



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

# Estabilidade de Equações de Diferenças Quase Lineares

**Letícia Faleiros Chaves Rodrigues**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional Matemática Universitária como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre.

Orientadora  
Profa. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato

**2013**

517.38      Rodrigues, Letícia Faleiros Chaves  
R696e        Estabilidade de Equações de Diferenças Quase Lineares/ Letícia  
Faleiros Chaves Rodrigues- Rio Claro, 2013.  
105 f. : il., gráfs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto  
de Geociências e Ciências Exatas.  
Orientadora: Suzinei Aparecida Siqueira Marconato

1. Equações de Diferenças. 2. Equações de Diferenças Quase  
Lineares. 3. Estabilidade. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP  
Câmpus de Rio Claro/SP

# TERMO DE APROVAÇÃO

Letícia Faleiros Chaves Rodrigues

ESTABILIDADE DE EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS QUASE LINEARES

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

---

Profa. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato  
Orientadora

---

Prof. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira  
IGCE - Unesp/Rio Claro

---

Prof. Dr. Antônio Carlos da Silva Filho  
Matemática - Centro Universitário de Franca/Franca

**Rio Claro, 15 de Abril de 2013**

*Dedico aos meus pais Geraldo e Lourdes, e ao meu esposo Paulo.*

# Agradecimentos

Primeiramente à Deus, por me dar forças, determinação, capacidade e sabedoria para enfrentar o desconhecido e vencer.

Aos meus pais, Geraldo e Lourdes, por me mostrarem o valor de uma conquista, do conhecimento e do amor, sempre me incentivando a crescer, e de forma especial ao meu pai, que acompanhou de perto esta minha caminhada, dedicando-se para que eu pudesse realizar este sonho.

Ao meu companheiro, amigo e esposo, pelo apoio, carinho, insistência e por compreender minhas ausências.

A minha sogra e meu sogro, que me auxiliaram na minha casa, para que eu tivesse tempo para dedicar aos meus estudos.

Aos meus irmãos, Leandro e Luciano, minhas cunhadas Sônia e Flávia respectivamente, agradeço pela torcida e pelo carinho.

A todos os meus amigos e familiares que também torceram por mim. Em especial a Madrinha Rosalina, pelas palavras de forças nos momentos difíceis.

Aos membros da banca examinadora, pela assistência, disposição e contribuições.

Ao meu professor e amigo Dr. Antônio Carlos da Silva Filho, por acreditar em mim desde a graduação e ser meu maior incentivador.

Em especial à minha orientadora Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato, pela sabedoria, paciência e estímulo na realização da pesquisa.

A todos o meu muito "obrigado"!

*Um dia você aprende que realmente pode suportar.  
Que realmente é forte, e que pode ir muito mais longe.  
Depois de pensar que não se pode mais.*

William Shakespeare

# Resumo

O objetivo principal deste trabalho é estudar a estabilidade de equações de diferenças do tipo quase lineares utilizando o Método de Linearização, visando sua aplicação na análise de modelos na área de Biologia e Economia.

**Palavras-chave:** Equações de Diferenças, Equações de Diferenças Quase Lineares, Estabilidade.

# Abstract

The main objective of this work is to study the stability of almost linear difference equations, by using the Linearization Method, in order to use in the analysis of some models in Biology and Economy.

**Keywords:** Difference Equations, Almost Linear Difference Equations, Stability.

# Lista de Figuras

3.1	Pontos fixos de $f(x) = x^3$ . . . . .	28
3.2	Pontos de equilíbrio de $x(n+1) = T(x(n))$ . . . . .	29
3.3	O ponto estável $x^*$ . . . . .	30
3.4	O ponto instável $x^*$ . . . . .	31
3.5	O ponto assintoticamente estável $x^*$ . . . . .	31
3.6	O ponto $x^*$ globalmente assintoticamente estável. . . . .	32
3.7	Teia de aranha de $x(n+1) = \mu x(n)(1-x(n))$ para $\mu = 2, 5$ . . . . .	33
3.8	Preço de equilíbrio assintoticamente estável. . . . .	35
3.9	Preço de equilíbrio estável. . . . .	36
3.10	Preço de equilíbrio instável. . . . .	36
3.11	Se $a > 0$ , toda solução se afastará da solução nula. . . . .	39
3.12	Se $a < 0$ , toda solução convergirá para a solução nula. . . . .	39
3.13	Comparação entre os gráficos da função $x(t) = e^{at}$ e da função encontrada pelo método de Euler para os passos $h = 1$ e $h = 0, 5$ . . . . .	41
3.14	Ponto de equilíbrio instável ( $f''(x^*) > 0$ ). . . . .	45
3.15	Ponto de equilíbrio instável ( $f''(x^*) < 0$ ). . . . .	45
3.16	Ponto de equilíbrio instável ( $f'(x^*) = 1$ , $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) > 0$ ). . . . .	46
3.17	Ponto de equilíbrio assintoticamente estável ( $f'(x^*) = 1$ , $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) < 0$ ). . . . .	47
3.18	Ponto de equilíbrio assintoticamente estável ( $x^* = -2$ ) para $x(n+1) = x^2(n) + 3x(n)$ . . . . .	49
3.19	Ponto de equilíbrio instável ( $x^* = 0$ ) para $x(n+1) = x^2(n) + 3x(n)$ . . . . .	49
3.20	O 2-ciclo $\{0, -1\}$ para $x(n+1) = f(x(n)) = x^2(n) - 1$ é assintoticamente estável, sendo $x^* = 0$ e $x^* = -1$ , pontos de $f^2(x) = x^4 - 2x^2$ . . . . .	53
3.21	Aproximação de uma solução $x_n(x_0)$ ao 2-ciclo, para $f(x) = x^2 - 1$ . . . . .	54
4.1	Plano de fase de $y(n+1) = Jy(n)$ . . . . .	73
4.2	Plano de fase de $x(n+1) = Ax(n)$ . . . . .	74
4.3	Órbita de $y(n+1) = Jy(n)$ com condição inicial $(-1/16, 0)$ . . . . .	76
4.4	Órbita de $x(n+1) = Ax(n)$ com condição inicial $(-\sqrt{3}/16, 0)$ . . . . .	76
6.1	Gráficos das funções apresentadas em (6.22). . . . .	94

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>Teoria Geral de Equações de Diferenças</b>	<b>19</b>
2.1	Sistema dinâmico discreto . . . . .	19
2.2	Equações de diferenças lineares de primeira ordem . . . . .	21
2.2.1	Casos especiais de equações lineares . . . . .	22
2.3	Equações de diferenças lineares de segunda ordem com coeficientes constantes . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Estabilidade de equações de diferenças autônomas: caso real</b>	<b>27</b>
3.1	Pontos de equilíbrio . . . . .	27
3.1.1	Estabilidade de Pontos de Equilíbrio . . . . .	29
3.2	Teia de aranha . . . . .	32
3.3	Soluções numéricas de equações diferenciais . . . . .	37
3.3.1	Método de Euler . . . . .	37
3.4	Critérios para Estabilidade Assintótica dos pontos de equilíbrio . . . . .	41
3.5	Pontos periódicos e ciclos . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Estabilidade de sistemas lineares de equações de diferenças</b>	<b>55</b>
4.1	Sistemas lineares de equações de diferenças . . . . .	55
4.2	Estabilidade . . . . .	61
4.2.1	Estabilidade de sistemas lineares não autônomos . . . . .	62
4.2.2	Estabilidade de sistemas lineares com coeficientes constantes . . . . .	66
4.2.3	Critérios para a estabilidade dos sistemas bidimensionais . . . . .	67
4.3	Análise do plano de fase . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Sistemas quase lineares</b>	<b>79</b>
5.1	Definição . . . . .	79
5.2	Estabilidade de equações de diferenças quase lineares . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Aplicações</b>	<b>87</b>
6.1	Um modelo de ciclo de negócios . . . . .	87
6.2	Um modelo hospedeiro-parasita [1] . . . . .	90

<b>7 Conclusão</b>	<b>95</b>
<b>Referências</b>	<b>97</b>
<b>A Demonstração do Teorema 4.2.7</b>	<b>99</b>
A.1 Critérios para a estabilidade dos sistemas bidimensionais . . . . .	99
<b>B Forma Canônica de Jordan</b>	<b>103</b>
B.1 Estabilidade de sistemas lineares autônomos . . . . .	103

# 1 Introdução

Equações discretas ou equações de diferenças descrevem sistemas dinâmicos cuja evolução no tempo é medida em intervalos discretos. Em muitas aplicações é desejável saber se todos os estados de um sistema tendem para seu estado de equilíbrio, ou seja, soluções constantes determinadas por pontos especiais chamados pontos de equilíbrio. Porém, há casos em que é grande a dificuldade para encontrar uma solução de uma dada equação numa forma explícita. Dessa maneira, é importante considerar informações sobre as soluções dessas equações sem realmente resolvê-las. Para isso, tomamos pontos iniciais próximos aos pontos de equilíbrio e analisamos o comportamento das soluções determinadas por esses pontos com o propósito de saber se as soluções se aproximam ou se afastam da solução constante. Esta parte da teoria das Equações Discretas e Contínuas chama-se análise de estabilidade.

Este trabalho tem como objetivo estudar a estabilidade de equações do tipo quase lineares, estas que apresentam diversas aplicações, não apenas biológicas mas também dentro da economia, podendo ser útil nestas áreas. Desta maneira, partimos do estudo da teoria geral de equações de diferenças, analisamos a estabilidade de equações de diferenças lineares e a estabilidade de sistemas lineares de equações de diferenças, e por fim estudamos as equações de diferenças quase lineares.

Deste modo este trabalho ficou assim dividido:

No segundo capítulo, procuramos estabelecer a teoria geral sobre equações discretas. Começamos por definir equação discreta e sua relação com equações de diferenças e, assim, como encontrar soluções de equações de diferenças lineares de primeira e segunda ordem dada uma condição inicial. Aqui encontram-se também alguns métodos para determinar soluções numéricas para equações diferenciais.

No terceiro capítulo, apresentamos os conceitos de ponto de equilíbrio, estabilidade de pontos de equilíbrio e em seguida apresentamos o método da Teia de Aranha para analisar graficamente o comportamento das soluções das equações discretas no caso real. Para finalizar o capítulo, estabelecemos os critérios de estabilidade para pontos de equilíbrio e definimos pontos periódicos e ciclos.

No quarto capítulo, estendemos o conceito de ponto de equilíbrio e estabilidade de pontos de equilíbrio para sistema linear de equações de diferenças. Para finalizar o capítulo, estabelecemos critérios para a estabilidade de sistemas de duas equações e

analisamos o plano de fase.

Por fim, no quinto capítulo, apresentamos as equações de diferenças quase lineares e sua estabilidade. Para analisar sua estabilidade, realizamos um processo de linearização, onde foi possível encontrar um modelo linear que fosse uma boa aproximação da equação quase linear, e assim, através da estabilidade da equação linear, analisamos a estabilidade da equação quase linear.

A teoria abordada baseia-se, principalmente, nas referências [1] e [6] e as aplicações podem ser encontradas nas referências [1] e [5].

Para a construção dos gráficos apresentados no trabalho, foi utilizado o programa Wolfram Mathematica 8.0.

## 2 Teoria Geral de Equações de Diferenças

Um sistema pode ser definido como um conjunto de objetos agrupados por alguma interação ou interdependência, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os elementos desse conjunto; e é dito dinâmico quando algumas grandezas que caracterizam seus objetos constituintes variam no tempo. Um sistema dinâmico descreve diferentes tipos de situações e, conseqüentemente, diferentes tipos de modelos podem ser construídos e usados para se estudar sua evolução temporal. O objetivo desses estudos teóricos é prever o futuro (ou explicar o passado) de modo científico. Para fazer isso, é necessário conhecer e compreender as regras que governam as mudanças que ocorrerão. Quando o tempo  $n$  é contínuo para a grandeza  $x(n)$ , a variação é medida pela derivada  $\frac{d}{dn}x(n)$  e, assim, o estudo matemático de mudanças corresponde ao estudo de equações diferenciais. Ao assumir que o tempo evolui de forma discreta, ou melhor, que o sistema se altera somente em determinados instantes, deve-se então, estudar equações de diferenças.

- **Sistema dinâmico discreto:** quando a variável  $n$  é um número inteiro. Normalmente, toma-se  $n \in \mathbb{Z}_+$ , ou seja, assume-se que  $n$  é um número inteiro não-negativo. A evolução de um sistema de tempo discreto é governada por uma ou mais equações, que relacionam o valor da variável  $x$  no instante  $n \in \mathbb{Z}_+$  a valores de  $x$  em outros instantes, tais como:  $n + 1$ ,  $n + 2$ ,  $n + 3$ .
- **Sistema dinâmico contínuo:** quando a variável  $n$  é um número real. Normalmente, toma-se  $n \in \mathbb{R}_+$ , ou seja, assume-se que  $n$  é um número real não-negativo. A evolução de um sistema de tempo contínuo é governada por uma ou mais equações diferenciais, que relacionam a variável  $x$  com suas derivadas.

### 2.1 Sistema dinâmico discreto

Equações discretas geralmente descrevem a evolução de um certo fenômeno ao longo do tempo.

**Definição 2.1.** Dada uma função  $f : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , uma equação discreta de primeira ordem é dada por:

$$x(n+1) = f(n, x(n)), \quad (2.1)$$

onde  $n \geq n_0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), para algum  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 2.1.1.** Dada uma condição inicial  $x(n_0) = x_0$ , existe apenas uma única solução  $x(n) \equiv x(n, n_0, x_0)$  de (2.1) para  $n \geq n_0$  tal que  $x(n_0, n_0, x_0) = x_0$ .

Esta solução pode ser construída por iterações:

$$\begin{aligned} x(n_0+1, n_0, x_0) &= f(n_0, x(n_0)), \\ x(n_0+2, n_0, x_0) &= f(n_0+1, x(n_0+1)), \\ x(n_0+3, n_0, x_0) &= f(n_0+2, x(n_0+2)). \end{aligned}$$

Generalizando, temos  $x(n, n_0, x_0) = f(n-1, x(n-1, n_0, x_0))$ .

Se a função  $f$  não depende explicitamente de  $n$ , isto é, se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , a equação passa a ser

$$x(n+1) = f(x(n)), \quad (2.2)$$

que é chamada de equação *autônoma*. Partindo de um valor inicial  $x_0$  obtemos, através da relação (2.2), a sequência

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$$

Por conveniência serão adotadas as notações:

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)), f^3(x_0) = f(f(f(x_0))), \dots$$

e  $x(n) = x_n$ . Assim,

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0) = f(f(x_0)), x_3 = f^3(x_0) = f(f(f(x_0))), \dots, x_n = f^n(x_0),$$

em que  $f^n(x_0)$  é chamada de  $n$ -ésima iteração de  $x_0$  através de  $f$ . O conjunto de todas as iterações  $f^n(x_0)$ , para  $n \geq n_0$ , é chamado de *órbita* de  $x_0$  ou solução da equação discreta e será denotada por  $O(x_0)$ .

As equações dadas por  $x_{n+1} - x_n = g(x_n)$  são chamadas de equações de diferenças e são equivalentes à (2.2) se  $f(x) = g(x) + x$ . Por isso, equações de diferenças são geralmente consideradas sinônimos de equações discretas.

Em geral, uma equação de diferenças linear não-homogênea de ordem  $k$  é dada por:

$$x(n+k) + p_1(n)x(n+k-1) + \dots + p_k(n)x(n) = g(n), \quad (2.3)$$

onde  $p_i(n)$  e  $g(n)$  são funções reais definidas para  $n \geq n_0$ ,  $i = 1, \dots, k$  e  $p_k(n) \neq 0$  para todo  $n \geq n_0$ . Se  $g(n)$  for identicamente nula, então (2.3) será dita uma equação homogênea.

Na próxima seção, estudaremos casos especiais de equações de diferenças, denominadas equações lineares. Restringiremos nossa discussão às equações de diferenças lineares de primeira e segunda ordem.

## 2.2 Equações de diferenças lineares de primeira ordem

Sejam  $a(n)$  e  $g(n)$  funções reais definidas para  $n \geq n_0$ . Uma equação linear não homogênea de primeira ordem é dada por:

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \quad y(n_0) = y_0, \quad n \geq n_0, \quad (2.4)$$

e a equação *homogênea* associada é dada por:

$$x(n+1) = a(n)x(n), \quad x(n_0) = x_0, \quad n \geq n_0. \quad (2.5)$$

Em ambas as equações, assumimos que  $a(n) \neq 0$ , para  $n \geq n_0$ .

Dado  $x(n_0) = x_0$ , podemos obter a solução de (2.5) através de iterações:

$$x(n_0 + 1) = a(n_0)x(n_0) = a(n_0)x_0,$$

$$x(n_0 + 2) = a(n_0 + 1)x(n_0 + 1) = a(n_0 + 1)a(n_0)x_0,$$

$$x(n_0 + 3) = a(n_0 + 2)x(n_0 + 2) = a(n_0 + 2)a(n_0 + 1)a(n_0)x_0.$$

Assim, por Indução Finita, podemos mostrar que:

$$x(n) = a(n-1)a(n-2) \dots a(n_0)x_0,$$

$$x(n) = \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] x_0. \quad (2.6)$$

A única solução da equação não homogênea (2.4) pode ser encontrada da seguinte forma:

$$y(n_0 + 1) = a(n_0)y_0 + g(n_0),$$

$$y(n_0 + 2) = a(n_0 + 1)y(n_0 + 1) + g(n_0 + 1)$$

$$= a(n_0 + 1)a(n_0)y_0 + a(n_0 + 1)g(n_0) + g(n_0 + 1).$$

Assim, por indução, para todo  $n \in \mathbb{Z}_+$ , segue que:

$$y(n) = \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[ \prod_{i=r+1}^{n-1} a(i) \right] g(r). \quad (2.7)$$

De fato, assumindo que a igualdade (2.7) seja válida para  $n = k$ ,  $y(k+1) = a(k)y(k) + g(k)$ , assim, pela fórmula (2.7) e considerando  $\prod_{i=k+1}^k a(i) = 1$  e  $\sum_{i=k+1}^k a(i) = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} y(k+1) &= a(k) \left[ \prod_{i=n_0}^{k-1} a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1} \left[ a(k) \prod_{i=r+1}^{k-1} a(i) \right] g(r) + g(k) \\ &= \left[ \prod_{i=n_0}^k a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1} \left( \prod_{i=r+1}^k a(i) \right) g(r) + \left( \prod_{i=k+1}^k a(i) \right) g(k) \\ &= \left[ \prod_{i=n_0}^k a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^k \left( \prod_{i=r+1}^k a(i) \right) g(r). \end{aligned}$$

Portanto, a fórmula (2.7) é válida para todo  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

### 2.2.1 Casos especiais de equações lineares

Há dois tipos de casos especiais de (2.4) que são importantes em muitas aplicações. O primeiro é dado por:

$$y(n+1) = ay(n) + g(n), \quad y(0) = y_0$$

em que a função  $a(n)$  de (2.4) é constante e  $n_0 = 0$ . Para determinar sua solução, usamos a fórmula (2.7),

$$y(n) = a^n y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} g(k). \quad (2.8)$$

O segundo caso especial é a equação dada por:

$$y(n+1) = ay(n) + b, \quad y(0) = y_0.$$

Para determinar sua solução, usamos a fórmula (2.8) e obtemos,

$$y(n) = \begin{cases} a^n y_0 + b \left[ \frac{a^n - 1}{a - 1} \right], & \text{se } a \neq 1, \\ y_0 + bn, & \text{se } a = 1. \end{cases} \quad (2.9)$$

Como exemplo da utilização da fórmula (2.7) para  $n_0 \neq 0$ , considere a equação

$$x(n+1) = 2x(n) + 3^n, \quad x(1) = 0, 5,$$

cuja solução é dada por:

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2} 2^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{n-k-1} 3^k \\ &= 2^{n-2} + 2^{n-1} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{3}{2} \right)^k \\ &= 2^{n-2} + 2^{n-1} \frac{3}{2} \left( \frac{\left( \frac{3}{2} \right)^{n-1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} \right) \\ &= 3^n - 5 \cdot 2^{n-2}. \end{aligned}$$

A seguir, apresentamos uma aplicação que envolve o modelo dado pelo segundo caso.

Uma certa droga é aplicada em um corpo uma vez a cada 4 horas. Seja  $D(n)$  a soma da droga no sistema sanguíneo no  $n$ -ésimo intervalo. O corpo elimina certa fração  $p$  da droga durante cada intervalo de tempo. Se a quantidade aplicada for  $D_0$ , temos:

$$\begin{aligned} D(1) &= D_0 + D_0 - pD_0 \\ D(2) &= D_0 + D_1 - pD(1) \\ &\dots \\ D(n+1) &= D(n) - pD(n) + D_0 = (1-p)D(n) + D_0. \end{aligned}$$

Assim, a quantidade da droga no sistema sanguíneo no tempo  $(n + 1)$  é igual à quantidade no tempo  $n$  menos a fração  $p$  que é eliminada do corpo, mais a nova dosagem  $D_0$ .

Usando (2.9), temos:

$$\begin{aligned} D(n) &= (1 - p)^n D_0 + D_0 \left[ \frac{(1-p)^n - 1}{(1-p) - 1} \right] \\ &= (1 - p)^n D_0 - \frac{(1-p)^n D_0}{p} + \frac{D_0}{p} . \\ &= (1 - p)^n \left[ D_0 - \frac{D_0}{p} \right] + \frac{D_0}{p} \end{aligned}$$

Como  $0 < 1 - p < 1$ , concluímos que, com o passar do tempo, o valor  $D(n)$  tende a se estabilizar no valor  $\frac{D_0}{p}$ .

## 2.3 Equações de diferenças lineares de segunda ordem com coeficientes constantes

Uma equação de diferenças linear *homogênea* de segunda ordem com coeficientes constantes é dada por:

$$x(n + 2) + p_1 x(n + 1) + p_2 x(n) = 0, \quad x(n_0) = x_0, \quad n \geq n_0 \geq 0, \quad (2.10)$$

onde os  $p_i$ 's são constantes,  $1 \leq i \leq 2$  com  $p_2 \neq 0$ .

No próximo resultado provamos que a combinação linear de duas soluções de (2.10) também é solução de (2.10).

**Teorema 2.3.1.** Se  $\varphi_1(n)$  e  $\varphi_2(n)$  forem soluções de (2.10) e se  $c_1$  e  $c_2$  forem constantes, então a função  $\varphi(n) = c_1 \varphi_1(n) + c_2 \varphi_2(n)$  também será solução de (2.10).

*Demonstração.* Note que

$$\begin{aligned} \varphi(n + 2) + p_1 \varphi(n + 1) + p_2 \varphi(n) &= c_1 [\varphi_1(n + 2) + p_1 \varphi_1(n + 1) + p_2 \varphi_1(n)] \\ &\quad + c_2 [\varphi_2(n + 2) + p_1 \varphi_2(n + 1) + p_2 \varphi_2(n)] = 0, \end{aligned}$$

pois  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são soluções de (2.10). Logo,  $\varphi$  também é solução de (2.10).  $\square$

De acordo com S. Elaydi [1], temos que o conjunto  $S$  de todas as soluções de (2.10) forma um espaço vetorial de dimensão 2 com as operações de adição e de multiplicação por um escalar. Assim, dada uma base para  $S$ , sabemos que qualquer solução de (2.10) será combinação linear dos elementos da base. Veja E. L. Lima [3]. No capítulo 4, esta teoria será abordada de maneira mais detalhada, trabalhando-se com sistemas de equações de diferenças.

Assumimos agora que as soluções de (2.10) são da forma  $\lambda^n$ , onde  $\lambda$  é um número complexo. Substituindo este valor em (2.10), temos:

$$\lambda^2 + p_1 \lambda + p_2 = 0.$$

Este polinômio é chamado de *polinômio característico* de (2.10), e as raízes  $\lambda$  são chamadas de raízes características. Resolvendo esta equação, temos:

$$\lambda_1 = \frac{-p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2}.$$

Temos três casos a considerar:

- (i) Quando  $p_1^2 - 4p_2 > 0$ , teremos duas raízes características reais e distintas:  $x_1(n) = \lambda_1^n$  e  $x_2(n) = \lambda_2^n$ . Assim, uma solução poderá ser dada por

$$x(n) = a_1 \lambda_1^n + a_2 \lambda_2^n,$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  são constantes.

- (ii) Quando  $p_1^2 - 4p_2 = 0$ , teremos duas raízes características reais e iguais. Assim,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p_1}{2}$ , e sendo  $x_1(n) = \lambda_1^n$  uma solução de (2.10), teremos que encontrar  $x_2(n)$ . Supondo  $x_2(n) = n\lambda_1^n$  e substituindo em (2.10) temos:

$$(n+2)\lambda_1^{n+2} + p_1(n+1)\lambda_1^{n+1} + p_2n\lambda_1^n = (\lambda_1^2 + p_1\lambda_1 + p_2)n\lambda_1^n + (2\lambda_1 + p_1)\lambda_1^{n+1} = 0,$$

pois, como  $\lambda_1$  é raiz característica então  $\lambda_1^2 + p_1\lambda_1 + p_2 = 0$ ; além disso  $\lambda_1 = -\frac{p_1}{2}$  então  $2\lambda_1 + p_1 = 0$ . Logo,  $x_2(n)$  também é solução de (2.10). Portanto, uma solução de (2.10) é dada por:

$$x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) = a_1 \lambda_1^n + a_2 n \lambda_1^n = (a_1 + na_2) \lambda_1^n,$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  são constantes.

O terceiro caso é quando as raízes características são complexas. Antes de encontrar a solução deste caso, apresentaremos o seguinte teorema:

**Teorema 2.3.2.** Seja  $x(n) = u(n) + iv(n)$  uma solução complexa da equação de diferenças (2.10), onde  $u$  e  $v$  são funções reais. Então,  $u$  e  $v$  são soluções reais de (2.10).

*Demonstração.* Como  $x(n) = u(n) + iv(n)$  é uma solução de (2.10), então:

$$\begin{aligned} u(n+2) + iv(n+2) + p_1[u(n+1) + iv(n+1)] + p_2[u(n) + iv(n)] &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow u(n+2) + p_1u(n+1) + p_2u(n) + i[v(n+2) + p_1v(n+1) + p_2v(n)] &= 0. \end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} u(n+2) + p_1u(n+1) + p_2u(n) &= 0 \quad \text{e} \\ v(n+2) + p_1v(n+1) + p_2v(n) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $u$  e  $v$  são soluções reais de (2.10). □

Analisemos agora o terceiro caso:

- (iii) Quando  $p_1^2 - 4p_2 < 0$ , temos raízes características complexas  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  e  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \neq 0$ .

Escrevendo  $\lambda_1$  em coordenadas polares, temos  $\lambda_1 = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta)$ , onde  $\alpha = r\cos(\theta)$  e  $\beta = r\sin(\theta)$ ,  $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ,  $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ , com  $\alpha \neq 0$ .

Temos:

$$x(n) = \lambda_1^n = (r\cos(\theta) + ir\sin(\theta))^n = r^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)),$$

assim,  $x_1(n) = r^n \cos(n\theta)$  e  $x_2(n) = r^n \sin(n\theta)$  são soluções reais de (2.10).

Logo, uma solução de (2.10) é dada por:

$$x(n) = r^n (c_1 \cos(n\theta) + c_2 \sin(n\theta)).$$

Após caracterizarmos equações de diferenças de primeira e segunda ordem e analisarmos as soluções de alguns casos especiais, no próximo capítulo, analisaremos a estabilidade de equações de diferenças autônomas de primeira ordem, no caso real.

# 3 Estabilidade de equações de diferenças autônomas: caso real

Neste capítulo vamos analisar o comportamento qualitativo das soluções de um sistema discreto autônomo,

$$x(n+1) = f(x(n)), \tag{3.1}$$

em que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

## 3.1 Pontos de equilíbrio

A noção de ponto de equilíbrio é central nos estudos de sistemas dinâmicos e alguns sistemas físicos. Em muitas aplicações na Biologia, Economia, Física, Engenharia, é desejável que todos os estados de um dado sistema tendam a um estado de equilíbrio.

**Definição 3.1.** *Um ponto  $x^*$  no domínio de  $f$  é dito ponto de equilíbrio de (3.1) se for um ponto fixo de  $f$ , isto é,  $f(x^*) = x^*$ .*

Em outras palavras,  $x^*$  é uma solução constante de (3.1), pois se  $x(0) = x^*$  for o ponto inicial, então  $x(1) = f(x^*) = x^*$ ,  $x(2) = f(x(1)) = f(x^*) = x^*$ , e assim por diante. Graficamente, um ponto de equilíbrio é a abscissa do ponto onde o gráfico de  $f$  intersecta a linha diagonal  $y = x$ . Por exemplo, há três pontos de equilíbrio para a equação

$$x(n+1) = x^3(n)$$

pois, para  $f(x) = x^3$ , a equação  $f(x^*) = x^*$ , ou seja  $x^3 = x$ , apresenta três raízes, que são -1, 0 e 1 (Figura 3.1).

Como consequência do Teorema do Valor Intermediário, temos assegurada a existência de, pelo menos, um ponto fixo para uma função  $f$  sob determinadas condições. Vejamos:

**Teorema 3.1.** *(Teorema do Valor Intermediário (TVI)). Suponha que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função contínua e que  $y_0$  esteja entre  $f(a)$  e  $f(b)$ . Então, existe pelo menos um  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $f(x_0) = y_0$ .*

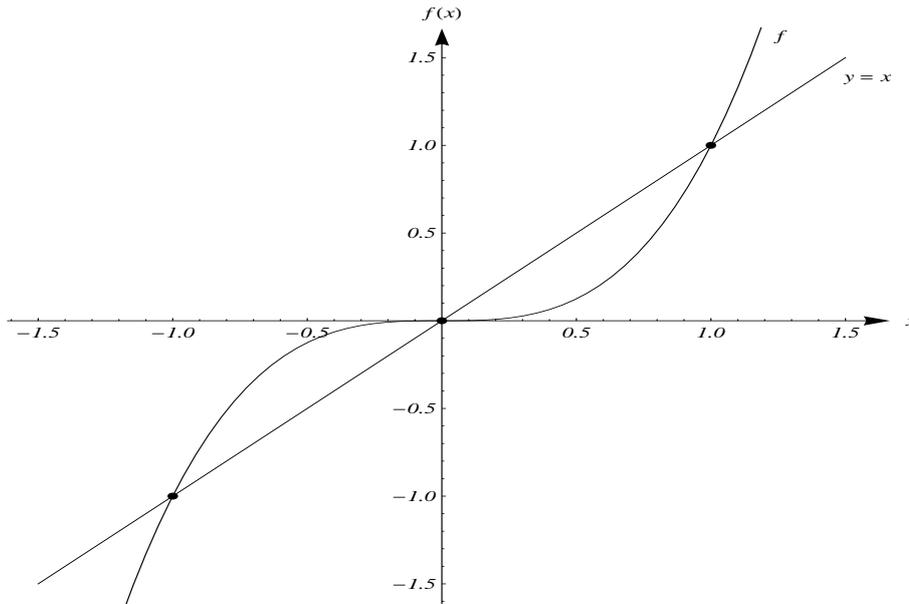


Figura 3.1: Pontos fixos de  $f(x) = x^3$ .

**Teorema 3.2.** (*Teorema do Ponto Fixo*). *Suponha que  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  seja uma função contínua. Então existe pelo menos um ponto fixo para  $f$  em  $[a, b]$ .*

*Demonstração.* O resultado deste teorema nos diz que o conjunto dos pontos de intersecção do gráfico de  $f$  com a diagonal  $y = x$  é não vazio. Para demonstrarmos tal fato, consideremos a função:  $h(x) = f(x) - x$ . Note que os zeros de  $h$  são os pontos fixos de  $f$ .

Por hipótese temos:

$$(i) \quad f(a) \in [a, b] \Rightarrow a \leq f(a) \leq b \Rightarrow f(a) - a \geq 0.$$

$$(ii) \quad f(b) \in [a, b] \Rightarrow a \leq f(b) \leq b \Rightarrow f(b) - b \leq 0.$$

Por (i) e (ii), temos

$$f(b) - b \leq 0 \leq f(a) - a \Rightarrow h(b) \leq 0 \leq h(a) \Rightarrow 0 \in [h(b), h(a)].$$

Como  $h$  é uma função contínua em  $[a, b]$ , pelo TVI existe um ponto  $c \in [a, b]$  tal que  $h(c) = 0$ , ou seja,  $h(c) = f(c) - c = 0$ . Logo,  $c$  é ponto fixo de  $f$  em  $[a, b]$ .  $\square$

*Observação:* Este teorema não fornece um método para encontrar o ponto fixo. Ele apenas garante sua existência, o que, a princípio, já será suficiente para os nossos propósitos.

Se  $x^*$  for um ponto de equilíbrio de (3.1), a sua órbita será  $O(x^*) = \{x^*, x^*, \dots\}$ , pois, para  $x_0 = x^*$ ,  $x_1 = f(x_0) = f(x^*) = x^*$  e genericamente  $x_n = f(x_{n-1}) = f(x^*) = x^*$  para todo  $n \geq n_0$ . Há um fenômeno que é exclusivo de equação de diferenças e não é possível ocorrer em equações diferenciais: um estado de não-equilíbrio pode vir a ser um estado de equilíbrio em um tempo finito. Vejamos a seguinte definição:

**Definição 3.2.** *Seja  $x_0$  um ponto no domínio de  $f$ . Se existirem um inteiro positivo  $r$  e um ponto de equilíbrio  $x^*$  de (3.1) tal que  $f^r(x_0) = x^*$ ,  $f^{r-1}(x_0) \neq x^*$ , então  $x_0$  será um ponto de equilíbrio eventual.*

Por exemplo, consideremos a equação

$$x(n+1) = T(x(n)),$$

onde,

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{para } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & \text{para } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Há dois pontos de equilíbrio, 0 e  $\frac{2}{3}$  (veja figura 3.2). Se  $x(0) = \frac{1}{4}$ , então  $x(1) = \frac{1}{2}$ ,  $x(2) = 1$  e  $x(3) = 0$ , e como 0 é ponto de equilíbrio,  $x(4) = T(x(3)) = T(0) = 0$  e sucessivamente,  $x(n) = 0$ , para  $n > 4$ . Então  $\frac{1}{4}$  é um ponto equilíbrio eventual e sua órbita é dada por  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, \dots)$ .

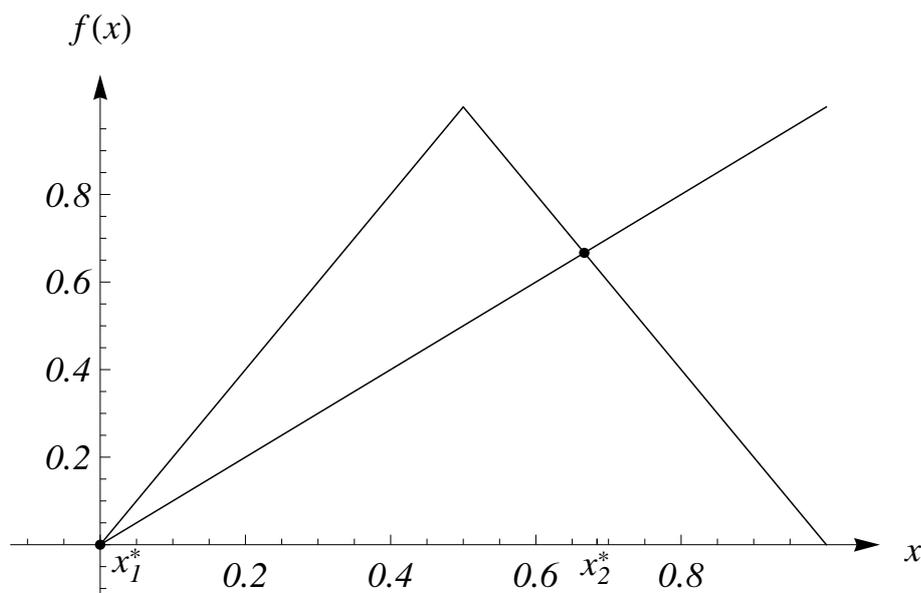


Figura 3.2: Pontos de equilíbrio de  $x(n+1) = T(x(n))$ .

Um dos principais objetivos do estudo de sistemas dinâmicos é analisar as soluções cujos valores iniciais estão próximos dos pontos de equilíbrio. Este estudo consiste na teoria de estabilidade, como veremos a seguir.

### 3.1.1 Estabilidade de Pontos de Equilíbrio

**Definição 3.3.** (a) *O ponto de equilíbrio  $x^*$  de (3.1) é estável (Figura 3.3) se dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|x_0 - x^*| < \delta$  implica  $|f^n(x_0) - x^*| < \epsilon$  para todo  $n > 0$ , ou seja, se  $x(0) = x_0$  estiver no intervalo centrado em  $x^*$  com raio  $\delta$ , então  $x(n)$*

estará no intervalo centrado em  $x^*$  com raio  $\epsilon$  para todo  $n > 0$ . Se  $x^*$  não for estável, então é chamado instável (Figura 3.4).

(b) O ponto  $x^*$  é dito ser atrator se existir  $\eta > 0$  tal que

$$|x_0 - x^*| < \eta \quad \text{implica} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x^*.$$

Se a afirmação for válida para todo  $\eta$ ,  $x^*$  será chamado atrator global ou globalmente atrator.

(c) O ponto  $x^*$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável se é estável e atrator. (Figura 3.5) Se a afirmação for válida para todo  $\eta$ ,  $x^*$  será dito ser globalmente assintoticamente estável (Figura 3.6)

Observemos que, no caso em que  $x^*$  não é estável, existe  $\epsilon > 0$ , tal que para todo  $\delta$  em que  $|x_0 - x^*| < \delta$  implica  $|f^n(x_0) - x^*| \geq \epsilon$ , para algum  $n > 0$  ou seja, não importa quão perto  $x(0) = x_0$  esteja de  $x^*$ , haverá um instante  $n > 0$  tal que a distância entre  $x(n)$  e  $x^*$  é maior ou igual a  $\epsilon$ .

Nos gráficos apresentados a seguir, a união dos pontos será utilizada para facilitar a visualização, uma vez que o gráfico é composto apenas de pontos isolados.

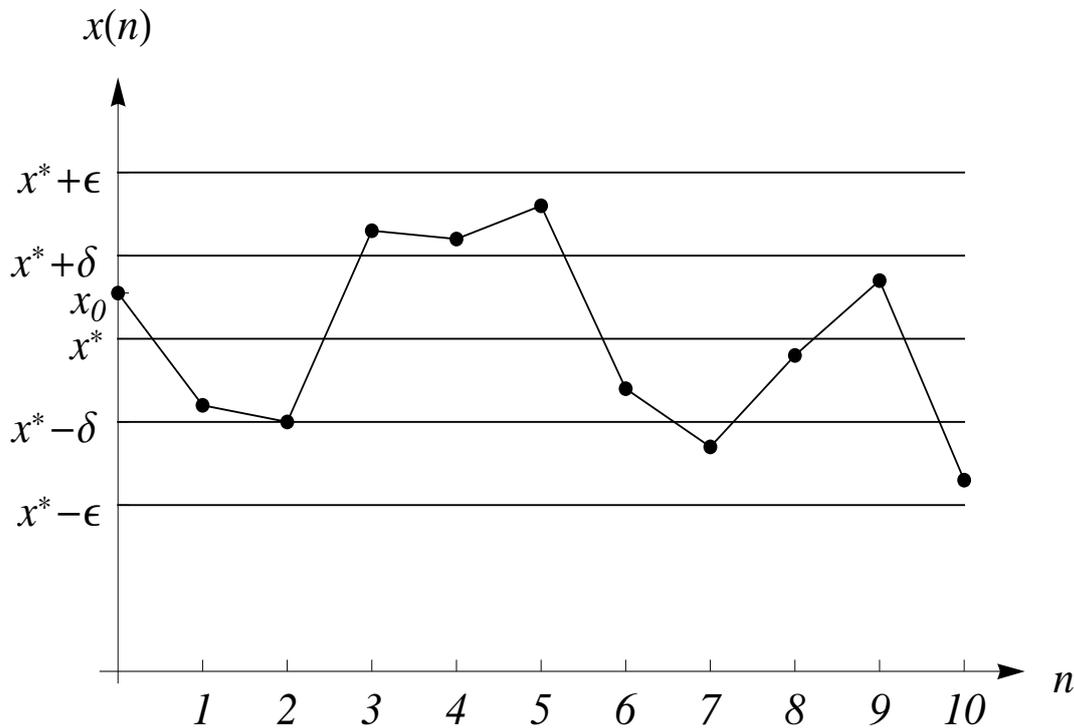
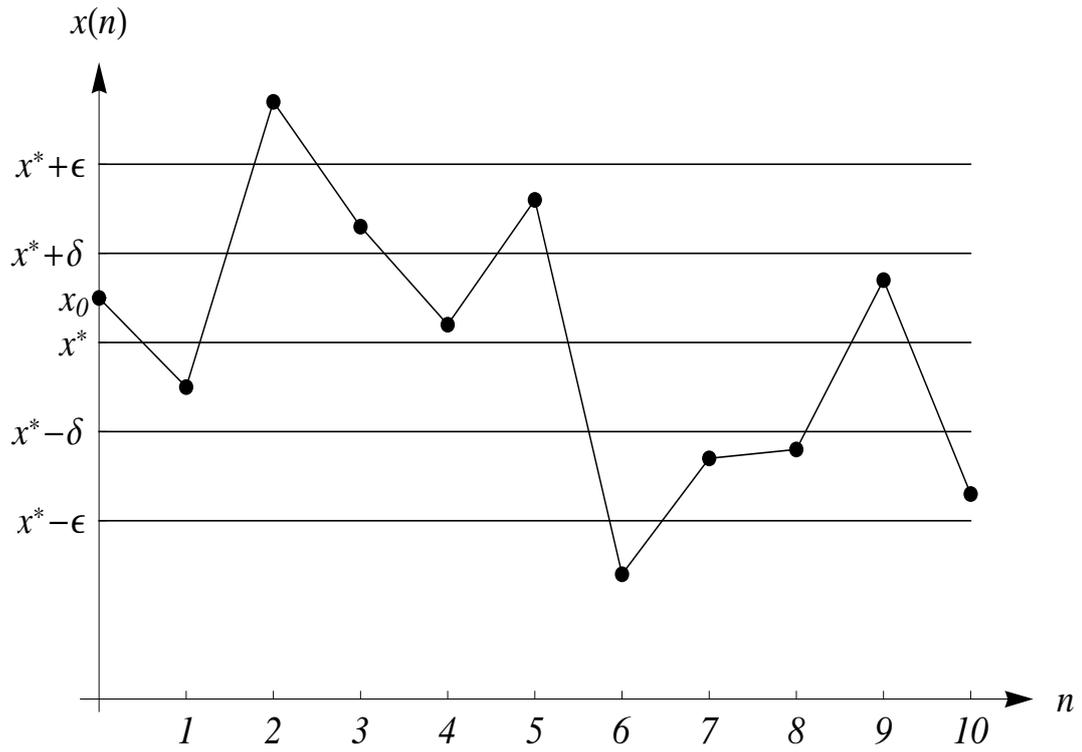
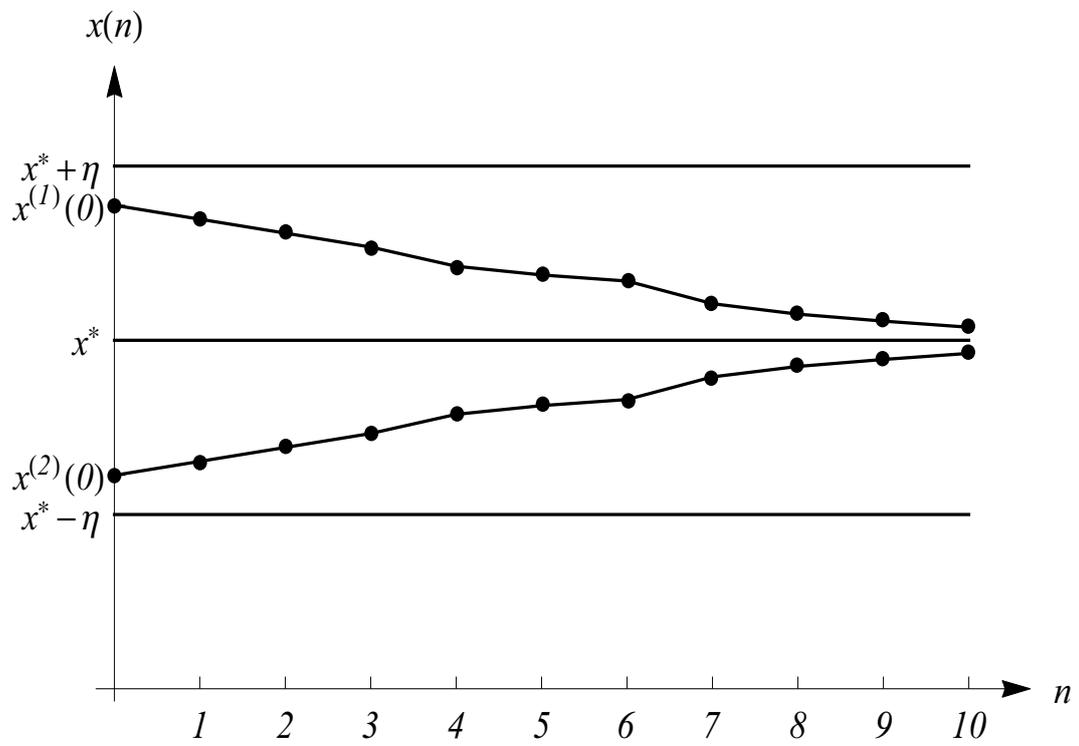


Figura 3.3: O ponto estável  $x^*$ .

Para nos ajudar a entender o comportamento de soluções de (3.1) nas proximidades das soluções constantes dadas pelos pontos de equilíbrio, usaremos uma técnica gráfica chamada teia de aranha (cobweb), apresentada a seguir.

Figura 3.4: O ponto instável  $x^*$ .Figura 3.5: O ponto assintoticamente estável  $x^*$ .

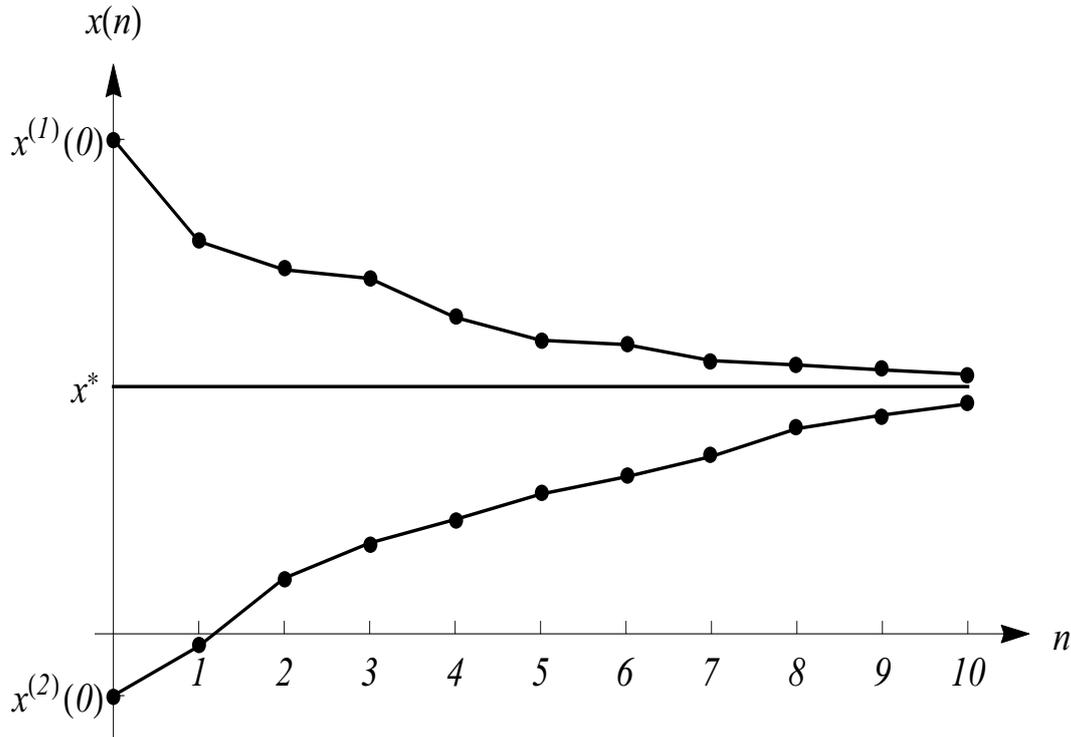


Figura 3.6: O ponto  $x^*$  globalmente assintoticamente estável.

## 3.2 Teia de aranha

A Teia de aranha (cobweb) é um método que nos permite, em muitos casos, utilizar o gráfico da função  $f$  de (3.1) para determinarmos o comportamento da órbita de um ponto. Esse processo geométrico consiste em colocar no mesmo conjunto de eixos coordenados os gráficos de  $f$  e da diagonal  $y = x$ . Sabemos que a órbita de um ponto  $x_0$  qualquer é a sequência de pontos  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ , em que  $x_i = f^i(x_0)$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ . Assim, tomamos o ponto  $(x_0, x_0)$  na diagonal  $y = x$  e, então, traçamos uma reta vertical por  $(x_0, x_0)$  até atingir o gráfico de  $f$ , dessa forma, determinaremos o ponto  $(x_0, f(x_0))$ . Deste ponto, traçamos uma reta horizontal até encontrar o gráfico de  $y = x$ , obtendo assim, o ponto  $(f(x_0), f(x_0))$ , que é o ponto  $(x_1, x_1)$ . Repetindo o processo, para  $x_1$  encontraremos, no gráfico de  $f$ , o ponto  $(f(x_0), f(f(x_0))) = (f(x_0), f^2(x_0))$ . Procedendo assim, encontramos todos os pontos que desejamos da órbita de  $x_0$  e podemos visualizar se a órbita se aproxima ou se afasta de algum ponto de equilíbrio de (3.1).

Por exemplo, seja  $y(n)$  o tamanho de uma população em um tempo  $n$ , descrito por

$$y(n+1) = \mu y(n), \quad \mu > 0,$$

onde  $\mu$  é a taxa de crescimento da população de uma geração para outra. Se a população inicial for dada por  $y(0)$ , temos

$$y(n) = \mu^n y_0.$$

Se  $\mu > 1$ , então  $y(n)$  aumenta ilimitadamente. Se  $\mu = 1$ , então  $y(n) = y_0$  para todo  $n > 0$ , o que significa que o tamanho da população é sempre constante. Contudo, para  $\mu < 1$ , temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = 0$ , e a população será extinta.

Quando os recursos forem limitados, podemos supor que o crescimento da população num intervalo de tempo unitário será reduzido de uma quantidade proporcional ao quadrado da população existente no início do intervalo. De fato, se existir uma competição entre elementos de uma mesma espécie, o termo de inibição do crescimento populacional será proporcional ao produto destes elementos, assim temos:

$$y(n+1) = \mu y(n) - by^2(n).$$

Chamando de  $x(n) = \frac{b}{\mu}y(n)$ , obtemos:

$$x(n+1) = \mu x(n)(1-x(n)) = f(x(n)). \quad (3.2)$$

onde  $f(x) = \mu x(1-x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Esta equação é uma equação de diferenças de primeira ordem não linear, conhecida como equação logística (discreta). Para encontrar os pontos de equilíbrio de (3.2), resolvemos a equação  $f(x^*) = \mu x^*(1-x^*) = x^*$ , e assim, temos dois pontos de equilíbrio,  $x^* = 0$  e  $x^* = \frac{(\mu-1)}{\mu}$ . A figura (3.7) mostra a teia de aranha referente à equação (3.2) quando  $\mu = 2,5$  e  $x(0) = 0,1$ .

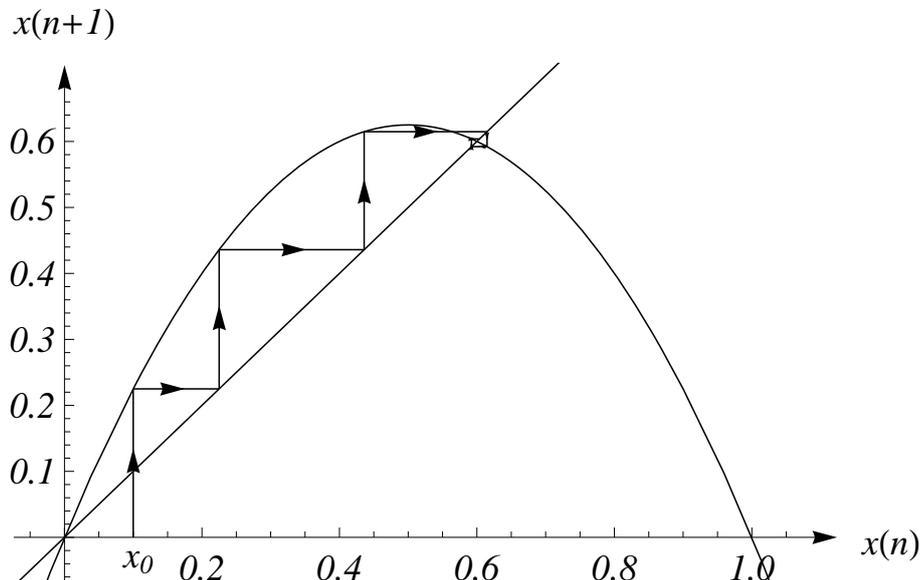


Figura 3.7: Teia de aranha de  $x(n+1) = \mu x(n)(1-x(n))$  para  $\mu = 2,5$ .

Neste caso, a figura sugere que o ponto de equilíbrio  $x^* = 0$  é instável e  $x^* = 0,4$  é assintoticamente estável. Retomaremos este exemplo posteriormente para realizar a demonstração analítica do tipo de estabilidade de  $x^*$ .

**Exemplo 1. O fenômeno da teia de aranha em uma aplicação econômica**

No mercado financeiro, as decisões dos produtores quanto às quantidades a produzir são tomadas num período antes da sua venda, ou seja, a oferta corrente depende do preço do ano anterior. Deste modo, estamos diante de um modelo usando equação de diferenças. Estudando os preços de uma certa mercadoria, seja  $S(n)$  o número de unidades oferecidas,  $D(n)$  o número de unidades procuradas e  $p(n)$  o preço por unidade em um período  $n$ . Partimos do princípio que a procura (D) reage ao preço (p) instantaneamente, isto é, a procura em um dado período é uma função do preço nesse mesmo período,  $D(n+1) = g(p(n+1))$ , enquanto que a oferta (S) reage com o desfasamento de um período, isto é, a oferta num dado período é uma função do preço no período anterior,  $S(n+1) = h(p(n))$ .

Por simplicidade, adotaremos que  $D(n)$  depende somente de  $p(n)$  e é denotado por:

$$D(n) = -m_d p(n) + b_d, \quad m_d > 0, \quad b_d > 0.$$

Esta equação refere-se à relação preço-procura e indica que um aumento de uma unidade no preço produz uma diminuição de  $m_d$  unidades na procura, criando uma curva de inclinação negativa. Também assumimos que a relação preço-oferta relata o fornecimento em algum período para o preço em um período anterior, isto é,

$$S(n+1) = m_s p(n) + b_s.$$

A constante  $m_s$  é positiva, pois um aumento de uma unidade no preço causa um aumento de  $m_s$  unidades no fornecimento, criando uma curva de inclinação positiva. Portanto, como a oferta no período  $n+1$  depende do preço no período precedente  $n$ , um fabricante será tentado a produzir mais se o preço na época anterior se estabeleceu a um nível elevado. A procura no período  $n+1$  depende do preço neste mesmo período. Admitindo que, em cada período, o mercado determina o preço de tal modo que este torna a procura igual a oferta, ou seja, a procura absorve exatamente as quantidades oferecidas, temos:

$$\begin{aligned} D(n+1) &= S(n+1) \\ -m_d p(n+1) + b_d &= m_s p(n) + b_s, \end{aligned}$$

ou

$$p(n+1) = Ap(n) + B = f(p(n)), \tag{3.3}$$

onde  $A = -\frac{m_s}{m_d}$ ,  $B = \frac{b_d - b_s}{m_d}$ . e  $f(x) = Ax + B$ .

Esta equação é uma equação de diferenças linear de primeira ordem. O preço de equilíbrio  $p^*$  é definido na economia como o preço que resulta em uma intersecção do fornecimento  $S(n+1)$  com a demanda  $D(n)$ . Também,  $p^*$  é o único ponto fixo de  $f(p)$  em (3.3), que é dado por

$$\begin{aligned} f(p^*) &= p^* \\ Ap^* + B &= p^* \\ (A - 1)p^* &= -B \\ p^* &= \frac{B}{1-A} \end{aligned}$$

Como  $A$  é a razão das constantes relacionadas com a oferta e com a procura, esta razão determina o comportamento da sequência de preços. Há três casos para serem considerados:

- (a)  $-1 < A < 0$ ,
- (b)  $A = -1$ ,
- (c)  $A < -1$ .

Estes três casos serão discutidos usando a teia de aranha.

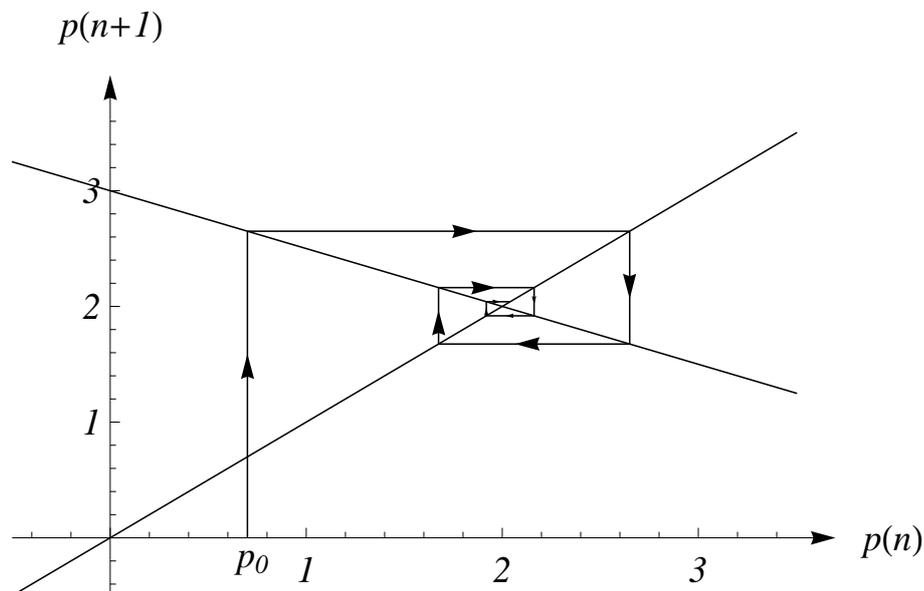


Figura 3.8: Preço de equilíbrio assintoticamente estável.

- (i) No caso (a), apesar dos preços alternarem para cima e para baixo, convergem para o preço de equilíbrio  $p^*$ . Portanto, o ponto de equilíbrio parece ser assintoticamente estável.(Figura 3.8).
- (ii) No caso (b), os preços oscilam entre dois valores apenas. Se  $p(0) = p_0$ , então  $p(1) = -p_0 + B$  e  $p(2) = p_0$ . (Figura 3.9).
- (iii) No caso (c), preços oscilam ao redor do ponto de equilíbrio  $p^*$ , mas se afastam progressivamente. Portanto, o ponto de equilíbrio parece ser instável (Figura 3.10).



Posteriormente, faremos a demonstração analítica do tipo de estabilidade de  $p^*$ , dependendo do parâmetro  $A$ .

Assim, podemos esperar que quando a oferta for maior que a procura ( $m_s > m_d$ ), o preço, ao longo do tempo, afasta-se do preço de equilíbrio. Se acontecer o contrário, se a oferta for menor que a procura ( $m_s < m_d$ ), o preço tende, ao longo do tempo, para o preço de equilíbrio. E se a oferta e a procura forem iguais, o preço oscila ao longo do tempo apenas em dois valores.

Usando (2.9), temos que a solução explícita de (3.3) com  $p(0) = p_0$  é dada por:

$$\begin{aligned} p(n) &= A^n p_0 + B \left( \frac{A^n - 1}{A - 1} \right) \\ &= A^n p_0 - B \left( \frac{A^n - 1}{1 - A} \right) \\ &= \left( p_0 - \frac{B}{1 - A} \right) A^n + \frac{B}{1 - A}. \end{aligned}$$

Como vimos, a utilidade do método da *Teia de Aranha* é uma representação gráfica que nos permite interpretar resultados através de retas.

Na próxima seção, nós evidenciamos a utilização da equação de diferenças para determinar soluções aproximadas de soluções contínuas de uma equação diferencial ordinária.

### 3.3 Soluções numéricas de equações diferenciais

Muitos fenômenos nas áreas das Ciências, Engenharias, Economia etc., são modelados por equações diferenciais. Tais modelos descrevem como as populações ou objetos evoluem continuamente no tempo. Mas, os métodos analíticos para a resolução de equações diferenciais aplicam-se apenas a certos tipos de problemas. Por isso, recorre-se com frequência ao uso de métodos numéricos para obter a solução de uma equação diferencial sujeita a uma dada condição. A seguir, apresentaremos o *Método de Euler*, que nos permite aproximar a solução de uma equação diferencial a uma equação de diferenças associada, que é uma discretização do problema original.

#### 3.3.1 Método de Euler

Considere a equação diferencial de primeira ordem:

$$x'(t) = g(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \leq t \leq b. \quad (3.4)$$

Tomando uma partição regular de  $[t_0, b]$ , o tamanho de cada subintervalo é chamado **tamanho do passo** do método e é denotado por  $h = \frac{b-t_0}{N}$ , onde  $N$  é o número de subintervalos. Este tamanho do passo define os pontos da partição  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$ , onde  $t_n = t_0 + nh$ ,  $n = 0, \dots, N - 1$ . O Método de Euler aproxima  $x'(t)$  por  $\frac{x(t+h) - x(t)}{h}$ . Substituindo este valor em (3.4), temos:

$$x(t+h) = x(t) + hg(t, x(t)).$$

Para  $t = t_0 + nh$ , obtemos:

$$x(t_0 + (n+1)h) = x(t_0 + nh) + hg(t_0 + nh, x(t_0 + nh)),$$

para  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ .

Adaptando a notação de equação de diferenças e substituindo  $x(t_0 + nh)$  por  $x(n)$ , temos:

$$x(n+1) = x(n) + hg(n, x(n)). \quad (3.5)$$

A equação (3.5) define o **Algoritmo de Euler**, que fornece uma solução "próxima" à solução da equação diferencial (3.4). Assim, quanto menor o passo  $h$ , mais próxima a solução da equação de diferenças (3.5) estará da solução da equação diferencial (3.4).

Note que  $x^*$  é um ponto de equilíbrio de (3.5) se e somente se  $g(n, x^*) = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Assim, a equação diferencial (3.4) e a equação de diferenças (3.5) têm o mesmo ponto de equilíbrio. De fato, pela teoria das equações diferenciais, o ponto  $x^* \in \mathbb{R}^n$  é um ponto de equilíbrio para a equação diferencial (3.4) se  $g(t, x^*) = 0$ , para  $t_0 \leq t \leq b$ . Por outro lado, se  $x^*$  for ponto de equilíbrio de (3.5), temos

$$x^* = x^* + hg(n, x^*) \Rightarrow hg(n, x^*) = 0,$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $h$  é não nulo, necessariamente  $g(n, x^*) = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Tomemos, como exemplo, a equação diferencial:

$$x'(t) = ax(t), \quad x(0) = 1, \quad t \in [0, 1], \quad a \neq 0. \quad (3.6)$$

Os pontos de equilíbrio são obtidos fazendo  $x'(t) = 0$ . Portanto,  $ax(t) = 0$  e assim temos o ponto de equilíbrio  $x^* = 0$ . A solução da equação é  $x(t) = be^{at}$  e, como  $x(0) = 1$ , obtemos  $b = 1$ . Portanto,

$$x(t) = e^{at}.$$

Se  $a > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = +\infty$ , e assim toda solução se afasta do ponto de equilíbrio  $x^* = 0$ . Por outro lado, se  $a < 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  e toda solução converge para o ponto de equilíbrio  $x^* = 0$ .

Usando o Método de Euler para a equação diferencial (3.6), concluímos que a equação de diferenças correspondente é dada por:

$$x(n+1) = x(n) + hax(n), \quad x(0) = 1.$$

Tomando  $a = -0,2$  e o passo  $h = 1$ , temos:

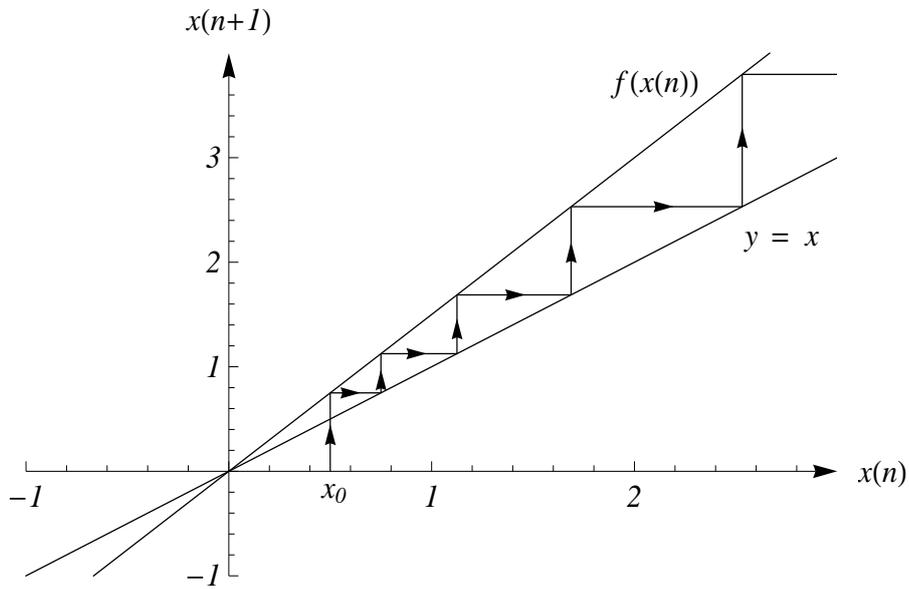


Figura 3.11: Se  $a > 0$ , toda solução se afastará da solução nula.

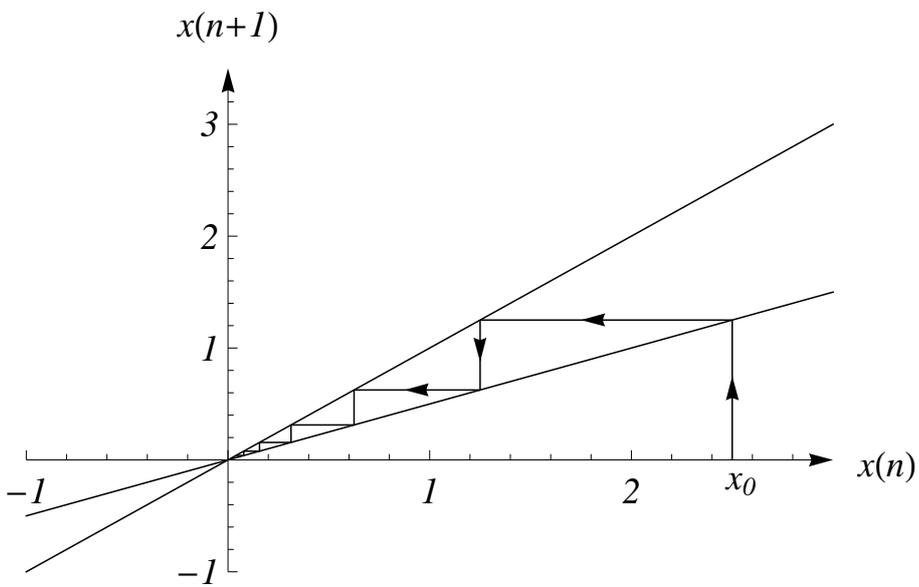


Figura 3.12: Se  $a < 0$ , toda solução convergirá para a solução nula.

$$x(1) = x(0) - 0,2hx(0) = 1 - 0,2 = 0,8.$$

Por recorrência, temos:

$$\begin{aligned}x(2) &= 0,64 \\x(3) &= 0,512 \\x(4) &= 0,4096 \\x(5) &= 0,3277 \\x(6) &= 0,2621 \\x(7) &= 0,2097 \\x(8) &= 0,1678 \\x(9) &= 0,1342 \\x(10) &= 0,1074.\end{aligned}$$

Como podemos ver, a solução está tendendo à zero, pois  $a < 0$ . Agora tomando  $h = 0,5$ , temos:

$$\begin{aligned}x(1) &= x(0) - 0,2hx(0) = 1 - 0,2 \times 0,5 = 0,9 \\x(2) &= 0,81 \\x(3) &= 0,729 \\x(4) &= 0,6561 \\x(5) &= 0,5905 \\x(6) &= 0,5314 \\x(7) &= 0,4782 \\x(8) &= 0,4305 \\x(9) &= 0,3874 \\x(10) &= 0,3486 \\&\vdots \\x(19) &= x(18) - 0,2hx(18) = 0,1351.\end{aligned}$$

Observe que, resolvendo a equação diferencial, encontraremos  $x(10) = e^{-2} = 0.1353$ , e podemos comparar com a equação de diferenças obtida pelo método de Euler, onde tomamos o passo  $h = 1$ , temos  $x(10) = 0.1074$ . Podemos melhorar esta estimativa tomando um passo menor, que é o caso  $h = 0,5$ , e efetuando os cálculos até  $n = 20$  temos  $x(20) = 0.1216$ , que apresenta uma maior proximidade do resultado da equação diferencial. Pela figura (3.13), podemos visualizar esta comparação, e perceber que quanto menor o passo  $h$  melhor a aproximação.

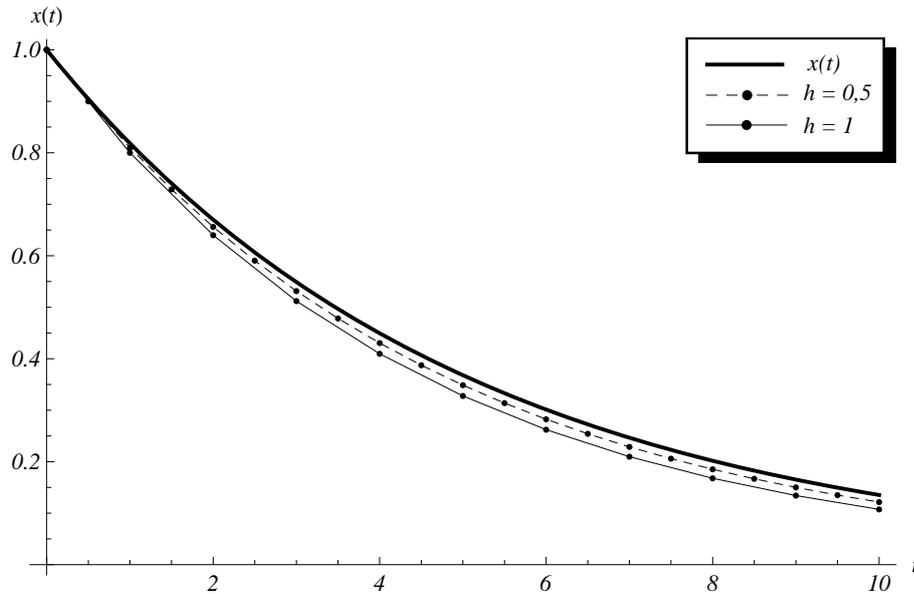


Figura 3.13: Comparação entre os gráficos da função  $x(t) = e^{-t}$  e da função encontrada pelo método de Euler para os passos  $h = 1$  e  $h = 0,5$ .

Na próxima seção estudaremos um critério simples, porém importante na análise da estabilidade assintótica dos pontos de equilíbrio.

### 3.4 Critérios para Estabilidade Assintótica dos pontos de equilíbrio

Para estudar a estabilidade assintótica de pontos de equilíbrio, a principal ferramenta é dada pelo seguinte teorema:

**Teorema 3.4.1.** Seja  $x^*$  um ponto de equilíbrio da equação de diferenças

$$x(n + 1) = f(x(n)), \tag{3.7}$$

com  $n \geq n_0 > 0$ , onde  $f$  é uma função com derivada contínua em  $x^* \in \mathbb{R}$ . Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) Se  $|f'(x^*)| < 1$ , então  $x^*$  será assintoticamente estável.
- (ii) Se  $|f'(x^*)| > 1$ , então  $x^*$  será instável.

*Demonstração.*

- (i) Para provar que o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável, mostremos que tal ponto é estável e atrator. Seja  $M > 0$  tal que  $|f'(x^*)| < M < 1$ . Afirmamos que existe um intervalo  $J = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$ ,  $\gamma > 0$  tal que  $|f'(x)| \leq M < 1$

para todo  $x \in J$ . Caso contrário, em cada intervalo aberto  $I_n = (x^* - \frac{1}{n}, x^* + \frac{1}{n})$ , podemos encontrar um ponto  $x_n \in I_n$  tal que  $|f'(x_n)| > M$ . Quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $x_n \rightarrow x^*$  e como  $f'$  é contínua em  $x^*$ , segue que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = f'(x^*).$$

Consequentemente,

$$M \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |f'(x_n)| = |f'(x^*)| < M.$$

o que é uma contradição, provando a afirmação.

Para  $x(0) \in J$ , temos:

$$|x(1) - x^*| = |f(x(0)) - f(x^*)|.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe  $\theta_1$  entre  $x(0)$  e  $x^*$  tal que:

$$|f(x(0)) - f(x^*)| = |f'(\theta_1)||x(0) - x^*|.$$

Assim,

$$|f(x(0)) - x^*| \leq M|x(0) - x^*|.$$

Portanto,

$$|x(1) - x^*| \leq M|x(0) - x^*|. \quad (3.8)$$

Assim,

$$|x(1) - x^*| \leq M|x(0) - x^*| < M\gamma < \gamma. \quad (3.9)$$

Logo  $x(1) \in J$ . Analogamente, se  $x(1) \in J$ , temos:

$$|x(2) - x^*| = |f(x(1)) - f(x^*)|.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe  $\theta_2$  entre  $x(1)$  e  $x^*$  tal que:

$$\begin{aligned} |f(x(1)) - f(x^*)| &= |f'(\theta_2)||x(1) - x^*| \Rightarrow |f(x(1)) - x^*| \leq M|x(1) - x^*| \\ &\Rightarrow |x(2) - x^*| \leq M^2|x(0) - x^*|. \end{aligned}$$

Assim,  $x(2)$  também pertence a  $J$ . Genericamente vale:

$$|x(n) - x^*| \leq M^n|x(0) - x^*|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

De fato, para cada inteiro positivo  $n$ , denotemos por  $P_n$  a desigualdade (3.10) com  $x_n \in J$ . Por (3.8),  $P_1$  é verdadeira. Suponhamos  $P_n$  verdadeira, e provemos, por indução, a validade de  $P_{n+1}$ , isto é,

$$|x(n+1) - x^*| \leq M^{n+1}|x(0) - x^*|.$$

Temos

$$|x(n+1) - x^*| = |f(x(n)) - f(x^*)|.$$

Como  $x(n) \in J$ , existe  $\beta$  entre  $x(n)$  e  $x^*$  tal que

$$|f(x(n)) - f(x^*)| = |f'(\beta)| |x(n) - x^*|.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} |x(n+1) - x^*| &= |f(x(n)) - f(x^*)| = \\ &= |f'(\beta)| |x(n) - x^*| \leq M |x(n) - x^*| \\ &\leq M \cdot M^n |x(0) - x^*|, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$|x(n+1) - x^*| \leq M^{n+1} |x(0) - x^*|,$$

com  $x(n+1) \in J$ .

O ponto de equilíbrio  $x^*$  é estável, pois:

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \epsilon \mid |x(0) - x^*| < \delta \Rightarrow |x(n) - x^*| \leq M^n |x(0) - x^*| < \\ < M |x(0) - x^*| < M\delta = M\epsilon < \epsilon, \quad \forall n > 0. \end{aligned}$$

O ponto de equilíbrio é também atrator pois, por (3.10), temos

$$0 \leq |x(n) - x^*| \leq M^n |x(0) - x^*|,$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M^n |x(0) - x^*| = 0,$$

pois  $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n = 0$ , visto que  $M < 1$ . Logo, pelo Teorema do Confronto, segue que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x(n) - x^*| = 0, \quad \text{ou seja,} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x^*.$$

Como  $x^*$  é estável e atrator, concluímos que  $x^*$  é assintoticamente estável.

- (ii) Analogamente a (i), concluímos que  $|x(n) - x^*| \geq M^n |x(0) - x^*|$ , onde  $1 < M < |f'(x^*)|$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n = +\infty$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x(n) - x^*| = +\infty$ , e portanto,  $x^*$  é instável.

□

Vamos agora apresentar o Método de Newton-Raphson que é um método numérico usado para encontrar raízes de equações  $g(x) = 0$ , onde  $g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com derivada contínua em  $A \subset \mathbb{R}$ , e  $g'(x) \neq 0$  para  $x \in A$ . Para tanto, considere a equação discreta:

$$x(n+1) = x(n) - \frac{g(x(n))}{g'(x(n))} = f(x(n)), \quad \text{com} \quad f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}.$$

Vamos supor que  $x^*$  seja raiz de  $g$ , ou seja  $g(x^*) = 0$ . Assim  $x^*$  é ponto fixo de  $f$ , pois,  $f(x^*) = x^* - \frac{g(x^*)}{g'(x^*)} = x^*$ , e

$$f'(x^*) = 1 - \left[ \frac{g'^2(x^*) - g(x^*)g''(x^*)}{g'^2(x^*)} \right] = 0,$$

ou seja,

$$|f'(x^*)| < 1.$$

E, pelo teorema (3.4.1), o ponto de equilíbrio  $x^*$  de (3.7) é assintoticamente estável, ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ . Concluimos assim, que a sequência  $(x(n))$  converge exatamente para a raiz procurada de  $g$ .

Vimos o caso quando  $|f'(x^*)| < 1$  ou  $|f'(x^*)| > 1$ , logo o Teorema 3.4.1 não se aplica para o caso  $f'(x^*) = 1$ , que será analisado através do seguinte teorema.

**Teorema 3.4.2.** Seja  $x^*$  um ponto de equilíbrio de (3.7),  $f$  três vezes diferenciável em  $x^*$ , com  $f'(x^*) = 1$ . Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) Se  $f''(x^*) \neq 0$ , então  $x^*$  será instável.
- (ii) Se  $f''(x^*) = 0$  e  $f'''(x^*) > 0$ , então  $x^*$  será instável.
- (iii) Se  $f''(x^*) = 0$  e  $f'''(x^*) < 0$ , então  $x^*$  será assintoticamente estável.

*Demonstração.* (i) Como, por hipótese,  $f''(x^*) \neq 0$ , devemos considerar os dois casos a seguir:

(1) Se  $f''(x^*) > 0$ , então  $f'(x)$  será crescente numa vizinhança de  $x^*$ , (Figura 3.14). Logo, para algum  $\gamma > 0$  e para qualquer  $x \in J_1 = (x^*, x^* + \gamma)$ ,

$$x > x^* \Rightarrow f'(x) > f'(x^*) = 1 \Rightarrow f'(x) > 1.$$

(2) Se  $f''(x^*) < 0$ , então  $f'(x)$  é decrescente numa vizinhança de  $x^*$ , (Figura 3.15). Logo, para algum  $\gamma > 0$  e para qualquer  $x \in J_2 = (x^* - \gamma, x^*)$ ,

$$x < x^* \Rightarrow f'(x) > f'(x^*) = 1 \Rightarrow f'(x) > 1.$$

Por (1) e (2),  $|f'(x)| > 1$  em  $J = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$ , e supondo  $|f'(x)| \geq M > 1$ , para todo  $x \in J$  e  $x(0) \in J$ , a demonstração da instabilidade de  $x^*$  segue análoga à parte (ii) da prova do Teorema 3.4.1.

(ii) Se  $f''(x^*) = 0$  e  $f'''(x^*) > 0$  então  $f''(x)$  é crescente numa vizinhança de  $x^*$ . Logo, para algum  $\gamma > 0$  e para qualquer  $x \in J_1 = (x^*, x^* + \gamma)$ ,

$$x > x^* \Rightarrow f''(x) > f''(x^*) = 0 \Rightarrow f''(x) > 0.$$

Portanto,  $f'(x)$  é crescente em  $J_1$ , ou seja,

$$x > x^* \Rightarrow f'(x) > f'(x^*) = 1 \Rightarrow f'(x) > 1, \quad \forall x \in J_1.$$

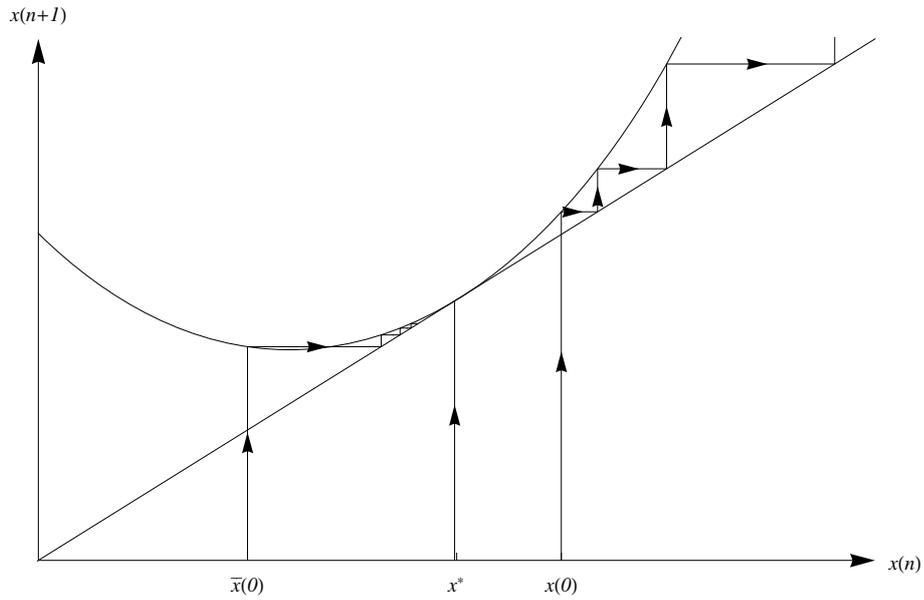


Figura 3.14: Ponto de equilíbrio instável ( $f''(x^*) > 0$ ).

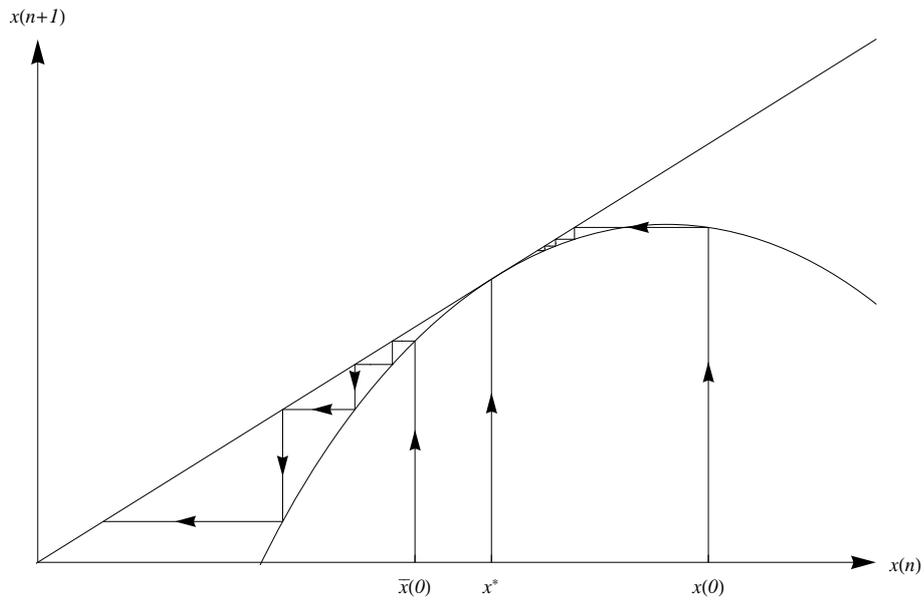


Figura 3.15: Ponto de equilíbrio instável ( $f''(x^*) < 0$ ).

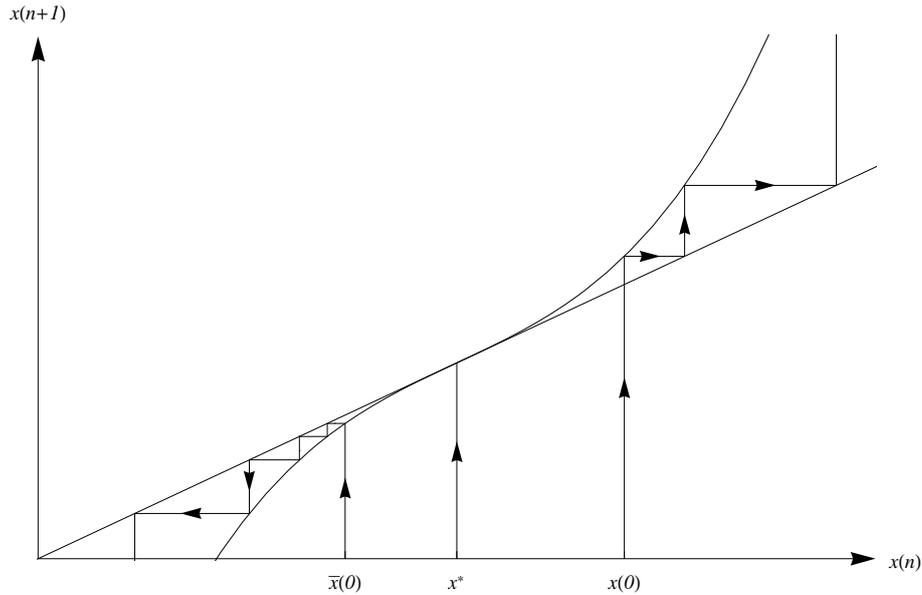


Figura 3.16: Ponto de equilíbrio instável ( $f'(x^*) = 1$ ,  $f''(x^*) = 0$  e  $f'''(x^*) > 0$ ).

Garantimos a instabilidade de  $x^*$  para  $x \in (x^*, x^* + \gamma)$ ,  $\gamma > 0$ , não sendo necessário analisar  $x \in (x^* - \gamma, x^*)$ . A demonstração segue análoga ao item (i) do teorema anterior. (Figura 3.16)

(iii) Se  $f''(x^*) = 0$  e  $f'''(x^*) < 0$  então  $f''(x^*)$  é decrescente em uma vizinhança  $J = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$  de  $x^*$ .

Devemos considerar os dois casos a seguir:

(a)  $\forall x \in J_1 = (x^*, x^* + \gamma)$ ,  $x > x^* \Rightarrow f''(x) < f''(x^*) = 0 \Rightarrow f''(x) < 0$ .

Portanto,  $f'(x)$  é decrescente em  $J_1$ , ou seja,

$$x > x^* \Rightarrow f'(x) < f'(x^*) = 1 \Rightarrow f'(x) < 1, \quad \forall x \in J_1.$$

(b)  $\forall x \in J_2 = (x^* - \gamma, x^*)$ ,  $x < x^* \Rightarrow f''(x) > f''(x^*) = 0 \Rightarrow f''(x) > 0$ .

Portanto,  $f'(x)$  é crescente em  $J_2$ , ou seja,

$$x < x^* \Rightarrow f'(x) < f'(x^*) = 1 \Rightarrow f'(x) < 1, \quad \forall x \in J_2.$$

Por (a) e (b),  $|f'(x)| < 1$  em  $J$ . Supondo  $|f'(x)| \leq M < 1$ ,  $x \in J$  e para  $x(0) \in J$ , usando a mesma demonstração do item (i) do teorema (3.4.1), segue que  $x^*$  é assintoticamente estável. (Figura 3.17)

□

Usaremos o resultado anterior para investigar o caso em que  $f'(x^*) = -1$ . Mas, antes disso, precisamos introduzir a noção da derivada Schwarziana de uma função  $f$ .

**Definição 3.4.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^3$  em um ponto  $x$  tal que  $f'(x) \neq 0$ . A derivada Schwarziana de  $f$  ponto  $x$  é definida como

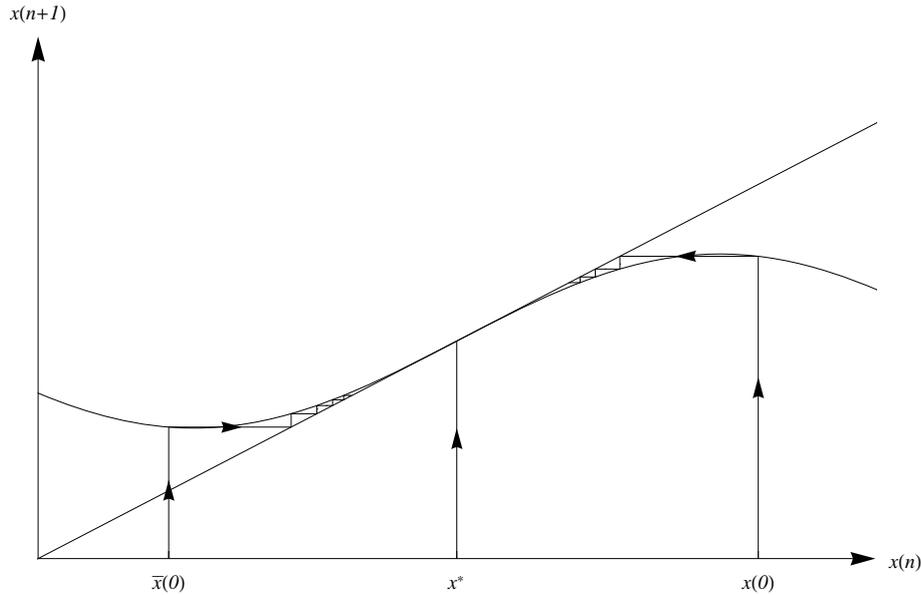


Figura 3.17: Ponto de equilíbrio assintoticamente estável ( $f'(x^*) = 1$ ,  $f''(x^*) = 0$  e  $f'''(x^*) < 0$ ).

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left[ \frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2.$$

Note que, se  $f'(x^*) = -1$ , então:

$$Sf(x^*) = -f'''(x^*) - \frac{3}{2}(f''(x^*))^2. \quad (3.11)$$

**Teorema 3.4.3.** Supondo que para o ponto de equilíbrio  $x^*$  de (3.7),  $f'(x^*) = -1$ , as seguintes afirmações serão verdadeiras:

- (i) Se  $Sf(x^*) < 0$ , então  $x^*$  será assintoticamente estável.
- (ii) Se  $Sf(x^*) > 0$ , então  $x^*$  será instável.

*Demonstração.* Seja a equação:

$$y(n+1) = g(y(n)), \quad \text{onde } g(y) = f^2(y). \quad (3.12)$$

Primeiramente, observemos que  $x^*$  é ponto de equilíbrio de (3.12), pois:

$$g(x^*) = f^2(x^*) = f(f(x^*)) = f(x^*) = x^*.$$

Alem disso,

$$\begin{aligned} y(1) &= g(y(0)) = f^2(y(0)) = f(f(y(0))) = x(2) \\ y(2) &= g(y(1)) = f^2(y(1)) = f(f(x(2))) = x(4) \\ &\vdots \\ y(n) &= x(2n). \end{aligned}$$

Logo, se  $x^*$  for assintoticamente estável com respeito à (3.12) também será com respeito à (3.7), pois se  $y(n) \rightarrow x^*$  então  $x(2n) \rightarrow x^*$ . Agora,

$$\frac{d}{dy}g(y) = \frac{d}{dy}f(f(y)) = f'(f(y))f'(y).$$

Portanto,  $\frac{d}{dy}g(x^*) = [f'(x^*)]^2 = 1$ . Nesta situação, podemos aplicar o teorema (3.4.2) e para isto é necessário analisar  $\frac{d^2}{dy^2}g(x^*)$ .

$$\begin{aligned} g''(x^*) &= f''(f(x^*))f'(x^*)f'(x^*) + f'(f(x^*))f''(x^*) \\ &= f''(x^*)(-1)(-1) + f'(x^*)f''(x^*) = f''(x^*) - f''(x^*) = 0. \end{aligned}$$

Logo, pelo teorema (3.4.2), temos que estudar  $\frac{d^3}{dy^3}g(x^*)$ .

$$\begin{aligned} g'''(x^*) &= f'''(f(x^*))f'(x^*)^3 + 2f''(f(x^*))f'(x^*)f''(x^*) + \\ &\quad + f''(f(x^*))f'(x^*)f''(x^*) + f'(f(x^*))f'''(x^*) \\ &= f'''(f(x^*))f'(x^*)^3 + 3f'(f(x^*))f''(x^*)f''(f(x^*)) + f'(f(x^*))f'''(x^*) \\ &= f'''(f(x^*))f'(x^*)^3 + 3f'(x^*)f''(x^*)f''(f(x^*)) + f'(f(x^*))f'''(x^*) \\ &= -2f'''(x^*) - 3[f''(x^*)]^2 \\ &= 2(-f'''(x^*) - \frac{3}{2}[f''(x^*)]^2). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Assim, por (3.13),

$$g'''(x^*) = 2Sf(x^*).$$

Portanto, pelo teorema (3.4.2) se  $g'''(x^*) > 0$  então  $x^*$  será instável, e se  $g'''(x^*) < 0$  então  $x^*$  será assintoticamente estável. Desta maneira, a prova do teorema está completa.  $\square$

Como exemplo, considere a equação de diferenças  $x(n+1) = x^2(n) + 3x(n)$ . Os pontos de equilíbrio são  $x^* = 0$  e  $x^* = -2$ . De fato,

$$\begin{aligned} f(x^*) &= x^{*2} + 3x^* = x^* \\ x^{*2} + 3x^* - x^* &= 0 \\ x^{*2} + 2x^* &= 0 \\ x^*(x^* + 2) &= 0, \end{aligned}$$

assim,

$$x^* = 0 \text{ ou } x^* = -2.$$

Como  $f'(x) = 2x + 3$ , temos,  $f'(-2) = -1$ . Usando o teorema (3.4.3), com a equação (3.11), temos:

$$g'''(-2) = f'''(-2) - \frac{3}{2}[f''(-2)]^2 = 0 - \frac{3}{2}.4 = -6 < 0$$

Portanto  $x^* = -2$  é assintoticamente estável. (Figura 3.18). E como  $|f'(0)| = 3 > 1$ ,  $x^* = 0$  é instável. (Figura 3.19).

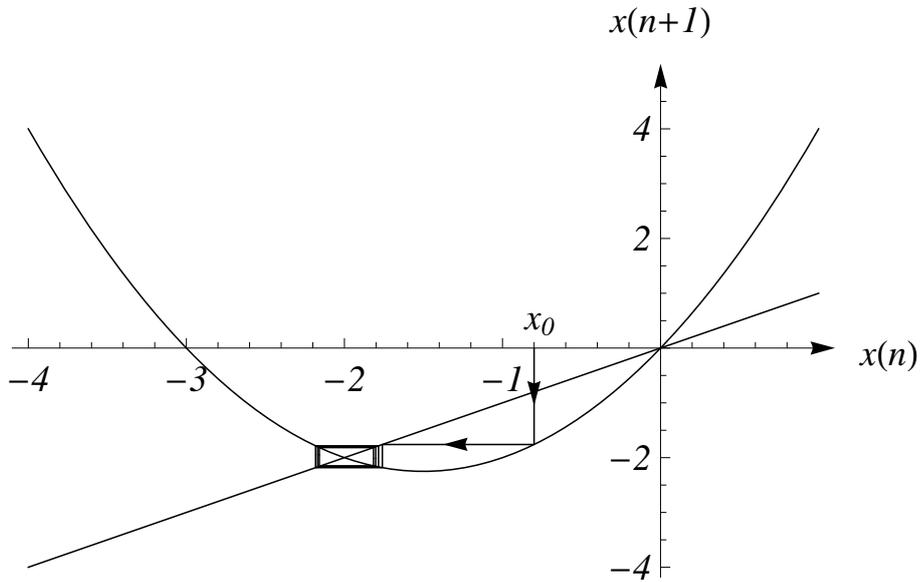


Figura 3.18: Ponto de equilíbrio assintoticamente estável ( $x^* = -2$ ) para  $x(n + 1) = x^2(n) + 3x(n)$ .

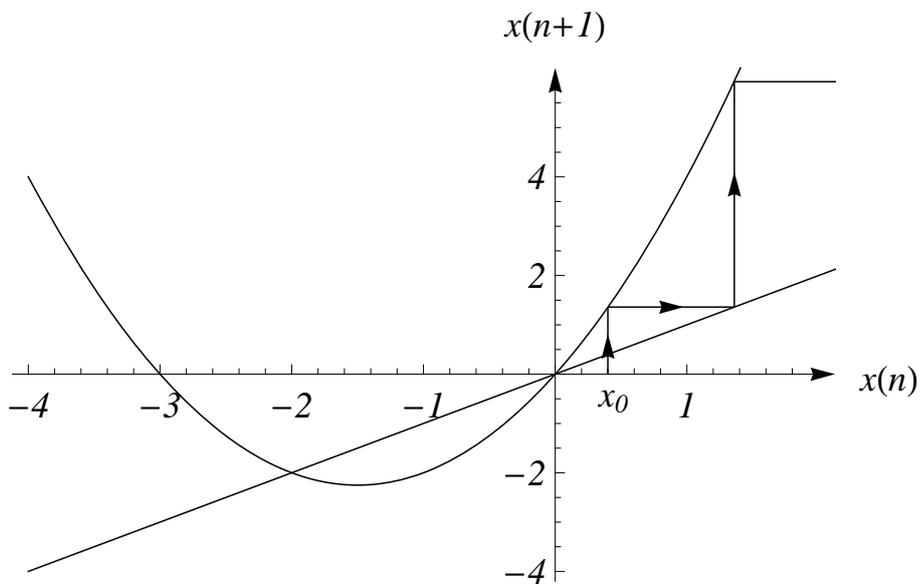


Figura 3.19: Ponto de equilíbrio instável ( $x^* = 0$ ) para  $x(n + 1) = x^2(n) + 3x(n)$ .

Vamos agora generalizar o procedimento anterior para a função quadrática geral  $Q(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ . Seja  $x^*$  um ponto de equilíbrio de  $x(n+1) = Q(x(n))$ . Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) Se  $Q'(x^*) = -1$ , então pelo Teorema (3.4.3), o ponto de equilíbrio  $x^*$  é assintoticamente estável. De fato, há dois pontos de equilíbrio para a equação  $x(n+1) = Q(x(n))$ :

$$x_1^* = [(1-b) - \sqrt{(b-1)^2 - 4ac}]/2a;$$

$$x_2^* = [(1-b) + \sqrt{(b-1)^2 - 4ac}]/2a;$$

Observe que  $Q'(x_1^*) = -1$ , se  $(b-1)^2 = 4ac + 4$  e  $Q'(x_2^*) \neq -1$ . De fato,  $Q'(x) = 2ax + b$ , então,

$$\begin{aligned} Q'(x_1^*) &= 2a \cdot \frac{(1-b) - \sqrt{4}}{2a} + b \\ &= 1 - b - 2 + b = -1 \end{aligned}$$

Assim, podemos aplicar o teorema (3.4.3), analisando  $Q'''(x^*)$  e aplicando (3.11):

$$g'''(x_1^*) = -Q'''(x_1^*) - \frac{3}{2}[Q''(x_1^*)]^2 = -\frac{3}{2}4a^2 = -6a^2 < 0.$$

Portanto,  $x_1^*$  é assintoticamente estável.

- (ii) Se  $Q'(x^*) = 1$ , então pelo Teorema (3.4.2), o ponto de equilíbrio  $x^*$  será instável. Neste caso, temos somente um ponto de equilíbrio  $x^* = \frac{(1-b)}{2a}$ . Então,  $x^*$  é instável se  $(1-b)^2 = 4ac$ .

Além disso,  $Q''(x^*) = 2a \neq 0$ , pois  $a \neq 0$ . Portanto, pelo item (i) do teorema (3.4.2),  $x^*$  é instável.

Veremos agora a demonstração analítica dos exemplos vistos usando o método da Teia de aranha. O primeiro exemplo refere-se a um modelo de crescimento populacional, representado pela equação:

$$x(n+1) = \mu x(n)(1-x(n)) = f(x(n)),$$

onde  $\mu$  é a taxa de crescimento da população de uma geração para outra e  $f(x) = \mu x(1-x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Para  $\mu = 2,5$  temos os pontos de equilíbrio  $x^* = 0$  e  $x^* = 0,6$ . Como,  $f'(x) = \mu(1-x) - \mu x$ , temos

$$f'(x) = \mu - 2\mu x = 2,5 - 5x.$$

Logo,  $|f'(0)| = 2,5 > 1$  e  $|f'(0,6)| = |2,5 - 3| = |-0,5| = 0,5 < 1$ . Portanto, pelo Teorema 3.4.1,  $x^* = 0$  é instável e  $x^* = 0,6$  é assintoticamente estável.

Agora, o segundo exemplo é uma aplicação em Economia, onde temos a seguinte equação de diferenças,

$$p(n+1) = Ap(n) + B = f(p(n)), \quad \text{com } A = -\frac{m_s}{m_d} \quad \text{e} \quad B = \frac{b_d - b_s}{m_d}.$$

onde  $p$  é o preço de uma certa mercadoria e  $f(p) = Ap + B$ ,  $p \in \mathbb{R}$ . Temos um único ponto fixo de  $f(p)$  que é  $p^* = \frac{B}{1-A}$ . Como  $f'(p) = A$ , a estabilidade de  $p^*$  depende de  $A$ , assim temos três casos a considerar:

- (a)  $|A| < 1$ , temos  $|f'(p^*)| < 1$ , e pelo Teorema 3.4.1  $p^*$  é assintoticamente estável.
- (b)  $A = -1$ , os preços oscilam entre dois valores apenas. Se  $p(0) = p_0$ , então  $p(1) = -p_0 + B$  e  $p(2) = p_0$ .
- (c)  $|A| > 1$ , temos  $|f'(p^*)| > 1$ , e pelo Teorema 3.4.1  $p^*$  é instável.

### 3.5 Pontos periódicos e ciclos

Vejam agora a noção de periodicidade, que está presente em várias situações, como por exemplo, no sistema que descreve o movimento de um pêndulo, ou também no exemplo 1 (aplicação econômica), que temos a equação  $p(n+1) = Ap(n) + B$ , onde  $A = -\frac{m_s}{m_d}$ . Quando  $A = -1$ ,  $m_s$  é igual a  $m_d$ , então os preços oscilam somente entre dois valores. Veja a definição:

**Definição 3.5.** *Considere a equação  $x(n+1) = f(x(n))$ . Seja  $b$  um ponto no domínio de  $f$ . Então:*

- (i) *o ponto  $b$  é dito ser um ponto periódico de  $f$  (ou de (3.7)) se para algum inteiro positivo  $k$ ,  $f^k(b) = b$ . Neste caso, o ponto  $b$  é chamado de ponto  $k$ -periódico se for ponto fixo de  $f^k$ , isto é, se for um ponto de equilíbrio da equação:*

$$x(n+1) = g(x(n)), \tag{3.14}$$

onde  $g = f^k$ .

Naturalmente, os pontos fixos de uma função  $f$  são pontos periódicos de período 1. A órbita periódica de  $b$ ,  $O(b) = \{b, f(b), f^2(b), \dots, f^{k-1}(b)\}$ , muitas vezes é chamada de  $k$ -ciclo.

- (ii) *o ponto  $b$  é chamado ponto eventualmente  $k$ -periódico se para algum inteiro positivo  $m$ ,  $f^m(b)$  for um ponto  $k$ -periódico. Em outras palavras,  $b$  é eventualmente  $k$ -periódico se*

$$f^{m+k}(b) = f^m(b).$$

Graficamente, um ponto  $k$ -periódico é a abscissa do ponto onde o gráfico de  $f^k$  intersecta a diagonal  $y = x$ .

Vejamos um exemplo com a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 1$ . Vamos encontrar os pontos periódicos de período 2 de  $f$ , ou seja, os pontos fixos de  $f^2$ , que são os valores de  $x$  para os quais  $f^2(x) = x$ . Então, resolvendo a equação

$$x = f(f(x)) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$$

encontramos quatro pontos fixos de  $f^2$ ,  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = -1$ ,  $x_3^* = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ ,  $x_4^* = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , onde  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = -1$ , formam um 2-ciclo, a saber: a órbita de  $x_1^* = 0$  é  $O(0) = \{0, f(0)\} = \{0, -1\}$ , pois  $f^2(0) = f(f(0)) = f(-1) = 0$ , e a órbita de  $x_2^* = -1$  é  $O(-1) = \{-1, f(-1)\} = \{-1, 0\}$ , pois  $f^2(-1) = f(f(-1)) = f(0) = -1$ . Percebe-se que se  $x^*$  está na órbita periódica de período  $k$  de  $\bar{x}$ , então  $x^*$  também será um ponto periódico de período  $k$ , que é o caso do  $x^* = -1$ . Portanto,  $f$  possui um 2-ciclo,  $\{0, -1\}$ . Observe também que as órbitas dos pontos fixos de  $f$ ,  $x_3^*$  e  $x_4^*$ , também são periódicas de período 2.

Agora, se  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -1$ , e como  $x = -1$  é ponto periódico de período 2 de  $f$ , então  $x_0 = 1$  é um ponto eventualmente periódico de  $f$ .

Note que, se  $x^*$  for ponto de equilíbrio de  $f$  também será de  $f^n$ . De fato,

$$f^n(f(x^*)) = f^n(x^*) = f^{n-1}(f(x^*)) = f^{n-1}(x^*) = f^{n-2}(f(x^*)) = f^{n-2}(x^*) = \dots = x^*.$$

Observe também que se  $A = -1$  no exemplo 1, então  $f(p_0) = -p_0 + B$  e  $f^2(p_0) = -(-p_0 + B) + B = p_0$ . Portanto, todo ponto é 2-periódico. Neste caso, se o preço inicial por unidade de uma certa mercadoria for  $p_0$ , então o preço oscila entre  $p_0$  e  $B - p_0$ , assim  $O(p_0) = \{p_0, B - p_0\}$ .

Agora, analisaremos a estabilidade dos pontos periódicos.

**Definição 3.6.** *Seja  $b$  um ponto  $k$ -periódico de  $f$ . Então  $b$  é:*

- (i) *estável se for ponto fixo estável de  $f^k$ ,*
- (ii) *assintoticamente estável se for um ponto fixo assintoticamente estável de  $f^k$ ,*
- (iii) *instável se for um ponto instável de  $f^k$ .*

Assim, a estabilidade de um ponto  $k$ -periódico  $b$  de (3.7) reduz ao estudo da estabilidade de um ponto, como ponto de equilíbrio de (3.14). Logo, podemos usar todos os teoremas da seção anterior aplicadas a  $f^k$ . Além disso, note que se  $b$  possuir uma propriedade de estabilidade, o mesmo acontecerá com todos os seus pontos no seu  $k$ -ciclo  $\{x(0) = b, x(1) = f(b), x(2) = f^2(b), \dots, x(k-1) = f^{k-1}(b)\}$ . Portanto, frequentemente falamos de estabilidade de um  $k$ -ciclo ou uma órbita periódica. Por exemplo, o teorema 3.4.1 pode ser modificado da seguinte maneira:

**Teorema 3.5.1.** Seja  $O(b) = \{b = x(0), f(b) = x(1), \dots, f^{k-1}(b) = x(k-1)\}$  um  $k$ -ciclo de uma  $f$  com derivada contínua. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i)  $O(b)$  é assintoticamente estável se  $|f'(x(0))f'(x(1)) \dots f'(x(k-1))| < 1$ .
- (ii)  $O(b)$  é instável se  $|f'(x(0))f'(x(1)) \dots f'(x(k-1))| > 1$ .

*Demonstração.* Aplicando o Teorema 3.4.1 para (3.14), temos que analisar  $[(f^k)'(x(0))]$ . Temos que  $[(f^k)'(x(0))] = f'(x(0))f'(x(1)) \dots f'(x(k-1))$ . De fato, por indução, dado  $x_0$ , temos:

- a)  $f^2(x_0) = f(f(x_0)) \Rightarrow \frac{d}{dx}f^2(x_0) = f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = f'(x_1) \cdot f'(x_0)$ ;
- b) Usando que  $\frac{d}{dx}f^m(x_0) = f'(x_0)f'(x_1) \dots f'(x_{m-1})$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , provemos a validade da igualdade para  $(m+1)$ :

$$\frac{d}{dx}f^{m+1}(x_0) = \frac{d}{dx}f(f^m(x_0)) = f'(f^m(x_0)) \cdot \frac{d}{dx}f^m(x_0)$$

Usando a hipótese de indução,  $\frac{d}{dx}f^{m+1}(x_0) = f'(f^m(x_0))f'(x_{m-1}) \dots f'(x_1)f'(x_0)$ .

Portanto, pelo Teorema 3.4.1 para (3.14), concluímos que (i) e (ii) são verdadeiras.  $\square$

No exemplo anterior,  $f(x) = x^2 - 1$  e os pontos 2-periódicos são  $x^* = 0$  e  $x^* = -1$ . Para a estabilidade do ciclo  $\{0, -1\}$  aplicamos o Teorema 3.5.1. Assim, como  $f'(x) = 2x$ , temos  $|f'(0)f'(-1)| = 0 < 1$ . Logo, pelo Teorema 3.5.1, parte (i), o 2-ciclo é assintoticamente estável e podemos visualizar através da figura 3.20.

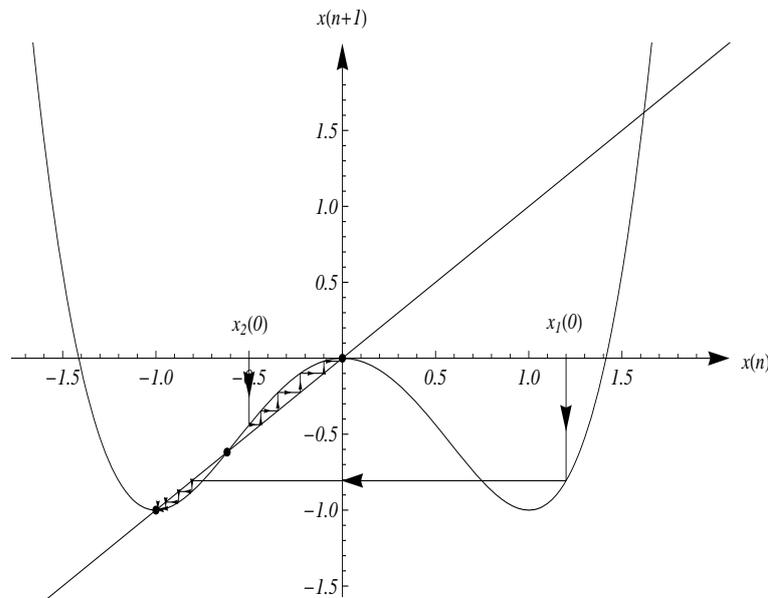


Figura 3.20: O 2-ciclo  $\{0, -1\}$  para  $x(n+1) = f(x(n)) = x^2(n) - 1$  é assintoticamente estável, sendo  $x^* = 0$  e  $x^* = -1$ , pontos de  $f^2(x) = x^4 - 2x^2$ .

Na figura 3.21, é possível visualizar uma solução genérica aproximando-se do 2-ciclo  $\{0, -1\}$ .

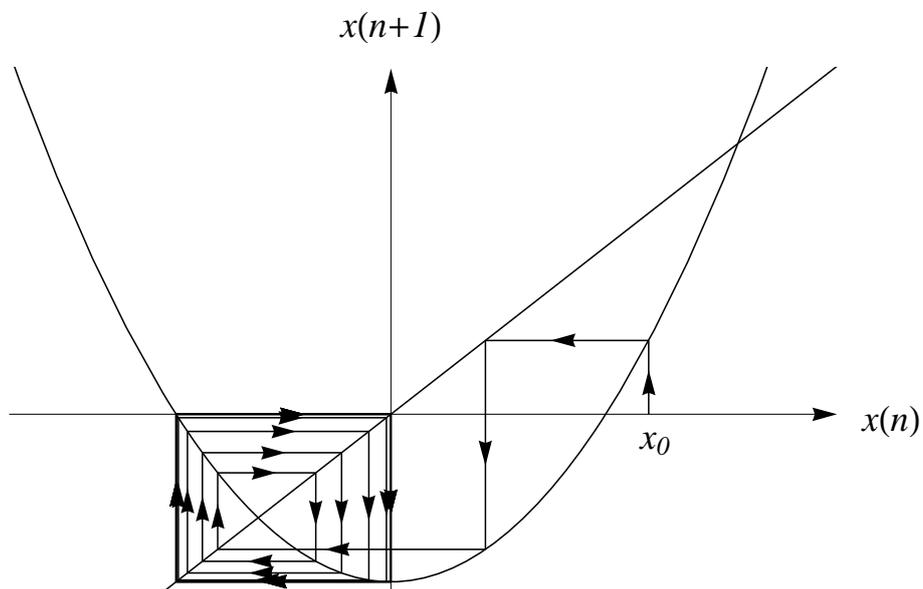


Figura 3.21: Aproximação de uma solução  $x_n(x_0)$  ao 2-ciclo, para  $f(x) = x^2 - 1$ .

Neste capítulo estudamos a estabilidade de equações de diferenças autônomas de primeira ordem, no caso real. No próximo capítulo será abordada a estabilidade de sistemas lineares de equações de diferenças.

## 4 Estabilidade de sistemas lineares de equações de diferenças

Neste trabalho, adotaremos a seguinte norma para matrizes  $A$  de ordem  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$  utilizando, quando necessário, a desigualdade  $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ .

E se  $A = (a_{ij})$ , também usaremos a norma equivalente  $\|A\|_1 = \max_{i=1, \dots, n} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \right)$ .

O objetivo desta seção é estudar primeiramente as propriedades das soluções de um sistema linear de equações de diferenças para, posteriormente, avaliar o comportamento das mesmas em relação às soluções constantes chamadas de pontos de equilíbrio.

### 4.1 Sistemas lineares de equações de diferenças

O objetivo desta seção é encontrar as soluções do seguinte sistema:

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= a_{11}(n)x_1(n) + a_{12}(n)x_2(n) + \dots + a_{1k}(n)x_k(n) \\ x_2(n+1) &= a_{21}(n)x_1(n) + a_{22}(n)x_2(n) + \dots + a_{2k}(n)x_k(n) \\ &\vdots \\ x_k(n+1) &= a_{k1}(n)x_1(n) + a_{k2}(n)x_2(n) + \dots + a_{kk}(n)x_k(n). \end{aligned}$$

Podemos reescrever este sistema da seguinte maneira:

$$x(n+1) = A(n)x(n), \tag{4.1}$$

onde  $x(n) = [x_1(n) \ x_2(n) \ \dots \ x_k(n)]^T \in \mathbb{R}^k$  e  $A(n) = (a_{ij}(n))$  é uma matriz  $k \times k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Este é um sistema de equações de diferenças, linear e homogêneo. O sistema não homogêneo correspondente é dado por:

$$y(n+1) = A(n)y(n) + g(n), \tag{4.2}$$

onde  $g(n) = [g_1(n) \ g_2(n) \ \dots \ g_k(n)]^T$ .

O sistema (4.1) com condição inicial  $x(n_0) = x_0$  possui uma única solução, como veremos a seguir.

**Teorema 4.1.1.** Para cada  $x_0 \in \mathbb{R}^k$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$ , existe uma única solução  $x(n)$  de (4.1) com  $x(n_0) = x_0$ , denotada por  $x(n, n_0, x_0)$ .

*Demonstração.* De (4.1), temos:

$$\begin{aligned} x(n_0 + 1) &= A(n_0)x(n_0) = A(n_0)x_0, \\ x(n_0 + 2) &= A(n_0 + 1)x(n_0 + 1) = A(n_0 + 1)A(n_0)x_0. \end{aligned}$$

Por indução, concluímos que

$$x(n) = \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) \right] x_0,$$

onde

$$\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) = \begin{cases} A(n-1)A(n-2)\dots A(n_0) & \text{se } n > n_0, \\ I & \text{se } n = n_0. \end{cases}$$

□

A partir de agora, vamos apresentar as definições necessárias para criar no espaço das soluções de (4.1), a estrutura de espaço vetorial.

**Definição 4.1.** As soluções  $x^1(n), x^2(n), \dots, x^k(n)$  de (4.1) serão linearmente dependentes para  $n \geq n_0 \geq 0$  se existirem escalares  $c_1, c_2, \dots, c_k$ , não todos nulos, tal que  $c_1x_1(n) + c_2x_2(n) + \dots + c_kx_k(n) = 0$  para  $n \geq n_0$ . Caso contrário, as soluções serão linearmente independentes.

Todo conjunto de  $k$  soluções de (4.1), linearmente independentes para  $n \geq n_0 \geq 0$ , é chamado de **Conjunto Fundamental de Soluções** de (4.1).

Seja  $\Phi(n)$  uma matriz  $k \times k$  onde as colunas são soluções de (4.1), então temos:

$$\Phi(n) = \begin{bmatrix} x^1(n) & x^2(n) & \dots & x^k(n) \end{bmatrix}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \Phi(n+1) &= \begin{bmatrix} A(n)x^1(n) & A(n)x^2(n) & \dots & A(n)x^k(n) \end{bmatrix} \\ &= A(n) \begin{bmatrix} x^1(n) & x^2(n) & \dots & x^k(n) \end{bmatrix} \\ &= A(n)\Phi(n). \end{aligned}$$

Portanto,  $\Phi(n)$  satisfaz à equação de diferenças:

$$\Phi(n+1) = A(n)\Phi(n). \quad (4.3)$$

Além disso, as soluções  $x^1(n), x^2(n), \dots, x^k(n)$  são linearmente independentes para  $n \geq n_0$  se e somente se a matriz  $\Phi(n)$  for não singular ( $\det \Phi(n) \neq 0$ ) para todo  $n \geq n_0$ , pois:

- (1) Supondo que  $\det \Phi(n) = 0$  para algum  $n \geq n_0$ , o sistema  $c_1x^1(n) + \dots + c_kx^k(n) = 0$  admitirá uma solução  $(c_1, \dots, c_k)$  não nula. Logo, as soluções  $x^1(n), \dots, x^k(n)$  não são linearmente independentes, o que contradiz a hipótese e segue o resultado.
- (2) Supondo que  $x^1(n), \dots, x^k(n)$  não sejam soluções linearmente independentes, ou seja, que existem constantes  $c_1, \dots, c_k$  não todas nulas tais que  $c_1x^1(n) + \dots + c_kx^k(n) = 0$ , para todo  $n \geq n_0$ , então, o sistema  $c_1x^1(n) + \dots + c_kx^k(n) = 0$  admitirá uma solução  $(c_1, \dots, c_k)$  não nula e portanto,  $\det \Phi(n) = 0$ , o que contradiz a hipótese e segue o resultado.

Assim, temos a seguinte definição:

**Definição 4.2.** Se  $\Phi(n)$  for uma matriz não singular para todo  $n \geq n_0$  e satisfizer a equação  $\Phi(n+1) = A(n)\Phi(n)$ , então  $\Phi(n)$  será chamada de matriz fundamental para o sistema (4.1).

Note que, se  $\Phi(n)$  for uma matriz fundamental e  $C$  for alguma matriz de ordem  $k$  não singular, então  $\psi(n) = \Phi(n)C$  também será uma matriz fundamental, pois:

$$\psi(n+1) = \Phi(n+1)C = A(n)\Phi(n)C = A(n)\psi(n).$$

Portanto, há infinitas matrizes fundamentais para um sistema. Contudo, há uma matriz fundamental que já conhecemos:

$$\Phi(n) = \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i), \quad \text{com } \Phi(n_0) = I.$$

No caso em que  $A$  é uma matriz constante,  $\Phi(n) = A^{n-n_0}$ .

Podemos definir uma matriz fundamental  $\Phi(n, n_0) = \Phi(n)\Phi^{-1}(n_0)$ , chamada de *matriz transição de estado*. Em geral, escrevemos  $\Phi(n, m) = \Phi(n)\Phi^{-1}(m)$  para quaisquer dois inteiros  $n, m$  com  $n \geq m \geq n_0$ . Observe que  $\Phi(n, m)$  é uma solução da equação de diferenças  $\Phi(n+1, m) = A(n)\Phi(n, m)$ , pois:

$$\Phi(n+1, m) = \Phi(n+1)\Phi^{-1}(m) = A(n)\Phi(n)\Phi^{-1}(m) = A(n)\Phi(n, m). \quad (4.4)$$

Assim, temos algumas propriedades da matriz fundamental  $\Phi(n, m)$ ,  $n \geq m \geq n_0$ :

(i)  $\Phi^{-1}(n, m) = \Phi(m, n)$ .

De fato:

$$\Phi^{-1}(n, m) = (\Phi(n).\Phi^{-1}(m))^{-1} = (\Phi^{-1}(m))^{-1}.\Phi^{-1}(n) = \Phi(m).\Phi^{-1}(n) = \Phi(m, n).$$

(ii)  $\Phi(n, m) = \Phi(n, r)\Phi(r, m)$ , para todo  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq r \geq m \geq n_0$ .

De fato:

$$\Phi(n, m) = \Phi(n).\Phi^{-1}(m) = \Phi(n).I.\Phi^{-1}(m) = \Phi(n).\Phi^{-1}(r).\Phi(r).\Phi^{-1}(m) = \Phi(n, r).\Phi(r, m).$$

$$(iii) \quad \Phi(n, m) = \prod_{i=m}^{n-1} A(i).$$

De fato:

$$\begin{aligned} \Phi(n, m) &= \Phi(n)\Phi^{-1}(m) = \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) \left[ \prod_{i=n_0}^{m-1} A(i) \right]^{-1} = \\ &= [A_{n_0} \dots A_{n-1}] [A_{m-1}^{-1} \cdot A_{m-2}^{-1} \dots A_{n_0}^{-1}] = A_m \dots A_{n-1} = \prod_{i=m}^{n-1} A(i). \end{aligned}$$

O próximo resultado mostra que toda solução de (4.1) satisfazendo  $x(n_0) = x_0$  pode ser representada por uma matriz fundamental.

**Corolário 4.1.** *A solução única  $x(n, n_0, x_0)$  de (4.1) com  $x(n_0) = x_0$  é dada por:*

$$x(n, n_0, x_0) = \Phi(n, n_0)x_0.$$

*Demonstração.* A solução de (4.1) é dada por  $x(n) = \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) \right] x_0$  e vimos que  $\Phi(n) = \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)$ , assim concluímos que  $x(n, n_0, x_0) = \Phi(n, n_0)x_0$ .  $\square$

O próximo resultado evidencia que a sequência  $(x(n))$  onde  $x(n) = \det \Phi(n)$  é solução de uma equação de diferenças do tipo (4.1).

**Lema 4.1.** *(Fórmula de Abel) Para todo  $n \geq n_0 \geq 0$ ,*

$$\det \Phi(n) = \left( \prod_{i=n_0}^{n-1} [\det A(i)] \right) \det \Phi(n_0).$$

*Demonstração.* Como  $\Phi(n+1) = A(n)\Phi(n)$ , então vale a equação de diferenças:

$$\det \Phi(n+1) = \det A(n) \det \Phi(n).$$

Se  $x(n) = \det \Phi(n)$ , a solução da equação será  $x(n) = [\prod(A(i))] x(n_0)$ , onde  $x(n_0) = \det \Phi(n_0)$  e segue resultado.  $\square$

O próximo resultado é consequência imediata do Lema 4.1.

**Corolário 4.2.** *Se em (4.1)  $A$  for uma matriz constante, então*

$$\det \Phi(n) = [\det A]^{n-n_0} \det \Phi(n_0). \quad (4.5)$$

**Corolário 4.3.** *A matriz fundamental  $\Phi(n)$  será não singular para todo  $n \geq n_0$  se e somente se  $\Phi(n_0)$  for não singular.*

*Demonstração.* Este resultado segue da Fórmula de Abel (Lema 4.1), sendo  $\det A(i) \neq 0$  para  $i \geq n_0$ .  $\square$

Como consequência do corolário anterior temos o seguinte resultado:

**Corolário 4.4.** *As soluções  $x^1(n), x^2(n), \dots, x^k(n)$  de (4.1) serão linearmente independentes para  $n \geq n_0$  se e somente se  $\Phi(n_0)$  for não singular.*

O seguinte teorema estabelece a existência de  $k$  soluções linearmente independentes de (4.1).

**Teorema 4.1.2.** *Existem  $k$  soluções linearmente independentes do sistema (4.1) para  $n \geq n_0$ .*

*Demonstração.* Para cada  $i = 1, 2, \dots, k$  seja  $e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)^T$  um vetor único em  $\mathbb{R}^k$ , onde todos os componentes são nulos exceto o  $i$ -ésimo componente, na qual é igual a 1. Pelo teorema 4.1.1, para cada  $e_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , existe uma solução  $x(n, n_0, e_i)$  de (4.1) com  $x(n_0, n_0, e_i) = e_i$ . Para provar que o conjunto  $\{x(n, n_0, e_i) | 1 \leq i \leq k\}$  é linearmente independente, é suficiente mostrar que  $\Phi(n_0)$  é não singular, e de fato é, pois  $\Phi(n_0) = I$ . Logo, o resultado segue pelo Corolário 4.3.  $\square$

**Definição 4.3.** *Um conjunto de  $k$  soluções linearmente independentes de (4.1) é chamado de conjunto fundamental de soluções.*

**Princípio da linearidade:** Um fator importante do sistema de soluções de (4.1) é que as operações de adição e multiplicação por escalar gozam da propriedade de fechamento. Isto é, se  $x^1(n)$  e  $x^2(n)$  forem soluções de (4.1) e  $c \in \mathbb{R}$ , então:

- (1)  $x^1(n) + x^2(n)$  será solução de (4.1),
- (2)  $cx^1(n)$  será solução de (4.1).

*Demonstração.* Seja  $x(n) = cx^1(n) + x^2(n)$ , então,

$$\begin{aligned} x(n+1) &= x^1(n+1) + x^2(n+1) \\ &= cAx^1(n) + Ax^2(n) \\ &= A[cx^1(n) + x^2(n)] \\ &= Ax(n). \end{aligned}$$

$\square$

Uma consequência imediata do princípio de linearidade é que se  $x^1(n), x^2(n), \dots, x^k(n)$  forem soluções do sistema (4.1), então a combinação linear da forma

$$x(n) = c_1x^1(n) + c_2x^2(n) + \dots + c_kx^k(n)$$

também será solução de (4.1).

Este resultado será apresentado a seguir.

**Definição 4.4.** Sendo  $\{x^i(n) | 1 \leq i \leq k\}$  um conjunto de soluções linearmente independentes de (4.1), a solução geral de (4.1) é definida por:

$$x(n) = \sum_{i=1}^k c_i x^i(n), \quad (4.6)$$

onde  $c_i \in \mathbb{R}$ . Além disso, esta fórmula pode ser escrita como  $x(n) = \Phi(n)c$ , onde  $\Phi(n) = [x^1(n) \ x^2(n) \ \dots \ x^k(n)]^T$  é uma matriz fundamental e  $c = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_k]^T$ .

*Observação.* O conjunto  $S$  de todas as soluções do sistema (4.1) forma um espaço vetorial com as operações de adição e de multiplicação por um escalar. Uma base é qualquer conjunto fundamental de soluções e, portanto, sua dimensão é  $k$ . Se  $\{x^1(n), x^2(n), \dots, x^k(n)\}$  for uma base para  $S$ , qualquer solução  $x(n)$  da equação (4.1) poderá ser escrita na forma (4.6) ou na forma equivalente  $x(n) = \Phi(n)c$ .

A partir de agora, vamos analisar as soluções do sistema não homogêneo (4.2):

$$y(n+1) = A(n)y(n) + g(n),$$

relacionando-as com as soluções do sistema homogêneo  $y(n+1) = A(n)y(n)$ .

**Teorema 4.1.3.** Qualquer solução  $y(n)$  de (4.2) pode ser escrita como:

$$y(n) = \Phi(n)c + y_p(n)$$

para um vetor constante  $c$  e uma solução particular  $y_p(n)$  de (4.2).

*Demonstração.* Seja  $y(n)$  uma solução de (4.2) e seja  $y_p(n)$  uma solução particular de (4.2). Se  $x(n) = y(n) - y_p(n)$ , então,

$$\begin{aligned} x(n+1) &= y(n+1) - y_p(n+1) \\ &= A(n)y(n) - A(n)y_p(n) \\ &= A(n)[y(n) - y_p(n)] \\ &= A(n)x(n). \end{aligned}$$

Assim,  $x(n)$  é uma solução da equação homogênea (4.1). Logo,  $x(n) = \Phi(n)c$  para algum vetor constante  $c$ . Portanto,

$$y(n) - y_p(n) = \Phi(n)c,$$

concluindo a prova do resultado. □

**Lema 4.2.** Uma solução particular de (4.2) pode ser dada por:

$$y_p(n) = \sum_{r=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1) g(r),$$

com  $y_p(n_0) = 0$ .

*Demonstração.* Como já vimos em (4.4),  $\Phi(n+1, r+1) = A(n)\Phi(n, r+1)$  e além disso,

$$\begin{aligned} y_p(n+1) &= \sum_{r=n_0}^n \Phi(n+1, r+1)g(r) \\ &= \Phi(n+1, n_0+1)g(n_0) + \dots + \Phi(n+1, n)g(n-1) + \Phi(n+1, n+1)g(n) \\ &= \left[ \sum_{r=n_0}^{n-1} A(n)\Phi(n, r+1)g(r) \right] + \Phi(n+1, n+1)g(n) \\ &= A(n) \sum_{r=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1)g(r) + g(n) = A(n)y_p(n) + g(n). \end{aligned}$$

Portanto,  $y_p(n)$  é uma solução de (4.2). Além disso,  $y_p(n_0) = 0$ .  $\square$

Como consequência do Teorema (4.1.1) e do Lema (4.2), temos o seguinte resultado.

**Teorema 4.1.4.** A solução única do problema de valor inicial,

$$y(n+1) = A(n)y(n) + g(n), \quad y(n_0) = y_0,$$

é dada por

$$y(n, n_0, y_0) = \Phi(n, n_0)y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1)g(r),$$

ou mais explicitamente por:

$$y(n, n_0, y_0) = \left( \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) \right) y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left( \prod_{i=r+1}^{n-1} A(i) \right) g(r).$$

Observemos que, para a equação não linear  $y(n+1) = A(n)y(n) + g(n, y(n))$ , onde a função  $g$  não depende apenas da variável  $n$ , temos resultado análogo, isto é, dado  $y(n_0) = y_0$  e  $y_p(n_0) = 0$ , a sua solução é dada por:

$$y(n, n_0, y_0) = \Phi(n, n_0)y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1)g(r, y(r)).$$

O estudo desta equação é um dos objetivos deste trabalho e será abordado no capítulo 5.

Nesta próxima seção analisaremos a estabilidade das soluções do sistema linear.

## 4.2 Estabilidade

No capítulo 3, apresentamos as definições de estabilidade para equações de diferenças autônomas no caso real. Agora, vamos estudar estabilidade para sistemas não

autônomo dados por:

$$x(n+1) = f(n, x(n)), \quad x(n_0) = x_0, \quad (4.7)$$

onde  $x(n) \in \mathbb{R}^k$ ,  $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  contínua. Neste estudo, as soluções constantes desempenham um papel importante, pois as demais soluções tendem a se aproximar ou a se afastar das soluções constantes que, na verdade, são dadas pelos pontos fixos de  $f$ . Portanto, dizemos que um ponto  $x^*$  em  $\mathbb{R}^k$  é ponto de equilíbrio de (4.7) se  $f(n, x^*) = x^*$ , para todo  $n \geq n_0$ . Sem perda de generalidade, assumimos que  $x^* = 0$ , ou seja, consideramos a solução nula, cuja justificativa para isto é a seguinte:

Se  $y(n) = x(n) - x^*$  e  $x^* \neq 0$ , então

$$y(n+1) = x(n+1) - x^* = f(n, y(n) + x^*) - x^* = g(n, y(n)),$$

onde  $g(n, 0) = f(n, x^*) - x^* = 0$ ,  $n \geq n_0$ . Assim, temos um sistema equivalente onde o ponto de equilíbrio é zero.

**Definição 4.5.** *O ponto de equilíbrio  $x^*$  de (4.7) é dito:*

- (i) *Estável (S) se dados  $\epsilon > 0$  e  $n_0 \geq 0$  existir  $\delta = \delta(\epsilon, n_0)$  tal que  $\|x_0 - x^*\| < \delta$  implica  $\|x(n, n_0, x_0) - x^*\| < \epsilon$  para todo  $n \geq n_0$ . Se  $\delta$  puder ser escolhido independente de  $n_0$ , o ponto de equilíbrio será iniformemente estável, e será instável caso não seja estável.*
- (ii) *Atrator (A) se existir  $\mu = \mu(n_0)$  tal que  $\|x_0 - x^*\| < \mu$  implica  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, n_0, x_0) = x^*$ . Se a escolha de  $\mu$  independe de  $n_0$ , o ponto de equilíbrio é uniformemente atrator. A condição para uniformemente atrator é: existe  $\mu > 0$  tal que, para todo  $\epsilon$  e  $n_0$ , existe  $N = N(\epsilon)$  independente de  $n_0$  tal que  $\|x(n, n_0, x_0) - x^*\| < \epsilon$  para todo  $n \geq n_0 + N$ , sempre que  $\|x_0 - x^*\| < \mu$ .*
- (iii) *Assintoticamente estável (AS) se for estável e atrator, e uniformemente assintoticamente estável (UAE) se for uniformemente estável e uniformemente atrator.*
- (iv) *Exponencialmente estável (ES) se existirem  $\delta > 0$ ,  $M > 0$ , e  $\eta \in (0, 1)$  tal que  $\|x(n, n_0, x_0) - x^*\| \leq M\|x_0 - x^*\|\eta^{n-n_0}$ , sempre que  $\|x_0 - x^*\| < \delta$ , para  $n \geq n_0$ .*

Nos itens (ii) e (iii), se a afirmação for válida para todo  $\mu$  ou no item (iv) se a afirmação for válida para todo  $\delta$ , a correspondente propriedade de estabilidade é dita ser global.

## 4.2.1 Estabilidade de sistemas lineares não autônomos

Um sistema linear não autônomo é dado por:

$$x(n+1) = A(n)x(n), \quad n \geq n_0 \geq 0. \quad (4.8)$$

Assume-se que  $A(n)$  é não singular para todo  $n \geq n_0$ , ou seja  $A(n)$  é uma matriz invertível. Os seguintes resultados expressam condições de estabilidade em termos da matriz fundamental  $\Phi(n)$  do sistema (4.8).

**Teorema 4.2.1.** A solução nula de (4.8) é:

(i) Estável, se e somente se existir uma constante positiva  $M$  tal que:

$$\|\Phi(n)\| \leq M, \quad n \geq n_0 \geq 0; \quad (4.9)$$

(ii) Uniformemente estável, se e somente se existir uma constante positiva  $M$  tal que:

$$\|\Phi(n, m)\| \leq M, \quad n \geq m \geq n_0; \quad (4.10)$$

(iii) Assintoticamente estável, se e somente se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi(n)\| = 0; \quad (4.11)$$

(iv) Uniformemente assintoticamente estável, se e somente se existirem uma constante positiva  $M$  e  $\eta \in (0, 1)$  tal que:

$$\|\Phi(n, m)\| \leq M\eta^{n-m}, \quad n \geq m \geq n_0. \quad (4.12)$$

*Demonstração.* Vamos provar apenas o item (i). Sem perda de generalidade, assumimos que  $\Phi(n_0) = I$  e  $x(n, n_0, x_0) = \Phi(n)x_0$  é a única solução de (4.8) passando por  $(n_0, x_0)$ .

(i) ( $\Leftarrow$ ) Supondo (4.9) verdadeira, temos

$$\|x(n, n_0, x_0)\| = \|\Phi(n)x_0\| = \|\Phi(n)\| \|x_0\| \leq M \|x_0\|.$$

Assim, para  $\epsilon > 0$  existe  $\delta < \frac{\epsilon}{M}$  tal que,

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(n, n_0, x_0)\| < M \|x_0\| < M\delta < \epsilon, \quad n \geq n_0.$$

Consequentemente a solução nula de (4.8) é estável.

( $\Rightarrow$ ) Suponha que a solução nula seja estável. Então, dado  $\epsilon = 1$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $\|x_0\| < \delta$  então  $\|\Phi(n)x_0\| < 1$  para todo  $n \geq n_0$ . Veja que, se  $\|y\| < 1$  então  $\|\delta y\| < \delta$ . Portanto,

$$\|\Phi(n)\delta y\| < 1$$

e, por conseguinte,

$$\|\Phi(n)y\| < \frac{1}{\delta}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Desta forma,

$$\|\Phi(n)\| = \sup_{\|y\| < 1} \|\Phi(n)y\| < \frac{1}{\delta} = M$$

□

Os seguintes resultados são consequências imediatas do teorema anterior.

**Corolário 4.2.2.** Para o sistema linear (4.8) as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) A solução nula será estável se e somente se todas as soluções forem limitadas.
- (ii) A solução nula será exponencialmente estável se e somente se for uniformemente assintoticamente estável.

*Demonstração.*

- (i) ( $\Rightarrow$ ) Supondo que a solução nula seja estável, por (4.9), temos

$$\|\Phi(n)\| \leq M, \quad n \geq n_0 \geq 0;$$

onde  $\Phi(n)$  é uma matriz fundamental de soluções; conseqüentemente toda solução de (4.8) é limitada.

- ( $\Leftarrow$ ) Supondo que toda solução seja limitada, temos

$$\|\Phi(n)\| \leq M \Rightarrow \|x(n, n_0, x_0)\| \leq M\|x_0\|.$$

Assim, para  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta < \frac{\epsilon}{M}$  tal que,

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(n, n_0, x_0)\| \leq M\|x_0\| < M\delta < \epsilon.$$

Conseqüentemente a solução nula de (4.8) é estável. □

Como exemplo, vamos analisar uma equação de diferenças de ordem  $k$ , dada por:

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \dots + p_k(n)y(n) = g(n). \quad (4.13)$$

Esta equação pode ser representada por um sistema de equações de primeira ordem,

$$\begin{aligned} z_1(n) &= y(n), \\ z_2(n) &= y(n+1) = z_1(n+1), \\ z_3(n) &= y(n+2) = z_2(n+1), \\ &\vdots \\ z_k(n) &= y(n+k-1) = z_{k-1}(n+1). \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} z_1(n+1) &= z_2(n), \\ z_2(n+1) &= z_3(n), \\ &\vdots \\ z_{k-1}(n+1) &= z_k(n) \\ z_k(n+1) &= -p_k(n)z_1(n) - p_{k-1}(n)z_2(n) \dots - p_1(n)z_k(n) + g(n). \end{aligned}$$

Considerando  $z(n) = [z_1(n) \ z_2(n) \ \dots \ z_k(n)]^T$  podemos escrever este sistema como

$$z(n+1) = A(n)z(n) + h(n), \quad (4.14)$$

onde  $A(n) = (a_{ij}(n))$  é uma matriz  $k \times k$ , sendo

$$A(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_k(n) & -p_{k-1}(n) & -p_{k-2}(n) & \dots & -p_1(n) \end{pmatrix} e$$

$$h(n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(n) \end{pmatrix}.$$

Vamos analisar o caso em que  $g(n) = 0$ , ou seja, o sistema homogêneo

$$z(n+1) = A(n)z(n). \quad (4.15)$$

**Teorema 4.2.3.** Considere o sistema (4.15):

- (i) Se  $\sum_{i=1}^k |a_{ij}(n)| \leq 1$ ,  $1 \leq j \leq k$ ,  $n \geq n_0$ , então a solução nula do sistema (4.15) será uniformemente assintoticamente estável.
- (ii) Se  $\sum_{i=1}^k |a_{ij}(n)| \leq 1 - v$  para algum  $v > 0$ ,  $1 \leq j \leq k$ , então a solução nula será uniformemente assintoticamente estável.

*Demonstração.*

- (i) Utilizando a definição de norma de matriz dada por  $\|A(n)\|_1 = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^k a_{ij}(n)$ , pela condição (i) temos que  $\|A(n)\|_1 \leq 1$  para todo  $n \geq n_0$ . Assim,

$$\|\Phi(n, m)\|_1 = \left\| \prod_{i=m}^{n-1} A(i) \right\|_1 \leq \|A(n-1)\|_1 \|A(n-2)\|_1 \dots \|A(m)\|_1 \leq 1.$$

Isto implica que a solução nula de (4.15) é uniformemente estável pelo Teorema (4.2.1), parte (ii).

- (ii) A prova da afirmação (ii) é similar à prova da afirmação (i), a qual será omitida.  $\square$

## 4.2.2 Estabilidade de sistemas lineares com coeficientes constantes

Um sistema linear com coeficientes constantes é dado da seguinte forma:

$$x(n+1) = Ax(n) \quad (4.16)$$

onde  $A$  é uma matriz real  $n \times n$ . Neste próximo teorema mostraremos os resultados de estabilidade para o sistema (4.16).

**Teorema 4.2.4.** Se  $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } A\}$ , então as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) A solução nula de (4.16) será estável se e somente se  $\rho(A) \leq 1$ .
- (ii) A solução nula de (4.16) será assintoticamente estável se e somente se  $\rho(A) < 1$ .

*Demonstração.*

- (i) Seja  $A = PJP^{-1}$ , onde  $J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_r)$  é a forma de Jordan de  $A$  e

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$i = 1, \dots, r$ .

Pelo Teorema (4.2.1) a solução nula de (4.16) será estável se e somente se  $\|A^n\| = \|(PJP^{-1})^n\| \leq \tilde{M}$  ou  $\|J^n\| \leq \tilde{M}$ , onde  $\tilde{M} = M/(\|P\|\|P^{-1}\|)$ . Agora,  $J^n = \text{diag}(J_1^n, J_2^n, \dots, J_r^n)$  (Ver Apêndice B), onde

$$J_i^n = \begin{bmatrix} \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & \dots & \binom{n}{s_i-1}\lambda_i^{n-s_i+1} \\ 0 & \lambda_i^n & \dots & \vdots \\ & & & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i^n \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, r \quad e \quad s_i \leq r.$$

Assim, se  $|\lambda_i| > 1$  ou se  $|\lambda_i| = 1$  e  $J_i$  não for uma matriz  $1 \times 1$ , então  $\|J_i^n\|$  tende a infinito quando  $n \rightarrow \infty$ . Se  $|\lambda_i| < 1$  então  $\|J_i^n\| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Para provar esta conclusão é suficiente mostrar que  $|\lambda_i|^n n^l \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$  para algum inteiro  $l$ . Esta conclusão segue pela regra de L'Hospital, fazendo  $|\lambda_i|^n n^l = n^l e^{ln|\lambda_i|^n}$ , temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^l}{e^{-nl \ln |\lambda_i|}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ln^{l-1}}{-ln|\lambda_i| e^{-nl \ln |\lambda_i|}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l(l-1)n^{l-2}}{(ln|\lambda_i|)^2 e^{-nl \ln |\lambda_i|}},$$

aplicando sucessivamente a regra, e usando que  $|\lambda_i| < 1$ , temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^l}{e^{-nl \ln |\lambda_i|}} = \frac{l!}{(-ln|\lambda_i|)^l} \lim_{n \rightarrow \infty} ln|\lambda_i|^n = 0.$$

- (ii) A prova da afirmação (ii) já foi estabelecida pelo argumento anterior. Isto completa a prova do teorema.  $\square$

### 4.2.3 Critérios para a estabilidade dos sistemas bidimensionais

Já foram vistos critérios para analisar estabilidade assintótica de pontos de equilíbrio, agora veremos mais detalhadamente estes critérios para analisar a estabilidade de sistemas de duas equações. Antes, vejamos três importantes teoremas sobre o comportamento das soluções para equação de diferenças de segunda ordem,

$$y(n+2) + p_1y(n+1) + p_2y(n) = 0. \quad (4.17)$$

Supondo que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são as raízes da equação característica:

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0 \quad (4.18)$$

temos três casos a considerar:

- (a) As raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais distintas. Então,  $y_1(n) = \lambda_1^n$  e  $y_2(n) = \lambda_2^n$  são duas soluções linearmente independentes de (4.17). Se  $|\lambda_i| > |\lambda_j|$ ,  $y_i(n)$  é a solução dominante, e  $\lambda_i$  é a raiz característica dominante. Assim, o comportamento da solução geral  $y(n) = a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n$  é determinado pelo comportamento da solução dominante. Sem perda de generalidade, assume-se que  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ . Então,

$$y(n) = \lambda_1^n \left[ a_1 + a_2 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \right].$$

Como,  $|\lambda_2/\lambda_1| < 1$ , segue que  $(\lambda_2/\lambda_1)^n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Consequentemente,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1\lambda_1^n$ . Agora, há seis situações diferentes a considerar:

1.  $\lambda_1 > 1$ :  $y(n) \rightarrow \infty$  (solução nula instável);
  2.  $\lambda_1 = 1$ :  $y(n) \rightarrow a_1$ ;
  3.  $0 < \lambda_1 < 1$ :  $y(n) \rightarrow 0$  (solução nula assintoticamente estável);
  4.  $-1 < \lambda_1 < 0$ :  $y(n) \rightarrow 0$  oscilando em torno de zero;
  5.  $\lambda_1 = -1$ :  $y(n)$  oscila pois  $y(2n) \rightarrow a_1$  e  $y(2n+1) \rightarrow -a_1$ ;
  6.  $\lambda_1 < -1$ :  $y(n)$  oscila, mas  $|y(n)| \rightarrow +\infty$ .
- (b)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . A solução geral de (4.17) é dada por  $y(n) = (a_1 + a_2n)\lambda^n$ . Assim, temos três casos:

1.  $\lambda_1 \geq 1$ :  $y(n) \rightarrow \infty$ ;
2.  $\lambda_1 < -1$ : oscila, mas  $|y(n)| \rightarrow +\infty$ ;
3.  $|\lambda_1| < 1$ :  $y(n) \rightarrow 0$ , pois

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\lambda^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{-n \ln \lambda}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{- \ln \lambda e^{-n \ln \lambda}} = 0.$$

- (c) Raízes complexas:  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  e  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ , onde  $\beta \neq 0$ . Como vimos na seção (1.3) a solução geral de (4.17) é dada por:

$$y(n) = r^n (c_1 \cos(n\theta) + c_2 \operatorname{sen}(n\theta))$$

onde  $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  e  $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ . A solução  $y(n)$  sempre oscila e para  $r > 1$ ,  $|y(n)| \rightarrow +\infty$  e para  $r < 1$ ,  $y(n) \rightarrow 0$ , para  $n \rightarrow \infty$ .

Considerando os resultados anteriores, temos o seguinte teorema:

**Teorema 4.2.5.** Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  raízes da equação característica (4.18). As seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) Toda solução de (4.17) oscila em torno de zero se e somente se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  não forem raízes reais positivas.
- (ii) Toda solução de (4.17) converge para zero, ou seja, a solução nula é assintoticamente estável, se e somente se  $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ .

Considere agora a equação de diferenças de segunda ordem não-homogênea da forma:

$$y(n+2) + p_1 y(n+1) + p_2 y(n) = M \quad (4.19)$$

onde  $M$  é uma constante não-nula. Ao contrário de (4.17), a função nula  $y(n) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$  não é uma solução de (4.19). Ao invés disso, temos um ponto de equilíbrio ou solução  $y(n) = y^*$ . De (4.19) temos:

$$y^* + p_1 y^* + p_2 y^* = M,$$

ou

$$y^* = \frac{M}{1 + p_1 + p_2}.$$

Portanto  $y_p(n) = y^*$  é uma solução particular de (4.19). Consequentemente, a solução geral de (4.19) é dada por

$$y(n) = y^* + y_c(n),$$

onde  $y_c(n)$  é solução geral da equação homogênea associada (4.17). Isto porque se  $y(n)$  e  $y^*$  forem soluções da equação não homogênea, a diferença será solução da equação homogênea, ou seja,  $y(n) - y^* = y_c(n)$  e assim,  $y(n) = y^* + y_c(n)$ .

Assim,  $y(n) \rightarrow y^*$  se e somente se  $y_c(n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Além disso,  $y(n)$  oscilará ao redor de  $y^*$  se e somente se  $y_c(n)$  oscilará ao redor de zero. Estas observações serão apresentadas no próximo teorema.

**Teorema 4.2.6.** Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  raízes da equação característica (4.18). As seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) Toda solução da equação não homogênea (4.19) oscilará em torno da solução de equilíbrio  $y^*$  se e somente se nenhuma das raízes da equação característica da equação homogênea (4.17) for um número real positivo.
- (ii) Toda solução de (4.19) convergirá para  $y^*$  se e somente se  $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ .

Os teoremas (4.2.5) e (4.2.6) são condições necessárias e suficientes para que a solução nula de uma equação de diferenças de segunda ordem do tipo (4.19) seja assintoticamente estável. Em muitas aplicações, no entanto, é preciso ter critérios explícitos para a estabilidade com base nos valores dos coeficientes  $p_1$  e  $p_2$  de (4.17) ou (4.19). Os seguintes resultados nos fornece tais critérios necessários.

**Teorema 4.2.7.** As condições

$$1 + p_1 + p_2 > 0, \quad 1 - p_1 + p_2 > 0, \quad 1 - p_2 > 0, \quad (4.20)$$

são necessárias e suficientes para que o ponto de equilíbrio  $y^*$  da equação (4.17) e (4.19) seja assintoticamente estável (isto é, toda solução converge para  $y^*$ ).

A prova deste teorema encontra-se no Apêndice A.

Este teorema nos fornece critérios para analisar a estabilidade de sistemas bidimensionais, quando  $|\lambda_1| < 1$  e  $|\lambda_2| < 1$ . Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Determinemos a equação característica:

$$\begin{aligned} \det(A - I\lambda) = 0 &\Rightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda^2 - (tr A)\lambda + \det A = 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Reescrevendo (4.21), obtemos:

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0$$

onde  $p_1 = -tr A$  e  $p_2 = \det A$ . Assim, pelo teorema (4.2.7), para que  $y(n) = y^*$  seja assintoticamente estável, devemos ter:

$$1 + tr A + \det A > 0, \quad 1 - tr A + \det A > 0, \quad 1 - \det A > 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 1 + tr A + \det A > 0 &\Rightarrow 1 + \det A > -tr A \\ 1 - tr A + \det A > 0 &\Rightarrow 1 + \det A > tr A \end{aligned} \Rightarrow |tr A| < 1 + \det A$$

e,

$$1 - \det A > 0 \Rightarrow 1 > \det A \Rightarrow 1 + \det A < 2.$$

Portanto,

$$|\operatorname{tr} A| < 1 + \det A < 2. \quad (4.22)$$

Assim, pelo Teorema (4.2.7), a solução nula da equação  $x(n+1) = Ax(n)$  será assintoticamente estável se e somente se,

$$1 + \operatorname{tr} A + \det A > 0, \quad 1 - \operatorname{tr} A + \det A > 0, \quad 1 - \det A > 0,$$

que é equivalente a  $|\operatorname{tr} A| < 1 + \det A < 2$ .

Como exemplo vamos analisar a estabilidade da solução nula do sistema  $x(n+1) = Ax(n)$ , onde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -0,5 & 2 \end{pmatrix}$$

Veja que,

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -0,5 & 2 \end{pmatrix} = -2 + 2,5 = 0,5 \quad e \quad \operatorname{tr}(A) = 1.$$

Logo, usando (4.22) temos

$$\operatorname{tr}(A) = 1 < 1 + 0,5 = 1 + \det(A) < 2.$$

Portanto, a solução nula deste sistema é assintoticamente estável.

A seguir, faremos uma análise gráfica da estabilidade de sistemas lineares autônomos de duas equações, com coeficientes constantes.

### 4.3 Análise do plano de fase

Plano de fase é o plano  $x_1x_2$  em que se encontram as órbitas de  $x(n+1) = Ax(n)$ , considerando  $A$  uma matriz de ordem 2.

Considere o sistema:

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n), \\ x_2(n+1) &= a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n), \end{aligned}$$

ou

$$x(n+1) = Ax(n) \quad (4.23)$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

É importante lembrar que  $x^*$  é um ponto de equilíbrio do sistema (4.23) se  $Ax^* = x^*$  ou  $(A - I)x^* = 0$ . Assim, se  $(A - I)$  for não singular, então  $x^* = 0$  será o único ponto de equilíbrio do sistema (4.23). Por outro lado, se  $(A - I)$  for singular, então haverá infinitos pontos de equilíbrio. Neste caso, seja  $y(n) = x(n) - x^*$  em (4.23). Obtemos:

$$\begin{aligned} y(n+1) &= x(n+1) - x^* \\ &= Ax(n) - x^* \\ &= Ay(n) + Ax^* - x^* \\ &= Ay(n) + x^* - x^* \\ &= Ay(n), \end{aligned}$$

que é semelhante ao sistema (4.23). Assim, as propriedades de estabilidade de algum ponto de equilíbrio  $x^* \neq 0$  são as mesmas que a do ponto de equilíbrio  $x^* = 0$ . Desta maneira, basta analisar apenas o ponto de equilíbrio  $x^* = 0$  do sistema (4.23).

Seja  $J = P^{-1}AP$  a forma de Jordan de  $A$ . Então,  $J$  tem uma das seguintes formas canônicas:

- (a)  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ , onde os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais distintos;
- (b)  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , onde o autovalor  $\lambda$  é real e de multiplicidade algébrica 2;
- (c)  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ , onde os autovalores são complexos dados por  $\lambda = \alpha \pm i\beta$ .

Seja

$$y(n) = P^{-1}x(n),$$

onde  $x(n)$  é solução de (4.23). Então

$$x(n) = Py(n). \tag{4.24}$$

e

$$\begin{aligned} y(n+1) &= P^{-1}x(n+1) \\ &= P^{-1}Ax(n) \\ &= P^{-1}APy(n) \\ &= Jy(n). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Assim, a função  $y(n) = P^{-1}x(n)$  é solução do sistema  $y(n+1) = Jy(n)$ . Se  $x(0) = x_0$  for uma condição inicial do sistema (4.23), então  $y(0) = y_0 = P^{-1}x_0$  será a

condição inicial correspondente para o sistema (4.25). O objetivo é analisar o plano de fase do sistema (4.25) nos casos (a), (b) e (c).

**Caso (a):** Neste caso, temos o sistema:

$$\begin{aligned}y_1(n+1) &= \lambda_1 y_1(n) \\ y_2(n+1) &= \lambda_2 y_2(n).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^n y_{10} \\ \lambda_2^n y_{20} \end{pmatrix},$$

e portanto,

$$\frac{y_2(n)}{y_1(n)} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \left(\frac{y_{20}}{y_{10}}\right).$$

Se  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_2(n)}{y_1(n)} = 0$  e se  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_2(n)}{y_1(n)} \right| = \infty$ .

Por exemplo, analisando o plano de fase do sistema  $x(n+1) = Ax(n)$ , onde  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,25 & 1 \end{pmatrix}$ , temos

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0,25 & 1-\lambda \end{pmatrix} &= \lambda^2 - 2\lambda + 1 - \frac{1}{4} = 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4} &= 0 \\ \lambda &= \frac{2 \pm 1}{2}.\end{aligned}$$

Assim, temos dois autovalores  $\lambda_1 = \frac{3}{2}$  e  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ . Para encontrar os autovetores correspondentes, temos:

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -\frac{1}{2}\xi_1 + \xi_2 = 0 \Rightarrow \xi_1 = 2\xi_2.$$

Logo, o autovetor corresponde ao autovalor  $\lambda_1$  é  $\xi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Analogamente, podemos encontrar o autovetor  $\xi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  correspondente ao autovalor  $\lambda_2$ . Portanto,

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{onde } P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

e,

$$\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3/2)^n y_{10} \\ (1/2)^n y_{20} \end{pmatrix}.$$

Para encontrar o plano de fase correspondente ao problema, seja  $x(n) = Py(n)$ . Note que  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  no plano  $y_1y_2$  corresponde a  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  no plano  $x_1x_2$ , pois  $x(n) = P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; e  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  no plano  $y_1y_2$  corresponde a  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  no plano  $x_1x_2$ . Deste modo, o eixo  $y_1$  é rotacionado para o eixo  $x_1$  e o eixo  $y_2$  é rotacionado para o eixo  $x_2$ . Portanto, dado o ponto inicial  $\begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , temos

$$\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, o plano de fase para o problema  $y(n+1) = Jy(n)$  é mostrado na figura (4.1) e para o problema  $x(n+1) = Ax(n)$  na figura (4.2).

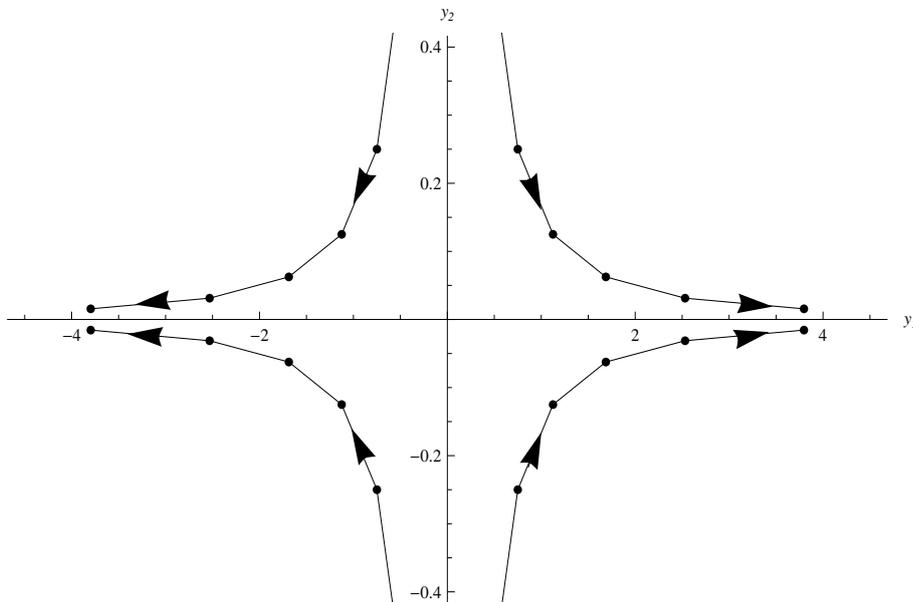


Figura 4.1: Plano de fase de  $y(n+1) = Jy(n)$ .

**Caso (b)** Neste caso, temos

$$\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = J^n \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix},$$

ou

$$\begin{aligned} y_1(n) &= \lambda^n y_{10} + n\lambda^{n-1} y_{20}, \\ y_2(n) &= \lambda^n y_{20}. \end{aligned},$$

logo,

$$\frac{y_2(n)}{y_1(n)} = \frac{\lambda^n y_{20}}{\lambda^n y_{10} + n\lambda^{n-1} y_{20}} = \frac{y_{20}}{y_{10} + n\lambda^{-1} y_{20}}$$

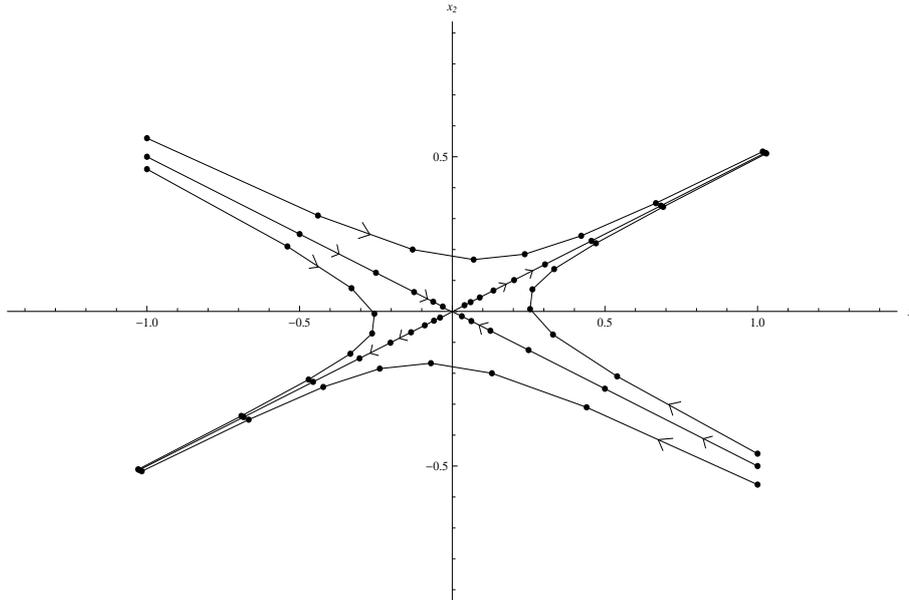


Figura 4.2: Plano de fase de  $x(n+1) = Ax(n)$ .

Portanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_2(n)}{y_1(n)} = 0$ .

**Caso (c):** Neste caso, a matriz  $A$  tem dois autovalores complexos,  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  e  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ,  $\beta \neq 0$ . O autovetor correspondente a  $\lambda_1$  é dado por  $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$  e escrevendo  $\lambda_1$  em coordenadas polares temos  $\alpha = r \cos(\theta)$ ,  $\beta = r \sin(\theta)$  e  $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ , assim  $\lambda_1 = r \cos(\theta) + ir \sin(\theta)$ , logo a solução é dada por:

$$\begin{aligned} y(n) = \xi_1 \lambda_1^n &= \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\alpha + i\beta)^n = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} r^n e^{in\theta} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) = \\ &= \begin{pmatrix} r^n \cos(n\theta) + ir^n \sin(n\theta) \\ r^n i \cos(n\theta) - r^n \sin(n\theta) \end{pmatrix} = \\ &= r^n \begin{pmatrix} \cos(n\theta) \\ -\sin(n\theta) \end{pmatrix} + ir^n \begin{pmatrix} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde  $\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ . As soluções reais são dadas por  $r^n \begin{pmatrix} \cos(n\theta) \\ -\sin(n\theta) \end{pmatrix}$  e  $r^n \begin{pmatrix} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{pmatrix}$ .

Portanto, a solução real geral é dada por:

$$\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = r^n \begin{pmatrix} c_1 \cos(n\theta) + c_2 \sin(n\theta) \\ -c_1 \sin(n\theta) + c_2 \cos(n\theta) \end{pmatrix}.$$

Dada a condição inicial  $y_1(0) = y_{10}$  e  $y_2(0) = y_{20}$ , obtemos  $c_1 = y_{10}$  e  $c_2 = y_{20}$ . Assim,

a solução é:

$$\begin{aligned}y_1(n) &= r^n (y_{10} \cos(n\theta) + y_{20} \operatorname{sen}(n\theta)) \\y_2(n) &= r^n (-y_{10} \operatorname{sen}(n\theta) + y_{20} \cos(n\theta))\end{aligned}$$

Escrevendo  $y_{10}$  e  $y_{20}$  em coordenadas polares temos  $y_{10} = r_0 \cos(\gamma)$  e  $y_{20} = r_0 \operatorname{sen}(\gamma)$ , onde  $r_0 = \sqrt{y_{10}^2 + y_{20}^2}$  e  $\gamma = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y_{20}}{y_{10}}\right)$ . Assim,

$$\begin{aligned}y_1(n) &= r^n (r_0 \cos(\gamma) \cos(n\theta) + r_0 \operatorname{sen}(\gamma) \operatorname{sen}(n\theta)) \\&= r^n r_0 (\cos(n\theta) \cos(\gamma) + \operatorname{sen}(n\theta) \operatorname{sen}(\gamma)) \\&= r^n r_0 \cos(n\theta - \gamma), \quad e\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_2(n) &= r^n (r_0 \cos(\gamma) \operatorname{sen}(n\theta) - r_0 \operatorname{sen}(\gamma) \cos(n\theta)) \\&= -r^n r_0 (\operatorname{sen}(n\theta) \cos(\gamma) - \cos(n\theta) \operatorname{sen}(\gamma)) \\&= -r^n r_0 \operatorname{sen}(n\theta - \gamma).\end{aligned}$$

Portanto, a solução geral em coordenadas polares é:

$$\begin{aligned}r(n) &= \sqrt{y_1^2(n) + y_2^2(n)} \\&= r^n r_0 \sqrt{1} \\&= r^n r_0.\end{aligned}$$

Por exemplo, se considerarmos o sistema  $x(n+1) = Ax(n)$  com  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ , temos

$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ -1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 4$ . Logo, os autovalores são  $\lambda_1 = 1 + i\sqrt{3}$  e  $\lambda_2 =$

$1 - i\sqrt{3}$ . E o autovetor correspondente para  $\lambda_1$  é  $\xi_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Se  $P = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , então  $P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ , que é a forma canônica do caso (c). Portanto, a solução de  $y(n+1) = Jy(n)$  é:

$$\begin{aligned}r(n) &= r^n r_0 = \sqrt{y_{10}^2 + y_{20}^2} \left( \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} \right)^n \\&= \sqrt{y_{10}^2 + y_{20}^2} 2^n,\end{aligned}$$

onde  $\gamma = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y_{20}}{y_{10}}\right)$  e  $\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$ . Se dado o ponto inicial  $\begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} -\frac{1}{16} \\ 0 \end{pmatrix}$  (figura 4.3), então a solução será dada por  $r(n) = \frac{1}{16} 2^n = 2^{n-4}$ ,  $\theta(n) =$

$\pi - \frac{n\theta}{3}$ . A órbita correspondente no sistema original (Figura 4.4) tem o ponto inicial

$$x_0 = Py_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{16} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

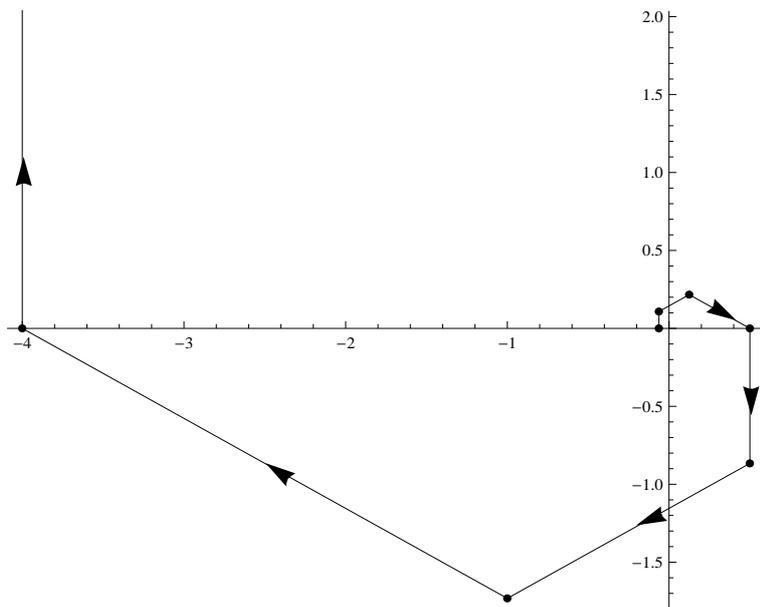


Figura 4.3: Órbita de  $y(n+1) = Jy(n)$  com condição inicial  $(-1/16, 0)$ .

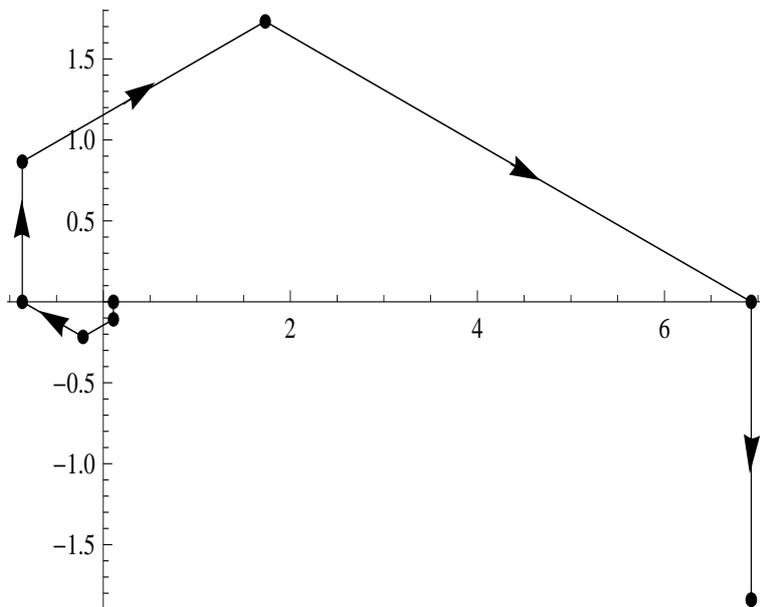


Figura 4.4: Órbita de  $x(n+1) = Ax(n)$  com condição inicial  $(-\sqrt{3}/16, 0)$ .

Ao longo do trabalho, estudamos equações de diferenças lineares e estabilidade, que são importantes para dar continuidade ao estudo das equações quase lineares, que serão vistas no próximo capítulo, sendo o foco do presente trabalho.

## 5 Sistemas quase lineares

Vamos apresentar neste capítulo um processo de linearização, que é um método para encontrar um modelo linear que seja uma boa aproximação do sistema não-linear, ou seja, que as trajetórias do sistema linear sejam boas aproximações das trajetórias do sistema não linear.

### 5.1 Definição

Considere o sistema não linear

$$x(n+1) = f(n, x(n)), \quad (5.1)$$

onde  $f : \mathbb{Z}^+ \times G \rightarrow \mathbb{R}^k$  é continuamente diferenciável,  $G \subset \mathbb{R}^k$  e  $x^*$  é um ponto de equilíbrio de (5.1). Descreveremos, agora, o método de linearização aplicado ao sistema (5.1). Seja  $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ . A matriz Jacobiana de  $f$  é dada por:

$$\left. \frac{\partial f(n, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\partial f(n, 0)}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(n, 0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1(n, 0)}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(n, 0)}{\partial y_k} \\ \frac{\partial f_2(n, 0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2(n, 0)}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(n, 0)}{\partial y_k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_k(n, 0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_k(n, 0)}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_k(n, 0)}{\partial y_k} \end{pmatrix}$$

Por simplicidade,  $\frac{\partial f(n, x^*)}{\partial x}$  será denotado por  $Df(n, x^*)$ . Se  $x^* \neq 0$ , considere a mudança de variável

$$y(n) = x(n) - x^*$$

em (5.1). Assim,

$$\begin{aligned} y(n+1) &= x(n+1) - x^* \\ &= f(n, y(n) + x^*) - x^* \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(n, x^*)y(n) + g(n, y(n)), \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde  $g(n, y(n)) = f(n, y(n) + x^*) - x^* - \frac{\partial f}{\partial x}(n, x^*)y(n)$ . Como  $f$  é diferenciável,  $g(n, y) = o(\|y\|)$  quando  $\|y\| \rightarrow 0$ . Isto significa que, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\|g(n, y)\| \leq \epsilon\|y\|$  sempre que  $\|y\| < \delta$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

Considerando apenas os componentes lineares de (5.2), e sendo  $A(n) = \frac{\partial f}{\partial x}(n, x^*)$  temos:

$$z(n+1) = A(n)z(n) \quad (5.3)$$

onde  $A(n)$  é uma matriz  $k \times k$  para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

Note que, quando  $x^* = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} g(n, y(n)) &= f(n, y(n)) - Df(n, 0)y(n) \\ &= f(n, y(n)) - A(n)y(n). \end{aligned}$$

Agora, vamos trabalhar com um caso especial do sistema (5.1), que é o sistema autônomo:

$$y(n+1) = f(y(n)), \quad (5.4)$$

considerando que  $f(0) = 0$  para que  $x^* = 0$  seja ponto de equilíbrio de (5.4).

O sistema pode ser escrito como:

$$y(n+1) = Ay(n) + g(y(n)), \quad (5.5)$$

onde  $A$  é a matriz Jacobiana de  $f$  em 0, e  $g(y) = f(y) - Ay$ . Como  $g(y) = o(\|y\|)$  quando  $\|y\| \rightarrow 0$ , temos

$$\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{\|g(y)\|}{\|y\|} = 0,$$

isto é,  $\|g\|$  é pequeno em comparação com  $\|y\|$ , próximo a origem.

Esta condição permite que as soluções do sistema não linear (5.5) estejam próximas das soluções do sistema linear  $y(n+1) = Ay(n)$ .

O sistema (5.5), com estas condições, é chamado de sistema quase linear na vizinhança do ponto de equilíbrio  $x^* = 0$ .

## 5.2 Estabilidade de equações de diferenças quase lineares

Antes de analisar a estabilidade de sistemas quase lineares, consideremos uma importante desigualdade, que será utilizada em demonstrações a seguir.

**Lema 5.1. (Desigualdade de Gronwall).** *Sejam  $(z(n))$  e  $(h(n))$  sequências reais tais que  $h(n) \geq 0$  para  $n > n_0 \geq 0$ ,*

$$z(n) \leq M \left[ z(n_0) + \sum_{j=n_0}^{n-1} h(j)z(j) \right]$$

para algum  $M > 0$  e  $n > n_0$ , então

$$z(n) \leq z(n_0) \prod_{j=n_0}^{n-1} [1 + Mh(j)], \quad n > n_0 \quad e \quad (5.6)$$

$$z(n) \leq z(n_0) \exp \left[ \sum_{j=n_0}^{n-1} Mh(j) \right], \quad n > n_0. \quad (5.7)$$

*Demonstração.* Seja uma sequência  $(u(n))$  dada por:

$$u(n) = M \left[ u(n_0) + \sum_{j=n_0}^{n-1} h(j)u(j) \right], \quad u(n_0) = z(n_0). \quad (5.8)$$

Como  $h(j) \geq 0$  para todo  $j > n_0$ , temos  $z(n) \leq u(n)$  para todo  $n \geq n_0$ . De fato:

$$u(n_0 + 1) = M [u(n_0) + h(n_0)u(n_0)]$$

e

$$z(n_0 + 1) \leq M [z(n_0) + h(n_0)z(n_0)] = M [u(n_0) + h(n_0)u(n_0)] = u(n_0 + 1).$$

Logo,  $z(n_0 + 1) \leq u(n_0 + 1)$ . Além disso,

$$u(n_0 + 2) = M [u(n_0) + h(n_0)u(n_0) + h(n_0 + 1)u(n_0 + 1)]$$

e

$$\begin{aligned} z(n_0 + 2) &\leq M [z(n_0) + h(n_0)z(n_0) + h(n_0 + 1)z(n_0 + 1)] \\ &\leq M [u(n_0) + h(n_0)u(n_0) + h(n_0 + 1)u(n_0 + 1)] = u(n_0 + 2). \end{aligned}$$

Genericamente, temos  $z(n) \leq u(n)$ , sendo  $h(n) \geq 0$  para  $n > n_0$ . De (5.8) temos

$$\begin{aligned} u(n + 1) &= Mu(n_0) + M \sum_{j=n_0}^n h(j)u(j) \\ &= Mu(n_0) + M \sum_{j=n_0}^{n-1} h(j)u(j) + Mh(n)u(n) \\ &= u(n) + Mh(n)u(n) \\ &= [1 + Mh(n)] u(n). \end{aligned}$$

Por uma simples iteração, concluímos que a solução desta equação discreta é:

$$u(n) = \prod_{j=n_0}^{n-1} [1 + Mh(j)] u(n_0).$$

Como  $z(n) \leq u(n)$  para  $n > n_0$  e  $u(n_0) = z(n_0)$ , temos a desigualdade (5.6).

Provemos, agora, a desigualdade (5.7). Pela expansão de Taylor da função  $f(x) = e^x$  em torno de  $x = 0$ , temos  $1 + x \leq e^x$ , para  $x \geq 0$ . Logo  $1 + Mh(j) \leq \exp(Mh(j))$ , e por (5.6), com  $n > n_0$ , segue:

$$\begin{aligned} z(n) &\leq z(n_0) \prod_{j=n_0}^{n-1} [1 + Mh(j)] = z(n_0) [1 + Mh(n_0)] [1 + Mh(n_0 + 1)] \dots [1 + Mh(n - 1)] \\ &\leq z(n_0) \exp(Mh(n_0)) \exp(Mh(n_0 + 1)) \dots \exp(Mh(n - 1)) = \\ &= z(n_0) \exp \left[ \sum_{j=n_0}^{n-1} Mh(j) \right], \end{aligned}$$

concluindo, assim, a prova do lema.  $\square$

**Teorema 5.2.1.** Supõe-se que  $\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{\|g(n, y)\|}{\|y\|} = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > n_0$ . Se a solução nula do sistema linear (5.3) for uniformemente assintoticamente estável, então a solução nula do sistema quase linear (5.2) será exponencialmente estável.

*Demonstração.* Se a solução nula do sistema (5.3) for uniformemente assintoticamente estável, pelo Teorema 4.2.1, a matriz fundamental de (5.3)  $\Phi(n, m)$  satisfará  $\|\Phi(n, m)\| \leq M\eta^{n-m}$  para  $n \geq m \geq n_0$ , e algum  $M > 1$  e  $\eta \in (0, 1)$ . E, além disso, pelo Teorema 4.1.3, a solução de (5.2) é dada por:

$$y(n, n_0, y_0) = \Phi(n, n_0)y_0 + \sum_{j=n_0}^{n-1} \Phi(n, j+1)g(j, y(j)).$$

Logo,

$$\|y(n)\| \leq M\eta^{(n-n_0)}\|y_0\| + M\eta^{-1} \sum_{j=n_0}^{n-1} \eta^{(n-j)}\|g(j, y(j))\|. \quad (5.9)$$

Pela hipótese, para um dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\|g(j, y)\| < \epsilon\|y\|$  sempre que  $\|y\| < \delta$ . Logo, se  $\|y(j)\| < \delta$ , então a desigualdade (5.9) pode ser dada por:

$$\eta^{-n}\|y(n)\| \leq M \left[ \eta^{-n_0}\|y_0\| + \sum_{j=n_0}^{n-1} \epsilon\eta^{-j-1}\|y(j)\| \right]. \quad (5.10)$$

Seja  $z(n) = \eta^{-n}\|y(n)\|$ . Aplicando a Desigualdade de Gronwall obtemos

$$\eta^{-n}\|y(n)\| \leq \eta^{-n_0}\|y_0\| \prod_{j=n_0}^{n-1} [1 + \epsilon\eta^{-1}M].$$

Portanto,

$$\|y(n)\| \leq \|y_0\| (\eta + \epsilon M)^{(n-n_0)}. \quad (5.11)$$

Escolhendo  $\epsilon < \frac{(1-\eta)}{M}$ , temos  $\eta + \epsilon M < 1$ . Logo,  $\|y(n)\| \leq \|y_0\| < \delta$  para todo  $n \geq n_0 \geq 0$ . Portanto, a desigualdade (5.10) é verdadeira, consequentemente, em virtude da fórmula (5.11), obtemos a estabilidade exponencial.  $\square$

**Corolário 5.1.** Se  $\rho(A) < 1$ , onde  $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ é autovalor de } A\}$ , então a solução nula de (5.5) será exponencialmente estável.

*Demonstração.* Pelo Teorema (4.2.4), se  $\rho(A) < 1$ , então a solução nula será assintoticamente estável, logo a prova do Corolário segue imediatamente do Teorema 5.2.1.  $\square$

**Corolário 5.2.** Se  $\|A\| < 1$ , então a solução nula de (5.4) será exponencialmente estável.

*Demonstração.* Já foi provado que  $\rho(A) \leq \|A\|$ . E, como  $\|A\| < 1$ , então  $\rho(A) < 1$  e o resultado segue pelo Corolário 5.1.  $\square$

Como aplicação deste resultado, vamos agora investigar a solução nula do seguinte sistema:

$$\begin{aligned} y_1(n+1) &= ay_2(n)/[1+y_1^2(n)], \\ y_2(n+1) &= by_1(n)/[1+y_2^2(n)]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Seja  $f = (f_1, f_2)$ , onde  $f_1(n) = ay_2(n)/[1+y_1^2(n)]$  e  $f_2(n) = by_1(n)/[1+y_2^2(n)]$ . Então, a matriz Jacobiana de  $f$  na origem é

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} g(y(n)) &= \begin{pmatrix} f_1(y(n)) \\ f_2(y(n)) \end{pmatrix} - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ay_2(n)}{1+y_1^2(n)} \\ \frac{by_1(n)}{1+y_2^2(n)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ay_2(n) \\ by_1(n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{ay_2(n) - ay_2(n) - ay_1^2(n)y_2(n)}{1+y_1^2(n)} \\ \frac{by_1(n) - by_1(n) - by_1(n)y_2^2(n)}{1+y_2^2(n)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-ay_2(n)y_1^2(n)}{1+y_1^2(n)} \\ \frac{-by_2^2(n)y_1(n)}{1+y_2^2(n)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Assim, o sistema (5.12) pode ser escrito como:

$$\begin{pmatrix} y_1(n+1) \\ y_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-ay_2(n)y_1^2(n)}{1+y_1^2(n)} \\ \frac{-by_2^2(n)y_1(n)}{1+y_2^2(n)} \end{pmatrix},$$

ou como,

$$y(n+1) = Ay(n) + g(y(n)).$$

Os autovalores de  $A$  são as soluções de  $\lambda^2 = ab$ . Portanto, se  $|ab| < 1$  então  $\rho(A) < 1$  e a solução nula da equação linear  $y(n+1) = Ay(n)$  é assintoticamente estável. E como  $g(y)$  é continuamente diferenciável em  $(0,0)$ , então  $g(y) = o(\|y\|)$  e, pelo Corolário 5.1, a solução nula de (5.12) é exponencialmente estável.

Vamos analisar agora o comportamento da equação logística de Pielou dada por:

$$x(n+1) = \frac{\alpha x(n)}{1 + \beta x(n)}, \quad \alpha > 1, \quad \beta > 0. \quad (5.13)$$

e também consideremos a equação com retardamento de uma unidade:

$$y(n+1) = \frac{\alpha y(n)}{1 + \beta y(n-1)}. \quad (5.14)$$

Se  $f(y^*) = y^*$ , temos  $\frac{\alpha y^*}{1 + \beta y^*} = y^*$ , então  $y^* = \frac{\alpha - 1}{\beta}$  ou  $y^* = 0$ , que são os pontos de equilíbrio da equação (5.13). Devemos encontrar condições para  $\alpha$  e  $\beta$  para que o ponto de equilíbrio  $y^* = \frac{\alpha - 1}{\beta}$  seja assintoticamente estável. Seja  $\bar{y}(n) = y(n) - \frac{\alpha - 1}{\beta}$ . Então,

$$y(n) = \bar{y}(n) + \frac{\alpha - 1}{\beta}, \quad e \quad y(n-1) = \bar{y}(n-1) + \frac{\alpha - 1}{\beta}. \quad (5.15)$$

Além disso, por (5.14), temos:

$$\begin{aligned} \bar{y}(n+1) &= \frac{\alpha y(n)}{1 + \beta y(n-1)} - \frac{\alpha - 1}{\beta} \\ &= \frac{\alpha \beta y(n) - (1 + \beta y(n-1))(\alpha - 1)}{\beta(1 + \beta y(n-1))} \\ &= \frac{\beta \left( \alpha y(n) - \frac{\alpha - 1}{\beta} - (\alpha - 1)y(n-1) \right)}{\beta(1 + \beta y(n-1))} \\ &= \frac{\alpha y(n) - \frac{\alpha - 1}{\beta} - (\alpha - 1)y(n-1)}{(1 + \beta y(n-1))}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Substituindo  $y(n)$  e  $y(n-1)$  de (5.15) em (5.16), temos:

$$\begin{aligned} \bar{y}(n+1) &= \frac{\alpha \left( \bar{y}(n) + \frac{\alpha - 1}{\beta} \right) - \frac{\alpha - 1}{\beta} - (\alpha - 1) \left( \bar{y}(n-1) + \frac{\alpha - 1}{\beta} \right)}{1 + \beta \left( \bar{y}(n-1) + \frac{\alpha - 1}{\beta} \right)} \\ &= \frac{\alpha \bar{y}(n) + \frac{\alpha^2 - \alpha}{\beta} - \frac{\alpha - 1}{\beta} - \frac{(\alpha - 1)^2}{\beta} - (\alpha - 1) \bar{y}(n-1)}{1 + \beta \bar{y}(n-1) + \alpha - 1} \\ &= \frac{\alpha \bar{y}(n) - (\alpha - 1) \bar{y}(n-1)}{\alpha + \beta \bar{y}(n-1)}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Observe que  $\bar{y}(n+1)$  depende dos instantes  $\bar{y}(n)$  e  $\bar{y}(n-1)$  e substituindo a equação dada por um sistema de duas equações, através da introdução das equações  $x_1(n) = \bar{y}(n-1)$  e  $x_2(n) = \bar{y}(n)$ , temos:

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(n) \\ \frac{\alpha x_2(n) - (\alpha - 1)x_1(n)}{\alpha + \beta x_1(n)} \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

O ponto de equilíbrio  $\bar{y}^* = (0, 0)$  de (5.18) corresponde ao  $y^* = \frac{\alpha - 1}{\beta}$  da equação inicial. Aplicando a linearização de (5.18) em torno de  $(0, 0)$ , e sendo  $f = (f_1, f_2)^T$ , onde  $f_1 = x_2(n)$  e  $f_2 = \frac{\alpha x_2(n) - (\alpha - 1)x_1(n)}{\alpha + \beta x_1(n)}$ , temos que:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(0, 0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1(0, 0)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2(0, 0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2(0, 0)}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1 - \alpha}{\alpha} & 1 \end{pmatrix},$$

e,

$$\begin{aligned} g(x(n)) &= \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2(n) \\ \frac{\alpha x_2(n) - (\alpha - 1)x_1(n)}{\alpha + \beta x_1(n)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1 - \alpha}{\alpha} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2(n) \\ \frac{\alpha x_2(n) - (\alpha - 1)x_1(n)}{\alpha + \beta x_1(n)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2(n) \\ \frac{1 - \alpha}{\alpha}x_1(n) + x_2(n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ A \\ B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

com  $A = \alpha^2 x_2(n) - (\alpha^2 - \alpha)x_1(n) - (\alpha + \beta x_1(n))(x_1(n) - \alpha x_1(n)) - (\alpha^2 + \beta x_1(n))x_2(n) = -\beta x_1^2(n) + \alpha \beta x_1^2(n) - \alpha \beta x_1(n)x_2(n) = \beta(\alpha - 1)x_1^2(n) - \alpha \beta x_1(n)x_2(n)$  e  $B = \alpha(\alpha + \beta x_1(n))$ .

Assim temos um novo sistema, dado por:

$$x(n+1) = Ax(n) + g(x(n)).$$

A equação característica de  $x(n+1) = Ax(n)$  é  $\lambda^2 - \lambda + \frac{\alpha - 1}{\alpha} = \lambda^2 - \lambda \text{tr} A + \det A = 0$ . Portanto, pela condição (4.22), que garante estabilidade assintótica através do Teorema 4.2.7, devemos ter  $|\text{tr} A| < 1 + \det A < 2$ , ou seja,  $1 < \frac{\alpha - 1}{\alpha} + 1 < 2$  ou  $0 < \frac{\alpha - 1}{\alpha} < 1$ , na qual é sempre válida desde que  $\alpha > 1$ .

No próximo capítulo utilizaremos o processo de linearização para analisar dois modelos não lineares.

## 6 Aplicações

Neste capítulo apresentaremos dois modelos através de sistemas não lineares, representando um problema de Economia [5] e outro envolvendo a relação entre duas espécies, em que uma é parasita da outra espécie (hospedeira) [1].

### 6.1 Um modelo de ciclo de negócios

O economista Paul Samuelson (1939) criou uma teoria partindo do princípio de que, quando um investimento é feito, ele permite um aumento (proporcional a ele) na produção e por consequência, haverá um impacto maior sobre o lucro, o qual, em parte é transformado em poupança e a outra parte em gastos. A parte poupada fica por um tempo indefinido fora do circuito do consumo, enquanto a outra parte é re-injetada no processo, estimulando a produção, alcançando então os benefícios esperados. Assim, quanto mais se gastar da parcela da renda do investimento mais a produção será estimulada.

Em 1950, o matemático John Hicks propõe um modelo baseado na teoria de Samuelson conforme [5], que apresentamos agora.

Sendo  $I(n)$  o investimento em um período de tempo  $n$  e  $Y(n)$  a renda obtida neste período, o autor propõe que o investimento seja proporcional à variação da renda entre os dois períodos anteriores, isto é,

$$I(n) = v [Y(n - 1) - Y(n - 2)] \quad (6.1)$$

sendo  $v$  uma constante positiva.

Propõe também que o consumo  $C(n)$  em um período de tempo  $n$  seja proporcional à renda no período anterior, isto é,

$$C(n) = (1 - s)Y(n - 1), \quad (6.2)$$

onde  $s$  representa a renda poupada no mês anterior ( $0 \leq s \leq 1$ ).

Utilizando a "identidade contábil" adotada em Economia, temos

$$Y(n) = C(n) + I(n). \quad (6.3)$$

Logo, temos uma equação de diferenças de segunda ordem,

$$Y(n) = (1 + v - s)Y(n - 1) - vY(n - 2). \quad (6.4)$$

De acordo com Hicks, este modelo não representa adequadamente o problema proposto e o economista Tonu Puu [5] propõe como uma alternativa, o seguinte modelo não linear:

$$I(n) = v(Y(n - 1) - Y(n - 2)) - v[Y(n - 1) - Y(n - 2)]^3, \quad (6.5)$$

$$C(n) = (1 - s)Y(n - 1) + \epsilon sY(n - 2), \quad (6.6)$$

com  $\epsilon \in [0, 1)$  e  $v > \epsilon s$ .

Substituindo (6.5) e (6.6) em (6.3) temos

$$Y(n) = v(Y(n - 1) - Y(n - 2)) - v[Y(n - 1) - Y(n - 2)]^3 + (1 - s)Y(n - 1) + \epsilon sY(n - 2)$$

que é equivalente a

$$Y(n) - Y(n - 1) = v(Y(n - 1) - Y(n - 2)) - v[Y(n - 1) - Y(n - 2)]^3 - sY(n - 1) + \epsilon sY(n - 2). \quad (6.7)$$

Subtraindo e somando  $\epsilon sY(n - 1)$  no segundo membro da equação, obtemos

$$Y(n) - Y(n - 1) = v(Y(n - 1) - Y(n - 2)) - v[Y(n - 1) - Y(n - 2)]^3 + (\epsilon - 1)sY(n - 1) - \epsilon s(Y(n - 1) - Y(n - 2)).$$

Logo,

$$Y(n) - Y(n - 1) = (v - \epsilon s)(Y(n - 1) - Y(n - 2)) - v[Y(n - 1) - Y(n - 2)]^3 + (\epsilon - 1)sY(n - 1). \quad (6.8)$$

Introduzindo uma nova variável,

$$\tilde{Z}(n - 1) = Y(n) - Y(n - 1), \quad (6.9)$$

podemos escrever a equação (6.8) como

$$\tilde{Z}(n - 1) = (v - \epsilon s)\tilde{Z}(n - 2) - v\tilde{Z}^3(n - 2) + (\epsilon - 1)sY(n - 1),$$

ou como,

$$\tilde{Z}(n) = (v - \epsilon s)\tilde{Z}(n - 1) - v\tilde{Z}^3(n - 1) + (\epsilon - 1)sY(n). \quad (6.10)$$

Agora, seja

$$cZ(n) = \tilde{Z}(n)$$

onde  $c = \sqrt{\frac{1+v-\epsilon s}{v}}$ ,  $1+v-\epsilon s > 0$  pois  $0 \leq \epsilon s < 1$  e  $v > 0$ .

Dividindo (6.10) por  $c$ , temos:

$$Z(n) = (v - \epsilon s)Z(n-1) - (1 + v - \epsilon s)Z^3(n-1) + (\epsilon - 1)\frac{s}{c}Y(n). \quad (6.11)$$

Considerando  $a = v - \epsilon s$  e  $b = (1 - \epsilon)s$  temos que  $a > 0$  pois  $v > \epsilon s$  e  $b \in (0, 1)$  pois  $\epsilon s < 1$  e (6.11) é dada por

$$Z(n) = aZ(n-1) - (1 + a)Z^3(n-1) - \frac{b}{c}Y(n).$$

Usando (6.9), temos

$$Y(n+1) = Y(n) + cZ(n) \quad (6.12)$$

e por (6.12) temos

$$\begin{aligned} Z(n+1) &= aZ(n) - (1 + a)Z^3(n) - \frac{b}{c}Y(n+1) \\ &= aZ(n) - (1 + a)Z^3(n) - \frac{b}{c}[Y(n) + cZ(n)] \\ &= (a - b)Z(n) - (1 + a)Z^3(n) - \frac{b}{c}Y(n). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Usando (6.12) e (6.13), temos um sistema de duas equações

$$\begin{aligned} Y(n+1) &= Y(n) + cZ(n) \\ Z(n+1) &= (a - b)Z(n) - (a + 1)Z^3(n) - \frac{b}{c}Y(n) \end{aligned} \quad (6.14)$$

Sejam  $X(n) = (Y(n), Z(n))$  e  $f(Y(n), Z(n)) = (f_1(Y(n), Z(n)), f_2(Y(n), Z(n)))$ .

O sistema (6.14) tem um único ponto de equilíbrio que é  $(0, 0)$  e para analisar sua estabilidade, aplicaremos o processo de linearização. A matriz Jacobiana de  $f$  em  $(0, 0)$  é dada por,

$$A = \frac{\partial f}{\partial X}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & c \\ -\frac{b}{c} & a - b \end{pmatrix}.$$

Seja

$$\begin{aligned} g(X(n)) &= \begin{pmatrix} f_1(X(n)) \\ f_2(X(n)) \end{pmatrix} - \frac{\partial f}{\partial X}(0, 0) \begin{pmatrix} Y(n) \\ Z(n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Y(n) + cZ(n) \\ (a - b)Z(n) - (a + 1)Z^3(n) - \frac{b}{c}Y(n) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & c \\ -\frac{b}{c} & a - b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y(n) \\ Z(n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -(a + 1)Z^3(n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Assim, o sistema (6.14) pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} Y(n+1) \\ Z(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ -\frac{b}{c} & a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y(n) \\ Z(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -(a+1)Z^3(n) \end{pmatrix}$$

ou,  $X(n+1) = AX(n) + g(X(n))$ . A equação característica de  $A$  é dada por

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & c \\ -\frac{b}{c} & a-b-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} a-b-\lambda - a\lambda + b\lambda + \lambda^2 + b &= 0 \\ \lambda^2 - \lambda(1+a-b) + a &= 0 \\ \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}(A) + \det(A) &= 0. \end{aligned}$$

E os autovalores de  $A$  são  $\lambda_{1,2} = \frac{a-b+1 \pm \sqrt{(b-1)^2 - 2a(b+1)}}{2}$ .

Pelo critério (4.22) e Teorema 4.2.7, a solução nula da parte linear é assintoticamente estável se e somente se:

- (i)  $1 + \operatorname{tr}(A) + \det(A) > 0 \Rightarrow 2 + 2a - b > 0$ ,
- (ii)  $1 - \operatorname{tr}(A) + \det(A) > 0 \Rightarrow b > 0$ ,
- (iii)  $1 - \det(A) > 0 \Rightarrow 1 > a$ .

Como  $1 > a > 0$  e  $0 < b < 1$ , a região de estabilidade  $S$  é dada por

$$S = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / 0 < b < 1 \text{ e } 0 < a < 1\}.$$

Concluindo, se  $(a, b) \in S$ , então o ponto de equilíbrio nulo do sistema linear é assintoticamente estável.

Logo, pelo Corolário 5.1 a solução nula do sistema (6.14) será exponencialmente estável se  $(a, b) \in S$ .

## 6.2 Um modelo hospedeiro-parasita [1]

Considere duas espécies onde ambas tem um número de estágios no ciclo da vida que inclui ovos, larvas, pupas e fase adulta, em que uma é parasita da outra que é chamada de hospedeira.

Sejam  $H(n)$  a densidade de hospedeiros na geração  $n$ ,  $P(n)$  a densidade de parasitas na geração  $n$ ,  $g(H(n), P(n))$  a fração dos hospedeiros não parasitados,  $\lambda$  a taxa de reprodução dos hospedeiros e  $c$  o número médio de ovos depositados por um parasita em um único hospedeiro.

O modelo é baseado nos seguintes princípios:

- (i)  $H(n+1)$  é o número de hospedeiros na geração  $n$  multiplicado pela fração dos não parasitados, multiplicado pela taxa  $\lambda$  de reprodução.
- (ii)  $P(n+1)$  é a fração de hospedeiros parasitados na geração  $n$ , multiplicado pela taxa  $c$  de fecundidade dos parasitas e pelo número de hospedeiros na geração  $n$ .

Portanto, temos

$$H(n+1) = \lambda H(n)g(H(n), P(n)) \quad (6.15)$$

$$P(n+1) = cH(n)[1 - g(H(n), P(n))]. \quad (6.16)$$

Considera-se também que

- (iii) O número  $H_e$  de hospedeiros para cada parasita é proporcional ao produto de suas densidades, isto é,

$$H_e = aH(n)P(n). \quad (6.17)$$

- (iv) Sendo  $\mu$  é o número médio de encontros entre hospedeiros e parasitas em um dado intervalo de tempo, a probabilidade de ocorrer  $r$  encontros é dada pela função

$$p(r) = \frac{e^{-\mu}\mu^r}{r!}, \quad (6.18)$$

com  $\mu = \frac{H_e}{H(n)}$ . De (6.17) segue que

$$\mu = aP(n). \quad (6.19)$$

Uma vez que a probabilidade de fuga do parasita é a mesma probabilidade de nenhum encontro ocorrer durante o tempo de vida do hospedeiro, temos  $g(H(n), P(n)) = p(0) = e^{-aP(n)}$ .

Assim, as equações (6.15) e (6.16) podem ser escritas como

$$\begin{aligned} H(n+1) &= \lambda H(n)e^{-aP(n)} = f_1(H(n), P(n)), \\ P(n+1) &= cH(n)(1 - e^{-aP(n)}) = f_2(H(n), P(n)). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Temos o ponto de equilíbrio do sistema (6.20)  $(H^*, P^*) = (0, 0)$ . Chamando  $X(n+1) = (H(n+1), P(n+1))$  e  $f(H(n), P(n)) = (f_1(H(n), P(n)), f_2(H(n), P(n)))$ , fazendo o processo de linearização, temos

$$A = \frac{\partial f}{\partial X}(0, 0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim,  $\det(A) = 0$  e  $tr(A) = \lambda$ .

Logo, usando o critério (4.22) e pelo Teorema 4.2.7, o ponto de equilíbrio nulo é assintoticamente estável se  $|tr(A)| < 1 + \det(A) < 2$ , que é equivalente a  $|\lambda| < 1$ , sendo  $\lambda$  autovalor de  $A$ .

Portanto, a solução nula de (6.20) é exponencialmente estável se  $-1 < \lambda < 1$ .

Agora, vamos encontrar um outro ponto de equilíbrio  $(H^*, P^*)$ , resolvendo as equações

$$\begin{cases} \lambda H^* e^{-aP^*} = H^* \\ cH^*(1 - e^{-aP^*}) = P^* \end{cases}$$

Temos:

$$(i) \quad \lambda H^* e^{-aP^*} = H^* \iff e^{-aP^*} = \frac{H^*}{\lambda H^*} = \lambda^{-1} \iff -aP^* = -\ln \lambda \iff \\ \iff P^* = \frac{\ln \lambda}{a}.$$

$$(ii) \quad cH^*(1 - e^{-aP^*}) = P^* \iff cH^*(1 - e^{\ln \lambda^{-1}}) = \frac{\ln \lambda}{a} \iff \\ \iff H^* = \frac{\ln \lambda}{ac(1 - \lambda^{-1})} = \frac{\lambda \ln \lambda}{ac(\lambda - 1)}.$$

Logo,  $(H^*, P^*) = \left( \frac{\lambda \ln \lambda}{ac(\lambda - 1)}, \frac{\ln \lambda}{a} \right)$ .

A matriz Jacobiana de  $f$  neste ponto é

$$\frac{\partial f}{\partial X}(H^*, P^*) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\lambda \ln \lambda}{(\lambda - 1)c} \\ \frac{c(\lambda - 1)}{\lambda} & \frac{\ln \lambda}{\lambda - 1} \end{pmatrix}.$$

Logo,  $\det(A) = \frac{\ln \lambda}{\lambda - 1} + \ln \lambda$  e  $tr(A) = \frac{\ln \lambda}{\lambda - 1} + 1$ .

Analisando o sistema linear  $X(n+1) = AX(n)$ , usando o critério (4.22) e pelo Teorema 4.2.7 o ponto de equilíbrio  $(H^*, P^*)$  é assintoticamente estável se

$$1 + tr(A) + \det(A) > 0 \iff 1 + 1 + \frac{\ln \lambda}{\lambda - 1} + \frac{\ln \lambda}{\lambda - 1} + \ln \lambda > 0 \iff 2 + 2\frac{\ln \lambda}{\lambda - 1} + \ln \lambda > 0; \\ 1 - tr(A) + \det(A) > 0 \iff 1 - 1 - \frac{\ln \lambda}{\lambda - 1} + \frac{\ln \lambda}{\lambda - 1} + \ln \lambda > 0 \iff \ln \lambda > 0; \\ 1 - \det(A) > 0 \iff 1 - \frac{\ln \lambda}{\lambda - 1} - \ln \lambda > 0.$$

Temos que  $\lambda > 0$ , assim  $\ln \lambda$  pode ser positivo ou negativo. Portanto, o ponto de equilíbrio  $(H^*, P^*)$  é instável.

O autor [1] considera o modelo apresentado bastante simples e propõe, também, um modelo mais realista, modificando  $H(n)$  a fim de obter um saturamento do hospedeiro, que apresentamos a seguir.

Sejam

$$\begin{aligned} H(n+1) &= H(n) \exp \left[ r \left( 1 - \frac{H(n)}{k} \right) - aP(n) \right], \quad r > 0, \\ P(n+1) &= cH(n) (1 - \exp(-aP(n))). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Um ponto de equilíbrio  $(H^*, P^*)$  do sistema é solução de

$$1 = \exp \left[ r \left( 1 - \frac{H^*}{k} \right) - aP^* \right] \quad e \quad P^* = cH^* (1 - \exp(-aP^*)).$$

Assim, temos,

$$\begin{aligned} 1 &= \exp \left[ r \left( 1 - \frac{H^*}{k} \right) \right] \exp(-aP^*) \\ \exp \left[ -r \left( 1 - \frac{H^*}{k} \right) \right] &= \exp(-aP^*) \\ P^* &= \frac{r}{a} \left( 1 - \frac{H^*}{k} \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{r \left( 1 - \frac{H^*}{k} \right)}{acH^*} = 1 - \exp \left[ -r \left( 1 - \frac{H^*}{k} \right) \right]. \quad (6.22)$$

Logo, temos o ponto de equilíbrio  $(H_1^*, P_1^*) = (k, 0)$ . Sendo  $X(n+1) = (H(n+1), P(n+1))$ , a matriz jacobiana dada no ponto  $(H_1^*, P_1^*)$  é dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial X}(H_1^*, P_1^*) = \begin{pmatrix} 0 & -ak \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim,  $\det A = 0$  e  $tr(A) = 0$ . Logo, usando o critério (4.22) e pelo Teorema 4.2.7, o ponto de equilíbrio  $(H_1^*, P_1^*)$  é assintoticamente estável pois  $tr(A) = 0 < 1 + \det(A) = 1 < 2$ . Portanto, pelo Teorema 5.2.1 a solução nula do sistema quase linear (6.21) é exponencialmente estável.

Além do ponto  $(H_1^*, P_1^*)$ , temos outro ponto de equilíbrio  $(H_2^*, P_2^*)$ , e para que (6.22) seja válida,  $0 < H_2^* < k$  (veja figura (6.1)).

$$\text{Se } \mu = r \left( 1 - \frac{H_2^*}{k} \right), \text{ por (6.19) temos } P_2^* = \frac{r}{a} \left( 1 - \frac{H_2^*}{k} \right).$$

Para analisar a estabilidade de  $(H_2^*, P_2^*)$ , vamos utilizar mudança de variável;  $x(n) = H(n) - H_2^*$  e  $y(n) = P(n) - P_2^*$ . Assim, por (6.21) obtemos

$$\begin{aligned} x(n+1) &= H(n+1) - H_2^* = -H_2^* + H(n) \exp \left[ r \left( 1 - \frac{H(n)}{k} \right) - aP(n) \right] \\ &= -H_2^* + (x(n) + H_2^*) \exp \left[ r \left( 1 - \frac{x(n) + H_2^*}{k} \right) - a(y(n) + P_2^*) \right] \\ y(n+1) &= P(n+1) - P_2^* = cH(n) (1 - \exp(-aP(n))) - P_2^* \\ &= -P_2^* + c(x(n) + H_2^*) [1 - \exp(-a(y(n) + P_2^*))]. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Fazendo a linearização em torno da origem, temos

$$A = \frac{\partial f}{\partial X}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 - rq & -akq \\ \frac{\varphi - r(1 - q)}{-akq} & \varphi - r(1 - q) \end{pmatrix}.$$

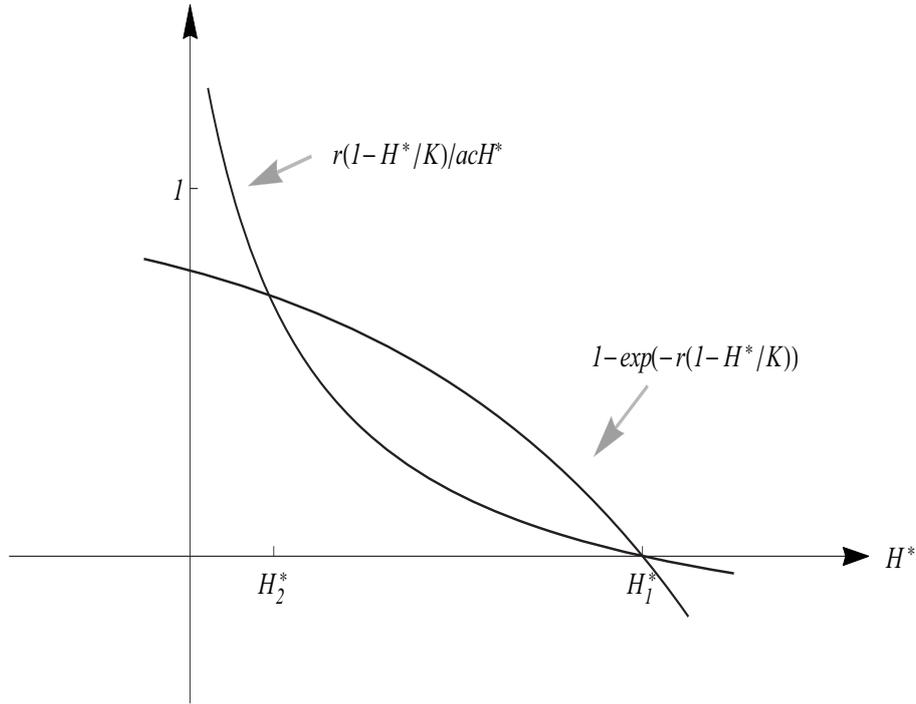


Figura 6.1: Gráficos das funções apresentadas em (6.22).

com  $\varphi = -ackq [1 - \exp(-r(1-q))] + r(1-q)$  e  $q = \frac{H_2^*}{k}$ .

Assim, obtemos o sistema linear,

$$\begin{pmatrix} x(n+1) \\ y(n+1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(n) \\ y(n) \end{pmatrix}. \quad (6.24)$$

Analisando a estabilidade do sistema acoplado linear, temos a equação característica

$$\lambda^2 - \lambda(1-r+\varphi) - rq\varphi + r^2q(1-q) = 0,$$

onde  $\text{tr}(A) = 1-r+\varphi$  e  $\det(A) = -rq\varphi + r^2q(1-q)$ .

Logo, pelo critério (4.22) e pelo Teorema 4.2.7 a estabilidade assintótica está garantida se e somente se  $|\text{tr}(A)| < 1 + \det(A) < 2$ , que é equivalente a  $|1-r+\varphi| < 1 - rq\varphi + r^2q(1-q) < 2$ , ou seja

$$-rq\varphi + r^2q(1-q) < 1, \quad (6.25)$$

e portanto,

$$1 - rq\varphi + r^2q(1-q) > |1-r+\varphi|. \quad (6.26)$$

Assim, pelo Corolário 5.1, a solução nula de (6.23) será exponencialmente estável se as condições (6.25) e (6.26) estiverem satisfeitas.

## 7 Conclusão

Considerando que nem sempre é possível explicitar soluções de equações de diferenças, torna-se interessante o estudo de estabilidade de pontos de equilíbrios que representam as soluções constantes, que podem atrair ou repelir as demais. No caso especial das equações quase lineares, é possível desenvolver um processo de linearização, que é um método para encontrar um modelo linear que seja uma boa aproximação da equação quase linear, ou seja, que as trajetórias das soluções da equação linear sejam boas aproximações das trajetórias das soluções da equação quase linear.

Neste trabalho, apresentamos a análise qualitativa de sistemas que representam problemas nas áreas de Economia e Biologia, usando equações de diferenças quase lineares. Acreditamos que esta abordagem possa ser útil em outros procedimentos numéricos. Apresentamos também critérios adicionais, que envolvem derivadas de ordem superior da função que caracteriza o sistema, para decidir sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio, quando falha o teste da primeira derivada.

Finalmente, diríamos que as equações de diferenças (caso discreto) e as equações diferenciais ordinárias (caso contínuo) são ferramentas imprescindíveis não só quando se trata de comportamentos de fenômenos nas áreas de Matemática, Física, Química e Economia, como também em diferentes áreas não exatas.

# Referências

- [1] ELAYDI, S. *An Introduction to Difference Equations*. 3. ed. New York: Springer Verlag, 2005.
- [2] LANCASTER, P. *Mathematics models of the real world*. Englewood-cliffs: Prentice-Hall, 1976.
- [3] LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- [4] LIMA, E. L. *Análise Real*. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- [5] PUU, T.; SUSHKO, I. A business cycle model with cubic nonlinearity. *CERUM Working Paper*, Umea University, Umea, n. 47, 2002.
- [6] SANDEFUR, J. T. *Discrete Dynamical Systems: Theory and Applications*. Oxford: Clarendon Press, 1990.

# A Demonstração do Teorema 4.2.7

## A.1 Critérios para a estabilidade dos sistemas bidimensionais

As condições

$$1 + p_1 + p_2 > 0, \quad 1 - p_1 + p_2 > 0, \quad 1 - p_2 > 0, \quad (\text{A.1})$$

são necessárias e suficientes para que os pontos de equilíbrio (solução) das equações (4.17) e (4.19) sejam assintoticamente estáveis (isto é, toda solução converge para  $y^*$ ).

*Demonstração.* ( $\Leftarrow$ ) Assumimos que o ponto de equilíbrio de (4.17) ou (4.19) é assintoticamente estável. Em virtude dos Teoremas (4.2.5) e (4.2.6), as raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  da equação característica  $\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0$  permanecem dentro do disco unitário, isto é,  $|\lambda_1| < 1$  e  $|\lambda_2| < 1$ . Pela fórmula quadrática, temos

$$\lambda_1 = \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} \quad e \quad \lambda_2 = \frac{-p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2}. \quad (\text{A.2})$$

Assim, temos dois casos a considerar.

*Caso 1.*  $|\lambda_1| < 1$  e  $|\lambda_2| < 1$  são raízes reais, isto é,  $p_1^2 - 4p_2 \geq 0$ . Pela fórmula (A.2) temos

$$-2 < -p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2,$$

ou

$$-2 + p_1 < \sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 + p_1. \quad (\text{A.3})$$

Analogamente, obtemos

$$-2 + p_1 < -\sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 + p_1. \quad (\text{A.4})$$

Elevando ao quadrado a segunda desigualdade da expressão (A.3), teremos

$$1 + p_1 + p_2 > 0. \quad (\text{A.5})$$

Analogamente, se elevarmos ao quadrado a primeira desigualdade da expressão (A.4), teremos

$$1 - p_1 + p_2 > 0. \quad (\text{A.6})$$

Novamente, usando a segunda desigualdade de (A.3) e a primeira desigualdade de (A.4), obtemos

$$\begin{aligned} \sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 + p_1 &\rightarrow 2 + p_1 > \sqrt{p_1^2 - 4p_2} \rightarrow 2 + p_1 > 0 \\ -2 + p_1 < -\sqrt{p_1^2 - 4p_2} &\rightarrow 2 - p_1 > \sqrt{p_1^2 - 4p_2} \rightarrow 2 - p_1 > 0 \end{aligned}$$

ou

$$|p_1| < 2$$

Logo,

$$p_1^2 - 4p_2 \geq 0 \rightarrow p_1^2 \geq 4p_2 \rightarrow \frac{p_1^2}{4} \geq p_2. \quad (\text{A.7})$$

Como  $|p_1| < 2$ , então  $|p_1^2| < 4$ , ou seja,  $p_1^2 < 4$ . Portanto,  $\frac{p_1^2}{4} < 1$  e, por (A.7), concluímos que  $p_2 < 1$  ou  $1 - p_2 < 0$ . Isto completa a prova do caso 1, para a condição necessária.

*Caso 2.*  $|\lambda_1| < 1$  e  $|\lambda_2| < 1$  são raízes complexas, isto é,  $p_1^2 - 4p_2 < 0$ . Neste caso, temos

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p_1}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{4p_2 - p_1^2}.$$

Além disso, de  $p_1^2 < 4p_2$ , segue que  $\sqrt{p_1^2} < \sqrt{4p_2} \rightarrow |p_1| < 2\sqrt{p_2}$  ou seja,

$$-2\sqrt{p_2} < p_1 < 2\sqrt{p_2}. \quad (\text{A.8})$$

Agora,  $|\lambda_1|^2 = \frac{p_1^2}{4} + \frac{4p_2}{4} - \frac{p_1^2}{4} = p_2$ . De  $|\lambda_1| < 1$  segue que  $0 < p_2 < 1$ , o que mostra que a terceira inequação de (A.1) é verdadeira. Para mostrar que as outras duas inequações de (A.1) são verdadeiras, primeiramente considere a função  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x}$  e provemos que  $f(x) > 0$  para  $x \in (0, 1)$ . Veja que,

$$\begin{aligned} 1 + x - 2\sqrt{x} > 0 &\Leftrightarrow 1 + x > 2\sqrt{x} \\ 1 + 2x + x^2 &> 4x \\ x^2 - 2x + 1 &> 0 \\ (x - 1)^2 &> 0. \end{aligned}$$

Assim,  $1 + p_2 - 2\sqrt{p_2} > 0$ . Pela primeira inequação de (A.8), temos

$$\begin{aligned} p_1 &> -2\sqrt{p_2} \\ 1 + p_2 + p_1 &> 1 + p_2 - 2\sqrt{p_2} > 0 \\ 1 + p_1 + p_2 &> 0. \end{aligned}$$

Da mesma maneira, considerando a segunda inequação de (A.8), temos

$$\begin{aligned} p_1 &< 2\sqrt{p_2} \\ p_1 &< 2\sqrt{p_2} < 1 + p_2 \\ 1 - p_1 + p_2 &> 0. \end{aligned}$$

( $\Rightarrow$ )Provemos a condição suficiente, para isso assumimos que (A.1) seja verdadeira. A equação característica de (4.17) é dada por  $\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0$ . E pela fórmula quadrática (A.2), temos

$$\lambda_1 = \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} \quad e \quad \lambda_2 = \frac{-p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2}.$$

Seja (I)  $1 + p_1 + p_2 > 0$ , (II)  $1 - p_1 + p_2 > 0$  e (III)  $1 - p_2 > 0$ . Somando (I) e (II), temos

$$\begin{aligned} 1 + p_1 + p_2 &> 0 \\ \frac{1 - p_1 + p_2 > 0}{+ \quad 2 + 2p_2 > 0} & \\ 1 + p_2 &> 0 \\ p_2 &> -1. \end{aligned}$$

Assim, por (III),  $|p_2| < 1$ . Logo, se  $-1 < p_2 < 0$ , temos

$$\begin{aligned} 1 &> -p_2 > 0 \\ 4 &> -4p_2 > 0 \\ p_1^2 + 4 &> p_1^2 - 4p_2 > p_1^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Ou seja,  $p_1^2 - 4p_2 \geq 0$ .

Se  $0 < p_2 < 1$ , temos

$$\begin{aligned} 0 &> -p_2 \\ 0 &> -4p_2 \\ p_1^2 &> p_1^2 - 4p_2. \end{aligned}$$

Ou seja,  $p_1^2 - 4p_2 < 0$ .

Logo, temos dois casos a considerar, quando  $p_1^2 - 4p_2 \geq 0$  e  $p_1^2 - 4p_2 < 0$ .

*Caso 1:*  $p_1^2 - 4p_2 \geq 0$ , onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são raízes reais.

Somando (II) e (III), temos

$$\left. \begin{aligned} 1 - p_1 + p_2 &> 0 \\ 1 - p_2 &> 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow 2 - p_1 > 0 \rightarrow p_1 < 2. \quad (\text{A.9})$$

Assim, de (A.9), temos

$$\begin{aligned} p_1 &< 2 \\ p_1 - 2 &< 0 \leq \sqrt{p_1^2 - 4p_2} \\ -2 &< -p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2} \\ -1 &< \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} \\ -1 &< \lambda_1. \end{aligned}$$

Além disso, de (I), temos

$$\begin{aligned}
-p_2 &< 1 + p_1 \\
-4p_2 &< 4 + 4p_1 \\
p_1^2 - 4p_2 &< 4 + 4p_1 + p_1^2 \\
p_1^2 - 4p_2 &< (p_1 + 2)^2 \\
\sqrt{p_1^2 - 4p_2} &< p_1 + 2 \\
-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2} &< 2 \\
\frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} &< 1 \\
\lambda_1 &< 1.
\end{aligned}$$

Portanto, como  $p_1^2 - 4p_2 \geq 0$ , temos  $|\lambda_1| < 1$ .

Provemos agora que  $|\lambda_2| < 1$ . De (II), temos:

$$\begin{aligned}
1 - p_1 + p_2 &> 0 \\
4 - 4p_1 + 4p_2 &> 0 \\
4 - 4p_1 &> -4p_2 \\
4 - 4p_1 + p_1^2 &> p_1^2 - 4p_2 \\
(2 - p_1)^2 &> p_1^2 - 4p_2 \\
2 - p_1 &> \sqrt{p_1^2 - 4p_2} \\
-2 + p_1 &< -\sqrt{p_1^2 - 4p_2} \\
-2 &< -p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_2} \\
-1 &< \frac{-p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} \\
-1 &< \lambda_2.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\left. \begin{aligned}
1 + p_1 + p_2 &> 0 \\
1 - p_2 &> 0
\end{aligned} \right\} \rightarrow 2 + p_1 > 0 \rightarrow -p_1 < 2. \quad (\text{A.10})$$

E,

$$\begin{aligned}
\sqrt{p_1^2 - 4p_2} &\geq 0 \\
-\sqrt{p_1^2 - 4p_2} &\leq 0 \\
-p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_2} &\leq -p_1 < 2 \\
\frac{-p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} &< 1 \\
\lambda_2 &< 1.
\end{aligned}$$

Assim,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  estão no disco unitário. Portanto, pelos Teoremas (4.2.6) e (4.2.7), o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável.

*Caso 2:*  $p_1^2 - 4p_2 < 0$ . A prova é análoga ao caso 1, concluindo assim a prova deste teorema.  $\square$

# B Forma Canônica de Jordan

## B.1 Estabilidade de sistemas lineares autônomos

A forma de Jordan de uma matriz é vital em sistemas autônomos, sendo assim será discutido neste apêndice. Para tanto, apresentaremos o significado de matrizes diagonalizáveis.

*Matrizes diagonalizáveis.* Dizemos que duas matrizes  $A$  e  $B$   $k \times k$  são similares se existir uma matriz não singular  $P$  tal que  $P^{-1}AP = B$ . Se a matriz  $A$  for similar para a matriz diagonal  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ , então  $A$  será dita *diagonalizável*. Note que os elementos da diagonal de  $D$ , a saber,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , são os autovalores de  $A$ . Logo, apenas alguns tipos especiais de matrizes são diagonalizáveis.

Seja  $P = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$  onde  $\xi_i$  é a  $i$ -ésima coluna de  $P$ . Sendo  $P^{-1}AP = D$ , então  $AP = PD$ , isto implica que  $A\xi_i = \lambda_i\xi_i$ . Portanto,  $\xi_i$ ,  $1 \leq i \leq k$  é o autovetor de  $A$  correspondente ao autovalor  $\lambda_i$ , e assim a  $i$ -ésima coluna de  $P$  é o autovetor correspondente ao  $i$ -ésimo autovalor de  $A$ . Uma vez que  $P$  é não singular, as colunas (os autovetores de  $A$ ) são linearmente independentes. Invertendo os passos acima, podemos mostrar que a recíproca da afirmação acima é verdadeira. Logo, se existirem  $k$  autovetores linearmente independentes de uma matriz  $A$   $k \times k$ , então  $A$  será diagonalizável. O seguinte teorema resume esta discussão.

**Teorema B.1.1.** A matriz  $k \times k$  será diagonalizável se e somente se existirem  $k$  autovetores linearmente independentes.

*Forma de Jordan.* Quando a matriz  $A$  não é diagonalizável, ou seja, quando  $A$  tem autovalores repetidos e não é capaz de gerar  $k$  autovetores linearmente independentes, então é semelhante a chamada *Forma de Jordan*, isto é,  $P^{-1}AP = J$ , onde,

$$J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_r), \quad 1 \leq r \leq k, \quad (\text{B.1})$$

e

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

A matriz  $J_i$  é chamada de bloco de Jordan.

Estas observações são formalizadas no seguinte teorema.

**Teorema B.1.2.** Qualquer matriz  $A$   $k \times k$  é similar para um Forma de Jordan dada pela fórmula (B.1), onde cada  $J_i$  é uma matriz  $s_i \times s_i$  da forma (B.2) e  $\sum_{i=1}^r s_i = k$ .

O número de blocos de Jordan correspondente a um autovalor  $\lambda$  é chamado de multiplicidade geométrica de  $\lambda$ , e este número, por sua vez, é igual ao número de autovetores linearmente independentes correspondente a  $\lambda$ .

Note, agora, que a matriz da forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix},$$

tem somente um autovetor, pois  $s_1 = k$  e  $r = 1$ , e a multiplicidade geométrica de  $\lambda$  é 1, logo temos apenas um autovetor correspondente, a saber, o vetor unitário  $e_1(1, 0, \dots, 0)^t$ . Isto mostra que os autovetores linearmente independentes da forma de Jordan  $J$  dados pela fórmula (B.1) são:

$$e_1, e_{s_1+1}, e_{s_1+s_2+1}, \dots, e_{s_1+s_2+\dots+s_{r-1}+1}.$$

Agora, visto que  $P^{-1}AP = J$ , então

$$AP = PJ.$$

Sendo  $P = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ , igualando a primeira coluna  $s_1$  de ambos os lados, obtemos

$$A\xi_1 = \lambda_1\xi_1, \dots, A\xi_i = \lambda_1\xi_i + \xi_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, s_1.$$

O único autovetor de  $A$  é  $\xi_1$  na série de Jordan  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{s_1}$ . Os outros vetores  $\xi_2, \dots, \xi_{s_1}$  são chamados de autovetores generalizados de  $A$ , e podem ser obtidos usando a equação de diferenças,

$$(A - \lambda_1 I)\xi_i = \xi_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, s_1.$$

Repetindo este processo para os restantes blocos de Jordan, podemos encontrar os correspondentes autovetores generalizados para o  $m$ -ésimo bloco de Jordan usando a equação de diferenças

$$(A - \lambda_m I)\xi_{m_i} = \xi_{m_i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, s_m.$$

Agora, sabemos que  $A^n = (PJP^{-1})^n = PJ^nP^{-1}$ , onde

$$J^n = \begin{bmatrix} J_1^n & & & 0 \\ & J_2^n & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k^n \end{bmatrix}.$$

Para encontrar  $J^n$ , notemos que para algum  $J_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , temos  $J_i = \lambda_i I + N_i$ , onde

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

é uma matriz nilpotente  $s_i \times s_i$ , isto é,  $N_i^r = 0$  para todo  $r \geq s_i$ . Logo,

$$\begin{aligned} J_i^n &= (\lambda_i I + N_i)^n = \\ &= \lambda_i^n I + \binom{n}{1} \lambda_i^{n-1} N_i + \binom{n}{2} \lambda_i^{n-2} N_i^2 + \dots + \binom{n}{s_i-1} \lambda_i^{n-s_i+1} N_i^{s_i-1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$J_i^n = \begin{bmatrix} \lambda_i^n & \binom{n}{1} \lambda_i^{n-1} & \binom{n}{2} \lambda_i^{n-2} & \dots & \binom{n}{s_i-1} \lambda_i^{n-s_i+1} \\ 0 & \lambda_i^n & \binom{n}{1} \lambda_i^{n-1} & \dots & \binom{n}{s_i-2} \lambda_i^{n-s_i+2} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \binom{n}{1} \lambda_i^{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i^n \end{bmatrix}.$$