unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Introdução ao Cálculo Fracionário: Motivações, Definições e Exemplos

Edilene Ponce do Amaral

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO
2023

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Introdução ao Cálculo Fracionário: Motivações, Definições e Exemplos

Edilene Ponce do Amaral

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Rio Claro.

Orientadora
Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

Rio Claro - SP
2023

A485i

Amaral, Edilene Ponce do
Introdução ao cálculo fracionário: motivações, definições e exemplos / Edilene Ponce do Amaral. -- Rio Claro, 2023
109 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientadora: Marta Cilene Gadotti

1. Integral fracionária de Riemann-Liouville. 2. Derivada fracionária de Riemann-Liouville. 3. Derivada fracionária de Caputo. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Impacto potencial desta pesquisa

Ao apresentarmos um texto acessível e didático a estudantes e pesquisadores que não possuem uma formação avançada em matemática, difundimos o conhecimento estendendo as propriedades do cálculo clássico para o fracionário. Favorecendo o avanço da matemática aplicada, em situações que são melhores descritas por derivadas fracionárias.

Potential impact of this research

By presenting an accessible and didactic text to students and researchers who do not have an advanced background in mathematics, we disseminate knowledge by extending the properties of classical calculus to fractional calculus. Favoring the advancement of applied mathematics, in situations that are best described by fractional derivatives.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Edilene Ponce do Amaral

Introdução ao Cálculo Fracionário: Motivações, Definições e Exemplos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em matemática.

Comissão Examinadora

Profa. Dra. MARTA CILENE GADOTTI
IGCE / UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. NELSON CALLEGARI JÚNIOR
IGCE / UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. JOSÉ PAULO CARVALHO DOS SANTOS
ICEx / UNIFAL/Alfenas (MG)

Conceito: Aprovado.

Rio Claro/SP, 24 de abril de 2023

Agradecimentos

Esta dissertação de mestrado é a realização de um sonho de muitos anos, portanto quero exprimir os meus sinceros agradecimentos a algumas pessoas que me ajudaram a fazer dele uma realidade.

A minha orientadora, Professora Marta Cilene Gadotti, pela orientação, competência, e dedicação. Obrigada por acreditar na minha capacidade e por sempre me encorajar.

A minha mãe Eliza e minha irmã Eliete pelo apoio e incentivo que sempre me deram.

Aos meus filhos amados, Ana Elisa, Maria Helena e Marcelo. Por serem os melhores filhos que uma mãe pode ter, meu maior orgulho, minha razão de viver e de querer sempre ser uma pessoa melhor. Obrigada por entenderem meus momentos de ausência.

A Angelita, minha melhor amiga, que sempre esteve pronta a me ajudar em tudo que eu precisei. Obrigada pela amizade e companheirismo.

Um agradecimento especial ao meu pai Luiz, "in memorian", por ter estado sempre presente na minha vida, me ajudando e apoiando em todas as situações. Pelo carinho com o qual me ensinou a ler, a escrever, a decorar a tabuada e a fazer a prova dos nove. Pela forma como cuidou dos meus filhos, permitindo que eu pudesse voltar a estudar. Muito obrigada por ter sido meu pai e por todos os valores e lições que me ensinou.

Por fim, o meu profundo e sincero agradecimento a todos os meus amigos e pessoas que de alguma forma contribuíram para a concretização desta dissertação, estimulando-me intelectualmente e emocionalmente.

"A Matemática, quando a compreendemos bem,
possui não somente a verdade,
mas também a suprema beleza."
Bertrand Russel

Resumo

A proposta do presente trabalho é realizar uma introdução à teoria do cálculo fracionário, ou cálculo de ordem arbitrária, através de um texto acessível. Neste contexto, serão exploradas a integral fracionária segundo Riemann-Liouvile e as definições de três derivadas fracionárias clássicas: a de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville e Caputo. Inicialmente, revisar alguns princípios básicos do Cálculo Diferencial e Integral de ordem inteira. Em seguida, através de motivações, contextualizações históricas e exemplos, abordar os conceitos fundamentais que formam a base dessa teoria. Posteriormente, mostrar dois critérios de validade para as derivadas fracionárias e verificar que o de Ortigueira e Machado é satisfeito para as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo. Por fim, apresentar a Regra da Cadeia para as derivadas de Riemann-Liouvile e Caputo.

Palavras-chave: Integral Fracionária de Riemann-Liouville, Derivada Fracionária segundo Riemann-Liouville, Derivada Fracionária segundo Caputo.

Abstract

The purpose of this work is to make an introduction to the theory of fractional calculus, or calculus of arbitrary order, through an accessible text. In this context, the fractional integral according to Riemann-Liouvile and the definitions of three classic fractional derivatives will be explored: that of Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville and Caputo. Initially, review some basic principles of Differential and Integral Calculus of integer order. Then, through motivations, historical contexts and examples, address the fundamental concepts that form the basis of this theory. Subsequently, show two validity criteria for the fractional derivatives and verify that Ortigueira and Machado's is satisfied for the Riemann-Liouville and Caputo derivatives. Finally, present the Chain Rule for Riemann-Liouvile and Caputo derivatives.

Keywords: Riemann-Liouville Fractional Integral , Fractional derivatives of Riemann-Liouville, Fractional derivatives of Caputo.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

O cálculo fracionário procura estender a ordem das derivadas de números inteiros para números reais e até para números complexos. Ele também é conhecido como cálculo de ordem arbitraria, cálculo de ordem não inteira, cálculo diferencial e integral de ordem não inteira, cálculo fracional. Neste trabalho optamos por utilizar cálculo fracionário por ser uma nomenclatura amplamente adotada pela comunidade científica. O nome cálculo fracionário surgiu como uma referência ao início do seu estudo, quando L'Hôpital questiona Leibniz sobre qual seria a sua interpretação para a derivada caso a sua ordem fosse $n = \frac{1}{2}$. Hoje sabemos, que a ordem da derivada pode ser estendida para o conjunto dos números complexos.

Atualmente, o cálculo fracionário é uma área de estudo vibrante, com muitas aplicações e em constante evolução. Uma das suas principais características é a capacidade de descrever fenômenos complexos em diversas áreas do conhecimento, como física, biologia, economia, entre outras. Através das derivadas fracionárias, é possível modelar processos que apresentam comportamentos não-lineares e memória de curto e longo prazo, que não podem ser rastreados pelas derivadas de ordem inteira. Além disso, o estudo das derivadas fracionárias apresenta uma riqueza matemática fascinante. As propriedades e características das derivadas fracionárias são distintas das derivadas de ordem inteira, o que leva a novas possibilidades e desafios na teoria e na prática. Mas, diferentemente do cálculo de ordem inteira ainda não existe uma interpretação geométrica e ou física para a derivada fracionária.

Apesar do cálculo fracionário ser uma área de estudo importante na matemática aplicada e em várias outras áreas, a maioria dos trabalhos e artigos científicos que abordam o assunto são escritos em linguagem muito técnica, sem explicar alguns cálculos matemáticos e resultados. Isso pode dificultar o entendimento e o acesso a esse conhecimento por parte de estudantes e pesquisadores iniciantes na área. Assim, a necessidade de um texto de fácil compreensão sobre o cálculo fracionário surge para preencher essa lacuna e tornar esse conhecimento mais acessível a um público mais amplo. Uma abordagem didática pode ser uma ferramenta valiosa para estudantes e pesquisadores que desejam explorar e aplicar o cálculo fracionário em suas áreas de interesse, sem se sentirem intimidados pela complexidade que muitas vezes acompanha os trabalhos científicos nessa área.

Com isso, o principal objetivo deste estudo é apresentar um texto básico sobre o cálculo fracionário, utilizando uma abordagem de fácil compreensão para pessoas com algum conhecimento em cálculo de ordem inteira que desejem se familiarizar com o cálculo fracionário. Para que seja introduzida de uma forma didática a extensão do cálculo de ordem inteira para o de ordem fracionária, no decorrer deste trabalho serão realizadas revisões de notações, definições do cálculo de ordem inteira e algumas demonstrações do cálculo fracionário. Isso ocorrerá de maneira gradual, para que seja de fácil entendimento.

Segundo [20] existem três classes de derivadas fracionárias que são encontradas na literatura especializada, as derivadas fracionárias clássicas, derivadas "fracionárias" locais e derivadas "fracionárias" com núcleo não singular. Escolhemos abordar três derivadas fracionárias, conhecidas como derivadas fracionárias clássicas. A derivada fracionária de Grünwald-Letnikov, derivada fracionária de Riemann-Liouville e derivada fracionária de Caputo. Esse trabalho está disposto da seguinte maneira:

No Capítulo 1, intitulado Motivações, serão relembradas algumas definições do cálculo de ordem inteira. E assim, tomando-as como ponto de partida, introduzir progressivamente a extensão do cálculo de ordem inteira para o de ordem arbitrária, fazendo o uso de exemplos, contextualizações e informações históricas. Deste modo, dar início ao estudo do cálculo fracionário com a definição de Derivada Fracionária segundo Grünwald-Letnikov e finalizar esse capítulo com a definição da Integral Fracionária segundo Riemann-Liouville.

No Capítulo 2, abordaremos a integral segundo Riemann-Liouville, primeiramente mostraremos que a Lei dos Expoentes é válida para essas integrais. Depois, faremos exemplos de integrais fracionárias das funções potência, constante, seno, cosseno e exponencial, utilizando diferentes valores para os limites de integração.

No Capítulo 3, introduziremos as definições das derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo e faremos alguns exemplos. Também exploraremos algumas particularidades e diferenças entre elas, como ocorre na transformada de Laplace e no efeito de memória.

No Capítulo 4, mostraremos um critério utilizado para a derivada ser considerada fracionária e como é a regra da cadeia, muito utilizada no cálculo de ordem inteira, para as derivadas fracionárias de Riemmann-Liouville e Caputo.

No Apêndice A, apresentaremos as importantes funções do Cálculo Fracionário: Função Gama, Função Beta, Função Gel'fand-Shilov, Função Heaviside e algumas propriedades da Transformada de Laplace.

Na elaboração deste texto todas as figuras foram confeccionadas pela autora utilizando para isso o software Geogebra e a calculadora gráfica Desmos.

1 Motivações para o estudo do Cálculo Fracionário

Neste capítulo recordaremos alguns conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, indispensáveis para uma boa compreensão do texto. Faremos a extensão do cálculo de ordem inteira para o cálculo fracionário de forma gradativa, procurando entender os caminhos percorridos por matemáticos famosos na busca por definições consistentes. Por fim, apresentaremos a definição de derivada fracionária segundo Grünwald-Letnikov e a definição da integral fracionária segundo Riemann-Liouville. As referências utilizadas foram: [2], [5], [7], [10] e [21].

1.1 Cálculo de ordem inteira

Iniciaremos com a definição de derivada e regra da potência. No cálculo de ordem inteira, dada uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ temos a seguinte notação, segundo Leibniz, para a derivada da função de uma variável,

$$Df(x) \equiv \frac{d}{dx}f(x),\, x \in I,$$

na qual, $D \equiv \dfrac{d}{dx}$ representa um operador diferencial da expressão colocada à direita do símbolo. É interpretada como a taxa de variação da variável dependente, em relação à variável independente, definida por meio do limite:

$$Df(x) \equiv \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ou

$$Df(x) \equiv \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}, \tag{1.1}$$

sempre que o limite existir.

Uma regra importante para a nossa motivação é dada pela regra da potência, isto é,

$$Seja\, f(x) = x^n,\ \text{com } x \in \mathbb{R},\ \text{então } \frac{d}{dx}(f(x)) = nx^{n-1}. \tag{1.2}$$

Abaixo, alguns exemplos de derivadas de ordem superior inteira da função $f(x) = x^n$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^n) &= nx^{n-1}\\
\frac{d^2}{dx^2}(x^n) &= n(n-1)x^{n-2}\\
\frac{d^3}{dx^3}(x^n) &= n(n-1)(n-2)x^{n-3}.
\end{aligned}$$

Note que podemos reescrever a última igualdade acima multiplicando o numerador e o denominador por $(n-3)!$,

$$\frac{d^3}{dx^3}(x^n) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)...(1)}{(n-3)(n-4)...(1)}\, x^{n-3},$$

a qual pode ser escrita como:

$$\frac{d^3}{dx^3}(x^n) = \frac{n!}{(n-3)!}\, x^{n-3}.$$

Portanto, obtemos uma notação mais simplificada para a terceira derivada e é possível, usando a mesma ideia, escrever para a k-ésima derivada:

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^n) = \frac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-k}. \tag{1.3}$$

A expressão (1.3) pode ser provada por indução finita e nos fornece a derivada de ordem inteira de qualquer polinômio ou função potência.

Agora podemos levantar alguns questionamentos. O número k pode ser real? Temos no numerador, $n!$, podemos calcular o fatorial de qualquer número real? Caso as respostas sejam afirmativas, no denominador teríamos a subtração de dois números reais, que resulta em um número real. Não teríamos problema com $0!$, pois $0! = 1$. Mas, se $k < n$, teríamos o fatorial de números negativos. Vamos buscar respostas para essas perguntas através da história dos estudos de alguns matemáticos.

Leonhard Euler (1707-1783) encontrou duas equações integrais que generalizam o fatorial. Elas apareceram pela primeira vez em 1729, em uma carta de Euler para Christian Goldbach (1690-1764). Somente em 1738 ele escreve um artigo que propõem a generalização do fatorial na forma de funções definidas por uma integral, a saber:

$$n! = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt.$$

Essa integral é conhecida como função $\Pi(n)$. Note que n, não precisa ser um número natural. Podemos escrever $\Pi(x)$, com $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}_-$, ou seja,

$$\Pi(x) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt. \tag{1.4}$$

Vamos resolver essa integral por partes. Sejam $u = t^x$, $du = xt^{x-1}$, $v = -e^{-t}$ e $dv = e^{-t}dt$, assim:

$$\Pi(x) = (-t^x e^{-t})\Big|_0^\infty + \int_0^\infty xt^{x-1}e^{-t}dt.$$

Note que, $x > 0$, temos

$$(-t^x e^{-t})\Big|_0^\infty = -\lim_{t\to\infty} t^x e^{-t} + 0^x e^0 = -\lim_{t\to\infty} \frac{t^x}{e^t}.$$

Fixando x, temos

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^x}{e^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{xt^{x-1}}{e^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k)t^{x-k}}{e^t}.$$

Como $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}_-$, vai existir o primeiro $k \in \mathbb{N}$ tal que $(x-k) < 0$.
Daí

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^x}{e^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{x(x-1)\ldots(x-k)}{e^t t^{k-x}} = 0,$$

pois $e^t t^{k-x} \to +\infty$.

Também percebemos que x é uma constante no integrando, portando, pode ser retirada da integral, daí a função $\Pi(x)$ pode ser representada como:

$$\Pi(x) = x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Observe que a diferença da integral acima com a função Π definida em (1.4), é o deslocamento de uma unidade. Então podemos escrever,

$$\Pi(x) = x\,\Pi(x-1).$$

Também

$$\begin{array}{rcl} \Pi(x) & = & x\,\Pi(x-1) \\ \Pi(x) & = & x(x-1)\,\Pi(x-2) \\ \Pi(x) & = & x(x-1)(x-2)\,\Pi(x-3). \end{array}$$

Tomando, $x = n, n \in \mathbb{N} - \{0\}$, temos:

$$\Pi(n) = n(n-1)(n-2)(n-3)...(2)(1) = n!.$$

Assim, concluímos que a função Π, generaliza o fatorial. Agora, pensando no seu domínio, notamos que pela definição feita em, (1.4), ela pode ser estendida para os números complexos, exceto para $\mathbb{Z}_-$.Veja a Figura (1.1).

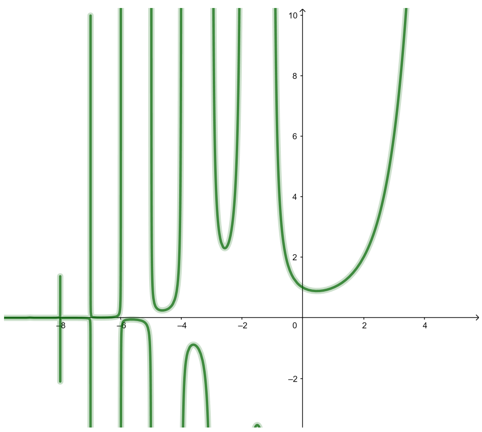

Figura 1.1: Gráfico da Função $\Pi(x)$ para $x \in [-10, 4]$

A Função Π, não é a única que generaliza o fatorial, temos também a Função Gama, ou segunda integral de Euler. A Função Gama é praticamente a Função Π deslocada uma unidade, ou seja: $\Gamma(x) = \Pi(x-1)$. Veja a Figura (1.2)

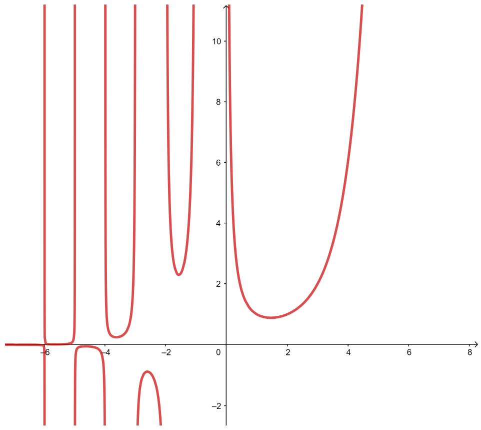

Figura 1.2: Gráfico da Função $\Gamma(x)$ para $x \in [-6, 5]$

Existem várias maneiras de representar a Função Gama, aqui vamos optar pela integral.

Definição 1.1. Definimos a função gama, $\Gamma(z)$ pela integral imprópria

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt, \tag{1.5}$$

que converge na metade direita do plano complexo, isto é, para $z \in \mathbb{C}$ tal que $Re(z) > 0$.

No Apêndice A[1], mostramos que a Função Gama generaliza, estende o fatorial dos números naturais para os números reais. Logo, a resposta aos questionamentos anteriores é sim, k e n podem ser números reais.
Também no Apêndice A, mostramos que $\Gamma(n+1) = n!$.
Então, voltemos a equação (1.3)

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^n) = \frac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-k}.$$

Substituindo a Função Gama em (1.3), e trocando os inteiros k e n por α e β pertencentes ao conjunto dos números reais positivos, obtemos:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}(x^\beta) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)!}\, x^{\beta-\alpha}, \beta - \alpha \geq 0, \tag{1.6}$$

que é a Regra da Potência do Cálculo Fracionário.

Vamos fazer alguns exemplos, iniciando com a derivada de ordem meio de $f(x) = x$. Mas antes, observemos que, segundo vários autores, foi com esse exemplo, que se deu início o cálculo de ordem arbitrária, ou cálculo fracionário como se costuma chamar. Dia 30 de setembro de 1695, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) escreve uma carta para Guillaume François Antoine (1661-1704), Marquês de L 'Hôpital. Nessa correspondência, Leibniz formula uma questão envolvendo a generalização da derivada de ordem inteira para possivelmente arbitrária, L'Hôpital devolve a pergunta questionando qual seria a sua interpretação se a ordem da derivada de uma função $f(x)$, fosse $n = \frac{1}{2}$. Prontamente Leibniz respondeu:

$$D^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\, y(x),$$

[1]Veja no apêndice A mais informações e propriedades da Função Gama.

e assegurou que para $f(x) = x$, teríamos

$$D^{\frac{1}{2}}x = x\sqrt{dx : x}.$$

Também concluiu: *"isto é, aparentemente, um paradoxo que um dia vai gerar várias consequências importantes"*. Essas e outras informações poderão ser encontradas em [5] e também nas referências utilizadas para escrever este capítulo.

Voltando ao exemplo

Exemplo 1.2. A derivada de ordem meio de $f(x) = x$, pode ser determinada por:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}(x) = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1+1-\frac{1}{2})}\, x^{1-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})}\, x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\sqrt{x} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

Esse resultado apareceu pela primeira vez na literatura no ano de 1819, no livro *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral* escrito por Silvestre François Lacroix (1765-1843). Seu trabalho possui 700 páginas, mas ele dedicou apenas duas para o problema que visava encontrar a fórmula para a n-ésima derivada de monômios do tipo $y = x^m$, utilizando a equação (1.3) foi mostrado que:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

Foi apenas em 1832 que Joseph Liouville (1809-1882) estendeu os resultados obtidos por Lacroix em seu trabalho intitulado *Mémorie sur le Calcul des Différentielles à Indices Quelconques* e substituiu o fatorial pela Função Gama.

Vamos a outro exemplo:

Exemplo 1.3. A derivada de ordem meio, da derivada de ordem meio de $f(x) = x$, isto é

$$\begin{aligned} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}(x)\right) &= \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}(x)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2})}\,(x)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)}\,(x)^0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{1} = 1. \end{aligned}$$

Em 1772, Joseph Louis Lagrange (1736-1772) contribuiu de forma indireta quando desenvolveu a chamada Lei dos Expoentes, na qual y está em função de x e m e n são números naturais.

$$\frac{d^m}{dx^m}\frac{d^n}{dx^n}y = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}y.$$

Iremos verificar se ela é válida para a Regra da Potência de Monômios, obtida em (1.6). Adotaremos a partir de agora a notação D^{α}, sempre que nos referirmos à derivada de ordem arbitrária, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Temos que,

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}(D^{\mu}(x^{\beta})) &= D^{\alpha}\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\mu)}x^{(\beta-\mu)}\right] \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\mu)}D^{\alpha}(x^{(\beta-\mu)}) \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\mu)}\frac{\Gamma(\beta-\mu+1)}{\Gamma(\beta-\mu+1-\alpha)}x^{(\beta-\mu-\alpha)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-(\mu+\alpha))}x^{(\beta-(\mu+\alpha))} \\
&= D^{(\alpha+\mu)}(x^{\beta}).
\end{aligned}$$

Com isso concluímos que a Lei dos Expoentes é válida para a Regra da Potência dos Monômios, versão com extensão para a Função Gama.

Faremos novamente o **Exemplo 1.3** agora, utilizando a regra dos expoentes:

$$D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}(x) = D^{1}(x) = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1+1-1)}x^{1-1} = \Gamma(2)x^{0} = 1$$

Obtemos o mesmo resultado para a derivada de ordem $n = 1$, ou seja recuperamos o resultado da derivada de ordem inteira.

É muito importante observar que a Lei dos Expoentes não é válida para a derivada de qualquer função $y = f(x)$, quando m e n são arbitrários. Esse fato causou um grande interesse entre os matemáticos. Muitos estudos se desenvolveram com o objetivo de descobrir quais restrições deveriam ser impostas à função para que uma regra análoga continuasse sendo válida. Para ficar mais clara essa motivação, vamos fazer um exemplo. Suponha que a Lei dos Expoentes seja válida para a derivada de ordem arbitrária de uma $f(x)$, então teríamos:

$$D^{7.2}(f(x)) = D^{0.2}[D^{7}(f(x))] = D^{0.2}\left[\frac{d^7}{d^7x}(f(x))\right],$$

com isso notamos que precisamos apenas definir D^{α} , com $\alpha \in (0,1)$. São detalhes muito importantes e deixam claro o motivo de terem servido de inspiração para o desenvolvimento do cálculo fracionário.

Até o presente momento, não existe uma interpretação geométrica para a derivada fracionária no caso geral, assim como existe no cálculo de ordem inteira. Mas, fazer uso de sua representação gráfica é muito útil para entendermos seu comportamento.

Faremos agora alguns exemplos de derivadas fracionárias da função $f(x) = x^2$ com $\alpha \in (0,1)$. Ilustraremos cada exemplo com seu respectivo gráfico, no qual teremos também a função, $f'(x) = 2x$.

Exemplo 1.4.

$$D^{0.5}(x^2) = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2+1-0.5)}x^{(2-0.5)} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.5)}x^{(1.5)} = \frac{\Gamma(3)\sqrt{x^3}}{\Gamma(2.5)}, x > 0.$$

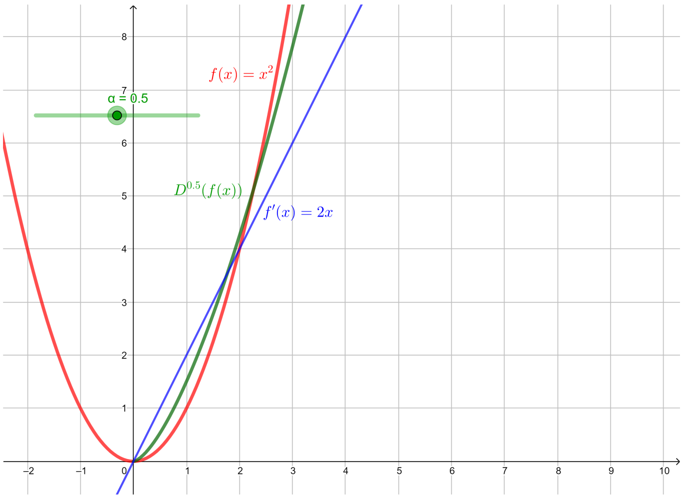

Figura 1.3: Representação gráfica de: $f(x)$, $f'(x)$ e $D^{0.5}f(x)$.

Exemplo 1.5.

$$D^{0.7}(f(x^2)) = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2+1-0.7)}x^{(2-0.7)} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.3)}x^{(1.3)}, x > 0.$$

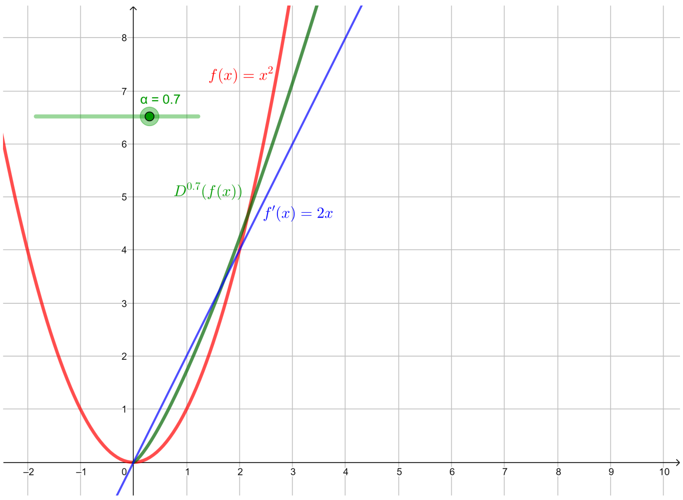

Figura 1.4: Representação gráfica de: $f(x)$, $f'(x)$ e $D^{0.7}f(x)$.

Exemplo 1.6.

$$D^{0.9}(f(x^2)) = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2+1-0.9)}x^{(2-0.9)} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.1)}x^{(1.1)}, x > 0.$$

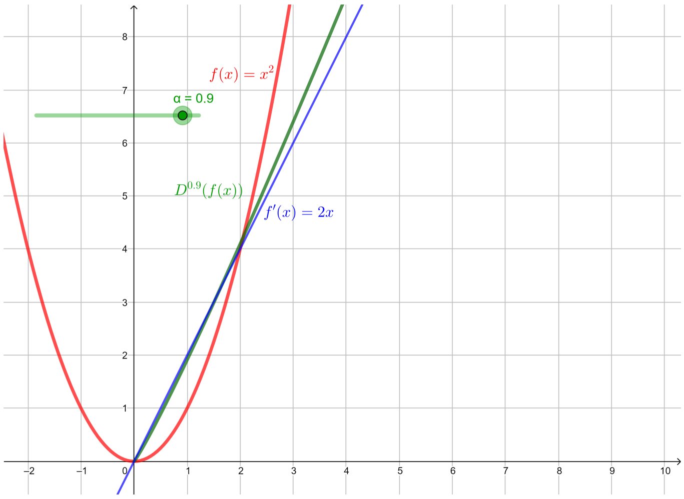

Figura 1.5: Representação gráfica de: $f(x)$, $f'(x)$ e $D^{0.9}f(x)$.

Com esses exemplos notamos que as derivadas de ordem alfa, podem ser vistas como transformações intermediárias entre a parábola e a reta. Nesse sentido as derivadas fracionárias podem modelar o que acontece entre as derivadas de ordem inteira.

Cabe aqui uma outra observação, os polinômios, em se tratando do cálculo de ordem inteira, são sempre diferenciáveis, contínuos, definidos em $\mathbb{R}$. Ou seja, podemos derivar tranquilamente. Note que, observando os exemplos e gráficos acima, no cálculo fracionário isso não é garantido.
Resumindo, no cálculo de ordem inteira temos:

$$\begin{aligned} P(x) \quad &, \quad \textit{contínuo}; \\ \frac{d}{dx}(P(x)) \quad &, \quad \textit{contínuo}. \end{aligned}$$

No cálculo fracionário podemos ter:

$$\begin{aligned} P(x) \quad &, \quad \textit{contínuo}; \\ D^{\alpha}(P(x)) \quad &, \quad \textit{não contínuo}; \end{aligned}$$

Isso significa que, se dermos "passos" fracionários entre as derivadas, obteremos descontinuidades. Outra diferença importante entre a derivada de ordem inteira e a fracionária, ocorre quando derivamos uma constante, veremos isso no próximo exemplo.

Exemplo 1.7. Seja $f(x) = cx^0$, $x \neq 0$, a derivada de ordem $\alpha \in (0,1)$, da f é dada por:

$$\begin{aligned} D^{\alpha}(cx^0) &= cD^{\alpha}(x^0) \\ &= c\left[\frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0+1-\alpha)}(x)^{0-\alpha}\right] \\ &= c\left[\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)}(x)^{-\alpha}\right] \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}x^{-\alpha} \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{x^{\alpha}}. \end{aligned}$$

Logo, utilizando esse operador, a derivada de ordem α de uma constante, não é zero. Novamente vamos fazer alguns exemplos e explorar suas representações gráficas. Faremos algumas derivadas de ordem $\alpha \in (0,1)$, de $f(x) = 3$. No gráfico será representada também a função $f'(x) = 0$.

Exemplo 1.8.

$$D^{0.5}(f(x)) = D^{0.5}(3)\frac{3}{\Gamma(1-0.5)}\frac{1}{x^{0.5}} = \frac{3}{\Gamma(0.5)}\frac{1}{\sqrt{x}}, x \neq 0.$$

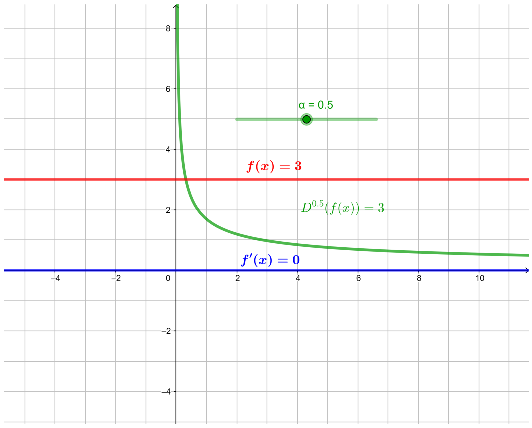

Figura 1.6: Representação gráfica de: $f(x), f'(x)$ e $D^{0.5}f(x)$

Exemplo 1.9.

$$D^{0.2}(f(x)) = D^{0.2}(3)\frac{3}{\Gamma(1-0.2)}\frac{1}{x^{0.2}} = \frac{3}{\Gamma(0.8)}\frac{1}{x^{(0.2)}}, x \neq 0.$$

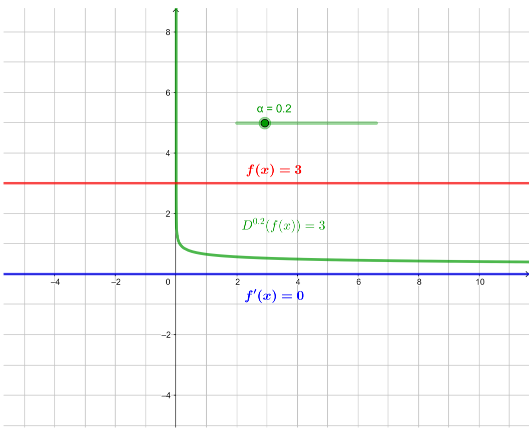

Figura 1.7: Representação gráfica de: $f(x), f'(x)$ e $D^{0.2}f(x)$

Exemplo 1.10.

$$D^{0.1}(f(x)) = D^{0.1}(3)\frac{3}{\Gamma(1-0.1)}\frac{1}{x^{0.1}} = \frac{3}{\Gamma(0.9)}\frac{1}{x^{(0.1)}}, x \neq 0.$$

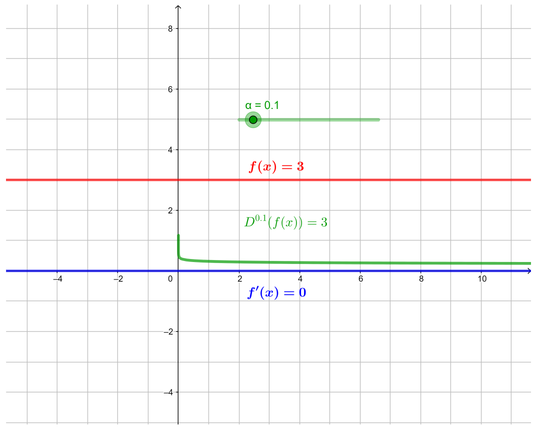

Figura 1.8: Representação gráfica de: $f(x), f'(x)$ e $D^{0.1}f(x)$

Novamente notamos que, as derivadas fracionárias transitam entre as derivadas de ordem inteira, $n = 0$ e $n = 1$. Mas, neste caso, não recuperamos o resultado para $n = 1$. Pois, como sabemos, no cálculo de ordem inteira, a derivada de uma constante é sempre zero. Isto é um problema, já que ela não é contínua na origem. Então, esse operador derivada não seria uma boa escolha, caso estivéssemos resolvendo uma Equação Diferencial Fracionária, com valor inicial. Veremos, em um próximo capítulo, que utilizando outro operador teremos a derivada de ordem arbitrária de uma constante igual a zero.

1.2 Derivada Fracionária de Grünwald-Letnikov

Iremos agora, fazer uma outra abordagem, utilizando para isso a definição de derivada através de limite. Voltando na definição de limite pela diferença inversa, dada em (1.1), e seja $f(x)$ contínua, temos para a derivada de primeira ordem

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

De segunda ordem,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}f(x) &= \frac{d}{dx}f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x) - f(x-h)}{h} - \dfrac{f(x-h) - f(x-2h)}{h}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\Big[f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)\Big]
\end{aligned}$$

e de terceira ordem

$$\frac{d^3}{dx^3}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\Big[f(x) - 3f(x-h) + 3f(x-2h) - f(x-3h)\Big].$$

Generalizando, temos que para um certo número natural k, a k-ésima derivada pode ser representada na forma

$$\frac{d^k}{dx^k}f(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\right)^k\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\binom{k}{l}f(x-lh), \tag{1.7}$$

que pode ser provada por indução.
Agora, nosso objetivo será estender $k \in \mathbb{N}$ para um certo $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Primeiramente vamos reescrever os coeficientes binomiais utilizando a notação de fatorial, isto é

$$\frac{d^k}{dx^k} f(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h}\right)^k \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \frac{k!}{l!(k-l)!} f(x - lh).$$

Em seguida, vamos substituir $k!$ pela função $\Gamma(k+1)$ e $(k-l)!$ por $\Gamma(k+1-l)$, assim temos,

$$\frac{d^k}{dx^k} f(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h}\right)^k \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \frac{\Gamma(k+1)}{l!\Gamma(k+1-l)} f(x - lh).$$

Lembrando que a Função Gama, dada em (A.1), está definida para $Re(z) > 0$, ou seja,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \, dt, Re(z) > 0,$$

substituindo o coeficiente binomial pela Função Gama, generalizamos a expressão para ordem arbitrária. Assim, fazendo a extensão k para $\alpha \in \mathbb{R}^+$, exceto no somatório, obtemos:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h}\right)^\alpha \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-l)l!} f(x - lh).$$

E, definindo $kh = x - a$, sendo a uma constante, temos,

$$k = \frac{x-a}{h}.$$

Note que, quando $h \to 0$, temos que

$$k = \frac{x-a}{h} \to +\infty, se\, a < x \neq 0.$$

Também,

$$h = \frac{x-a}{k} \Rightarrow \frac{1}{h} = \frac{k}{x-a} \Rightarrow \frac{1}{h} = \frac{\alpha}{x-a}.$$

Fazendo as devidas substituições, concluímos que:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{k}{x-a}\right)^\alpha \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-l)l!} f\left(x - \frac{l}{k}(x-a)\right).$$

Essa é a famosa definição de Derivada Fracionária segundo Grünwald-Letnikov, introduzida por Anton Karl Grünwald (1838-1920), em 1867 e por Aleksey Vasilyevich Letnikov (1837-1888), em 1868. Vamos escrevê-la de uma forma mais convencional e com notação específica. Seja $f(x)$, uma função contínua,

$$ {}_{a}^{\mathrm{GL}}\mathrm{D}_x^\alpha f(x) = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{k}{x-a}\right)^\alpha \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-l)l!} f\left(x - \frac{l}{k}(x-a)\right),$$

$$ {}_{a}^{\mathrm{GL}}\mathrm{D}_x^\alpha f(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ kh \to x-a}} \left(\frac{1}{h}\right)^\alpha \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-l)l!} f(x - lh).$$

A fim de realizarmos alguns exemplos, utilizaremos a relação dada em (1.7), com notação de $-\alpha$, omitiremos "GL"para não carregar a notação.

$$ {}_a\mathrm{D}_x^{-\alpha} f(x) = \lim_{h \to 0} (h)^{\alpha} \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{-\alpha}{l} f(x - lh). $$

Substituindo os coeficientes binomiais negativos pela Função Gama, obtemos

$$ {}_a\mathrm{D}_x^{-\alpha} f(x) = \lim_{h \to 0} (h)^{\alpha} \sum_{l=0}^{k} \frac{\Gamma(\alpha + l)}{\Gamma(\alpha) l!} f(x - lh). $$

Agora iremos atribuir alguns valores para α, iniciando com $\alpha = 1$, temos:

$$ {}_a\mathrm{D}_x^{-1} f(x) = \lim_{h \to 0} (h^1) \sum_{l=0}^{k} \frac{\Gamma(1 + l)}{\Gamma(1) l!} f(x - lh), $$

lembrando que, $\Gamma(1 + l) = l!$ e que $\Gamma(1) = 0! = 1$, temos:

$$ {}_a\mathrm{D}_x^{-1} f(x) = \lim_{h \to 0} \sum_{l=0}^{k} f(x - lh) h. $$

Note que o lado direito é praticamente uma soma de Riemann, com h representando o Δx,

$$ h = \frac{(x - a) - 0}{n}. $$

Portanto,

$$ {}_a\mathrm{D}_x^{-1} f(x) = \int_0^{x-a} f(x - t) dt. $$

Fazendo trocas de variáveis, ou seja,

$$ u = x - t \Rightarrow du = (-1) dt, $$

temos que, quando $t = 0$, $u = x$, e quando $t = x - a$, temos $u = x - (x - a) = a$.
Logo,

$$ {}_a\mathrm{D}_x^{-1} f(x) = \int_x^{a} f(u)(-du). $$

Invertendo os limites de integração obtemos

$$ {}_a\mathrm{D}_x^{-1} f(x) = \int_a^{x} f(u) du. $$

Vimos que a primeira derivada negativa é a primeira integral de uma função. Vamos verificar agora quando $\alpha = 2$. Note que

$$ {}_a\mathrm{D}_x^{-2} f(x) = \lim_{n \to \infty} (h^2) \sum_{l=0}^{n} \frac{\Gamma(2 + l)}{\Gamma(2) l!} f(x - lh). $$

Podemos escrever $\Gamma(l + 2) = \Gamma((l + 1) + 1) = (l + 1)!$, também $\dfrac{(l + 1)!}{l!} = (l + 1)$ e $\Gamma(2) = 1!$, então:

$$ {}_a\mathrm{D}_x^{-2}f(x) = \frac{1}{1!}\lim_{n\to\infty}(h^2)\sum_{l=0}^{n}(l+1)f(x-lh). $$

Realizando uma reindexação nas variáveis, (mudando para 1) e decompondo o h^2, obtemos

$$ {}_a\mathrm{D}_x^{-2}f(x) = \frac{1}{1!}\lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{n+1}(lh)f(x-lh)h. $$

Note que, novamente a parte direita é uma soma de Riemann com h representando o Δx, ou seja,

$$ {}_a\mathrm{D}_x^{-2}f(x) = \frac{1}{1!}\int_0^{x-a} tf(x-t)dt. $$

Trocando as variáveis, como feito anteriormente, temos

$$ {}_a\mathrm{D}_x^{-2}f(x) = \frac{1}{1!}\int_a^{x}(x-u)f(u)du. $$

De maneira similar, temos para $\alpha = 3$

$$ {}_a\mathrm{D}_x^{-3}f(x) = \frac{1}{2!}\int_a^{x}(x-u)^2f(u)du $$

e para $\alpha = 4$

$$ {}_a\mathrm{D}_x^{-4}f(x) = \frac{1}{3!}\int_a^{x}(x-u)^3f(u)du. $$

Assim, podemos estender para qualquer ordem. Então, em geral temos

$$ {}_a\mathrm{D}_x^{-(k+1)}f(x) = \frac{1}{k!}\int_a^{x}(x-t)^kf(t)dt, \;\; k\in\mathbb{N}. $$

Observe que o lado direito é a generalização da fórmula de Cauchy para determinar a n-ésima primitiva de uma função.
A Representação da Integral de Cauchy é dada por

$$ I^nf(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau}{(n-1)!}. \tag{1.8} $$

Logo, trocando n, por $k+1$ podemos escrever

$$ {}_a\mathrm{I}_x^{k+1}f(t) = \frac{1}{k!}\int_a^{x}(x-t)^kf(t)dt, \;\; k\in\mathbb{N}, $$

que mostra a conexão existente entre as integrais e as derivadas negativas, justificando assim, o termo diferintegração relativo à formulação de Grünwald-Letnikov. Fazendo a extensão $k+1$ para α e utilizando a Função Gama, temos

$$ {}_a\mathrm{D}_x^{-\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt = {}_a\mathrm{I}_x^{\alpha}f(t). \tag{1.9} $$

Essa expressão é conhecida como a **fórmula para o operador integral fracionário, segundo Riemann-Liouville**.

$$ {}_a^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}_x^{\alpha}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt, \; a<x, \tag{1.10} $$

o qual será nosso objeto de estudo no próximo capítulo.

2 Integral segundo Riemann-Liouville

Este capítulo será dedicado ao estudo mais detalhado da integral fracionária segundo Riemann-Liouville, cujas referências são [5], [7] e [12]. Iniciaremos com a demonstração da validade da Lei dos Expoentes para essas integrais. Posteriormente faremos exemplos utilizando as funções potência, constante, seno, cosseno e exponencial. Abordaremos a importância da escolha dos limites de integração utilizando representações gráficas e cálculos. Para termos uma notação menos carregada, omitiremos os símbolos RL da integral.

Primeiramente vamos dedicar uma seção para analisarmos algumas propriedades.

2.1 Propriedades básicas

Nesta seção, de forma breve, vamos mostrar as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}
&i) \quad I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta};\\
&ii) \quad I^\alpha I^\beta = I^\beta I^\alpha;\\
&iii) \quad I^\alpha(f(x) \pm g(x)) = I^\alpha(f(x)) \pm I^\alpha(g(x)).
\end{aligned}$$

Lembremos que a integral fracionária segundo Riemann-Liouville é definida por

$${}^{\mathrm{RL}}_{\ a}\mathrm{I}^{\alpha}_{x} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \ a < x.$$

Mostremos $i)$

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com $\alpha, \beta \geq 0$ e utilizando a definição da integral fracionária de Riemann-Liouville, temos

$$I^\alpha I^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\tau (\tau-\xi)^{\beta-1} f(\xi) d\xi \right] d\tau,$$

podemos escrever,

$$I^\alpha I^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \int_0^\tau (\tau-\xi)^{\beta-1} f(\xi) d\xi d\tau.$$

Faremos uma mudança no intervalo de integração da segunda integral, para que ambas resultem em funções de mesma variável t. Transformando o intervalo $[0, \tau]$ em $[\xi, t]$ por

$y = \xi + \dfrac{(t-\xi)}{\tau}x$ e voltando à notação original, obtemos:

$$I^\alpha I^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \int_\xi^t (\tau-\xi)^{\beta-1} f(\xi) d\xi d\tau.$$

Aplicando o teorema de Fubini, temos:

$$I^\alpha I^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\xi) d\xi \int_\xi^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-\xi)^{\beta-1} d\tau.$$

Fazendo a mudança de variável, $u = \tau - \xi$, temos $\tau = u + \xi$ e $d\tau = du$ e quando $\tau = \xi$, $u = 0$ e quando $\tau = t$, $u = t - \xi$, obtemos

$$I^\alpha I^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\xi) d\xi \int_0^t (t-u-\xi)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du.$$

Agora, fazendo $s = \dfrac{u}{t-\xi}$, que implica em $u = s(t-\xi)$ e $du = (t-\xi)ds$. Daí teremos os novos intervalos de integração da segunda integral, quando $u = 0$ tem-se $s = 0$ e quando $u = t - \xi$ tem-se $s = 1$.
Assim,

$$I^\alpha I^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\xi) d\xi \int_0^1 (t - s(t-\xi) - \xi)^{\alpha-1} [s(t-\xi)]^{\beta-1} (t-\xi) ds.$$

Reagrupando os termos da segunda integral, obtemos

$$\begin{aligned}
I^\alpha I^\beta f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\xi) d\xi \int_0^1 [t - st + s\xi - \xi)]^{\alpha-1} [s(t-\xi)]^{\beta-1} (t-\xi) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\xi) d\xi \int_0^1 [(t-\xi)(1-s)]^{\alpha-1} s^{\beta-1} (t-\xi)^{\beta-1} (t-\xi) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\xi) d\xi \int_0^1 (t-\xi)^{(\alpha-1)+(\beta-1)+1} (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\xi) d\xi \int_0^1 (t-\xi)^{\alpha+\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds.
\end{aligned}$$

Observe que o termo $(t-\xi)^{\alpha+\beta-1}$, é constante com relação à variável s.
Logo,

$$I^\alpha I^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\xi)(t-\xi)^{\alpha+\beta-1} d\xi \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds. \tag{2.1}$$

Note que, por (A.6) e (A.10) a segunda integral em (2.1) pode ser escrita como

$$\beta(\alpha,\beta) = \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Substituindo (2.1) em (2.1), obtemos

$$\begin{aligned}
I^\alpha I^\beta f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\xi)(t-\xi)^{\alpha+\beta-1} d\xi \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t f(\xi)(t-\xi)^{\alpha+\beta-1} d\xi \\
&= I^{\alpha+\beta} f(t),
\end{aligned}$$

concluindo a prova de *i*).
Dessa igualdade também segue a propriedade comutativa, *ii*), isto é

$$I^\alpha I^\beta = I^\beta I^\alpha.$$

Para verificar *iii*), utilizaremos o fato da integral ser um operador linear, assim

$$\begin{aligned}
I^\alpha(f(x)+g(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(f(t)+g(t))dt\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt + \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}g(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}g(t)dt \\
&= I^\alpha f(x) + I^\alpha g(x).
\end{aligned}$$

De modo análogo para $I^\alpha(f(x)-g(x))$.

Faremos na próxima seção um estudo mais detalhado sobre os limites de integração.

2.2 A escolha do limite inferior de integração

Nesta seção faremos algumas escolhas para o ponto de inicialização das integrais das funções potência, constante, seno, cosseno e exponencial. Traremos exemplos utilizando ordem fracionária e inteira. Verificaremos, a partir dessas escolhas, a validade da Lei dos Expoentes. Realizaremos análises, através da representação gráfica de alguns resultados, e por fim, algumas reflexões e observações.

2.2.1 Função Potência

Seja $f(x) = x^\mu$, $\mu \in \mathbb{R}^+$, então a integral segundo Riemann-Liouville de $f(x), x > 0$, é dada por:

$${}_a\mathrm{I}_x^\alpha(x^\mu) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}t^\mu dt.$$

Alguns exemplos utilizando $a = 0$.

Exemplo 2.1. Calculemos a integral de ordem meio de $f(x) = x$, isto é,

$${}_0\mathrm{I}_x^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}tdt.$$

Para $x = 1$, temos:

$${}_0\mathrm{I}_1^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}}tdt. \tag{2.2}$$

Note que, tomando $z = 2$ e $\xi = \frac{1}{2}$ a integral pode ser reescrita utilizando a Função Beta, veja (A.6),

$$\beta(z,\xi) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\xi-1}dt,$$

$$\beta\left(2,\frac{1}{2}\right)=\int_0^1 t^{2-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}dt=\int_0^1 t^1(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt.$$

Substituindo em (2.2) obtemos:

$$_0\mathrm{I}_1^{\frac{1}{2}}(x)=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\beta\left(2,\frac{1}{2}\right).$$

Utilizando a relação existente entre as Funções Gama e Beta, temos:

$$_0\mathrm{I}_1^{\frac{1}{2}}(x)=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{\Gamma(2)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2+\frac{1}{2})}=\frac{1!}{\Gamma(\frac{5}{2})}.$$

Exemplo 2.2. Calculemos a integral de ordem meio de $f(x)=x^2$, isto é,

$$_0\mathrm{I}_x^{\frac{1}{2}}(x^2)=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}t^2dt. \tag{2.3}$$

Quando $x=1$, note que tomando $z=3$ e $\xi=\frac{1}{2}$ a integral pode ser reescrita utilizando a Função Beta.

$$\beta(z,\xi)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\xi-1}dt,$$

$$\beta\left(3,\frac{1}{2}\right)=\int_0^1 t^{3-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}dt=\int_0^1 t^2(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt.$$

Substituindo em (2.3), obtemos:

$$_0\mathrm{I}_1^{\frac{1}{2}}(x^2)=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\beta\left(3,\frac{1}{2}\right).$$

Novamente utilizando a relação existente entre as Funções Gama e Beta, temos:

$$_0\mathrm{I}_1^{\frac{1}{2}}(x^2)=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(3+\frac{1}{2})}=\frac{2!}{\Gamma(\frac{7}{2})}.$$

Exemplo 2.3. Calculemos a integral de ordem meio de $f(x)=x^3$, isto é,

$$_0\mathrm{I}_x^{\frac{1}{2}}(x^3)=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}t^3dt. \tag{2.4}$$

Quando $x=1$, note que tomando $z=4$ e $\xi=\frac{1}{2}$ a integral pode ser reescrita utilizando a Função Beta,

$$\beta(z,\xi)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\xi-1}dt,$$

$$\beta\left(4,\frac{1}{2}\right)=\int_0^1 t^{4-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}dt=\int_0^1 t^3(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt.$$

Substituindo em (2.4), obtemos:

$$_0\mathrm{I}_1^{\frac{1}{2}}(x^2)=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\beta\left(4,\frac{1}{2}\right).$$

Novamente utilizando a relação existente entre as Funções Gama e Beta, temos:

$$ {}_0\mathrm{I}_1^{\frac{1}{2}}(x^3) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{\Gamma(4)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(4+\frac{1}{2})} = \frac{3!}{\Gamma(\frac{9}{2})}. $$

Note que escolhendo $a = 0$, foi possível utilizar a Função Gama.

Vamos procurar a generalização da integral fracionária da função potência $f(x) = x^\mu$, com $a = 0$.

$$ \begin{aligned} {}_0\mathrm{I}_x^\alpha(x^\mu) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^\mu dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x x^{\alpha-1}\left(1-\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} t^\mu dt. \end{aligned} $$

Fazendo a mudança de variável, $z = \dfrac{t}{x}$, temos $xdz = dt$, então

$$ \begin{aligned} {}_0\mathrm{I}_x^\alpha(x^\mu) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-z)^{\alpha-1} z^\mu x^\mu x dz. \\ &= \frac{x^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 z^\mu (1-z)^{\alpha-1} dz. \end{aligned} $$

Utilizando as relações (A.7) e (A.8),

$$ \beta(z,\xi) = \beta(\xi,z) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\xi-1} dt. $$

Realizando as devidas substituições, podemos escrever

$$ \beta(\alpha,\mu+1) = \int_0^1 z^{\mu+1-1}(1-t)^{\alpha-1} dz = \int_0^1 z^\mu (1-t)^{\alpha-1} dz $$

então

$$ I^\alpha(x^\mu) = \frac{x^{\alpha+\mu}\beta(\alpha,\mu+1)}{\Gamma(\alpha)}. $$

Por (A.10), sabemos que

$$ \beta(\alpha,\mu+1) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}, $$

portanto a integral de ordem α da função $f(x) = x^\mu$, ou seja, a regra da potência de uma integral fracionária, é dada por:

$$ {}_0\mathrm{I}_x^\alpha(x^\mu) = \frac{\Gamma(\mu+1)x^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}. \tag{2.5} $$

Note que se trocarmos α por $-\alpha$, na equação (2.5), obtemos:

$$ {}_0\mathrm{I}_x^{-\alpha}(x^\mu) = \frac{\Gamma(\mu+1)x^{\mu-\alpha}}{\Gamma(\mu-\alpha+1)}, \tag{2.6} $$

que é fórmula para a derivada fracionária da função potência, encontrada no capítulo anterior, em (1.6):

$$ {}_0\mathrm{D}_x^\alpha(x^\mu) = \frac{\Gamma(\mu+1)x^{\mu-\alpha}}{\Gamma(\mu-\alpha+1)}. $$

Faremos mais alguns exemplos e para a simplificar a notação, omitiremos os subíndices.

Exemplo 2.4. Cálculo da integral de ordem $\frac{1}{2}$ de $f(x) = x^2$, isto é,

$$I^{\frac{1}{2}}(x^2) = \frac{\Gamma(2+1)x^{\frac{1}{2}+2}}{\Gamma(\frac{1}{2}+2+1)} = \frac{\Gamma(3)x^{\frac{5}{2}}}{\Gamma(\frac{7}{2})},$$

quando $x = 1$, obtemos o mesmo resultado do **Exemplo** 2.2.

Exemplo 2.5. Cálculo da integral de ordem $\frac{1}{2}$ da integral de ordem $\frac{1}{2}$ de $f(x) = x^2$.

$$I^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\Gamma(3)x^{\frac{5}{2}}}{\Gamma(\frac{7}{2})}\right) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})}I^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{5}{2}}) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})}\frac{\Gamma(\frac{5}{2}+1)x^{\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}+1)} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})}\frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(4)}x^3 = \frac{2!x^3}{3!} = \frac{x^3}{3}.$$

A seguir, um exemplo utilizando $\alpha \in \mathbb{N}$:

Exemplo 2.6. A integral de ordem 1 de $f(x) = x^2$ é

$$I^1(x^2) = \frac{\Gamma(2+1)x^{1+2}}{\Gamma(1+2+1)} = \frac{\Gamma(3)x^3}{\Gamma(4)} = \frac{2!x^3}{3!} = \frac{2x^3}{6} = \frac{x^3}{3}.$$

Através dos exemplos acima mostramos que

$$I^{\frac{1}{2}}(I^{\frac{1}{2}}(x^2)) = I^1(x^2).$$

2.2.2 Função Constante

Calculemos a integral de ordem α da função $f(x) = cx^0$, $x > 0$ e c um número real, utilizando $a = 0$

$$\begin{aligned} {}_0\mathrm{I}_x^\alpha(x^0) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}ct^0dt \\ &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x x^{\alpha-1}\left(1-\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1}dt. \end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variável, $z = \dfrac{t}{x}$, temos $xdz = dt$, então

$$\begin{aligned} {}_0\mathrm{I}_x^\alpha(x^0) &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-z)^{\alpha-1}xdz \\ &= \frac{cx^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}dz. \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\beta(z,\xi) = \beta(\xi,z) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\xi-1}dt,$$

calculando $\beta(\alpha, 1)$, obtemos

$$\beta(\alpha,1) = \int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}z^{1-1}dz = \int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}dz,$$

então,

$$ {}_0\mathrm{I}_x^\alpha(x^0) = \frac{cx^\alpha\beta(\alpha,1)}{\Gamma(\alpha)}. \tag{2.7}$$

Usando o fato de que

$$\beta(z,\xi) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\xi)}{\Gamma(z+\xi)},$$

temos

$$\beta(\alpha,1) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{2.8}$$

Substituindo (2.8) em (2.7), temos

$${}_0\mathrm{I}_x^{\alpha}(cx^0) = \frac{cx^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},$$

solução para a integral de ordem α de uma função constante.

Exemplo 2.7. Calculando a integral de ordem $\frac{1}{2}$ de $f(x) = cx^0$ obtemos,

$$I^{\frac{1}{2}}(cx^0) = \frac{cx^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{cx^{\frac{1}{2}}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}.$$

Exemplo 2.8. Calculando a integral de ordem 1 de $f(x) = cx^0$ obtemos,

$$I^1(cx^0) = \frac{cx^1}{\Gamma(1+1)} = \frac{cx}{\Gamma(2)} = \frac{cx}{1!} = cx.$$

Note que ao utilizarmos $a = 0$ para a integração fracionária da função constante, recuperamos o resultado do cálculo de ordem inteira para $\alpha \in \mathbb{N}$.

2.2.3 Funções Trigonométricas

Agora vamos estudar a função trigonométrica, $f(x) = \mathrm{sen}(x)$, temos que:

$${}_a\mathrm{I}_x^{\alpha}(sen(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} sen(t)dt,$$

mas, $\mathrm{sen}(t)$ pode ser escrito utilizando o seguinte polinômio de Taylor, isto é,

$$\mathrm{sen}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k, \;\; k \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}.$$

Como a convergência é uniforme, podemos escrever

$$\begin{aligned} {}_a\mathrm{I}_x^{\alpha}(sen(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} t^{2k+1} dt \right]. \end{aligned}$$

Observe que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} t^{2k+1} dt = {}_a\mathrm{I}_x^{\alpha}(x^{2k+1}),$$

ou seja, é a integral da função potência cujo resultado já conhecemos quando $a = 0$

$$ {}_0\mathrm{I}_x^{\alpha}(x^{2k+1}) = \frac{\Gamma(2k+1+1)}{\Gamma(2k+1+1+\alpha)} x^{2k+1+\alpha}. $$

Logo, podemos escrever:

$$ \begin{aligned} {}_0\mathrm{I}_x^{\alpha}(sen(x)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{\Gamma(2k+2)}{\Gamma(2k+2+\alpha)} x^{2k+1+\alpha} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{\Gamma(2k+2)} \frac{\Gamma(2k+2)}{\Gamma(2k+2+\alpha)} x^{2k+1+\alpha} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(2k+2+\alpha)} x^{2k+1+\alpha}. \end{aligned} $$

Primeiramente vamos calcular a integral de ordem -1, que como vimos, é a derivada de ordem 1.

$$ \begin{aligned} {}_0\mathrm{I}_x^{-1}(\mathrm{sen}(x)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(2k+2-1)} x^{2k+1-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(2k+1)} x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \cos(x). \end{aligned} $$

Agora vamos à direção oposta, calculando a integral de ordem 1.

$$ \begin{aligned} {}_0\mathrm{I}_x^{1}(\mathrm{sen}(x)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(2k+2+1)} x^{2k+1+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(2k+3)} x^{2k+2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+2)!} x^{2k+2} \\ &= \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots \\ &= 1 - \left[1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots \right] \\ &= 1 - \cos(x) = -\cos(x) + 1. \end{aligned} $$

Vamos analisar graficamente, veja Figura (2.1). Sabemos da trigonometria que a área hachurada sob a curva, quando $x = \pi$, é igual a 2 ua. E algebricamente temos,

$$ {}_0\mathrm{I}_x^{1}(\mathrm{sen}(x)) = (-\cos(x) + 1)|_{x=\pi} = -(-1) + 1 = 2. $$

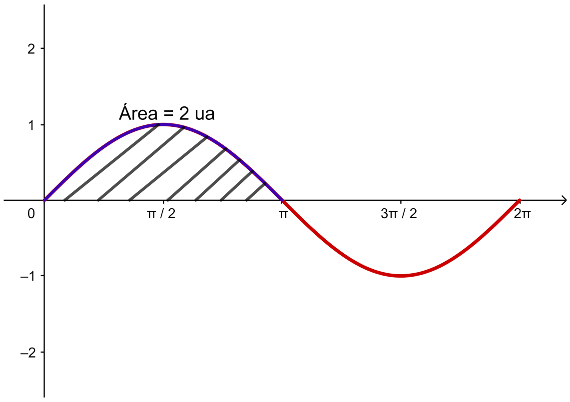

Figura 2.1: Gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$, $[0, 2\pi]$.

Trocando o limite inferior por $a = \dfrac{\pi}{2}$, ao invés de $a = 0$, graficamente temos a área hachurada na **Figura** 2.2:

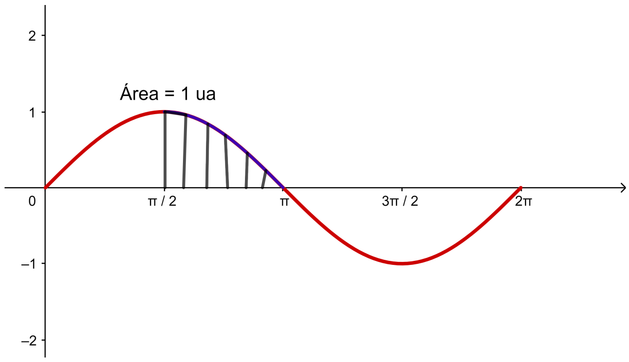

Figura 2.2: Gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$, $[0, 2\pi]$, com $a = \frac{\pi}{2}$.

Não temos uma fórmula pronta para calcularmos a integral de ordem 1 de $f(x) = \text{sen}(x)$, com ponto base $a = \dfrac{\pi}{2}$, como no caso $a = 0$.
Então vamos aos cálculos:

$$_{\frac{\pi}{2}}\mathrm{I}_x^1(\text{sen}(x)) = \frac{1}{\Gamma(1)}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}(x-t)^{1-1}\,\text{sen}(t)dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\text{sen}(t)dt = -\cos(x) - (-\cos(\frac{\pi}{2})) = -\cos(x).$$

E, para $x = \pi$, temos:

$$_{\frac{\pi}{2}}\mathrm{I}_x^1(\text{sen}(x)) = -cos(\pi) = -(-1) = 1.$$

Observe que utilizando o ponto inicial $a = 0$, tivemos como resultado $-cos(x) + 1$ e quando utilizamos $a = \dfrac{\pi}{2}$ apenas, $-cos(x)$, sem uma constante.

Então qual seria o melhor valor para utilizarmos?

Lembremos do cálculo de ordem inteira que as derivadas da função $f(x) = \text{sen}(x)$ são translações horizontais. Veja Figura (2.3), que:

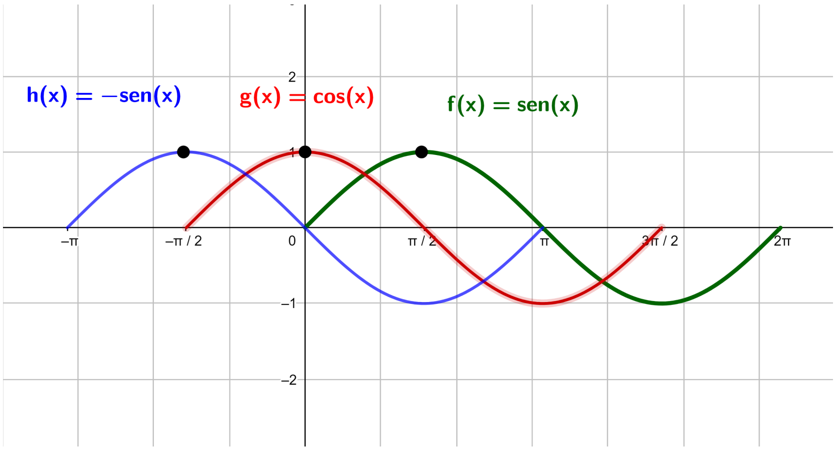

Figura 2.3: Gráfico das translações de y=sen(x).

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = g(x) = \cos(x)$$

e

$$f\left(x+2\frac{\pi}{2}\right) = h(x) = -\operatorname{sen}(x).$$

Escrevendo as derivadas de ordem inteira de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(x)) &= \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\\
\frac{d^2}{d^2x}\left(\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) &= \operatorname{sen}\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)\\
&\vdots\\
\frac{d^k}{d^kx}\left(\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) &= \operatorname{sen}\left(x+k\frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

que pode ser facilmente provado por indução.

Note que podemos estender k para $\alpha \in \mathbb{R}$. Então temos:

$$D^{\alpha}(\operatorname{sen}(x)) = \operatorname{sen}\left(x+\alpha\frac{\pi}{2}\right), \alpha \in \mathbb{R}^{+}$$

e

$$I^{\alpha}(\operatorname{sen}(x)) = \operatorname{sen}\left(x-\alpha\frac{\pi}{2}\right), \alpha \in \mathbb{R}^{+}. \tag{2.9}$$

Iremos verificar a existência de um ponto a que justifique essa conjectura. Primeiramente vamos definir uma função $G(x,a)$, sendo a integral de ordem $\frac{1}{2}$ segundo Riemann-Liouville, da função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

$$G(x,a) = {}_a\mathrm{I}_x^{\frac{1}{2}}(\operatorname{sen}(x)) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_a^x (x-t)^{\frac{1}{2}-1}\operatorname{sen}(t)dt,$$

também uma $g(x) = \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$. Representando as funções na calculadora gráfica Desmos, vamos fazer alguns exemplos, alterando os valores de a.

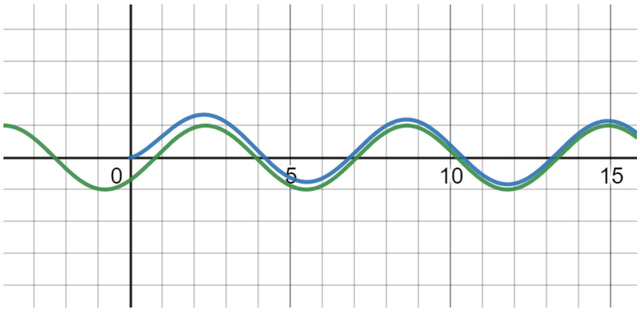

Figura 2.4: Gráfico das funções $G(x, a)$ em azul e $g(x)$ em verde com $a = 0$.

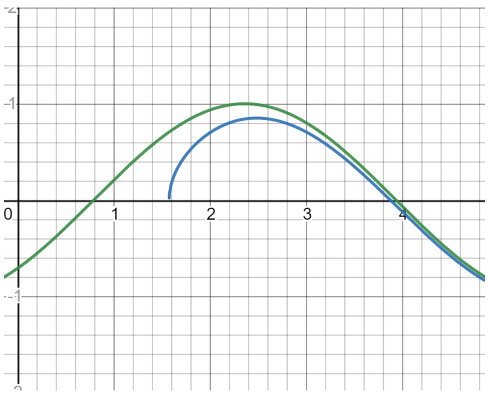

Figura 2.5: Gráfico das funções $G(x, a)$ em azul e $g(x)$ em verde com $a = \frac{\pi}{2}$.

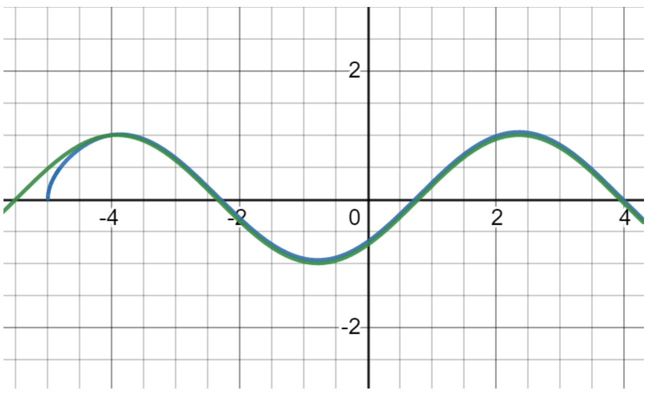

Figura 2.6: Gráfico das funções $G(x, a)$ em azul e $g(x)$ em verde com $a = -5$.

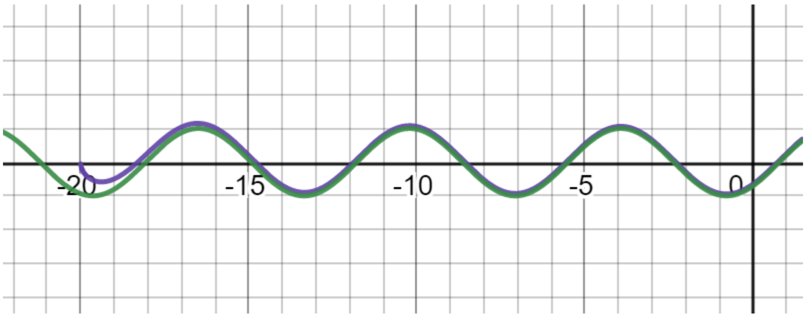

Figura 2.7: Gráfico das funções $G(x, a)$ em azul e $g(x)$ em verde com $a = -20$.

Observando os gráficos notamos que quanto mais o valor de a se aproxima do infinito negativo, mais rapidamente os valores das funções coincidem. Ou seja,

$$\lim_{a \to -\infty} G(x, a) = g(x).$$

Logo, $a = -\infty$ nos fornece o melhor resultado para a integral fracionária da função $y = \text{sen}(x)$, é $-\infty$. Note que o mesmo irá ocorrer com a função $y = \cos(x)$.

Portanto,

$$\begin{aligned} I^\alpha(\text{sen}(x)) &= {}_{-\infty}\mathrm{I}_x^\alpha(\text{sen}(x)) = \text{sen}\left(x - \alpha\frac{\pi}{2}\right), \alpha > 0 \\ &\text{e} \\ I^\alpha(\cos(x)) &= {}_{-\infty}\mathrm{I}_x^\alpha(\cos(x)) = \cos\left(x + \alpha\frac{\pi}{2}\right), \alpha > 0. \end{aligned}$$

2.2.4 Função Exponencial

Iremos agora procurar o ponto inicial a, para a integral da função $f(x) = e^{kx}$, $k \in \mathbb{R}^+$ e $x \in \mathbb{R}$.

$${}_a\mathrm{I}_x^\alpha(e^{kx}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} e^{kt} dt,$$

substituindo, $u = x - t$, temos $t = x - u$ e $du = -dt$. Nos limites de integração teremos para $t = a$, $u = x - a$ e quando $t = x$, $u = 0$, então

$$\begin{aligned} {}_a\mathrm{I}_x^\alpha(e^{kx}) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-a}^0 (u)^{\alpha-1} e^{k(x-u)} - du \\ &= \frac{e^{kx}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} (u)^{\alpha-1} e^{-ku} du. \end{aligned}$$

Agora substituindo, $\omega = ku$, temos $u = \dfrac{\omega}{k}$ e $du = \dfrac{d\omega}{k}$. Nos limites de integração teremos para $u = 0$, $\omega = 0$ e quando $u = x - a$, $\omega = k(x - a)$, então

$$\begin{aligned} {}_a\mathrm{I}_x^\alpha(e^{kx}) &= \frac{e^{kx}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{k(x-a)} \left(\frac{\omega}{k}\right)^{\alpha-1} e^{-\omega} \frac{d\omega}{k} \\ &= \frac{e^{kx}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{k^\alpha} \int_0^{k(x-a)} \omega^{\alpha-1} e^{-\omega} d\omega. \end{aligned}$$

Colocando, $a = -\infty$ teremos:

$$\begin{aligned} {}_{-\infty}\mathrm{I}_x^\alpha(e^{kx}) &= \frac{e^{kx}}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{k^\alpha}\int_0^\infty \omega^{\alpha-1}e^{-\omega}d\omega \\ &= \frac{e^{kx}}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{k^\alpha}\Gamma(\alpha) \\ &= \frac{e^{kx}}{k^\alpha}, \end{aligned}$$

que é o mesmo resultado do cálculo de ordem inteira.

Também podemos estender esse resultado para a derivada fracionária, então resumindo:

$$\begin{aligned} {}_{-\infty}\mathrm{I}_x^\alpha(e^{kx}) &= \frac{e^{kx}}{k^\alpha} \\ {}_{-\infty}\mathrm{D}_x^\alpha(e^{kx}) &= k^\alpha e^{kx}. \end{aligned}$$

A escolha de $a = -\infty$, funcionou bem para a função, $f(x) = e^{kx}$, com $k \in \mathbb{R}_+$. Vamos verificar o que acontece utilizando $\alpha = \dfrac{1}{2}$ e $k = -1$,

$${}_{-\infty}\mathrm{I}_x^{\frac{1}{2}}(e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{k^{\frac{1}{2}}} = -ie^{-x}, \in \mathbb{C}.$$

Esse resultado pode ser um problema, dependendo do contexto, pois utilizando $k \in \mathbb{R}$ talvez fosse mais interessante obter um resultado real. Vamos nos aprofundar um pouco aqui e procurar um outro valor para o ponto inicial a. Lembrando que a função $f(x) = e^{kx}$ é limitada à esquerda pelo zero, e $a = -\infty$ funcionou. Como $f(x) = e^{-x}$, é limitada à direita pelo zero, vamos utilizar $a = \infty$ e ver o que acontece.

Então

$${}_{\infty}\mathrm{I}_x^\alpha(e^{-x}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\infty^x (x-t)^{\alpha-1}e^{-t}dt,$$

substituindo $u = x - t$, temos $t = x - u$ e $du = -dt$. Nos limites de integração teremos para $t = \infty$, $u = -\infty$ e quando $t = x$, $u = 0$, logo

$$\begin{aligned} {}_{\infty}\mathrm{I}_x^\alpha(e^{-x}) &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^0 (u)^{\alpha-1}e^{u-x}du \\ &= (-e^{-x})\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^0 (u)^{\alpha-1}e^{u}du. \end{aligned}$$

Alterando o domínio e reescrevendo, obtemos:

$$\begin{aligned} {}_{\infty}\mathrm{I}_x^\alpha(e^{-x}) &= (-e^{-x})\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty (-1)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}e^{-t}dt \\ &= (-e^{-x})(-1^{\alpha-1})\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt \\ &= (-e^{-x})(-1^{\alpha-1})\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha) \\ &= (-e^{-x})(-1^{\alpha-1}). \end{aligned}$$

Calculando para $\alpha = 1$,

$$_{\infty}\mathrm{I}_x^1(e^{-x}) = (-e^{-x})(-1^{1-1}) = (-e^{-x}).$$

Calculando para $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$_{\infty}\mathrm{I}_x^{\frac{1}{2}}(e^{-x}) = (-e^{-x})(-1^{\frac{1}{2}-1}) = (-e^{-x})(-1^{-\frac{1}{2}}) = ie^{-x}.$$

Ao utilizarmos a Integral segundo Riemann-Liouville, a escolha dos valores dos limites inferiores fornece resultados diferentes. Até aqui vimos que ponto inicial zero funciona bem com polinômios e $\pm\infty$ com funções seno, cosseno e exponenciais.

Observe que se $f(x)$ é limitada em $(-\infty, x]$, uma boa escolha será $a = -\infty$, no caso de ser limitada em $[x, \infty)$, seria $a = \infty$.

Já os polinômios, que não são limitados à esquerda ou à direita, utilizamos $a = 0$. Note a importância da escolha do limite inferior de integração fracionária, de acordo com a função a ser integrada.

Vamos apresentar uma situação na qual a escolha do limite inferior será um problema. Observe a seguinte equação

$$D^{\frac{1}{2}}(u) = e^x + x^2.$$

Vamos supor ainda que seja,

$$^{\mathrm{GL}}_{\infty}\mathrm{D}_x^{\frac{1}{2}}(u) = e^x + x^2,$$

na qual $^{\mathrm{GL}}_{\infty}\mathrm{D}_x^{\frac{1}{2}}$ representa a derivada fracionária de Grünwald-Letnikov.
Para a resolução temos

$$^{\mathrm{RL}}_{\infty}\mathrm{I}_x^{\frac{1}{2}}(^{\mathrm{GL}}_{\infty}\mathrm{D}_x^{\frac{1}{2}}(u)) = {}_{\infty}\mathrm{I}_x^{\frac{1}{2}}(e^x + x^2) = {}_{\infty}\mathrm{I}_x^{\frac{1}{2}}e^x + {}_{\infty}\mathrm{I}_x^{\frac{1}{2}}x^2.$$

Veja que o ponto inicial $a = \infty$, funcionaria bem para a exponencial mas não para o monômio. Caso $a = 0$, funcionaria para o monômio, mas não para a exponencial. Assim, os limites de integração devem ser escolhidos levando-se em consideração a função e o contexto que ela está inserida.

Para finalizarmos este capítulo, iremos apresentar uma definição mais completa para a integral estudada.

Definição 2.9. (Integral Fracionária de Riemann-Liouville) Sejam $f(x)$ uma função contínua e $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Definimos o operador integral de Riemann-Liouville de ordem α, no intervalo $[a, b]$, denotado por $_a\mathrm{I}_x^{\alpha}f(x) \equiv (\mathrm{I}_{a+}^{\alpha}f)(x)$ e $_x\mathrm{I}_b^{\alpha}f(x) \equiv (\mathrm{I}_{b-}^{\alpha}f)(x)$ atuando em $f(x)$, através das expressões:

$$(\mathrm{I}_{a+}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt,\ x > a \tag{2.10}$$

e

$$(\mathrm{I}_{b-}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1}f(t)dt,\ x < b. \tag{2.11}$$

Chamadas Integrais Fracionárias de Riemann-Liouville à esquerda e a direita respectivamente.

Se $a = 0$, na equação (2.10) , temos

$$(\mathrm{I}_{0+}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt,\ x > 0. \tag{2.12}$$

Se $b = 0$, na equação (2.11) , temos

$$(\mathrm{I}^{\alpha}_{0-}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{0}(t-x)^{\alpha-1}f(t)dt, \ x < 0. \tag{2.13}$$

Define-se também o operador integral fracionária ${}_{a}\mathrm{I}^{\alpha}_{x}f(t)$ para $\alpha = 0$ como sendo

$$I^{0}f(x) = \mathbb{I}f(x) = f(x), \tag{2.14}$$

na qual $\mathbb{I}$ é o operador identidade.

Sempre que denotarmos $I^{\alpha}f(x)$, estaremos utilizando o operador de integração de Riemann-Liouville à esquerda com limite inferior de integração $a = 0$.

3 Derivada Fracionária de Riemann-Liouville e Caputo

Este capítulo tem como objetivo introduzir as derivadas fracionárias segundo Riemann-Liouville e Caputo, realizar alguns exemplos e apontar algumas diferenças e semelhanças entre elas. Utilizamos as referências, [6], [7], [15], [18] e [20].

3.1 Derivada de Riemann-Liouville

Primeiramente iremos apresentar algumas definições que serão utilizadas em todo o texto.

Definição 3.1. Se f é uma função que possui derivada até a ordem n e $f^{(n)} \in C(I)$, onde I é um intervalo, então dizemos que f é de classe C^n em I, e escrevemos $f \in C^n(I)$.

Definição 3.2. Uma função $f\colon I \to \mathbb{R}$ definida em um intervalo aberto I, chama-se analítica quando é de classe C^∞ e para todo $x_0 \in I$, existe $r > 0$ tal que $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ implica que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{3.1}$$

Antes de definirmos as derivadas fracionária segundo Riemann-Liouville e Caputo, vamos apresentar as primeiras definições sugeridas por esses pesquisadores.

Liouville foi o autor do primeiro grande estudo sobre o Cálculo Fracionário, em 1832. A seguinte relação, amplamente conhecida para derivadas de ordem inteira, foi seu ponto de partida:

$$D^n e^{ax} = a^n e^{ax}.$$

Na qual D^n indica a derivada de ordem inteira n, em relação à variável independente x. Ele estendeu a ordem n, para um α arbitrário, obtendo:

$$D^\alpha e^{ax} = a^\alpha e^{ax}.$$

Ainda notou que, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x},\ Re(a_n) > 0, \tag{3.2}$$

então

$$D^\alpha f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\alpha e^{a_n x}. \tag{3.3}$$

Conhecida como a primeira fórmula de Liouville para a derivada fracionária de ordem arbitrária α, mas restritiva as funções exponenciais da forma descrita em (3.2). Com isso ele seguiu seus estudos e desenvolveu a segunda definição, partindo da integral:

$$I = \int_0^\infty u^{a-1}e^{-xu}du,\; a > 0 \, e \, x > 0. \tag{3.4}$$

Fazendo uma mudança de variável $xu = t$, $du = \dfrac{dt}{x}$ em (3.4) obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty u^{a-1}e^{-xu}du &= \int_0^\infty \left(\frac{t}{x}\right)^{a-1} e^{-t}\frac{1}{x}dt \\
&= \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{x^a x^{-1}}e^{-t}\frac{1}{x}dt \\
&= x^{-a}\int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt, \qquad Re(a) > 0.
\end{aligned}$$

Note que, a integral anterior pode ser escrita utilizando a função Gama,

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt.$$

Assim, podemos reescrever (3.4), obtendo:

$$\int_0^\infty u^{a-1}e^{-xu}du = x^{-a}\Gamma(a).$$

Logo, temos que

$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty u^{a-1}e^{-xu}du. \tag{3.5}$$

Admitindo que $\dfrac{d^\alpha}{dx^\alpha}(e^{-xu}) = (-u)^\alpha e^{-xu}, \alpha > 0$, e aplicando o operador D^α em ambos os lados de (3.5), obtemos:

$$\begin{aligned}
D^\alpha x^{-a} &= \frac{d^\alpha x^{-a}}{dx^\alpha} \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty u^{a-1}(-u)^\alpha e^{-xu}du \\
&= \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(a)}\int_0^\infty u^{a+\alpha-1}e^{-xu}du.
\end{aligned}$$

Realizando novamente a troca de variáveis, $xu = t$ e $du = \dfrac{dt}{x}$, temos:

$$\begin{aligned}
D^\alpha x^{-a} &= \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(a)}\int_0^\infty \left(\frac{t}{x}\right)^{a+\alpha-1} e^{-t}\frac{1}{x}dt \\
&= \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(a)}\int_0^\infty \frac{t^{a+\alpha-1}}{x^{a+\alpha-1}}e^{-t}\frac{1}{x}dt \\
&= \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(a)}\int_0^\infty t^{a+\alpha-1}e^{-t}dt x^{-(a+\alpha)}.
\end{aligned}$$

Observe que a integral pode ser substituída pela função Gama, logo

$$D^\alpha x^{-a} = \frac{(-1)^\alpha\Gamma(a+\alpha)}{\Gamma(a)}x^{-(a+\alpha)},\; com\; a > 0,$$

conhecida como segunda derivada fracionária de Liouville e está restrita às funções do tipo x^{-a} (com $a > 0$).

Por outro lado, Riemann, em 1847, durante a sua graduação, contribuiu para o desenvolvimento do Cálculo Fracionário. Em um artigo, apresentou uma definição para a derivada fracionária, utilizando para isso a generalização da série de Taylor. Obteve assim, uma fórmula para a integral fracionária, na qual a, é uma constante e $x > 0$ são os limites de integração, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ é a ordem da integral e $\psi(x)$ uma função auxiliar:

$$ {}_a\mathrm{D}_x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt + \psi(x). $$

Essa teoria foi publicada postumamente no ano de 1876, em seu *Gesammelte Werke*, uma coleção de todas as suas obras completas, [15]. Note que, exceto pela função $\psi(x)$, essa é a representação atual da integral segundo Riemann-Liouville apresentada no capítulo 1, em (1.9). A introdução dessa função complementar teve como objetivo minimizar a ambiguidade advinda do limite inferior a, como uma forma de quantificar o desvio desta definição da lei dos Expoentes que estabelece que, para um dado limite inferior de integração a seguinte relação

$$ {}_a\mathrm{D}_x^{-\alpha}\, {}_a\mathrm{D}_x^{-\beta} f(x) = {}_a\mathrm{D}_x^{-\alpha-\beta} f(x). \tag{3.6} $$

A presença dessa função auxiliar em detrimento de um maior estudo de a acabou tornando muito complexa e ineficiente a sua definição.

Nikolay Yakovlevish Sonin (1849-1915), escreveu em 1869, o primeiro trabalho contendo o que conhecemos hoje como **a formulação da derivada fracionária segundo Riemann-Liouville**. Estrutura-se no fato de que a integração e a derivação são operações inversas e também na Lei dos Expoentes. Vamos mostrar que a diferenciação fracionária é uma operação inversa à esquerda para a integração fracionária, iniciando pelo caso inteiro, temos:

Proposição 3.3. *Considere o operador $I^n, n \in \mathbb{N}$, definido em (1.8) e seja um operador $D^n, n \in \mathbb{N}$, como sendo a n-ésima derivada de uma função, e $\mathbb{I}$ o operador identidade, então:*

$$ D^n I^n(f(t)) = \mathbb{I} f(t) = f(t). \tag{3.7} $$

Podemos mostrar que a proposição é verdadeira, com o auxílio do seguinte teorema:

Teorema 3.4 (Teorema de Leibniz para a Diferenciação de uma Integral)**.** *Seja $f(t,\tau)$, uma função de duas variáveis, diferenciável em t, e sejam g(t) e h(t) funções diferenciáveis. Então,*

$$ \frac{d}{dt} \int_{g(t)}^{h(t)} f(t,\tau)d\tau = \int_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial f(t,\tau)}{\partial t} d\tau + \frac{dh(t)}{dt} f(t,h(t)) - \frac{dg(t)}{dt} f(t,g(t)). \tag{3.8} $$

Demonstração. Podemos identificar a integral $\int_{h(t)}^{g(t)} f(t,\tau)d\tau$ como sendo uma função de três variáveis, ou seja:

$$ J(t,h,g) = \int_g^h f(t,\tau)d\tau, $$

na qual h e g dependem somente de t. Sabemos, do Teorema Fundamental do Cálculo, que

$$ \frac{d}{dt} \int_a^t g(\tau)d\tau = g(t), $$

também que
$$\frac{d}{dt}\int_t^b g(\tau)d\tau = -\frac{d}{dt}\int_b^t g(\tau)d\tau = -g(t).$$
Calculando a derivada total da função $J(t,h,g)$ em relação a t, através da regra da cadeia, obtemos:
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J(t,h,g) &= \frac{\partial J}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial J}{\partial h}\frac{dh}{dt} + \frac{\partial J}{\partial g}\frac{dg}{dt} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t}\int_g^h f(t,\tau)\right)\frac{dt}{dt} + \left(\frac{\partial}{\partial h}\int_g^h f(t,\tau)\right)\frac{d}{dt}h(t) + \left(\frac{\partial}{\partial g}\int_g^h f(t,\tau)\right)\frac{d}{dt}g(t) \\
&= \int_{h(t)}^{g(t)} \frac{\partial f(t,\tau)}{\partial t}d\tau + \frac{dh(t)}{dt}f(t,h(t)) - \frac{dg(t)}{dt}f(t,g(t)),
\end{aligned}$$

□

que é justamente o resultado que desejávamos.

Derivando n vezes a integral (1.8) e utilizando (3.8):
$$\begin{aligned}
D^nI^n(f(t)) &= \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau\right] \\
&= \dots \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t \frac{d^n}{dt^n}(t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{(n-1)!^{n-1}}\int_0^t \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t-\tau)^{n-2}f(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Após $n-1$ derivadas
$$D^nI^n(f(t)) = \frac{(n-1)!}{(n-1)!}\int_0^t \frac{d}{dt}f(\tau)d\tau,$$
ou seja,
$$D^nI^n(f(t)) = f(t).$$
Em [9] pode ser visto que
$$I^nD^n(f(t)) \neq \mathbb{I}.$$

Sendo, a equação (3.7) verdadeira, podemos definir a derivada fracionária de ordem $\alpha \in \mathbb{R}$ como sendo:
$$D^\alpha(f(t)) = D^mI^{m-\alpha}f(t). \tag{3.9}$$

Já vimos que $\Gamma(-\alpha)$ diverge, para maiores esclarecimentos vide apêndice A. Uma solução então é escolher $m \in \mathbb{N}$, tal que $m-1 < \alpha < m$.

Vamos mostrar que (3.7) é válida para as derivadas fracionárias, ou seja que
$$D^\alpha I^\alpha(f(t)) = f(t). \tag{3.10}$$
Note que
$$\begin{aligned}
D^\alpha I^\alpha(f(t)) &= (D^mI^{m-\alpha})I^\alpha f(t) \\
&= D^mI^mI^{\alpha-\alpha}f(t) \\
&= D^mI^mI^0f(t) \\
&= \mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}f(t) \\
&= f(t).
\end{aligned}$$

A derivada fracionária segundo Riemann-Liouville é a derivada de ordem inteira da integral fracionária. Sendo essa integral, a qual estudamos no capítulo anterior, conhecida como a integral fracionária segundo Riemann-Liouville,(1.10) .

Definição 3.5. (Derivada de Riemann-Liouville) Sejam $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, x]$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ e $m-1 < \alpha < m$. A derivada fracionária, de ordem α, segundo Riemann-Liouville de $f(x)$, para $x > 0$ é dada por

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{RL}}_{0}\mathrm{D}^{\alpha}_{x} f(x) &= \frac{d^m}{dt^m}\left[{}^{\mathrm{RL}}_{0}\mathrm{I}^{m-\alpha}_{x} f(x)\right] \\ &= \frac{d^m}{dt^m}\left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f(t)dt\right], com\ D^0 = \mathbb{I}. \end{aligned}$$

Pelo fato das derivadas fracionárias serem operadores diferenciais temos também a seguinte definição:

Definição 3.6. Seja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Fixados $a, \alpha \in \mathbb{R}$, com $\alpha \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$ e $m-1 < \alpha < m$. Define-se os operadores diferenciais fracionários de Riemann-Liouville em um intervalo finito do eixo real, representado por ${}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}_{a+} f(x)$ e ${}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}_{a-} f(x)$, à esquerda e à direita, por

$$ {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}_{a+} f(x) = D^m\left[{}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{m-\alpha}_{a+} f(x)\right] = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} D^m \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f(t)dt;\ \ x > a \tag{3.11}$$

e

$$ {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}_{a-} f(x) = (-D)^m\left[{}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{m-\alpha}_{a-} f(x)\right] = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} (-D)^m \int_x^a (t-x)^{m-\alpha-1} f(t)dt;\ \ x < a,$$

na qual $D^m = \dfrac{d^m}{dx^m}$ é a m-enésima derivada inteira, desde que essas derivadas existam.

Iremos mostrar através da proposição abaixo, o critério de existência da derivada fracionária segundo Riemann-Liouville para $0 < \alpha < 1$, outros critérios de existência para essas derivadas podem ser encontradas nas páginas 39 e 40 de [17].

Proposição 3.7. *Sejam $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 e $0 < \alpha < 1$. Então as derivadas de Riemann-Liouville existem $\forall a \in \mathbb{R}$ e temos as seguintes igualdades*

$$ {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}_{a+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{Df(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt\right],\ \forall x > a \tag{3.12}$$

e

$$ {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}_{a-} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(a-x)^{\alpha}} - \int_x^a \frac{Df(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt\right],\ \forall\ x < a. \tag{3.13}$$

Demonstração. Seja

$$\omega(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{Df(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt\right],$$

então temos que

$$\begin{aligned}\int_a^x \omega(u)du &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\int_a^x \frac{f(a)}{(u-a)^\alpha du} + \int_a^x\int_a^u \frac{Df(t)}{(u-t)^\alpha}dt\,du\right]\\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)(x-a)^{(1-\alpha)}}{1-\alpha} + \int_a^x\int_a^u \frac{Df(t)}{(u-t)^\alpha}dt\,du\right].\end{aligned}$$

Iremos agora trocar a ordem dos limites de integração, note que $a \leq u \leq x$ e $a \leq t \leq u$, logo podemos escrever $a \leq t \leq x$ e $t \leq u \leq x$.

Assim,

$$\begin{aligned}\int_a^x \omega(u)du &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)(x-a)^{(1-\alpha)}}{1-\alpha} + \int_a^x\int_t^x \frac{Df(t)}{(u-t)^\alpha}du\,dt\right]\\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)(x-a)^{(1-\alpha)}}{1-\alpha} + \int_a^x \frac{Df(t)(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}dt\right].\end{aligned}$$

Realizando uma integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\int_a^x \omega(u)du &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)(x-a)^{(1-\alpha)}}{1-\alpha} + \left.\frac{f(t)(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\right|_{t=a}^{t=x}\right]\\ &+ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{1}{1-\alpha}\int_a^x f(t)(1-\alpha)(x-t)^{-\alpha}dt\right]\\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt.\end{aligned}$$

Como $\omega(x)$ é contínua em (a,∞) e f é de classe C^1, pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \omega(u)du = \omega(x).$$

Então,

$$\begin{aligned}{}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^\alpha_{a+}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt\\ &= \frac{d}{dx}\int_a^x \omega(u)du\\ &= \omega(x).\end{aligned}$$

Portanto, a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville com $0 < \alpha < 1$ existe e é dada por (3.12), note que a demonstração de (3.13) é análoga. □

Introduziremos alguns exemplos do cálculo dessa derivada. Para facilitar o entendimento, vamos recordar que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo se integrarmos uma função $f(x)$ de x_0 até x e depois a derivamos em x, o resultado será a $f(x)$. Caso o número de integrais seja maior do que das derivadas, obtemos a integral, cujo o número de derivadas seja maior, o resultado será a derivada, ou seja, para obter a derivada de ordem $\frac{1}{3}$, basta você integrar $\frac{2}{3}$ e derivar uma vez,

$$\begin{aligned}{}^{\mathrm{RL}}_{\;\;0}\mathrm{D}^{\frac{1}{3}}_x f(x) &= \frac{d^1}{dt^1}\left[\frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{3})}\int_0^x (x-t)^{1-\frac{1}{3}-1}f(t)dt\right]\\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})}\frac{d}{dt}\left[\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{3}}f(t)dt\right].\end{aligned}$$

Da mesma forma como fizemos anteriormente, vamos procurar uma fórmula para a derivada fracionária da Função Potência, utilizando agora a definição da derivada fracionária de Riemann-Liouville e o resultado obtido em (2.5).

Exemplo 3.8. Derivada de ordem α da função $f(x) = x^{\mu}$, com $\mu > -1$ e $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} {}_{0}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_{x}^{\alpha} x^{\mu} &= \frac{d^m}{dt^m}\left[I^{(m-\alpha)}x^{\mu}\right] \\ &= \frac{d^m}{dt^m}\left[\frac{\Gamma(\mu+1)x^{\mu+(m-\alpha)}}{\Gamma((m-\alpha)+\mu+1)}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(m-\alpha+\mu+1)}\frac{d^m}{dt^m}x^{\mu+m-\alpha}. \end{aligned}$$

Após m derivadas, temos:

$${}_{0}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_{x}^{\alpha} x^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(m-\alpha+\mu+1)} x^{\mu-\alpha}\{[m+\mu-\alpha][(m-1)+\mu-\alpha]. \quad \ldots \quad .[(m-(m-1))+\mu-\alpha]\}.$$

Note que:

$$\Gamma(m-\alpha+\mu+1) = [m+\mu-\alpha][(m-1)+\mu-\alpha]. \quad \ldots \quad .[\mu-\alpha+1]\Gamma(\mu-\alpha+1),$$

portanto,

$${}_{0}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_{x}^{\alpha} x^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} x^{\mu-\alpha}, \tag{3.14}$$

o mesmo resultado encontrado anteriormente.

Agora vamos calcular a derivada fracionária da função constante.

Exemplo 3.9. Derivada de ordem meio, segundo Riemann-Liouville, de $f(x) = x^0$ é dada por:

$${}_{0}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_{x}^{\alpha} x^{0} = \frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0-\alpha+1)} t^{0-\alpha} = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Diferentemente do Cálculo de ordem inteira, a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de uma constante não é zero.

Agora vamos calcular as derivadas de ordem: $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ e 2, da função $f(x) = x^2$.

Exemplo 3.10.

$$D^{\frac{1}{2}}x^2 = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-\frac{1}{2}+1)}x^{2-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{5}{2})}x^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{\pi}}.$$

Exemplo 3.11.

$$D^{1}x^2 = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-1+1))}x^{2-1} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)}x^{1} = 2x.$$

Notamos que ela recupera o caso inteiro. Para ilustrarmos veja a Figura 3.1.

Mais alguns exemplos:

Exemplo 3.12.

$$D^{\frac{3}{2}}x^2 = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-\frac{3}{2}+1)}x^{2-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{3}{2})}x^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{\pi}}.$$

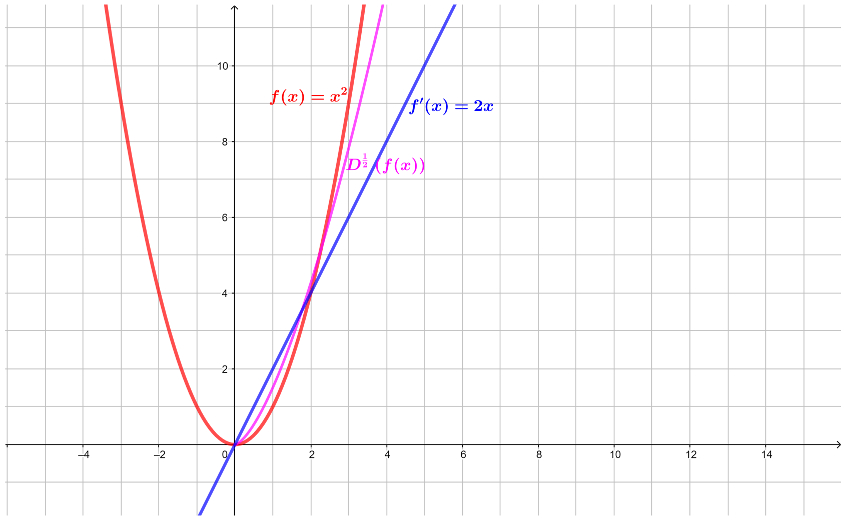

Figura 3.1: Gráfico das funções: $f(x)$, $f'(x)$ e $D^{\frac{1}{2}}f(x)$.

Exemplo 3.13.

$$D^2x^2 = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-2+1))}x^{2-2} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(1)}x^0 = 2.$$

Agora vamos abordar um assunto estudado no ensino médio, segundo a referência [4], a função da posição de um móvel em relação ao tempo. A partir dela, é possível calcular a velocidade e a aceleração em diferentes momentos.

Dizemos que a posição $s(t)$ de um móvel em um instante t é dada por

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2, \tag{3.15}$$

onde s_0 é a posição inicial, v_0 a velocidade inicial e a a aceleração, que é uma constante.

Já a velocidade $v(t)$ de um móvel no instante t é dada pela função

$$v(t) = v_0 + at, \tag{3.16}$$

na qual v_0 é a velocidade inicial.

No cálculo de ordem inteira, a derivada representa uma variação. Assim, como a velocidade é a variação do espaço em relação ao tempo se derivarmos a função horária da posição, (3.15) obtemos a função horária da velocidade,

$$s'(t) = v_0 + at = v(t). \tag{3.17}$$

Da mesma forma, como a aceleração é a variação da velocidade em relação ao tempo, derivando a função horária da velocidade, (3.16), obtemos a aceleração, isto é,

$$v'(t) = a.$$

Logo,

$$s''(t) = v'(t) = a,$$

uma constante do movimento acelerado.

Iremos agora, derivar a função horária do espaço utilizando a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville, equação (3.11).

Exemplo 3.14. A derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem α, com $0 < \alpha \leq 1$,no intervalo $[0,t]$, da função $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ é dada por:

$$\begin{aligned}
{}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}_{0+}s(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{s_0 + v_0 x + \frac{ax^2}{2}}{(t-x)^{\alpha-1+1}}dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\left[\int_0^t \frac{s_0}{(t-x)^{\alpha}}dx + \int_0^t \frac{v_0 x}{(t-x)^{\alpha}}dx + \int_0^t \frac{\frac{ax^2}{2}}{(t-x)^{\alpha}}dx\right].
\end{aligned}$$

Faremos os cálculos das integrais separadamente. Para a primeira integral, temos

$$\int_0^t \frac{s_0}{(t-x)^{\alpha}}dx = \left[-\frac{s_0(t-x)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\right]_0^t = \frac{s_0 t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}.$$

Note que para $x = t$ a primitiva se anula, restando apenas o resultado do cálculo para $x = 0$.

Para a segunda integral temos

$$\int_0^t \frac{v_0 x}{(t-x)^{\alpha}}dx = v_0\left[-\frac{x(t-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(t-x)^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\right]_0^t = \frac{v_0 t^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}.$$

Novamente os termos calculados em $x = t$ se anulam, restando apenas a primitiva calculada em $x = 0$.

A terceira integral foi resolvida por partes

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{\frac{ax^2}{2}}{(t-x)^{\alpha}}dx &= \frac{a}{2}\left[-\frac{x^2(t-x)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - \frac{2x(t-x)^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} - \frac{2(t-x)^{3-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)}\right]_0^t \\
&= \frac{2at^{3-\alpha}}{2(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)} = \frac{at^{3-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)}.
\end{aligned}$$

Os termos se anulam para $x = t$ e as duas primeira parcelas também se anulam para $x = 0$.

Agora, voltando a equação inicial e substituindo os resultados obtidos acima, temos

$$\begin{aligned}
{}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}_{0+}s(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\left[\frac{s_0 t^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{v_0 t^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + \frac{at^{3-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)}\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[s_0 t^{-\alpha} + \frac{v_0 t^{-\alpha}}{(1-\alpha)} + \frac{at^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\right] \\
&= \frac{s_0 t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{v_0 t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{at^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}.
\end{aligned}$$

Como a derivada fracionária de Riemann-Liouville é linear, também é possível utilizar as propriedades. Lembremos que a derivada de Riemann-Liouville de constante não é zero.
Para $\alpha = 0$, temos

$${}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{0}_{0+}s(t) = \frac{s_0 t^{-0}}{\Gamma(1-0)} + \frac{v_0 t^{1-0}}{\Gamma(2-0)} + \frac{at^{2-0}}{\Gamma(3-0)} = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = s(t),$$

assim, recupera o caso inteiro.
Para $\alpha = 1$ temos

$${}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{1}_{0+}s(t) = \frac{s_0 t^{-1}}{\Gamma(1-1)} + \frac{v_0 t^{1-1}}{\Gamma(2-1)} + \frac{at^{2-1}}{\Gamma(3-1)} = \frac{s_0 t^{-1}}{\Gamma(0)} + \frac{v_0 t^{1-1}}{\Gamma(1)} + \frac{at^{2-1}}{\Gamma(2)},$$

veja que o termo $\dfrac{s_0 t^{-1}}{\Gamma(0)}$ tende a zero, quando $t \to \infty$.
Então,
$$ {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{1}_{0+} s(t) = v_0 + at = v(t). $$
Assim notamos que ela recupera o caso inteiro, obtendo a equação horária da velocidade. Vamos calcular a integral de Riemann-Liouville da função constante $f(t) = a$.

Exemplo 3.15. A integral de Riemann-Liouville de ordem α, com $0 \leq \alpha \leq 1$, da função $f(t) = a$, no intervalo $[0, t]$, é dada por

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{(\alpha)}_{0+} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{a}{(t-x)^{1-\alpha}} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{-a(t-x)^{\alpha}}{\alpha} \right]_0^t = \frac{at^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned}
$$

Para $\alpha = 1$
$$ {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{(1)}_{0+} f(t) = \frac{at^1}{\Gamma(1+1)} = at. $$
Vemos que a integral recupera o caso inteiro, a menos da constante v_0, ou seja, $v(t) = at$.

Exemplo 3.16. A integral de Riemann-Liouville de ordem α, com $0 \leq \alpha \leq 1$, da função $v(t) = v_0 + at$, no intervalo $[0, t]$, é dada por

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{(\alpha)}_{0+} v(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{v_0 + ax}{(t-x)^{1-\alpha}} dx \\
&= \frac{v_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx + \frac{a}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t x(t-x)^{\alpha-1} dx.
\end{aligned}
$$

Calculando a primeira integral
$$ \frac{v_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx = \frac{v_0}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{(t-x)^{\alpha}}{\alpha} \right]_0^t = \frac{v_0 t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}. $$
Calculando a segunda integral pelo método da substituição
$$
\begin{aligned}
\frac{a}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t x(t-x)^{\alpha-1} dx &= \frac{a}{\Gamma(\alpha)} \left[\left. \frac{x(t-x)^{\alpha}}{\alpha} \right|_0^t - \int_0^t \frac{(t-x)^{\alpha}}{\alpha} dx \right] \\
&= \frac{a}{\Gamma(\alpha)} \left[0 - \left. \frac{(t-x)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} \right|_0^t \right] = \frac{at^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}.
\end{aligned}
$$
Substituindo os resultados obtidos,
$$ {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{(\alpha)}_{0+} v(t) = \frac{v_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx + \frac{a}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t x(t-x)^{\alpha-1} dx = \frac{v_0 t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{at^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2).} $$
Para $\alpha = 1$
$$ {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{(1)}_{0+} v(t) = \frac{v_0 t^1}{\Gamma(1+1)} + \frac{at^{1+1}}{\Gamma(1+2)} = \frac{v_0 t}{\Gamma(2)} + \frac{at^2}{\Gamma(3)} = v_0 t + \frac{at^2}{2}. $$
ou seja, recupera o caso inteiro, a função horária do espaço, a menos da constante s_0, $s(t) = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$.

Na subseção 3.3, voltaremos a estudar a derivada e a integral de Riemann-Liouvile, a seguir introduziremos a derivada fracionária segundo Caputo.

3.2 Derivada de Caputo

Em 1969, M. Caputo desenvolveu uma definição para a derivada fracionária com o objetivo de resolver problemas relacionados à viscoelasticidade. Nela é calculada a integral fracionária segundo Riemann-Liouville da derivada de ordem inteira. Com essa inversão, convém observar que as derivadas de Caputo são mais restritivas, pois exigem que a função tenha derivada de ordem inteira. Sempre que nos referirmos à ela, consideramos que essa a hipótese seja satisfeita.

Definição 3.17. Seja $\alpha \in R_+$, e tomando $m \in \mathbb{N}$, tal que $m-1 < \alpha < m$. A derivada de ordem α de Caputo de $f(x), x > 0$, denotada por $D^\alpha f(x)$ é definida por

$$D^\alpha f(x) = I^{m-\alpha}[D^m f(x)]. \tag{3.18}$$

(i) se $m-1 < \alpha < m$, então

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^m(t)dt.$$

(ii) se $\alpha = m$, então

$$D^\alpha f(x) = \frac{d^m f(x)}{dt^m}.$$

Vamos obter a derivada de ordem α da função constante. Seja $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$. Sabemos que $f^m(x) = 0$, pois as derivadas de ordem $m \in \mathbb{N}$ de uma função constante são nulas, assim

$$\begin{aligned} D^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^m(t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} 0\, dt = 0. \end{aligned}$$

Portanto, as derivadas de ordem arbitrárias de funções constantes, de acordo com a formulação de Caputo, são nulas.

Exemplo 3.18. Vamos calcular a derivada de ordem α de $f(x) = x^\mu$, com $x \neq 0$ e $\mu > -1$

$$\begin{aligned} D^\alpha(x^\mu) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} \frac{d^m(t^\mu)}{dt^m} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-m+1)} t^{\mu-m} dt \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\mu-m+1)} \int_0^x x^{m-\alpha-1} \left(1-\frac{t}{x}\right)^{m-\alpha-1} t^{\mu-m} dt. \end{aligned}$$

Fazendo uma troca de variáveis, $z = \dfrac{t}{x}$, temos $dt = xdz$. Então,

$$\begin{aligned} D^\alpha(t^\mu) &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\mu-m+1)} \int_0^1 x^{m-\alpha-1}(1-z)^{m-\alpha-1} x^{\mu-m} z^{\mu-m} x dz \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\mu-m+1)} x^{\mu-\alpha} \int_0^1 (1-z)^{m-\alpha-1} z^{\mu-m} dz. \end{aligned}$$

Note que podemos trocar a integral pela função Beta.

$$\beta(\mu-m+1,m-\alpha)=\frac{\Gamma(\mu-m+1)\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(\mu-m+1+m-\alpha)}=\frac{\Gamma(\mu-m+1)\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)}.$$

Então,

$$D^{\alpha}(t^{\mu})=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\mu-n+1)}\frac{\Gamma(\mu-m+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)}t^{\mu-\alpha},$$

logo

$$D^{\alpha}(t^{\mu})=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-n+1)}t^{\mu-\alpha}. \tag{3.19}$$

Observe que a derivada da função potência segundo Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville e Caputo coincidem.

Agora, voltaremos ao exemplo dado na seção anterior sobre a função horária do movimento, (3.15), utilizando a derivada de Caputo.

Exemplo 3.19. A derivada fracionária de Caputo de ordem α, com $0 \leq \alpha \leq 1$, no intervalo $[0,t]$, da função $s(t)=s_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$ é dada por

$$\begin{aligned}
{}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}_{0+}s(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{s'(x)}{(t-x)^{\alpha-1+1}}dx\\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{(s_0+v_0x+\frac{ax^2}{2})}{(t-x)^{\alpha}}dx\\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{(v_0+ax)}{(t-x)^{\alpha}}dx\\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\int_0^t \frac{v_0}{(t-x)^{\alpha}}dx+\int_0^t \frac{ax}{(t-x)^{\alpha}}dx\right].
\end{aligned}$$

Resolvendo a primeira integral, obtemos

$$\int_0^t \frac{v_0}{(t-x)^{\alpha}}dx=\left[-\frac{v_0(t-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^t=\frac{v_0t^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Resolvendo a segunda integral,

$$\int_0^t \frac{ax}{(t-x)^{\alpha}}dx=a\left[-\frac{x(t-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{(t-x)^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\right]_0^t=\frac{at^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}.$$

Assim, voltando à equação da derivada de Caputo e substituindo os resultados das integrais acima, obtemos

$${}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}_{0+}s(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{v_0t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}+\frac{at^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\right]=\frac{v_0t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{at^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}.$$

Para $\alpha=0$, temos

$${}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{0}_{0+}s(t)=\frac{v_0t^{1-0}}{\Gamma(2-0)}+\frac{at^{2-0}}{\Gamma(3-0)}=\frac{v_0t}{\Gamma(2)}+\frac{at^2}{\Gamma(3)}=v_0t+\frac{at^2}{2}.$$

Note que faltou o termo s_0 para que resultasse na função horária do espaço, pois a derivada de Caputo de constante é zero.
Para $\alpha = 1$,

$$^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{1}_{0+}s(t) = \frac{v_0 t^{1-1}}{\Gamma(2-1)} + \frac{at^{2-1}}{\Gamma(3-1)} = \frac{v_0}{\Gamma(1)} + \frac{at}{\Gamma(2)} = v_0 + at = v(t),$$

temos a função horária da velocidade, ou seja, recupera o caso inteiro. Note que os resultados obtidos com as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo coincidem.
Abaixo uma representação gráfica das derivadas, utilizamos $v_0 = -4$ e $a = 1$ na função horária da posição.

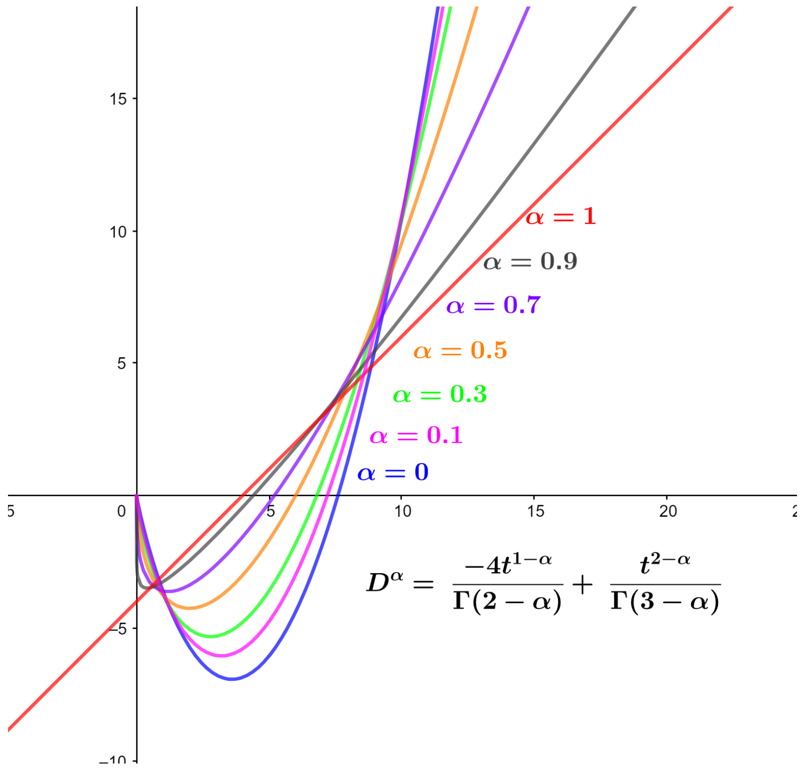

Figura 3.2: Derivadas fracionárias da função $s(t) = s_0 - 4t + \frac{t^2}{2}$.

No próximo exemplo utilizaremos, $1 \leq \alpha \leq 2$.

Exemplo 3.20. A derivada fracionária de Caputo de ordem α, com $1 \leq \alpha \leq 2$,no intervalo $[0, t]$, da função $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ é dada por

$$\begin{aligned} ^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}_{0+}s(t) &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{s''(x)}{(t-x)^{\alpha-2+1}} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{(v_0 + ax)'}{(t-x)^{\alpha-1}} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{a}{(t-x)^{\alpha-1}} dx. \end{aligned}$$

A integral acima pode ser calculada através de uma substituição de $x - t$. Veja que a primitiva calculada para $t = x$, se anula, logo temos

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{a}{(t-x)^{\alpha-1}} dx = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{at^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} = \frac{at^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}.$$

Portanto, a derivada de Caputo de ordem α, com $1 \leq \alpha \leq 2$ da função horária do espaço é dada por

$$^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}_{0+} s(t) = \frac{at^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}.$$

Para $\alpha = 1$ temos

$$^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{1}_{0+} s(t) = \frac{at^{2-1}}{\Gamma(3-1)} = \frac{at^{1}}{\Gamma(2)} = at.$$

Veja que falta a constante v_0, para ser a função horária da velocidade.
Para $\alpha = 2$

$$^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{2}_{0+} s(t) = \frac{at^{2-2}}{\Gamma(3-2)} = a,$$

temos a aceleração, uma função constante e recuperamos o caso inteiro. Veja a representação gráfica desses resultados.

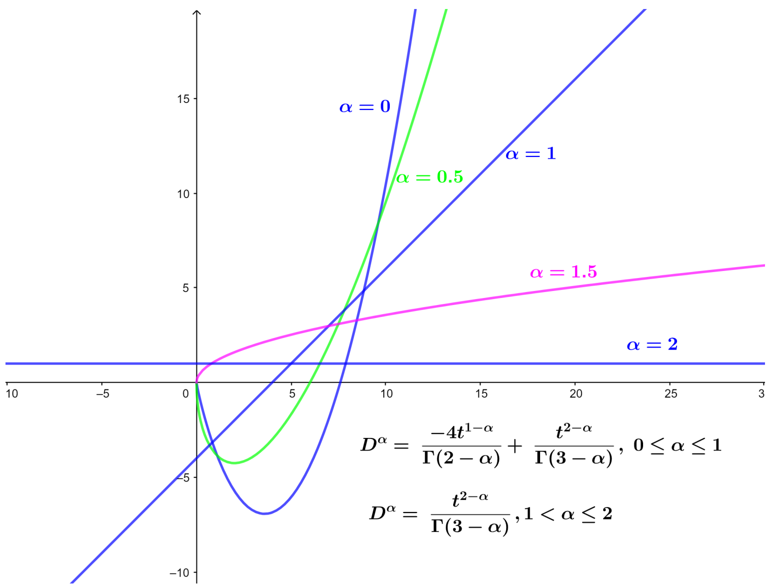

Figura 3.3: Derivadas fracionárias da função $s(t) = s_0 - 4t + \frac{t^2}{2}$.

3.3 Riemann-Liouville $\times$ Caputo

Esta seção é dedicada ao estudo de algumas características das derivadas de Riemann-Liouville e Caputo, mostrando suas semelhanças e diferenças. Primeiramente iremos abordar a definição da derivada fracionária de Caputo dada em termo da derivada fracionária de Riemann-Liouville.

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, tal que $m - 1 < \alpha \leq m$. Suponha $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e $m-1$ vezes derivável em a. A derivada fracionária de Caputo de ordem α denotada por ${}^{\mathrm{C}}_{a}\mathrm{D}^{\alpha}_{x} f(x)$ pode ser dada via derivada de Riemann-Liouville por

$$^{\mathrm{C}}_{a}\mathrm{D}^{\alpha}_{x} f(x) = {}^{\mathrm{RL}}_{a}\mathrm{D}^{\alpha}_{x} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!} (x-a)^k \right] \tag{3.20}$$

se as derivadas de Riemann-Liouville existirem, veja referência [20].

Abaixo apresentamos uma relação entre as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo, retirada de [21].

Proposição 3.21. *Se f(x) for uma função tal que as derivadas fracionárias de Caputo e Riemann-Liouville existam, então elas são conectadas pela seguinte relação:*

$$ {}_{a}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_{x}^{\alpha} f(x) = {}_{a}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_{x}^{\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}. \tag{3.21} $$

Demonstração. Para provar, utilizaremos a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville da função potência, (3.14), da função $f(x) = (x-a)^k$, com $k \in \mathbb{R}_+$.

$$ {}_{a}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_{x}^{\alpha} (x-a)^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}. \tag{3.22} $$

Tomando a seção (3.20) e pelo fato da derivada ser um operador linear podemos escrever

$$ {}_{a}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_{x}^{\alpha} f(x) = {}_{a}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_{x}^{\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!} {}_{a}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_{x}^{\alpha} [(x-a)^k]. $$

Utilizando o resultado da derivada fracionária de Riemann-Liouville da função, $g(x) = (x-a)^k$, (3.22) obtemos

$$ {}_{a}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_{x}^{\alpha} f(x) = {}_{a}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_{x}^{\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}. $$

Efetuando uma simplificação pois, $k! = \Gamma(k+1)$, concluímos a demonstração

$$ {}_{a}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_{x}^{\alpha} f(x) = {}_{a}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_{x}^{\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}. $$

□

Note que quando $f^{(k)}(a) = 0$, para $k = 0, 1, \ldots, m-1$, as duas formulações coincidem pois a segunda parcela no segundo membro é nula.

Iremos mostrar agora que existe uma espécie de Teorema Fundamental do Cálculo para as derivadas fracionárias segundo Riemann-Liouville.

Proposição 3.22. *Sejam $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, $a \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}_+$, com $0 < \alpha < 1$, então*

$$ {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}_{a+}^{\alpha}\, {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha} f(x) = f(x), \quad \forall x > a $$

e

$$ {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}_{a-}^{\alpha}\, {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_{a-}^{\alpha} f(x) = f(x), \quad \forall x < a. $$

Demonstração. Vamos provar o caso $x > a$, o outro é análogo. Utilizando as definições de integrais e derivadas fracionárias, respectivamente (2.10) e (3.11) temos

$$ {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}_{a+}^{\alpha}\, {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{d\tau} \int_a^\tau \frac{f(t)}{(\tau-t)^\alpha} dt \right) d\tau. \tag{3.23} $$

Observe que

$$(x-\tau)^{\alpha-1} = \frac{d}{dx}\frac{(x-\tau)^{\alpha}}{\alpha}, \tag{3.24}$$

logo, substituindo (3.24) em (3.23) obtemos

$$ {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{\alpha}_{a+}\,{}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{d(x-\tau)^{\alpha}}{dx}\frac{d}{d\tau}\int_a^{\tau}\frac{f(t)}{(\tau-t)^{\alpha}}dt\,d\tau.$$

Agora aplicando a Regra de Leibniz para integrais fracionárias

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{\alpha}_{a+}\,{}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}_{a+}f(x) &= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\left[\int_a^x (x-\tau)^{\alpha}\frac{d}{d\tau}\int_a^{\tau}\frac{f(t)}{(\tau-t)^{\alpha}}dt\,d\tau\right] \\ &- \left[(x-\tau)^{\alpha}\frac{d}{d\tau}\int_a^{\tau}\frac{f(t)}{(\tau-t)^{\alpha}}dt\,d\tau\right]^{\tau=x} \\ &= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\left[\int_a^x (x-\tau)^{\alpha}\frac{d}{d\tau}\int_a^{\tau}\frac{f(t)}{(\tau-t)^{\alpha}}dt\,d\tau\right]. \end{aligned}$$

Realizando a integração por partes

$$\begin{aligned} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha}\frac{d}{d\tau}\int_a^{\tau}\frac{f(t)}{(\tau-t)^{\alpha}}dt\,d\tau &= \left[(x-\tau)^{\alpha}\int_a^{\tau}\frac{f(t)}{(\tau-t)^{\alpha}}dt\right]_{\tau=a}^{\tau=x} \\ &- \int_a^x \frac{d}{d\tau}(x-\tau)^{\alpha}\int_a^{\tau}\frac{f(t)}{(\tau-t)^{\alpha}}dt\ d\tau \\ &= \alpha\int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1}\int_a^{\tau}\frac{f(t)}{(\tau-t)^{\alpha}}dt\ d\tau. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{\alpha}_{a+}\,{}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}_{a+}f(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^{\tau}\frac{f(t)}{(\tau-t)^{\alpha}}dt\right)d\tau\right] \\ &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1}\,{}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{1-\alpha}_{a+}f(\tau)d\tau\right] \\ &= \frac{d}{dx}\left[{}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{\alpha}_{a+}\left({}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{1-\alpha}_{a+}f(x)\right)\right]. \end{aligned}$$

Pela Lei dos Expoentes e pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{\alpha}_{a+}\,{}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}_{a+}f(x) &= \frac{d}{dx}\left[{}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{1-\alpha}_{a+}f(x)\right] \\ &= \frac{d}{dx}\int_a^x f(\tau)d\tau \\ &= f(x). \end{aligned}$$

□

Lembremos que no Capítulo 3 demonstramos que a Proposição (3.3), é válida para as derivadas fracionárias, equação (3.10)

$$D^{\alpha}I^{\alpha}(f(t)) = f(t),$$

assim, com a junção dessas proposições, temos uma espécie de Teorema Fundamental do Cálculo Fracionário para os operadores de Riemann-Liouville.

Iremos agora abordar a composição dos operadores, de integração e derivação, de ordem fracionária segundo Caputo. As duas proposições abaixo abordam os casos possíveis.

Proposição 3.23. *Sejam* $a \in \mathbb{R}$*,* $\alpha > 0, m \in \mathbb{N}$ *tal que* $m-1 < \alpha < m$*. Se* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua, então*

$$ {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}_{a+}\,{}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{\alpha}_{a+} f(x) = f(x). $$

Demonstração. A partir da definição da derivada fracionária de Caputo, via Riemann-Liouville, (3.21) com $x > a$ temos

$$ {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}_{a+}\,{}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{\alpha}_{a+} f(x) = {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}_{a+}\,{}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{\alpha}_{a+} f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} D^{k\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{\alpha}_{a+} f(a) \frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}. $$

Novamente por (3.10), sabemos que

$$ {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}_{a+}\,{}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{\alpha}_{a+} f(x) = f(x). $$

Também, para $0 \leq k \leq m-1$,

$$ D^{k\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{\alpha}_{a+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} D^k \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. $$

Aplicando a Regra de Leibniz para integrais fracionárias k vezes obtemos

$$ D^{k\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{\alpha}_{a+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x D^k_x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. $$

Então,

$$ \begin{aligned} D^{k\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{\alpha}_{a+} f(a) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^a D^k_x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \\ &= 0. \end{aligned} $$

Logo,

$$ {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}_{a+}\,{}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{\alpha}_{a+} f(x) = f(x). $$

□

Proposição 3.24. *Sejam* $a \in \mathbb{R}$*,* $\alpha > 0$*,* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $m-1 < \alpha < m$*. Se* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *for de classe* C^n*, então*

$$ {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{\alpha}_{a+}\,{}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}_{a+} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m=1} D^k f(a) \frac{(x-a)^k}{k!}. $$

Demonstração. Pela definição (3.17) e sendo $x > a$ temos

$$ {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{\alpha}_{a+}\,{}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}_{a+} f(x) = {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{\alpha}_{a+}\,{}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{\alpha-m}_{a+}{}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{m} f(x). $$

Aplicando a Lei dos Expoentes para as integrais, seção 2.1, obtemos

$$ \begin{aligned} {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{\alpha}_{a+}\,{}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}_{a+} f(x) &= {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}^{\alpha+m-\alpha}_{a+}{}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{m} f(x) \\ &= I^m D^m f(x) \\ &= \int_a^x \int_a^{x_1} \cdots \int_a^{x_{m-1}} D^m f(x_m) dx_m \ldots dx_1 \\ &= f(x) - \sum_{k=0}^{m=1} D^k f(a) \frac{(x-a)^k}{k!}. \end{aligned} $$

□

Para as derivadas fracionárias de Caputo à direita, ou seja, quando $x < a$ as demonstrações são análogas.

Assim, mostramos que diferentemente das derivadas fracionárias de Riemann-Liouville, a união das proposições acima não formam um Teorema Fundamental do Cálculo para os operadores de Caputo, pois aplicando a integral à esquerda da derivada não obtivemos $f(x)$.

3.3.1 Transformada de Laplace dos operadores fracionários

A definição e as propriedades da Transformada de Laplace utilizadas neste trabalho se encontram no Apêndice A. Para escrevermos esta seção utilizamos como referências [7], [11], [13], [20] e [21] .

Transformada de Laplace da integral de Riemann-Liouville

Vimos no Capítulo 2, equação (2.12), um caso particular da integral de Riemann-Liouville, quando $a = 0$ é dada por

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x)dx, \quad t > 0 \text{ e } \alpha > 0.$$

A partir da definição do produto de convolução, (A.18) e da definição da função de Gel'fand-Shilov, (A.12) podemos escrever

$$\Phi_\alpha(t) * f(t) = \int_0^t \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(x)dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x)dx. \tag{3.25}$$

Portanto,

$$I^\alpha f(t) = \Phi_\alpha(t) * f(t). \tag{3.26}$$

Teorema 3.25. *Sejam $f(t)$ definida para todo $t > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então a transformada de Laplace da integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem α da função $f(t)$ é dada por*

$$\mathcal{L}[I^\alpha f(t)] = \frac{\mathcal{L}[f(t)]}{s^\alpha}. \tag{3.27}$$

Demonstração. Sabemos que a integral fracionária pode ser escrita como um produto de convolução, (3.26).

$$I^\alpha f(t) = \Phi_\alpha(t) * f(t).$$

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os membros, e utilizando a relação (A.20), obtemos

$$\mathcal{L}[I^\alpha f(t)] = \mathcal{L}[\Phi_\alpha(t) * f(t)] = \mathcal{L}[\Phi_\alpha(t)]\mathcal{L}[f(t)] = s^{-\alpha}\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\mathcal{L}[f(t)]}{s^\alpha}. \tag{3.28}$$

□

Esse resultado será utilizado nas demonstrações abaixo.

Transformada de Laplace da derivada de Riemann-Liouville

Para calcularmos a transformada de Laplace da derivada fracionária segundo Riemann-Liouville utilizaremos o teorema abaixo.

Teorema 3.26. *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ com $m-1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$. A transformada de Laplace da derivada de Riemann-Liouville é dada por*

$$\mathcal{L}[{}_0^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_t^{\alpha} f(t)] = s^{\alpha}\mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} g^{(k)}(0), \tag{3.29}$$

onde $g(t) = I^{m-\alpha} f(t)$ e $g^k(0) = \lim_{t\to 0^+} D^k g(t)$.

Demonstração. Escrevendo a derivada fracionária de Riemann-Liouvile em termos da integral fracionária temos

$$\mathcal{L}[{}_0^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_t^{\alpha} f(t)] = \mathcal{L}[D^m I^{m-\alpha} f(t)].$$

Seja $g(t) = I^{m-\alpha} f(t)$, então $\mathcal{L}[{}_0^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_t^{\alpha} f(t)] = \mathcal{L}[D^m g(t)]$.Então, pela equação (A.19) temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[D^m g(t)] &= s^m \mathcal{L}[g(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} g^{(k)}(0) \\ &= s^m \mathcal{L}[I^{m-\alpha} f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} g^{(k)}(0). \end{aligned}$$

Sabemos pela equação (3.27), que $\mathcal{L}[I^{m-\alpha} f(t)] = \dfrac{\mathcal{L}[f(t)]}{s^{m-\alpha}}$, portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[{}_0^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_t^{\alpha} f(t)] &= s^m s^{\alpha-m} \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} g^{(k)}(0) \\ &= s^{\alpha} \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} g^{(k)}(0), \end{aligned}$$

na qual $g^k(0) = \lim_{t\to 0^+} I^{m-\alpha} f(0^+)$. □

Agora faremos um exemplo, [21].

Exemplo 3.27. Para $m = 1$ e $0 < \alpha \leq 1$ temos

$$\mathcal{L}[{}_0^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_t^{\alpha} f(t)] = s^{\alpha}\mathcal{L}[f(t)] - g(0),$$

onde

$$g(0) = \lim_{t\to 0^+} I^{1-\alpha} f(t) = \lim_{t\to 0^+} \left[{}_0^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_t^{\alpha-1} f(t)\right] \tag{3.30}$$

Logo, podemos perceber que a transformada de Laplace de derivada de Riemann-Liouville possui derivadas de ordens não inteiras.

3.3.2 Transformada de Laplace da derivada de Caputo

Para calcularmos a transformada de Laplace da derivada fracionária segundo Caputo utilizaremos o teorema abaixo.

Teorema 3.28. *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, com $m-1 < \alpha < m$ e $m \in \mathbb{N}$. A transformada de Laplace da derivada fracionária de Caputo é dada por*

$$\mathcal{L}[{}_0^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_t^{\alpha} f(t)] = s^{\alpha}\mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} f^{(k)}(0), \tag{3.31}$$

sendo $f^{(k)}(0) = \lim_{t\to 0+} D^k f(t)$.

Demonstração. Sabemos que

$${}_0^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_t^{\alpha} f(t) = I^{m-\alpha} D^m f(t),$$

aplicando Laplace em ambos os membros obtemos

$$\mathcal{L}[{}_0^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_t^{\alpha} f(t)] = \mathcal{L}[I^{m-\alpha} D^m f(t)].$$

Seja, $g(t) = D^m f(t)$, então

$$\mathcal{L}[{}_0^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_t^{\alpha} f(t)] = \mathcal{L}[I^{m-\alpha} g(t)].$$

Pela equação (3.27) temos

$$\mathcal{L}[I^{\alpha} f(t)] = \frac{\mathcal{L}[f(t)]}{s^{\alpha}},$$

logo

$$\mathcal{L}[I^{m-\alpha} g(t)] = \frac{\mathcal{L}[g(t)]}{s^{m-\alpha}}.$$

A partir da equação da transformada de Laplace para a derivada, equação (A.19), podemos escrever

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[D^m f(t)] = s^m\mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} f^{(k)}(0).$$

Então,

$$\mathcal{L}[I^{m-\alpha} D^m f(t)] = s^{\alpha-m}\left\{s^m\mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} f^{(k)}(0)\right\}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}[{}_0^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_t^{\alpha} f(t)] = s^{\alpha}\mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} f^{(k)}(0).$$

□

Agora, um exemplo, [21].

Exemplo 3.29. Para $m = 2$ temos

$$\mathcal{L}[{}_0^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_t^{\alpha} f(t)] = s^{\alpha}\mathcal{L}[f(t)] - s^{\alpha-1} f(0) - s^{\alpha-2} f'(0)$$

na qual, $t = 0$.

Note que a expressão acima contém derivadas de ordens inteiras.

Nessa seção, pudemos perceber que a transformada de Laplace da derivada de Riemann-Liouville possui derivada de ordem fracionária. Já a de Caputo, possui derivada de ordem inteira, ambas calculadas em 0. Com isso, fica fácil perceber porque em várias aplicações se opta por utilizar a derivada de Caputo. As derivadas de ordem inteira são bem conhecidas, diferentemente das de ordem fracionária, como já vimos. É importante notar que, no caso em que as funções e as suas derivadas são zero, as transformadas das duas derivadas coincidem.

3.3.3 Efeito de memória

A derivada fracionária é um operador não local, o que acarreta o chamado efeito de memória. Quando mencionamos esse "efeito de memória", estamos nos referindo a uma propriedade das derivadas fracionárias, elas levam em conta informações históricas da função, ou seja, elas dependem de todos os valores anteriores da função em questão. Isso é diferente do que ocorre com as derivadas de ordem inteira, que dependem apenas do valor atual da função.

Essa propriedade de memória é importante porque permite que as derivadas fracionárias capturem informações sobre a dinâmica de sistemas complexos, como sistemas físicos não lineares, sistemas econômicos e sistemas biológicos. Em muitos casos, as derivadas fracionárias podem fornecer uma descrição mais precisa e completa desses sistemas do que as derivadas convencionais.

Para atingirmos o objetivo do trabalho, uma abordagem didática do cálculo fracionário, escolhemos um exemplo simples e de fácil entendimento, retirado de [21]. Vamos analisar o efeito de memória para um particular problema de valor inicial, composto pela equação diferencial ordinária fracionária

$$D^\alpha y(x) = f(x), \tag{3.32}$$

com $0 < \alpha \leq 1$, satisfazendo a condição inicial $y(0) = 0$.
Aplicando a transformada de Laplace em (3.32) temos

$$s^\alpha \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[f(x)].$$

Observando que a transformada de Laplace da função Gel'fand-Shilov, (A.12) satisfaz a relação $s^{-\alpha} = \mathcal{L}[\Phi_\alpha(x)]$, (A.20) temos

$$\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\Phi_\alpha(x)]\mathcal{L}[f(x)].$$

Usando o produto de convolução, (A.18), obtemos

$$\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\Phi_\alpha(x) * f(x)].$$

Utilizando a transformada inversa e a definição de produto de convolução, obtemos a solução do problema de valor inicial

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi. \tag{3.33}$$

Note que é exatamente o operador integral fracionário, como era de se esperar, pois é o inverso da derivada fracionária. Considerando dois valores distintos x_1 e x_2 sendo, sem perda de generalidade, $x_1 < x_2$ e separando em dois intervalos obtemos

$$y(x_2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_2} (x_2 - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi$$

e

$$y(x_1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_1} (x_1 - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi.$$

Calculando $y(x_2) - y(x_1)$, temos

$$\begin{aligned} y(x_2) - y(x_1) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_2} (x_2 - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_1} (x_1 - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_1} [(x_2 - \xi)^{\alpha-1} - (x_1 - \xi)^{\alpha-1}] f(\xi) d\xi \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

pois, $x_1 < x_2$. Note que, a primeira integral envolve valores anteriores a x_1, enquanto que a segunda integral apenas valores entre x_1 e x_2.

Para todos os valores com $\alpha \neq 1$, as duas parcelas contribuem. Agora, para o caso $\alpha = 1$, quando temos a derivada de ordem inteira, apenas a segunda parcela contribui. Ou seja, nesse caso, não há dependência do valor da primeira integral. Com isso, conclui-se que equações de ordem inteira modelam sistemas sem memória. Por outro lado, no caso em que $0 < \alpha < 1$ a primeira parcela também contribui, isto é, há dependência das duas parcelas, logo equações de ordem não inteira modelam sistemas com memória. Em outras palavras, tem-se um efeito de memória relativo à integral no intervalo de zero à x_1, antes de x_1, no passado.

Efeito de memória nas derivadas de Riemann-Liouville e Caputo

Sabemos que a derivada fracionária de Caputo é definida como a integral fracionária da derivada de ordem inteira de uma função, assim a derivada de Caputo incorpora informações da função até a ordem fracionária desejada. Ela integra a derivada da função, para trás no tempo. Já a derivada de Riemann-Liouville, é definida como a derivada de ordem inteira da integral fracionária de uma função, é uma forma de integrar a função para trás no tempo. Assim, a principal diferença entre as duas definições é que a derivada de Riemann-Liouville incorpora informações sobre a função em todo o intervalo de integração, enquanto que a derivada de Caputo incorpora apenas informações sobre a função até a ordem fracionária desejada. Em outras palavras, a derivada de Riemann-Liouville é uma forma de memória longa, enquanto a derivada de Caputo é uma forma de memória curta.

Na prática, a derivada de Caputo é adequada para fenômenos onde a resposta do sistema depende apenas das condições iniciais e de algumas condições passadas. Por exemplo, a dinâmica de sistemas físicos como molas e osciladores, bem como a difusão de calor em meios porosos, são exemplos de sistemas que podem ser descritos por meio de derivadas de Caputo. Por outro lado, a derivada de Riemann-Liouville, para modelar processos que apresentam fenômenos onde a resposta do sistema depende não apenas das condições iniciais, mas também de todas as condições passadas. Por exemplo, a dinâmica de sistemas biológicos são exemplos de sistemas que podem ser descritos por meio de derivadas de Riemann-Liouville.

A escolha de qual definição utilizar, depende do problema em questão e das propriedades matemáticas da função em estudo. Além disso, existem muitas outras definições de derivadas fracionárias que podem ser usadas em diferentes contextos e que apresentam outras propriedades.

4 Critérios para Derivada Fracionária

Neste capítulo iremos discutir quais critérios um operador deve satisfazer para que possa ser considerado uma derivada fracionária. Segundo [20], existem atualmente dois critérios, um proposto por Bertran Ross em 1975, veja [15] e outro por Ortigueira e Machado em 2015, em [14]. Como vimos anteriormente, as definições das derivadas fracionárias não são tão intuitivas e exigem um entendimento mais profundo da teoria. Sem falar nas inúmeras definições de derivadas fracionárias que surgiram recentemente. Por isso, é fundamental ter um teste, um critério para a validação dessas definições, que permitam verificar se uma determinada função pode ser derivada fracionalmente e se essa derivação tem sentido matemático.

Além disso, mostraremos a da Regra da Cadeia, das derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo.Utilizamos como referência neste capítulo [20] e [13].

4.1 Critério segundo Ross

O critério segundo Ross possui cinco propriedades a saber:

- A derivada fracionária de uma função analítica é analítica;
- A derivação fracionária, quando a ordem é um inteiro positivo n, $n \in \mathbb{N}$, deve produzir o mesmo resultado da derivação ordinária, ou seja,

$$D^n f(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

  e quando a ordem for um inteiro negativo $-n$, $n \in \mathbb{N}$ deve produzir o mesmo resultado da n-ésima integração ordinária, ou seja,

$$D^{-n} f(x) = \int_0^x \int_0^{\tau_n - 1} \cdots \int_0^{\tau_1} f(\tau) d\tau d\tau_1 \ldots d\tau_{n-1};$$

- A derivada fracionária de ordem zero de uma função é a própria função,

$$D^0 f(x) = f(x);$$

- A derivada fracionária é um operador linear;
- A Lei dos Expoentes, $D^\alpha D^\beta f(x) = D^{\alpha+\beta} f(x)$, é satisfeita para $\alpha < 0$ e $\beta < 0$.

Observando o fato de que a derivada fracionária de uma função analítica não é necessariamente analítica, Ortigueira e Machado reformularam o critério proposto por Ross. Também levaram em conta o fato de que operadores lineares que satisfazem a clássica Regra de Leibniz,

$$D^{\alpha}(f(x)g(x)) = D^{\alpha}f(x)g(x) + f(x)D^{\alpha}g(x),$$

não são derivadas fracionárias, provado por Tarasov [1], mais detalhes podem ser vistos em [20].

4.2 Critério segundo Ortigueira e Machado

O critério de Ortigueira e Machado, assim como o de Ross, possui cinco propriedades:

- A derivação fracionária, quando a ordem é um inteiro positivo n, $n \in \mathbb{N}$, deve produzir o mesmo resultado da derivação ordinária, ou seja,

$$D^{n}f(x) = \frac{d^{n}f(x)}{dx^{n}}$$

  e quando a ordem for um inteiro negativo $-n$, $n \in \mathbb{N}$ deve produzir o mesmo resultado da n-ésima integração ordinária, ou seja,

$$D^{-n}f(x) = \int_0^x \int_0^{\tau_n-1} \cdots \int_0^{\tau_1} f(\tau)d\tau d\tau_1 \dots d\tau_{n-1};$$

- A derivada fracionária de ordem zero de uma função é a própria função,

$$D^0 f(x) = f(x);$$

- A derivada fracionária é um operador linear;
- A Lei dos Expoentes, $D^{\alpha}D^{\beta}f(x) = D^{\alpha+\beta}f(x)$, é satisfeita para $\alpha < 0$ e $\beta < 0$;
- Vale a generalização da Regra de Leibniz,

$$D^{\alpha}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} D^{k}f(x)D^{\alpha-k}g(x), \text{ sendo} \binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)k!}.$$

Note que os critérios se diferenciam apenas em uma propriedade, no critério de Ross a Derivada Fracionária de uma função analítica deve ser analítica, e no critério de Ortigueira e Machado temos a validade da generalização da Regra de Leibniz.

Na literatura especializada encontramos três classes, das assim chamadas derivadas fracionárias: Derivadas fracionárias clássicas, derivadas "fracionárias" locais e derivadas "fracionárias" com núcleo não singular. O termo "fracionária" entre aspas significa que essas derivadas não satisfazem aos critérios adotados por Ross e Ortigueira Machado, veja mais informações em [20]. Neste trabalho iremos verificar a validade do critério segundo Ortigueira e Machado para as Derivadas de Riemann-Liouville e Caputo, que são os objetos de estudo deste trabalho.

[1] Tarasov [19] em 2013 apresentou um teorema que garante que operadores lineares que satisfazem a clássica Regra de Leibniz não são Derivadas Fracionárias.

4.3 Validade do critério para a Derivada de Riemann-Liouville

Primeiramente vamos retomar a definição da Derivada Fracionária de Riemann-Liouville. Seja f uma função contínua no intervalo $[a,x]$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ e $m-1<\alpha<m$, $m \in \mathbb{N}$. A Derivada Fracionária, de ordem α, segundo Riemann-Liouville de $f(x)$, para $x>0$ é dada por

$$\begin{aligned} {}_{0}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_x^{\alpha} f(x) &= \frac{d^m}{dt^m}\left[{}_{0}^{\mathrm{RL}}\mathrm{I}_x^{m-\alpha} f(x)\right] \\ &= \frac{d^m}{dt^m}\left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f(t)dt\right], com\ D^0 = \mathbb{I}. \end{aligned}$$

Optamos por simplificar a notação, assim denotaremos apenas D^{α} para a Derivada Fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem α.

4.3.1 Linearidade

Inicialmente vamos provar a linearidade da derivada de ordem inteira

Teorema 4.1. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e f,g funções definidas em $[a,b]$ tais que $D^n f(t)$ e $D^n g(t)$ existam. Sejam ainda $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ duas constantes quaisquer, então $D^n[\lambda f(t)+\mu g(t)]$ existe e*

$$D^n[\lambda f(t)+\mu g(t)] = \lambda D^n f(t) + \mu D^n g(t). \tag{4.1}$$

Demonstração. Faremos a partir da definição da derivada usual, pois estes operadores são de fato lineares, isto é,

$$\begin{aligned} D^n[\lambda f(t)+\mu g(t)] &= \frac{d^n}{dx^n}[\lambda f(t)+\mu g(t)] \\ &= \lambda\frac{d^n f(t)}{dx^n} + \mu\frac{d^n g(t)}{dx^n} \\ &= \lambda D^n f(t) + \mu D^n g(t). \end{aligned}$$

□

Teorema 4.2. *{Linearidade da Derivada Segundo Riemann-Liouville} Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ com $m-1<\alpha<m$ onde $m \in \mathbb{N}$ e f,g funções definidas em $[a,b]$ tais que $D_t^{\alpha} f(t)$ e $D_t^{\alpha} g(t)$ existam. Sejam ainda $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ duas constantes quaisquer, então $D_t^{\alpha}[\lambda f(t)+\mu g(t)]$ existe e*

$$D_t^{\alpha}[\lambda f(t)+\mu g(t)] = \lambda D_t^{\alpha} f(t) + \mu D_t^{\alpha} g(t). \tag{4.2}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} D_t^{\alpha}[\lambda f(t)+\mu g(t)] &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} D^m \int_a^t (t-u)^{m-\alpha-1}[\lambda f(u)+\mu g(u)]du \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(m-\alpha)} D^m \int_a^t (t-u)^{m-\alpha-1} f(u)du + \\ &+ \frac{\mu}{\Gamma(m-\alpha)} D^m \int_a^t (t-u)^{m-\alpha-1} g(u)du \\ &= \lambda D_t^{\alpha} f(t) + \mu D_t^{\alpha} g(t). \end{aligned}$$

□

Portanto, a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville é um operador linear.

4.3.2 Derivada de ordem zero

Para $\alpha = 0$ temos

$$D^0 f(t) = D^0 I^0 f(t) = f(t),$$

ou seja, a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem zero de uma função é a própria função.

4.3.3 Derivada de ordem inteira

Para $\alpha = m$, com $m \in \mathbb{Z}_+$, temos,

$$D^m f(t) = \frac{d^m}{dt^m} I^{m-m} f(t) = \frac{d^m}{dt^m} I^0 f(t) = \frac{d^m}{dt^m} f(t).$$

Portanto, a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem m é igual a m-ésima derivada ordinária.

Para $\alpha = -m$, com $m \in \mathbb{Z}_+$, temos,

$$D^{-m} f(t) = I^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{m-1} d\tau,$$

que é garantida pela Fórmula da Integral de Cauchy[2], portanto, D^{-m} representa a m-ésima integral,

$$D^{-m} f(x) = \int_0^x \int_0^{\tau_m - 1} \cdots \int_0^{\tau_1} f(\tau) d\tau d\tau_1 \ldots d\tau_{m-1}.$$

Assim, a derivada fracionária de Riemann-Liouville recupera o caso inteiro [5].

4.3.4 Lei dos Expoentes

Nesta seção utilizamos como referência [16], apresentaremos uma abordagem diferente da realizada no Capítulo 2 na demonstração da validade da Lei dos Expoentes para as integrais fracionárias. Faremos um estudo envolvendo os sinais dos expoentes. Para isso utilizaremos a proposição a seguir.

Proposição 4.3. *Seja $f(t)$ uma função contínua para $t \geq a$, então*

$${}_a\mathrm{D}_t^{-q}({}_a\mathrm{D}_t^{-p} f(t)) = {}_a\mathrm{D}_t^{-p}({}_a\mathrm{D}_t^{-q} f(t)) = {}_a\mathrm{D}_t^{-p-q} f(t), \tag{4.3}$$

para todo $p > 0$ e $q > 0$

Demonstração. Pela definição e usando o Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned}
{}_a\mathrm{D}_t^{-q}({}_a\mathrm{D}_t^{-p} f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-\tau)^{q-1} {}_a\mathrm{D}_\tau^{-p} f(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(q)\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{q-1} \int_a^\tau (\tau-\epsilon)^{p-1} f(\epsilon) d\epsilon d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(q)\Gamma(p)} \int_a^t f(\epsilon) \int_\epsilon^t (t-\tau)^{q-1} (\tau-\epsilon)^{p-1} d\tau d\epsilon.
\end{aligned}$$

[2]Condições para a Fórmula da Integral de Cauchy $f^{(n)}(x_0) = \frac{n!}{2\pi} \int \frac{f(\epsilon)}{\Gamma(\epsilon - x_0)^{n+1}} d\epsilon$.

Realizando uma substituição de variáveis, $\tau = tu + \epsilon$ e $d\tau = tdu$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\epsilon^t (t-\tau)^{q-1}(\tau-\epsilon)^{p-1}d\tau &= \int_0^{\frac{t-\epsilon}{t}} (t - tu - \epsilon)^{q-1}(tu+\epsilon-\epsilon)^{p-1}tdu \\
&= \int_0^{\frac{t-\epsilon}{t}} (t(1-u)-\epsilon)^{q-1}t^{p-1}u^{p-1}tdu \\
&= t^p \int_0^{\frac{t-\epsilon}{t}} (t(1-u)-\epsilon)^{q-1}u^{p-1}du.
\end{aligned}$$

Agora substituindo $u = \dfrac{t-\epsilon}{t}x$ e $du = \dfrac{t-\epsilon}{t}dx$, obtemos

$$\begin{aligned}
t^p \int_0^{\frac{t-\epsilon}{t}} (t(1-u)-\epsilon)^{q-1}u^{p-1}du &= t^p \int_0^1 \frac{(t-\epsilon)^{p-1}}{t^{p-1}}x^{p-1}\left(t\left(1-\frac{t-\epsilon}{t}x\right)-\epsilon\right)\frac{(t-\epsilon)}{t}dx \\
&= (t-\epsilon)^p \int_0^1 x^{p-1}(t-\epsilon)^{q-1}(1-x)^{q-1}dx \\
&= (t-\epsilon)^{p+q-1} \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.
\end{aligned}$$

Utilizando a Função Beta, veja Apêndice A2, podemos escrever

$$\begin{aligned}
{}_a\mathrm{D}_t^{-q}({}_a\mathrm{D}_t^{-p}f(t)) &= \frac{B(p,q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_a^t (t-\epsilon)^{p+q-1}f(\epsilon)d\epsilon \\
&= \frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_a^t (t-\epsilon)^{p+q-1}f(\epsilon)d\epsilon \\
&= {}_a\mathrm{D}_t^{-p-q}f(t).
\end{aligned}$$

Observe que podemos trocar p por q e obter a fórmula de integração na ordem contrária. $\square$

As proposições que veremos agora serão necessárias para discutirmos a Lei dos Expoentes para derivadas fracionárias, casos mais gerais. Também utilizaremos a seguinte identidade

$$ {}_a\mathrm{D}_t^{k-\alpha}f(t) = \frac{d^k}{dt^k}{}_a\mathrm{D}_t^{-\alpha}f(t), $$

na qual, $\alpha > 0$ e k é um inteiro qualquer positivo tal que $k - \alpha > 0$. Para mostrar a igualdade acima, sejam $p = k - \alpha$ e m um número inteiro positivo tal que $m - 1 \leq \alpha < n$. Assim segue

$$\begin{aligned}
{}_a\mathrm{D}_t^{k-\alpha}f(t) = {}_a\mathrm{D}_t^{p}f(t) &= \frac{d^m}{dt^m}{}_a\mathrm{D}_t^{-(m-p)}f(t) = \frac{d^k}{dt^k}\frac{d^{m-k}}{dt^{m-k}}{}_a\mathrm{D}_t^{-(m-k)-\alpha}f(t) \\
&= \frac{d^k}{dt^k}\frac{d^{m-k}}{dt^{m-k}}{}_a\mathrm{D}_t^{-(m-k)}{}_a\mathrm{D}_t^{-\alpha}f(t) = \frac{d^k}{dt^k}{}_a\mathrm{D}_t^{-\alpha}f(t).
\end{aligned}$$

A proposição a seguir apresenta um resultado sobre a composição de derivada e integral de Riemann-Liouville ambas de uma mesma ordem p.

Proposição 4.4. *Sejam $p > 0$, k um número inteiro tal que $k - 1 \leq p < k$, e f contínua e integrável em todo intervalo (a, t). Então* *i) a derivada fracionária é um operador inverso à esquerda para a integral de Riemann-Liouville de mesma ordem, isto é,*

$$ {}_a\mathrm{D}_t^p({}_a\mathrm{D}_t^{-p}f(t)) = f(t). \tag{4.4}$$

ii) se a derivada fracionária ${}_a\mathrm{D}_t^p f(t)$ *é contínua e integrável em todo intervalo (a,t), então*

$$ {}_a\mathrm{D}_t^{-p}({}_a\mathrm{D}_t^p f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^{k} {}_a\mathrm{D}_t^{p-j} f(a)\frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}. \tag{4.5}$$

Demonstração. Para demonstrarmos a propriedade do item i), iniciaremos considerando o caso inteiro $p = m \geq 1$. Utilizando a Fórmula de Cauchy para integrais repetidas e o fato da derivada fracionária de Riemann-Liouville recuperar o caso inteiro, temos que

$$ {}_a\mathrm{D}_t^m({}_a\mathrm{D}_t^{-m}f(t)) = \frac{d^m}{dt^m}\left[\frac{1}{(m-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{m-1}f(\tau)d\tau\right] = \frac{(m-1)!}{(m-1)!}\frac{d}{dt}\int_a^t f(\tau)d\tau = f(t). \tag{4.6}$$

A última igualdade é obtida derivando sob o sinal de integração.

Tomando agora $k-1 \leqslant p < k$, por (4.6) e por (4.3) segue que

$$ {}_a\mathrm{D}_t^p({}_a\mathrm{D}_t^{-p}f(t)) = \frac{d^k}{dt^k}\left[{}_a\mathrm{D}_t^{-(k-p)}\left({}_a\mathrm{D}_t^{-p}f(t)\right)\right] = \frac{d^k}{dt^k}\left[{}_a\mathrm{D}_t^{-k}f(t)\right] = f(t).$$

Agora iremos provar o item ii).

Observe que

$$\begin{aligned} {}_a\mathrm{D}_t^{-p}({}_a\mathrm{D}_t^p f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^t (t-\tau)^{p-1}{}_a\mathrm{D}_\tau^p f(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^t \frac{d}{dt}\frac{(t-\tau)^p}{p}{}_a\mathrm{D}_\tau^p f(\tau)d\tau \\ &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)^p{}_a\mathrm{D}_\tau^p f(\tau)d\tau\right]. \end{aligned}$$

Note que

$$\frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)^p{}_a\mathrm{D}_\tau^p f(\tau)d\tau = \frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)^p\frac{d^k}{dt^k}\left[{}_a\mathrm{D}_\tau^{-(k-p)}f(\tau)\right]d\tau.$$

Realizando a integração por partes obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)^p{}_a\mathrm{D}_\tau^p f(\tau)d\tau &= \frac{1}{\Gamma(p+1)}(t-a)^p\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\left[{}_a\mathrm{D}_\tau^{(k-p)}f(a)\right] \\ &+ \frac{p}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)^{p-1}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\left({}_a\mathrm{D}_\tau^{-(k-p)}f(\tau)\right)d\tau. \end{aligned}$$

Repetindo esse processo k vezes temos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)^p {}_a\mathrm{D}_\tau^p f(\tau)d\tau &= \frac{1}{\Gamma(p-k+1)}\int_a^t (t-\tau)^{p-k}\left[{}_a\mathrm{D}_\tau^{-(k-p)} f(\tau)\right]d\tau \\
&- \sum_{j=1}^{k} \frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}}\left({}_a\mathrm{D}_t^{-(k-p)} f(a)\right)\frac{(t-a)^{p-j-1}}{\Gamma(2+p-j)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(p-k+1)}\int_a^t (t-\tau)^{p-k}\left[{}_a\mathrm{D}_\tau^{-(k-p)} f(\tau)\right]d\tau \\
&- \sum_{j=1}^{k} {}_a\mathrm{D}_t^{p-j} f(a)\frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)} \\
&= {}_a\mathrm{D}_t^{-(p-k+1)}\left({}_a\mathrm{D}_t^{-(k-p)} f(t)\right) \\
&- \sum_{j=1}^{k} {}_a\mathrm{D}_t^{p-j} f(a)\frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)} \\
&= {}_a\mathrm{D}_t^{-1} f(t) - \sum_{j=1}^{k} {}_a\mathrm{D}_t^{p-j} f(a)\frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)}.
\end{aligned}$$

Observe que a existência dos termos da expressão

$$\sum_{j=1}^{k} {}_a\mathrm{D}_t^{p-j} f(a)\frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)}$$

é garantida pela integrabilidade de ${}_a\mathrm{D}_t^{p-j} f(t)$ que implica que os termos ${}_a\mathrm{D}_t^{p-j} f(t)$ para $j = 1, 2, \ldots, k$, são todos limitados em $t = a$. Utilizando o resultado acima finalizamos a demonstração

$${}_a\mathrm{D}_t^{-p}({}_a\mathrm{D}_t^p f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^{k} {}_a\mathrm{D}_t^{p-j} f(a)\frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}.$$

□

Note que a propriedade do item anterior i), é um caso particular da propriedade dada pela proposição abaixo.

Proposição 4.5. *Seja f contínua em $t \geq a$, então*

$${}_a\mathrm{D}_t^p({}_a\mathrm{D}_t^{-q} f(t)) = {}_a\mathrm{D}_t^{p-q} f(t). \tag{4.7}$$

Caso $0 \leq q < p$, devemos também supor que existe a derivada ${}_a\mathrm{D}_t^{p-q} f(t)$.

Demonstração. Dois casos devem ser considerados, primeiro quando $0 \leq p \leq q$ e posteriormente $0 \leq q < p$. Para o primeiro caso basta aplicarmos (4.3) e (4.4), assim

$$\begin{aligned}
{}_a\mathrm{D}_t^p({}_a\mathrm{D}_t^{-q} f(t)) &= {}_a\mathrm{D}_t^p\left({}_a\mathrm{D}_t^{-p}\, {}_a\mathrm{D}_t^{-(q-p)} f(t)\right) \\
&= {}_a\mathrm{D}_t^{-(q-p)} f(t) = {}_a\mathrm{D}_t^{p-q} f(t).
\end{aligned}$$

Considerando agora o caso em que $0 \leq q < p$. e denotando por $n \leq m$ inteiros, tais que, $0 \leq m-1 \leq p < m$ e $0 \leq n-1 \leq p-q < n$, por (4.3) obtemos

$$
\begin{aligned}
{}_a\mathrm{D}_t^p({}_a\mathrm{D}_t^{-q}f(t)) &= \frac{d^m}{dt^m}\left[{}_a\mathrm{D}_t^{-(m-p)}\Big({}_a\mathrm{D}_t^{-q}f(t)\Big)\right] \\
&= \frac{d^m}{dt^m}\left[{}_a\mathrm{D}_t^{p-q-m}f(t)\right] \\
&= \frac{d^n}{dt^n}\left[{}_a\mathrm{D}_t^{p-q-n}f(t)\right] = {}_a\mathrm{D}_t^{p-q}f(t).
\end{aligned}
$$

□

Para a ordem inversa, ou seja, para aplicarmos a integral de ordem p da derivada de ordem q, temos a proposição abaixo. Observe que ela é uma generalização de (4.5).

Proposição 4.6. *Se f é contínua em $t \geq a$, então*

$$
{}_a\mathrm{D}_t^{-p}({}_a\mathrm{D}_t^{q}f(t)) = {}_a\mathrm{D}_t^{q-p}f(t) - \sum_{j=1}^{k} {}_a\mathrm{D}_t^{p-j}f(a)\frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)}.
$$

Demonstração. Para esta demonstração utilizamos (4.3) caso $q \leq p$ e (4.7) se $p \leq q$. Em ambos os casos combinamos com (4.5), obtendo

$$
\begin{aligned}
{}_a\mathrm{D}_t^{-p}({}_a\mathrm{D}_t^{q}f(t)) &= {}_a\mathrm{D}_t^{q-p}\left[{}_a\mathrm{D}_t^{-q}({}_a\mathrm{D}_t^{q}f(t))\right] \\
&= {}_a\mathrm{D}_t^{q-p}\left[f(t) - \sum_{j=1}^{k} {}_a\mathrm{D}_t^{q-j}f(a)\frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)}\right] \\
&= {}_a\mathrm{D}_t^{-p}({}_a\mathrm{D}_t^{q}f(t)) = {}_a\mathrm{D}_t^{q-p}f(t) - \sum_{j=1}^{k} {}_a\mathrm{D}_t^{q-j}f(a)\frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)}.
\end{aligned}
$$

□

4.3.5 Lei dos Expoentes para Derivadas Fracionárias

Nesta subseção analisaremos a validade da Lei dos Expoentes para as derivadas fracionárias segundo Riemann-Liouville. Veremos que essa lei nem sempre será verdadeira, ou seja, ${}_a\mathrm{D}_t^{\alpha}({}_a\mathrm{D}_t^{\beta}f(t)) \neq {}_a\mathrm{D}_t^{\beta}({}_a\mathrm{D}_t^{\alpha}f(t))$. Para isso utilizamos [16].

Primeiramente faremos um exemplo para ilustrar a afirmação acima. Utilizaremos os seguintes resultados $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ e $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\Gamma(\frac{1}{2})$, cujos cálculos se encontram no Apêndice A.

Exemplo 4.7. Sejam $f(t) = t^{\frac{1}{2}}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{3}{2}$, em (3.14), temos

$$
{}_a\mathrm{D}_t^{\alpha}f(t) = {}_a\mathrm{D}_t^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2})}t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},
$$

e

$$
{}_a\mathrm{D}_t^{\beta}f(t) = {}_a\mathrm{D}_t^{\frac{3}{2}}t^{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}+1-\frac{3}{2})}t^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(0)}t^{-1} = 0.
$$

Então, segue que

$$ {}_a\mathrm{D}_t^{\alpha}({}_a\mathrm{D}_t^{\beta} f(t)) = {}_a\mathrm{D}_t^{\frac{1}{2}}({}_a\mathrm{D}_t^{\frac{3}{2}} t^{\frac{1}{2}}) = 0. $$

Por outro lado,

$$ \begin{aligned} {}_a\mathrm{D}_t^{\beta}({}_a\mathrm{D}_t^{\alpha} f(t)) &= {}_a\mathrm{D}_t^{\frac{3}{2}}({}_a\mathrm{D}_t^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}) = {}_a\mathrm{D}_t^{\frac{3}{2}}\Big(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Big) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,{}_a\mathrm{D}_t^{\frac{3}{2}}(1) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{-2\Gamma(\frac{1}{2})} t^{\frac{-3}{2}} = -\frac{t^{\frac{-3}{2}}}{4}. \end{aligned} $$

Logo, o exemplo acima mostra que a derivada de ordem fracionária, nem sempre é comutativa. Será que existe alguma condição para que isso aconteça? Para responder a essa pergunta, iremos primeiramente considerar a n-ésima derivada de uma derivada segundo Riemann-Liouville de ordem $p > 0$ e sua operação inversa.

Denotando $p = k - \alpha$, para $0 < \alpha \leq 1$, note que

$$ \frac{d^n}{dt^n}({}_a\mathrm{D}_t^{k-\alpha} f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d^{n+k}}{dt^{n+k}}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau = {}_a\mathrm{D}_t^{n-k-\alpha} f(t), \tag{4.8} $$

ou seja,

$$ \frac{d^n}{dt^n}({}_a\mathrm{D}_t^{p} f(t)) = {}_a\mathrm{D}_t^{n+p} f(t). \tag{4.9} $$

Agora para fazermos a operação inversa, devemos observar que

$$ {}_a\mathrm{D}_t^{-n} f^{(n)}(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau)d\tau = f(t) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^j}{\Gamma(j+1)}, \tag{4.10} $$

e

$$ {}_a\mathrm{D}_t^{p} g(t) = {}_a\mathrm{D}_t^{p+n}({}_a\mathrm{D}_t^{-n} g(t))). \tag{4.11} $$

Utilizando os resultados demonstrados anteriormente temos

$$ \begin{aligned} {}_a\mathrm{D}_t^{p}\Big(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\Big) &= {}_a\mathrm{D}_t^{p+n}({}_a\mathrm{D}_t^{-n} f^{(n)}(t)) \\ &= {}_a\mathrm{D}_t^{p+n}\left(f(t) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^j}{\Gamma(j+1)}\right) \\ &= {}_a\mathrm{D}_t^{p+n} f(t) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^j}{\Gamma(j+1)}. \end{aligned} $$

Logo, concluímos que o operador derivada de Riemann-Liouville ${}_a\mathrm{D}_t^{p}$, comuta com $\dfrac{d^n f(t)}{dt^n}$, isto é:

$$ \frac{d^n}{dt^n}({}_a\mathrm{D}_t^{p} f(t)) = {}_a\mathrm{D}_t^{p}\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right) = {}_a\mathrm{D}_t^{p+n} f(t), \tag{4.12} $$

no caso em que $f^{(k)}(a) = 0$, para todo $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Iremos agora analisar o resultado da composição de duas derivadas de ordem reais p e q.

Teorema 4.8. *Sejam f contínua para $t \geq a$, $m-1 \leq p < m$, $n-1 \leq q < n$. Assim*

$$ {}_a\mathrm{D}_t^{p}({}_a\mathrm{D}_t^{q} f(t)) = {}_a\mathrm{D}_t^{p+q} - \sum_{j=1}^{n}{}_a\mathrm{D}_t^{q-j} f(a)\frac{(t-a)^{-p-j}}{\Gamma(1-p-j)}, \tag{4.13} $$

$$ {}_a\mathrm{D}_t^{q}({}_a\mathrm{D}_t^{p} f(t)) = {}_a\mathrm{D}_t^{p+q} - \sum_{j=1}^{m}{}_a\mathrm{D}_t^{p-j} f(a)\frac{(t-a)^{-q-j}}{\Gamma(1-q-j)}. \tag{4.14} $$

Demonstração. Usando as definições, a expressão (4.9) e a Proposição (4.6) , temos

$$ {}_a\mathrm{D}_t^p({}_a\mathrm{D}_t^q f(t)) = \frac{d^n}{dt^n}\left[{}_a\mathrm{D}_t^{-(n-p)}({}_a\mathrm{D}_t^q f(t))\right] \tag{4.15} $$

$$ = \frac{d^n}{dt^n}\left\{{}_a\mathrm{D}_t^{p+q-n} f(t) - \sum_{j=1}^{n} {}_a\mathrm{D}_t^{q-j} f(a)\frac{(t-a)^{n-p-j}}{\Gamma(1+n-p-j)}\right\} \tag{4.16} $$

$$ = {}_a\mathrm{D}_t^{p+q} - \sum_{j=1}^{n} {}_a\mathrm{D}_t^{q-j} f(a)\frac{(t-a)^{-p-j}}{\Gamma(1-p-j)}. \tag{4.17} $$

Note que (4.14) é consequência imediata do resultado acima. □

Observação 4.9. Analisando as expressões (4.13) e (4.14), podemos dizer que se $q = p$, então os operadores comutam. Se $q \neq p$, então vale a comutativa

$$ {}_a\mathrm{D}_t^p({}_a\mathrm{D}_t^q f(t)) = {}_a\mathrm{D}_t^q({}_a\mathrm{D}_t^p f(t)) = {}_a\mathrm{D}_t^p({}_a\mathrm{D}_t^{p+q} f(t)), \tag{4.18} $$

apenas se os somatórios das equações (4.13)e (4.14) se anulam. Uma forma disso acontecer é impor simultaneamente as condições

$$ {}_a\mathrm{D}_t^{p-j} f(a) = 0, \quad \forall j = 0, 1, 2, \ldots, m, \tag{4.19} $$

e

$$ {}_a\mathrm{D}_t^{q-j} f(a) = 0, \quad \forall j = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{4.20} $$

No Teorema ver, mostramos que se $f(t)$ possui uma quantidade suficiente de derivadas contínuas, então as condições (4.19) e (4.20) são equivalentes a

$$ f^{(j)}(a) = 0, \quad \forall j = 0, 1, 2, \ldots, m-1, \tag{4.21} $$

e

$$ f^{(j)}(a) = 0, \quad \forall j = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{4.22} $$

Assim, podemos dizer que (4.18) é verdadeiro se

$$ f^{(j)}(a) = 0, \quad \forall j = 0, 1, 2, \ldots, r-1, \tag{4.23} $$

onde $r = max\{m, n\}$. Para provar a equivalência anunciada na observação acima, iremos demonstrar o lema abaixo. Ele apresenta uma fórmula para a derivada fracionária de ordem $p > 0$, tendo como hipótese algumas condições de regularidade da função f.

Lema 4.10. *Seja f derivável $(n-1)$ vezes em um intervalo $[a, T]$, com $f^{(n)}$ integrável no intervalo $[a, T]$. Se $0 \leq m-1 < p < m \leq n$, então para $a < t < T$ temos*

$$ {}_a\mathrm{D}_t^p f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} {}_a\mathrm{D}_t^{q-j} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-p}}{\Gamma(1+j-p)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{p-m+1}}. \tag{4.24} $$

Demonstração. Note que pelas hipóteses de regularidade da função f, o lado direito da equação pode ser reescrito como

$$ \frac{d^m}{dt^m}\left\{\sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{m+j-p}}{\Gamma(1+m+j-p)} + \frac{1}{\Gamma(2m-p)}\int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{p-2m+1}}\right\} \tag{4.25} $$

Realizando uma integração por partes em que $u = (t-\tau)^{2m-p-1}$ e $dv = f^{(m)}(\tau)d\tau$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(2m-p)} & \int_a^t (t-\tau)^{2m-p-1} f^{(m)}(\tau)d\tau = \\
= & \frac{1}{\Gamma(2m-p)}\left[(t-\tau)^{2m-p-1} f^{(m-1)}(\tau)\right]_{\tau=a}^{\tau=t} \\
+ & \frac{1}{\Gamma(2m-p)}\int_a^t (2m-p-1)(t-\tau)^{2m-p-2} f^{(m-1)}(\tau)d\tau \\
= & \frac{-(t-a)^{2m-p-1} f^{(m-1)}(a)}{\Gamma(2m-p)} \\
+ & \frac{2m-p-1}{\Gamma(2m-p)}\int_a^t (t-\tau)^{2m-p-2} f^{(m-1)}(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Repetindo esse processo de integração m vezes, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(2m-p)}\int_a^t (t-\tau)^{2m-p-1} f^{(m)}(\tau)d\tau &= -\sum_{j=0}^{m-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{m+j-p}}{\Gamma(1+m+j-p)} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Agora, substituindo o resultado acima em (4.25) e observando que os somatórios se anulam, concluímos que o lado direito da (4.24) é

$$\frac{d^m}{dt^m}\left\{\frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_a\mathrm{D}_t^{-(m-p)} f(t)\right\} = {}_a\mathrm{D}_t^p f(t).$$

concluindo a prova. □

Observação 4.11. Um caso particular da equação (4.24)bastante utilizado em aplicações, é quando $0 < p < 1$. Neste caso se $f(t)$ for contínua e $f'(t)$ for integrável em um intervalo $[a, T]$, então a derivada fracionária de Riemann-Liouville existe e é dada por

$${}_a\mathrm{D}_t^p f(t) = \frac{f(a)(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)}\int_a^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau)d\tau.$$

Claramente, a derivada dada na expressão acima é integrável.

Teorema 4.12. *Sob as mesmas hipóteses do Lema (4.10), a condição*

$${}_a\mathrm{D}_t^p f(a) = 0 \tag{4.26}$$

é equivalente a

$$f^{(j)}(a) = 0, \quad \forall j = 0, 1, 2, \ldots, m-1. \tag{4.27}$$

Demonstração. Se a condição (4.27) for satisfeita, quando fizermos $t \to a$ em (4.24), imediatamente obteremos (4.26). Por outro lado, suponhamos que a condição (4.26), seja verdadeira. Ao multiplicarmos ambos os lados da equação (4.24) por $(t-a)^p$, obtemos

$${}_a\mathrm{D}_t^p f(t)(t-a)^p = \sum_{j=0}^{m-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^j}{\Gamma(1+j-p)} + \frac{(t-a)^p}{\Gamma(m-p)}\int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{p-m+1}}. \tag{4.28}$$

Tomando $t \to a$, o lado esquerdo tende a zero, uma vez que $p > 0$, enquanto que no lado direito resta apenas a parcela do somatório em que $j = 0$, ou seja, $\frac{f(a)}{\Gamma(1-p)}$, implicando que $f(a) = 0$. Com esse fato, repetimos o raciocínio agora multiplicando ambos os lados de (4.24) por $(t-a)^{p+1}$. Fazendo $t \to a$ é possível obter $f'(a) = 0$. Subsequentemente, repetindo o processo (m vezes no total) concluímos que

$$f^{(j)}(t) = 0 \;\text{ para }\; j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

□

Concluímos pelo teorema acima que se f satisfaz as hipóteses do Lema (4.10) e para algum $p > 0$, a derivada de ordem p de f for igual a zero em $t = a$, a equivalência de (4.26) e (4.27), implica que todas as derivadas de ordem $0 < q < p$ são iguais a zero em $t = a$, isto é, ${}_a\mathrm{D}_t^p f(a) = 0$, para todo $q \in (0, p)$.

4.3.6 Regra de Leibniz

A Regra de Leibniz pode ser utilizada quando precisamos calcular a derivada do produto de duas funções. Vamos primeiramente demonstrar essa regra para a derivada de ordem inteira. Depois estenderemos o resultado para derivadas de ordem $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n-1 < \alpha < n$ onde $n \in \mathbb{N}$. Essa extensão abrange as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo.

Lembramos aqui que a Regra de Leibniz para a derivada primeira do produto de duas funções $f(t)$ e $g(t)$ é dada por $D[f(t)g(t)] = f(t)g'(t) + f'(t)g(t)$. Vamos mostrar, por indução matemática, que ela pode ser facilmente estendida para a derivada de ordem inteira $n \in \mathbb{N}$. A seguir enunciamos essa extensão através do teorema:

Teorema 4.13. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $f, g \in C^n[a,b]$ duas funções, então*

$$D^n[f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [D^k f(t)][D^{n-k} g(t)], \tag{4.29}$$

onde $D^0 f(t) = f(t)$ e $D^0 g(t) = g(t)$.

Demonstração. Mostremos que a regra é válida para $n = 1$. De fato,

$$\begin{aligned} D[f(t)g(t)] &= f(t)g'(t) + f'(t)g(t) \\ &= \binom{1}{0}[D^0 f(t)][D^1 g(t)] + \binom{1}{1}[D^1 f(t)][D^{1-1} g(t)] \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} [D^k f(t)][D^{1-k} g(t)], \;\; \forall t \in [a,b]. \end{aligned}$$

Supondo que a fórmula é verdadeira para $n = m$, temos

$$D^m[f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} [D^k f(t)][D^{m-k} g(t)].$$

Vamos mostrar agora que a regra é verdadeira para $n = m + 1$. Assim,

$$
\begin{aligned}
D^{m+1}[f(t)g(t)] &= \frac{d}{dt}\left[\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}[D^k f(t)][D^{m-k}g(t)]\right] \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}[D^k f(t)][D^{m-k+1}g(t)] + [D^{k+1}f(t)][D^{m-k}g(t)] \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}[D^k f(t)][D^{m-k+1}g(t)] + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}[D^{k+1}f(t)][D^{m-k}g(t)].
\end{aligned}
$$

Trocando o índice k do segundo somatório por $k-1$ e usando o resultado

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m+1}{k},$$

obtemos:

$$
\begin{aligned}
D^{m+1}[f(t)g(t)] &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}[D^k f(t)][D^{m-k+1}g(t)] + \sum_{k=1}^{m+1}\binom{m}{k-1}[D^k f(t)][D^{m-k+1}g(t)] \\
&= [D^0 f(t)][D^{m+1}g(t)] + \sum_{k=1}^{m}\left[\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}\right][D^k f(t)][D^{m-k+1}g(t)] + \\
&+ [D^{m+1}f(t)][D^0 g(t)] \\
&= f(x)[D^{m+1}g(t)] + \sum_{k=1}^{m}\binom{m+1}{k}[D^k f(t)][D^{m-k+1}g(t)] + [D^{m+1}f(t)]g(t).
\end{aligned}
$$

Note que, $\binom{m}{0} = \binom{m+1}{0} = 1$ e $\binom{m}{m} = \binom{m+1}{m+1} = 1$. Logo

$$D^{m+1}[f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}[D^k f(t)][D^{m-k+1}g(t)],$$

portanto, vale (4.29). □

Note que a regra é simétrica em relação as funções $f(t)$ e $g(t)$, as funções podem ser trocadas sem alterar o resultado. É possível aplicar a Regra de Leibniz para derivadas de ordem inteira para quaisquer funções de classe $C^n[a,b]$.

Para estender a Regra de Leibniz de ordem $n \in \mathbb{N}$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ utilizando a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville, é preciso o seguinte resultado:

Lema 4.14. *Se f(t) é uma função analítica no intervalo (a,b), então*

$$D^\alpha f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}[D^n f(t)], \tag{4.30}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $t \in (a,b)$.

Demonstração. Usaremos a seguinte notação:

$[\alpha]$ = parte inteira de α;

$\{\alpha\}$ = parte fracionária de $\alpha, 0 \leq \alpha < 1$, logo, $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$.

Vamos dividir a prova em dois casos, $\alpha < 0$ e $\alpha > 0$:

1) Caso $\alpha < 0$

Quando temos $\alpha < 0$ a derivada fracionária de Riemann-Liouville se reduz à integral fracionária, isto é,

$$D^{\alpha}f(t) = I^{-\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_a^t (t-x)^{-\alpha-1}f(x)dx. \tag{4.31}$$

Como f é analítica em (a,b) e pode ser representada pela série de potências

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n[D^n f(t)]}{n!}(t-x)^n. \tag{4.32}$$

Substituindo (4.32) , em (4.31), temos:

$$\begin{aligned} D^{\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_a^t (t-x)^{-\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n[D^n f(t)]}{n!}(t-x)^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n[D^n f(t)]}{n!\Gamma(-\alpha)}\int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1}dx. \end{aligned}$$

Como a convergência da série é uniforme, podemos comutar o somatório com a integral. Agora, realizando a mudança de variável, $u = t - x$, obtemos:

$$\begin{aligned} D^{\alpha}f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n[D^n f(t)]}{n!\Gamma(-\alpha)}\int_{t-a}^{0}(u)^{n-\alpha-1}(-du) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n[D^n f(t)]}{n!\Gamma(-\alpha)}\int_0^{t-a}(u)^{n-\alpha-1}du \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n[D^n f(t)]}{n!\Gamma(-\alpha)}\left[\frac{u^{n-\alpha}}{n-\alpha}\right]^{t-a} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n[D^n f(t)]}{n!\Gamma(-\alpha)}\frac{(t-a)^{n-\alpha}}{n-\alpha}. \end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo a última equação por $\Gamma(n-\alpha)$, utilizando a relação funcional (A.2) e a generalização binomial (A.5), obtemos:

$$\begin{aligned} D^{\alpha}f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(n-\alpha)}{n!\Gamma(-\alpha)}\frac{(t-a)^{n-\alpha+1}}{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)}[D^n f(t)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(n-\alpha)}{n!\Gamma(-\alpha)}\frac{(t-a)^{n-\alpha+1}}{\Gamma(n-\alpha+1)}[D^n f(t)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\frac{(t-a)^{n-\alpha+1}}{\Gamma(n-\alpha+1)}[D^n f(t)]. \end{aligned}$$

2) Caso $\alpha > 0$. Neste caso, temos

$$D^{\alpha}f(t) = D^{[\alpha]+1}I^{\{\alpha\}-1}f(t).$$

Novamente, como f é analítica em (a,b), pode ser novamente representada pela série dada por (4.32). Também podemos comutar o somatório com a derivada. Então, utilizando o resultado anterior, temos:

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= D^{[\alpha]+1}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\{\alpha\}-1}{n}\frac{(t-a)^{n-\{\alpha\}+1}}{\Gamma(n-\{\alpha\}+2)}[D^n f(t)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\{\alpha\}-1}{n}D^{[\alpha]+1}\frac{(t-a)^{n-\{\alpha\}+1}}{\Gamma(n-\{\alpha\}+2)}[D^n f(t)]. \end{aligned}$$

Aplicando a Regra de Leibniz para a derivada de ordem inteira, em (4.29), no caso em que $f(t) = D^n[f(t)])$ e $g(t) = (t-a)^{n-\{\alpha\}+1}$, temos:

$$D^\alpha f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\{\alpha\}-1}{n}\sum_{k=0}^{[\alpha]+1}\binom{[\alpha]+1}{k}\frac{(t-a)^{n-\alpha+k}[D^{n+k}f(t)]}{\Gamma(n-\alpha+k+1)}.$$

Veja que, $\binom{n}{k} = 0$, se $n < k$, então podemos tomar o limite superior do segundo somatório sendo infinito, daí:

$$D^\alpha f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\{\alpha\}-1}{n}\binom{[\alpha]+1}{k}\frac{(t-a)^{n-\alpha+k}[D^{n+k}f(t)]}{\Gamma(n-\alpha+k+1)}.$$

Fazendo a mudança de variável $j = n + k$, obtemos:

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= \sum_{j=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{j}\binom{\{\alpha\}-1}{n}\binom{[\alpha]+1}{k}\right]\frac{(t-a)^{j-\alpha}[D^j f(t)]}{\Gamma(j-\alpha+1)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\alpha}{j}\frac{(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j+1-\alpha)}[D^j f(t)]. \end{aligned}$$

□

Agora iremos demonstrar a Regra de Leibniz para a derivada fracionária de Riemann-Liouville.

Teorema 4.15. *Sejam $f(t)$ e $g(t)$, funções analíticas em $[a, b]$. Então,*

$$D^\alpha[f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}[D^k g(t)][D^{\alpha-k}f(t)], \tag{4.33}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq \{-1, -2, -3, ...\}$

Demonstração. Utilizando (4.30), temos:

$$D^\alpha[f(t)g(t)] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}D^n[f(t)g(t)].$$

Aplicando a Regra de Leibniz para o caso inteiro, em (4.29), temos:

$$D^\alpha[f(t)g(t)] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[D^{n-k}f(t)][D^k g(t)].$$

Neste caso os somatórios comutam e também pelo fato de que $\binom{n}{k} = 0$, se $n < k$, segue

$$D^\alpha[f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^{n}\sum_{n=k}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\binom{n}{k}\frac{(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}[D^{n-k}f(t)][D^k g(t)].$$

Agora, realizando a mudança de variável, $n = n + k$, obtemos:

$$\begin{aligned} D^\alpha[f(t)g(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty}[D^k g(t)]\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n+k}\binom{n+k}{k}\frac{(t-a)^{n+k-\alpha}}{\Gamma(n+k-\alpha+1)}[D^n f(t)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}[D^k g(t)]\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha-k}{n}\frac{(t-a)^{n+k-\alpha}}{\Gamma(n+k-\alpha+1)}[D^n f(t)]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$D^\alpha[f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}[D^k g(t)][D^{\alpha-k}f(t)]. \tag{4.34}$$

□

Não é trivial que tenhamos $D^\alpha[f(t)g(t)] = D^\alpha[g(t)f(t)]$, como acontece para derivadas de ordem inteira.

Mostraremos a seguir a regra de Leibniz generalizada para as derivadas de Riemann-Liouville, dada pelo teorema a seguir, [13].

Teorema 4.16. *Sejam f(t) e g(t) funções analíticas e sejam ainda $\alpha \in \mathbb{R}$ e γ um parâmetro arbitrário, então*

$$D^\alpha[f(t)g(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\binom{\alpha}{k+\gamma}[D^{\alpha-k-\gamma}f(t)][D^{k+\gamma}g(t)]. \tag{4.35}$$

Demonstração. Uma vez que $f(t)$ e $g(t)$ são funções analíticas podemos considerar, sem perda de generalidade, que:

$$f(t) = \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \text{ e } g(t) = \frac{t^m}{\Gamma(m+1)}.$$

Como o operador diferencial de Riemann-Liouville é linear, podemos escrever:

$$D^\alpha[f(t)g(t)] = D^\alpha\left[\frac{t^{n+m}}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)}\right].$$

Multiplicando e dividindo a equação acima por $\Gamma(n+m+1)$, obtemos:

$$D^\alpha[f(t)g(t)] = D^\alpha\left[\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)}\frac{t^{n+m}}{\Gamma(n+m+1)}\right].$$

Vimos anteriormente, (3.14) que a derivada de Riemann-Liouville da função exponencial é dada por:

$$D^\alpha t^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)}t^{k-\alpha},$$

então

$$D^\alpha[f(t)g(t)] = \left[\frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)\Gamma(m+n+1)}\right]\left[\frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(n+m-\alpha+1)}\right]t^{n+m-\alpha}.$$

Portanto,

$$D^{\alpha}[f(t)g(t)] = \frac{\Gamma(m+n+1)t^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)\Gamma(n+m-\alpha+1)}. \tag{4.36}$$

Substituindo (4.36) no lado esquerdo de (4.35), obtemos:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\binom{\alpha}{k+\gamma}[D^{\alpha-k-\gamma}f(t)][D^{k+\gamma}g(t)] = \frac{\Gamma(n+m+1)t^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)\Gamma(n+m-\alpha+1)} \tag{4.37}$$

Observe agora que:

$$\begin{aligned} D^{\alpha-k-\gamma}f(t) &= D^{\alpha-k-\gamma}\left[\frac{t^n}{\Gamma(n+1)}\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n+1)}\left[\frac{\Gamma(n+1)t^{n-\alpha+k+\gamma}}{\Gamma(n-\alpha+k+\gamma+1)}\right] \\ &= \frac{t^{n-\alpha+k+\gamma}}{\Gamma(n-\alpha+k+\gamma+1)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D^{k+\gamma}g(t) &= D^{k+\gamma}\left[\frac{t^m}{\Gamma(m+1)}\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(m+1)}\left[\frac{\Gamma(m+1)t^{m-k-\gamma}}{\Gamma(m-k-\gamma+1)}\right] \\ &= \frac{t^{m-k-\gamma}}{\Gamma(m-k-\gamma+1)}. \end{aligned}$$

Substituindo os resultados acima e a equação (A.5) na equação (4.37), temos:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1)t^{n-\alpha+k+\gamma}t^{m-k-\gamma}}{\Gamma(\alpha-k-\gamma+1)\Gamma(k+\gamma+1)\Gamma(n-\alpha+k+\gamma+1)\Gamma(m-k-\gamma+1)} = \\ &\qquad = \frac{\Gamma(n+m+1)t^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)\Gamma(n+m-\alpha+1)}. \end{aligned} \tag{4.38}$$

então, podemos escrever

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \quad & \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+m-\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k-\gamma+1)\Gamma(k+\gamma+1)\Gamma(n-\alpha+k+\gamma+1)\Gamma(m-k-\gamma+1)} = \\ = \quad & \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)}. \end{aligned}$$

Para monstrar que a igualdade acima é verdadeira, vamos introduzir os seguintes parâmetros:

$$a = m-\gamma, \;\; b = n+\gamma-\alpha, \;\; c = \gamma \;\; e \;\; d = \alpha-\gamma.$$

obtendo,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(c+d+1)\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(d-k+1)\Gamma(c+k+1)\Gamma(b+k+1)\Gamma(a-k+1)} = \frac{\Gamma(a+b+c+d+1)}{\Gamma(b+d+1)\Gamma(a+c+1)}.$$

Note que, substituindo os mesmos parâmetros no expoente de t do lado esquerdo da igualdade (4.38) temos,

$$t^{n-\alpha+k+\gamma} = t^{b+k}$$

e

$$t^{m-k-\gamma} = t^{a-k}.$$

Logo,

$$t^{n-\alpha+k+\gamma} t^{m-k-\gamma} = t^{b+k} t^{a-k} = t^{a+b}.$$

No lado direito de (4.38),

$$t^{m+n-\alpha} = t^{a+b}.$$

Portanto, $t^{n-\alpha+k+\gamma} t^{m-k-\gamma} = t^{m+n-\alpha}$ assim vale o teorema. $\square$

Com isso concluímos que a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville satisfaz o critério proposto por Ortigueira e Machado.

4.4 Validade do critério para a Derivada de Caputo

Primeiramente vamos retomar a definição da derivada fracionária segundo Caputo, Definição 3.10. Seja $\alpha \in \mathbb{R}_+$, e tomando $m \in \mathbb{N}$, tal que $m-1 < \alpha < m$. A derivada de ordem α de Caputo de $f(x), x > 0$, denotada por ${}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha} f(x)$ é definida por

$${}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha} f(x) = I^{m-\alpha}[D^m f(x)]$$

Para que a derivada fracionária de Caputo exista, é necessário a integrabilidade da derivada de ordem m da função.

Iremos agora verificar se a derivada fracionária de Caputo satisfaz as cinco propriedades do critério de Ortigueira e Machado.

4.4.1 Linearidade

Mostraremos que a derivada fracionária de Caputo é um operador linear. Sejam f e g funções e μ e γ escalares, então

$${}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}(\mu f + \gamma g) f(t) = I^{m-\alpha} D^m (\mu f + \gamma g)(t) = I^{m-\alpha}[\mu D^m f(t) + \gamma D^m g(t)],$$

como a integral fracionária é um operador linear segue que a derivada fracionária de Caputo também é um operador linear.

4.4.2 Derivada de ordem zero

Para que a ordem da derivada seja zero, devemos ter $\alpha = m = 0$

$${}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{0} f(t) = I^0 D^0 f(t) = f(t),$$

ou seja, a derivada fracionária segundo Caputo de ordem zero de uma função é a própria função.

4.4.3 Derivada de ordem inteira

Para $\alpha = m$, com $m \in \mathbb{Z}_+$, temos

$$^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha} f(t) = I^{m-\alpha} D^m f(t) = I^0 \frac{d^m}{dt^m} f(t) = \frac{d^m}{dt^m} f(t)$$

e quando $\alpha = -m$, $m \in \mathbb{Z}_+$ $D^{-m} = I^m$, temos a m-ésima integral, fórmula das integrais Iteradas de Cauchy.

4.4.4 Lei dos expoentes

Vimos na subseção 4.3.4, que a Lei dos Expoentes nem sempre é valida para as derivadas fracionárias de Riemann-Liouvile, também mostramos quais condições devem ser satisfeitas. Da mesma forma a Lei dos Expoentes será válida para a derivada fracionária de Caputo se satisfizer as condições do lema a seguir, [13].

Lema 4.17. *Seja $a < b$ e $f \in C^k[a,b]$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Além disso, sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, com $Re(\alpha) > 0$ e $Re(\beta) > 0$, tal que exista algum $l \in \mathbb{N}$ com $l \leq k$ e $\beta, \beta + \alpha \in [l-1, l]$. Então vale*

$$^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}(^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\beta} f) = {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha+\beta} f.$$

Demonstração. Para valer a afirmação do lema, devemos ter $0 < \alpha < 1$ e denotaremos $\lceil \beta \rceil = [\beta] + 1$. Sabemos por (3.21), que quando $f(0) = 0$ as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo coincidem, logo considerando $f^{(k)}(0) = 0$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$, temos

$$^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha} f(t) = {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha} f(t).$$

Com o objetivo de facilitar o entendimento, iremos omitir o RL nas notações da derivada e integral fracionárias de Riemann-Liouville.
Abaixo, analisaremos os três casos:

1. $\alpha + \beta \in \mathbb{N}$

Neste caso, temos $\alpha + \beta = [Re(\beta)] + 1 = \lceil \beta \rceil$. Logo $\alpha = [Re(\beta)] + 1 - \beta = \lceil \beta \rceil - \beta$. Note que, como $f(0) = 0$ e a derivada de Caputo de uma constante é zero, temos

$$^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha} f(0) = 0 = \mathrm{D}^{\alpha} f(0).$$

Assim,

$$\begin{aligned} ^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}(^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\beta} f) &= \mathrm{D}^{\alpha}(^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\beta} f) = \mathrm{D}^{\alpha} I^{\lceil \beta \rceil - \beta} D^{\lceil \beta \rceil} f = \mathrm{D}^{\alpha} I^{\alpha} D^{\lceil \beta \rceil} f \\ &= D^{\lceil \beta \rceil} f = D^{\alpha+\beta} f = {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha+\beta} f. \end{aligned}$$

2. $\beta \in \mathbb{N}$

$$^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}(^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\beta} f) = {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}(\mathrm{D}^{\beta} f) = I^{1-\alpha}(\mathrm{D}^{\beta+1} f) = {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha+\beta} f.$$

3.$\lceil \beta \rceil = [Re(\beta)] + 1 = \lceil \beta \rceil = [Re(\alpha + \beta)] + 1 = \lceil \alpha + \beta \rceil$,

$$\begin{aligned} ^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}(^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\beta} f) &= \mathrm{D}^{\alpha}(^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\beta} f) = \mathrm{D}^{\alpha}[^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\lceil \beta \rceil - \beta}(\mathrm{D}^{\lceil \beta \rceil} f)] = \mathrm{D}^1 I^{1-\alpha} I^{\lceil \beta \rceil - \beta} \mathrm{D}^{\lceil \beta \rceil} f \\ &= \mathrm{D}^1 I^1 I^{\lceil \alpha+\beta \rceil - (\alpha+\beta)} \mathrm{D}^{\lceil \alpha+\beta \rceil} f = {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha+\beta} f. \end{aligned}$$

Note que o lema é trivial nos casos em que $\beta = l - 1$ e $\alpha + \beta = l$. □

Com isso concluímos que as condições da existência de um número l com as propriedades mencionadas, é essencial para a validade da Lei dos Expoentes, para a derivada fracionária de Caputo. Um exemplo pode ser visto em [13].

4.4.5 Regra de Leibniz

Para demonstrarmos a validade da Regra de Leibiniz para a derivada fracionária de Caputo, vamos utilizar o seguinte resultado.

Teorema 4.18. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ com $n-1 < \alpha \leq n$, onde $n \in \mathbb{N}$ e sejam ainda f(t) e g(t) funções analíticas em [a,b], então:*

$$ {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}[f(t)g(t]) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} [D^{\alpha-k} f(t)][D^{k} g(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^{k}[f(t)g(t)](0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha}. $$

Demonstração. Consideremos a igualdade que relaciona a derivada fracionária de Riemann-Liouville e a derivada fracionária de Caputo, (3.21), com $a = 0$, então temos

$$ {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha} f(t) = {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0). $$

Seja agora, $f(t)g(t)$, no lugar da f então

$$ {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}[f(t)g(t)] = \mathrm{D}^{\alpha}[f(t)g(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^{k}[f(t)g(t)](0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha}. $$

Vimos que a Regra de Leibniz para a derivada fracionária de Riemann-Liouville é dada por (4.35), então

$$ {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}[f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} [D^{k} g(t)][D^{\alpha-k} f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^{k}[f(t)g(t)(0)]}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha}. $$

□

Note que a igualdade entre a Regra de Leibniz das Derivadas Fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo se dará se, e somente se, $D^{k}[f(t)g(t)(0) = 0$. Com isto mostramos que a derivada fracionária segundo Caputo satisfaz as propriedades do Critério de Ortigueira e Machado.

4.5 Regra da Cadeia

Para ilustrarmos um pouco mais sobre regras de derivação vamos mostrar a validade da Regra da Cadeia para as derivadas fracionárias segundo Riemann-Liouville e Caputo. A Regra da Cadeia é utilizada para o cálculo de funções compostas $f(g(t))$, também é conhecida como fórmula de Faà di Bruno, a prova pode ser vista em [1]. Primeiramente iremos mostrar a fórmula para derivada de ordem inteira.

De fato, seja $f(g(t))$ com g diferenciável em t e f diferenciável em $g(t)$, então a primeira derivada de $f(g(t))$ é dada por:

$$ D[f(g(t))] = f'(g(t))g'(t). \tag{4.39} $$

Agora vamos calcular a segunda e a terceira derivadas. Para isso utilizaremos a Regra da Cadeia e a Regra de Leibniz.

$$\begin{aligned} D''[f(g(t))] &= f''(g(t))g'(t)g'(t) + g''(t)f'(g(t)) \\ &= f''(g(t))(g'(t))^2 + g''(t)f'(g(t)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D'''[f(g(t))] &= f'''(g(t))g'(t)(g'(t))^2 + 2g'(t)g''(t)f''(g(t)) + g'''(t)f'(g(t)) + f''(g(t))g'(t)g''(t) \\ &= f'''(g(t))(g'(t))^3 + 3g'(t)g''(t)f''(g(t)) + g'''(t)f'(g(t)). \end{aligned}$$

Vamos apresentar a fórmula de Faà di Bruno, a qual generaliza a Regra da Cadeia.

Teorema 4.19. *(Fórmula de Faà di Bruno). Sejam $f,g \in C^k[a,b]$ e $k \in \mathbb{N}$. Então,*

$$D^k[f(g(t))] = \sum \frac{k!}{b_1!b_2!...b_k!} f^{(m)}(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^{b_1} \left(\frac{g''(t)}{2!}\right)^{b_2} ... \left(\frac{g^{(k)}(t)}{k!}\right)^{b_k}, \tag{4.40}$$

onde a soma $\sum$ é sobre todas as diferentes combinações de inteiros não negativos $b_1, b_2, ..., b_k$, com $m = b_1 + b_2 + ... + b_k$ e $b_1 + 2b_2 + ... + kb_k = k$.

Com o objetivo de facilitar o entendimento da fórmula acima, iremos fazer uma ilustração. Vamos omitir a demonstração, pois não é do escopo deste trabalho. A prova do Teorema (4.40) pode ser encontrada em [13].

Para isso, vamos primeiramente considerar o conjunto, $\{1,2,3,4\}$.Uma mameira de particionarmos esse conjunto seriam quatro partições contendo um elemento em cada bloco: $\{1\};\{2\};\{3\};\{4\}$.

Também podemos representar a partição acima da seguinte forma:

$$(b_1, b_2, b_3, b_4) = (4,0,0,0).$$

Na qual, $b_1 = 4$ significa que temos quatro blocos com um elemento cada e $b_2 = b_3 = b_4 = 0$, que não temos blocos com dois, três ou quatro elementos. Abaixo estão descritas todas as possibilidades:

$\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}$; ou simplesmente: $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (4,0,0,0)$.

$\{1\},\{2\},\{3,4\}$; $\{1\},\{3\},\{2,4\}$; $\{1\},\{4\},\{2,3\}$;
$\{2\},\{3\},\{1,4\}$; $\{2\},\{4\},\{1,3\}$; $\{3\},\{4\},\{1,2\}$; ou simplesmente: $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (2,1,0,0)$.

$\{1\},\{2,3,4\}$; $\{2\},\{1,3,4\}$;
$\{3\},\{1,2,4\}$; $\{4\},\{1,2,3\}$; ou simplesmente: $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (1,0,1,0)$.

$\{1,2\},\{3,4\}$; $\{1,3\},\{2,4\}$; $\{1,4\},\{2,3\}$; ou simplesmente: $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (0,2,0,0)$.

E finalmente $\{1,2,3,4\}$; ou simplesmente: $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (0,0,0,1)$.

Em um conjunto com 3 elementos, {1,2,3}, teríamos as partições:

$\{1\},\{2\},\{3\}$; ou $(b_1, b_2, b_3) = (3,0,0)$;

$\{1\}, \{2,3\}$; $\{2\}, \{3,4\}$; $\{3\}, \{1,2\}$; ou $(b_1, b_2, b_3) = (1,1,0)$;

e,$\{1,2,3\}$; ou $(b_1, b_2, b_3) = (0,0,1)$.

Considerando as partições encontradas acima, vamos calcular a derivada terceira de $f(g(t))$ utilizando a Fórmula de Faà di Bruno. Lembrando que neste exemplo teremos $b_1 + 2b_2 + 3b_3 = 3$ e $m = b_1 + b_2 + b_3$.
Para,$(b_1, b_2, b_3) = (3,0,0)$ e $m = 3+0+0 = 3$, temos:

$$\frac{3!}{3!0!0!} f'''(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^3 \left(\frac{g''(t)}{2!}\right)^0 \left(\frac{g'''(t)}{3!}\right)^0 = f'''(g(t))(g'(t))^3.$$

Para,$(b_1, b_2, b_3) = (1,1,0)$ e $m = 1+1+0 = 2$, temos:

$$\frac{3!}{1!1!0!} f''(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^1 \left(\frac{g''(t)}{2!}\right)^1 \left(\frac{g'''(t)}{3!}\right)^0 = 3f''(g(t))g'(t)g''(t).$$

Para,$(b_1, b_2, b_3) = (0,0,1)$ e $m = 0+0+1 = 1$, temos:

$$\frac{3!}{0!0!1!} f'(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^0 \left(\frac{g''(t)}{2!}\right)^0 \left(\frac{g'''(t)}{3!}\right)^1 = f'(g(t))g'''(t).$$

Logo, adicionando os três resultados, chegamos a derivada terceira de $f(g(t))$.
$D'''[f(g(t))] = f'''(g(t))(g'(t))^3 + 3g'(t)g''(t)f''(g(t)) + g'''(t)f'(g(t))$, como já calculado anteriormente.

4.5.1 Regra da Cadeia para a derivada de Riemann-Liouville

Agora, apresentaremos a Regra da Cadeia para a Derivada de Riemann-Liouville.

Definição 4.20. A integral de Riemann-Liouville de ordem $\alpha \in \mathbb{R}$, com $n-1 < \alpha \leq n$ onde $n \in \mathbb{N}$, pode ser escrita como um produto de convolução, (3.26) entre duas funções, isto é,

$$I^\alpha[f(t)] = f(t) * \Phi_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, t > 0. \tag{4.41}$$

A seguir temos a definição de um operador fracionário de ordem $\beta \in \mathbb{R}$. Ele também será definido como um produto de convolução. Importante ressaltar que não é o operador de Riemann-Liouville.

Definição 4.21. O operador de diferenciação fracionária de ordem $\beta \in \mathbb{R}$, é o produto de convolução,

$$D^\beta[f(t)] = f(t) * \Phi_\beta(t), \tag{4.42}$$

no qual, $f(t)$ é uma função que admite integração e diferenciação fracionária no sentido de Riemann-Liouville. Note que, se $\beta > 0$, temos o operador de diferenciação. Se, $\beta < 0$, obtemos a equação (4.41). E, se $\beta = 0$, $D^0[f(t)] = f(t)$.

Lema 4.22. *Sejam $p, q > 0$, então*

$$\Phi_p(t-a) * \Phi_q(t) = \Phi_{p+q}(t-a).$$

Demonstração. A partir da definição do produto de convolução, (A.18), temos que

$$\Phi_p(t-a) * \Phi_q(t) = \int_a^t \frac{(\tau-a)^{p-1}}{\Gamma(p)} \frac{(t-\tau)^{q-1}}{\Gamma(q)} d\tau.$$

Realizando uma mudança de variável, $\tau = a+\xi(t-a)$, segue que (ver limite de integração)

$$\begin{aligned}
\Phi_p(t-a) * \Phi_q(t) &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^1 [a+\xi(t-a)-a]^{p-1}[t-a-\xi(t-a)]^{q-1}(t-a)d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^1 [\xi(t-a)]^{p-1}[(t-a)(1-\xi)]^{q-1}(t-a)d\xi \\
&= \frac{(t-a)^{p+q-1}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^1 \xi^{p-1}(1-\xi)^{q-1}d\xi.
\end{aligned}$$

Note que a integral acima pode ser expressa utilizando a função $B(p,q)$, equação (A.10),

$$\int_0^1 \xi^{p-1}(1-\xi)^{q-1}d\xi = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Com isso,

$$\Phi_p(t-a) * \Phi_q(t) = \frac{(t-a)^{p+q-1}}{\Gamma(p+q)} = \Phi_{p+q}(t-a).$$

□

Se substituirmos $\lambda = q+1$ na definição da função de Gel'fand-Shilov, (A.12), temos para $t > 0$

$$\Phi_{q+1}(t) = \frac{t^q}{\Gamma(q+1)},$$

e para, $t \leq 0$

$$\Phi_{q+1}(t) = 0.$$

Note que, a derivada de ordem $\beta > 0$ desta função é dada por:

$$D^\beta\left[\frac{(t-a)^q}{\Gamma(q+1)}\right] = \frac{(t-a)^{q-\beta}}{\Gamma(q-\beta+1)}, t > 0.$$

Em particular, se $q = 0$, obtemos a derivada fracionária da função de Heaviside, (A.11) ou seja,

$$D^\beta[H(t-a)] = \frac{(t-a)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}, t > a. \tag{4.43}$$

Agora, vamos mostrar a Regra da Cadeia para a derivada de Riemann-Liouville, utilizando a Fórmula de Faà di Bruno.

Teorema 4.23. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}, n-1, \alpha \leq n$, onde $n \in \mathbb{N}$, f uma função analítica e $g(t)$ uma função suficientemente diferenciável, então a fórmula de Faà di Bruno para a derivada de Riemann-Liouville é dada por:*

$$\begin{aligned}
D^\alpha[f(g(t))] &= \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(g(t)) + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \sum \frac{k!}{b_1! b_2! \ldots b_k!} f^m(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^{b_1} \left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^{b_2} \ldots \left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^{b_k},
\end{aligned}$$

onde a soma $\sum$ é sobre todas as diferentes combinações de inteiros não negativos $b_1, b_2, ..., b_k$, com $m = b_1 + b_2 + ... + b_k$ e $b_1, b_2, ..., b_k, eb_1 + 2b_2 + ... + kb_k = k$.

Demonstração. Consideremos a Regra de Leibniz para a derivada de Riemann-Liouville, equação (4.16) e $f(t) = H(t-a)$, isto é:

$$D^{\alpha}[f(t)g(t)] = \sum_{k=o}^{\infty} \binom{\alpha}{k} [D^k g(t)][D^{\alpha-k} H(t-a)].$$

Substituindo a expressão (4.43), na expressão acima, temos:

$$D^{\alpha}[f(t)g(t)] = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} g(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} [D^k g(t)] \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \tag{4.44}$$

Agora, vamos supor que $g(t) = f(g(t))$. Então a k-ésima derivada de $g(t)$ $k \in \mathbb{N}$, dada por (4.40) é:

$$D^k[f(g(t))] = \sum \frac{k!}{b_1!b_2!...b_k!} f^m(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^{b_1} \left(\frac{g''(t)}{2!}\right)^{b_2} ... \left(\frac{g^{(k)}(t)}{k!}\right)^{b_k},$$

onde a soma $\sum$ é sobre todas as diferentes combinações de inteiros não negativos $b_1, b_2, ..., b_k$, com $m = b_1 + b_2 + ... + b_k$ e $b_1 + 2b_2 + ... + kb_k = k$. Substituindo em (4.36) , temos:

$$\begin{aligned} D^{\alpha}[f(t)g(t)] &= \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} g(t) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \sum \frac{k!}{b_1!b_2!...b_k!} f^m(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^{b_1} \left(\frac{g''(t)}{2!}\right)^{b_2} ... \left(\frac{g^{(k)}(t)}{k!}\right)^{b_k}. \end{aligned}$$

onde a soma $\sum$ é sobre todas as diferentes combinações de inteiros não negativos $b_1, b_2, ..., b_k$, com $m = b_1 + b_2 + ... + b_k$ e $b_1 + 2b_2 + ... + kb_k = k$. □

Iremos agora realizar a demonstração da Fórmula de Faà de Bruno para a derivada fracionária segundo Caputo. Para isso utilizaremos a equação que relaciona a derivada fracionária de Riemann-Liouville com a derivada fracionária de Caputo e a Fórmula de Faà de Bruno para a derivada fracionária de Riemann-Liouville.

Teorema 4.24. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $n-1 < \alpha \leq n$, onde $n \in \mathbb{N}$, f uma função analítica e $g(t)$ uma função suficientemente diferenciável, então a fórmula de Faà de Bruno para a derivada de Caputo é dada por*

$$\begin{aligned} {}_C\mathrm{D}^{\alpha}[f(g(t)] &= \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(g(t)) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \sum \frac{k!}{b_1!b_2!\ldots b_k!} f^{(m)}(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^{b_1} \ldots \left(\frac{g^{(k)}(t)}{k!}\right)^{b_k} - \\ &- \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} D^{(k)}[f(g(t))](a), \end{aligned}$$

na qual a soma $\sum$ é sobre todas as diferentes combinações de inteiros não negativos $b_1, b_2, \ldots, b_k$ com $m = b_1 + b_2 + \cdots + b_k$ e $b_1 + 2b_2 + \cdots + kb_k = k$.

Demonstração. Primeiramente, retomamos novamente a equação que relaciona a derivada fracionária de Riemann-Liouville com a derivada de Caputo, (3.21)

$${}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}h(t) = {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha}h(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} h^{(k)}(a).$$

Tomemos $h(t) = f(g(t))$

$$ {}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha} f(g(t)) = {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^{\alpha} f(g(t)) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} D^{(k)}[f(g(t))](a). $$

agora substituindo a derivada fracionária de Riemann-Liouville pela fórmula de Faà de Bruno para a derivada fracionária de Riemann-Liouville, Teorema (4.24), obtemos

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}[f(g(t))] &= \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(g(t)) + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \sum \frac{k!}{b_1! b_2! \ldots b_k!} f^{(m)}(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^{b_1} \cdots \left(\frac{g^{(k)}(t)}{k!}\right)^{b_k} - \\
&- \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} D^{k}[f(g(t))](a),
\end{aligned}
$$

□

Agora mostraremos um exemplo do cálculo para derivada fracionária de Caputo, utilizando a Fórmula de Fàa de Bruno, retirado de [13].

Exemplo 4.25. Sejam $\alpha = \frac{7}{3}$, $2 < \alpha \leq 3$ e $f(g(t)) = t^3$, $g(t) = t$, e $f(t) = t^3$. Vamos calcular ${}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\frac{7}{3}} t^3$.

Como $\alpha = \frac{7}{3}$, devemos considerar as partições dos conjuntos $\{1\}$, $\{1{,}2\}$ e $\{1{,}2{,}3\}$.

- Partições de $\{1\}$:

$$ \{1\}; \Rightarrow (b_1) = 1, \;\; m = 1. $$

- Partições de $\{1{,}2\}$:

$$
\begin{aligned}
\{1,2\}; \;\; &\Rightarrow \;\; (b_1, b_2) = (0,1),\ m = 1; \\
\{1\}, \{2\}; \;\; &\Rightarrow \;\; (b_1, b_2) = (2,0),\ m = 2.
\end{aligned}
$$

- Partições de $\{1{,}2{,}3\}$:

$$
\begin{aligned}
\{1,2,3\}; \;\; &\Rightarrow \;\; (b_1, b_2, b_3) = (0,0,1),\ m = 1; \\
\{1\}, \{2,3\}; \{2\}, \{1,3\}; \{3\}, \{1,2\}; \;\; &\Rightarrow \;\; (b_1, b_2, b_3) = (1,1,0),\ m = 2; \\
\{1\}, \{2\}, \{3\}; \;\; &\Rightarrow \;\; (b_1, b_2, b_3) = (3,0,0),\ m = 3.
\end{aligned}
$$

Agora, substituindo os resultados obtidos acima na equação do Teorema, (4.24), e considerando $a = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
{}^{C}D^{\frac{7}{3}}t^3 &= \frac{t^{-\frac{7}{3}}}{\Gamma(1-\frac{7}{3})}f(g(t)) + \binom{\frac{7}{3}}{1}\frac{t^{1-\frac{7}{3}}}{\Gamma(1-\frac{7}{3}+1)}f'(g(t))g'(t) + \\
&+ \binom{\frac{7}{3}}{2}\frac{t^{2-\frac{7}{3}+1}}{\Gamma(2-\frac{7}{3}+1)}\left[\frac{2!}{0!1!}f'(g(t))\underbrace{\left(\frac{g''(t)}{2!}\right)^1}_{=0} + \underbrace{\frac{2!}{2!0!}f''g(t)\left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^2}_{6t}\right] + \\
&+ \binom{\frac{7}{3}}{3}\frac{t^{3-\frac{7}{3}}}{\Gamma(3-\frac{7}{3}+1)} \times \left[\frac{3!}{0!0!1!}f'(g(t))\underbrace{\left(\frac{g'''(t)}{3!}\right)^1}_{=0} + \frac{3!}{1!1!0!}f''(g(t))\left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^1\underbrace{\left(\frac{g'(t)}{2!}\right)^1}_{=0} + \right. \\
&+ \left.\underbrace{\frac{3!}{3!0!0!}f'''g(t)\left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^3}_{6}\right] - \frac{t^{1-\frac{7}{3}}}{\Gamma(1-\frac{7}{3}+1)}\underbrace{[f(g(t))](0)}_{=0} - \frac{t^{1-\frac{7}{3}}}{\Gamma(1-\frac{7}{3}+1)}\underbrace{[f'(g(t))](0)}_{=0} - \\
&- \frac{t^{2-\frac{7}{3}}}{\Gamma(2-\frac{7}{3}+1)}\underbrace{[f''(g(t))](0)}_{=0}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
{}^{C}D^{\frac{7}{3}}t^3 &= \frac{t^{-\frac{7}{3}}}{\Gamma(-\frac{4}{3})}t^3 + \frac{\Gamma(\frac{7}{3}+1)}{\Gamma(\frac{7}{3})}\frac{t^{-\frac{4}{3}}}{\Gamma(-\frac{1}{3})}3t^2 + \frac{\Gamma(\frac{7}{3}+1)}{2!\Gamma(\frac{7}{3}-2+1)}\frac{6t^{\frac{2}{3}}}{\Gamma(\frac{2}{3})} + \frac{\Gamma(\frac{7}{3}+1)}{3!\Gamma(\frac{7}{3}-3+1)}\frac{6t^{\frac{2}{3}}}{\Gamma(\frac{5}{3})} \\
&= \frac{t^{\frac{2}{3}}}{\Gamma(-\frac{4}{3})} + \frac{7}{3}\frac{3t^{\frac{2}{3}}}{\Gamma(-\frac{1}{3})} + \frac{28}{3}\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\Gamma(\frac{2}{3})} + \frac{14}{9}\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\Gamma(\frac{2}{3})}.
\end{aligned}$$

No apêndice é mostrado que $\Gamma(-\frac{4}{3}) = \frac{9}{4}\Gamma(\frac{2}{3})$ e que $\Gamma(-\frac{1}{3}) = 3\Gamma(\frac{2}{3})$, com isso temos

$$ {}^{C}D^{\frac{7}{3}}t^3 = \left(\frac{4}{9} - \frac{7}{3} + \frac{28}{3} + \frac{14}{9}\right)\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\Gamma(\frac{2}{3})} = \frac{9t^{\frac{2}{3}}}{\Gamma(\frac{2}{3})}.$$

Esse resultado pode ser verificado calculando a derivada fracionária de Caputo, (3.19) com $f(t) = t^3$ com ordem $\frac{7}{3}$. Com esse exemplo finalizamos este Capítulo.

5 Considerações Finais

O cálculo fracionário possui uma beleza e complexidade que têm fascinado estudantes e pesquisadores há décadas. A beleza do cálculo fracionário reside em sua capacidade de fornecer uma descrição mais precisa de fenômenos complexos, principalmente de sistemas não lineares ou com memória. As derivadas fracionárias permitem capturar e quantificar a influência do passado em um processo dinâmico, o que pode ser especialmente importante para prever e controlar eventos futuros. Por outro lado, a complexidade do cálculo fracionário surge da sua natureza não local e não trivial. A noção de derivada fracionária é mais abstrata e não é tão intuitiva quanto a derivada clássica, exigindo uma compreensão mais profunda da teoria matemática.

Além disso, as operações com derivadas fracionárias podem levar a resultados paradoxais, como funções que são contínuas mas não diferenciáveis em qualquer ponto. No entanto, essas complexidades não devem desencorajar o estudo do cálculo fracionário, mas sim motivar um maior interesse e pesquisa nessa área. Embora possa apresentar desafios em sua compreensão e aplicação, os frutos do estudo do cálculo fracionário têm sido abundantes, tornando-o uma ferramenta valiosa para a solução de problemas em diversas áreas do conhecimento. Muitos fenômenos naturais são melhor descritos por equações diferenciais fracionárias do que por equações diferenciais clássicas.

Por fim, ele tem o potencial de nos levar a novas descobertas em diversas áreas da ciência. Pois, há muita teoria a ser estudada, compreendida e aplicada.

Referências

[1] *Empregando a álgebra umbral para provar a fórmula de Faa di Bruno*. PhD thesis.

[2] E. B. d. Ávila et al. Estudo do cálculo fracionário aplicado à modelagem de sistemas vibratórios com amortecimento viscoelástico, 2010.

[3] J. C. A. Barata. *Notas para um Curso de Fısica-Matemática*. 2014.

[4] M. D. T. M. Boni. Cálculo fracionário aplicado às equações horárias do movimento e outras aplicações. 2017.

[5] R. F. Camargo and E. C. d. Oliveira. *Cálculo fracionário*. 2015.

[6] S. David, J. Linares, and E. Pallone. Fractional order calculus: historical apologia, basic concepts and some applications. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 33(4):4302–4302, 2011.

[7] R. de Figueiredo Camargo. *Cálculo Fracionário e Aplicações*. PhD thesis, Unicamp, 2009.

[8] L. Debnath and D. Bhatta. *Integral transforms and their applications*. CRC press, 2014.

[9] P. dos Santos Simonário. Introduçao ao estudo de derivadas fracionárias e equações diferenciais.

[10] Elsevier, editor. *Equações diferenciais fracionárias: uma introdução às derivadas fracionárias, equações diferenciais fracionárias, aos métodos de sua solução e algumas de suas aplicações*.

[11] R. Gorenflo and F. Mainardi. Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order, 1997.

[12] A. Oliveira. *Cálculo Fracionário: contribuições históricas e aplicações físicas*. PhD thesis, Tese de Doutorado, Imecc-Unicamp, Campinas, 2018.

[13] D. d. S. d. Oliveira. Derivada fracionária e as funçoes de mittag-leffler, 2014.

[14] M. D. Ortigueira and J. T. Machado. What is a fractional derivative? *Journal of computational Physics*, 293:4–13, 2015.

[15] B. Ross. The development of fractional calculus 1695–1900. *Historia Mathematica*, 4(1):75–89, 1977.

[16] R. A. Rossato and V. V. Ferreira. Lei dos expoentes envolvendo deriva-das e integrais fracionárias segundo riemann-liouville.

[17] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, et al. *Fractional integrals and derivatives*, volume 1. Gordon and breach science publishers, Yverdon Yverdon-les-Bains, Switzerland, 1993.

[18] B. B. d. Souza. *Estabilidade de Mittag-Leffler e aplicações às redes neurais de Hopfield fracionárias.* PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2019.

[19] V. E. Tarasov. No violation of the leibniz rule. no fractional derivative. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18(11), 2013.

[20] G. Teodoro. *Derivadas Fracionárias: Tipos e Critérios de Validade.* PhD thesis, Tese de Doutorado, Imecc-Unicamp, Campinas, 2019.

[21] O. E. C. d. Vaz, Jayme Júnior and J. V. d. C. Souza. *Cálculo de ordem não inteira para iniciantes.* 2020.

A Funções Especiais

Este apêndice tem o objetivo de introduzir rapidamente certas funções especiais que são utilizadas neste trabalho. As referências utilizadas foram [3], [5] [13]

A.1 Função Gama

A Função Gama é uma generalização do fatorial para números reais e complexos. É praticamente a Função Π deslocada, ou seja: $\Gamma(x) = \Pi(x-1)$, descrita no Capítulo 1. Existem várias maneiras de representar a Função Gama, aqui vamos optar pela integral, veja referências.

Definição A.1. Definimos a Função Gama, $\Gamma(z)$ pela integral imprópria

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt, \tag{A.1}$$

que converge no semiplano complexo $Re(z) > 0$.

Sendo $z = x + iy$, temos:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+iy) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1+iy} dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} e^{iy\ln(t)} dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} [\cos(y\ln(t)) + i\,\mathrm{sen}(y\ln(t))] dt.
\end{aligned}$$

A expressão entre colchetes acima é limitada para todo t, a convergência no infinito é fornecida por e^{-t}. Para a convergência em $t = 0$ devemos ter $x = Re(z) > 1$.

A.1.1 Algumas propriedades da Função Gama

Vamos mostrar que $\Gamma(1) = 1$

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{1-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^0 dt = \int_0^\infty e^{-t} dt = \\
&= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-t} dt - e^{-t}\Big|_0^A = \lim_{A\to\infty} (-e^{-A}) + e^0 = -0 + 1 = 1.
\end{aligned}$$

Outra propriedade da Função Gama é que ela satisfaz a seguinte equação funcional:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \tag{A.2}$$

que pode ser facilmente comprovada pela integração por partes.
De fato,

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z+1-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt,$$

logo tomando, $u = t^z \Longrightarrow du = zt^{z-1}dt$ e $dv = e^{-t}dt \Longrightarrow v = -e^{-t}$, temos:

$$\Gamma(z+1) = -t^z e^{-t}\Big|_0^\infty + z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = -t^z e^{-t}\Big|_0^\infty + z\Gamma(z) = z\Gamma(z).$$

Note que $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t}t^z = 0$, pois

$$|e^{-t}t^z| = |e^{-t}t^x t^{yi}| = e^{-t}t^x|t^{yi}| = e^{-t}t^x, \quad x > 0.$$

e $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t}t^x = 0$, pois

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}n^x = \lim_{n\to\infty}(e^{\frac{-n}{x}}n)^x = (\lim_{n\to\infty}(e^{\frac{-n}{x}}n))^x = \left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{e^{\frac{n}{x}}}\right)^x\right)$$

por L'Hôpital

$$\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{e^{\frac{n}{x}}}\right)^x\right) = \left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{x}e^{\frac{n}{x}}}\right)^x\right) = 0^x = 0, \quad x > 0.$$

Utilizando o fato de que $\Gamma(1) = 1$ e, usando (A.1.1), obtemos para $z = 1, 2, 3, ...$:

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= 1 \\
\Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1 = 1!, \\
\Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2!, \\
\Gamma(4) &= 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!, \\
\dots &= \dots\ \dots \\
\Gamma(n+1) &= n.\Gamma(n) = n.(n-1)! = n!
\end{aligned}$$

Outra propriedade importante da função gama é que ela tem polos simples nos pontos $z = -n, n = 0, 1, 2, ...$, para demonstrar vamos escrever a definição (A.1) na forma:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt + \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt. \tag{A.3}$$

A primeira integral em (A.3) pode ser avaliada usando a série de expansão para a função exponencial. Se $Re(z) = x > 0$, então $Re(z+k) = x + k > 0$ e $t^{z+k}\Big|_{t=0} = 0$. Portanto,

$$\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^\infty \frac{(-t)^k}{k!}t^{z-1}dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^1 t^{k+z-1}dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!(k+z)}.$$

A segunda integral na expressão abaixo define uma função inteira [1] de variável complexa z,

$$\varphi(z) = \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = \int_1^\infty e^{(z-1)\ln(t)-t}dt. \tag{A.4}$$

[1]Uma função inteira é diferenciável em todo plano complexo

A função $e^{(z-1)\ln(t)-t}$ é uma função contínua para z e t arbitrários, z e $t \geq 1$. Além do mais, se $t \geq 1$ (e portanto $\ln(t) \geq 0$), então é uma função inteira de z. Vamos considerar um domínio D no plano complexo, fechado e limitado, $z = x + iy$ e denotamos $x_0 = \max Re(z), z \in D$. Então temos:

$$
\begin{aligned}
\left|e^{-t}t^{z-1}\right| &= \left|e^{(z-1)\ln(t)-t}\right| = \left|e^{(x-1)\ln(t)-t}\right|\left|e^{iy\ln(t)}\right| = \\
&= \left|dxe^{(x-1)\ln(t)-1}\right|\left|\cos y\ln(t) + i\,\mathrm{sen}\, y\ln(t)\right| = \\
&= \left|e^{(x-1)\ln(t)-t}\right| 1 \leq e^{(x_0-1)\ln(t)-t} = e^{-t}t^{x_0-1}.
\end{aligned}
$$

Isso significa que a integral (A.4) converge uniformemente em D e então a função $\varphi(z)$ é regular em D e a diferenciação sob o sinal da integral é permitida. Porque o domínio D foi escolhido arbitrariamente, podemos confirmar que a função $\varphi(z)$ tem as propriedades acima em todo o plano complexo. Portanto, $\varphi(z)$ é uma função inteira permitindo a diferenciação sob a integral. Resumindo as considerações acima, vemos que:

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{k+z} + \int_1^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{k+z} + \varphi(z),$$

onde φ é inteira. Logo, a Função Gama está expressa em termos de uma série, por , conclui-se que Gama possui apenas polos simples em $\mathbb{Z} = -n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
No contexto dos reais, vamos encontrar o valor de $\Gamma(0)$.
Se

$$\Gamma(z) \quad = \quad \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt.$$

então

$$\Gamma(0) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{-1}dt = \int_0^{1} e^{-t}\, t^{-1}dt + \int_1^{\infty} e^{-t}\, t^{-1}dt.$$

Analisando a primeira integral, temos:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^1 e^{-t}\frac{1}{t}dt \geq \frac{1}{e}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 \frac{1}{t}dt = \frac{1}{e}\lim_{\epsilon\to 0^+} \ln t\Big|_\epsilon^1 = \frac{1}{e}(\ln 1 - \lim_{\epsilon\to 0^+}\ln\epsilon) = \frac{1}{e}(0-(-\infty)) = +\infty.$$

Portanto, $\Gamma(0)$ diverge para $+\infty$.
Reescrevendo (A.1.1), temos:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \Longrightarrow \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

Note que para $z = 0$, não está definida já que temos um zero no denominador. E assim,

$$\Gamma(-1) = \frac{\Gamma(-1+1)}{-1} = -\Gamma(0) = -\infty$$

$$\Gamma(-2) = \frac{\Gamma(-2+1)}{-2} = \frac{\Gamma(-1)}{-2} = \frac{-\infty}{-2} = +\infty.$$

Outro resultado importante, que iremos utilizar neste trabalho, é o coeficiente binomial generalizado, que é dado em termos da Função Gama. Lembremos que o coeficiente binomial é definido por:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

onde $n, k \in \mathbb{N}$ e $n \geq k$. Generalizando para $\alpha, \mu \in \mathbb{C}$ com $\alpha \neq -1, -2, ...$ obtemos, então, o chamado coeficiente binomial generalizado, que é dado em termos da função gama, ou seja,

$$\binom{\alpha}{\mu} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\alpha-\mu+1)}. \tag{A.5}$$

Também podemos considerar o coeficiente binomial negativo

$$\binom{-\alpha}{\mu} = (-1)^l \frac{(\alpha)(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+l-1)}{l!}$$

multiplicando o numerador e o denominador por $(\alpha-1)!$, temos:

$$\binom{-\alpha}{\mu} = (-1)^l \frac{(\alpha)(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+l-1)(\alpha-1)!}{l!(\alpha-1)!} = \frac{\Gamma(\alpha+l)}{l!\Gamma(\alpha)}.$$

Para finalizarmos essa seção vamos apresentar a utilização da Função Gama para encontrarmos o valor de uma integral indefinida. Não faz parte do objetivo do nosso trabalho, porém é uma interessante aplicação.

Exemplo A.2. Resolver a integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx.$$

Para isso vamos fazer uma mudança de variável. Note que na Função Gama temos e^{-t} e no exemplo, $e^{-\frac{x}{2}}$, então devemos tomar $t = \dfrac{x}{2}$. Fazendo essa troca os limites de integração não se alteram, mas

$$dt = \frac{1}{2}dx \Longrightarrow dx = 2dt.$$

Substituindo em (A.2), temos:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx = \int_0^{+\infty} e^{-t} 2dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 2.\Gamma(1) = 2.1 = 2.$$

Outra função especial que será utilizada neste trabalho é a Função Beta.

A.2 Função Beta

A Função Beta, denotada por $\beta(z,\xi)$, é definida para $Re(z) > 0$, $Re(\xi) > 0$ onde $z = x + iy$ e $\xi = \eta + i\mu$, com $x, y, \eta, \mu \in \mathbb{R}$, a partir da integral imprópria

$$\beta(z,\xi) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\xi-1} dt \tag{A.6}$$

a qual é conhecida como integral euleriana de primeira espécie. Vamos mostrar que

$$\beta(z,\xi) = \beta(\xi,z). \tag{A.7}$$

$$\beta(\xi,z) = \int_0^1 t^{\xi-1}(1-t)^{z-1}dt. \tag{A.8}$$

Fazendo uma mudança de variável

$$\begin{array}{ll} t = 1-s & \Longrightarrow dt = -ds \\ s = 1-t & \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} t=0 & \longrightarrow s=1 \\ t=1 & \longrightarrow s=0. \end{array} \right. \end{array}$$

Temos

$$\beta(\xi,z) = -\int_1^0 (1-s)^{\xi-1}s^{z-1}ds = \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{\xi-1}ds = \beta(z,\xi).$$

Proposição A.3. *Vale a seguinte relação entre as funções Beta e Gama:*

$$\beta(z,\xi) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\xi)}{\Gamma(z+\xi)}.$$

Demonstração. Note que, da equação (A.1), temos que

$$\Gamma(z)\Gamma(\xi) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \int_0^{+\infty} t^{\xi-1}e^{-s}ds = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{x-1}s^{\xi-1}e^{-(t+s)}dtds. \tag{A.9}$$

Realizando uma mudança de variável, $t = uv$, $s = u(1-v)$ teremos:
$t + s = uv + u - uv = u$ e $dtds = |det(J)|dudv$.

$$J = \frac{\partial(t,s)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial t}{\partial u} & \dfrac{\partial t}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial s}{\partial u} & \dfrac{\partial s}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{bmatrix}.$$

det(J)= $\begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv - u + uv = -u.$

$\Big|det(J)\Big| = \Big|-u\Big| = u.$

Agora vamos descobrir os limites de integração, como $t + s = u \Longrightarrow 0 < u < +\infty$. Também como $t > 0 \Longrightarrow v > 0$ pois, $t = uv$ e $u > 0$ e de $s = u(1-v)$, temos que $v < 1$, logo $0 < v < 1$.

Então, substituindo em (A.9), temos:

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(\xi) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{x-1}s^{\xi-1}e^{-(t+s)}dtds = \\ &= \int_0^1\int_0^{+\infty} (uv)^{x-1}u^{\xi-1}(1-v)^{\xi-1}e^{-u}ududv \\ &= \int_0^1\int_0^{+\infty} u^{x+\xi-1}v^{x-1}(1-v)^{\xi-1}e^{-u}dudv = \\ &= \int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{\xi-1}dv \int_0^{+\infty} u^{x+\xi-1}e^{-1}du = \beta(z,\xi)\Gamma(z+\xi) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\beta(z,\xi) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\xi)}{\Gamma(z+\xi)}. \tag{A.10}$$

$\square$

Vamos utilizar o resultado em (A.10) para mostrar que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, para isto iniciamos com uma reparametrização em (A.6),

$$\beta(z,\xi) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\xi-1}dt.$$

Seja, $t = sen(x)^2 \to x = arcsen\sqrt{t}$ e $dt = 2sen(x)cos(x)dx$.
Então, se $t \to 0 \Longrightarrow x \to 0$ e se $t \to 1 \Longrightarrow x \to \dfrac{\pi}{2}$.
Logo,

$$\beta(z,\xi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\operatorname{sen}(x)^2]^{z-1}[1-\operatorname{sen}(x)^2]^{\xi-1} 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} [sen(x)]^{2z-1}[\cos(x)]^{2\xi-1}dx. \tag{A.11}$$

Note que,

$$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Mas,

$$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (senx)^{1-1}(cosx)^{1-1}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (senx)^0(cosx)^0dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = 2\left[\frac{\pi}{2}-0\right] = \pi.$$

Portanto,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\pi}.$$

Exemplo:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Veja também que,

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{-1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right),$$

então

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right),$$

logo

$$-2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right),$$

portanto

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}.$$

Da mesma forma temos:

$$\Gamma\Big(-\frac{4}{3}\Big)=\frac{9}{4}\Gamma\Big(-\frac{2}{3}\Big)$$

e

$$\Gamma\Big(-\frac{1}{3}\Big)=-3\Gamma\Big(-\frac{2}{3}\Big)$$

A.3 Função de Gel'fand-Shilov

Abaixo, uma função função muito importante no Cálculo Fracionário, a Função de Gel'fand-Shilov, Israïl Moiseevich Gel'fand (1913-2009)- Georgy Evegen'evich Shilov(1917-1975), denotada por $\Phi_\lambda(x)$,

Definição A.4. A função de Gel'fand-Shilov é definida por

$$\Phi_\lambda(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}, & x>0\\ 0, & \text{se } x\leq 0.\end{cases} \tag{A.12}$$

A.4 Transformada de Laplace

Seja $f$uma função definida para $t\geq 0$ então

$$\mathcal{L}[f(s)]=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \tag{A.13}$$

é chamada de transformada de Laplace.

Propriedade A.5. (Linearidade) Se $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$ e $\mathcal{L}[g(t)]=G(s)$ e a,b são constantes, então

$$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)]=a\mathcal{L}[f(t)]+b\mathcal{L}[g(t)]. \tag{A.14}$$

Propriedade A.6. Se $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$, para $s>s_0$ então

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a),\quad s>s_{0+a}. \tag{A.15}$$

Propriedade A.7. Se $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$, então $\mathcal{L}[t^nf(t)]=(-1)^n\dfrac{d^n}{ds^n}F(s)$.

Abaixo o teorema da convolução para a transformada de Laplace, onde $*$ denota o produto de convolução.

Propriedade A.8. (Convolução) Se $\mathcal{L}[(t)]=F(s)$e $\mathcal{L}[g(t)]=G(s)$, então

$$\mathcal{L}[f(t)*g(t)]=\mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)]=F(s)G(s). \tag{A.16}$$

ou, pela transformada de Laplace inversa

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)]=f(t)*g(t), \tag{A.17}$$

na qual, $f(t)*g(t)$ é chamado de produto de convolução de $f(t)$ e $g(t)$ e é definido por

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \tag{A.18}$$

As integrais acima podem ser denotadas simplesmente por $f(t)*g(t)$ e são chamadas de integrais de convolução.

A.4.1 Transformada de Laplace de derivadas

Utilizamos como referência, [21].Uma demonstração detalhada pode ser encontrada em [20].

Propriedade A.9. Considere uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cujas derivadas até ordem $(n-1)$ são contínuas no intervalo fechado $[0, c] \subset \mathbb{R}$, com $c > 0$ e a derivada de ordem n é contínua por partes no intervalo $[0, c] \subset \mathbb{R}$, de modo que existam constantes $M > 0$ e $t_0 > 0$ tais que são válidas as desigualdades

$$|f(t)| \leq M^{e^{bt}}, \ \left|\frac{d}{dt}f(t)\right| \leq Me^{bt}, \ldots, \left|\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}f(t)\right| \leq Me^{bt},$$

para todo $t > t_0$. Então, para $Re(s) > b$,temos

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f\right](s) = s^n\mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k\left[\left(\frac{d^{n-1-k}}{dt^{n-1-k}}f\bigg|_{t=0}\right)\right]. \tag{A.19}$$

A.4.2 Transformada de Laplace da função de Gel'fand-Shilov

Mostraremos agora a transformada de Laplace da função de Gel'fand-Shilov.

Propriedade A.10. A transformada de Laplace da função de Gel'fand-Shilov é dada por

$$\mathcal{L}[\Phi_\alpha(t)] = s^{-\alpha}. \tag{A.20}$$

De fato, aplicando a Transformada de Laplace na função de Gel-fand-Shilov, obtemos

$$\mathcal{L}[\Phi_\alpha(t)] = \int_0^\infty e^{-st}\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma\alpha}dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-st}t^{\alpha-1}dt. \tag{A.21}$$

Realizando uma substituição de variáveis,$st = a$ e $da = sdt$, obtemos

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-a}\left(\frac{a}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{da}{s} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty (e^{-a})\frac{a^{\alpha-1}}{s^\alpha}da = \frac{s^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-a}a^{\alpha-1}da \tag{A.22}$$

Trocando a integral pela Função Gama, obtemos

$$\mathcal{L}[\Phi_\alpha(t)] = \frac{s^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha) = s^{-\alpha} \tag{A.23}$$

A.4.3 Tansformada de Laplace da função de Heaviside

Definição A.11. (Degrau Unitário) Consideremos a função Heaviside definida por

$$H(t-a) = \begin{cases} 1, & se \ \ t > a \\ 0, & se \ \ t < a. \end{cases} \tag{A.24}$$

Segue-se que a transformada de Laplace da função Heaviside, também conhecida como degrau unitário, é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[H(t-a)] &= \int_0^\infty e^{-st}H(t-a)dt, \ \ t > a \\ &= \int_0^\infty e^{-st}dt. \end{aligned}$$

Introduzindo a mudança de variável $y = (t - a)$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[H(t-a)] &= e^{-as} \int_0^\infty e^{-st} H(t-a) dy, \;\; t > a \\ &= \frac{e^{-as}}{s}. \end{aligned}$$