

Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

DINÂMICA SECULAR ROTACIONAL DE CORPOS TRI-AXIAIS: EXPANSÃO DE V
EM RESSONÂNCIAS DE PRIMEIRA ORDEM

Diego Soares Amorim

Prof.Dr. Tadashi Yokoyama

Rio Claro (SP)

2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

DIEGO SOARES AMORIM

DINÂMICA SECULAR ROTACIONAL DE CORPOS TRI-
AXIAIS: EXPANSÃO DE V EM RESSONÂNCIAS DE
PRIMEIRA ORDEM

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro,
da Universidade Estadual Paulista Júlio
de Mesquita Filho, para obtenção do grau
de Bacharel em Física.

Rio Claro - SP

2015

520 Amorim, Diego Soares
A524d Dinâmica secular rotacional de corpos tri-axiais :
expansão de V em ressonâncias de primeira ordem / Diego
Soares Amorim. - Rio Claro, 2015
28 f. : il., figs., forms.

Trabalho de conclusão de curso (bacharelado - Física) -
Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e
Ciências Exatas

Orientador: Tadashi Yokoyama

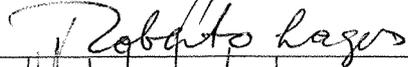
1. Astronomia. 2. Mercúrio. 3. Planetas. 4. Rotação. I.
Título.

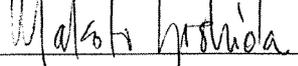
DIEGO SOARES AMORIM

DINÂMICA SECULAR ROTACIONAL DE CORPOS TRI-
AXIAIS: EXPANSÃO DE V EM RESSONÂNCIAS DE
PRIMEIRA ORDEM

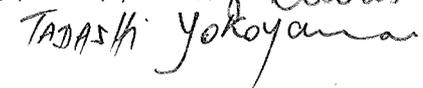
Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro,
da Universidade Estadual Paulista Júlio
de Mesquita Filho, para obtenção do grau
de Bacharel em Física.

Comissão Examinadora


_____ (orientador)




Rio Claro, 16 de Março de 2015.

Assinatura do(a) aluno(a) 
orientador(a) 

assinatura do(a)

DEDICATÓRIA

Dedico, esta que é minha maior conquista, aos meus queridos pais, Sebastião do Carmo Alves Amorim e Marli Soares Amorim, e irmãos, Igor Soares Amorim e Renata Soares Amorim.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Tadashi Yokoyama, pela orientação durante o desenvolvimento de todo esse trabalho.

À minha companheira, Mayra Seki Lansoni, por sempre estar ao meu lado, me apoiando e incentivando.

Aos meus amigos e amigas da Moradia Estudantil e, em especial, aos da Casa 3, por todo o apoio, companheirismo e momentos de descontração durante estes anos.

Ao Leonardo Di Schiavi Trotta, pela grande ajuda durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus amigos e amigas de Marília e, em especial, meus grandes parceiros Álvaro Alves Monteiro, Rafael Augusto Zavariza Cristofolletto e Laís Gallette do Carmo, por estarem sempre juntos comigo desde a infância.

Aos meus professores, por terem contribuído de maneira fundamental para o meu conhecimento.

EPÍGRAFE

“Imagination is more important than knowledge. For knowledge is limited, whereas imagination embraces the entire world, stimulating progress, giving birth to evolution”

-Albert Einstein

RESUMO

Dado um corpo finito de massa m (C_1) com momentos de inércia A , B e C . Tal corpo orbita outro de massa muito maior M (C_2), que, em princípio, será tomado como pontual, mesmo que este não seja totalmente esférico. O corpo C_1 , ao orbitar C_2 , executa um movimento translacional próximo a um kepleriano. Não será um kepleriano devido à perturbações externas. Usaremos dois sistemas de eixos: um fixo no centro de massa de C_1 e outro inercial. A atitude de C_1 , isto é, a dinâmica de rotação deste corpo fica conhecida se sabemos localizar este sistema de eixos móvel em relação ao sistema inercial. A forte gravitação exercida por C_2 sobre C_1 , que é achatada, gera torques em C_1 , o que afeta sua dinâmica de rotação. Obteremos a formulação matemática deste problema supondo C_1 um planeta e C_2 o sol. Também vale o caso satélite e planeta. No caso do sistema Mercúrio-Sol, o potencial perturbador que governa a dinâmica de rotação, para estudos teóricos, necessariamente tem que ser desenvolvido em potências da excentricidade. Como é sabido, tais expansões são delicadas devido à questão da convergência. Pretendemos então fazer um desenvolvimento até a terceira ordem (ordens superiores nem sempre são realizáveis devido ao volume de termos que são gerados nos casos de ressonâncias de primeira ordem). Definindo um moderno conjunto de variáveis canônicas (Andoyer), montaremos um problema Hamiltoniano perturbado. As Variáveis de Andoyer permitem efetuar médias, o que nos permite descartar efeitos de curto período. Nossos resultados para a variação do ângulo ressonante de Mercúrio estão em pleno acordo com os obtidos por D'Hoedt & Lemaître (2004) e Rambaux & Bois (2004).

Palavras-chave: Mercúrio. Ressonância. Planetas. Rotação

ABSTRACT

Consider a finite body of mass m (C_1) with moments of inertia A , B and C . This body orbits another one of mass much larger M (C_2), which at first will be taken as a point, even if it is not completely spherical. The body C_1 , when orbit C_2 , performs a translational motion near a Keplerian. It will not be a Keplerian due to external disturbances. We will use two axes systems: fixed in the center of mass of C_1 and other inertial. The C_1 attitude, that is, the dynamic rotation of this body is known if we know how to situate mobile system according to inertial axes system. The strong influence exerted by C_2 on C_1 , which is a flattened body, generates torques on C_1 , what affects its dynamics of rotation. We will obtain the mathematical formulation of this problem assuming C_1 as a planet and C_2 as the sun. Also applies to case of satellite and planet. In the case of Mercury-Sun system, the disturbing potential that governs rotation dynamics, for theoretical studies, necessarily have to be developed by powers of the eccentricity. As is known, such expansions are delicate because of the convergence issue. Thus, we intend to make a development until the third order (superior orders are not always achievable because of the volume of terms generated in cases of first-order resonances). By defining a modern set of canonical variables (Andoyer), we will assemble a disturbed Hamiltonian problem. The Andoyer's Variables allow to define averages, which enable us to discard short-term effects. Our results for the resonant angle variation of Mercury are in full agreement with those obtained by D'Hoedt & Lemaître (2004) and Rambaux & Bois (2004).

Keywords: Mercury. Resonance. Planets. Rotation

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.	9
2 OBJETIVOS.	9
3 MÉTODOS.	10
3.1 Sistema de Coordenadas	10
3.2 Rotação Livre e Potencial Perturbador	12
3.3 Elementos Orbitais e Potencial Perturbador Médio.	13
3.4 Termos Ressonantes	16
3.5 Hamiltoniana Média.	18
3.6 Transformações Canônicas.	19
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO.	22
5. CONCLUSÕES.	26
6. REFERÊNCIAS.	26

1. Introdução

Com o avanço das missões espaciais, a forma, a estrutura e as características orbitais e físicas dos planetas e satélites têm sido mais bem determinadas. Isto tem despertado o interesse de pesquisadores de várias áreas, e, em especial, do problema de rotação de planetas e seus satélites no sistema solar.

Tendo o planeta uma forma tri-axial, ou seja, não é uma esfera perfeita, é importante conhecer sua atitude, isto é, sua dinâmica de rotação.

Está previsto para 2015 o lançamento da missão Beppi-Colombo, num projeto conjunto “European Space Agency – Jpan Aerospace Exploration Agency” (ESA-JAXA). Esta missão tem como destino o planeta Mercúrio e dentre os vários objetivos, tem o de fazer um estudo da forma e da estrutura do planeta.

Mercúrio é o planeta mais excêntrico do sistema solar, ou seja, apresenta a mais alta excentricidade entre todos os planetas (0,206). Além disso, Mercúrio apresenta uma ressonância spin-órbita do tipo 3:2, isto é, seu período de rotação em torno do seu eixo polar dura, aproximadamente, 58 dias enquanto seu período de translação em torno do sol dura, aproximadamente 88 dias. Este é o único caso de ressonância spin-órbita além da usual 1:1 (comum em sistemas satélite-planeta, devido a efeitos dissipativos, como as marés).

Aparentemente as investigações teóricas apontam que algumas das razões deste sincronismo único são: a alta excentricidade do planeta, a composição do mesmo (que o sujeita aos efeitos de maré produzidos pela gravidade do sol) e principalmente sua forma tri-axial, fato que a missão citada acima explorará.

2. Objetivos

Objetivamos modelar as equações de longo período que envolvem a dinâmica da rotação de um planeta (ou satélite), usando o conjunto de variáveis canônicas de Andoyer.

O interesse foi obter a Hamiltoniana média que governa o comportamento do sistema, especialmente do ângulo ressonante σ .

Vários trabalhos tem tratado este problema. Por exemplo, do ponto de vista bastante teórico, ressaltamos o de D’Hoedt & Lemaître (2004) que estudaram quatro pontos de equilíbrio e determinaram as frequências em dois casos, através do uso

de variáveis ação-ângulo na vizinhança dos pontos de equilíbrio. D’Hoedt & Lemaître (2004) não consideraram o efeito “wooble”, isto é, o ângulo J de Andoyer é tomado nulo. Outro trabalho bastante completo é o de Rambaux & Bois (2004) que tem um enfoque bastante numérico e é baseada numa sofisticada teoria de movimento de todos os planetas interiores (SONYR).

Neste trabalho a modelagem que faremos vai levar em conta o “wooble”, isto é, J não será zero, e por outro lado consideramos a teoria secular de Bretagnon (1982) para a órbita de Mercúrio.

3. Métodos

Considere um corpo C_1 (planeta) cuja rotação livre será perturbada por outro corpo, C_2 (sol). Utilizamos as variáveis canônicas de Andoyer. As equações Newtonianas são escritas num referencial inercial e, posteriormente, incorporadas na Hamiltoniana através de 5 rotações realizadas em planos adequados.

A Hamiltoniana de longo período foi obtida realizando médias nos ângulos rápidos.

Veremos adiante (equação 6) que a perturbação oriunda do achatamento de Mercúrio é formada por duas parcelas bem distintas: a primeira, fatorada por J_2 , não contribuirá com termos ressonantes e só resultará em termos seculares. A outra parcela, fatorada por C_{22} , é a parte mais trabalhosa e é ela que origina os termos ressonantes do tipo 3:2, que estamos interessados.

3.1 Sistemas de Coordenadas

Consideramos fixado no centro de massa de C_1 três sistemas de referência: o primeiro ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) é tal que o plano ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) coincide com o plano invariável do sistema solar; o segundo ($\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$) é tal que o plano ($\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$) é perpendicular ao momento angular de C_1 , isto é, \mathbf{n}_3 está na direção do momento angular de C_1 e o terceiro ($\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$) é tal que o plano ($\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$) coincide com o plano equatorial de C_1 (NOYELLES *et al.*, 2008).

As coordenadas de Andoyer (DEPRIT, 1967) são baseadas em dois conjuntos de ângulos de Euler: o primeiro h, K e g localiza a posição do momento

angular no sistema de referência ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) e o segundo g, J e l localiza o sistema ($\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$) a partir do sistema ligado ao momento angular.

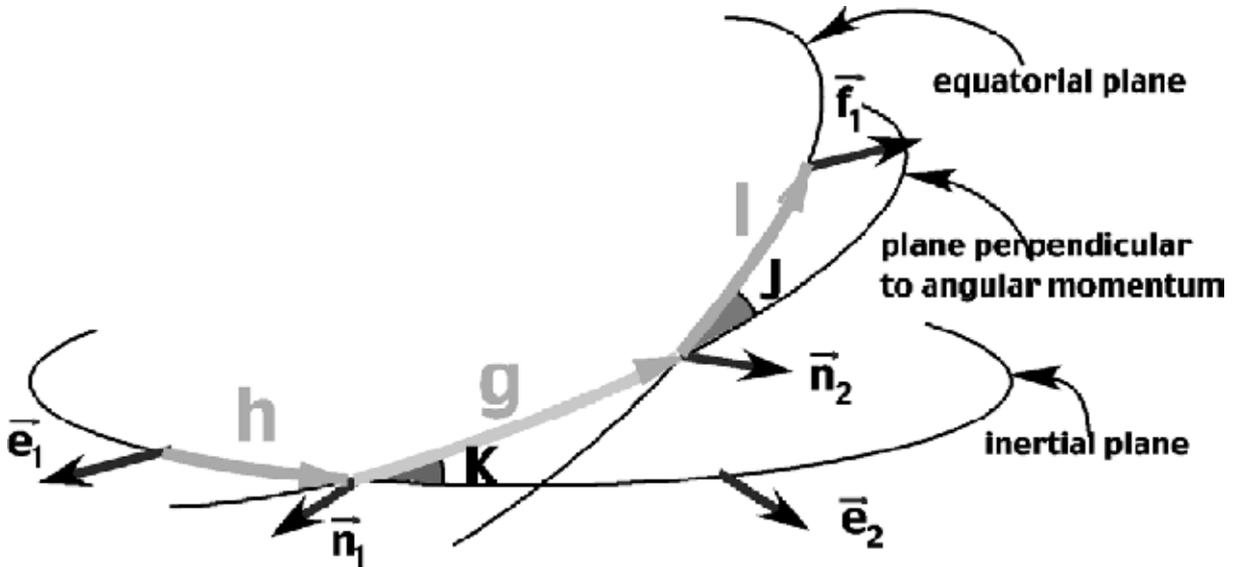


Figura 1. Variáveis de Andoyer (HENRARD, 2005)

A matriz de inércia de C_1 é:

$$I = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad (1)$$

onde, no caso de simetria axial: $A = B < C$.

As variáveis canônicas de Andoyer são compostas por três variáveis angulares (l, g e h) e seus respectivos momentos conjugados (L, G e H), onde L é a projeção do momento angular G na direção de \mathbf{f}_3 e H na direção de \mathbf{e}_3 . Assim, definimos:

$$L = G \cdot \cos(J) \quad (2)$$

$$H = G \cdot \cos(K) \quad (3)$$

O momento angular é obtido através da relação:

$$G = C \cdot \omega_{rot} \quad (4)$$

3.2 Rotação Livre e Potencial Perturbador

Livre de torques externos, a equação da energia de rotação de C_1 é dada por (DEPRIT, 1967):

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(l)^2}{A} + \frac{\cos(l)^2}{B} \right] (G^2 - L^2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{L^2}{C} \quad (5)$$

A presença de C_2 no problema gerará uma perturbação não integrável na dinâmica de C_1 . Tal perturbação pode ser representada por uma série de Fourier e resulta da figura elipsoidal de C_1 . Retendo somente os termos principais do potencial perturbador, podemos escrevê-lo da seguinte maneira (HENRARD & SCHWANEN, 2004):

$$V = - \frac{1,5 \cdot k^2 \cdot M_P \cdot M_{\odot} \cdot R^2}{r^3} [J_2(X^2 + Y^2) + 2 \cdot C_{22}(X^2 - Y^2)] \quad (6)$$

onde X e Y são as coordenadas de C_2 referente ao sistema (f_1, f_2, f_3) fixado no equador de C_1 ; k^2 é a constante gravitacional universal; M_P e R são, respectivamente massa e raio equatorial de C_1 ; M_{\odot} é a massa de C_2 ; r é o módulo do vetor que aponta de C_1 à C_2 e J_2 e C_{22} são as constantes que definem o achatamento de C_1 .

O potencial perturbador que define a atitude de C_1 será a própria perturbação causada por C_2 (sol), pois, no caso em estudo, não há outros corpos (satélites, por exemplo) que também perturbam a rotação de C_1 .

$$V_T = V_{\odot} \quad (7)$$

onde: V_T é a perturbação total e V_{\odot} é a perturbação causada pelo sol (C_2).

Para nosso estudo, será considerado que a órbita de C_2 , relativa à C_1 , não será kepleriana, pois o achatamento de C_1 gera uma perturbação em C_2 .

3.3 Elementos Orbitais e Potencial Perturbador Médio

O versor que aponta para o centro de massa de C_2 a partir do sistema inercial ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) fixo no centro de massa de C_1 é dado por (BROUWER & CLEMENCE, 1961):

$$\begin{aligned}x &= \cos(f + \omega) \cdot \cos(\Omega) - \sin(f + \omega) \cdot \sin(\Omega) \cdot \cos(I) \\y &= \cos(f + \omega) \cdot \sin(\Omega) + \sin(f + \omega) \cdot \cos(\Omega) \cdot \cos(I) \\z &= \sin(f + \omega) \cdot \sin(I)\end{aligned}\tag{8}$$

onde f é a anomalia verdadeira; ω o argumento do periastro; Ω a longitude do nodo ascendente e I a inclinação do plano da órbita em relação ao plano fundamental. Estes elementos orbitais são os parâmetros clássicos do problema de dois corpos.

Relacionamos o sistema do plano inercial ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) com o sistema do plano equatorial ($\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$) através de cinco rotações em planos adequados. Assim obtivemos as coordenadas do corpo perturbador (C_2) visto a partir do sistema ($\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$) ligado ao equador do corpo perturbado (C_1) (vide figura 1).

Definimos então as matrizes de rotação como:

$$\begin{aligned}M_3(h) &= \begin{bmatrix} \cos(h) & \sin(h) & 0 \\ -\sin(h) & \cos(h) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & M_3(g) &= \begin{bmatrix} \cos(g) & \sin(g) & 0 \\ -\sin(g) & \cos(g) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\M_1(K) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(K) & \sin(K) \\ 0 & -\sin(K) & \cos(K) \end{bmatrix} & M_1(J) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(J) & \sin(J) \\ 0 & -\sin(J) & \cos(J) \end{bmatrix} \\M_3(l) &= \begin{bmatrix} \cos(l) & \sin(l) & 0 \\ -\sin(l) & \cos(l) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{9}$$

Observando a figura 1, pode-se ver que as coordenadas ($\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$) estão ligadas aos versores ($\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$) (referidos no sistema inercial) por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} = M_3(l) \cdot M_1(J) \cdot M_1(K) \cdot M_3(g) \cdot M_3(h) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Agora temos o potencial V_{\odot} como função explícita das variáveis adequadas. Eliminamos então as variáveis de curto período fazendo médias nas mesmas.

Para explicitar melhor a montagem do potencial perturbador, separaremos a equação (6) em três parcelas:

$$V_{\odot} = T + V(J_2) + V(C_{22}) \quad (11)$$

onde:

$$V(J_2) = -\frac{1,5 \cdot k^2 \cdot M_P \cdot M_{\odot} \cdot R^2}{r^3} \cdot J_2 \cdot (\mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2) \quad (12)$$

$$V(C_{22}) = -\frac{1,5 \cdot k^2 \cdot M_P \cdot M_{\odot} \cdot R^2}{a^3} \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cdot C_{22} \cdot (\mathbf{X}^2 - \mathbf{Y}^2)$$

e T e a são, respectivamente, a energia cinética dada pela equação (5) e o semieixo maior da órbita.

Depois de realizarmos as médias nas variáveis g e M (anomalia média) (estas são variáveis de curto período), $V(J_2)$ não depende da variável l (um dos ângulos de Andoyer). Por isso não há problemas em realizarmos tais médias. Logo a expressão que define o potencial médio $V(J_2)$ ficou na forma:

$$\langle V(J_2) \rangle = -1,5 \cdot k^2 \cdot M_P \cdot M_{\odot} \cdot R^2 \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \cdot \iint_0^{2\pi} \left[\frac{J_2(\mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2)}{r^3} \right] dM dg \quad (13)$$

Mas como $\langle V(J_2) \rangle$ não é função explícita de M , tivemos que usar a relação

$$\frac{1}{r^2} dM = \frac{1}{a^2} \cdot \left[\frac{1}{(1 - e^2)^{1/2}} \right] df \quad (14)$$

Fazendo as substituições necessárias, temos que:

$$\begin{aligned} \langle V(J_2) \rangle = & -\frac{1,5 \cdot k^2 \cdot M_P \cdot M_{\odot} \cdot R^2}{a^3 \cdot (1 - e^2)^{3/2}} \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \\ & \times \int_0^{2\pi} [1 + e \cdot \cos(f)] \cdot [J_2(\mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2)] dM dg \end{aligned} \quad (15)$$

Após essas médias, esta parcela do potencial se reduz a uma forma bem mais simples:

$$\begin{aligned} \langle V(J_2) \rangle = & -\frac{1,5 \cdot k^2 \cdot M_P \cdot M_{\odot} \cdot R^2}{a^3 \cdot (1 - e^2)^{3/2}} \\ & \times [\alpha \cdot \cos(2 \cdot h - 2 \cdot \Omega) + \beta \cdot \cos(h - \Omega) + \delta] \end{aligned} \quad (16)$$

onde:

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{1}{8} \cdot [1 + \cos(I)^2 + \cos(J)^2 + \cos(J)^2 \cdot \cos(I)^2] + \frac{1}{8} \cdot \cos(K)^2 \\ & \times [1 + 2 \cdot \cos(J)^2 \cdot \cos(I)^2 + 4 \cdot \sin(J)^2 \cdot \sin(I)^2] + \frac{1}{4} \cdot \sin(K)^2 \\ & \times [\sin(I)^2 + \sin(J)^2 \cdot \cos(I)^2 + \cos(J)^2 \cdot \sin(I)^2 \cdot \sin(J)^2] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \beta = & \frac{1}{8} \sin(K)^2 \cdot [1 - 2 \cdot \sin(J)^2 \cdot \sin(I)^2 + \cos(J)^2 - \cos(I)^2 - \cos(J)^2 \\ & \times \cos(I)^2] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\delta = \frac{1}{4} \cdot \sin(2 \cdot I) \cdot \sin(K) \cdot \cos(K) [1 - 2 \cdot \sin(J)^2 + \cos(J)^2] \quad (19)$$

A parcela do potencial médio em C_{22} seria obtida de maneira semelhante.

$$\begin{aligned} \langle V(C_{22}) \rangle = & -\frac{1,5 \cdot k^2 \cdot M_p \cdot M_\odot \cdot R^2}{a^3} \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \\ & \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cdot C_{22} \cdot (X^2 - Y^2) dM dg dl \end{aligned} \quad (20)$$

Porém é nesta parcela do potencial perturbador que aparecem os termos ressonantes, assim uma média em l acaba eliminando os termos ressonantes (àqueles que caracterizam o sincronismo spin-órbita). Desta forma, devemos fazer uma média tal que os termos de curto período sejam eliminados, porém os ressonantes preservados. A estratégia é então separar os cossenos ressonantes dos demais.

3.4 Termos Ressonantes

Antes de realizarmos as médias explicitadas na equação (20), precisamos separar os termos ressonantes.

A variável ressonante que buscamos é dada por D'Hoedt & Lemaître (2004):

$$\sigma = \frac{2 \cdot (l + g + h) - 3 \cdot (\omega + \Omega + M)}{2} - \omega - \Omega \quad (21)$$

Neste momento, antes de tudo, temos que realizar as seguintes expansões em potências da excentricidade, pois a anomalia média M não aparece explicitamente em $V(C_{22})$. Fizemos isso até a ordem três devido à grande extensão dos cálculos posteriores.

$$\begin{aligned} \sin(f) = & \sin(M) + e \cdot \sin(2 \cdot M) + e^2 \cdot \left[\frac{9}{8} \cdot \sin(3 \cdot M) - \frac{7}{8} \cdot \sin(M) \right] \\ & + e^3 \cdot \left[\frac{4}{3} \cdot \sin(4 \cdot M) - \frac{7}{6} \cdot \sin(2 \cdot M) \right] \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \cos(f) = & \cos(M) + e \cdot [\cos(2 \cdot M) - 1] + \frac{9}{8} \cdot e^2 \cdot [\cos(3 \cdot M) - \cos(M)] + \frac{4}{3} \\ & \times e^3 \cdot [\cos(4 \cdot M) - \cos(2 \cdot M)] \end{aligned} \quad (23)$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 = 1 + 3 \cdot e \cdot \cos(M) + e^2 \cdot \left[\frac{3}{2} + \frac{9}{2} \cdot \cos(2 \cdot M)\right] + e^3 \times \left[\frac{27}{8} \cdot \cos(M) + \frac{53}{8} \cdot \cos(3 \cdot M)\right] \quad (24)$$

Quando realizamos tais substituições, os cálculos ficam muito extensos, por isso é impossível explicitar aqui os termos resultantes de $\langle V(C_{22}) \rangle$. Esta foi uma etapa muito importante no desenvolvimento do trabalho. Nesta etapa, temos milhares de termos (mais de 8000), por isso qualquer seleção manual seria impossível.

Para realização desta etapa, construímos dois algoritmos algébricos, independentes: o primeiro deles utilizando recursos do Maple (fizemos a substituição da variável definida na equação (21)) e o segundo utilizando o comando AWK do Linux. Verificamos os resultados obtidos em ambos os métodos e confirmamos que são exatamente iguais.

Ficamos então com a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
V(C_{22})_{ress} = & \frac{369}{1024} \frac{1}{G^4 a^3} \left(k^2 M_P M_s C_{22} R^2 e (G + L)^2 \right. \\
& \times \left(4 \left(-(H + G) (\cos(I) - 1) \left(e^2 - \frac{56}{123} \right) \cos(\sigma + 3h - 4\Omega - \omega) \right. \right. \\
& \quad - \frac{106}{123} e^2 \cos(I) (G - H) \cos(\sigma - 3\omega - 4\Omega + 3h) + \\
& \quad (H + G) \left((\cos(I) + 1) \left(e^2 - \frac{56}{123} \right) \cos(\sigma + h - \omega - 2\Omega) + \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{106}{123} e^2 \cos(I) \cos(\sigma - 3\omega - 2\omega + h) \right) \right) G \times \sin(I) \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} \\
& + (G - H)^2 (\cos(I) - 1)^2 \left(e^2 - \frac{56}{123} \right) \cos(\sigma + 4h - 5\Omega - \omega) - \\
& 2(G^2 - H^2) (\cos(I)^2 - 2\sin(I)^2 - 1) \left(e^2 - \frac{56}{123} \right) \cos(\sigma + 2h - \omega - 3\Omega) \\
& + \frac{106}{123} e^2 (\cos(I)^2 - 1) (G - H)^2 \cos(\sigma + 4h - 5\Omega - 3\omega) \\
& + (H + G) \left(-\frac{212}{123} e^2 (\cos(I)^2 - 2\sin(I)^2 + 1) (G - H) \cos(\sigma - 3\omega - 3\Omega + 2h) \right. \\
& \quad + (H + G) \left(\frac{106}{123} (\cos(I) - 1) e^2 \cos(\Omega - \sigma + 3\omega) \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + (\cos(I) + 1) \left(e^2 - \frac{56}{123} \right) \cos(\Omega - \sigma + \omega) \right) (\cos(I) + 1) \right) \right) \right) \right)
\end{aligned} \tag{25}$$

É importante ressaltar aqui que esta expressão coincide exatamente com a que encontramos em D'Hoedt & Lemaître (2004).

3.5 Hamiltoniana Média

A hamiltoniana média é definida da seguinte forma:

$$\tilde{H} = T + \langle V(J_2) \rangle + V(C_{22})_{ress} \tag{26}$$

Só nos falta obter, de forma adequada, a energia cinética de rotação T . para tal, após algumas manipulações algébricas simples, obtivemos a seguinte expressão:

$$T = \frac{1}{4} \frac{C \cdot (G^2 - L^2) \cdot (A - B) \cdot \cos(2l) + (G^2 - L^2) \cdot (A + B) \cdot C + 2 \cdot L^2 \cdot A \cdot B}{A \cdot B \cdot C} \quad (27)$$

onde A , B e C são dados por (RAMBAUX & BOIS, 2004):

$$\frac{C}{M_p \cdot R^2} = 0,34$$

$$\frac{A}{M_p \cdot R^2} = -J_2 - 2 \cdot C_{22} + \frac{C}{M_p \cdot R^2} \quad (28)$$

$$\frac{B}{M_p \cdot R^2} = -J_2 + 2 \cdot C_{22} + \frac{C}{M_p \cdot R^2}$$

3.6 Transformações Canônicas

Observemos a figura 1: quando $K = 0$, o ângulo h fica indeterminado. Da mesma forma, se $J = 0$, o ângulo g fica indeterminado. Porém a soma $l + g + h$ é sempre definida.

Assim fazemos uma simples transformação canônica:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 2 \cdot (l + g + h) \\ \xi_2 &= g \\ \xi_3 &= h \end{aligned} \quad (29)$$

e seus respectivos momentos são:

$$Z_1 = \frac{L}{2}$$

$$Z_2 = G - L \tag{30}$$

$$Z_3 = H - L$$

Precisamos escrever o potencial perturbador médio e a energia cinética de rotação dada pela equação (27) usando as novas variáveis canônicas. Após realizamos todas as substituições necessárias, ficamos com:

$$\begin{aligned}
\tilde{H} = & -3/2 \left(\frac{3}{8} \sin(I)^2 \left(1 - \frac{(2Z1 + Z3)^2}{(2Z1 + Z2)^2} \right) \left(4 \frac{Z1^2}{(2Z1 + Z2)^2} - 1/3 \right) \cos(-2\Omega + 2\xi_3) \right. \\
& + 3/2 \sin(I) \cos(I) \sqrt{1 - \frac{(2Z1 + Z3)^2}{(2Z1 + Z2)^2}} \left(4 \frac{Z1^2}{(2Z1 + Z2)^2} - 1/3 \right) \\
& \quad \left. (2Z1 + Z3) \cos(-\Omega + \xi_3) (2Z1 + Z2)^{-1} \right) \\
+ 1/8 & \left((36 \frac{Z1^2}{(2Z1 + Z2)^2} - 3) \left(1 - \frac{(2Z1 + Z3)^2}{(2Z1 + Z2)^2} \right) - 24 \frac{Z1^2}{(2Z1 + Z2)^2} + 2 \right) \sin(I)^2 \\
& + 1/8 \left(-24 \frac{Z1^2}{(2Z1 + Z2)^2} + 2 \right) \left(1 - \frac{(2Z1 + Z3)^2}{(2Z1 + Z2)^2} \right) \\
& + 1/2 + 2 \left(\frac{Z1^2}{(2Z1 + Z2)^2} \right) k^2 M_p M_{sol} R^2 J_2 a^{-3} (1 - e^2)^{-3/2} \\
& + \frac{369}{1024} M_p C_{22} (4(2Z1 + Z2) \sin(I) (-\cos(I) - 1) \\
& \quad (-Z3 + Z2) \left(-\frac{56}{123} + e^2 \right) \cos(\xi_1 - 3\xi_3 + 4\Omega - 3\lambda_K + \omega) \\
& \quad - \frac{106}{123} e^2 \cos(I) (-Z3 + Z2) \cos(-3\lambda_K + 3\omega + 4\Omega + \xi_1 - 3\xi_3) \\
& \quad + (4Z1 + Z3 + Z2) \left(\left(-\frac{56}{123} + e^2 \right) (1 + \cos(I)) \cos(\xi_1 - \xi_3 - 3\lambda_K + \omega + 2\Omega) \right. \\
& \quad \left. + \frac{106}{123} e^2 \cos(I) \cos(-3\lambda_K + 3\omega + 2\Omega + \xi_1 - \xi_3) \right) \sqrt{1 - \frac{(2Z1 + Z3)^2}{(2Z1 + Z2)^2}} \\
& \quad + (\cos(I) - 1)^2 (-Z3 + Z2)^2 \left(-\frac{56}{123} + e^2 \right) \cos(\xi_1 - 4\xi_3 + 5\Omega - 3\lambda_K + \omega) \\
& \quad \left. - 2(-Z3 + Z2) (-1 + (\cos(I))^2 - 2\sin(I)^2) (4Z1 + Z3 + Z2) \right) \\
& \quad \left(-\frac{56}{123} + e^2 \right) \cos(\xi_1 - 2\xi_3 - 3\lambda_K + \omega + 3\Omega) \\
+ \frac{106}{123} & e^2 (\cos(I) - 1) (1 + \cos(I)) (-Z3 + Z2)^2 \cos(\xi_1 - 4\xi_3 + 5\Omega - 3\lambda_K + 3\omega) \\
& + (4Z1 + Z3 + Z2) \left(-\frac{212}{123} e^2 (-2\sin(I)^2 + 1 + \right. \\
& \quad \left. \cos(I)^2) (-Z3 + Z2) \cos(-3\lambda_K + 3\omega + 3\Omega + \xi_1 - 2\xi_3) \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{106}{123} (\cos(I) - 1) e^2 \cos(\xi_1 + \Omega - 3\lambda_K + 3\omega) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(-\frac{56}{123} + e^2 \right) \cos(\xi_1 + \Omega - 3\lambda_K + \omega) (1 + \cos(I)) \right) (4Z1 + Z3 + Z2) \right. \\
& \quad \left. \left. (1 + \cos(I)) \right) \right) (4Z1 + Z2)^2 \frac{1}{2} R^2 e M_{sol} (2Z1 + Z2)^{-4} a^{-3} \\
& + 1/4 \left[4(Z1 + 1/4 Z2) Z2 C (-B + A) \cos(\xi_1 - 2\xi_2 - 2\xi_3) \right. \\
& \quad \left. + 4(Z1 + 1/4 Z2) Z2 (B + A) C + 8Z1^2 AB \right] \left(\frac{1}{ABC} \right)
\end{aligned} \tag{31}$$

Como estamos trabalhando em um sistema hamiltoniano, a dinâmica de C_1 será dada pelas equações de Hamilton:

$$\frac{d}{dt}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{\partial}{\partial(Z_1, Z_2, Z_3)} \tilde{H}$$

$$\frac{d}{dt}(Z_1, Z_2, Z_3) = -\frac{\partial}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \tilde{H}$$
(32)

Temos, da definição das novas variáveis canônicas:

$$L = 2 \cdot Z_1$$

$$G = 2 \cdot Z_1 + Z_2$$
(33)

$$H = 2 \cdot Z_1 + Z_3$$

4. Resultados e discussão

O movimento do sol visto de Mercúrio é dado conforme Bretagnon (1982).

Várias simulações foram feitas. Um interesse em especial foi o ângulo ressonante para o sistema Mercúrio-sol, isto é, considerando Mercúrio como C_1 e o sol como C_2 , reproduzimos a dinâmica da variação do ângulo ressonante de Mercúrio. Tanto os períodos quanto as amplitude foram calculados. Os resultados estão em pleno acordo com D'Hoedt & Lemaître (2004) e também com Rambaux & Bois (2004).

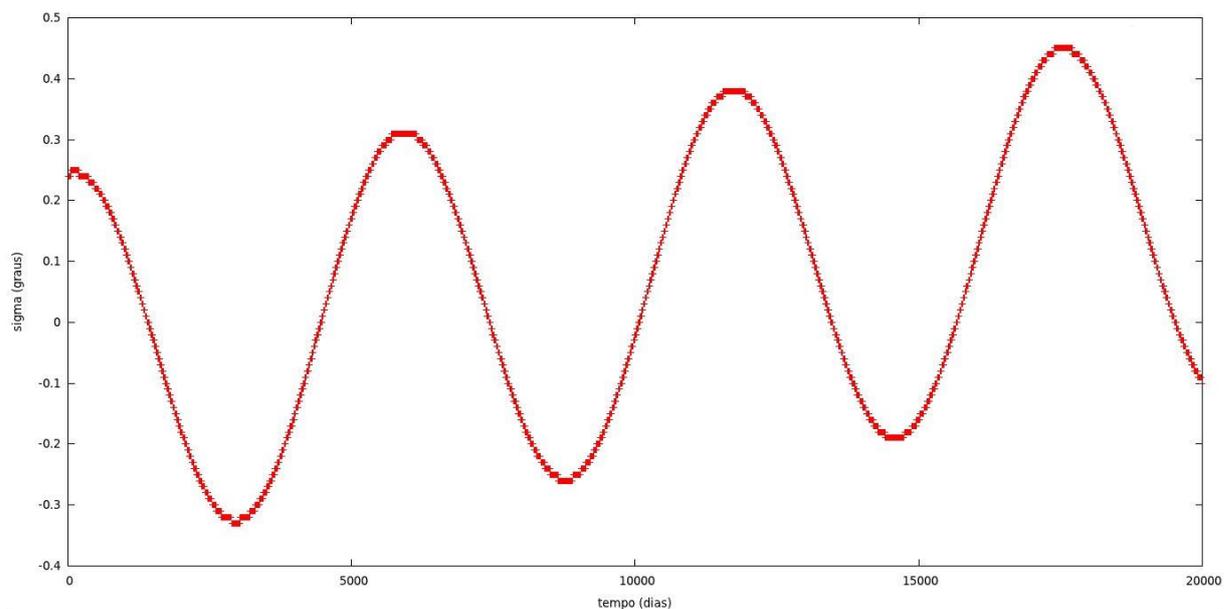


Figura 2. Variação do ângulo ressonante spin-órbita

Obtivemos, para a amplitude e período de oscilações, os valores $0,521^\circ$ e 15,837 anos, respectivamente. Na literatura, encontramos $0,527^\circ$ e 15,847 anos para a amplitude e período, respectivamente (RAMBAUX & BOIS, 2004).

Também realizamos simulações mais longas, aproximadamente 3000 anos.

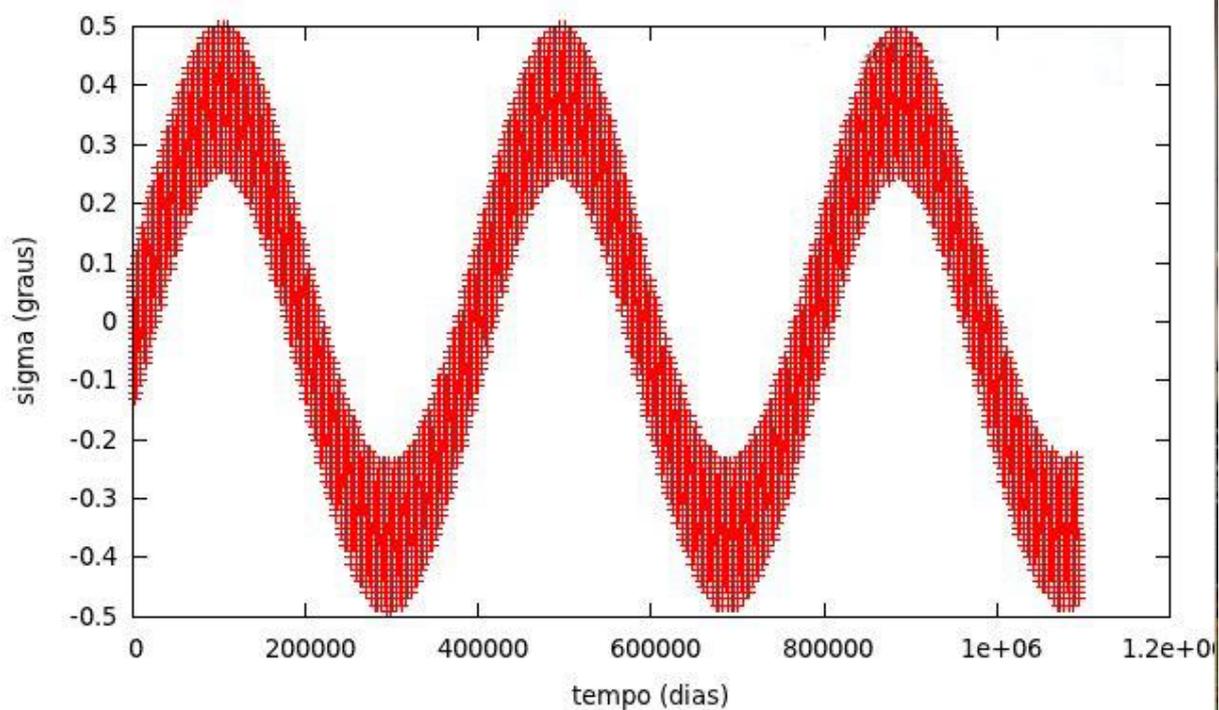


Figura 3. Variação do ângulo ressonante para um período longo

Também comparamos os períodos da precessão do ângulo $h - \Omega$. Esta outra variável representa a segunda frequência característica do movimento de Mercúrio (a primeira é o ângulo ressonante, principal foco do trabalho):

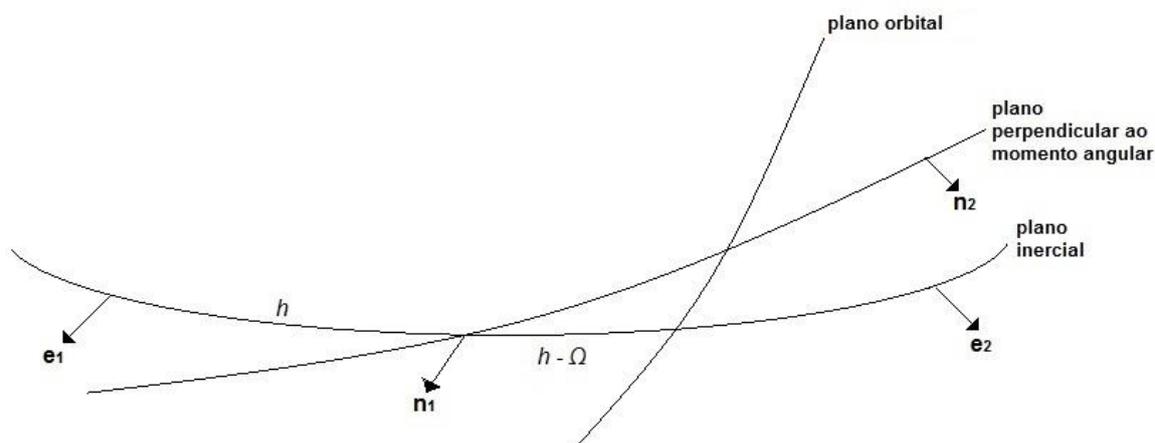


Figura 4. Definição do ângulo $h - \Omega$

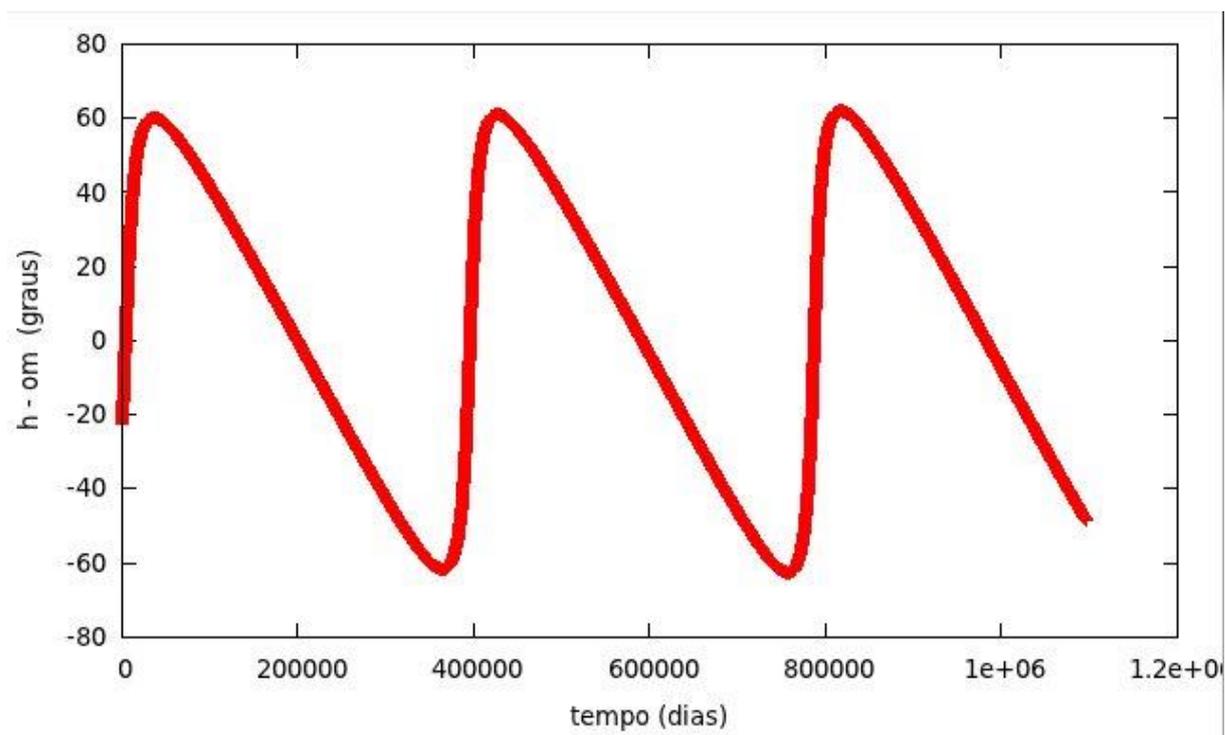


Figura 5. Variação do ângulo $h - \Omega$

Obtivemos o valor de 1067,288 anos e encontramos, na literatura, os valores 1066 anos (RAMBAUX & BOIS, 2004) e 1065,08 anos (D'HOEDT & LEMAÎTRE, 2004).

Usamos como condição inicial para os ângulos l , g e h de Andoyer os valores $25,825^\circ$, $288,12^\circ$ e $25,825^\circ$, respectivamente e para a longitude do nodo ascendente Ω , $48,33^\circ$ (os ângulos l e h foram escolhidos arbitrariamente, mas o ângulo g foi escolhido de forma que σ_0 fosse aproximadamente zero, que é um ângulo de equilíbrio da ressonância (D'HOEDT & LEMAÎTRE, 2004)).

Se entrarmos com um valor de g tal que o ângulo ressonante não esteja entre -180° e 180° , não ocorrerá libração em torno do ponto de equilíbrio, mas sim circulação. Realizamos uma simulação onde isso ocorre:

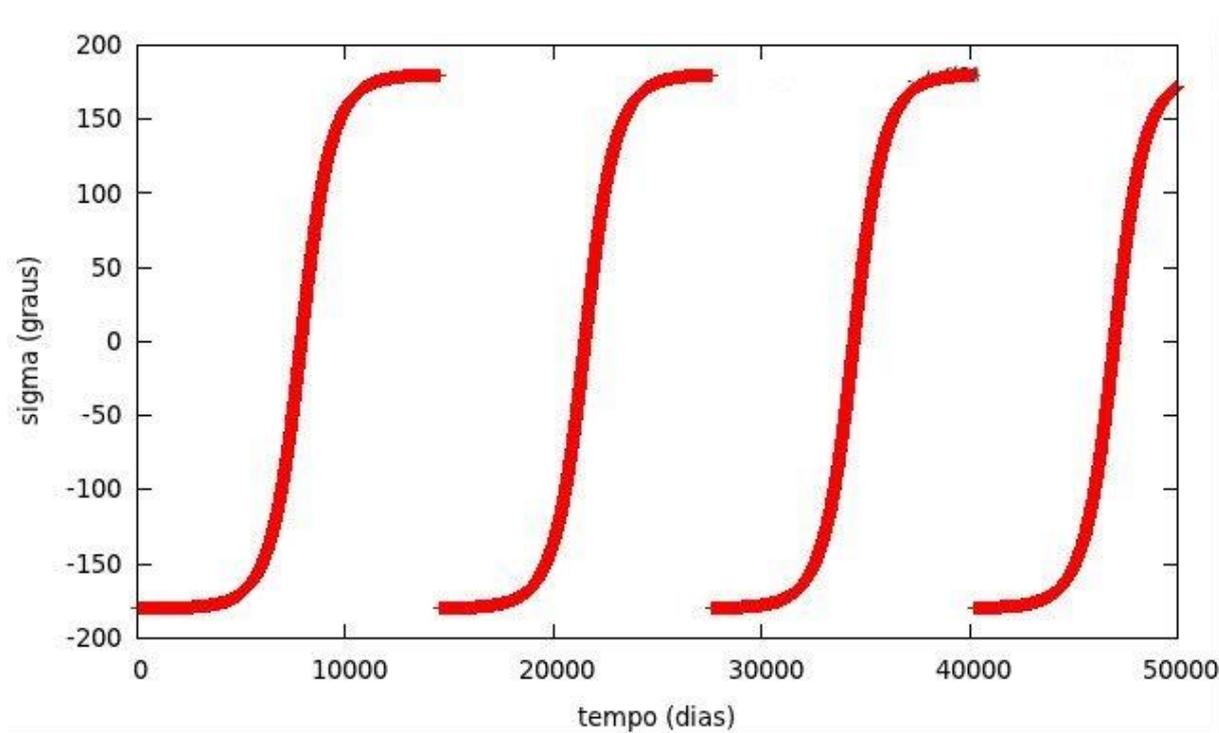


Figura 6. Variação do ângulo ressonante para $g=378^\circ$

O valor usado na simulação que gerou o gráfico acima ($g = 378^\circ$) é o limiar para deixar de ocorrer a libração em torno do ponto de equilíbrio.

Vale lembrar que a órbita de Mercúrio precessa, ou, de outra forma, dizemos que ocorre uma precessão do periélio da órbita de Mercúrio. Porém este fato não é relevante para esse estudo, uma vez que o período dessa precessão é de pouco mais de 3.000.000 (três milhões) de anos enquanto que os ângulos que buscamos estudar têm períodos de, no máximo, 1067,288 anos. Isto significa que durante os 1067,288 anos (maior período que obtivemos), o periélio da órbita de Mercúrio varia cerca de $0,1278^\circ$.

5. Conclusões

Com o método utilizado e o modelo desenvolvido, foi possível reproduzir com boa precisão os resultados que encontramos na literatura para a variação do ângulo ressonante e também da variação do ângulo $h - \Omega$ de Mercúrio. Reproduzimos, portanto, as duas frequências características do movimento deste planeta.

Estamos também investigando a hipótese de captura na ressonância 3:2 motivada por valores da excentricidade de Mercúrio: fazemos variar secularmente a distância sol-Mercúrio e investigamos possíveis valores mínimos da excentricidade que possibilitam tal captura. Não havendo captura na ressonância 3:2, a próxima seria a 1:1.

6. Referências

Brouwer, D.; Clemence, G.M. *Methods of Celestial Mechanics*. New-York Academic Press; V. 1, 1961.

Deprit, A. Free Rotation of a Rigid Body Studied in the Phase Plane. *American Journal of Physics*; V. 35, p. 424-428, 1967.

Henrard, J. The Rotation of Io. *Icarus*; V. 178, p. 144-153, 2005.

Noyelles, B.; Lemaître, A.; Vienne, A. Titan's rotation A 3-dimensional theory. *A&A*; V. 478, p. 959-970, 2008.

Henrard, J.; Schwanen, G. ROTATION OF SYNCHRONOUS SATELLITES Application to the Galilean satellites. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*; V. 89, p. 181-200, 2004.

D'Hoedt, S.; Lemaître, A. THE SPIN-ORBIT RESONANT ROTATION OF MERCURY: A TWO DEGREE OF FREEDOM HAMILTONIAN MODEL. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*; V. 89, p. 267-283, 2004.

Bretagnon, P. Théorie du mouvement de l'ensemble des planets. Solution VSOP82*. *A&A*; V. 114, p. 278-288, 1982.

Rambaux, N.; Bois, E. Theory of the Mercury's spin-orbit motion and analysis of its main librations. *A&A*; V. 413, p. 381-393, 2004.

http://www.astro.iag.usp.br/~picazzio/aga292/Notasdeaula/03_modelos_planetarios_opcao2.pdf.

http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/tcc/brc/3146/2013/trotta_ls_tcc_rcla.pdf