2020) ou adiantado (como por exemplo em 15/02/2020). Ainda segundo Lima-Neto (2020), por volta dos dias 16/04/2020 e 12/06/2020, a passagem meridiana de ambos coincide. As horas sobre o equador celeste indicam o valor da ascensão reta aproximada naquele ponto. A Figura 6.2, foi elaborada por Lima-Neto (2020) para melhor compreensão destes conceitos. Nela, verifica-se a visão de um observador no hemisfério Sul olhando exatamente para a direção Norte. O traço vertical corresponde ao meridiano local desse observador.

Definição 6.6. A diferença entre a hora solar verdadeira e a hora solar média é denominada equação do tempo. Pode ser expressa como $E = T_{\odot} - T_{\odot}^-$.

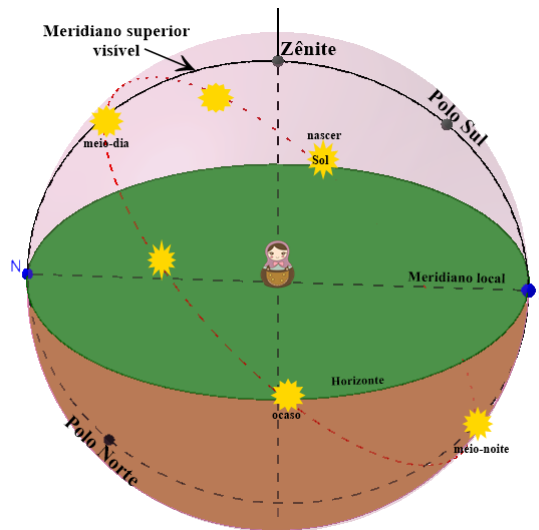
Figura 6.2: Comparação entre Sol verdadeiro e Sol médio.



Fonte: Lima-Neto (2020).

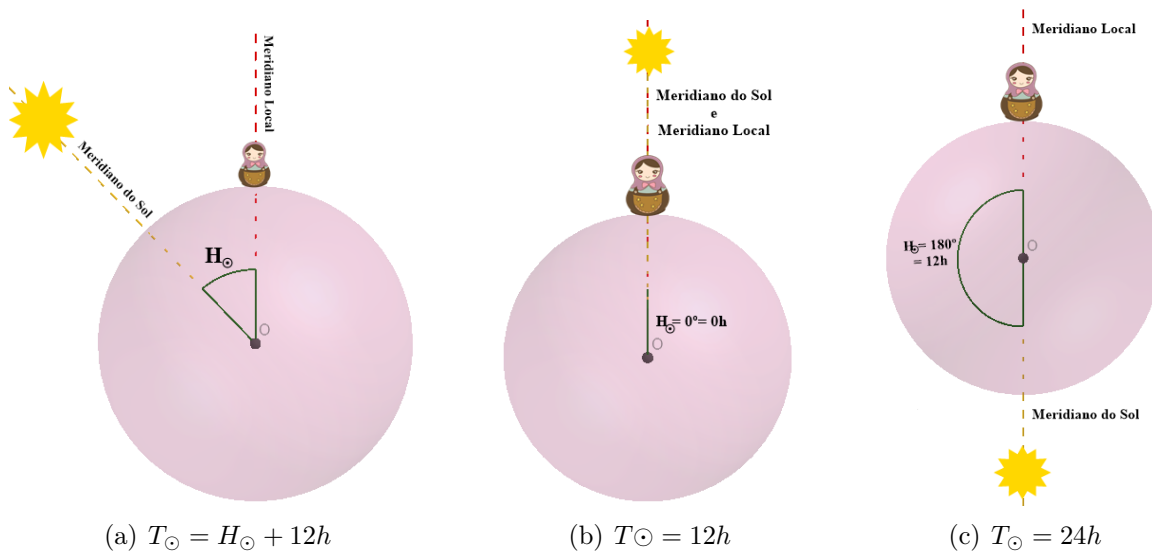
Observação 6.7. Acrescenta-se 12h ao ângulo horário na Definição 6.4 pois o Sol com o Sol a pico teria $H_{\odot} = 0h$, conforme pode ser observado nas Figuras 6.3 e 6.4. Todavia, o ideal seria com o Sol a pico ocorrer $H_{\odot} = 12h$ conforme o relógio terrestre. Para sanar esse inconveniente, soma-se 12h ao ângulo horário, o que leva $T_{\odot} = H_{\odot} + 12h = 0h + 12h$, ou seja, $T_{\odot} = 12h$ neste ponto. Dessa forma, com tal correção, tem-se $T_{\odot} = 0h$ à meia noite e $T_{\odot} = 12h$ ao meio dia. Acrescenta-se 12h ao ângulo horário na Definição 6.5 pelas mesmas razões.

Figura 6.3: Passagem completa do Sol verdadeiro.



Fonte: A autora.

Figura 6.4: Hora solar verdadeira.



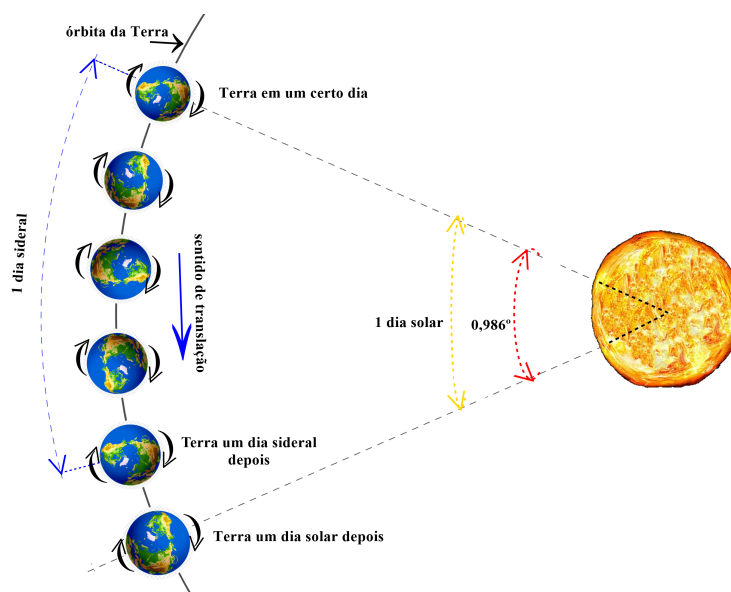
Fonte: A autora.

Definição 6.8. (*Dia solar*) - Denomina-se dia solar o intervalo de tempo decorrido entre duas passagens sucessivas do Sol pelo meridiano local.

Na Figura 6.3 verifica-se que o Sol tem sua primeira passagem no meridiano local ao meio-dia (meridiano local superior) e sua segunda passagem no meridiano local a meia-noite (meridiano local inferior). Dessa forma, nota-se que o dia solar possui 12h.

Observação 6.9. O dia solar tem 3min e 56s a mais que o dia sideral, ou seja, o dia solar é um pouco mais longo que o dia sideral. Essa diferença ocorre pois o movimento de translação da Terra é de $0,986^{\circ}$ (3min e 56s) por dia, conforme a Figura 6.5.

Figura 6.5: Dia solar e dia sideral.



Fonte: A autora.

Como o ângulo horário é diferente para diferentes locais, já que o zênite muda, o tempo solar verdadeiro muda de local para local.

Os dias solares médios, segundo Oliveira e Saraiva (2018), são iguais entre si devido a velocidade angular constante, porém o movimento do Sol na Eclíptica não possui dias solares verdadeiros iguais entre si, este fato ocorre em decorrência do Sol não possuir velocidade angular constante.

Por outro lado, o ano solar médio é igual ao ano solar verdadeiro, pois, o movimento do Sol na Eclíptica é anualmente periódico.

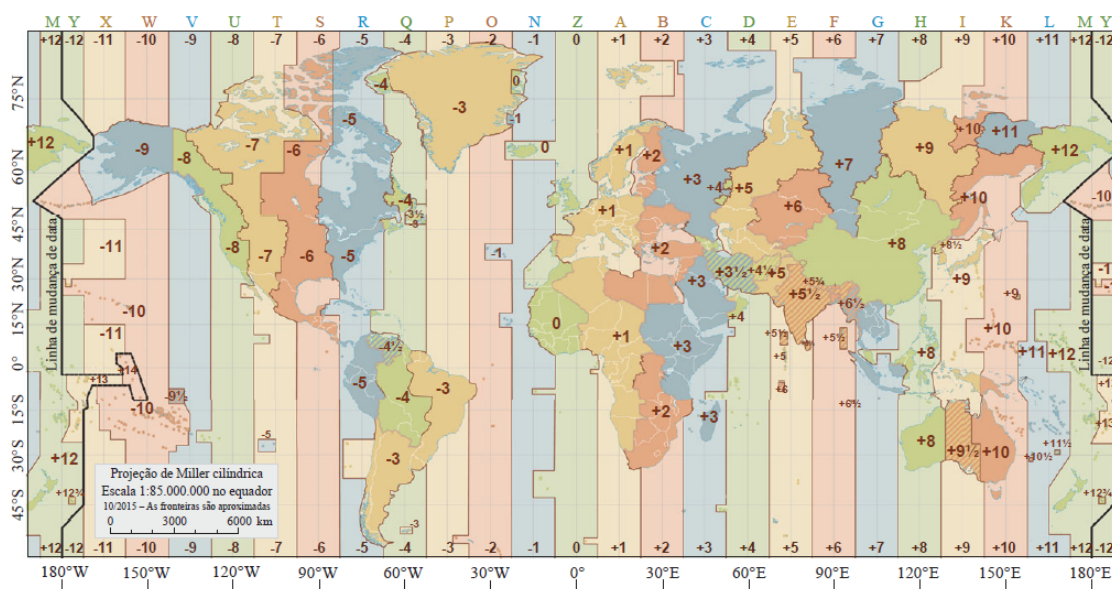
Definição 6.10. (*Hora universal*) - Denomina-se hora universal, denotada por T_C , a hora solar média (hora civil) no meridiano de Greenwich.

6.1.3 Fusos Horários

Pela Definição 6.5, lugares com longitudes diferentes têm horas diferentes. Historicamente cada nação tinha sua hora específica de acordo com seu meridiano local. Para a correção desse fenômeno adotou-se o convênio internacional dos fusos horários.

Cada fuso compreende 15° que equivale a 1h. O fuso zero é o meridiano de Greenwich, onde a partir deste mede-se de 0h a +12h para o leste e de 0h a -12h para oeste. Por motivos geográficos e políticos, os fusos atualmente não possuem espaçamento padronizado. Os fusos são adaptados regionalmente seguindo fronteiras ou divisões arbitrárias, conforme a divisão apresentada na Figura 6.6.

Figura 6.6: Fusos horários do mundo.



Fonte: Lima-Neto (2020).

Definição 6.11. (*Hora legal*) - Denomina-se hora legal a hora civil indicada pelo fuso horário.

Observação 6.12. De acordo com o site Toda-Matéria (2019), o Brasil possui quatro fusos horários oficiais diferentes:

- -2h: Arquipélagos e ilhas localizadas no oceano Atlântico;
- -3h: Rio Grande do Sul, Santa Catarina, Paraná, São Paulo, Rio de Janeiro, Minas Gerais, Espírito Santo, Goiás, Distrito Federal, Tocantins, Bahia, Sergipe, Alagoas, Pernambuco, Paraíba, Rio Grande do Norte, Ceará, Piauí, Maranhão, leste do Pará e Amapá;
- -4h: Mato Grosso do Sul, Mato Grosso, Rondônia, leste do Amazonas, oeste do Pará e Roraima;
- -5h: oeste do Amazonas e Acre.

Ainda tratando-se de Brasil, o país adotou o horário de Verão até o ano de 2018, que consiste em adiantar os relógios em 1 hora, para que haja uma economia energética nos horários de pico, que, segundo o site G1 (2015), vai das 18h às 21h. Com essa medida, os estados do Rio Grande do Sul, Santa Catarina, Paraná, São Paulo, Rio de Janeiro, Espírito Santo, Minas Gerais, Goiás e Distrito Federal passavam a integrar o fuso horário de -2h. Já os estados do Mato Grosso e Mato Grosso do Sul passavam a integrar o fuso horário de -3h. Os estados não citados não sofriam alterações durante o horário de verão brasileiro. No ano de 2019, o presidente da república assinou um decreto extinguindo essa prática (SARAIVA; OLIVEIRA, 2019).

Para denominar o fuso horário de um determinado lugar, pode-se utilizar também o Tempo Universal Coordenado (UTC), antigo GMT - Greenwich Meridian Time (ou Tempo Zulu para os militares). O UTC também é conhecido como hora civil (vide Definição 6.10). Dessa forma tem-se que: $UTC_{\lambda} - 0 = T_c + \lambda$, onde T_c é a hora local no meridiano de Greenwich e λ é longitude medida em horas à partir do meridiano de Greenwich.

Por exemplo: Seja $T_c = 17h45min$. Em São Paulo será: $UTC_{-3} = 17h45min - 3h = 14h45min$, pois sabe-se que o fuso horário de São Paulo em relação a Greenwich é -3h.

Observação 6.13. Existem outros sistemas de medida de tempo, como o UT1¹ e o UT2, que levam em consideração respectivamente a correção do movimento dos polos e a correção dos efeitos sazonais².

6.2 Generalidades sobre o Movimento Aparente

Na Idade Média, existiam duas teorias a respeito do movimento diurno dos astros. A primeira explicava que este movimento dava-se por meio da imobilidade da Terra e movimento dos corpos celestes ao redor do eixo do mundo no sentido anti-horário; já a segunda categorizava-se no movimento de rotação da Terra, resultando em um movimento aparente dos astros do oriente para ocidente. Os filósofos Aristóteles (384-322 a.C) e Ptolomeu (85-165 d.C) defendiam a primeira explicação por meio da teoria do Geocentrismo, considerando que a Terra era fixa e que os astros, inclusive o Sol, orbitavam em torno da Terra. Essa Teoria do Geocentrismo veio a ser rebatida pelo físico e astrônomo Copérnico (1473-1543), que refutou a primeira explicação e embasou

¹Para maiores informações sobre os sistemas UT1 e UT2 vide Boczko (1984).

²Relativo as estações.

a segunda explicação sobre o movimento diurno dos astros com o modelo heliocêntrico, que já havia sido defendido por Aristarco de Samos (310-230 a.C) na antiguidade.

Sabe-se que o movimento de rotação da Terra se dá de oeste para leste, logo tem-se a impressão de que a esfera celeste e os astros realizam um movimento de leste para oeste. Tal movimento contrário ao de rotação da Terra é denominado movimento aparente da esfera celeste. Por conta do movimento aparente, pode-se observar o orto (nascer), culminância e ocaso (pôr), que são pontos específicos na trajetória de um astro.

Definição 6.14. (*Orto de um astro*) - Define-se por orto (nascer) o instante em que o astro aparece no horizonte.

Definição 6.15. (*Ocaso de um astro*) - Define-se por ocaso (pôr) o instante em que o astro desaparece no horizonte.

Note que tanto no orto quanto no ocaso de um astro, em coordenadas horizontais, sua altura é zero e conseqüentemente sua distância zenital é 90° .

Definição 6.16. (*Culminância de um astro*) - Define-se como culminância o ponto em que o astro acima do horizonte atinge sua altura máxima.

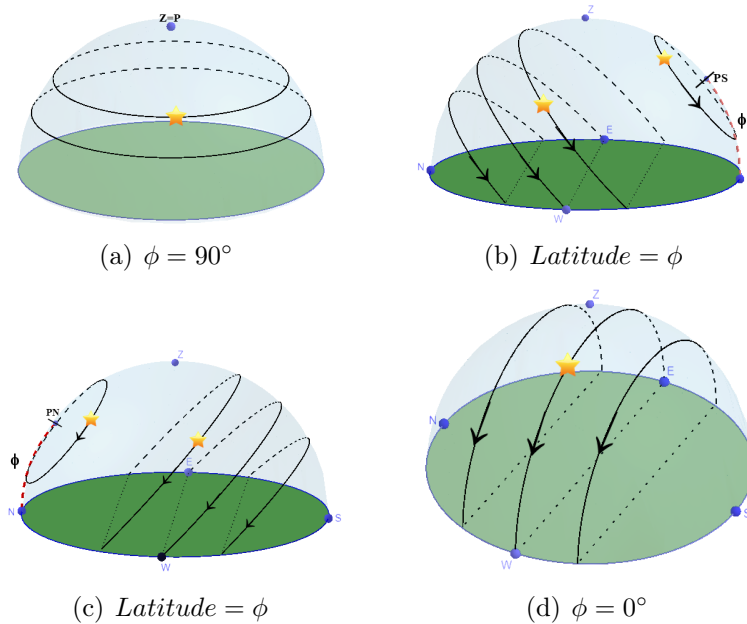
Definição 6.17. (*Astros Circumpolares*) - Alguns astros descrevem na esfera celeste um círculo completo visível ao observador, tais astros, que não possuem orto e nem ocaso, são chamados de circumpolares.

Devido ao movimento aparente da esfera celeste, os astros descrevem no céu arcos de circunferências paralelos ao Equador. A orientação desses arcos em relação ao horizonte depende da latitude do lugar onde encontra-se o observador (OLIVEIRA; SARAIVA, 2013).

Dessa maneira, pode-se considerar o observador posicionado nos polos (latitudes $\phi = \pm 90^\circ$), no Equador (latitude $\phi = 0^\circ$) ou em alguma latitude intermediária (latitude $\phi \in (-90^\circ, 0^\circ) \cup (0^\circ, 90^\circ)$):

- **Nos polos** - Neste caso, todas as estrelas são circumpolares. Essas estrelas são visíveis por 24 horas acima do horizonte e descrevem uma trajetória paralela ao horizonte (vide Figura 6.7(a)). Com latitudes $\phi = \pm 90^\circ$ (hemisfério norte ou hemisfério sul com o zênite do observador nos polos), as estrelas de hemisférios opostos não podem ser vistas.
- **Latitude intermediária** - Algumas estrelas possuem orto e ocaso e outras são circumpolares (vide Figuras 6.7(b) e (c)). Com latitude $\phi \in (-90^\circ, 0^\circ) \cup (0^\circ, 90^\circ)$, as estrelas visíveis descrevem trajetória com certa inclinação em relação ao plano do horizonte, dependendo da latitude do lugar.
- **No Equador** - Neste caso, todas as estrelas possuem orto e ocaso. Permanecem 12 horas no horizonte superior e 12 horas no horizonte inferior (vide Figura 6.7(d)). Com latitude $\phi = 0^\circ$, as trajetórias são arcos perpendiculares ao plano do horizonte e todas as estrelas permanecem visíveis ao longo do ano em ambos os hemisférios.

Figura 6.7: Movimento aparente dos astros.



Fonte: A autora.

Definição 6.18. (*Dia de uma estrela*) - Define-se como dia de uma estrela o período que essa estrela passa acima do horizonte durante sua trajetória no movimento aparente.

Definição 6.19. (*Noite de uma estrela*) - Define-se como noite de uma estrela o período que essa estrela passa abaixo do horizonte durante sua trajetória no movimento aparente.

Observação 6.20. Estrelas circumpolares não tem a divisão de dia e noite. As estrelas na latitude do Equador, possuem 12 horas siderais durante o seu dia e 12 horas siderais durante a sua noite. As estrelas em latitude intermediária possuem o tempo do dia e da noite complementares (dia + noite = 24 horas siderais).

Os astros que estão na esfera celeste giram com a esfera celeste em sentido contrário à rotação da Terra, com movimento circular, uniforme, isócrono, em trajetórias paralelas entre si. Estrelas em tempos iguais percorrem arcos iguais, conseqüentemente, sendo a velocidade angular constante, a velocidade linear é alterada, isto é, estrelas mais próximas dos polos celestes se movem mais rapidamente que as mais próximas do equador celeste. Além disso, todas as estrelas demoram 24 horas siderais para completar uma volta de 360° .

Pela Observação 6.20, tem-se que a Sol percorre 360° em 24 horas siderais, desta forma sabe-se que a velocidade aparente do Sol é:

$$V_a = \frac{360^\circ}{24h} = 15^\circ/h$$

Diferente dos outros astros, o Sol não possui círculo diurno constante, ou seja, este se aproxima ou se afasta do equador celeste conforme a época do ano. A declinação do círculo diurno do sol varia no ciclo do ano entre $-23,5^\circ$ e $+23,5^\circ$. A lua e os planetas do

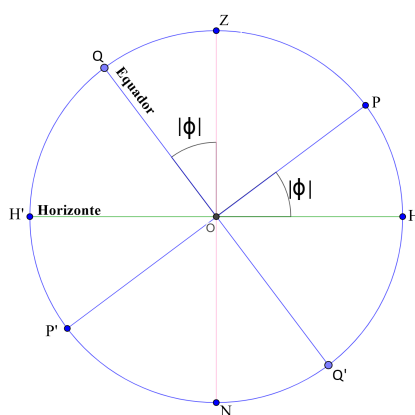
sistema solar também variam sua posição entre as estrelas ao longo do ano, logo não possuem círculo diurno fixo. Isto ocorre porque estes astros estão muito mais próximos da Terra que os outros considerados na esfera celeste.

6.2.1 Altura do Polo em Relação ao Horizonte

Para calcular a altura do polo em relação ao horizonte, primeiramente, deve-se observar o Teorema 6.21.

Teorema 6.21. *A altura do polo celeste sobre o horizonte é igual ao módulo da latitude geográfica do local de observação.*

Figura 6.8: Latitude e altura do polo celeste.



Fonte: A autora.

Demonstração. Considere a representação das retas PP' como eixo do mundo (P e P' são os polos celestes), HH' como horizonte do observador, QQ' como equador e ZN como a vertical do observador, conforme a Figura 6.8. Observa-se que o arco \widehat{QZ} representa o módulo da latitude geográfica ϕ do local do observador, uma vez que é o arco do zênite do observador até o equador.

Observa-se que a reta QO é perpendicular a reta OP (equador e eixo do mundo) e que a reta OZ é perpendicular a reta OH (vertical e horizonte do observador), então $\widehat{QOZ} + \widehat{ZOP} = 90^\circ$ e $\widehat{ZOP} + \widehat{POH} = 90^\circ$. Dessa forma,

$$\widehat{QOZ} + \widehat{ZOP} = \widehat{ZOP} + \widehat{POH} \implies \widehat{QOZ} = \widehat{POH}$$

Sabe-se que $\widehat{QOZ} = |\phi|$ é o módulo da latitude geográfica do local, por outro lado \widehat{POH} é a altura do polo em relação ao horizonte do observador. Sendo assim:

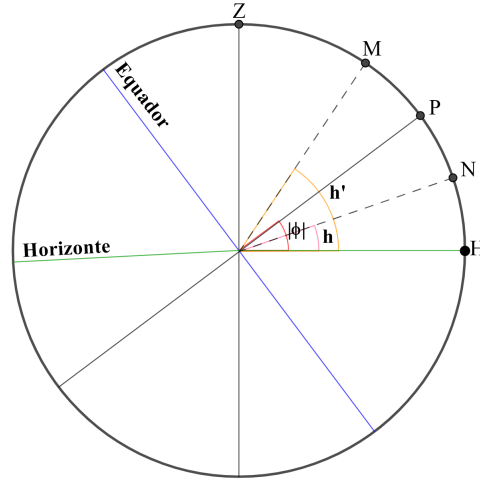
$$\widehat{QOZ} = \widehat{POH} = |\phi|$$

Logo a altura do polo celeste é igual ao módulo da latitude geográfica do lugar do observador. \square

À partir da latitude geográfica ϕ , pode-se então calcular a altura do polo celeste e vice-versa.

Considere uma estrela circumpolar que passa por dois pontos M e N em um mesmo meridiano, de forma que sua altura máxima (h') ocorra em M e sua altura mínima (h) ocorra em N, conforme a Figura 6.9.

Figura 6.9: Cálculo da altura do polo.



Fonte: A autora.

Pela situação proposta, os pontos M e N estão localizados de modo que o eixo do mundo divide o arco \widehat{MN} no polo celeste visível. Logo:

$$\widehat{PM} = \widehat{PN} \quad (6.1)$$

Tem-se que:

$$\widehat{PH} = \widehat{PN} + \widehat{NH} \quad (6.2)$$

$$\widehat{PH} = \widehat{MH} - \widehat{PM} \quad (6.3)$$

Substituindo a Equação (6.1) na Equação (6.3), tem-se:

$$\widehat{PH} = \widehat{MH} - \widehat{PN} \quad (6.4)$$

Agora, somando as Equações (6.2) e (6.4), tem-se:

$$2\widehat{PH} = \widehat{MH} + \widehat{NH}$$

Isto é:

$$|\phi| = \frac{h + h'}{2} \quad (6.5)$$

Observação 6.22. A Equação (6.5) fornece o módulo da latitude geográfica do local de observação, ou seja, a altura do polo em relação ao horizonte. Para ϕ no hemisfério norte, deve-se usar o sinal positivo e no hemisfério sul, o sinal negativo.

7 O Triângulo de Posição Astronômico

A partir dos teoremas e definições dos Capítulos 2, 3 e 4, pode-se relacionar a Distância Zenital, o Azimute, o Ângulo Horário e a Declinação, assim como conhecer a posição geográfica de um lugar sabendo as coordenadas de um astro e vice-versa. Também é possível fazer um estudo analítico do movimento diurno, bem como elaborar uma fórmula para se calcular distância angular entre dois astros. Para tanto, se faz necessário definir o triângulo de posição astronômico.

Definição 7.1. (*Triângulo de Posição Astronômico*) - Denomina-se triângulo de posição astronômico de um astro, o triângulo situado na esfera celeste cujos vértices são o astro, o zênite do observador e o polo elevado (polo localizado acima do horizonte).

É necessário atentar-se que, conforme variam as posições do observador e do astro observado, as medidas dos lados do triângulo de posição astronômico são alteradas. Isto ocorre uma vez que a latitude geográfica do observador ϕ é positiva quando o observador encontra-se no hemisfério norte e negativa quando esse encontra-se no hemisfério sul; da mesma forma, a declinação do astro δ é positiva quando o astro encontra-se no hemisfério norte e é negativa quando o astro encontra-se no hemisfério sul. Conforme apresentado na Figura 7.1, existem quatro casos a serem considerados: “ $\phi > 0$ e $\delta > 0$ ”, “ $\phi < 0$ e $\delta < 0$ ”, “ $\phi < 0$ e $\delta > 0$ ” e “ $\phi > 0$ e $\delta < 0$ ”.

No primeiro caso, quando $\phi > 0$ e $\delta > 0$, tem-se que:

- O arco compreendido entre o o zênite e o polo mede $90^\circ - \phi$;
- O arco compreendido entre o polo e o astro mede $90^\circ - \delta$.

No segundo caso, quando $\phi < 0$ e $\delta < 0$, tem-se que:

- O arco compreendido entre o o zênite e o polo mede $90^\circ - |\phi|$ (ou $90^\circ + \phi$);
- O arco compreendido entre o polo e o astro mede $90^\circ - |\delta|$ (ou $90^\circ + \delta$).

No terceiro caso, quando $\phi < 0$ e $\delta > 0$, tem-se que:

- O arco compreendido entre o o zênite e o polo mede $90^\circ - |\phi|$ (ou $90^\circ + \phi$);
- O arco compreendido entre o polo e o astro mede $90^\circ + \delta$.

No quarto caso, quando $\phi > 0$ e $\delta < 0$, tem-se que:

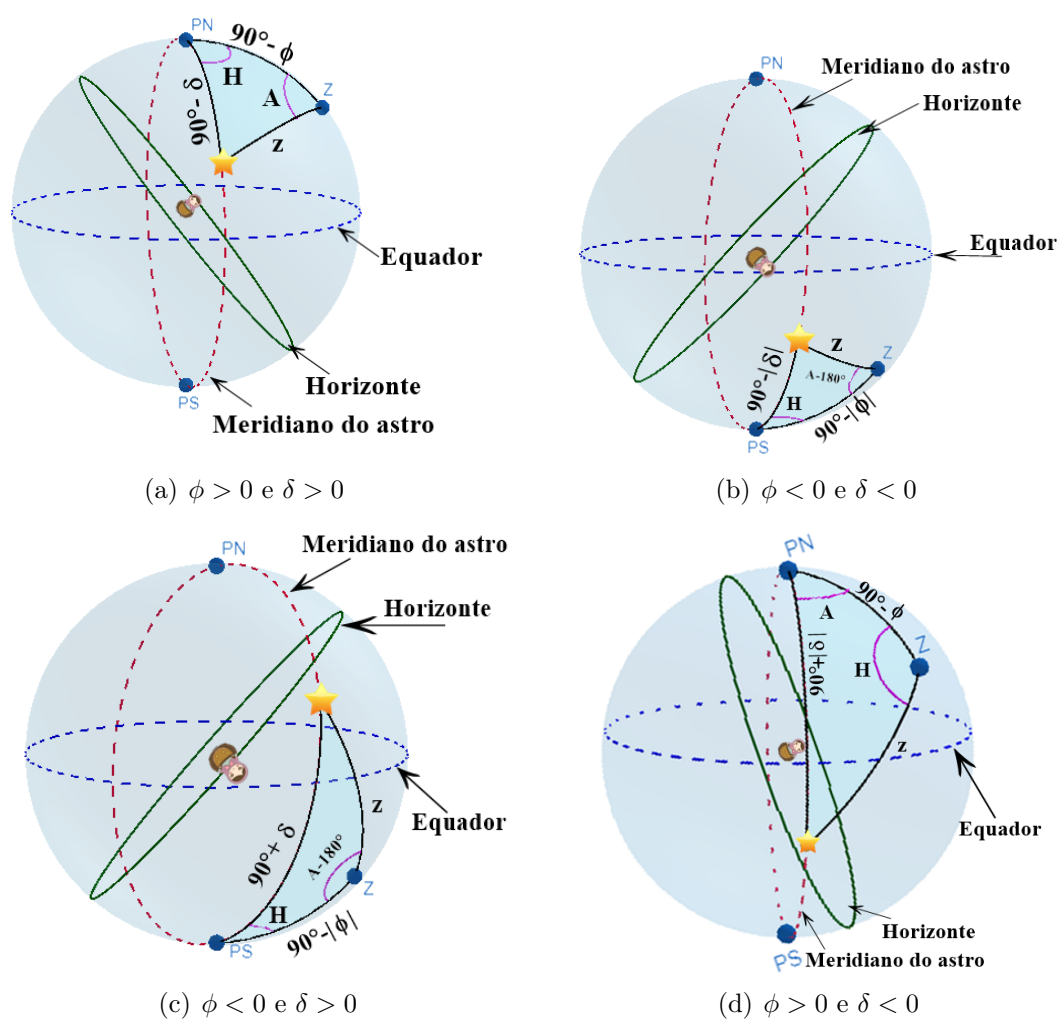
- O arco compreendido entre o o zênite e o polo mede $90^\circ - \phi$;

- O arco compreendido entre o polo e o astro mede $90^\circ + |\delta|$ (ou $90^\circ - \delta$).

Além disso:

- O arco entre o zênite e o astro é a distância zenital z do astro;
- O ângulo com vértice no zênite mede o azimute A do astro quando no hemisfério norte, quando o zênite encontra-se no hemisfério sul este ângulo mede $A - 180^\circ$;
- O ângulo com vértice no polo mede o ângulo horário H do astro;
- O ângulo com vértice no astro é denominado ângulo paralático.

Figura 7.1: Exemplos de triângulo de posição astronômico.



Fonte: A autora.

7.1 Relações entre Distância Zenital, Ângulo Horário, Azimute e Declinação

Embora existam quatro casos distintos, temos o seguinte Teorema:

Teorema 7.2. A distância zenital z , o ângulo horário H , o azimute A e a declinação δ são sempre as mesmas, regidas conforme as fórmulas seguintes:

$$\cos(z) = \text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(\delta) + \cos(\phi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H) \quad (7.1)$$

$$\text{sen}(\delta) = \text{sen}(\phi) \cdot \cos(z) + \cos(\phi) \cdot \text{sen}(z) \cdot \cos(A) \quad (7.2)$$

$$\text{sen}(H) \cdot \text{cotg}(A) = \text{tg}(\delta) \cdot \cos(\phi) - \text{sen}(\phi) \cdot \cos(H) \quad (7.3)$$

$$\text{sen}(z) \cdot \cos(A) = \cos(\phi) \cdot \text{sen}(\delta) - \text{sen}(\phi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H) \quad (7.4)$$

$$\cos(\delta) \cdot \cos(H) = \cos(\phi) \cdot \cos(z) - \text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(z) \cdot \cos(A) \quad (7.5)$$

Além disso, quando o observador está no hemisfério norte:

$$\text{sen}(z) \cdot \text{sen}(A) = \text{sen}(H) \cdot \cos(\delta) \quad (7.6)$$

$$\text{sen}(A) \cdot \text{cotg}(H) = \cos(\phi) \cdot \text{cotg}(z) - \text{sen}(\phi) \cdot \cos(A) \quad (7.7)$$

E quando o observador está no hemisfério sul:

$$\text{sen}(z) \cdot \text{sen}(A) = -\text{sen}(H) \cdot \cos(\delta) \quad (7.8)$$

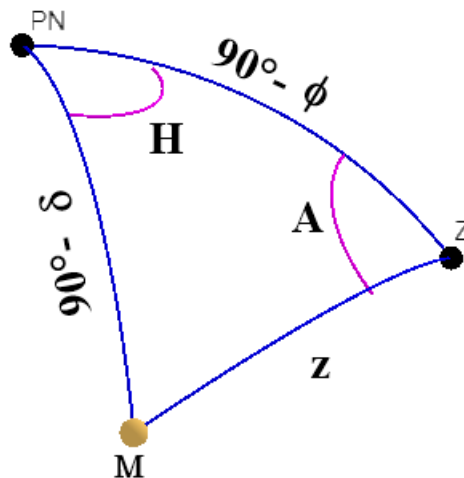
$$\text{sen}(A) \cdot \text{cotg}(H) = \text{sen}(\phi) \cdot \cos(A) - \cos(\phi) \cdot \text{cotg}(z) \quad (7.9)$$

Demonstração. De fato,

Primeiro caso: $\phi > 0$ e $\delta > 0$

Considere o ponto M o astro, o ponto P o polo norte celeste e o ponto Z o zênite, conforme a Figura 7.2. Sabe-se que z é a distância zenital, A o azimute e H o ângulo horário do astro.

Figura 7.2: Triângulo de posição astronômico com $\phi > 0$ e $\delta > 0$.



Fonte: A autora.

Pelo Teorema 3.1, aplicado ao triângulo de posição astronômico ZMP, observa-se:

$$\cos(z) = \cos(90^\circ - \delta) \cdot \cos(90^\circ - \phi) + \operatorname{sen}(90^\circ - \delta) \cdot \operatorname{sen}(90^\circ - \phi) \cdot \cos(H)$$

Pelas Relações (B.13) e (B.15) do Apêndice B, segue que:

$$\cos(z) = \operatorname{sen}(\phi) \cdot \operatorname{sen}(\delta) + \cos(\phi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H)$$

O que prova a Equação (7.1) para o primeiro caso.

Aplicando novamente o Teorema 3.1 ao triângulo de posição astronômico ZMP, observa-se de forma análoga que:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - \phi) \cdot \cos(z) + \operatorname{sen}(90^\circ - \phi) \cdot \operatorname{sen}(z) \cdot \cos(A)$$

Pelas Relações (B.13) e (B.15) do Apêndice B, segue que:

$$\operatorname{sen}(\delta) = \operatorname{sen}(\phi) \cdot \cos(z) + \cos(\phi) \cdot \operatorname{sen}(z) \cdot \cos(A)$$

O que prova a Equação (7.2) para o primeiro caso.

Do Teorema 3.10, tem-se:

$$\operatorname{sen}(H) \cdot \operatorname{cotg}(A) = \operatorname{sen}(90^\circ - \phi) \cdot \operatorname{cotg}(90^\circ - \delta) - \cos(90^\circ - \phi) \cdot \cos(H)$$

Pelas Relações (B.13), (B.15) e (B.18) do Apêndice B:

$$\operatorname{sen}(H) \cdot \operatorname{cotg}(A) = \operatorname{tg}(\delta) \cdot \cos(\phi) - \operatorname{sen}(\phi) \cdot \cos(H)$$

O que prova a Equação (7.3) para o primeiro caso.

Partindo do Teorema 3.9, tem-se:

$$\operatorname{sen}(z) \cdot \cos(A) = \operatorname{sen}(90^\circ - \phi) \cdot \cos(90^\circ - \delta) - \cos(90^\circ - \phi) \cdot \operatorname{sen}(90^\circ - \delta) \cdot \cos(H)$$

Pelas Relações (B.13) e (B.15) do Apêndice B:

$$\operatorname{sen}(z) \cdot \cos(A) = \cos(\phi) \cdot \operatorname{sen}(\delta) - \operatorname{sen}(\phi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H)$$

O que prova a Equação (7.4) para o primeiro caso.

Mais uma vez, do Teorema 3.9, segue:

$$\operatorname{sen}(90^\circ - \delta) \cdot \cos(H) = \operatorname{sen}(90^\circ - \phi) \cdot \cos(z) - \cos(90^\circ - \phi) \cdot \operatorname{sen}(z) \cdot \cos(A)$$

Pelas Relações (B.13) e (B.15) do Apêndice B:

$$\cos(\delta) \cdot \cos(H) = \cos(\phi) \cdot \cos(z) - \operatorname{sen}(\phi) \cdot \operatorname{sen}(z) \cdot \cos(A)$$

O que prova a Equação (7.5) para o primeiro caso.

Do Teorema 3.3, aplicado ao triângulo de posição astronômico ZMP, segue:

$$\frac{\operatorname{sen}(z)}{\operatorname{sen}(H)} = \frac{\operatorname{sen}(90^\circ - \delta)}{\operatorname{sen}(A)}$$

Pela Relação (B.13) do Apêndice B, segue que:

$$\frac{\text{sen}(z)}{\text{sen}(H)} = \frac{\cos(\delta)}{\text{sen}(A)}$$

Ou seja,

$$\text{sen}(z) \cdot \text{sen}(A) = \text{sen}(H) \cdot \cos(\delta)$$

O que prova a Equação (7.6) para o primeiro caso.

Novamente, do Teorema 3.10, tem-se:

$$\text{sen}(A) \cdot \text{cotg}(H) = \text{sen}(90^\circ - \phi) \cdot \text{cotg}(z) - \cos(90^\circ - \phi) \cdot \cos(A)$$

Pelas Relações (B.13) e (B.15) do Apêndice B:

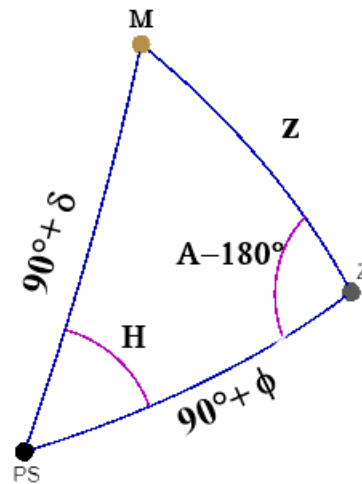
$$\text{sen}(A) \cdot \text{cotg}(H) = \cos(\phi) \cdot \text{cotg}(z) - \text{sen}(\phi) \cdot \cos(A)$$

O que prova a Equação (7.7) para o primeiro caso.

Segundo caso: $\phi < 0$ e $\delta < 0$

Considere o ponto M o astro, o ponto P o polo sul celeste e o ponto Z o zênite, conforme a Figura 7.3. Sabe-se que z é a distância zenital, A o azimute e H o ângulo horário do astro.

Figura 7.3: Triângulo de posição astronômico com $\phi < 0$ e $\delta < 0$.



Fonte: A autora.

Pelo Teorema 3.1, aplicado ao triângulo de posição astronômico ZMP, observa-se de forma análoga que:

$$\cos(z) = \cos(90^\circ + \delta) \cdot \cos(90^\circ + \phi) + \text{sen}(90^\circ + \delta) \cdot \text{sen}(90^\circ + \phi) \cdot \cos(H)$$

Pelas Relações (B.16) e (B.14) do Apêndice B, segue que:

$$\cos(z) = (-\text{sen}(\delta)) \cdot (-\text{sen}(\phi)) + \cos(\delta) \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(H)$$

Implicando

$$\cos(z) = \sin(\phi) \cdot \sin(\delta) + \cos(\phi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H)$$

O que prova a Equação (7.1) para o segundo caso.

Aplicando novamente o Teorema 3.1 ao triângulo de posição astronômico ZMP, observa-se de forma análoga que:

$$\cos(90^\circ + \delta) = \cos(90^\circ + \phi) \cdot \cos(z) + \sin(90^\circ + \phi) \cdot \sin(z) \cdot \cos(A - 180^\circ)$$

Pelas Relações (B.10), (B.14), (B.16) e (B.21) e do Apêndice B, segue que:

$$-\sin(\delta) = -\sin(\phi) \cdot \cos(z) + \cos(\phi) \cdot \sin(z) \cdot (-\cos(A))$$

Isto é

$$-\sin(\delta) = -\sin(\phi) \cdot \cos(z) - \cos(\phi) \cdot \sin(z) \cdot \cos(A)$$

Ou seja,

$$\sin(\delta) = \sin(\phi) \cdot \cos(z) + \cos(\phi) \cdot \sin(z) \cdot \cos(A)$$

O que prova a Equação (7.2) para o segundo caso.

Do Teorema 3.10, tem-se:

$$\sin(H) \cdot \cotg(A - 180^\circ) = \sin(90^\circ + \phi) \cdot \cotg(90^\circ + \delta) - \cos(90^\circ + \phi) \cdot \cos(H)$$

Pelas Relações (B.14), (B.16), (B.17) e (B.19) do Apêndice B:

$$-\sin(H) \cdot \cotg(A) = -\tg(\delta) \cdot \cos(\phi) + \sin(\phi) \cdot \cos(H)$$

Implicando

$$\sin(H) \cdot \cotg(A) = \tg(\delta) \cdot \cos(\phi) - \sin(\phi) \cdot \cos(H)$$

O que prova a Equação (7.3) para o segundo caso.

Partindo do Teorema 3.9, tem-se:

$$\sin(z) \cdot \cos(A - 180^\circ) = \sin(90^\circ + \phi) \cdot \cos(90^\circ + \delta) - \cos(90^\circ + \phi) \cdot \sin(90^\circ + \delta) \cdot \cos(H)$$

Pelas Relações (B.14), (B.16) e (B.21) do Apêndice B:

$$-\sin(z) \cdot \cos(A) = -\cos(\phi) \cdot \sin(\delta) + \sin(\phi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H)$$

Implicando

$$\sin(z) \cdot \cos(A) = \cos(\phi) \cdot \sin(\delta) - \sin(\phi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H)$$

O que prova a Equação (7.4) para o segundo caso.

Mais uma vez, do Teorema 3.9, segue:

$$\text{sen}(90^\circ + \delta) \cdot \cos(H) = \text{sen}(90^\circ + \phi) \cdot \cos(z) - \cos(90^\circ + \phi) \cdot \text{sen}(z) \cdot \cos(A - 180^\circ)$$

Pelas Relações (B.14), (B.16) e (B.21) do Apêndice B:

$$\cos(\delta) \cdot \cos(H) = \cos(\phi) \cdot \cos(z) - \text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(z) \cdot \cos(A)$$

O que prova a Equação (7.5) para o segundo caso.

Do Teorema 3.3, aplicado ao triângulo de posição astronômico ZMP, segue:

$$\frac{\text{sen}(z)}{\text{sen}(H)} = \frac{\text{sen}(90^\circ + \delta)}{\text{sen}(A - 180^\circ)}$$

Pelas Relações (B.14) e (B.22) do Apêndice B, segue que:

$$\frac{\text{sen}(z)}{\text{sen}(H)} = \frac{\cos(\delta)}{-\text{sen}(A)}$$

Ou seja,

$$\text{sen}(z) \cdot \text{sen}(A) = -\text{sen}(H) \cdot \cos(\delta)$$

O que prova a Equação (7.8) para o segundo caso.

Novamente, do Teorema 3.10, tem-se:

$$\text{sen}(A - 180^\circ) \cdot \text{cotg}(H) = \text{sen}(90^\circ + \phi) \cdot \text{cotg}(z) - \cos(90^\circ + \phi) \cdot \cos(A - 180)$$

Pelas Relações (B.14), (B.16), (B.21) e (B.22) do Apêndice B:

$$-\text{sen}(A) \cdot \text{cotg}(H) = \cos(\phi) \cdot \text{cotg}(z) - \text{sen}(\phi) \cdot \cos(A)$$

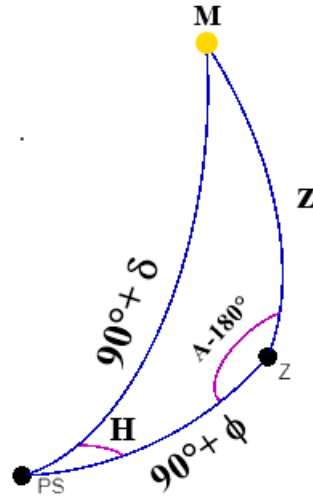
Implicando

$$\text{sen}(A) \cdot \text{cotg}(H) = \text{sen}(\phi) \cdot \cos(A) - \cos(\phi) \cdot \text{cotg}(z)$$

O que prova a Equação (7.9) para o segundo caso.

Terceiro caso: $\phi < 0$ e $\delta > 0$

Considere o ponto M o astro, o ponto P o polo sul celeste e o ponto Z o zênite, conforme a Figura 7.4. Sabe-se que z é a distância zenital, A o azimute e H o ângulo horário do astro.

Figura 7.4: Triângulo de posição astronômico com $\phi < 0$ e $\delta > 0$.

Fonte: A autora.

Pelo Teorema 3.1, aplicado ao triângulo de posição astronômico ZMP, observa-se:

$$\cos(z) = \cos(90^\circ + \delta) \cdot \cos(90^\circ + \phi) + \sin(90^\circ + \delta) \cdot \sin(90^\circ + \phi) \cdot \cos(H)$$

Pelas Relações (B.14) e (B.16) do Apêndice B, segue que:

$$\cos(z) = (-\sin(\phi)) \cdot (-\sin(\delta)) + \cos(\phi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H)$$

Isto é

$$\cos(z) = \sin(\phi) \cdot \sin(\delta) + \cos(\phi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H)$$

O que prova a Equação (7.1) para o terceiro caso.

Aplicando novamente o Teorema 3.1 ao triângulo de posição astronômico ZMP, observa-se de forma análoga que:

$$\cos(90^\circ + \delta) = \cos(90^\circ + \phi) \cdot \cos(z) + \sin(90^\circ + \phi) \cdot \sin(z) \cdot \cos(A - 180^\circ)$$

Pelas Relações (B.14), (B.16) e (B.21) do Apêndice B, segue que:

$$-\sin(\delta) = -\sin(\phi) \cdot \cos(z) + \cos(\phi) \cdot \sin(z) \cdot (-\cos(A))$$

Isto é

$$-\sin(\delta) = -\sin(\phi) \cdot \cos(z) - \cos(\phi) \cdot \sin(z) \cdot \cos(A)$$

Ou seja,

$$\sin(\delta) = \sin(\phi) \cdot \cos(z) + \cos(\phi) \cdot \sin(z) \cdot \cos(A)$$

O que prova a Equação (7.2) para o terceiro caso.

Do Teorema 3.10, tem-se:

$$\text{sen}(H) \cdot \text{cotg}(A - 180^\circ) = \text{sen}(90^\circ + \phi) \cdot \text{cotg}(90^\circ + \delta) - \cos(90^\circ + \phi) \cdot \cos(H)$$

Pelas Relações (B.14), (B.16), (B.17) e (B.19) do Apêndice B:

$$-\text{sen}(H) \cdot \text{cotg}(A) = -\text{tg}(\delta) \cdot \cos(\phi) + \text{sen}(\phi) \cdot \cos(H)$$

Implicando

$$\text{sen}(H) \cdot \text{cotg}(A) = \text{tg}(\delta) \cdot \cos(\phi) - \text{sen}(\phi) \cdot \cos(H)$$

O que prova a Equação (7.3) para o terceiro caso.

Partindo do Teorema 3.9, tem-se:

$$\text{sen}(z) \cdot \cos(A - 180^\circ) = \text{sen}(90^\circ + \phi) \cdot \cos(90^\circ + \delta) - \cos(90^\circ + \phi) \cdot \text{sen}(90^\circ + \delta) \cdot \cos(H)$$

Pelas Relações (B.14), (B.16) e (B.21) do Apêndice B:

$$-\text{sen}(z) \cdot \cos(A) = -\cos(\phi) \cdot \text{sen}(\delta) + \text{sen}(\phi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H)$$

Implicando

$$\text{sen}(z) \cdot \cos(A) = \cos(\phi) \cdot \text{sen}(\delta) - \text{sen}(\phi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H)$$

O que prova a Equação (7.4) para o terceiro caso.

Mais uma vez, do Teorema 3.9, segue:

$$\text{sen}(90^\circ + \delta) \cdot \cos(H) = \text{sen}(90^\circ + \phi) \cdot \cos(z) - \cos(90^\circ + \phi) \cdot \text{sen}(z) \cdot \cos(A - 180^\circ)$$

Pelas Relações (B.14), (B.16) e (B.21) do Apêndice B:

$$\cos(\delta) \cdot \cos(H) = \cos(\phi) \cdot \cos(z) - \text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(z) \cdot \cos(A)$$

O que prova a Equação (7.5) para o terceiro caso.

Do Teorema 3.3, aplicado ao triângulo de posição astronômico ZMP, segue:

$$\frac{\text{sen}(z)}{\text{sen}(H)} = \frac{\text{sen}(90^\circ + \delta)}{\text{sen}(A - 180^\circ)}$$

Pelas Relações (B.14) e (B.22) do Apêndice B, segue que:

$$\frac{\text{sen}(z)}{\text{sen}(H)} = \frac{\cos(\delta)}{-\text{sen}(A)}$$

Ou seja,

$$\text{sen}(z) \cdot \text{sen}(A) = -\text{sen}(H) \cdot \cos(\delta)$$

O que prova a Equação (7.8) para o terceiro caso.

Novamente, do Teorema 3.10, tem-se:

$$\text{sen}(A - 180^\circ) \cdot \text{cotg}(H) = \text{sen}(90^\circ + \phi) \cdot \text{cotg}(z) - \cos(90^\circ + \phi) \cdot \cos(A - 180^\circ)$$

Pelas Relações (B.14), (B.16), (B.21) e (B.22) do Apêndice B:

$$-\text{sen}(A) \cdot \text{cotg}(H) = \cos(\phi) \cdot \text{cotg}(z) - \text{sen}(\phi) \cdot \cos(A)$$

Implicando

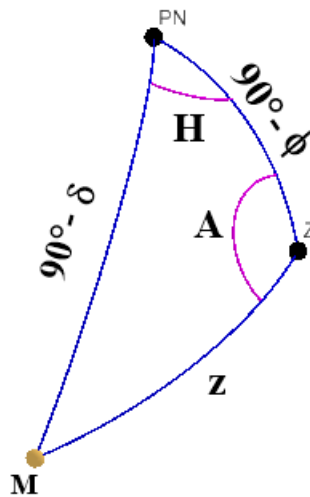
$$\text{sen}(A) \cdot \text{cotg}(H) = \text{sen}(\phi) \cdot \cos(A) - \cos(\phi) \cdot \text{cotg}(z)$$

O que prova a Equação (7.9) para o terceiro caso.

Quarto caso: $\phi > 0$ e $\delta < 0$

Considere o ponto M o astro, o ponto P o polo norte celeste e o ponto Z o zênite, conforme a Figura 7.5. Sabe-se que z é a distância zenital, A o azimute e H o ângulo horário do astro.

Figura 7.5: Triângulo de posição astronômico com $\phi > 0$ e $\delta < 0$.



Fonte: A autora.

Pelo Teorema 3.1, aplicado ao triângulo de posição astronômico ZMP, observa-se:

$$\cos(z) = \cos(90^\circ - \delta) \cdot \cos(90^\circ - \phi) + \text{sen}(90^\circ - \delta) \cdot \text{sen}(90^\circ - \phi) \cdot \cos(H)$$

Pelas Relações (B.13) e (B.15) do Apêndice B, segue que:

$$\cos(z) = \text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(\delta) + \cos(\phi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H)$$

O que prova a Equação (7.1) para o quarto caso.

Aplicando novamente o Teorema 3.1 ao triângulo de posição astronômico ZMP, observa-se de forma análoga que:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - \phi) \cdot \cos(z) + \text{sen}(90^\circ - \phi) \cdot \text{sen}(z) \cdot \cos(A)$$

Pelas Relações (B.13) e (B.15) do Apêndice B, segue que:

$$\text{sen}(\delta) = \text{sen}(\phi) \cdot \cos(z) + \cos(\phi) \cdot \text{sen}(z) \cdot \cos(A)$$

O que prova a Equação (7.2) para o quarto caso.

Do Teorema 3.10, tem-se:

$$\text{sen}(H) \cdot \text{cotg}(A) = \text{sen}(90^\circ - \phi) \cdot \text{cotg}(90^\circ - \delta) - \cos(90^\circ - \phi) \cdot \cos(H)$$

Pelas Relações (B.13), (B.15) e (B.18) do Apêndice B:

$$\text{sen}(H) \cdot \text{cotg}(A) = \text{tg}(\delta) \cdot \cos(\phi) - \text{sen}(\phi) \cdot \cos(H)$$

O que prova a Equação (7.3) para o quarto caso.

Partindo do Teorema 3.9, tem-se:

$$\text{sen}(z) \cdot \cos(A) = \text{sen}(90^\circ - \phi) \cdot \cos(90^\circ - \delta) - \cos(90^\circ - \phi) \cdot \text{sen}(90^\circ - \delta) \cdot \cos(H)$$

Pelas Relações (B.13) e (B.15) do Apêndice B:

$$\text{sen}(z) \cdot \cos(A) = \cos(\phi) \cdot \text{sen}(\delta) - \text{sen}(\phi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H)$$

O que prova a Equação (7.4) para o quarto caso.

Mais uma vez, do Teorema 3.9, segue:

$$\text{sen}(90^\circ - \delta) \cdot \cos(H) = \text{sen}(90^\circ - \phi) \cdot \cos(z) - \cos(90^\circ - \phi) \cdot \text{sen}(z) \cdot \cos(A)$$

Pelas Relações (B.13) e (B.15) do Apêndice B:

$$\cos(\delta) \cdot \cos(H) = \cos(\phi) \cdot \cos(z) - \text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(z) \cdot \cos(A)$$

O que prova a Equação (7.5) para o quarto caso.

Do Teorema 3.3, aplicado ao triângulo de posição astronômico ZMP, segue:

$$\frac{\text{sen}(z)}{\text{sen}(H)} = \frac{\text{sen}(90^\circ - \delta)}{\text{sen}(A)}$$

Pela Relação (B.13) do Apêndice B, segue que:

$$\frac{\text{sen}(z)}{\text{sen}(H)} = \frac{\cos(\delta)}{\text{sen}(A)}$$

Ou seja,

$$\text{sen}(z) \cdot \text{sen}(A) = \text{sen}(H) \cdot \cos(\delta)$$

O que prova a Equação (7.6) para o quarto caso.

Novamente, do Teorema 3.10, tem-se:

$$\text{sen}(A) \cdot \text{cotg}(H) = \text{sen}(90^\circ - \phi) \cdot \text{cotg}(z) - \cos(90^\circ - \phi) \cdot \cos(A)$$

Pelas Relações (B.13) e (B.15) do Apêndice B:

$$\operatorname{sen}(A) \cdot \operatorname{cotg}(H) = \cos(\phi) \cdot \operatorname{cotg}(z) - \operatorname{sen}(\phi) \cdot \cos(A)$$

O que prova a Equação (7.7) para o quarto caso. □

Exemplo 1: Quais eram os horários na cidade de Rio Claro SP no dia 2 de maio de 2020 quando o Sol estava 40° acima do horizonte?

Dados: Segundo o Anuário do Observatório-Nacional (2020), a declinação do Sol em 2 de maio de 2020 é $15^\circ 27' 7,6''$. A latitude de Rio Claro, conforme a Tabela 5.1, é $22,41^\circ$ Sul.

Tem-se do enunciado h (altura), z (distância zenital) e ϕ (latitude geográfica):

$$\delta = 15^\circ 27' 7,6'' = 15,4521^\circ$$

$$h = 40^\circ \implies z = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

$$\phi = 22,41^\circ \text{ Sul} = -22,41^\circ$$

Precisa-se encontrar o ângulo horário H . Pela Equação (7.1):

$$\cos(H) = \cos(z) \cdot \sec(\phi) \cdot \sec(\delta) - \operatorname{tg}(\phi) \cdot \operatorname{tg}(\delta)$$

Substituindo os respectivos valores em (7.1):

$$\cos(H) = \cos(50^\circ) \cdot \sec(-22,41^\circ) \cdot \sec(15,4521^\circ) - \operatorname{tg}(-22,41^\circ) \cdot \operatorname{tg}(15,4521^\circ) \implies$$

$$\cos(H) = 0,835362184 \implies H = \arccos(0,835362184) = 33,34^\circ$$

Sabe-se que $15^\circ = 1h$, logo $33,34^\circ = 2,22h = 2h13min$. Dessa forma, em Rio Claro, no dia 2 de maio de 2020, o Sol estava 40° acima do horizonte antes do meio dia às $12h - 2h13min = 9h47min$ após o meio dia às $12h + 2h13min = 14h13min$.

7.2 Estudo Analítico do Movimento Diurno

Foram obtidas fórmulas para estudar a localização de um astro qualquer na esfera celeste. Sabe-se que alguns astros apresentam nascer, ocaso e culminância e outros são circumpolares (visíveis ou invisíveis ao observador). Utilizando o triângulo de posição astronômico, pode-se determinar as coordenadas de um astro em um momento específico de acordo com algumas características. Como exemplo, podem ser estudados: passagem meridiana superior e inferior, passagem pelo horizonte, passagem pelo círculo das seis horas e passagem pelo primeiro vertical.

7.2.1 Passagem de um Astro pelo Meridiano do Lugar

Passagem meridiana de um astro é o instante em que o astro cruza o meridiano local. Esse momento ocorre duas vezes durante seu movimento aparente: uma vez no meridiano superior (acima do plano do horizonte) e outra no meridiano inferior (abaixo do plano do horizonte).

Passagem Meridiana Superior

Sabe-se que no meridiano do lugar o ângulo horário é nulo ($H = 0^\circ$) na passagem meridiana superior.

Pela Equação (7.1) tem-se:

$$\cos(z) = \text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(\delta) + \cos(\phi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H)$$

Como $\cos(H) = 1$:

$$\cos(z) = \text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(\delta) + \cos(\phi) \cdot \cos(\delta)$$

Além disso, aplicando a Relação (B.1) do Apêndice B:

$$\cos(z) = \cos(\phi - \delta)$$

Isto é:

$$z = \pm(\phi - \delta)$$

Como $z \geq 0$:

$$z = |\phi - \delta| \tag{7.10}$$

Observação 7.3. A distância zenital é sempre positiva. Se $\phi - \delta$ resultar como negativo, interpreta-se que o astro culmina entre o zênite e o polo não visível ao observador; se $\phi - \delta$ resultar como positivo, significa que o astro culmina entre o zênite e o polo visível ao observador. Caso a declinação δ tenha sinal negativo, significa que o observador e o astro estão em hemisférios opostos.

Exemplo 1: Qual a distância zenital do Sol em Rio Claro no solstício de verão?

Dados: De acordo com o Anuário do Observatório-Nacional (2020), $\delta = -23^\circ 27' (-23, 45^\circ)$ e pela Tabela 5.1, $\phi = 22, 41^\circ S$.

$$z = |\phi - \delta| \implies z = |-22, 41^\circ - (-23, 45^\circ)| = |1, 04^\circ| = 1, 04^\circ$$

Logo, o Sol culmina entre o zênite e o polo visível com uma altura de $h = 90^\circ - 1, 04^\circ = 88, 96^\circ$.

Exemplo 2: Qual a distância zenital do Sol em Curitiba no solstício de verão?

Dados: De acordo com o Anuário do Observatório-Nacional (2020), $\delta = -23^\circ 27' (-23, 45^\circ)$ e pela Tabela 5.1, $\phi = 49, 2733^\circ S$.

$$z = |\phi - \delta| \implies z = |-49, 2733^\circ - (-23, 45^\circ)| = |-25, 8233^\circ| = 25, 8233^\circ$$

Logo o Sol culmina entre o zênite e o polo não visível com uma altura de $h = 90^\circ - 25, 8233^\circ = 64, 1767^\circ$.

Passagem Meridiana Inferior

Sabe-se que no meridiano do lugar o ângulo horário é $H = 180^\circ$ na passagem meridiana inferior.

Pela Equação (7.1) tem-se:

$$\cos(z) = \text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(\delta) + \cos(\phi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H)$$

Como $\cos(H) = -1$, tem-se:

$$\cos(z) = \sin(\phi) \cdot \sin(\delta) - \cos(\phi) \cdot \cos(\delta)$$

Isto é:

$$\cos(z) = -(\cos(\phi) \cdot \cos(\delta) - \sin(\phi) \cdot \sin(\delta))$$

Utilizando a Relação (B.1) do Apêndice B, segue:

$$\cos(z) = -\cos(\phi + \delta)$$

Aplicando a Relação (B.21) do Apêndice B:

$$\cos(z) = \cos(180^\circ - (\phi + \delta))$$

Isto é:

$$z = |180^\circ - (\phi + \delta)| \quad (7.11)$$

Condição para uma Estrela passar pelo Zênite de um Observador

O meridiano local contém o zênite do observador. Uma estrela passa pelo zênite quando sua altura é $h = 90^\circ$, ou seja, quando $z = 0^\circ$.

Pela Equação (7.10), $|\phi - \delta| = 0$, ou seja $\phi = \delta$. Logo conclui-se que um astro passa pelo zênite do observador quando a latitude do lugar do observador for igual a declinação da estrela.

De acordo com Saraiva, Oliveira e Muller (2018), o Sol faz passagem pelo zênite atingindo sua altura $z = 90^\circ$ no meio dos dias de solstícios (aproximadamente 21/06 e 21/12). Ao longo do ano o Sol passa o meridiano ao norte do zênite ou ao sul do zênite.

A partir dos círculos polares, onde as linhas de latitude são $+66,5^\circ$ e $-66,5^\circ$, o Sol permanece 24 horas acima do horizonte no verão e 24 horas abaixo do horizonte no inverno.

7.2.2 Passagem de um Astro pelo Horizonte

Nesse caso o astro está nascendo ou ocultando-se, ou seja, cruza o horizonte do observador, o que implica $z = 90^\circ$.

Desta forma, pela Equação (7.1), como $\cos(z) = 0$, tem-se:

$$\cos(H) = -\operatorname{tg}(\phi) \cdot \operatorname{tg}(\delta) \quad (7.12)$$

Da mesma forma, pela Equação (7.2), como $\cos(z) = 0$ e $\sin(z) = 1$, tem-se:

$$\sin(\delta) = \cos(\phi) \cdot \cos(A) \quad (7.13)$$

As Equações (7.12) e (7.13) são as mesmas para o hemisfério sul e hemisfério norte.

Uma estrela que possui nascer e ocaso, com declinação δ e latitude do lugar ϕ cumpre a seguinte relação:

$$|\delta| \geq |\phi| - 90^\circ \quad (7.14)$$

Isto ocorre uma vez que $|\cos(A)| \leq 1$, então pela Equação (7.13) e Relação (B.15) do Apêndice B segue:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\text{sen}(\delta)}{\cos(\phi)} \right| \leq 1 &\implies \frac{|\text{sen}(\delta)|}{|\cos(\phi)|} \leq 1 \implies |\text{sen}(\delta)| \leq |\cos(\phi)| \\ &\implies |\cos(90^\circ - \delta)| \leq |\cos(\phi)| \end{aligned}$$

Como $\cos(\phi) \geq 0$, pois $-90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$, segue:

$$|\cos(90^\circ - \delta)| \leq \cos(\phi) \implies -\cos(\phi) \leq \cos(90^\circ - \delta) \leq \cos(\phi)$$

Dessa forma

$$\cos(90^\circ - \delta) \leq \cos(\phi) \implies |90^\circ - \delta| \geq |\phi|$$

Como $|90^\circ - \delta| \leq |90^\circ| + |\delta|$, então:

$$|90^\circ| + |\delta| \geq |90^\circ - \delta| \geq |\phi| \implies 90^\circ + |\delta| \geq |\phi|$$

Logo, cumprem:

$$|\delta| \geq |\phi| - 90^\circ$$

As estrelas circumpolares (aquelas que não possuem nascer nem ocaso) descrevem seu movimento aparente sempre acima (ou abaixo) do horizonte. Uma vez que estrelas que cruzam o horizonte satisfazem a Equação (7.14), então estrelas circumpolares com declinação δ e latitude do lugar ϕ cumprem:

$$|\delta| \leq |\phi| - 90^\circ \tag{7.15}$$

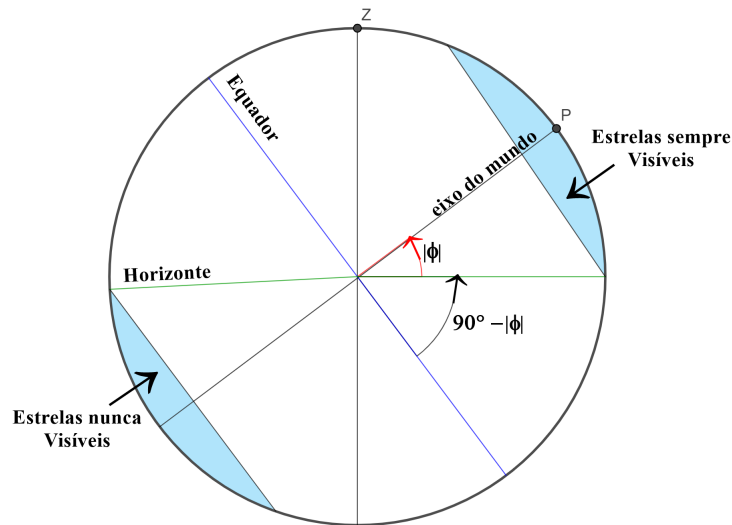
ou:

$$|\delta| \geq 90^\circ - |\phi| \tag{7.16}$$

uma vez que, da Equação (7.15), $-|\delta| \geq 90^\circ - |\phi|$ e como $|\delta| \geq -|\delta|$, segue que $|\delta| \geq -|\delta| \geq 90^\circ - |\phi|$.

Caso δ e ϕ sejam de sinais contrários, a estrela circumpolar está num lugar de latitude $-\phi$. Vide Figura 7.6.

Figura 7.6: Estrelas circumpolares.



Fonte: A autora.

Exemplo 1: Qual é a hora do pôr do Sol no dia 21 de junho de 2020 (solstício de inverno) em São José dos Campos SP?

Dados: De acordo com o Anuário do Observatório-Nacional (2020) a declinação do Sol no dia 21 de junho de 2020 é $23,5^\circ$ e pela Tabela 5.1 a latitude de São José dos Campos é $23,1840^\circ$.

$$\phi = 23,1840^\circ \text{ Sul} = -23,1840^\circ$$

Pela Equação (7.13):

$$\cos(H) = -\text{tg}(-23,1840^\circ) \cdot \text{tg}(23,5^\circ) \implies$$

$$\cos(H) = 0,186217111 \implies H = \arccos(0,18618136) = 79,26^\circ$$

Sabe-se que $15^\circ = 1h$, logo $79,26^\circ = 5,28h = 5h17min$. Desta forma, em São José dos Campos, no dia 21 de junho de 2020, o pôr do Sol ocorre após o meio dia às $12h + 5h17min = 17h17min$.

Exemplo 2: Qual a duração do dia em Rio Claro no dia 21 de dezembro de 2020 (solstício de verão)?

Dados: De acordo com o Anuário do Observatório-Nacional (2020) $\delta = -23,45^\circ$ e pela Tabela 5.1 $\phi = 22,41^\circ S$.

Primeiramente determina-se o horário do nascer e do ocaso do Sol. Para isso, pela Equação (7.12), tem-se:

$$\cos(H) = -\text{tg}(-22,41^\circ) \cdot \text{tg}(-23,45^\circ) \implies \cos(H) = -0,178877777 \implies$$

$$H = \arccos(-0,178877777) \implies H = 100,30^\circ$$

Sabe-se que $15^\circ = 1h$, logo $100,30^\circ = 6,68h = 6h40min$. Quando o Sol passa no meridiano do lugar, o ângulo horário é nulo, porém no tempo civil os relógios marcam 12 horas, portanto:

$12h - 6h40min = 5h20min$ (Hora do nascer do Sol) e $12h + 6h40min = 18h40min$ (Hora do ocaso do Sol). O que implica que a duração do dia em Rio Claro no dia do Solstício de Verão é 13h20min.

Exemplo 3: Determine o azimute ao nascer e ocaso do Sol em Rio Claro nos dias de solstícios.

Da Tabela 5.1, a latitude da cidade de Rio Claro é $\phi = 22,41^\circ S$ e pelo Anuário do Observatório-Nacional (2020) tem-se que no solstício de verão a declinação é $\delta = -23,45^\circ$ e no solstício de inverno $\delta = 23,45^\circ$.

Pela Equação (7.13), no solstício de verão:

$$\cos(A) = \frac{\text{sen}(-23,45)}{\cos(-22,41)} = -0,430456951 \implies$$

$$A = \arccos(-0,430456951) = 115,49^\circ$$

Portanto, no solstício de verão, o Sol nasce com azimute $115,49^\circ$ e se põe com azimute $360^\circ - 115,49^\circ = 244,51^\circ$ (pois são ângulos replementares¹).

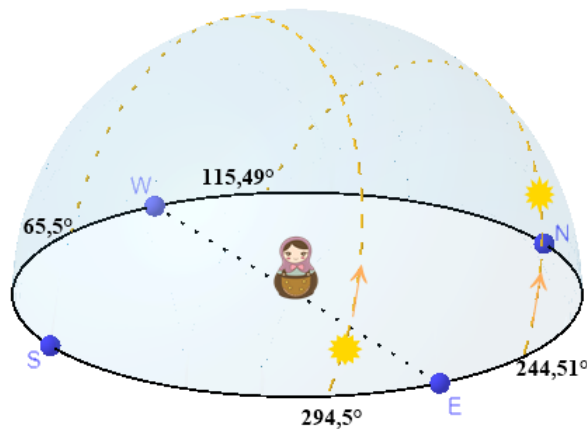
Pela Equação (7.13), no solstício de inverno:

$$\cos(A) = \frac{\text{sen}(23,45)}{\cos(-22,41)} = 0,430456951 \implies$$

$$A = \arccos(0,430456951) = 65,50^\circ$$

Portanto, no solstício de inverno, o Sol nasce com azimute $65,50^\circ$ e se põe com azimute $360^\circ - 65,50 = 294,50^\circ$ (pois são ângulos replementares).

Figura 7.7: Azimute do nascer e ocaso do Sol em Rio Claro durante os solstícios.



Fonte: A autora.

Exemplo 4: Considerando a estrela Alpha CNC da Constelação de Câncer observada de São José dos Campos, determine:

- O azimute da estrela no instante do seu nascimento e do seu ocaso.
- O tempo que essa estrela permanece acima do horizonte.

¹A soma resulta em 360° .

De acordo com o Anuário do Observatório-Nacional (2020), Alpha CNC possui coordenadas $\alpha = 08h59min36,3s$ e $\delta = 11^\circ46'38''$. Pela Tabela 5.1, a latitude do São José dos Campos é $23,1840^\circ$ S. Um astro aparece ou desaparece no horizonte quando possui distância zenital igual a 90° .

a) Tem-se que $\delta = 11^\circ46'38'' = 11,7772^\circ$, assim pela Equação (7.13):

$$\cos(A) = \frac{\text{sen}(11,7772^\circ)}{\cos(-23,1840^\circ)} = 0,222037041 \implies$$

$$A = \arccos(0,222037041) = 77,17^\circ$$

O Azimute a leste é $77,17^\circ$ e a oeste $282,83^\circ$ (pois são ângulos replementares). Como um astro nasce a leste, o Azimute do nascer da estrela Alpha CNC é $77,17^\circ$. Como um astro se põe a oeste, o Azimute do ocaso da estrela Alpha CNC é $282,83^\circ$.

b) Pela Equação (7.12), tem-se:

$$\cos(H) = -\text{tg}(-23,1840^\circ) \cdot \text{tg}(11,7772^\circ) = 0,089292425 \implies$$

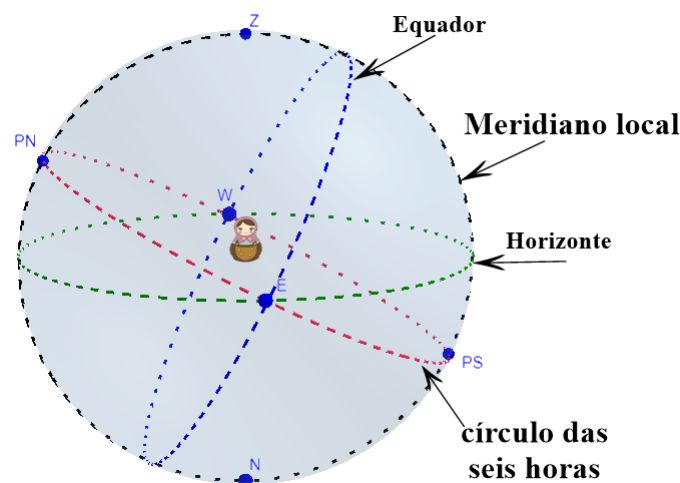
$$H = \arccos(0,089292425) = 84,87^\circ = 5,65h = 5h39min$$

Uma estrela permanece acima do horizonte um tempo igual ao dobro de seu ângulo horário ao nascer (ou ocaso). Logo a estrela Alpha CNC permanece acima do horizonte $2 \times 5h39min$, isto é, 11 horas e 18 minutos. Outra forma de se calcular este valor é notar que Alpha CNC nasce às $12h - 5h39min = 6h21min$ e possui ocaso às $12h + 5h39min = 17h39min$. Ou seja, permanece acima do horizonte 11 horas e 18 minutos.

7.2.3 Passagem de um Astro pelo Círculo das Seis Horas

O círculo das seis horas, para um observador, é o meridiano no qual o seu plano intercepta perpendicularmente o plano do meridiano local. O plano do círculo das seis horas também intercepta o plano do equador perpendicularmente. Além disso, o círculo das seis horas é o meridiano alinhado com as direções leste e oeste, conforme Figura 7.8.

Figura 7.8: Passagem de um astro pelo círculo das seis horas.



Fonte: A autora.

Neste caso, tem-se $H = \pm 6h$, ou seja, $H = \pm 90^\circ$.

Pela Equação (7.1) tem-se:

$$\cos(z) = \sin(\phi) \cdot \sin(\delta) + \cos(\phi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H)$$

Mas $z = 90^\circ - h$, assim:

$$\cos(90^\circ - h) = \sin(\phi) \cdot \sin(\delta) + \cos(\phi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H)$$

Pela Relação (B.15) do Apêndice B e $\cos(H) = 0$:

$$\sin(h) = \sin(\phi) \cdot \sin(\delta) \quad (7.17)$$

Como o triângulo de posição astronômico nesse caso é retângulo no polo, pela Equação (3.47) da Seção 3.4 tem-se:

$$\cotg(A) = \cos(\phi) \cdot \tg(\delta) \quad (7.18)$$

uma vez que:

Primeiro caso:

$$\cotg(A) = \cotg(90^\circ - \delta) \cdot \sin(90^\circ - \phi)$$

Aplicando as Relações (B.13) e (B.18) do Apêndice B:

$$\cotg(A) = \tg(\delta) \cdot \cos(\phi)$$

Ou seja,

$$\cotg(A) = \cos(\phi) \cdot \tg(\delta)$$

Provando a Equação (7.18) para o primeiro caso.

Segundo caso:

$$\cotg(A - 180^\circ) = \cotg(90^\circ + \delta) \cdot \sin(90^\circ + \phi)$$

Aplicando as Relações (B.14), (B.17) e (B.19) do Apêndice B:

$$-\cotg(A) = -\cos(\phi) \cdot \tg(\delta)$$

O que implica

$$\cotg(A) = \cos(\phi) \cdot \tg(\delta)$$

Provando a Equação (7.18) para o segundo caso.

Terceiro caso:

$$\cotg(A - 180^\circ) = \cotg(90^\circ + \delta) \cdot \sin(90^\circ + \phi)$$

Aplicando as Relações (B.14), (B.17) e (B.19) do Apêndice B:

$$-\cotg(A) = -\cos(\phi) \cdot \tg(\delta)$$

O que implica

$$\cotg(A) = \cos(\phi) \cdot \operatorname{tg}(\delta)$$

Provando a Equação (7.18) para o terceiro caso.

Quarto caso:

$$\cotg(A) = \cotg(90^\circ - \delta) \cdot \operatorname{sen}(90^\circ - \phi)$$

Aplicando as Relações (B.13) e (B.18) do Apêndice B:

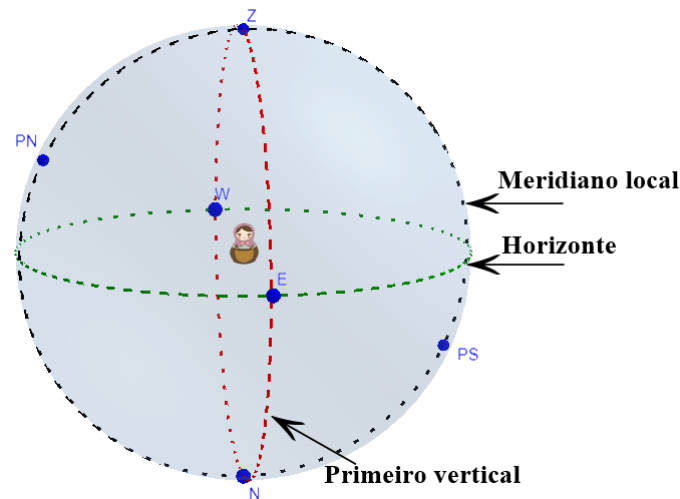
$$\cotg(A) = \cos(\phi) \cdot \operatorname{tg}(\delta)$$

Provando a Equação (7.18) para o quarto caso.

7.2.4 Passagem do Astro pelo Primeiro Vertical

Primeiro vertical é o círculo máximo que passa pelo Zênite e Nadir de um observador cujo plano forma 90° com o plano do meridiano local, conforme Figura 7.9.

Figura 7.9: Passagem do astro pelo primeiro vertical.



Fonte: A autora.

Neste caso, o triângulo de posição astronômico é retângulo no Zênite, isto é, $A = 90^\circ$. Dessa forma, valem as fórmulas:

$$\operatorname{tg}(\delta) = \operatorname{tg}(\phi) \cdot \cos(H) \quad (7.19)$$

e

$$\operatorname{sen}(\delta) = \operatorname{sen}(h) \cdot \operatorname{sen}(\phi) \quad (7.20)$$

Demonstração. **Primeiro caso:** Pela Equação (3.45) da Seção 3.4 tem-se:

$$\cotg(90^\circ - \delta) = \cotg(90^\circ - \phi) \cdot \cos(H)$$

Pela Relação (B.18) do Apêndice B:

$$\operatorname{tg}(\delta) = \operatorname{tg}(\phi) \cdot \cos(H)$$

O que prova a Equação (7.19) para o primeiro caso.

Pela Equação (3.38) da Seção 3.4 tem-se:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - h) \cdot \cos(90^\circ - \phi)$$

Pela Relação (B.15) Apêndice B:

$$\operatorname{sen}(\delta) = \operatorname{sen}(h) \cdot \operatorname{sen}(\phi)$$

O que prova a Equação (7.20) para o primeiro caso.

Segundo caso: Pela Equação (3.45) da Seção 3.4 tem-se:

$$\operatorname{cotg}(90^\circ + \delta) = \operatorname{cotg}(90^\circ + \phi) \cdot \cos(H)$$

Pela Relação (B.17) do Apêndice B:

$$-\operatorname{tg}(\delta) = -\operatorname{tg}(\phi) \cdot \cos(H)$$

Ou seja,

$$\operatorname{tg}(\delta) = \operatorname{tg}(\phi) \cdot \cos(H)$$

O que prova a Equação (7.19) para o segundo caso.

Pela Equação (3.38) da Seção 3.4 tem-se:

$$\cos(90^\circ + \delta) = \cos(90^\circ - h) \cdot \cos(90^\circ + \phi)$$

Pela Relações (B.15) e (B.16) Apêndice B:

$$-\operatorname{sen}(\delta) = \operatorname{sen}(h) \cdot (-\operatorname{sen}(\phi))$$

Ou seja,

$$\operatorname{sen}(\delta) = \operatorname{sen}(h) \cdot \operatorname{sen}(\phi)$$

O que prova a Equação (7.20) para o segundo caso.

Terceiro caso: Pela Equação (3.45) da Seção 3.4 tem-se:

$$\operatorname{cotg}(90^\circ + \delta) = \operatorname{cotg}(90^\circ + \phi) \cdot \cos(H)$$

Pela Relação (B.17) do Apêndice B:

$$-\operatorname{tg}(\delta) = -\operatorname{tg}(\phi) \cdot \cos(H)$$

Ou seja,

$$\operatorname{tg}(\delta) = \operatorname{tg}(\phi) \cdot \cos(H)$$

O que prova a Equação (7.19) para o terceiro caso.

Pela Equação (3.38) da Seção 3.4 tem-se:

$$\cos(90^\circ + \delta) = \cos(90^\circ - h) \cdot \cos(90^\circ + \phi)$$

Pelas Relações (B.15) e (B.16) do Apêndice B:

$$-\operatorname{sen}(\delta) = \operatorname{sen}(h) \cdot (-\operatorname{sen}(\phi))$$

Ou seja,

$$\operatorname{sen}(\delta) = \operatorname{sen}(h) \cdot \operatorname{sen}(\phi)$$

O que prova a Equação (7.20) para o terceiro caso.

Quarto caso: Pela Equação (3.45) da Seção 3.4 tem-se:

$$\operatorname{cotg}(90^\circ - \delta) = \operatorname{cotg}(90^\circ - \phi) \cdot \cos(H)$$

Pela Relação (B.18) do Apêndice B:

$$\operatorname{tg}(\delta) = \operatorname{tg}(\phi) \cdot \cos(H)$$

O que prova a Equação (7.19) para o quarto caso.

Pela Equação (3.38) da Seção 3.4 tem-se:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - h) \cdot \cos(90^\circ - \phi)$$

Pela Relação (B.15) do Apêndice B:

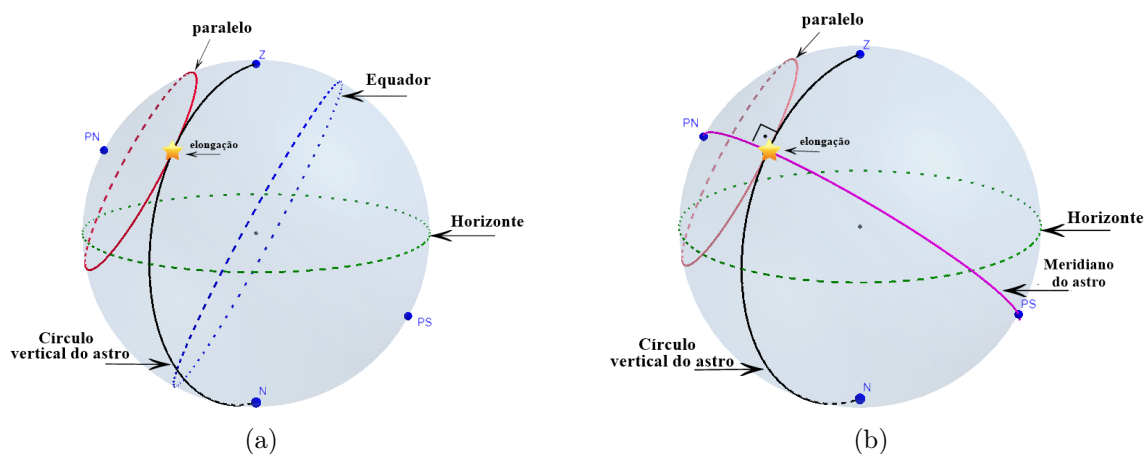
$$\operatorname{sen}(\delta) = \operatorname{sen}(h) \cdot \operatorname{sen}(\phi)$$

O que prova a Equação (7.20) para o quarto caso. □

7.2.5 Elongação

Diz-se que um astro está em elongação quando o círculo vertical do astro tangencia o paralelo por ele descrito, conforme Figura 7.10 (a). Quando um astro está em elongação, o ângulo paralático do triângulo de posição é reto, conforme ilustrado na Figura 7.10 (b).

Figura 7.10: Elongação de um astro.



Fonte: A autora.

Durante a elongação de um astro, as relações entre altura h , o ângulo horário H , o azimute A , a declinação δ e a latitude ϕ são regidas conforme as fórmulas seguintes:

$$\operatorname{sen}(h) = \frac{\operatorname{sen}(\phi)}{\operatorname{sen}(\delta)} \quad (7.21)$$

$$\cos(H) = \frac{\operatorname{tg}(\phi)}{\operatorname{tg}(\delta)} \quad (7.22)$$

$$\cos(A) = \frac{\operatorname{tg}(\phi)}{\operatorname{tg}(h)} \quad (7.23)$$

Demonstração. Primeiro caso: Pela Equação (3.38), onde $z = 90^\circ - h$, tem-se:

$$\cos(90^\circ - \phi) = \cos(90^\circ - \delta) \cdot \cos(90^\circ - h)$$

Pela Relação (B.15) do Apêndice B:

$$\operatorname{sen}(\phi) = \operatorname{sen}(\delta) \cdot \operatorname{sen}(h)$$

O que implica

$$\operatorname{sen}(h) = \frac{\operatorname{sen}(\phi)}{\operatorname{sen}(\delta)}$$

O que mostra a Equação (7.21) para o primeiro caso.

Agora, pela Equação (3.44), tem-se:

$$\operatorname{cotg}(90^\circ - \phi) = \operatorname{cotg}(90^\circ - \delta) \cdot \cos(H)$$

Pela Relação (B.18) do Apêndice B

$$\operatorname{tg}(\phi) = \operatorname{tg}(\delta) \cdot \cos(H)$$

O que implica

$$\cos(H) = \frac{\operatorname{tg}(\phi)}{\operatorname{tg}(\delta)}$$

O que mostra a Equação (7.22) para o primeiro caso.

Além disso, pela Equação (3.45), com $z = 90^\circ - h$, tem-se:

$$\operatorname{cotg}(90^\circ - \phi) = \operatorname{cotg}(90^\circ - h) \cdot \cos(A)$$

Pela Relação (B.18) do Apêndice B:

$$\operatorname{tg}(\phi) = \operatorname{tg}(h) \cdot \cos(A)$$

O que implica

$$\cos(A) = \frac{\operatorname{tg}(\phi)}{\operatorname{tg}(h)}$$

O que mostra a Equação (7.23) para o primeiro caso.

Segundo caso: Pela Equação (3.38), onde $z = 90^\circ - h$, tem-se:

$$\cos(90^\circ + \phi) = \cos(90^\circ + \delta) \cdot \cos(90^\circ - h)$$

Pelas Relações (B.15) e (B.16) do Apêndice B:

$$-\operatorname{sen}(\phi) = -\operatorname{sen}(\delta) \cdot \operatorname{sen}(h)$$

O que implica

$$\operatorname{sen}(h) = \frac{\operatorname{sen}(\phi)}{\operatorname{sen}(\delta)}$$

O que mostra a Equação (7.21) para o segundo caso.

Agora, pela Equação (3.44), tem-se:

$$\operatorname{cotg}(90^\circ + \phi) = \operatorname{cotg}(90^\circ + \delta) \cdot \cos(H)$$

Pela Relação (B.17) do Apêndice B

$$-\operatorname{tg}(\phi) = -\operatorname{tg}(\delta) \cdot \cos(H)$$

O que implica

$$\cos(H) = \frac{\operatorname{tg}(\phi)}{\operatorname{tg}(\delta)}$$

O que mostra a Equação (7.22) para o segundo caso.

Além disso, pela Equação (3.45), com $z = 90^\circ - h$, tem-se:

$$\operatorname{cotg}(90^\circ + \phi) = \operatorname{cotg}(90^\circ - h) \cdot \cos(A - 180^\circ)$$

Pelas Relações (B.17), (B.18) e (B.21) do Apêndice B:

$$-\operatorname{tg}(\phi) = -\operatorname{tg}(h) \cdot \cos(A)$$

O que implica

$$\cos(A) = \frac{\operatorname{tg}(\phi)}{\operatorname{tg}(h)}$$

O que mostra a Equação (7.23) para o segundo caso.

Terceiro caso: Pela Equação (3.38), onde $z = 90^\circ - h$, tem-se:

$$\cos(90^\circ + \phi) = \cos(90^\circ + \delta) \cdot \cos(90^\circ - h)$$

Pelas Relações (B.15) e (B.16) do Apêndice B:

$$-\operatorname{sen}(\phi) = -\operatorname{sen}(\delta) \cdot \operatorname{sen}(h)$$

O que implica

$$\operatorname{sen}(h) = \frac{\operatorname{sen}(\phi)}{\operatorname{sen}(\delta)}$$

O que mostra a Equação (7.21) para o terceiro caso.

Agora, pela Equação (3.44), tem-se:

$$\cotg(90^\circ + \phi) = \cotg(90^\circ + \delta) \cdot \cos(H)$$

Pela Relação (B.17) do Apêndice B:

$$-\operatorname{tg}(\phi) = -\operatorname{tg}(\delta) \cdot \cos(H)$$

O que implica

$$\cos(H) = \frac{\operatorname{tg}(\phi)}{\operatorname{tg}(\delta)}$$

O que mostra a Equação (7.22) para o terceiro caso.

Além disso, pela Equação (3.45), com $z = 90^\circ - h$, tem-se:

$$\cotg(90^\circ + \phi) = \cotg(90^\circ - h) \cdot \cos(A - 180^\circ)$$

Pela Relações (B.17), (B.18) e (B.21) do Apêndice B:

$$-\operatorname{tg}(\phi) = -\operatorname{tg}(h) \cdot \cos(A)$$

O que implica

$$\cos(A) = \frac{\operatorname{tg}(\phi)}{\operatorname{tg}(h)}$$

O que mostra a Equação (7.23) para o terceiro caso.

Quarto caso: Pela Equação (3.38), onde $z = 90^\circ - h$, tem-se:

$$\cos(90^\circ - \phi) = \cos(90^\circ - \delta) \cdot \cos(90^\circ - h)$$

Pela Relação (B.15) do Apêndice B:

$$\operatorname{sen}(\phi) = \operatorname{sen}(\delta) \cdot \operatorname{sen}(h)$$

O que implica

$$\operatorname{sen}(h) = \frac{\operatorname{sen}(\phi)}{\operatorname{sen}(\delta)}$$

O que mostra a Equação (7.21) para o quarto caso.

Agora, pela Equação (3.44), tem-se:

$$\cotg(90^\circ - \phi) = \cotg(90^\circ - \delta) \cdot \cos(H)$$

Pela Relação (B.18) do Apêndice B:

$$\operatorname{tg}(\phi) = \operatorname{tg}(\delta) \cdot \cos(H)$$

O que implica

$$\cos(H) = \frac{\operatorname{tg}(\phi)}{\operatorname{tg}(\delta)}$$

O que mostra a Equação (7.22) para o quarto caso.

Além disso, pela Equação (3.45), com $z = 90^\circ - h$, tem-se:

$$\cotg(90^\circ - \phi) = \cotg(90^\circ - h) \cdot \cos(A)$$

Pela Relação (B.18) do Apêndice B:

$$\operatorname{tg}(\phi) = \operatorname{tg}(h) \cdot \cos(A)$$

O que implica

$$\cos(A) = \frac{\operatorname{tg}(\phi)}{\operatorname{tg}(h)}$$

O que mostra a Equação (7.23) para o quarto caso. □

Observação 7.4. Quando $|\delta| < |\phi|$ não ocorre alongação.

Demonstração. Sabe-se que $|\operatorname{sen}(h)| \leq 1$. Ocorrendo alongação, pela Equação (7.21), tem-se $\operatorname{sen}(h) = \frac{\operatorname{sen}(\phi)}{\operatorname{sen}(\delta)}$. Assim:

$$\left| \frac{\operatorname{sen}(\phi)}{\operatorname{sen}(\delta)} \right| \leq 1 \implies \frac{|\operatorname{sen}(\phi)|}{|\operatorname{sen}(\delta)|} \leq 1 \implies |\operatorname{sen}(\phi)| \leq |\operatorname{sen}(\delta)|$$

Uma vez que $-90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$ e $-90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$ segue:

$$|\operatorname{sen}(\phi)| \leq |\operatorname{sen}(\delta)| \implies |\phi| \leq |\delta|$$

Ou seja, quando há alongação, certamente $|\phi| \leq |\delta|$. □

A alongação se dá a leste quando o sinal de H é negativo e se dá a oeste quando o sinal de H é positivo.

Conhecendo-se a ascensão reta de um astro pode-se determinar a hora sideral de alongação por meio da fórmula

$$S = \alpha + H \tag{7.24}$$

em que S é a hora sideral de alongação, α é a ascensão reta do astro e H é o ângulo horário.

Exemplo 1. Num lugar de latitude $\phi = -60^\circ$ se conhece a declinação $\delta = -70^\circ$ de um astro. Quais são os seus elementos da alongação?

Primeiramente note que o astro possui alongação, uma vez que $|\delta| > |\phi|$.

Usando os dados na Equação (7.21):

$$\operatorname{sen}(h) = \frac{\operatorname{sen}(-60^\circ)}{\operatorname{sen}(-70^\circ)} \implies \operatorname{sen}(h) = 0,921604985 \implies$$

$$h = \operatorname{arcsen}(0,921604985) \implies h = 67,16^\circ$$

Usando os dados na Equação (7.22):

$$\cos(A) = \frac{\operatorname{tg}(-60^\circ)}{\operatorname{tg}(67,16^\circ)} \implies \cos(A) = -0,729510404 \implies$$

$$A = \arccos(-0,729510404) \implies A = 136,84^\circ$$

Usando os dados na Equação (7.23):

$$\cos(H) = \frac{\operatorname{tg}(-60^\circ)}{\operatorname{tg}(-70^\circ)} \implies \cos(H) = 0,630414938 \implies$$

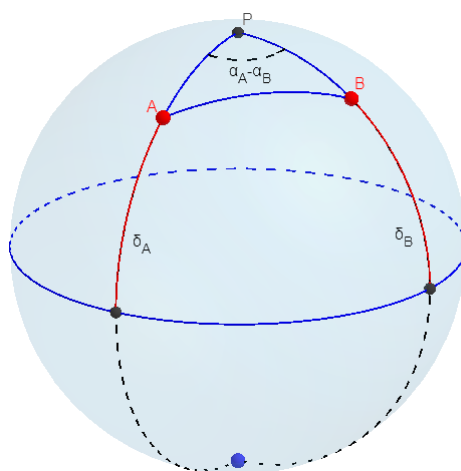
$$H = \arccos(0,630414938) \implies H = 50,91^\circ = 3,39h$$

Indicando que a elongação ocorreu à leste.

7.3 Distância Angular Entre Dois Astros

A distância angular entre dois astros é o arco de círculo máximo que passa por ambos. Desta forma, sejam P o polo elevado, A e B dois astros onde α_A é a ascensão reta de A, δ_A é a declinação de A, α_B é a ascensão reta de B e δ_B é a declinação de B, conforme a Figura 7.11.

Figura 7.11: Distância angular entre os astros A e B.



Fonte: A autora.

Desta maneira, pela Lei do Cossenos (Teorema 3.1), tem-se:

$$\cos(\widehat{AB}) = \cos(\widehat{PA}) \cdot \cos(\widehat{PB}) + \operatorname{sen}(\widehat{PA}) \cdot \operatorname{sen}(\widehat{PB}) \cdot \cos(\widehat{APB}) \quad (7.25)$$

Perceba que:

$$\widehat{PA} = 90^\circ - \delta_A \quad (7.26)$$

e

$$\widehat{PB} = 90^\circ - \delta_B \quad (7.27)$$

Tem-se também que o ângulo \widehat{APB} é o ângulo entre o meridiano de A e o meridiano de B, o que implica:

$$\widehat{APB} = \alpha_A - \alpha_B \quad (7.28)$$

Substituindo as Equações (7.26), (7.27), (7.28) em (7.25), tem-se:

$$\cos(\widehat{AB}) = \cos(90^\circ - \delta_A) \cdot \cos(90^\circ - \delta_B) + \sin(90^\circ - \delta_A) \cdot \sin(90^\circ - \delta_B) \cdot \cos(\alpha_A - \alpha_B) \quad (7.29)$$

Das Relações (B.13) e (B.15) do Apêndice B aplicadas na Equação (7.29):

$$\cos(\widehat{AB}) = \sin(\delta_A) \cdot \sin(\delta_B) + \cos(\delta_A) \cdot \cos(\delta_B) \cdot \cos(\alpha_A - \alpha_B) \quad (7.30)$$

Exemplo 1: Qual a distância angular entre a Lua e Saturno no dia 1 de abril de 2020?

Conforme o Anuário do Observatório-Nacional (2020), neste dia as coordenadas da Lua são $\alpha_l = 06h28min34,58s$ e $\delta_l = 23^\circ36'38,3''$ e as de Saturno são $\alpha_s = 20h11min35,11s$ e $\delta_s = 20^\circ3'48,5''$.

Desta forma

$$\alpha_l = 06h28min34,58s = 6,4762h = 6,4762 \times 15^\circ = 97,143^\circ$$

$$\delta_l = 23^\circ36'38,3'' = 23,61063^\circ$$

$$\alpha_s = 20h11min35,11s = 20,193h = 20,193 \times 15^\circ = 302,895^\circ$$

$$\delta_s = 20^\circ3'48,5'' = 20,0634^\circ$$

Pela Equação (7.30) e chamando a distância angular de D, tem-se:

$$\cos(D) = \sin(\delta_l) \cdot \sin(\delta_s) + \cos(\delta_l) \cdot \cos(\delta_s) \cdot \cos(\alpha_l - \alpha_s) \quad (7.31)$$

Substituindo os valores na Equação (7.31):

$$\begin{aligned} \cos(D) &= \sin(23,61063^\circ) \cdot \sin(20,0634^\circ) + \\ &+ \cos(23,61063^\circ) \cdot \cos(20,0634^\circ) \cdot \cos(97,143^\circ - 302,895^\circ) \implies \end{aligned}$$

$$\cos(D) = -0,637799913 \implies D = \arccos(-0,637799913) = 129,62^\circ$$

Logo, a distância angular entre a Lua e Saturno no dia 1 de abril de 2020 é $129,62^\circ$.

Exemplo 2: Qual é a distância angular no dia 2 de julho de 2020 entre a estrela γ da constelação de Peixes e a estrela θ da constelação de Cetus?

Sabe-se, pelo Anuário Observatório-Nacional (2020), que nesse dia as coordenadas de γ são $\alpha_\gamma = 23h18min13,6s$ e $\delta_\gamma = 03^\circ23'41''$ e as coordenadas de θ são $\alpha_\theta = 01h25min2,8s$ e $\delta_\theta = -8^\circ04'42''$.

Desta forma

$$\alpha_\gamma = 23h18min13,6s = 23,3037h = 23,3037 \times 15^\circ = 349,5555^\circ$$

$$\delta_\gamma = 03^\circ23'41'' = 3,3946^\circ$$

$$\alpha_\theta = 01h25min2,8s = 1,4173h = 1,4173 \times 15^\circ = 21,2595^\circ$$

$$\delta_\theta = -8^\circ04'42'' = -8,0782^\circ$$

Pela Equação (7.30) e chamando a distância D , tem-se:

$$\cos(D) = \sin(\delta_\gamma) \cdot \sin(\delta_\theta) + \cos(\delta_\gamma) \cdot \cos(\delta_\theta) \cdot \cos(\alpha_\gamma - \alpha_\theta) \quad (7.32)$$

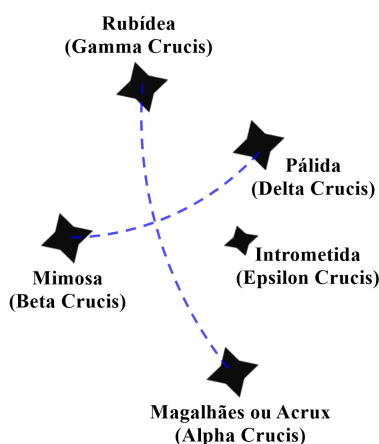
$$\begin{aligned} \cos(D) &= \sin(3,3946^\circ) \cdot \sin(-8,0782^\circ) + \\ &+ \cos(3,3946^\circ) \cdot \cos(-8,0782^\circ) \cdot \cos(349,5555^\circ - 21,2595^\circ) \end{aligned}$$

$$\cos(D) = 0,832533629 \implies D = \arccos(0,832533629) = 33,64^\circ$$

Logo, a distância angular entre a γ e θ da constelação de Cetus no dia 2 de julho de 2020 é $33,64^\circ$.

Exemplo 3: Considere o Cruzeiro do Sul, ilustrado na Figura 7.12.

Figura 7.12: O Cruzeiro do Sul.



Fonte: A autora.

(a) Qual o tamanho angular do eixo menor da constelação do Cruzeiro do Sul?

O eixo menor do Cruzeiro do Sul possui como extremidades as estrelas Beta Crucis e Delta Crucis, conforme ilustrado na Figura 7.12.

Sabe-se, pelo Anuário Observatório-Nacional (2020), que no dia 2 de julho de 2020 as coordenadas de Beta Crucis são $\alpha_b = 12h48min56s$ e $\delta_b = -59^\circ48'01''$ e Delta Crucis $\alpha_d = 12h16min14,7s$ e $\delta_d = -58^\circ51'46''$.

Desta forma,

$$\alpha_b = 12h48min56s = 12,8155h = 12,8155 \times 15^\circ = 192,2325^\circ$$

$$\delta_b = -59^\circ 48' 01'' = -59,8002^\circ$$

$$\alpha_d = 12h16min14,7s = 12,2706h = 12,2706 \times 15^\circ = 184,059^\circ$$

$$\delta_d = -58^\circ 51' 46'' = -58,8627^\circ$$

Pela Equação (7.30) e chamando a distância D, tem-se:

$$\cos(D) = \text{sen}(\delta_b) \cdot \text{sen}(\delta_d) + \cos(\delta_b) \cdot \cos(\delta_d) \cdot \cos(\alpha_b - \alpha_d) \quad (7.33)$$

$$\begin{aligned} \cos(D) &= \text{sen}(-59,8002^\circ) \cdot \text{sen}(-58,8627^\circ) + \\ &+ \cos(-59,8002^\circ) \cdot \cos(-58,8627^\circ) \cdot \cos(192,2325^\circ - 184,059^\circ) \end{aligned}$$

$$\cos(D) = 0,997224011 \implies D = \arccos(0,997224011) = 4,27^\circ$$

Logo, a distância angular entre a Beta Crucis e Delta Crucis no dia 2 de julho de 2020 é $4,27^\circ$, isto é, o tamanho angular do eixo menor da constelação do Cruzeiro do Sul é $4,27^\circ$.

(b) Qual o tamanho angular do eixo maior da constelação do Cruzeiro do Sul?

O eixo maior do Cruzeiro do Sul possui como extremidades as estrelas Gamma Crucis e Alpha Crucis, conforme ilustrado na Figura 7.12.

Sabe-se, pelo Anuário Observatório-Nacional (2020), que no dia 2 de julho de 2020 as coordenadas de Gamma Crucis são $\alpha_g = 12h32min18,9$ e $\delta_g = -57^\circ 13' 40''$ e Alpha Crucis $\alpha_a = 12h27min45,3s$ e $\delta_a = -63^\circ 12' 44''$.

Desta forma,

$$\alpha_g = 12h32min18,9s = 12,5385h = 12,5385 \times 15^\circ = 188,0775^\circ$$

$$\delta_g = -57^\circ 13' 40'' = -57,2277^\circ$$

$$\alpha_a = 12h27min45,3s = 12,4625h = 12,4625 \times 15^\circ = 186,9375^\circ$$

$$\delta_a = -63^\circ 12' 44'' = -63,2122^\circ$$

Pela Equação (7.30) e chamando a distância D, tem-se:

$$\cos(\widehat{D}) = \text{sen}(\delta_g) \cdot \text{sen}(\delta_a) + \cos(\delta_g) \cdot \cos(\delta_a) \cdot \cos(\alpha_g - \alpha_a) \quad (7.34)$$

$$\cos(D) = \text{sen}(-57,2277^\circ) \cdot \text{sen}(-63,2122^\circ) +$$

$$+ \cos(-57,2277^\circ) \cdot \cos(-63,2122^\circ) \cdot \cos(188,0775^\circ - 186,9375^\circ)$$

$$\cos(D) = 0,994501849 \implies D = \arccos(0,994501849) = 6,01^\circ$$

Logo, a distância angular entre a Gamma Crucis e Alpha Crucis no dia 2 de julho de 2020 é $6,01^\circ$, isto é, o tamanho angular do eixo maior da constelação do Cruzeiro do Sul mede $6,01^\circ$.

8 Considerações Finais

Esta dissertação assumiu como objetivo fundamentar a teoria da Geometria Esférica e exemplificá-la por meio de aplicações em Astronomia de Posição. Para tal, este trabalho apoiou-se num conjunto de abordagens que contemplam: a historicidade sobre a criação das geometrias não Euclidianas e como a Geometria Esférica foi usada empiricamente pelos navegantes portugueses, definições e teoremas sobre a Geometria e Trigonometria Esféricas e aplicações em Geodésia e Astronomia de Posição, a qual diz respeito fundamentalmente às direções na qual os corpos celestes são vistos, sem se preocupar com sua distância.

Desta forma, primeiramente foi realizada uma revisão de literatura acerca da Geometria e Trigonometria Esférica, sendo destaque alguns teoremas como o Teorema de Lagrange, a Lei dos Senos e Cossenos, Analogias de Delambre e Napier, os quais foram imprescindíveis às posteriores aplicações nas esferas terrestre e celeste. Foram apresentadas demonstrações inéditas para alguns resultados, como os Teoremas 3.4 e 4.3.

Com o estudo da Geodésia e Astronomia de Posição, pôde-se localizar pontos nas esferas terrestre e celeste, calcular distâncias entre locais diferentes no globo terrestre, bem como calcular a separação angular entre dois astros. Ao estudar a esfera celeste, foram observados seus planos e pontos como: Horizonte, Zênite, Equador Celeste, Polos Celestes, entre outros. Aplicando os conceitos matemáticos estudados à Astronomia de Posição, foram apresentados os sistemas de coordenadas celestes Horizontais, Equatoriais, Horárias e Eclípticas. Também foram desenvolvidas fórmulas que relacionam as coordenadas distância zenital, ângulo horário, declinação e azimute que não são encontradas em outras literaturas.

Para auxiliar a visualização, em diversas resoluções e cálculos desse trabalho, foram geradas figuras que exemplificassem o que estava sendo dissertado. As figuras são inéditas em sua maioria e foram majoritariamente desenvolvidas com o GeoGebra Clássico¹.

Por fim, este trabalho mostra sua relevância e importância pelo detalhamento de suas demonstrações e da forma didática e construtiva em que foram dispostos os conteúdos, capítulo a capítulo, em linguagem acessível, porém zelando pela formalidade.

¹Disponível em <https://www.geogebra.org/> (acesso em 20 de julho de 2020).

Referências

- ADAMES, M. R. *Geometria Esférica*. Monografia (Graduação) — Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), 2005.
- ALBUQUERQUE, L. *As Navegações e a sua Projeção na Ciência e na Cultura*. 1. ed. Lisboa: Gradiva, 1987.
- BACELAR, J. *Conceito da Terra Redonda e Sua História*. 2020. Disponível em: <<http://www.mapas-historicos.com/terra-redonda.htm>>. Acesso em: 09 fev. 2020.
- BOCZKO, R. *Conceitos de Astronomia*. 1. ed. São Paulo: Edgard Blucher Ltda., 1984.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher Ltda., 2010.
- CANAS, A. C. Os portugueses e a determinação da longitude. *Anais do Clube Militar Naval*, CXXV, p. 249–273, 1995.
- CARITÁ, L. A. Lei dos cossenos e senos esféricos: demonstrações matemáticas para ferramentas astronômicas. *Revista Univap*, v. 24, p. 10–18, 2018.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Espacial (Posição e Métrica), Vol. 10*. 7. ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.
- EVES, H. *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula*. 1. ed. São Paulo: Atual, 1992.
- G1. *Horário de verão muda mapa de fusos horários no Brasil*. 2015. Disponível em: <<http://g1.globo.com/economia/noticia/2015/10/horario-de-verao-muda-mapa-de-fusos-horarios-no-brasil-veja.html>>. Acesso em: 17 abr. 2020.
- GAMAEL, C. *Noções de Trigonometria Esférica, Astronomia e Geodésia*. 1. ed. Curitiba: Diretório Acadêmico de Engenharia do Paraná, 1948.
- HAWKING, S. *Os gênios da Ciência: Sobre os ombros de gigantes*. 1. ed. São Paulo: Elsevier, 2005.
- HOGBEN, L. *Maravilhas da Matemática: Influência e função da matemática nos conhecimentos humanos*. 2. ed. Porto Alegre: Globo, 1970.

- IBGE. *Índice de Organização do Território*. 2010. Disponível em: <<https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/14126-asi-ibge-disponibiliza-coordenadas-e-altitudes-para-21304-localidades-brasileiras>>. Acesso em: 09 fev. 2020.
- LIMA-NETO, G. B. *Astronomia de Posição*. 2020. Disponível em: <<http://www.astro.iag.usp.br/Öcegastao/astroposicao.html>>. Acesso em: 30 mar. 2020.
- MAES, J. *Estudo descobre o verdadeiro culpado pelo crescimento desenfreado desta crença completamente estúpida*. 2019. Disponível em: <<https://hypescience.com/youtube-terraplanistas/>>. Acesso em: 25 fev. 2020.
- MARCOLIN, N. Os reis dos mares. *Pesquisa Fapesp*, v. 212, p. 86–87, 2013.
- MORICONI, M. *A Terra é redonda*. 2018. Disponível em: <<http://cienciahoje.org.br/artigo/a-terra-e-redonda/>>. Acesso em: 24 fev. 2020.
- OBSERVATÓRIO-NACIONAL. *Anuário 2020*. Cxxxvi. Rio de Janeiro: Observatório Nacional, 2020.
- OLIVEIRA, K. de; SARAIVA, M. de F. *Astronomia e Astrofísica*. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.
- OLIVEIRA, K. de; SARAIVA, M. de F. *Medidas de Tempo*. 2018. Disponível em: <<http://astro.if.ufrgs.br/tempo/tempo.htm>>. Acesso em: 31 mar. 2020.
- PEDRO, I. I. *Trigonometria Plana e Esférica*. 1. ed. São Paulo: Livraria Francisco Alvez Editora Paulo de Azevedo L.T.D.A., 1955.
- PENA, R. *Afinal, a Terra é redonda mesmo?* 2020. Disponível em: <<https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/geografia/afinal-terra-redonda-mesmo.htm>>. Acesso em: 09 fev. 2020.
- PENTEADO, A. M. *Pedro Nunes e a distinção de dois tipos de trajetórias na navegação: A linha de rumo e o círculo máximo*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), 2011.
- PEREIRA, E. H. U. *A matemática do GPS*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Piauí (UFPI), 2014.
- SARAIVA, M. de F. O.; OLIVEIRA, K. de S. *Decretos sobre o Horário de Verão no Brasil*. 2019. Disponível em: <<http://pcdsh01.on.br/DecHV.html>>. Acesso em: 30 out. 2020.
- SARAIVA, M. de F. O.; OLIVEIRA, K. de S.; MULLER, A. M. *Movimento Anual do Sol e Estações do Ano*. 2018. Disponível em: <<https://www.if.ufrgs.br/tex/fis02001/aulas/Aula3-122.pdf>>. Acesso em: 01 jul. 2020.
- SIQUEIRA, L. *Earthrise: a primeira foto da Terra feita por um astronauta faz 50 anos*. 2018. Disponível em: <<https://revistazum.com.br/radar/earthrise-50-anos/>>. Acesso em: 29 jun. 2020.

TODA-MATÉRIA. *Fuso Horários do Brasil*. 2019. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/fusos-horarios-no-brasil/>>. Acesso em: 17 abr. 2020.

UNESP. *Site da Diretoria Administrativa- DTAD*. 2019. Disponível em: <<https://igce.rc.unesp.br/\#!/dtad>>. Acesso em: 06 jul. 2020.

UNIVAP. *Observatório de Astronomia e Física da UNIVAP abre para visitas*. 2018. Disponível em: <<https://www.univap.br/home/universidade/noticias-e-eventos/noticias/noticias-observatorio-de-astronomia-e-fisica-da-univap-abre-para-visitas.htm>>. Acesso em: 06 jul. 2020.

A Apêndice: Lema Auxiliar para o Teorema 3.4

Lema A.1. *Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que $x^2 < 1, y^2 < 1, z^2 < 1$ e $2xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 1 > 0$. Se $m = \frac{x - yz}{\sqrt{1 - y^2}\sqrt{1 - z^2}}, n = \frac{y - xz}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - z^2}}$ e $p = \frac{z - xy}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2}}$ então*

$$x = \frac{m + np}{\sqrt{1 - n^2}\sqrt{1 - p^2}}, y = \frac{n + mp}{\sqrt{1 - m^2}\sqrt{1 - p^2}} \text{ e } z = \frac{p + mn}{\sqrt{1 - m^2}\sqrt{1 - n^2}}.$$

Demonstração. Primeiramente, chamando:

$$L = 2xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 1$$

tem-se que

$$\begin{aligned} 1 - m^2 &= 1 - \left(\frac{x - yz}{\sqrt{1 - y^2}\sqrt{1 - z^2}} \right)^2 = 1 - \frac{(x - yz)^2}{(1 - y^2)(1 - z^2)} \\ &= \frac{1 - z^2 - y^2 + y^2z^2 + 2xyz - x^2 - y^2z^2}{(1 - y^2)(1 - z^2)} = \frac{2xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 1}{(1 - y^2)(1 - z^2)} = \\ &= \frac{L}{(1 - y^2)(1 - z^2)} \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned} 1 - n^2 &= 1 - \left(\frac{y - xz}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - z^2}} \right)^2 = 1 - \frac{(y - xz)^2}{(1 - x^2)(1 - z^2)} \\ &= \frac{1 - z^2 - x^2 + x^2z^2 + 2xyz - y^2 - x^2z^2}{(1 - x^2)(1 - z^2)} = \frac{2xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 1}{(1 - x^2)(1 - z^2)} \\ &= \frac{L}{(1 - x^2)(1 - z^2)} \end{aligned} \tag{A.2}$$

e

$$\begin{aligned} 1 - p^2 &= 1 - \left(\frac{z - xy}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2}} \right)^2 = 1 - \frac{(z - xy)^2}{(1 - x^2)(1 - y^2)} \\ &= \frac{1 - y^2 - x^2 + x^2y^2 + 2xyz - z^2 - x^2y^2}{(1 - x^2)(1 - y^2)} = \frac{2xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 1}{(1 - x^2)(1 - y^2)} = \\ &= \frac{L}{(1 - x^2)(1 - y^2)} \end{aligned} \tag{A.3}$$

Também,

$$\begin{aligned}
m + np &= \left(\frac{x - yz}{\sqrt{1 - y^2}\sqrt{1 - z^2}} \right) + \left(\frac{y - xz}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - z^2}} \right) \left(\frac{z - xy}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2}} \right) \\
&= \left(\frac{x - yz}{\sqrt{1 - y^2}\sqrt{1 - z^2}} \right) + \left(\frac{yz - xy^2 - xz^2 + x^2yz}{(1 - x^2)\sqrt{1 - y^2}\sqrt{1 - z^2}} \right) \\
&= \frac{(1 - x^2)(x - yz) + (yz - xy^2 - xz^2 + x^2yz)}{(1 - x^2)\sqrt{1 - y^2}\sqrt{1 - z^2}} = \frac{x - yz - x^3 + x^2yz + yz - xy^2 - xz^2 + x^2yz}{(1 - x^2)\sqrt{1 - y^2}\sqrt{1 - z^2}} \\
&= \frac{x(2xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 1)}{(1 - x^2)\sqrt{1 - y^2}\sqrt{1 - z^2}} = \frac{x.L}{(1 - x^2)\sqrt{1 - y^2}\sqrt{1 - z^2}} \quad (\text{A.4})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n + mp &= \left(\frac{y - xz}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - z^2}} \right) + \left(\frac{x - yz}{\sqrt{1 - y^2}\sqrt{1 - z^2}} \right) \left(\frac{z - xy}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2}} \right) \\
&= \left(\frac{y - xz}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - z^2}} \right) + \left(\frac{xz - x^2y - yz^2 + xy^2z}{(1 - y^2)\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - z^2}} \right) \\
&= \frac{(1 - y^2)(y - xz) + (xz - x^2y - yz^2 + xy^2z)}{(1 - y^2)\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - z^2}} = \frac{y - xz - y^3 + xy^2z + xz - x^2y - yz^2 + xy^2z}{(1 - y^2)\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - z^2}} \\
&= \frac{y(2xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 1)}{(1 - y^2)\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - z^2}} = \frac{y.L}{(1 - y^2)\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - z^2}} \quad (\text{A.5})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p + mn &= \left(\frac{z - xy}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2}} \right) + \left(\frac{x - yz}{\sqrt{1 - y^2}\sqrt{1 - z^2}} \right) \left(\frac{y - xz}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - z^2}} \right) \\
&= \left(\frac{z - xy}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2}} \right) + \left(\frac{xy - x^2z - y^2z + xyz^2}{(1 - z^2)\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2}} \right) \\
&= \frac{(1 - z^2)(z - xy) + (xy - x^2z - y^2z + xyz^2)}{(1 - z^2)\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2}} = \frac{z - xy - z^3 + xyz^2 + xy - x^2z - y^2z + xyz^2}{(1 - z^2)\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2}} \\
&= \frac{z(2xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 1)}{(1 - z^2)\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2}} = \frac{z.L}{(1 - z^2)\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2}} \quad (\text{A.6})
\end{aligned}$$

Operando agora da seguinte maneira:

Produto da Equação (A.2) por (A.3), tem-se

$$(1 - n^2)(1 - p^2) = \left(\frac{L}{(1 - x^2)(1 - z^2)} \right) \left(\frac{L}{(1 - x^2)(1 - y^2)} \right) = \frac{L^2}{(1 - x^2)^2(1 - y^2)(1 - z^2)}$$

Produto da Equação (A.1) por (A.3), tem-se

$$(1 - m^2)(1 - p^2) = \left(\frac{L}{(1 - y^2)(1 - z^2)} \right) \left(\frac{L}{(1 - x^2)(1 - y^2)} \right) = \frac{L^2}{(1 - y^2)^2(1 - x^2)(1 - z^2)}$$

Produto da Equação (A.1) por (A.2), tem-se

$$(1-m^2)(1-n^2) = \left(\frac{L}{(1-y^2)(1-z^2)} \right) \left(\frac{L}{(1-x^2)(1-z^2)} \right) = \frac{L^2}{(1-z^2)^2(1-x^2)(1-y^2)}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{m+np}{\sqrt{1-n^2}\sqrt{1-p^2}} &= \frac{\frac{x.L}{(1-x^2).\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}}}{\sqrt{\frac{L^2}{(1-x^2)^2(1-y^2)(1-z^2)}}} = \frac{\frac{x.L}{(1-x^2).\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}}}{\frac{L}{(1-x^2)\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}}} \\ &= \frac{x.L}{(1-x^2)\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}} \cdot \frac{(1-x^2)\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}}{L} = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{n+mp}{\sqrt{1-m^2}\sqrt{1-p^2}} &= \frac{\frac{y.L}{(1-y^2).\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2}}}{\sqrt{\frac{L^2}{(1-y^2)^2(1-x^2)(1-z^2)}}} = \frac{\frac{y.L}{(1-y^2).\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2}}}{\frac{L}{(1-y^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2}}} \\ &= \frac{y.L}{(1-y^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2}} \cdot \frac{(1-y^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2}}{L} = y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{p+mn}{\sqrt{1-m^2}\sqrt{1-n^2}} &= \frac{\frac{z.L}{(1-z^2).\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}}{\sqrt{\frac{L^2}{(1-z^2)^2(1-x^2)(1-y^2)}}} = \frac{\frac{z.L}{(1-z^2).\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}}{\frac{L}{(1-z^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}} \\ &= \frac{z.L}{(1-z^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{(1-z^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}{L} = z \end{aligned}$$

Logo está provado. □

B Apêndice: Identidades da Trigonometria Plana

$$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b) \quad (\text{B.1})$$

$$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b) \quad (\text{B.2})$$

$$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1 \quad (\text{B.3})$$

$$1 - \cos(a) = 2 \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) \quad (\text{B.4})$$

$$1 + \cos(a) = 2 \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) \quad (\text{B.5})$$

$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad (\text{B.6})$$

$$\sin(a) - \sin(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad (\text{B.7})$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad (\text{B.8})$$

$$\cos(a) - \cos(b) = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad (\text{B.9})$$

$$\cos(-a) = \cos(a) \quad (\text{B.10})$$

$$\sin(-a) = -\sin(a) \quad (\text{B.11})$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - a) = \frac{1}{\operatorname{tg}(a)} = \operatorname{cotg}(a) \quad (\text{B.12})$$

$$\sin(90^\circ - a) = \cos(a) \quad (\text{B.13})$$

$$\sin(90^\circ + a) = \cos(a) \quad (\text{B.14})$$

$$\cos(90^\circ - a) = \sin(a) \quad (\text{B.15})$$

$$\cos(90^\circ + a) = -\operatorname{sen}(a) \quad (\text{B.16})$$

$$\operatorname{cotg}(90^\circ + a) = -\operatorname{tg}(a) \quad (\text{B.17})$$

$$\operatorname{cotg}(90^\circ - a) = \operatorname{tg}(a) \quad (\text{B.18})$$

$$\operatorname{cotg}(a - 180^\circ) = -\operatorname{cotg}(a) \quad (\text{B.19})$$

$$\operatorname{sen}(270^\circ - a) = -\cos(a) \quad (\text{B.20})$$

$$\cos(a - 180^\circ) = -\cos(a) \quad (\text{B.21})$$

$$\operatorname{sen}(a - 180^\circ) = -\operatorname{sen}(a) \quad (\text{B.22})$$

$$\operatorname{sen}(2a) = 2 \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \cos(a) \quad (\text{B.23})$$