



INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

01405 - Rua Pamplona, 145 - Fone 288-5643
São Paulo (SP) - Brasil

BIBLIOTECA

GEORGE EMANUEL AVRAAM MATSAS

ESTUDO DO UNIVERSO PRIMITIVO
NO MODELO BIANCHI IX



Dissertação de Mestrado
apresentada em
Instituto de Física Teórica



Orientador: Professor Gerson Francisco

São Paulo

Março de 1988

AGRADECIMENTOS

Palavras são quase sempre pobres para exprimir idéias, portanto sempre que nos lançamos na tarefa de dizer algo de significativo é inevitável que nos sintamos insatisfeitos com o resultado.

Concluída a breve apologia, gostaria de agradecer àqueles colegas, professores e funcionários com os quais partilhei tanto tempo de estudo e amizade nestes dois anos mas cujos nomes declinarei em sua maioria por temer ser esta uma tarefa hercúlea se desejarmos ser completos nos nomes e exatos no agradecimento.

Em particular, no entanto, devo destacar o reconhecimento que tenho para com meu orientador Prof. Gerson Francisco pela sua postura sempre prestativa e amigã; aos amigos J. R. F. Xavier (em cujos conhecimentos de computação sempre me apoiei), L. D. Almeida e M. S. de Oliveira pelas nossas discussões sobre física ou não e ao Prof. A. A. Natale pelas palavras de incentivo.

Por fim devo confessar à minha pequena família que a influência de seu convívio foi, direta ou indiretamente, de forma árdua ou não, a mais determinante na moldura de minha atual personalidade.

P.S. 1 Agradeço à FAPESP pelo apoio financeiro na pessoa de seu assessor pelo incentivo anônimo de seus pareceres.

P.S. 2 Agradeço à Rosane pela datilografia e PACIÊNCIA.

"γηράσιω αεί διδασυόμενος"

Σώκρατες

"Envelheço sempre aprendendo"

Sócrates

RESUMO

Usamos a teoria da Relatividade Geral para estudar o modelo cosmológico homogêneo Bianchi IX com grupo de isometria $SO(3)$ próximo da singularidade cosmológica. Introduzimos o formalismo de Bogoyavlenskii-Novikov para explicar o comportamento não usual do expoente de Liapunov associado a este sistema caótico.

ABSTRACT

We use the theory of general relativity to study the homogeneous cosmological model Bianchi IX with isometry group $SO(3)$ near the cosmological singularity. We introduce the Bogoyavlenskii-Novikov formalism to explain the unusual behaviour of the Liapunov exponent associated with this chaotic system.

ÍNDICE

I.	Introdução	01
II.	Tópicos Matemáticos	06
	A. Sistemas Dinâmicos	06
	B. Pontos Singulares não Degenerados	07
	C. Pontos Singulares Degenerados	09
	D. Compactificação Maximal do Sistema Dinâmico	13
	E. Aproximação de Trajetórias por Intermédio de Sepa- ratrizes	15
	F. Atratores Estranhos	17
	G. Mapeamento de Poincaré	18
	H. Caos	19
III.	A Singularidade Cosmológica	20
IV.	O Modelo Mixmaster	28
	IV.1. A Visão Bogoyavlenskii-Novikov	28
	A. As Equações de Campo numa Variedade Compactifi- cada	28
	B. Pontos e Regiões Singulares	34
	C. Autovalores e Autovetores	36
	D. Separatrizes	39
	E. Compêndio de Separatrizes	47
	F. Estados Primitivos da Expansão do Universo	48
	IV.2. O Panorama Bogoyavlenskii-Novikov, outros Traba- lhos e Conclusões	53
V.	Resumo do Preprint "Qualitative and Numerical Study of Bianchi IX Models"..... <i>G.R.G. 20, 1047, (1988)</i>	60

Apêndice A - As Equações de Einstein em Referenciais Sin- crônicos	62
Apêndice B - Representação de Tétrada das Equações de Einstein	68
Apêndice C - Classificação Bianchi	73
Referências	88

I. INTRODUÇÃO

Todo ensaio deve ser iniciado por uma introdução que descreva em linhas gerais e de maneira global o conteúdo que se pretende expor. Quando o assunto está relacionado à cosmologia, no entanto, sua própria relevância deve ser discutida a fim de que a motivação para seu estudo se faça bem clara. Podemos dizer que a questão cosmológica mais intrigante é a determinação do tipo de Universo em que vivemos bem como suas características e comportamento. Dentre as possíveis teorias de gravitação que podem ser usadas para o estudo de tais questões, escolheremos a Relatividade Geral de Einstein por ser a mais simples que até o momento concorda com medições observacionais.

De fato a cosmologia é um ramo da física atípico posto que não podemos tirar conclusões por analogia a sistemas semelhantes e ao mesmo tempo os dados empíricos resumem-se a observações astronômicas cujas condições fogem a qualquer controle experimental [1]. Por este motivo muitas vezes impoem-se hipóteses a priori mais baseadas em convicções filosóficas do que científicas. Uma das indicações mais confiáveis que medidas astronômicas nos dão é quanto à isotropia do Universo em larga escala. A detecção de raio-X de fundo é isotrópica a menos de 5% de flutuação e a radiação de microondas de fundo é isotrópica a menos de 0,2% de flutuação [2] o que parece indicar que no Universo não existem direções privilegiadas. Uma segunda observação muito importante é o deslocamento para o vermelho das bandas de radiação emitidas pelas fontes

distantes* que parece indicar a expansão do Universo.

Uma tentativa muito promissora para explicar tais observações é supor um Universo finito, pequeno e em expansão [3]. Em tal Universo haveria um número finito de galáxias e seções espaciais com volume limitado. Então os raios de luz emitidos pelas galáxias poderiam ter circulado pelo Universo por várias vezes e muitas galáxias que julgamos serem diferentes seriam então a mesma vistas em diferentes estados de evolução. Nestas condições um Universo mesmo sendo inhomogêneo e anisotrópico parecer-nos-ia homogêneo e isotrópico.

Iremos aqui abordar o problema por um outro prisma, supondo que o Universo seja de fato isotrópico. Neste ponto podemos introduzir por convicções intuitivas o princípio de Copérnico que afirma não estarmos no centro do Universo. A isotropia adicionada ao princípio de Copérnico nos leva à homogeneidade espacial do Universo**. Portanto um dentre os possíveis Universos que estariam de acordo com as observações seria o de um Universo homogêneo e isotrópico conhecido como Universo de Friedmann-Robertson-Walker (F.R.W.) [5]. Deve ser frisado no entanto que as soluções F.R.W. são um conjunto de medida nula no conjunto de todas as soluções cosmológicas. Portanto a não ser que haja princípios primeiros que imponham que

* Estrelas pertencentes à nossa galáxia podem ter um blue-shift na sua banda de radiação devido ao seu movimento em relação ao centro da galáxia. Mas isto não é relevante para o estudo do Universo em larga escala.

** Esta não é a única conclusão possível como é discutida em [4] mas é a mais comumente aceita.

o Universo deva ter esta forma, não há qualquer motivo para que ele assuma este tipo tão peculiar. Algumas propostas de Misner tentavam explicar o estado homogêneo do Universo pela dissipação viscosa da anisotropia no período primordial mas tal processo aparentemente não seria suficiente para explicar o grau de isotropia hoje observado. A idéia, assim, continua sendo procurar classes mais gerais que evoluam para modelos homogêneos e isotrópicos. Podemos perguntar se existiria algum modelo homogêneo anisotrópico que poderia evoluir para um modelo F.R.W. .

Um candidato para tal modelo homogêneo, anisotrópico é o tipo Bianchi IX já que o Universo F.R.W. fechado possui o mesmo grupo de isometria do modelo Bianchi IX, (apêndice C). De fato o modelo Bianchi IX possui entre as soluções nos estados primitivos, na direção da expansão, uma que é isotrópica. Este modelo porém, que apresenta características bastante peculiares tais como caoticidade*, não é o único modelo não isotrópico a apresentar uma solução assintótica quasi-isotrópica na direção da expansão. De fato todos os modelos tipo Bianchi possuem esta característica [6,7]. Pode-se, no entanto, argumentar-se que os modelos espacialmente homogêneos são ainda um conjunto de medida nula no conjunto de todas as soluções das equações de Einstein. De fato, mas Belinskii, Khalatnikov e Lifshitz (B.K.L.) [8-10] baseados em argumentos sobre o número de parâmetros livres do modelo Bianchi IX conjeç

*O modelo Bianchi IX é um modelo essencialmente relativista e não apresenta análogo clássico.

turaram que o comportamento deste modelo próximo da singularidade cosmológica é uma propriedade genérica das soluções cosmológicas. Se pudéssemos provar que a solução assintótica quasi-friedmann também é uma propriedade geral e que tais soluções são estáveis longe de singularidade, teríamos então dado um passo significativo na intelecção da isotropia e homogeneidade que observamos em nosso Universo atual. Infelizmente esse programa é muito ambicioso e carece basicamente de um formalismo matemático para o estudo de sistemas de equações diferenciais a derivadas parciais. Por outro lado dois matemáticos soviéticos Bogoyavlenskii e Novikov empregaram métodos qualitativos de sistemas dinâmicos para as equações diferenciais ordinárias não lineares do modelo Bianchi IX e conseguiram uma visão panorâmica do comportamento global do sistema que ainda não havia sido alcançada. Neste trabalho pretendemos discutir em detalhes este formalismo e compará-lo em seus aspectos mais marcantes com os tratamentos mais conhecidos de Misner o qual usa o formalismo A.D.M. para reduzir as equações de campo a uma forma hamiltoniana [11,12] e a dos soviéticos B.K.L. [8-10] que destacam com bastante clareza os aspectos caóticos do sistema. À luz destes tratamentos apresentamos uma detalhada análise do índice de Liapunov como medida de caos no modelo de Bianchi IX [13].

No capítulo II tentaremos fornecer as premissas matemáticas menos habituais que serão usadas durante o trabalho. No capítulo III faz-se um breve relato do problema da singularidade cosmológica e em especial com relação ao Bianchi IX que será o objeto de nossos estudos. No capítulo IV far-se-á o

estudo propriamente do modelo Mixmaster. O V é o último capítulo e constitui-se num resumo da referência [13] a qual é anexada ao fim da tese. Os apêndices A, B, C, são utilizados para indicar como se determinam as equações de campo (1) em [13] do modelo Bianchi IX a partir do grupo de isometria do modelo.

As fórmulas serão rotuladas com um número arábico seguido por um número romano que indica o capítulo onde a fórmula se encontra. Exceção se faz às fórmulas encontradas nos apêndices cuja numeração é independente do resto da tese. Não usaremos aqui a convenção tradicional de que números latinos variam de 1 a 3 e gregos de 0 a 3 sempre, pois algumas vezes o tratamento vale para qualquer número de dimensões. A simplicidade portanto será prejudicada neste sentido apesar de que esperamos que a convenção usada fique clara pelo contexto ou por declarações nas seções.

II. TÓPICOS MATEMÁTICOS

A. Sistemas Dinâmicos

Formalmente um sistema dinâmico é um mapeamento Φ de classe C^1 tal que

$$\Phi: \mathbb{R} \times S \rightarrow S \quad (1.11)$$

onde S é um conjunto aberto. Nós, no entanto, sempre que nos referirmos a sistemas dinâmicos estaremos tacitamente assumindo um sistema de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem não lineares e acopladas do tipo

$$1 \leq i \leq n \quad \frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.11)$$

onde: f_i são funções autônomas (não dependem explicitamente do tempo) e "suaves" (continuamente diferenciáveis também chamadas de classe C^1).

Chamamos de pontos singulares de um dado sistema dinâmico (2.11) ao conjunto de pontos $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ tal que $f_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. O comportamento do sistema próximo a estes pontos é de grande importância. Isto nos leva a linearizar o sistema próximo a estes pontos mantendo termos apenas de primeira ordem:

$$\text{com } 1 \leq i \leq n \quad \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x_1^0, \dots, x_n^0) \right] (x_j - x_j^0)$$

Podemos então, nas imediações dos pontos singulares usar a teoria de sistemas lineares já bem estabelecida [14], [15]. Definimos a seguir degenerescência de uma região singular.

Seja M^k uma variedade k -dimensional cujos pontos (x_1^0, \dots, x_n^0) sejam pontos singulares do sistema dinâmico (2.II). Dizemos que esta é uma região singular degenerada se entre os autovalores λ da equação secular

$$\det \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1^0, \dots, x_n^0) - \lambda \delta_{ij} \right| = 0$$

houver s autovalores com parte real nula e tal que $s > k$. Em especial, quando a região singular for um simples ponto basta apenas um autovalor com parte real nula para que este ponto seja degenerado. Naturalmente dizemos que uma região singular é não degenerada se não satisfizer as propriedades acima. Os pontos não degenerados são tratados pelo teorema de Hartman-Grobman que estabelece uma importante relação entre o sistema dinâmico e sua linearização.

B. Pontos Singulares não Degenerados

Teorema de Hartman-Grobman: seja um sistema dinâmico (i) $\dot{x} = f(x)$ e sua linearização no ponto singular \bar{x} (ii) $\dot{x} = Df(\bar{x})(x - \bar{x})$. Se $Df(\bar{x})$ não tiver nenhum autovalor com parte real nula, então existirá um homeomorfismo h definido em alguma vizinhança U de \bar{x} em \mathbb{R}^n levando localmente

órbitas do sistema original (i) nas órbitas de sua linearização (ii) cujo fluxo é bem conhecido. O homeomorfismo h preserva o sentido das órbitas.

Em outras palavras, este teorema nos garante que podemos estudar qualitativamente o sistema dinâmico próximo de um ponto singular não degenerado pela sua linearização.

Genericamente, classificamos as regiões singulares não degeneradas em:

a) fontes - Quando nenhum autovalor tiver parte real negativa.

Localmente todas as trajetórias se afastam do ponto.

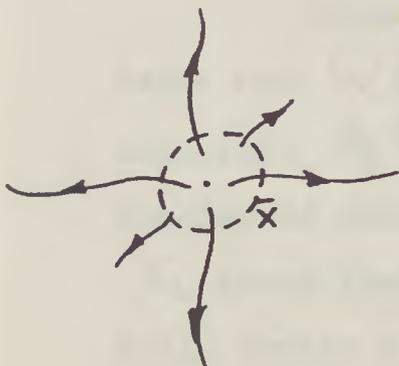
b) focos - Quando nenhum autovalor tiver parte real positiva.

Localmente todas as trajetórias se aproximam do ponto.

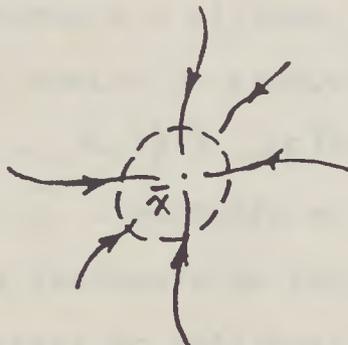
c) pontos hiperbólicos - Quando houver ao menos um autovalor com parte real de sinal contrário ao dos demais.

Podemos pictoreamente esquematizar respectivamente as trajetórias nas suas vizinhanças pelas figuras 1a, 1b e 1c abaixo

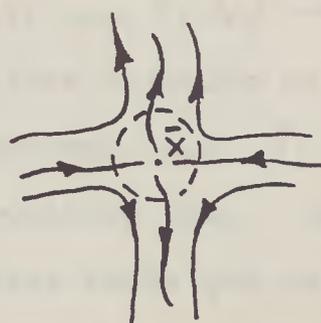
(1a)



(1b)



(1c)



C. Pontos Singulares Degenerados

Para pontos singulares degenerados nada podemos concluir a partir da linearização. No caso de apenas termos autovalores imaginários associados a um ponto singular \bar{x} , dizemos que este ponto é um centro. O sistema linearizado tem como esquema pictórico de suas trajetórias em torno de \bar{x}

(1d)



a figura (1d) acima. O comportamento das trajetórias, no entanto, próximas a \bar{x} no sistema dinâmico original dependerá dos termos de 2ª ordem que não são considerados quando fazemos a linearização do sistema na vizinhança deste ponto.

Uma das estratégias possíveis e que foi escolhida em nosso caso é a de fazer uma mudança conveniente de coordenadas de tal forma que estas novas coordenadas funcionem como uma "lente de aumento" para a observação do ponto singular em questão. Esta linguagem pitoresca será formalizada a seguir pelo assim chamado processo- σ .

Seja novamente o sistema (2.II) com $f_i: W \rightarrow \mathbb{E}$. Sendo que W é um aberto do espaço de fase definido pelas inequações $\phi_j(x_1, \dots, x_n) > 0 \quad j \in \mathbb{N}$. Queremos que f_i sejam funções da classe C^1 . Portanto no importante caso em que f_i forem funções racionais de polinômios temos que nos prevenir contra as raízes do polinômio do denominador que acarre

taria em divergências indesejadas das funções f_i . Para eliminarmos tal situação temerária reduzimos todas as funções f_i ao mesmo denominador F para obtermos algo do tipo $f_i = F_i/F$ $i=1, \dots, n$ e então fazemos uma transformação temporal $t \rightarrow \tau$ do tipo

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{|F(x_1, \dots, x_n)|} \quad (3.II)$$

Isto nos conduz ao sistema dinâmico

$$\frac{dx_i}{d\tau} = F_i(x_1, \dots, x_n) \quad (4.II)$$

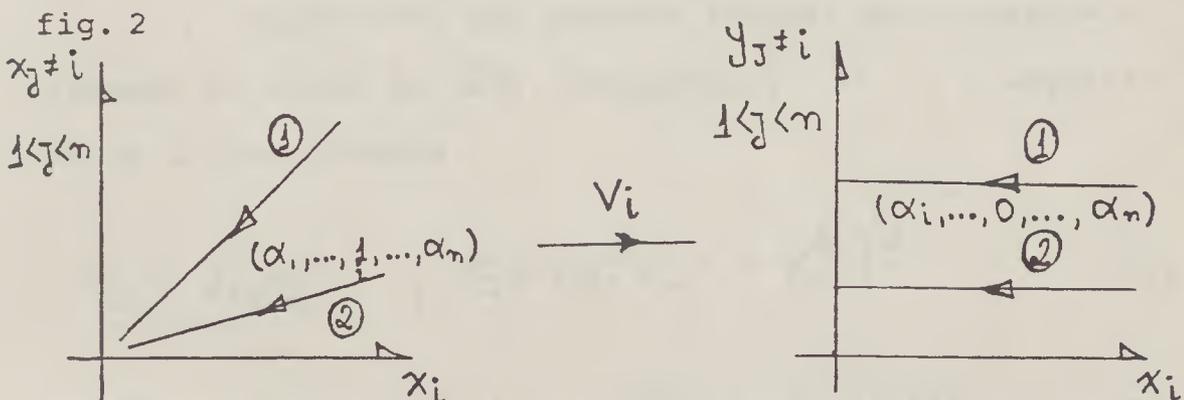
onde $F_i(x_1, \dots, x_n)$ são polinômios. Notemos inicialmente que a transformação temporal não alterou a direção do tempo. Por outro lado as raízes de $F(x_1, \dots, x_n)$ produzem divergências na relação (3.II). A aparente ambiguidade do parâmetro temporal é o preço pago para eliminarmos a divergência do sistema dinâmico. Mas isso não nos deve preocupar, pois numa análise qualitativa o tempo não passa de um parâmetro conveniente para descrever o movimento. Frisamos agora que em toda alusão a sistemas dinâmicos estaremos tacitamente assumindo um sistema da forma (4.II).

Suponhamos agora sem perda de generalidade que a origem $(0, \dots, 0)$ seja um ponto singular degenerado (uma mera translação levaria o ponto singular para a origem) de um sistema dinâmico cujo espaço de fase é definido pelas coordenadas (x_1, \dots, x_n) . Introduzamos n mapeamentos locais V_1, \dots, V_n tais que $x_j \xrightarrow{V_i} y_j$ $1 \leq j \leq n$ como mostrado abai

no para o mapeamento V_i :

$$y_1^{(i)} = \frac{x_1}{x_i}, \dots, y_j^{(i)} = \frac{x_j}{x_i}, \dots, y_i^{(i)} = x_i, \dots, y_n^{(i)} = \frac{x_n}{x_i} \quad (5.11)$$

Necessitamos de n cartas pois cada mapeamento V_k $k=1, \dots, n$ mapeia todo o espaço de fase a menos da hipersuperfície $L_k: x_k = 0$. Na região externa a essas hipersuperfícies os mapeamentos são difeomorfismos. Consideremos agora uma trajetória que se aproxime da origem tangente ao vetor $(\alpha_1, \dots, \frac{1}{i}, \dots, \alpha_n)$. Usando o mapeamento V_i , esta mesma trajetória aproximar-se-á do ponto $(y_1^{(i)} = \alpha_1, \dots, x_i = 0, y_n^{(i)} = \alpha_n)$. Este ponto pertence, como visto, ao hiperplano $L_i: x_i = 0$. Um outro vetor de aproximação definiria outro ponto no hiperplano $L_i: x_i = 0$. Podemos ilustrar esquematicamente o mapeamento V_i pela figura (2) abaixo.



Assim o mapeamento V_i identificou a origem das coordenadas originais com o hiperplano $L_i: x_i = 0$. O fato de que duas trajetórias se aproximando da origem por direções tangentes opostas associariam à origem o mesmo ponto no hiperplano $x_i = 0$ motiva-nos a fazer uma dicotomia dos mapeamentos V_i

em dois novos mapeamentos V_i^+ e V_i^- respectivamente associando aproximações à origem por $x_i < 0$ a pontos no hiperplano L_i^- e aproximações à origem por $x_i > 0$ a pontos no hiperplano L_i^+ . O conjunto destes $2n$ hiperplanos recobre a origem com uma esfera (hiperesfera) S^{n-1} . A este processo de associarmos uma esfera ao ponto singular denominaremos processo- σ . Pode-se mostrar que se escrevermos o sistema dinâmico (4.II) nas novas coordenadas (5.II) os hiperplanos x_i^\pm são variedades invariantes. Assim a esfera introduzida por processo- σ na origem é também uma variedade invariante ou seja, qualquer condição inicial sobre a esfera S^{n-1} evoluirá com trajetórias sobre a esfera. O sistema dinâmico nas novas coordenadas por sua vez poderá ter um novo conjunto de pontos singulares. Os não degenerados podem ser estudados na linearização pelos métodos já conhecidos, os demais deverão sofrer novo processo- σ .

Observemos que podemos efetuar um processo- σ utilizando ao invés de $2n$ mapeamentos V_i , a seguinte mudança de coordenadas

$$y_i = x_i / G \quad ; \quad G = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} \quad (6.II)$$

onde temos agora $n+1$ equações, mas sujeitas ao vínculo $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = 1$. Com isto o espaço de fase pode ser representado por $S^{n-1} \times \mathbb{R}_+$, ou seja, a cada ponto sobre a esfera S^{n-1} associamos uma semi-reta. A origem em especial será dada por S^{n-1} e $G=0$. Agora notamos que acabamos identificando uma esfera à origem pois este método corresponde

ao anterior.

Suponhamos uma variedade de pontos singulares M^k k -dimensional num espaço de fase n -dimensional. Então aplicando uma transformação (6.II) associamos a cada ponto deste conjunto uma esfera $(n-k-1)$ -dimensional S^{n-k-1} .

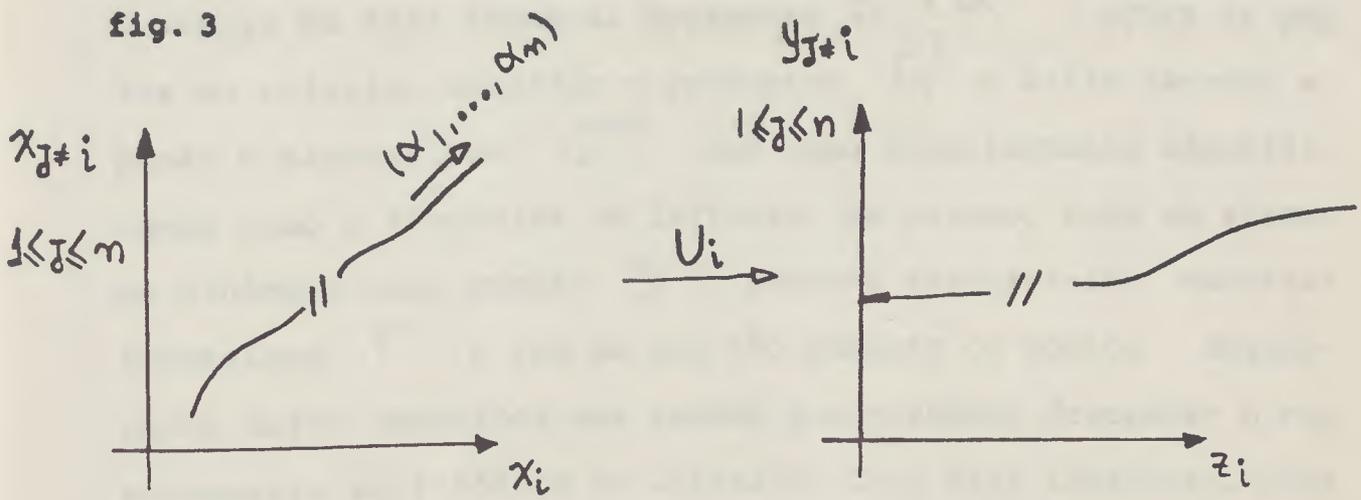
D. Compactificação Maximal do Sistema Dinâmico

A necessidade de estudarmos os sistemas dinâmicos em regiões distantes da origem do sistema de coordenadas exige que façamos $2n$ novos mapeamentos U_i^\pm $1 \leq i \leq n$ tal que $x_j \xrightarrow{U_i^\pm} y_j$ como indicado abaixo

$$y_1^{(i)} = \frac{x_1}{x_i}, \dots, y_j^{(i)} = \frac{x_j}{x_i}, z_i = \frac{1}{x_i}, \dots, y_n^{(i)} = \frac{x_n}{x_i} \quad (7.II)$$

Neste novo sistema, pontos infinitamente distantes estão contidos no hiperplano $z_i = 0$. Novamente usaremos a notação L_i^+ , L_i^- para o hiperplano $z_i = 0$ respectivamente no caso de a trajetória aproximar o infinito por valores positivos de x_i ou por valores negativos de x_i . Uma trajetória aproximando-se do infinito numa direção tangente ao vetor $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, i.e. assintoticamente, para $\alpha_i \neq 0$ alcançará uma das hipersuperfícies $L_i^\pm (z_i = 0)$ no ponto definido pelas componentes $y_j^{(i)} = \alpha_j / \alpha_i$ e $z_i = 0$. Podemos ilustrar esquematicamente os mapeamentos U_i pela figura abaixo.

fig. 3



Estas hipersuperfícies L_i^\pm nada mais são do que fronteiras postadas no infinito. Caso α_i fosse nulo teríamos de usar um outro mapeamento $U_{j \neq i}$ e neste caso estaríamos introduzindo uma nova fronteira $z_j = 0$. A união de todas estas hipersuperfícies será topologicamente equivalente a postar uma hiperesfera S^{n-1} no infinito e a este fenômeno denominamos compactificação do espaço de fase. Nas novas coordenadas pode-se mostrar novamente que a fronteira S^{n-1} identificada com o infinito pela compactificação é também invariante quanto às trajetórias do sistema dinâmico transformado.

No caso de termos simetrias esféricas no sistema poderemos substituir os mapeamentos U_i pela simples troca de coordenadas

$$y_i = x_i G' \quad G' = \frac{1}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}}$$

tem-se então $n+1$ coordenadas sujeitas ao vínculo

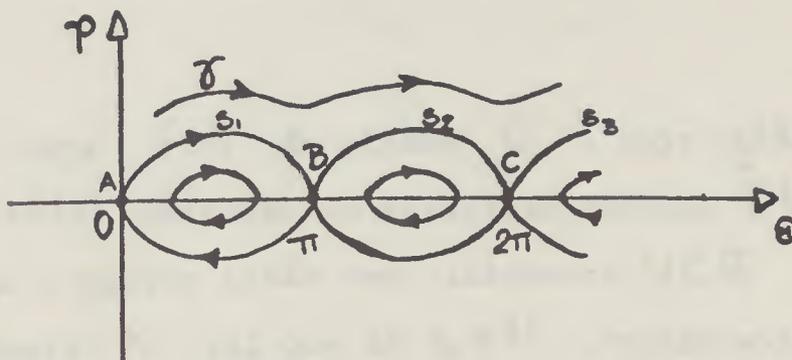
$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = 1$$

O espaço de fase torna-se novamente $S^{n-1} \times \mathbb{R}$. Agora os pontos no infinito anularão o parâmetro G' e assim teremos apenas a hipersfera S^{n-1} que como anteriormente identificamos como a fronteira no infinito. Em resumo, dado um sistema dinâmico numa região S , podemos associar-lhe diversas fronteiras Γ a fim de que não somente os pontos degenerados sejam removidos mas também que possamos descrever o comportamento assintótico no infinito. Caso haja interesse, pode-se estender analiticamente à fronteira Γ o sistema definido originariamente em S fazendo sucessivas mudanças de coordenadas e na variável temporal. Ocorre que a dinâmica na fronteira é mais simples de estudar pois tem dimensão menor e como veremos adiante a dinâmica dos pontos de S próximos a Γ pode ser aproximada pela própria dinâmica em Γ .

E. Aproximação de Trajetórias por Intermédio de Separatrizes

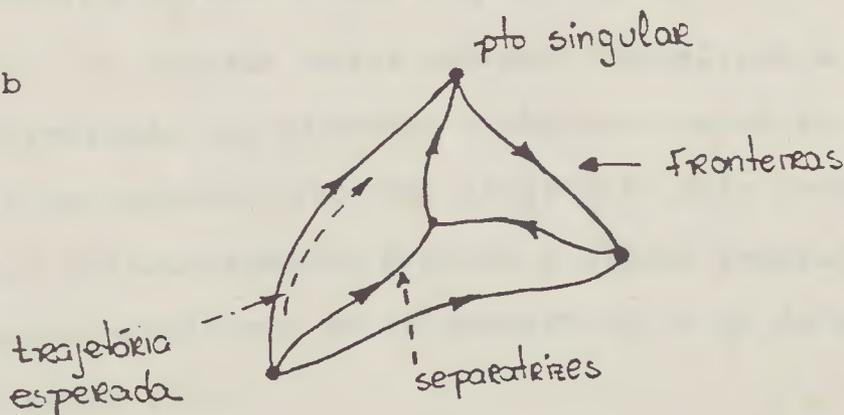
Iniciamos definindo uma separatriz como sendo a trajetória que se aproxima de algum ponto singular para $\tau \rightarrow \pm \infty$. Suponhamos que temos um espaço de fase compactificado e com os pontos singulares já interligados por intermédios de separatrizes. Então através dos dois teoremas que enunciaremos no fim da seção garantimos que se a condição inicial de uma trajetória for suficientemente próxima de uma separatriz ela determinará qualitativamente o comportamento desta trajetória podendo haver trajetórias que são determinadas por sequências de separatrizes. Esta característica pode ser facilmente ilustrada pelo espaço de fase do pêndulo simples (fig. 4a)

fig. 4a



Neste gráfico notamos que a trajetória γ é aproximada pela transição de separatrizes $s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3$. Os pontos singulares A, B, C neste caso são os pontos de equilíbrio do pêndulo. Podemos também ter separatrizes ligando pontos singulares na fronteira da compactificação, mas estas não estarão no assim chamado espaço físico. Apesar disso condições iniciais dadas na região física mas bem próximas de alguma separatriz da fronteira irá seguir um comportamento semelhante ao da separatriz, (veja figura 4b).

fig. 4b



Enunciemos agora os teoremas que formalizam estas idéias. Mas antes seja uma função $f: W \rightarrow \mathbb{E}$; W sendo um conjunto aberto de um espaço vetorial normado \mathbb{E} , dizemos que f é Lipschitz em W se existir uma constante K tal que $|f(y) - f(x)| < K|y - x|$ para todo x, y em W . Chamamos K constante de Lipschitz.

TEOREMA

Seja $f(x)$ de classe C^1 . Seja $y(t)$ uma solução de $x'=f(x)$ definida no intervalo fechado $[t_0, t_1]$ com $y(t_0)=y_0$. Existe então uma vizinhança $U \subset \mathbb{E}$ de y_0 e uma constante K tal que se $z_0 \in U$, então existe uma solução única $z(t)$ também definida em $[t_0, t_1]$ com $z_0=z(t_0)$ e z satisfazendo $|y(t)-z(t)| \leq K|y_0-z_0| \exp[K(t-t_0)]$ para todo $t \in [t_0, t_1]$.

TEOREMA

Seja $f:W \rightarrow \mathbb{E}$ uma função Lipshitz com constante K . Faça $y(t)$ e $z(t)$ soluções de $x'=f(x)$ no intervalo fechado $[t_0, t_1]$ então para todo $t \in [t_0, t_1]$ tem-se $|y(t)-z(t)| \leq |y(t_0)-z(t_0)| \exp[K(t-t_0)]$.

Na verdade esses teoremas formalizam o que chamamos de continuidade dos sistemas dinâmicos quanto às condições iniciais ou, em nosso caso, uma trajetória cuja condição inicial se situe suficientemente próxima a alguma separatriz terá comportamento semelhante ao da separatriz ou ao de alguma sequência de separatrizes.

F. Atratores Estranhos

Para sistemas dinâmicos evoluindo em domínios abertos de sub-espacos vetoriais do \mathbb{R}^d , temos teoremas [14] formulados por Poincaré e Bendixon que garantem que as trajetórias do sis

tema dinâmico irão aproximar para $t \rightarrow \infty$ um foco (e então teremos uma solução estacionária) ou um ciclo limite* (e então teremos soluções periódicas). Para sistemas dinâmicos com dimensão $d \geq 3$ como é o nosso caso, no entanto, estes teoremas não se generalizam. Por outro lado Ruelle e Takens [16] dizem que as trajetórias que evoluem em domínios de dimensão $d \geq 3$ possuem a propriedade genérica de se aproximarem de regiões finitas no espaço de fase chamadas de atratores estranhos [17]. Nestas regiões, trajetórias próximas sofrem rápida divergência e em geral tem comportamento caótico. Uma forma de simplificar o estudo de sistemas dinâmicos nestas regiões é através do mapeamento de Poincaré.

G. Mapeamento de Poincaré

De maneira geral a diminuição da dimensão do sistema dinâmico conduz a uma diminuição de sua complexidade. Com isso Poincaré sugeriu que no espaço n -dimensional em que evoluímos o sistema dinâmico poderíamos introduzir uma hipersuperfície $(n-1)$ -dimensional que fosse infinitamente atravessada pelo fluxo do sistema dinâmico. As sucessivas intersecções das trajetórias do sistema dinâmico com a hipersuperfície fornece uma sequência de pontos sobre ela que pode ser usada para definir um mapeamento discreto. O estudo desse mapeamento (chamado mapeamento de Poincaré) traz informações

*Genericamente, um ciclo limite é uma linha fechada que é aproximada por trajetórias do sistema.

sobre o sistema dinâmico original.

H. Caos

É frequente a crença de que sistemas matemáticos de terminísticos apresentam randomicidade apenas quando são introduzidas características estocásticas seja nas condições iniciais seja nas interações. Isto porém não é de todo verdade. Vários sistemas determinísticos apresentam comportamento caótico. Tais sistemas devem ser estudados por meio de grandezas que se mantenham constantes durante a evolução do sistema e que darão o grau de caoticidade do sistema [21]. Um desses parâmetros é o índice de Liapunov que mede a taxa de divergência local de trajetórias próximas. O índice de Liapunov do modelo Mixmaster será discutido detalhadamente no preprint anexado à tese.

III. A SINGULARIDADE COSMOLÓGICA

As equações de campo de Einstein são comumente escritas como

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \quad (8.III)$$

onde

g_{ij} é a métrica da variedade espaço-temporal 4-dimensional

R_{ij} é o tensor de Ricci

T_{ij} é o tensor de energia-momento

G é a constante de gravitação universal

c é a velocidade da luz

assumiremos sempre que

. índices latinos variam de 0 a 3 e gregos de 1 a 3 salvo declarado o contrário

. a métrica g_{ij} tem assinatura $(+ - - -)$

. toda a descrição é efetuada em referenciais sincrônicos; ($g_{0\alpha} = 0$) (Apêndice A) e assumindo $g_{00} = 1$

. usamos unidades naturais tais que $c = 1$, $8\pi G = 1$

. convenção de Einstein para soma em índices repetidos

Não se conhece (tanto quanto sei) nenhuma condição necessária e suficiente que determine de maneira unívoca o conceito de singularidade no espaço-tempo [22]. Nós assumire-

mos que uma condição suficiente para a existência de uma singularidade numa variedade será a existência de uma grandeza física escalar divergente, pois tal divergência não poderá ser atribuída a um efeito do sistema de coordenadas.

Mostraremos agora num caso muito geral que $\gamma = \det \gamma_{\alpha\beta}$ se anula em algum instante temporal, onde $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}$:

$$\frac{d}{dt} \gamma^{1/6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \gamma^{5/6}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \gamma^{1/6} = \frac{1}{6} \gamma^{1/6} \left\{ \left(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right)^2 + \frac{1}{6} \frac{\ddot{\gamma}^2}{\gamma^2} \right\}$$

Pela nota de rodapé da pg. 66 escrevemos

$$\frac{d^2}{dt^2} \gamma^{1/6} = \frac{1}{6} \gamma^{1/6} \left\{ \mathcal{H}^\alpha_\alpha + \frac{1}{6} (\mathcal{H}^\alpha_\alpha)^2 \right\} \quad (9. III)$$

onde $\mathcal{H}_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial t} \gamma_{\alpha\beta}$ é um tensor. Por outro lado

$$\mathcal{H}^\alpha_\beta \mathcal{H}^\beta_\alpha = \frac{\partial}{\partial t} \gamma_{\gamma\delta} \gamma^{\gamma\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \gamma_{\xi\alpha} \gamma^{\xi\beta}$$

e é fácil ver que

$$(\mathcal{H}^\alpha_\alpha)^2 - 3 \mathcal{H}^\alpha_\beta \mathcal{H}^\beta_\alpha = \gamma^{\alpha\beta} \gamma^{\gamma\delta} \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t} \frac{\partial \gamma_{\gamma\delta}}{\partial t} - 3 \gamma^{\gamma\alpha} \gamma^{\xi\beta} \frac{\partial \gamma_{\gamma\alpha}}{\partial t} \frac{\partial \gamma_{\xi\beta}}{\partial t}$$

Como essa equação é covariante calculê-mo-la num referencial onde a matriz $\gamma_{\alpha\beta}$ é diagonal:

$$(\mathfrak{H}^\alpha_\alpha)^2 - 3\mathfrak{H}^\alpha_\beta \mathfrak{H}^\beta_\alpha = \gamma^\alpha \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial t} \gamma^\beta \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial t} - 3 \text{traco}(\gamma \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t} \frac{\partial \gamma}{\partial t})$$

chamando $\left[\gamma^\alpha \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial t} \right]_{\text{sem somatória}} = a_\alpha$ temos

$$(\mathfrak{H}^\alpha_\alpha)^2 - 3\mathfrak{H}^\alpha_\beta \mathfrak{H}^\beta_\alpha = -(a_1 - a_2)^2 - (a_1 - a_3)^2 - (a_2 - a_3)^2 \leq 0$$

Acabamos de demonstrar assim que

$$(\mathfrak{H}^\alpha_\alpha)^2 \leq 3\mathfrak{H}^\alpha_\beta \mathfrak{H}^\beta_\alpha \quad (10.III)$$

Assim por (9.III), (10.III) e (A.12)

$$\frac{d^2}{dt^2} \gamma^{V_6} \leq -\frac{\gamma^{V_6}}{6} \left\{ \mathfrak{H}^\alpha_\alpha + \frac{1}{2} \mathfrak{H}^\alpha_\beta \mathfrak{H}^\beta_\alpha \right\} = -\frac{1}{3} \gamma^{V_6} R^0. \quad (11.III)$$

Usando agora o tensor de energia momento de fluido perfeito co
mumente utilizado em cosmologia ,

$$T^i_j = (p + \epsilon) u^i u_j - p \delta^i_j ,$$

num referencial sincrônico temos

$$T = -3p + \epsilon \quad ; \quad T^0_0 = \frac{\epsilon + p v^2}{1 - v^2}$$

onde v é a velocidade 3-dimensional da matéria. Assim

$$R^{\circ}_0 = T^{\circ}_0 - \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}(\epsilon + 3p) + \frac{(p + \epsilon)v^2}{1 - v^2} > 0 \quad (12.III)$$

e, de (11.III) e (12.III), finalmente obtem-se

$$\frac{d^2}{dt^2} \gamma^{1/6} \leq 0 \quad (13.III)$$

onde a igualdade somente vale em pontos isolados [6]. É fácil então verificar que para algum $t = t_0$ teremos necessariamente $\gamma(t_0) = 0$. No caso da métrica espacial ser diagonal esta condição se escreve como

$$q_1 q_2 q_3 = 0 \quad (14.III)$$

onde q_i são os elementos diagonais da métrica. Assim (14.III) será o que entenderemos por singularidade do modelo Mixmaster. Em modelos homogêneos onde a hamiltoniana (constante ao longo da evolução do Universo) pode ser escrita como (17.III) a condição (14.III) implica que a densidade de energia ϵ diverge*. Isto garante que a singularidade que nos ocuparemos é física. Seria pertinente perguntar se a métrica em instantes próximos da singularidade não esbarraria na hipótese de Planck que para escalas espaciais menores que $\bar{l} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$ e escalas temporais abaixo de $\bar{t} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}}$ as flutuações quânticas seriam inevitáveis. Com efeito, com as grandezas \bar{l} , c e \hbar podemos construir uma densidade $\rho = \frac{\hbar}{c\bar{l}} \approx 5 \cdot 10^{93} \text{ g/cm}^3$ extremamente grande acima da qual a R.G. não seria mais perti

* Mesmo para Universos sem matéria a singularidade é definida por (14.III).

nente. A despeito desta questão que tacitamente rejeitaremos [23], a questão da existência de uma singularidade física, a uma distância temporal finita do presente, suscita controvérsias mesmo no contexto clássico. O tempo a que nos referimos aqui é o tempo próprio do observador. Mas J. Rosen [24] levanta a questão se o tempo próprio poderia ser associado com a sucessão de algum fenômeno cíclico (que é como fisicamente medimos intervalos temporais) à medida que nos aproximamos da singularidade. Resumindo apelamos à [25] pg. 813 "finite proper time then need not imply that any finite sequence of events was possible... The Mixmaster cosmological model does have an infinite past history in this sense since each bounce from one Kasner-like motion to another is a recognizable cosmological event of which infinitely many must be realized between any finite epoch and the singularity".

As equações de Einstein (8.III) podem ser escritas para o modelo Bianchi IX em forma Hamiltoniana. Este tipo de tratamento foi introduzido em R.G. por Misner e seus resultados principais com relação ao modelo Bianchi IX são comentados muito brevemente na seção (IV.2). Vamos nesta seção introduzir a hamiltoniana devido a Bogoyavlenskii e Novikov extensivamente usada na seção (IV.1) e mostrar que a singularidade cosmológica $q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0$ é altamente degenerada (veja seção II.C) para o sistema dinâmico do modelo.

Segundo [6]* o modelo Bianchi IX será equivalen

* Neste trabalho assumiremos pressão nula pois essa condição não afeta o comportamento caótico do sistema.

te a um sistema Hamiltoniano num espaço de fase $\mathbb{R}^6(q_i, p_i)$ *
 $i = 1, 2, 3$ limitado pelas condições $q_i \geq 0$, $H \geq 0$ onde
 p_i corresponde ao momento conjugado à métrica q_i . Pode-se
então formalmente escrever o sistema dinâmico como

$$-\frac{dp_i}{dt} = -\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad ; \quad \frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (15.III)$$

onde t é o tempo próprio e

$$H = (q_1 q_2 q_3)^{-1/2} \left[2 \sum_{i < j}^3 p_i q_i p_j q_j - \sum_{i=1}^3 p_i^2 q_i^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left(2 \sum_{i < j}^3 q_i q_j - \sum_{i=1}^3 q_i^2 \right) \right] \quad (16.III)$$

é a hamiltoniana do sistema e constante de movimento que pode
também ser escrita como** (com pressão nula)

$$H = \epsilon (q_1 q_2 q_3)^{1/2} \quad (17.III)$$

onde ϵ é o escalar densidade de energia.

Compete-nos agora estudar este sistema de 6 equa-
ções ordinárias de 1ª ordem não lineares e acopladas por mé-
todos de sistemas dinâmicos. Por (15.III) e (16.III) escreve-se

$$\dot{p}_i = - (q_1 q_2 q_3)^{-1/2} \left\{ 2 p_i (p_j q_j + p_k q_k - p_i q_i) + \frac{1}{2} (q_j + q_k - q_i) \right. \\ \left. - \frac{1}{2 q_i} \left[2 \sum_{i < j}^3 p_i p_j q_i q_j - \sum_{i=1}^3 p_i^2 q_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i < j}^3 q_i q_j - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 q_i^2 \right] \right\} \quad (18a.III)$$

* Até o fim deste capítulo índices latinos variarão de 1 a 3.

** Para Universos sem matéria $\epsilon = 0$.

$$\dot{q}_i = \frac{1}{(q_1 q_2 q_3)^{1/2}} \left[2q_i (p_d q_d + p_k q_k - p_i q_i) \right] \quad (18b.III)$$

Para eliminarmos divergências no denominador de (18.III) fazemos uma troca no parâmetro temporal do tipo

$$dt \rightarrow d\tau (q_1 q_2 q_3)^{3/2} \quad (19.III)$$

o que implica:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i = q_d q_k \left\{ -2p_i q_i (p_d q_d + p_k q_k - p_i q_i) - q_i (q_d + q_k - q_i) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[2 \sum_{i < d} p_i p_d q_i q_d - \sum_{i=1}^3 p_i^2 q_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i < d} q_i q_d - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 q_i^2 \right] \right\} \quad (20a.III) \end{aligned}$$

$$\dot{q}_i = 2q_i^2 q_d q_k (p_d q_d + p_k q_k - p_i q_i) \quad (20b.III)$$

Para notar que o ponto $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ que pertence à singularidade é altamente degenerado calcula-se como de costume os autovalores da matriz Jacobiana do sistema nesse ponto singular, (veja capítulo II-seção A)

$$\begin{vmatrix} \partial \dot{q}_1 / \partial q_1 - \lambda & \partial \dot{q}_1 / \partial q_2 & \dots & \partial \dot{q}_1 / \partial p_3 \\ \partial \dot{q}_2 / \partial q_1 & & & \\ \vdots & & & \\ \partial \dot{p}_3 / \partial q_1 & \dots & \partial \dot{p}_3 / \partial p_3 - \lambda & \end{vmatrix} = 0$$

[$q_1 = q_2 = q_3 = 0$]

Depois de usar (20.III) segue de um cálculo fastidioso mas direto que apenas existem autovalores nulos $\lambda_i = 0 \quad i=1...6$, o que confirma a degenerescência deste ponto. Assim se quisermos estudar a dinâmica qualitativa do sistema na vizinhança da singularidade deveremos parametrizar as equações com outras variáveis o que corresponderá a um processo - σ . Isto será visto em detalhes no próximo capítulo.

IV. O MODELO MIXMASTER

Os modelos cosmológicos espacialmente homogêneos podem ser completamente classificados como explicitado no apêndice C. O modelo que nos interessa em especial é o Bianchi IX. Chamamos em geral os modelos Bianchi IX com métrica diagonal de Mixmaster. Este modelo despertou desde cedo o interesse de pesquisadores que usaram os mais diferentes tratamentos. Destacaremos a visão de Bogoyavlenskii-Novikov (B.N.) com razoáveis detalhes na seção (IV.1) por crermos ser este o mais completo e menos conhecido. Na seção (IV.2) tentaremos relacionar os aspectos mais importantes da exposição B.N. com os desenvolvimentos de B.K.L. e Misner

IV.1. A VISÃO BOGOYAVLENSKII-NOVIKOV

A. As Equações de Campo numa Variedade Compactificada

Para eliminarmos a degenerescência presente na singularidade cosmológica e já identificada na seção anterior, e ao mesmo tempo compactificarmos o domínio $\mathbb{R}^6(q_i, p_i)$, usaremos 2 mapeamentos.

O primeiro que chamaremos de W_1 será caracterizado pelas coordenadas \bar{s}_i , y_i , G com as seguintes relações:

$$\bar{s}_i = \frac{p_i q_i}{G}, \quad y_i = \frac{q_i}{G}, \quad G = (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{\frac{1}{2}} \quad i=1,2,3 \quad (21a.IV)$$

com a presença de um vínculo

$$\sum_{i=1}^3 y_i^2 = 1 \quad (21b.IV)$$

Assim o espaço de fase (sem a imposição de restrições físicas) nesta carta será $S^2 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$. Esta carta é conveniente para o estudo da máxima expansão $\sum_{i=1}^3 q_i p_i = 0$ e é chamada de compactificação do espaço de fase S .

O segundo mapeamento que chamaremos de W_2 será caracterizado pelas coordenadas s_i , y_i , w , G como segue

$$s_i = \frac{\bar{s}_i}{\left(\sum_{k=1}^3 \bar{s}_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{p_i q_i}{P}; \quad w = \left(\sum \bar{s}_i^2\right)^{-1} = \frac{G^2}{P^2}; \quad P = \left(\sum \bar{p}_i^2 \bar{q}_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (22a.IV)$$

com um par de vínculos

$$\sum_{i=1}^3 s_i^2 = 1 \quad (22b.IV)$$

$$\sum_{i=1}^3 y_i^2 = 1 \quad (22c.IV)$$

onde \bar{s}_i , y_i , G já foram definidos em (21.IV).

Esta carta é útil para eliminar a degenerescência em $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ e corresponde ao processo- σ já discutido em II.C. O espaço de fase novamente sem incluir as condições físicas de restrição, será $S^2 \times S^2 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ e portanto também 6-dimensional. As restrições físicas que impomos à variedade compactificada serão:

- i) Métricas não negativas $q_i \geq 0 \Rightarrow y_i \geq 0$
 ii) Expansão inferior à máxima expansão $\sum_{i=1}^3 \bar{s}_i \leq 0$ (23.IV)
 iii) Hamiltoniana não negativa $H \geq 0 \Rightarrow H_1 \geq 0$

onde

$$H_1 = \frac{H}{P^2} (q_1 q_2 q_3)^{1/2} = 2 \sum_{i < j} s_i s_j - 1 + \frac{w}{4} (2 \sum_{i < j} y_i y_j - 1)$$

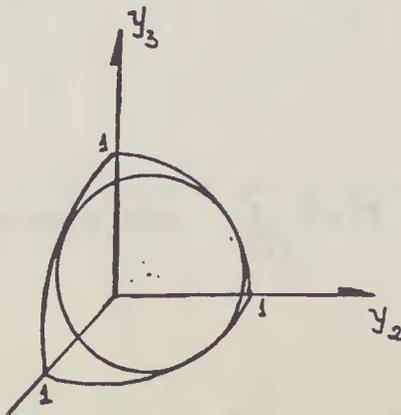
- iv) $w \geq 0$ por ser o quadrado de grandezas reais (vide (22.IV))

Usando (22c.IV) e (23i.IV) concluímos que y_1, y_2, y_3 estão limitados no triângulo esférico $\Delta: y_i \geq 0$ na esfera unitária $S^2: y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$. Inscrevemos agora neste triângulo um círculo S^1 que será dado pelas equações (fig. 5)

$$y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 = \frac{1}{2}$$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$$

fig. 5



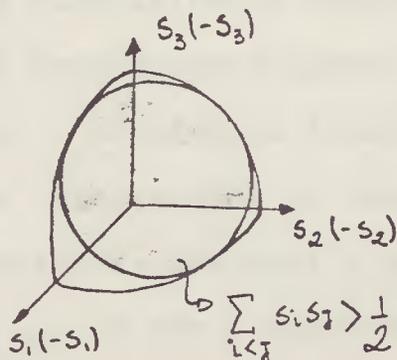
Para chegar à primeira destas equações basta notar que este círculo será a intersecção da esfera unitária $\sum y_i^2 = 1$ com um plano dado por $\sum_{i=1}^3 y_i = \sqrt{2}$.

No caso de tomarmos um ponto (y_1, y_2, y_3) exterior ao círculo dado por $\sum y_i^2 = 1$; $y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 < \frac{1}{2}$ temos que w não excederá certo limite para que a grandeza H_1 abaixo seja positiva e permaneça a condição (23i.IV)

$$H_1 = 2(s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3) - 1 + \frac{w}{2}(y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 - \frac{1}{2}) \gg 0$$

Na verdade há um compromisso entre as variáveis w e s_1, s_2, s_3 para que $H_1 \gg 0$. Com efeito, desde que $\sum s_i^2 = 1$, para que haja algum intervalo real positivo de w possível seria necessário que os pontos (s_1, s_2, s_3) estejam nas regiões hachuradas da figura 6 (excluída a fronteira).

fig. 6



Por outro lado no caso de tomarmos um ponto (y_1, y_2, y_3) sobre o círculo ou em seu interior, ou seja,

$$y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 \gg \frac{1}{2}$$

$$\sum y_i^2 = 1$$

temos que $w \in \mathbb{R}_+$ sempre que $\sum_{i < j} s_i s_j > \frac{1}{2}$

já que H_1 permanece não negativo para grandes valores de w . No caso em que w é nulo basta exigirmos que $s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3 \gg \frac{1}{2}$ para que H_1 continue não nulo. Esta condição novamente corresponde a tomar pontos (s_1, s_2, s_3) dentro da região hachurada na figura 6 (incluída a fronteira).

A fronteira Γ da variedade S não é uma variedade lisa. Matematicamente descrevemos esta fronteira como:

$$\Gamma_i : y_i = 0$$

$$\Gamma_m : \bar{s}_1 + \bar{s}_2 + \bar{s}_3 = 0$$

$$\Gamma_o : H_1 = 0$$

$$\Gamma_w : w = 0$$

As componentes Γ_o, Γ_m da fronteira pertencem à região física da variedade S . Estas componentes correspondem a estados não singulares da métrica enquanto as componentes Γ_i, Γ_w são fronteiras que não pertencem à região física e correspondem à singularidade cosmológica $q_1 q_2 q_3 = 0$. Em seguida precisaremos transformar o sistema dinâmico (18.III) nas coordenadas q_i, p_i no sistema dinâmico nas novas coordenadas. Como estamos interessados no comportamento da métrica próxima à singularidade, usaremos o conjunto de coordenadas (22.IV) s_i, y_i, G, w e com a seguinte mudança temporal.

$$t \rightarrow \tau, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{2} \frac{(p_1^2 q_1^2 + p_2^2 q_2^2 + p_3^2 q_3^2)^{1/2}}{(q_1 q_2 q_3)^{1/2}} = \frac{P}{2(q_1 q_2 q_3)^{1/2}} \quad (24.IV)$$

Apenas a título de ilustração especificaremos os cálculos nas componentes y_i $i=1,2,3$.

$$\begin{aligned}\dot{y}_i &= \frac{dy_i}{dt_1} = \frac{1}{G} \frac{dq_i}{dt_1} - \frac{1}{G^2} \frac{dG}{dt_1} q_i = \frac{dt}{dt_1} \left\{ \frac{1}{G} \frac{dq_i}{dt} - \frac{1}{G^2} \frac{dG}{dt} q_i \right\} = \\ &= \frac{1}{G} \frac{dt}{dt_1} \left\{ \dot{q}_i - \frac{\dot{G}}{G} q_i \right\}\end{aligned}\quad (25.IV)$$

Usando explicitamente as expressões da hamiltoniana e das derivadas temporais da métrica dadas em (15.III) e (16.III) e

$$\dot{G} = \sum_{i=1}^3 q_i \dot{q}_i / G$$

escrevemos (25.IV) como

$$\begin{aligned}\dot{y}_i &= \frac{1}{G} \frac{dt}{dt_1} \left\{ \dot{q}_i - \frac{q_i}{G} \sum_{k=1}^3 q_k \dot{q}_k \right\} = \frac{1}{G} \frac{dt}{dt_1} \left\{ \dot{q}_i - y_i \sum_{k=1}^3 y_k \dot{q}_k \right\} \\ &= \frac{dt}{dt_1} \frac{1}{(q_1 q_2 q_3)^{1/2}} \left\{ 2y_i \left(\sum_{j=1}^3 p_j \dot{q}_j - 2p_i \dot{q}_i \right) - y_i \sum_{k=1}^3 2y_k^2 \left(\sum_{j=1}^3 p_j \dot{q}_j - 2p_k \dot{q}_k \right) \right\}\end{aligned}$$

Usando (24.IV)

$$\dot{y}_i = \frac{2}{p} \left\{ 2y_i \left(\sum_{d=1}^3 p_d \dot{q}_d - 2p_i \dot{q}_i \right) - 2y_i \sum_{k=1}^3 y_k^2 \left(\sum_{d=1}^3 p_d \dot{q}_d - 2p_k \dot{q}_k \right) \right\}$$

$$= 4 \left\{ y_i \sum_{k=1}^3 s_k - 2s_i y_i - y_i \sum_{k=1}^3 (y_k^2 \sum_{d=1}^3 s_d) + 2y_i \sum_{k=1}^3 y_k^2 s_k \right\}$$

$$\dot{y}_i = 8y_i \left\{ -s_i + \sum_{k=1}^3 y_k^2 s_k \right\}$$

Seguindo-se este procedimento obtemos um novo sistema dinâmico no qual viremos a trabalhar

$$\dot{s}_i = w(-y_i(y_1 + y_2 + y_3 - 2y_i) + s_i z_1) + (1 - s_i z_2) H_1$$

$$\dot{w} = 2w[z_2(4 - H_1) - 8z_3 + w z_1]$$

(26.IV)

$$\dot{y}_i = 8y_i(z_3 - s_i)$$

$$\dot{G} = 4G(z_2 - 2z_3)$$

onde

$$H_1 = 2 \sum_{i < j}^3 s_i s_j - 1 + \frac{w}{4} (2 \sum_{i < j}^3 y_i y_j - 1)$$

$$z_1 = \sum_{k=1}^3 s_k y_k (y_1 + y_2 + y_3 - 2y_k)$$

$$z_2 = s_1 + s_2 + s_3$$

$$z_3 = \sum_{k=1}^3 s_k y_k^2$$

Note que nas três primeiras expressões G não aparece. Portanto esta expressão fica desacoplada posto que resolvendo-se s_i, w, y_i temos automaticamente resolvido

G já que a quarta equação é imediatamente integrável. Assim preocupar-nos-emos apenas com s_i, w, y_i e neste sentido baixamos a dimensão do sistema dinâmico de 6 para 5 pois temos 7 coordenadas acopladas e dois vínculos para s_i e y_i .

B. Pontos e Regiões Singulares

Deveremos agora determinar os pontos singulares de (26.IV), ou seja, os pontos que anulam simultaneamente os segundos membros deste sistema de equações diferenciais.

Todos os pontos e regiões singulares do sistema, são então

$$1) \Phi_{Lk} : w=0, s_i = -1/\sqrt{3} \quad (\Gamma_w)$$

$$2) N_i : s_i = -\sqrt{2} \, 3u \quad s_j = s_k = -5u/\sqrt{2}$$

$$w = 8u^2 \quad \text{onde } u = (43)^{-1/2}$$

$$y_i = 1 \quad y_j = y_k = 0 \quad (\Gamma_j \cap \Gamma_k) \quad 0 \leq k \leq 1$$

$$3) T_i : y_i = 0, y_j = y_k = 1/\sqrt{2}, s_i = 0, s_j = s_k = -\frac{1}{\sqrt{2}}, w \geq 0 \quad (\Gamma_i)$$

$$4) A_i : y_i = 0, y_j^2 + y_k^2 = 1, w = 0, s_i = \frac{2\sqrt{2}}{3}, s_j = s_k = -\frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$B_i : y_i = 0, y_j^2 + y_k^2 = 1, w = 0, s_i = 0, s_j = s_k = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$(\Gamma_i \cap \Gamma_w \cap \Gamma_0)$; Note que $H_1(A_i) = H_1(B_i) = 0$

$$5) (\Psi_i) : y_k = \delta_{ki}, w = 0, \sum s_i^2 = 1, s_1 + s_2 + s_3 = -\sqrt{2}$$

$(\Gamma_j \cap \Gamma_k \cap \Gamma_w \cap \Gamma_0)$

Nem todas as regiões singulares tem a mesma dimensão. Φ_{Lk} é bidimensional devido às restrições impostas sobre as coordenadas y_i . N_i são pontos. T_i são unidimensionais devido à liberdade em w . A_i, B_i são também unidimensionais. Por fim (Ψ_i) são três círculos singulares que tem uma importância ímpar no sistema. As regiões singulares podem ser pictoriamente esboçadas como na figura 7.

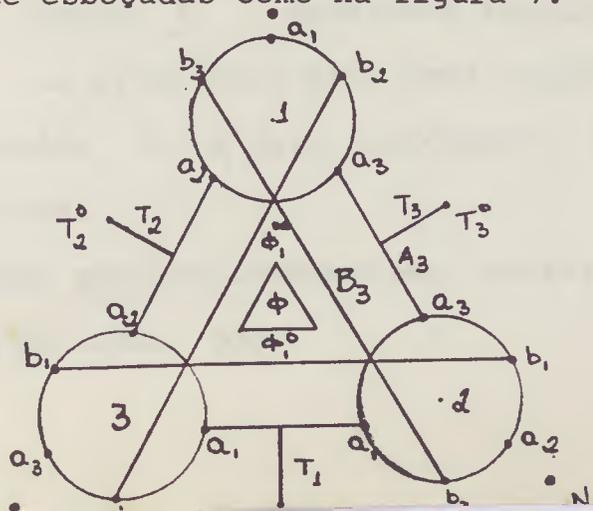


fig. 7

Note por fim que todas as regiões singulares se encontram sobre as fronteiras não físicas Γ_w, Γ_i $i=1,2,3$ da variedade compactificada.

C. Autovalores e Autovetores

Prosseguindo no estudo dinâmico do sistema deveremos descobrir os autovalores associados às regiões singulares para podermos caracterizá-las. Tal cálculo segue do capítulo II.A a saber:

$$\det \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x_i^0, \dots, x_n^0) - \lambda \delta_{ij} \right| = 0 \quad (27.IV)$$

onde λ são os autovalores e as funções são dadas pelo lado direito da igualdade (26.IV) com as seguintes ressalvas:

- i) Sendo a variável Q imediatamente integrável, conhecidas as soluções das demais variáveis, não a consideraremos parte de nosso sistema dinâmico.
- ii) Sabendo-se que devido aos vínculos $\sum_{i=1}^3 s_i^2 = 1$ e $\sum_{i=1}^3 y_i^2 = 1$ apenas duas das coordenadas s_i são independentes o mesmo acontecendo para as coordenadas y_i , deveremos escolher (arbitrariamente em princípio) para cada região singular apenas duas coordenadas s_i e duas coordenadas y_i para o cálculo dos autovalores.

Pelo que foi argumentado nota-se que em (27.IV) a matriz será de ordem 5×5 .

Em resumo os autovetores e autovalores das diversas regiões singulares é dada abaixo.

$$\phi_{Lk} : \quad \lambda_{1,2} = \sqrt{3} \quad (\text{variáveis } s_i)$$

$$\lambda_3 = -2/\sqrt{3} \quad (\text{variável } w)$$

$$\lambda_{4,5} = 0 \quad (\text{variáveis } y_i)$$

$$N_i : \quad \lambda_1 = 8\sqrt{2}u \quad (\text{variáveis } s_j)$$

$$\lambda_{2,3} = 4 \left[1 \pm i \left(3 \left(\frac{1-u}{2} \right) \right)^{1/2} \right] \sqrt{2}u \quad (\text{variáveis } s_j, w)$$

$$\lambda_4 = \lambda_5 = -4\sqrt{2}u \quad (\text{variáveis } y_i)$$

onde $u = (43)^{-k}$

$$T_i : \quad \lambda_1 = -4\sqrt{2} \quad (\text{variável } y_i)$$

$$\lambda_{2,3} = -2\sqrt{2} \quad \lambda_4 = \pm 2iw \quad (\text{variáveis } y_j, y_k, s_i, w)$$

$$\lambda_5 = 0$$

$$(\psi_i) : \quad \lambda_1 = 2(s_1 + s_2 + s_3) \quad (\text{variáveis } s_j)$$

$$\lambda_2 = 8(s_j + s_k - s_i) \quad (\text{variável } w)$$

$$\lambda_3 = 8(s_i - s_j) \quad (\text{variáveis } y_j, y_k)$$

$$\lambda_4 = 8(s_i - s_k)$$

$$\lambda_5 = 0$$

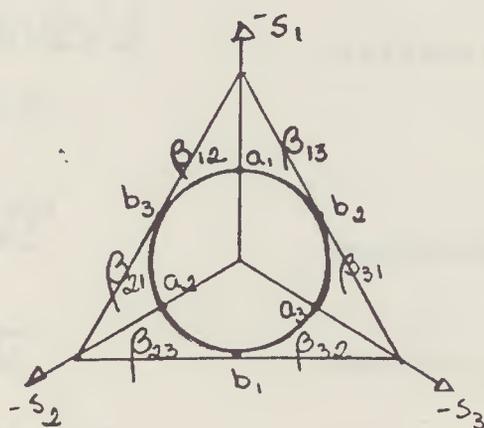
Note que dependendo do ponto no círculo (ψ_i) os autovalores serão positivos ou negativos. Portanto é conveniente dividir os círculos singulares em seções. Para tanto come-

çamos definindo sobre os círculos os pontos

$$a_i = (s_i = -2\sqrt{2}/3, s_j = s_k = -1/3\sqrt{2}) ; b_i = (s_i = 0, s_j = s_k = -1/\sqrt{2})$$

Definimos então os seis arcos β_{ik} sobre os quais $s_i < s_k < s_j < 0$ e os três arcos $\alpha_i = \beta_{ij} + a_i + \beta_{ik} (s_i < s_j, s_k)$. Esta disposição de arcos pode ser mostrada na figura 8.

fig. 8



Com isto em mente poderemos descobrir pela tabela I em que regiões os autovalores são positivos e em quais são negativos. Onde (β_{ij}, k) significa por exemplo arco β_{ij} no círculo k .

tabela I

	(β_{ik}, i)	(β_{ij}, i)	(β_{ki}, i)	(β_{kj}, i)	(β_{jk}, i)	(β_{ji}, i)
λ_1	-	-	-	-	-	-
$\lambda_2(w)$	+	+	-	-	-	-
$\lambda_3(y_j)$	-	-	-	+	+	+
$\lambda_4(y_k)$	-	-	+	+	+	-

Note que todos os pontos nos arcos, à exceção dos pontos Q_i , b_i onde os autovalores mudam de sinal sobre os círculos singulares, são não degenerados e instáveis (ao menos um autovalor com parte real positiva).

$$A_i: \lambda_1 = 4\sqrt{2} \quad (\text{variável } y_i)$$

$$\lambda_2 = -2\sqrt{2} \quad (\text{variável } S_J)$$

$$\lambda_3 = -16\sqrt{2}/3 \quad (\text{variável } w)$$

$$\lambda_4 = \lambda_5 = 0$$

$$B_i: \lambda_1 = -4\sqrt{2} \quad (\text{variável } y_i)$$

$$\lambda_2 = -2\sqrt{2} \quad (\text{variável } S_J)$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$$

D. SEPARATRIZES

Agora determinaremos as separatrizes mais significativas que ligam as regiões singulares. Este procedimento nos dará a oportunidade de sabermos para onde o sistema se desloca a medida que ele se aproxima de uma separatriz qualquer. Em outras palavras serão as separatrizes que caracterizarão o sistema à medida que ele se aproxima da fronteira Γ (singularidade cosmológica).

D.1. Relacionadas à Região Φ

A região Φ está postada na fronteira Γ_w e então fazendo-se $w=0$ no sistema (26.IV) temos

$$H_1 = 2 \sum_{i < j}^3 s_i s_j - 1 \quad \dot{w} = 0$$

$$\dot{s}_i = (1 - s_i \sum s_j) H_1 \quad \dot{y}_i = 8y_i (\sum s_k y_k^2 - s_i) \quad (28.IV)$$

Note que por w ser constante no tempo, as separatrizes tangentes a autovetores associados às direções s_j pertencem a Γ_w . Notamos também de (28.IV) que $\frac{(s_1 - s_2)}{(s_3 - s_2)} = cte$ senão vejamos

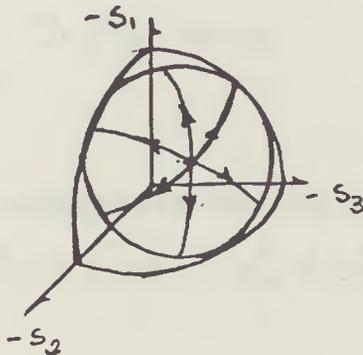
$$\frac{d}{dt} \left[\frac{(s_1 - s_2)}{(s_3 - s_2)} \right] = \frac{(\dot{s}_1 - \dot{s}_2)(s_3 - s_2) - (\dot{s}_3 - \dot{s}_2)(s_1 - s_2)}{(s_3 - s_2)^2} =$$

$$= \frac{-H_1}{(s_3 - s_2)^2} \left[(s_1 - s_2)(s_3 - s_2)(s_1 + s_2 + s_3) + \right. \\ \left. - (s_3 - s_2)(s_1 - s_2)(s_1 + s_2 + s_3) \right] = 0$$

com efeito a equação $s_1 - s_2 = k(s_3 - s_2)$ define um plano que passa pela origem em relação às variáveis s_i . Unindo este fato à presença do vínculo $\sum s_i^2 = 1$ concluímos que as trajetórias nas variáveis s_i em Γ_w se deslocam em trajetórias que são intersecções de planos passando pela origem com a esfera de raio 1. Tais linhas são geodésicas em S^2 representadas por grandes círculos. Há também uma limitação quanto à região da esfera em que as trajetórias se deslocam dados em (28.IV) por $H_1 = 2 \sum_{i < j}^3 s_i s_j - 1 \geq 0$. Especificamente nos pontos de equilíbrio $\Phi (s_i = -1/\sqrt{3})$ temos que os autovetores nas direções s_i são positivos e portanto as trajetórias sofrem

repulsão nesta direção. Podemos esboçar esta situação pela fi
gura 9.

fig. 9



Note agora que qualquer que seja o grande círculo definido pela constante k em $(s_1 - s_2) = k(s_3 - s_2)$, o ponto $s_1 = s_2 = s_3 = -1/\sqrt{3}$ satisfaz a equação e portanto todas as trajetórias de Γ_w contêm o ponto $s_i = -1/\sqrt{3}$ de onde se conclui que todas as trajetórias em Γ_w com $2\sum s_i s_j - 1 > 0$ são separatrizes de ϕ . Concluimos também do que foi dito que as separatrizes partindo de ϕ vão para o círculo $\sum s_i^2 = 1$; $\sum s_i = -\sqrt{2}$ e denotaremos estes pontos por s_i^0 . Descubramos agora para onde y_i tende nestas separatrizes para $\tau_i \rightarrow \infty$. Pelas equações (28.IV) é fácil verificar que

$$\left(\dot{y}_i / y_j\right) = -8 (y_i / y_j) (s_i - s_j) \quad (29.IV)$$

Tendo agora em mente que quando $s_k^0 < s_j^0$ ao final de uma separatriz então $s_k < s_j$ ao longo de toda a separatriz, temos os casos:

i) $s_k^\circ < s_j^\circ, s_i^\circ$ então por (29.IV)

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} y_k / y_j &\rightarrow \infty \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} y_k / y_i &\rightarrow \infty \end{aligned} \Rightarrow \lim_{\tau \rightarrow \infty} y_j = \lim_{\tau \rightarrow \infty} y_i = 0$$

logo neste caso a separatriz saindo de Φ aproxima-se do arco (α_k, k) [$y_k = \delta_j k$, $s_k^\circ < s_j^\circ, s_i^\circ$]

ii) $s_k^\circ = s_j^\circ < s_i^\circ$ então

$$\begin{aligned} y_k / y_j &= cte \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} y_k / y_i &\rightarrow \infty \end{aligned} \Rightarrow y_i \rightarrow 0$$

neste caso portanto a separatriz aproxima o segmento B_i , (veja a figura 9 e conclua que $s_i^\circ = 0$).

iii) Supondo que o ponto crítico esteja num lado $\Phi_i (y_i = 0)$ da região Φ então ao longo da separatriz temos $y_i = 0$ (já que $\dot{y}_i = 0$ sobre Γ_i e o autovetor não tem componente em y_i). Ao mesmo tempo se $s_j^\circ < s_k^\circ$ então $\lim_{\tau \rightarrow \infty} y_j / y_k \rightarrow \infty \Rightarrow y_k \rightarrow 0$ e portanto $y_j \rightarrow 1$ de onde se conclui que a separatriz aproxima-se do círculo singular (Ψ, j) e mais precisamente do arco $(\alpha_j, j) \cup (\beta_j, j)$ pois $s_j^\circ < s_k^\circ$.

iv) Partindo novamente de Φ_i com a condição $s_j^\circ = s_k^\circ$ teremos $y_i = 0$ e $y_j / y_k = cte \Rightarrow y_j^2 + y_k^2 = 1$. Se supusermos $s_i^\circ = -2\sqrt{2}/3$, $s_j^\circ = s_k^\circ = 1/3\sqrt{2}$ ($s_i < s_j = s_k$) temos que a separatriz aproxima-se do segmento A_i .

Por outro lado para $s_i^0 = 0$, $s_i^0 = s_k^0 = -1/\sqrt{2}$ temos que a separatriz aproxima-se do segmento B_i .

v) Se partirmos agora do vértice $\Phi_i^{\infty} (y_k = \delta_{ki})$ então a separatriz irá tender para uma região onde $s_1 + s_2 + s_3 = -\sqrt{2}$ (como para todos os casos acima e para $y_k = \delta_{ki}$ pelo mesmo argumento do item (iii) e sendo assim as separatrizes cobrirão o círculo singular (Ψ_i) .

D.2. Relacionadas às Regiões (Ψ_i) , A_i , B_i

Sabemos pela tabela I que no arco $(\beta_{\delta i}, i)$ temos uma separatriz unidimensional saindo na direção y_{δ} . No início ela se encontra na fronteira $\Gamma_k \cap \Gamma_w \cap \Gamma_0$ (o que implica em $(s_i = s_i^0 = \text{cte})$ pela equação (28.IV) pois $H_i = 0$) suporemos então que ela evolui na própria fronteira $\Gamma_k \cap \Gamma_w$. Como $s_{\delta} < s_i < s_k$ tem-se por (28.IV) que $y_{\delta}/y_i \rightarrow \infty$ para $\tau_i \rightarrow \infty$ e portanto $y_i \rightarrow 0$ de onde se conclui que a separatriz evolui para o arco $(\beta_{\delta i}, \delta)$.

Pela mesma tabela I sabemos que sai do arco $(\beta_{\delta k i})$ ($s_{\delta} < s_k < s_i$) uma separatriz bidimensional na fronteira $\Gamma_w \cap \Gamma_0$ (o que implica novamente na constância das coordenadas s_i). O comportamento das coordenadas y_i pode ser dado integrando se explicitamente (28.IV).

De (28.IV) escrevemos

$$\frac{\dot{y}_i}{8y_i} + s_i = \frac{\dot{y}_{\delta}}{8y_{\delta}} + s_{\delta}$$

sendo s_i, s_j ctes podemos integrar a equação e obter

$$\ln y_i - \ln y_j = \theta (s_j - s_i) \tau_i + \text{cte}$$

$$\frac{y_i}{y_j} = \frac{y_i^0}{y_j^0} e^{\theta (s_j - s_i) \tau_i}$$

$$\text{Mas } \sum y_i^2 = 1$$

$$\frac{1 - y_j^2}{y_j^2} = \frac{y_i^{0,2}}{y_j^{0,2}} e^{16(s_j - s_i) \tau_i} + \frac{y_k^{0,2}}{y_j^{0,2}} e^{16(s_j - s_k) \tau_i}$$

$$y_j^2 = \frac{y_j^{0,2}}{y_j^{0,2} + y_i^{0,2} e^{16(s_j - s_i) \tau_i} + y_k^{0,2} e^{16(s_j - s_k) \tau_i}}$$

e finalmente

$$y_j(\tau_i) = \frac{y_j^0 e^{-8s_j^0 \tau_i}}{\left(\sum_{k=1}^3 y_k^{0,2} e^{-16s_k^0 \tau_i} \right)^{1/2}} \quad (30. IV)$$

Tomando $s_j < s_k < s_i < 0$ em (30.IV) e sabendo-se que não podemos tomar o ponto inicial $(s_j^0, y_j^0 \quad j=1, 2, 3)$ sobre o círculo singular (pois eles correspondem a $\tau_i = \pm \infty$, temos que a exponencial $e^{-8s_j^0 \tau_i}$ irá dominar (para $\tau_i \rightarrow \infty$) sobre as demais e daí é fácil ver que $y_j(\tau_i) \rightarrow 1$ e $y_k, y_i \rightarrow 0$ e portanto a trajetória aproximar-se-á do arco (β_{jk}, j) . No caso especial em que $y_j^0 \equiv 0$ temos que a exponencial que efetivamente dominará será em s_k^0 (pois $s_k < s_i$) e daí a trajetória aproximar-se-á do arco de (β_{jk}, k) onde sairá uma trajetória que conduzirá a (β_{jk}, j) como no caso não especial.

O ponto (b_i, i) da circunferência (ψ, i) dado

por $(s_j = s_k = \frac{1}{\sqrt{2}} ; s_i = 0)$ tem uma separatriz saindo cujas coordenadas y_1, y_2, y_3 satisfazem por (28.IV) $\frac{y_k}{y_i} \rightarrow \infty, \frac{y_j}{y_i} \rightarrow \infty$ para $\tau_i \rightarrow \infty$. Logo $y_i \rightarrow 0$ e então é fácil ver que a separatriz aproxima-se do segmento crítico B_i .

Do segmento crítico $A_i (s_i = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, s_j = s_k = -\frac{1}{3\sqrt{2}})$ sai uma separatriz onde $y_i/y_j \rightarrow \infty ; y_i/y_k \rightarrow \infty$ para $\tau_i \rightarrow \infty$ e portanto $y_j \rightarrow 0, y_k \rightarrow 0$ (claramente $y_i \rightarrow 1$) e portanto as separatrizes aproximam o ponto crítico (a_i, i) .

Tomemos agora o arco $(\alpha_i, i) = (\beta_{i,j}, i) + (a_i, i) + (\beta_{i,k}, i)$ ($s_i < s_j, s_k$). Dele parte uma separatriz na direção w ao longo da qual $y_k = \delta_{ki}$. Impondo em (26.IV) $y_k = \delta_{ik}$ temos as seguintes equações:

$$\dot{s}_i = w(1 - s_i^2) + (1 - s_i(s_1 + s_2 + s_3))H'$$

$$\dot{s}_j = w(-s_i s_j) + (1 - s_j(s_1 + s_2 + s_3))H'$$

(31.IV)

$$\dot{s}_k = w(-s_i s_k) + (1 - s_k(s_1 + s_2 + s_3))H'$$

$$\dot{w} = 2w(-s_i w - (s_1 + s_2 + s_3)H' + 4(\sum s_\alpha - 2s_i))$$

$$H' = 2 \sum_{i < j}^3 s_i s_j - 1 - \frac{w}{4}$$

Note que sobre o círculo (ψ, i) no arco $(\alpha_i, i); H' = 0$.

Tentaremos encontrar a separatriz impondo $H' = 0$ durante toda a evolução. Se for possível encontrá-la então devido à unicidade nosso procedimento é consistente.

De (31.IV) $s_j/s_k = \text{cte}$ (plano passando pela origem)

e $\dot{s}_i > 0$. Portanto a separatriz evoluirá sobre a esfera $\sum_{i=1}^3 s_i^2 = 1$ ao longo de grandes círculos que sempre passarão

por $s_j = s_k = 0$ $s_i = 1$ (já que tal ponto sempre satisfará a equação $s_j = cte$ s_k qualquer que seja a constante). Assim a separatriz partirá de um ponto s_i^0 no arco (α_i, i) e irá alcançar o mesmo círculo ($\gamma_k = \delta_{ik}$ na separatriz) na intersecção das superfícies

$$\sum_{i=1}^3 s_i^2 = 1$$

$$\sum s_i = -\sqrt{2}$$

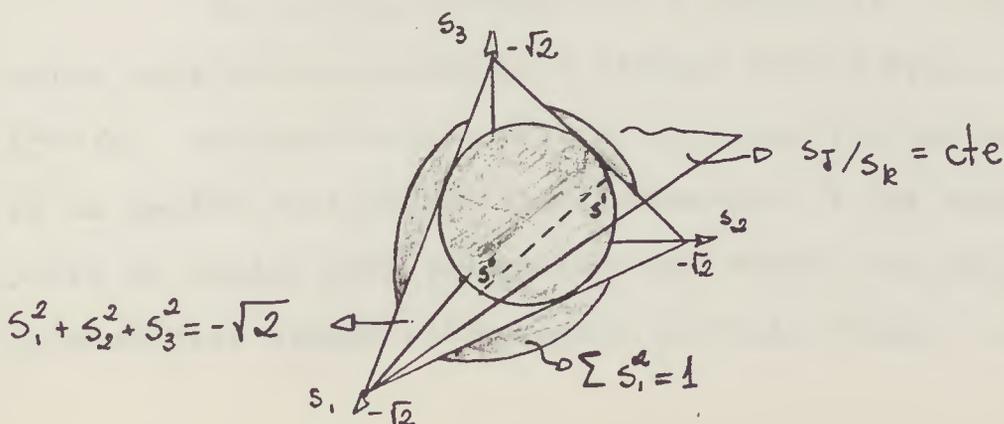
$$s_j = cte s_k$$

explicitamente teremos:

$$w=0 ; s_i^1 = \frac{3s_i^0 + 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2} s_i^0} ; s_j^1 = \frac{s_j^0}{3 + 2\sqrt{2} s_i^0} ; s_k^1 = \frac{s_k^0}{3 + 2\sqrt{2} s_i^0} \quad (32.IV)$$

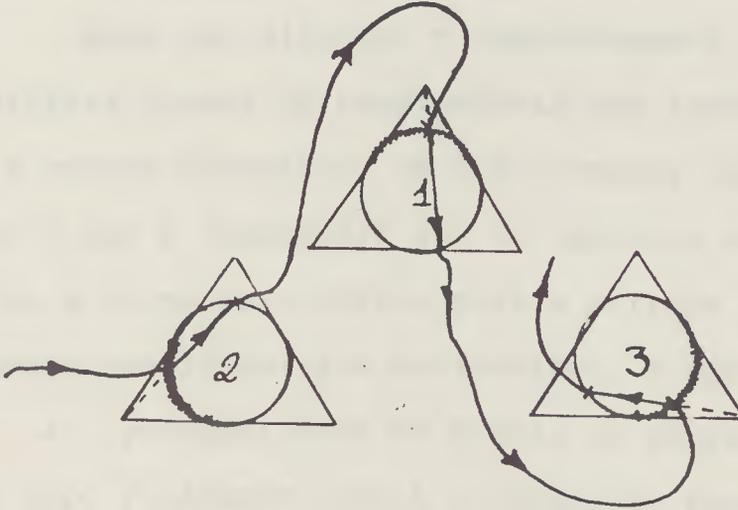
Geometricamente o ponto para o qual a separatriz evolui pode ser construído traçando-se uma reta entre o vértice $s_i = -\sqrt{2}$, $s_j = s_k = 0$ e o ponto s^0 no arco (α_i, i) do qual a separatriz parte. Sendo o vértice coplanar com o plano definido pelo círculo, é claro que a reta irá interceptar um segundo ponto neste mesmo círculo. Este ponto será aquele para o qual a separatriz terá se dirigido. Veja figura 10

fig. 10



Restringindo-se aos três círculos singulares (γ_i) podemos resumir o comportamento das separatrizes com o esboço da figura 11

fig. 11



Note que depois de feito o mapeamento do círculo no círculo, a transição seguinte dar-se-á entre um dos outros dois círculos (a não ser por um conjunto de separatrizes de medida nula) e tal escolha dependerá do arco ($\beta_i \tau$) de partida da separatriz conforme estudo já desenvolvido.

E. Compêndio de Separatrizes

Satisfazer-nos-emos com o estudo das separatrizes acima pois como mostraremos o sistema deverá evoluir, para $\tau \rightarrow +\infty$ necessariamente para os círculos limites onde entrará em regime oscilatório indefinidamente já que apenas um conjunto de medida nula de separatrizes evolui dos círculos singulares para alguma outra região singular. Estas afirmações

podem ser comprovadas analisando-se cuidadosamente a tabela II [6] onde no topo se encontram as regiões singulares de onde partem as separatrizes e na lateral esquerda se encontram as regiões singulares para onde se dirigem as separatrizes correspondentes na direção da contração do tempo ($t \rightarrow 0$).

Deve ser dito que o comportamento acima mostrado das separatrizes possui correspondência com trabalhos anteriores sobre o modelo Mixmaster. Um dos exemplos importantes neste sentido é que a separatriz que se aproxima da região singular ϕ tem a forma assintótica para a métrica $q_i \approx C_i t^{4/3}$ já descoberta por Lifshitz e Khalatnikov, e usado para tentar mostrar a possibilidade do modelo em questão evoluir para o modelo tipo Friedmann que é o observado atualmente. No prosseguimento de nosso programa tentaremos explorar mais as semelhanças entre este tratamento e os já conhecidos na literatura.

F. Estados Primitivos da Expansão do Universo

Até agora estudamos o comportamento do Universo na direção de contração ($t \rightarrow 0$). O que descobrimos é que o sistema evolui, após seguir várias separatrizes, na direção dos círculos singulares onde fica confinando já que o conjunto de separatrizes que parte do círculo para algum ponto singular de outro tipo, tem medida nula (veja tabela II). O problema que agora se coloca é como se comporta o Universo no início de sua expansão. Para tal estudo devemos inverter a direção de evolução das separatrizes na tabela II. Supomos ini-

	S	T_i^0	Φ	T_i	N_i	Φ_i^0	Φ_i^{∞}	$(\beta_{T,i})$	$(\beta_{L,i})$	$(\beta_{R,i})$	$(a_{i,i})$	$(b_{i,i})$	A_i	B_i
Φ	$\dim 3$													
T_I	$\dim 3$ $T=1,2,3$	$\dim 2$ $T=i$												
N_I	$\dim 2$ $T=1,2,3$	$\dim 1$ $T=i \pm 1$												
Φ_I^0		$\dim 2$ $T=i$			$\dim 1$ $T=i$									
Φ_I^{∞}														
$(\beta_{T,i}, X)$			$\dim 4$ $x=1,2,3$ $y=x \pm i$			$\dim 3$ $x=i$ $y=i \pm 1$	$\dim 2$ $x=i$ $y=i \pm 1$	$\dim 2$ $x=i$ $y=i$	$\dim 2$ $x=i$ $y=i$	$\dim 3$ $x=i$ $y=k$				
$(\beta_{R,i}, X)$				$\dim 3$ $x=i \neq 1$ $y=i$	$\dim 3$ $x=i$ $y=i \pm 1$	$\dim 2$ $x=i$ $y=i \pm 1$	$\dim 2$ $x=i$ $y=i$	$\dim 2$ $x=i$ $y=i$		$\dim 2$ $x=i$ $y=i$				$\dim 2$ $x=i \pm 1$ $y=i$
(α_x, X)			$\dim 3$ $x=1,2,3$		$\dim 2$ $x=i$	$\dim 2$ $x=i \pm 1$	$\dim 1$ $x=i$							$\dim 2$ $x=i$
$(b_{x,i}, X)$							$\dim 1$ $x=i$				$\dim 1$ $x=i$			
A_I		$\dim 3$ $T=i$		$\dim 2$ $T=i$		$\dim 2$ $T=i$								
B_I			$\dim 3$ $T=1,2,3$			$\dim 2$ $T=i$							$\dim 2$ $T=i$	

cialmente que o sistema está próximo da fronteira Γ e evolui segundo é ditado pelas separatrizes. O Universo passaria das imediações da singularidade cosmológica para a região física seguindo alguma separatriz apropriada. Isto somente pode ocorrer quando o sistema se aproximar de um dos pontos singulares N_i, T_i ou ϕ . Segundo a tabela II pode-se notar que de todos os pontos singulares partem separatrizes conectando outros pontos singulares tal que com poucas iterações qualquer ponto singular é conectado com os pontos N_i, ϕ, T_i . Logo que o sistema escapa do atrator dos 3 círculos singulares e evolui na região física, temos que a métrica terá um dos comportamentos típicos.

$$\begin{aligned}
 q_i &\approx C_i t^{4/3} && (\phi) \\
 q_i &\approx C t^2 & q_j &\approx q_k \approx C_i && (T_i) \\
 q_i &\approx C_i t & q_j &\approx C_j t^{3/2} & q_k &\approx C_k t^{3/2} && (N_i)
 \end{aligned}$$

O fato é que por [6,7] apesar de tais estados típicos não serem os mesmos conforme se mude o modelo Bianchi, o estado quasi-isotrópico existe em todos eles, fato este que poderia explicar como um Universo não isotrópico daria origem ao isotrópico que hoje observamos e talvez sirva de paradigma para explicar como um modelo não homogêneo possa evoluir para um isotrópico e homogêneo.

Vamos agora integrar a separatriz tipo Friedmann por ser a mais importante. Esta separatriz sai do ponto singular ϕ ($w=0, s_i = -1/\sqrt{3}$) na direção da variável w . Sendo assim

escreveremos as equações de campo (26.IV) supondo assintoticamente que $w \ll 1$.

$$\dot{s}_i = (1 - s_i (s_1 + s_2 + s_3)) H_1$$

$$\dot{w} = 2w \left[-(s_1 + s_2 + s_3) H_1 + 4 \left(s_1 + s_2 + s_3 - 2 \sum_{\beta=1}^3 s_\beta \gamma_\beta^2 \right) \right]$$

$$\dot{y}_i = 8 y_i \left(\sum_{\alpha=1}^3 s_\alpha \gamma_\alpha^2 - s_i \right)$$

$$\dot{G} = 4G \left(\sum_{\alpha=1}^3 s_\alpha - 2 \sum_{\beta=1}^3 s_\beta \gamma_\beta^2 \right)$$

$$H_1 = 2 \sum_{i < j}^3 s_i s_j - 1$$

Assumiremos agora que $s_i = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ $i=1,2,3$ pois esta separatriz assintoticamente aproxima ϕ .

$$\dot{s}_i = 0$$

$$\dot{w} = -2w \sqrt{3}/3$$

$$\dot{y}_i = 0$$

$$\dot{G} = -4G/\sqrt{3}$$

Estas equações são desacopladas e podem ser integradas facilmente

$$w = C_1 e^{-\frac{2\sqrt{3}\tau}{3}}$$

(33a.IV)

$$G = C_2 e^{-\frac{4\sqrt{3}\tau}{3}}$$

(33b.IV)

onde C_n $n \in \mathbb{N}$ serão assumidos constantes até o fim desta seção

Usando (21a.IV) escreveremos

$$q_i = G y_i = C_i e^{-\frac{4\sqrt{3}}{3} \tau_1} \quad (34.IV)$$

Agora de (24.IV) reescrevemos

$$\frac{d\tau_1}{dt} = \frac{P}{2(q_1 q_2 q_3)^{1/2}} \quad (24.IV)$$

e como

$$P = \frac{G}{w^{1/2}} = C_4 e^{-\sqrt{3} \tau_1}$$

então (24.IV) se escreve como

$$\frac{d\tau_1}{dt} = C_5 e^{\sqrt{3} \tau_1}$$

que pode ser integrado dando

$$e^{-\sqrt{3} \tau_1} = -\sqrt{3} t C_5 + C_7$$

mas como $t \rightarrow 0 \Rightarrow \tau_1 \rightarrow \infty$ então $(C_7 = 0, C_5 < 0)$

$$e^{-\sqrt{3} \tau_1} = C_5' \sqrt{3} t \quad (35.IV)$$

levando (35.IV) em (34.IV) obtemos finalmente $q_i = C_i' t^{4/3}$ na direção da contração ($t \rightarrow 0$). Para se determinar se este re-

gime Friedmann é mantido longe da singularidade na direção da expansão seria necessário de uma análise da estabilidade da separatriz e portanto nada podemos afirmar a priori.

IV.2. O Panorama Bogoyavlenskii-Novikov, outros Trabalhos e Conclusões

Os estudos mais detalhados sobre este modelo cosmológico anteriores ao de B.N. são devidos aos soviéticos Belinskii-Khalatnikov-Lifshitz (B.K.L.) que destacaram os aspectos caóticos do sistema e a Misner que introduziu o método Hamiltoniano em cosmologia. Nesta seção gostaríamos de destacar os pontos de conexão mais importantes entre o trabalho B.N. e os dois últimos bem como citar alguns aspectos que podem ser vistos mais claramente no trabalho B.N.*

Segundo B.N. o universo irá aproximar-se, na direção da contração, da fronteira não física Γ que contém várias separatrizes. Uma vez alcançando as separatrizes que interligam os círculos singulares o sistema iniciará infinitas transições entre os diversos círculos (vide tabela II). Este comportamento evidencia a característica caótica do sistema na direção da contração. Na direção da expansão no entanto o universo não tem um comportamento caótico permanente, com efeito, invertendo a tabela II nota-se que na direção da expansão o Universo após um número finito de transições deve alcançar as separatrizes de um dos seguintes pontos singulares ϕ_i ,

*A obrigatoriedade de que uma dissertação de mestrado deva ser finita impede que se entre em detalhes sobre os trabalhos de B.K.L. e Misner que serão tacitamente assumidos conhecidos.

T_i, N_i dos quais partem separatrizes para a região física e que portanto encerram o período caótico do modelo. Os três círculos singulares e as separatrizes que os interligam constituem o atrator do sistema (vide cap. II seções F,G,H). Um dos parâmetros específicos para medir o quão caótico é um sistema denomina-se índice de Liapunov que mede a taxa exponencial de divergência de trajetórias próximas. Espera-se que este parâmetro se mantenha constante ao longo da evolução. Porém este sistema em especial possui seu atrator numa região não física que é aproximada (e então mais tempo o sistema é aproximado por uma dada separatriz) mas nunca alcançada. Este fenômeno torna o modelo um sistema caótico não trivial e foi levado em conta em [13].

Na visão B.K.L. mostra-se que o modelo Bianchi IX é aproximado, próximo da singularidade, por sucessivos modelos Bianchi I (mais conhecido por Universo Kasner). O modelo tipo Kasner tem solução analítica nas equações de Einstein para as métricas. O seu elemento de linha será:

$$d^2s = dt^2 - C_1 t^{2P_1} dx^2 - C_2 t^{2P_2} dy^2 - C_3 t^{2P_3} dz^2 \quad (36.IV)$$

onde C_i são constantes com os vínculos

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1 \quad (37a.IV)$$

$$P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = 1 \quad (37b.IV)$$

Note que podemos escrever p_1, p_2, p_3 como funções de uma única variável u satisfazendo (37.IV). A mais comum ^{parametrização} é dada por

$$p_1(u) = \frac{-u}{1+u+u^2} \quad ; \quad p_2 = \frac{1+u}{1+u+u^2} \quad ; \quad p_3 = \frac{u(1+u)}{1+u+u^2} \quad (38.IV)$$

A única sugestão de dedução de (38.IV) metódica está em [26] mas infelizmente não se mostra muito elucidativa. Com o intuito de encontrar outra parametrização com embasamento mais geométrico* fizemos uma série de transformações de coordenadas e obtivemos

$$p_1(u) = \frac{-(u+\sqrt{3})(1+u^2)^{1/2} + (1+u)}{3(1+u^2)}$$

$$p_2(u) = \frac{(1+u^2) + (\sqrt{3}-u)(1+u^2)^{1/2}}{3(1+u^2)}$$

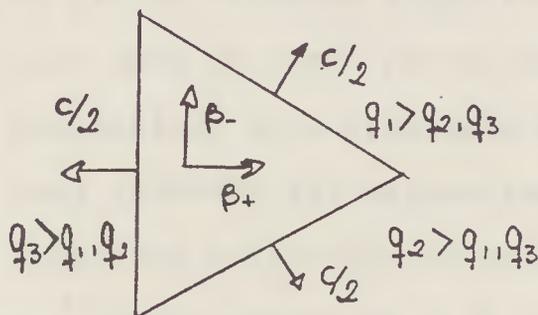
$$p_3(u) = \frac{(1+u^2) + 2u(1+u^2)^{1/2}}{3(1+u^2)}$$

que não conseguimos fazer cair na parametrização (38.IV). Estas eras tipo Kasner estão associadas às separatrizes que ligam círculos singulares distintos no trabalho B.N.. Isto pode ser visto diretamente, pois estas separatrizes foram integradas

*Basicamente fizemos uma mudança de coordenadas para parametrizar o círculo definido em (37.IV) num plano e depois voltamos às coordenadas originais.

em (30.IV) e tem a forma Kasner (veja métrica em (36.IV)). A lei de transformação dos parâmetros p_1, p_2, p_3 entre eras sucessivas tipo Kasner introduzida inicialmente por B.K.L. pode também ser recuperada aqui. Para tanto lembremos inicialmente que esta transição sucessiva de soluções tipo Kasner pode ser entendida na visão Misner como a influência de um potencial associado ao modelo Bianchi IX no ponto representativo do Universo no espaço de fase das métricas. A transição entre duas soluções tipo Kasner pode então ser encarada como devido ao choque do estado livre (com velocidade c) com uma parede que se expande com velocidade $c/2$ (vide figura 12)

fig. 12



Tal choque no trabalho B.N. é associado às separatrizes que ligam um círculo a ele mesmo (vide figura 11). Nestas transições os parâmetros λ_i mudam como em (32.IV). Fazendo a seguinte identificação $p_i = 1 + \sqrt{2} \lambda_i$ obtemos a conhecida lei de transição

$$p'_e = \frac{-p_1}{2p_1 + 1}$$

$$p'_m = \frac{2p_1 + p_2}{2p_1 + 1}$$

$$p'_n = \frac{2p_1 + p_3}{2p_1 + 1}$$

Esta transição pode ser simulada com o parâmetro Kasner u introduzida em (38.IV). As transições podem então ser de 2 tipos a saber:

$$1) \text{ se } u > 1 \text{ então } u \rightarrow u - 1$$

$$2) \text{ se } 0 < u < 1 \text{ então } u \rightarrow \frac{1}{u} - 1$$

As transições do primeiro tipo correspondem a consecutivas transições entre 2 círculos singulares dados e o Universo está então na chamada era Kasner onde 2 métricas oscilam enquanto a terceira tem um decréscimo monotônico. Esta transição não implica caos no parâmetro u pois uma pequena incerteza no parâmetro u não é propagada. Quando a parte inteira é consumida no entanto, tem lugar a transição 2 que significa que há uma mudança do par de círculos singulares oscilantes. Inicia-se uma nova era onde um novo par de métricas oscila e uma outra inicia o decréscimo. Esta transição induz caos no parâmetro u . O caos induzido foi extensivamente estudado por B.K.L. em seus trabalhos originais mas referenciamos a [12] por ser um "review" condensado no qual se destacam os principais pontos relevantes ao modelo tanto via B.K.L., como via Misner. Um ponto interessante a ser citado é que na visão Misner à medida que nos aproximamos da singularidade e as paredes do potencial vão se expandindo o choque do ponto com estas paredes vão se tornando menos frequentes. Isto deve ser entendido no contexto B.N. pelo fato de que à medida que nos aproximamos da singularidade, as trajetórias se aproximam mais das separatrizes e portanto levam um tempo maior para se aproximarem dos círculos singulares (\sqrt{i}) onde, de fato, a

interação com o potencial é sentida. Já vimos que no círculo singular (Ψ, i) temos $\gamma_\alpha = \delta_{i\alpha}$ ou seja $\frac{q_I}{q_i} = \frac{q_K}{q_i} = 0$ (veja (21a.IV)). Portanto quanto mais próximo da singularidade mais fiel será o limite $q_i \gg q_I, q_K$ sobre cada parede \underline{i} . É muito instrutivo usar o formalismo B.N. para entender naquele contexto o que significa a situação em que o ponto no espaço de fase β_{\mp} se desloca na direção de um vértice. Tome-mos o vértice entre os lados \underline{I} e \underline{K} e a direção de deslocamento sendo a bissetriz entre os lados \underline{I} e \underline{K} . Suporemos que a partida da trajetória se faça da parede \underline{i} . Ao longo desta trajetória temos $q_I = q_K$ e como no interior a métrica evolui na forma Kasner $q_m = C_m t^{2P_m}$ temos $P_I = P_K$ e portanto $s_I = s_K$ (lembre-se que $P_i = \frac{1}{2} + \sqrt{2} s_i$). Ao mesmo tempo traduzimos o fato de que a trajetória parte da parede \underline{i} ($q_i > q_I, q_K$) na linguagem B.N. dizendo que ela parte de uma região próxima do círculo singular (Ψ, i) no arco $(\alpha_{\underline{I}, i})$ onde $(s_I, s_K < s_i)$. Logo devemos ter $s_I = s_K < s_i$ sobre o círculo (Ψ, i) . Ou seja a trajetória parte próxima do ponto $(b_{i, i})$ ($s_i = 0, s_I = s_K = \frac{1}{\sqrt{2}}$) e seu comportamento deve ser aproximado pela separatriz correspondente. Pela tabela de separatrizes encontramos uma única bi-dimensional que se dirige ao segmento singular B_i que corresponde ao vértice do triângulo Misner. O fato do ponto nunca chegar ao vértice significa na visão B.N. que a única oportunidade para que esta trajetória seja realizada é que ela evolua sobre a separatriz.

Antes de finalizar deve-se dizer que uma conjectura de B.K.L. na qual singularidades cosmológicas de modelos ñ ho-

homogêneos possuem um comportamento genérico do mesmo tipo do encontrado no modelo Bianchi IX pode encontrar sua confirmação ou não num tratamento análogo ao feito acima. Se pudéssemos provar que a existência de atratores tipo Bianchi IX é uma propriedade genérica de modelos não homogêneos então a conjectura B.K.L. estaria provada. Por outro lado tal tratamento ainda espera por uma teoria de sistemas dinâmicos para derivadas parciais já que sua presença é inevitável em casos de modelos gerais.

O próximo e último capítulo é um resumo de [13] que foi anexado. Esperamos que os capítulos anteriores além de terem servido como uma ponte entre o trabalho B.N. e os trabalhos B.K.L. e Misner sejam uma importante introdução para a explicação dos aspectos explorados em [13].

V. RESUMO DO PREPRINT "QUALITATIVE AND NUMERICAL STUDY OF BIANCHI IX MODELS"

Este capítulo constitui um resumo das conclusões da referência [13] à qual está anexada no fim do trabalho. (Deve-se apontar que a leitura de [13] torna redundante a leitura deste capítulo).

Como vimos no capítulo IV o modelo Bianchi IX é caótico na direção da contração. Modelos caóticos, que evoluam em espaço de fase com dimensão maior que 3, tem a propriedade genérica de se dirigirem para regiões do espaço físico denominadas atratores estranhos (veja II.F). Nestas regiões a rápida divergência de trajetórias próximas é expressa pelo índice de Liapunov [13] que mede a taxa exponencial de divergência destas trajetórias próximas. Para os sistemas ergódicos usuais este índice deve ser constante para um dado sistema e deverá ser tanto maior quanto for a caoticidade do atrator associado.

Por outro lado, evoluindo as equações de campo (2.6) deste modelo encontramos alguns aspectos interessantes. O índice de Liapunov depende das condições iniciais, quando elas são do tipo Kasner (fig. 4, [13]), e também este índice não parece estabilizar em nenhum valor (figs. 2,3 de [13]). A razão para explicar tais efeitos está relacionada ao fato de que o atrator do sistema, constituído pelos três círculos singulares (Ψ, i) e pelas separatrizes entre eles, não está na região física mas na fronteira singular não física. Talvez a maneira mais simples para se estudar este efeito seja na visão

Misner . À medida que nos aproximamos da singularidade as paredes do potencial se expandem de modo que a trajetória passa mais e mais tempo em regime do tipo Kasner (ou, na linguagem B.N., próximo a separatriz tipo Kasner). Portanto as colisões efetivas com as paredes do potencial que contribuem para o expoente de Liapunov levam mais tempo para ocorrer e portanto o expoente, medido como taxa de divergência no tempo, sofre um decréscimo à medida que nos aproximamos da singularidade. Esse comportamento implica que a determinação e interpretação do expoente não pode ser feito como usualmente encontramos na maioria dos sistemas físicos dados por equações diferenciais autônomas e é um assunto tratado em mais detalhe em [13].

APÊNDICE A - As Equações de Einstein em Referenciais Sincrônicos

Qualquer sistema de coordenada 4-dim (x^0, x^1, x^2, x^3) que especifique univocamente os pontos na variedade espaço-temporal é a priori um bom sistema de coordenadas em R.G. . No entanto, conceitos importantes tais como sincronicidade de relógios devem ser revistos. Seja o elemento de linha 4-dim escrito num referencial arbitrário dado por

$$d^2s = g_{00}dx^0{}^2 + 2g_{0\alpha}dx^0dx^\alpha + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \quad (\text{A.1})$$

onde a assinatura da métrica é $(+ - - -)$. Seja agora dois eventos distintos tais que $dx^\alpha = 0$ (as coordenadas x^α tem caráter espacial). Assim de (A.1) temos

$$d^2s = g_{00}d^2x^0 = d\tau^2 \quad (\text{A.2})$$

onde τ é o tempo próprio do observador e fizemos $c=1$. Portanto de (A.2)

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dx^0 \quad (\text{A.3})$$

A relação (A.3) liga a coordenada x^0 com o tempo próprio de um observador. A dependência $g_{00} = g_{00}(x^\mu)$ exprime o fato de que os relógios possuem em cada ponto do espaço-tempo uma escala arbitrária. Portanto deveremos impor condições na mé-

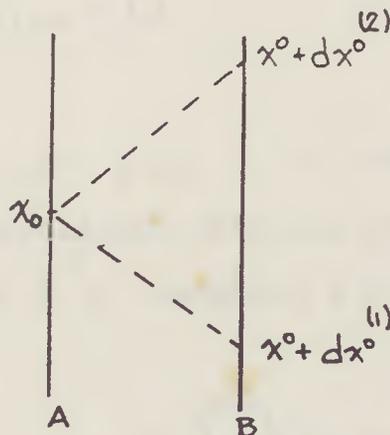
* Índices latinos variam de 0 a 3 e gregos de 1 a 3.

trica afim de que tenhamos um referencial síncrono. Para tanto devemos ser capazes de medir distâncias infinitesimais espaciais entre 2 eventos. Inicialmente notamos que se os relógios fossem sincronizados em todo o espaço-tempo bastar-se-ia fazer $dx^0 = 0$ em (A.1) para obter

$$-d^2s = d^2l = -g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\text{A.4})$$

esta seria a distância espacial entre 2 eventos próximos com diferença de coordenadas dx^α . Em geral, no entanto, seguimos [5] e tomamos como na figura 13, 2 observadores A e B. Um raio de luz emitido por B é refletido de volta ao chegar em A. Os valores $x^0 + dx^{0(1)}$ e $x^0 + dx^{0(2)}$ que são respectivamente os valores associados à emissão e reabsorção da luz por B, são determinados fazendo-se $ds = 0$ em (A.1) pois ambos os eventos estão sobre o cone de luz de A.

fig. 13



O intervalo de tempo próprio transcorrido entre estes 2 eventos será com ajuda de (A.3)

$$dT = (dx^0 - dx^0) \sqrt{g_{00}} \quad (\text{A.5})$$

e conseqüentemente a distância espacial entre os observadores A e B será [5]

$$dl^2 = \frac{dT^2}{2} = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\beta}g_{0\alpha}}{g_{00}} \right) dx^\alpha dx^\beta$$

ou reescrevendo

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad \text{onde} \quad \gamma_{\alpha\beta} = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} \right) \quad (\text{A.6})$$

Comparando (A.4) e (A.6) percebemos que para um sistema de coordenadas seja síncrono temos de impor a condição

$$g_{0\alpha} = 0 \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (\text{A.7})$$

Notemos também que $\gamma_{\alpha\beta}$ é o tensor métrico 3-dim que determina as propriedades métricas do espaço. Da relação (A.6) e de $g^{ik} g_{kl} = \delta^i_l$ chegamos à relação

$$-g^{\alpha\beta} \gamma_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma \quad (\text{A.8})$$

e assim temos uma maneira natural de definir o tensor métrico espacial contravariante

$$\gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} \quad (\text{A.9})$$

Chamaremos então de referencial sincrônico àquele que satisfizer as condições $g_{00}=1$ e $g_{0\alpha}=0$. (A primeira condição é imposta apenas por conveniência para que x^0 seja o tempo próprio). Estas condições significam também [18] que podemos construir hipersuperfícies 3-dim tais que $x_0 = \text{cte}$ e com as quais todas as geodésicas sejam ortogonais. Pontos distintos sobre as geodésicas são caracterizadas apenas pela coordenada x^0 . Passemos a mostrar estas propriedades. Num referencial síncrono podemos com ajuda de (A.6) escrever o elemento de linha como

$$d^2s = dt^2 - \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad \text{onde} \quad \gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} \quad (\text{A.10})$$

Que as linhas do tempo são geodésicas basta notar que $u^0=1$ $u^\alpha=0$ satisfazem as equações da geodésica. Com efeito

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl} u^k u^l = \Gamma^i_{00} = 0$$

Também é fácil notar que estas geodésicas são ortogonais à hipersuperfície $x^0 = \text{cte}$. Um vetor perpendicular a $x^0 = \text{cte}$ é dado por $n_i = \frac{\partial x^0}{\partial x^i}$. Portanto $n_0 = 1$ e $n_\alpha = 0$. Disto

$$n^0 = g^{0i} n_i = 1 \quad ; \quad n^\alpha = g^{\alpha i} n_i = 0$$

e portanto os vetores ortogonais a $x^0 = cte$ são proporcionais à velocidade u^i .

Definimos a seguir a grandeza

$$H_{\alpha\beta} = \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t} \quad (\text{A.11})$$

que são tensores 3-dim e portanto tem seus índices manipulados pela métrica espacial $\gamma_{\alpha\beta}$ *. Para calcularmos as equações de Einstein num referencial sincrônico basta ter os símbolos de Christoffel e depois calcular o tensor de Ricci. Deve-se ter em mente que os objetos $H_{\alpha\beta}$, $\lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}$ (símbolos de Christoffel calculados a partir da métrica 3-dim $\gamma_{\alpha\beta}$) e $P_{\alpha\beta}$ (tensor de Ricci 3-dim calculado a partir da métrica $\gamma_{\alpha\beta}$) tem seus índices manipulados a partir da métrica espacial $\gamma_{\alpha\beta}$, enquanto que os demais tem seus índices manipulados pela métrica 4-dim g_{ij} .

O tensor de Ricci misto se escreve como segue.

$$R^0_0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial H^{\alpha}_{\alpha}}{\partial t} - \frac{1}{4} H^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}$$

$$R^0_{\alpha} = \frac{1}{2} [H^{\beta}_{\alpha;\beta} - H^{\beta}_{\beta;\alpha}] \quad (\text{A.12})$$

$$R^{\beta}_{\alpha} = -P^{\beta}_{\alpha} - \frac{1}{2} \gamma^{\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma} H_{\alpha}^{\gamma})$$

As equações de Einstein num referencial síncrono e no vácuo $R^i_j = 0$ são escritas então como:

* Uma relação extensivamente usada em cálculos é $H^{\alpha}_{\alpha} = \gamma^{\beta\alpha} \frac{\partial \gamma_{\beta\alpha}}{\partial t} = \frac{\partial \ln \gamma}{\partial t}$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{H}^\alpha}{\partial t} - \frac{1}{4} \mathcal{H}^\alpha{}_\beta \mathcal{H}^\beta{}_\alpha = 0$$

$$\mathcal{H}^\beta{}_{\alpha;\beta} - \mathcal{H}^\beta{}_{\beta;\alpha} = 0$$

$$-P^\beta{}_\alpha - \frac{1}{2\gamma^{1/2}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma} \mathcal{H}^\beta{}_\alpha) = 0$$

(A.13)

Estas equações são o ponto de partida para escrever-se as equações de Einstein em forma de téttrada (veja apêndice B) que é uma maneira conveniente de se introduzir o grupo de isometria do modelo (veja apêndice C).

APÊNDICE B - Representação de Tétrada das Equações de Einstein

A métrica de um espaço pode ser definida como o produto dos vetores de base $e_{(a)} = (e_{(a)}^1, e_{(a)}^2, \dots)$ como mostra do abaixo *

$$e_{(a)}^\alpha e_{(b)\alpha} = \eta_{ab} \quad (\text{B.1})$$

onde impomos que η_{ab} deva ser constante, simétrica e com assinatura $(+, +, +)$. Esta condição é necessária afim de que a variedade 3-dim possa ser localmente aproximada por um espaço euclideano. De maneira natural definimos η^{ab} como sendo as componentes da matriz inversa de η_{ab} .

$$\eta^{ac} \eta_{cb} = \delta^a_b \quad (\text{B.2})$$

Introduzimos um vetor $e_{\alpha}^{(a)}$ dual a $e_{(a)\alpha}$ por

$$e_{\alpha}^{(a)} e_{(b)\alpha} = \delta_b^a \quad (\text{B.3})$$

Multiplicando (B.3) por $e_{(a)}^\beta$ obtemos

$$e_{(a)}^\beta e_{\alpha}^{(a)} = \delta^\beta_\alpha \quad (\text{B.4})$$

* Este tratamento é totalmente geral. Sendo assim os índices as sumirão valores de 1 a 3 ou de 0 a 3 dependendo se estamos interessados em variedades 3-dim ou 4-dim. Para fixar idéias as sumiremos variedades 3-dim. Índices latinos dão o vetor da base e gregos a componente do vetor.

Definimos também de maneira natural

$$e_{\alpha}^{(b)} = \eta^{bc} e_{(c)\alpha} \quad ; \quad e_{(c)\alpha} = \eta_{bc} e_{\alpha}^{(b)} \quad (\text{B.5})$$

$$e_{\alpha}^{(a)} = \gamma_{\alpha\beta} e^{(a)\beta} \quad ; \quad e_{(a)\alpha} = \gamma^{\alpha\beta} e_{(a)\beta} \quad (\text{B.6})$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = e_{\alpha}^{(a)} e_{(a)\beta} \quad (\text{B.7})$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \eta_{ab} e_{\beta}^{(a)} e_{\alpha}^{(b)} \quad (\text{B.8})$$

Como consequência escrevemos o elemento de linhas espacial como

$$d^2l = \gamma_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = \eta_{ab} (e_{\alpha}^{(a)} dx^{\alpha}) (e_{\beta}^{(b)} dx^{\beta}) \quad (\text{B.9})$$

Podemos agora escolher vetores e_a tais que $\eta_{ab} = \delta_{ab}$ no caso de querermos um espaço localmente euclidiano. O elemento de linha é agora caracterizado pela téttrade e_a e não mais pelo tensor $\gamma_{\alpha\beta}$.

Definimos agora o tensor $A_{(a)}$ como sendo a projeção do vetor A_{α} na base e_a e analogamente para tensores de qualquer ordem. Assim

$$(i) \quad A_{(a)} = e_{(a)\alpha}^{\alpha} A_{\alpha}$$

$$(ii) \quad A^{(a)} = e_{\alpha}^{(a)} A^{\alpha} = e_{\alpha}^{(a)} \gamma^{\alpha\beta} e_{\beta}^{(b)} A_{(b)} = \eta^{ab} A_{(b)} \quad (\text{B.10})$$

Introduzimos em seguida duas grandezas que serão úteis posteriormente.

$$\gamma_{abc} = e_{(a)\alpha;\beta} e_{(b)}^{\alpha} e_{(c)}^{\beta} \quad (\text{B.11})$$

$$\lambda_{abc} = \gamma_{abc} - \gamma_{acb} = (e_{(a)\alpha;\beta} - e_{(a)\beta;\alpha}) e_{(b)}^{\alpha} e_{(c)}^{\beta} \quad (\text{B.12})$$

Usando (B.11) é fácil ver que

$$\gamma_{abc} = -\gamma_{bac} \quad (\text{B.13})$$

Usando (B.12) e (B.13) temos que

$$\gamma_{abc} = \frac{1}{2} (\lambda_{abc} + \lambda_{bca} - \lambda_{cab}) \quad (\text{B.14})$$

e que

$$\lambda_{abc} = -\lambda_{acb} \quad (\text{B.15})$$

Usando agora a conhecida definição*

$$A_{\alpha;\beta;\gamma} - A_{\alpha;\gamma;\beta} = A_{\xi} R^{\xi}{}_{\alpha\beta\gamma}$$

com $A_{\alpha} = e_{(a)\alpha}$ temos

$$e_{(a)\alpha;\beta;\gamma} - e_{(a)\alpha;\gamma;\beta} = e_{(a)}^{\xi} R_{\xi\alpha\beta\gamma} \quad (\text{B.16})$$

*Deste ponto até o fim do apêndice suporemos que os índices assumem valores de 0 a 3.

Multiplicando (B.16) por $e_{(b)}^\alpha e_{(c)}^\beta e_{(d)}^\gamma$ e após uma série de manipulações em que se usa (B.13) temos

$$R_{abcd} = \gamma_{abc,d} - \gamma_{abd,c} + \gamma_{abf} (\gamma^f_{cd} - \gamma^f_{dc}) + \gamma_{afc} \gamma^f_{bd} - \gamma_{afd} \gamma^f_{bc} \quad (\text{B.17a})$$

Pode-se agora calcular o tensor de Ricci na representação de téttrada. Para tanto usa-se (B.13), (B.14) e (B.15) em (B.17a).

$$R_{bd} = R^a_{bad} = \frac{1}{2} (\lambda^a_{ba,d} - \lambda^a_{a,b,d} - \lambda_{bd}^a{}_{,a} + \lambda_d^a{}_{b,a} + \lambda^a_{fd} \lambda_{ab}^f + \lambda_{bd}^f \lambda^a_{fa} - \lambda_d^f{}_{b} \lambda^a_{fa} + \lambda^a_{fd} \lambda^f_{ba}) + \frac{1}{4} \lambda_{ba}^f \lambda_d^a{}_{,f}$$

Com um pouco mais de manipulação chegamos a uma forma mais compacta a saber

$$R_{(a);(b)} = -\frac{1}{2} \left[\lambda^c_{cb,a} + \lambda^c_{ca,b} + \lambda_{ab}^c{}_{,c} + \lambda_{ba}^c{}_{,c} + \lambda^{cd}{}_b \lambda_{cda} + \lambda^{cd}{}_b \lambda_{dca} - \frac{1}{2} \lambda_b{}^{cd} \lambda_{acd} + \lambda^c{}_{cd} \lambda_{ab}{}^d - \lambda^c{}_{cd} \lambda_{ba}{}^d \right]$$

(B.17b)

Podemos agora reescrever o tensor de Ricci num referencial síncrono (A.12) na representação de téttrada. Depois de uma série de manipulações obtem-se

$$R^0_0 = -\frac{1}{2} \dot{\mathcal{H}}^{(a)}_{(a)} - \frac{1}{4} \mathcal{H}^{(b)}_{(a)} \mathcal{H}^{(a)}_{(b)}$$

$$R^b_a = -P^{(b)}_{(a)} - \frac{1}{2\sqrt{\eta}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\eta} \mathcal{H}^{(b)}_{(a)})$$

(B.18)

$$R^0_{(a)} = -\frac{1}{2} \mathcal{H}^{(c)}_{(b)} (\lambda^b_{ca} - \delta_a^b \lambda^d_{dc})$$

As equações de Einstein no vácuo, num referencial síncrono e em representação de téttrade são escritas como

$$-\frac{1}{2} \dot{\mathcal{H}}^{(a)}_{(a)} - \frac{1}{4} \mathcal{H}^{(b)}_{(a)} \mathcal{H}^{(a)}_{(b)} = 0$$

$$-P^{(b)}_{(a)} - \frac{1}{2\sqrt{\eta}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\eta} \mathcal{H}^{(b)}_{(a)}) = 0$$

(B.19)

$$-\frac{1}{2} \mathcal{H}^{(c)}_{(b)} (\lambda^b_{ca} - \delta_a^b \lambda^d_{dc}) = 0$$

APÊNDICE C - A Classificação Bianchi

As equações de Einstein do campo gravitacional são, no caso mais geral, um sistema de 10 equações diferenciais não lineares, acopladas, a derivadas parciais o que as torna impraticáveis de serem tratadas sem alguma simplificação. Tais simplificações são em geral introduzidas impondo-se algum tipo de simetria nas equações de campo de tal maneira que a métrica torne-se função de um menor número de variáveis independentes. No problema cosmológico a impossibilidade do tratamento geral das equações de campo é expresso na dificuldade de extrair informações da classe mais geral de modelos cosmológicos que constituem os modelos não-homogêneos. Somos então compelidos ao estudo de modelos espacialmente homogêneos os quais podem ser totalmente classificados como discutiremos a seguir.

Matematicamente dizemos que um modelo cosmológico é espacialmente homogêneo se existir um grupo de isometria 3-dimensional G , atuando sobre a variedade 4-dimensional do espaço tempo M (munida de uma métrica g_{ij} satisfazendo as equações de Einstein), e que gere órbitas tipo espaço. Intuitivamente falando uma isometria é uma transformação que satisfaz a seguinte propriedade: tome sobre a variedade M um ponto P qualquer e um conjunto de pontos próximos arbitrários (Q_1, Q_2, \dots) determine todas as distâncias $d(P, Q_n)$ entre o ponto P e seus vizinhos Q_n . Apliquemos agora

uma transformação contínua que leve os pontos (P, Q_1, Q_2, \dots) nos pontos (P', Q'_1, Q'_2, \dots) . Se esta transformação for uma isometria então $d(P, Q_n) = d(P', Q'_n)$ para todo n . Em resumo, transformações de isometria não alteram as propriedades métricas da variedade. Exigiremos que tratamos com espaços-tempo que admitam referenciais síncronos (vide apêndice A) tal que $g_{0\alpha} = 0$ ($\alpha = 1, 2, 3$) e assim decompos M como um produto cartesiano da parte espacial e da parte temporal $M = R \times \Sigma^3$.

Matematicamente se o sub-espaço 3-dimensional a ceitar uma isometria então será possível encontrar um conjunto de formas diferenciais

$$w^{(a)} = e^{(a)}_{\alpha} dx^{\alpha} \quad (C.1)$$

que seja invariante sob tais transformações, ou seja,

$$w^{(a)}(x) = w^{(a)}(x') \quad (C.2)$$

Os vetores $e^{(a)}$ formam uma téttrada e portanto usaremos extensivamente o formalismo do apêndice B.

Assim classificar todos os modelos espacialmente homogêneos significa determinar quais são todas as variedades 3-dimensionais admitindo uma isometria. Cada tal variedade determinará um possível espaço homogêneo. Usando a base de 1-formas (C.1) e (B.9) escrevemos o elemento de linha espacial como

$$d^2 l = \eta_{ab}(t) w^a(x) w^b(x) \quad *$$

Note que toda a dependência espacial está contida na base de 1-formas. Escrevendo (C.2) com ajuda de (C.1) e multiplicando a igualdade pelo vetor dual $e^n_{(a)}(x')$ chegamos a

$$\frac{\partial x'^m}{\partial x^i} = e^{(a)}_i(x) e^n_{(a)}(x') \quad (C.3)$$

No caso em que

$$x'^m = x^m + \xi^m \quad \text{onde} \quad |\xi^m| \ll 1$$

(C.3) se escreve como

$$\frac{\partial \xi^m}{\partial x^i} = e^{(a)}_i(x) \frac{\partial e^n_{(a)}(x)}{\partial x^k} \xi^k \quad (C.4)$$

chamamos ξ^m de vetor de killing. O conjunto dos três vetores de killing determinará as direções nas quais a transformação infinitesimal de isometria irá deslocar cada ponto da variedade. A condição necessária e suficiente para que uma transformação seja uma isometria é que cada vetor de killing satisfaça a equação de killing

* Obs. todos os índices neste apêndice assumirão valores de 1 a 3.

$$\int m_{;n} + \int n_{;m} = 0 \quad (\text{C.5})$$

Como (C.5) é covariante sua validade geral pode ser mostrada num sistema particular de coordenadas. Então procuramos um sistema de coordenadas no qual

$$f^a = \delta^a_{(k)} \quad (\text{C.6})$$

É fácil entender que neste sistema de coordenadas

$$\frac{\partial g^{mn}}{\partial x^{(k)}} = 0 \quad (\text{C.7})$$

pois na direção da isometria a métrica não se altera. Como consequência disso pode-se calcular que

$$\int m_{;n} = \frac{1}{2} (g_{mk,n} - g_{nk,m}) \quad (\text{C.8})$$

De (C.8) é direto obter-se (C.5). Mas felizmente não precisamos determinar os vetores de killing para classificarmos os diferentes tipos de isometria. Assim lembramos que para (C.3) ser integrável devemos impor

$$\frac{\partial^2 x'^n}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 x'^n}{\partial x^j \partial x^i} \quad (\text{C.9})$$

Com ajuda de (C.3) não é difícil mostrar que (C.9) se escreve

como

$$e_{(c)}^j(x) e_{(d)}^i(x) \left[\frac{\partial e_{(c)}^j(x)}{\partial x^d} - \frac{\partial e_{(d)}^i(x)}{\partial x^c} \right] = e_n^f(x') \left[\frac{\partial e_{(c)}^n(x') e_{(d)}^k(x')}{\partial x'^k} - \frac{\partial e_{(d)}^n(x') e_{(c)}^k(x')}{\partial x'^k} \right]$$

note que no termo esquerdo todas as variáveis são funções de \mathcal{X} e no termo direito todas as variáveis são funções de \mathcal{X}' então concluímos que cada um dos lados é uma constante a saber.

$$C_{dc}^f = e_{(c)}^j(x) e_{(d)}^i(x) \left[\frac{\partial e_{(c)}^j(x)}{\partial x^d} - \frac{\partial e_{(d)}^i(x)}{\partial x^c} \right] \quad (C.10)$$

Podemos identificar as relações (C.10) e (B.12) se lembramos da conhecida relação $A_{i;k} - A_{k;i} = A_{i;k} - A_{k;i}$ sendo assim

$$C_{dc}^f = \lambda_{dc}^f \quad (C.11)$$

Multiplicando (C.10) por $e_{(f)}^k(x)$ e definindo

$$X_a = e_{(a)}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (C.12)$$

obtemos

$$[X_d, X_c] = C_{dc}^f \quad (C.13)$$

e $[,]$ é a operação de comutação usual.

Notamos por (C.13) que a classificação dos espaços homogêneos se resume à procura de todas as álgebras de Lie reais 3-dimensionais. Então com a identificação (C.11) notamos que as constantes de estrutura de cada grupo determinam as equações do modelo cosmológico através das relações (B.18) onde $P_{(a)(b)}$ é calculado através de (B.17). Os operadores X_a por sua vez são os geradores das isometrias. Podemos agora escrever a identidade de Jacobi

$$C^f_{ab} C^d_{cf} + C^f_{bc} C^d_{af} + C^f_{ca} C^d_{bf} = 0 \quad (\text{C.14a})$$

como

$$\epsilon^{abc} C^f_{ab} C^d_{cf} = 0 \quad (\text{C.14b})$$

Note que na expressão (C.14b) temos apenas um índice livre enquanto que na expressão (C.14a) temos 4 índices livres. Devido à antissimetria dos índices inferiores das constantes de estrutura C_{ab}^c , vemos imediatamente em (C.14a) que quando quaisquer 2 índices a, b, c são iguais temos uma identidade trivial, e quando todos são diferentes caímos em (C.14b). Podemos definir as constantes de estrutura de uma maneira mais conveniente através de seu dual a fim de que já englobemos a condição de antissimetria dos índices inferiores das constantes de estrutura.

$$C^{cd} = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} C^d_{ab} \quad (\text{C.15a})$$

e reciprocamente multiplicando (C.15a) por ϵ_{mnc} obtemos

$$C^d_{mn} = \epsilon_{mnc} C^{cd} \quad (\text{C.15b})$$

Note que tanto C^a_{bc} como C^{ab} possuem ambos nove componentes independentes. A identidade de Jacobi pode ser escrita então como

$$\epsilon_{bcd} C^{cd} C^{ba} = 0 \quad (\text{C.16})$$

Decompomos agora as constantes C^{ab} numa parte simétrica η^{ab} e numa parte antisimétrica $\epsilon^{abc} a_c$

$$C^{ab} = \eta^{ab} + \epsilon^{abc} a_c \quad (\text{C.17})$$

onde todos os coeficientes são reais. Levando (C.17) em (C.16) encontramos uma condição sobre as grandezas η^{ab} e a_b

$$\eta^{ab} a_b = 0 \quad (\text{C.18a})$$

ou em forma matricial

$$N_a = 0 \quad (\text{C.18b})$$

Dizemos agora que se mudarmos o conjunto de operadores originais X_a $a=1,2,3$ por outros X'_a que sejam combinações lineares dos primeiros $X'_a = k^b_a X_b$ [19] então as constantes de estrutura se relacionam com as antigas de maneira trivial. Podemos então escolher novos geradores tais que a matriz simétrica n^{ab} seja diagonal e que $\vec{a} = (a, 0, 0)$. Portanto de (C.18) deduzimos a condição

$$n_{1a} = 0 \quad (\text{C.19})$$

Com isto escrevemos (C.17) como

$$C^{ab} = \begin{pmatrix} n_1 & & \\ & n_2 a & \\ & -a & n_3 \end{pmatrix}$$

Note que como a matriz N original é simétrica n_1, n_2, n_3 serão reais além de a evidentemente. Podemos agora calcular as constantes de estrutura (C.15b) para determinar a álgebra (C.13)

$$[X_1, X_2] = -a X_2 + n_3 X_3$$

$$[X_2, X_3] = n_1 X_1$$

$$[X_3, X_1] = n_2 X_2 + a X_3$$

(C.20)

O último passo para a classificação reside em de-

monstrar que para quaisquer valores de $\alpha, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ poderemos sempre fazer com que a álgebra caia em um número finito de álgebras independentes. Para tanto lançaremos mão da última liberdade que ainda resta na definição dos geradores, ou seja, a redefinição de escala. Analisemos então cada caso separadamente tendo em mente que sempre a condição (C.19) deve ser satisfeita.

Nos modelos tipo A a álgebra (C.20) se escreve como

$$\alpha = 0$$

$$[X_1, X_2] = \eta_3 X_3$$

$$[X_2, X_3] = \eta_1 X_1 \quad (\text{C.21a})$$

$$[X_3, X_1] = \eta_2 X_2$$

no caso $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \neq 0$ usamos a seguinte redefinição de escala

$$X_1 = \sqrt{|\eta_2 \eta_3|} X_1' \quad ; \quad X_2 = \sqrt{|\eta_1 \eta_3|} X_2' \quad ; \quad X_3 = \sqrt{|\eta_1 \eta_2|} X_3'$$

e então podemos reescrever (C.21a) como

$$[X_1', X_2'] = \frac{\eta_3}{|\eta_3|} X_3' \quad ; \quad [X_2', X_3'] = \frac{\eta_1}{|\eta_1|} X_1' \quad ; \quad [X_3', X_1'] = \frac{\eta_2}{|\eta_2|} X_2'$$

assim no caso $\alpha = 0$ e $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \neq 0$ sempre podemos fazê-la cair numa das seguintes álgebras

Open only in subdued light
Nur in gedämpften Licht öffnen
A n'ouvrir qu'en lumière atténuée
Slechts in gedempt licht openen
Cargar bajo luz tenue



Max
21°C
70°F
RH 50%



De produkt zal worden ver-
vangen indien het label onge-
houden vertoont, verward
verpakt of getransporteerd werd.
Een ruime aansprakelijk-
heid kan niet worden
aanvaard, behalve in geval
van opzet of grove
negligentie onderzids.

De produit sera remplacé s'il
présente des défauts de la-
brication ou de conditionne-
ment (unballage ou étiquet-
tage détachés). Nous ne
pouvons assumer une plus
large responsabilité, sauf en
cas de dol ou de négligence
grave de notre part.

This product will be replaced
if defective in manufacture,
labeling or packaging.
Except for such replacement,
this product is sold without
warranty of fitness, unless
made to gross negligence
on our part is involved.

Dieses Produkt wird, falls es
fehlerhaft hergestellt,
verpackt oder beschriebener
weird, durch Ersatz
ersetzt. Weitere Ansprüche
sind - außer bei Vorsatz oder
grobe Fahrlässigkeit
unsererseits - ausgeschlossen.

De determinarea defectelor în
acest produs este în sarcina
fabricatorului. Acesta nu
asumă nici o altă
responsabilitate decât cea
prevăzută în prezentul
text.

IMAGELINK

16 mm x 66 m 215 ft

EI MSP

RA

RA Microfilm 06

Batch No.: 39550208

Exp. dat. 2017-04

CAT 334NXDM

EPM

Made in Belgium
EASTMAN PARK MICROGRAPHICS, INC.
Rochester, NY 14652-6621

LE 500 RATED MEDIA

Eastman Park Micrographics, Inc.
Imagelink® © Eastman Park Micrographics, 2012

$$[X'_1, X'_2] = \pm X'_3 ; [X'_2, X'_3] = \pm X'_1 ; [X'_3, X'_1] = \pm X'_2$$

comparando com (C.20) notamos que $a=0, n_1=\pm 1, n_2=\pm 1, n_3=\pm 1$ e tais álgebras caracterizam os modelos Bianchi IX e Bianchi VIII da tabela III. Note que o caso $(n_1=n_2=n_3=-1)$ pode ser levado no tipo IX pela mudança $X_a \rightarrow -X_a$ $a=1,2,3$ e que sempre os demais conjuntos de n_i com 2 sinais iguais e um diferente recai no caso VIII.

No caso $n_c=0; n_b, n_a \neq 0$ $a,b,c=1\text{ ou }2\text{ ou }3$ a álgebra (C.20) fica escrita como

$$[X_a, X_b] = 0$$

$$[X_b, X_c] = n_a X_a$$

$$[X_c, X_a] = n_b X_b$$

(C.21b)

onde a,b,c podem assumir respectivamente qualquer permutação cíclica de $1,2,3$ usamos agora a seguinte redefinição de escala

$$X_a = \sqrt{|n_b|} X'_a \quad X_b = \sqrt{|n_a|} X'_b \quad X_c = \sqrt{|n_a||n_b|} X'_c$$

então (C.21b) se escreve como

$$[X'_a, X'_b] = 0 \quad [X'_b, X'_c] = \frac{n_a}{|n_a|} X'_a = \pm X'_a \quad [X'_c, X'_a] = \frac{n_b}{|n_b|} X'_b = \pm X'_b$$

tais álgebras caracterizam os modelos Bianchi VII₀ e VI₀ que

podem ser verificados na tabela III. Note que os casos $n_1 = -1$, $n_2 = -1$ e $n_1 = -1$, $n_2 = +1$ podem ser levados respectivamente nos tipos VII₀ e VI₀.

O caso $n_b = n_c = 0$ e $n_a \neq 0$ levam a álgebra (C.21a) a ser escrita como

$$\begin{aligned} [X_a, X_b] &= 0 \\ [X_b, X_c] &= n_a X_a \\ [X_c, X_a] &= 0 \end{aligned} \tag{C.21c}$$

Fazendo a mudança de escala $X_b = n_a X'_b$ temos

$$[X_a, X'_b] = 0 \quad [X'_b, X_c] = X_a \quad [X_c, X_a] = 0$$

que comparando com (C.20) nos dá $n_a = 1$, $n_b = n_c = 0$, $\alpha = 0$ e corresponde ao modelo Bianchi II. Para finalizar os modelos tipo A temos o caso $n_1 = n_2 = n_3 = 0$, $\alpha = 0$ que corresponde ao modelo de Bianchi I.

Para os modelos tipo B temos $\alpha \neq 0$ e então satisfaremos a condição (C.19) impondo $n_1 = 0$. A álgebra (C.20) se escreve então como

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= -\alpha X_2 + n_3 X_3 \\ [X_2, X_3] &= 0 \\ [X_3, X_1] &= n_2 X_2 + \alpha X_3 \end{aligned} \tag{C.22}$$

Comecemos com o caso $\eta_2=0$ $\eta_3 \neq 0$ então (C.22) se escreve como

$$[X_1, X_2] = -aX_2 + \eta_3 X_3$$

$$[X_2, X_3] = 0$$

$$[X_3, X_1] = aX_3$$

(C.22a)

Fazemos em (C.22a) a mudança de escala $X_1 = aX_1'$; $X_2 = \frac{\eta_3}{a}X_2'$ para obtermos

$$[X_1', X_2'] = -X_2' + X_3'$$

$$[X_2', X_3'] = 0$$

$$[X_3', X_1'] = X_3'$$

que corresponde ao modelo Bianchi IV. O caso $\eta_2 \neq 0, \eta_3 = 0$ é totalmente simétrico fazendo-se $X_3 \rightarrow -X_3$; $X_1 \rightarrow -X_1$ ao acima e recai no mesmo modelo.

No caso $a \neq 0$, $\eta_2 = 0$, $\eta_3 = 0$ escrevemos (C.22) como

$$[X_1, X_2] = -aX_2$$

$$[X_2, X_3] = 0$$

$$[X_3, X_1] = aX_3$$

(C.22b)

e com a transformação $X_1 = aX_1'$ obtemos

$$[X_1', X_2] = -X_2$$

$$[X_2, X_3] = 0$$

$$[X_3, X_1'] = X_3$$

que corresponde ao modelo Bianchi V..

Resta-nos a análise do caso $n_1=0$ $n_2, n_3 \neq 0$ fazendo em (C.22) uma mudança de escala do tipo

$$X_1 = \sqrt{|n_2 n_3|} X_1'$$

$$X_2 = \sqrt{|n_3|} X_2'$$

$$X_3 = \sqrt{|n_2|} X_3'$$

obtemos a álgebra

$$[X_1', X_2'] = -A X_2' + \frac{n_3}{|n_3|} X_3'$$

$$[X_3', X_1'] = \frac{n_2}{|n_2|} X_2' + A X_3'$$

$$[X_2', X_3'] = 0$$

onde

$$A = \frac{a}{\sqrt{|n_2| |n_3|}}$$

o que nos dá os modelos Bianchi VII, Bianchi III e Bianchi VI*. Note que no caso de $n_2 = -1$ e $n_3 = -1$ podemos fazê-lo cair no tipo III com a troca $X_2 \rightarrow -X_2$ e o caso $n_2 = -1$

*A divisão dos modelos Bianchi III e VI é tradicional.

$\pi_3 = 1$ recai nos tipos III ou VI bastando-se fazer $X_3 \rightarrow -X_3$.

Em suma, qualquer álgebra de Lie real 3-dimensional após uma redefinição conveniente de seus geradores tem sua álgebra associada a um dos casos catalogados na tabela III. Em outras palavras, esta tabela exprime a álgebra de todos os possíveis grupos de isometria que um espaço 3-dim pode aceitar. Dos 3-espacos acima catalogados destacaremos 2 deles pela importância que adquirem em nosso estudo. O primeiro deles é o modelo Bianchi I que dá origem ao Universo Kasner e além de ser o mais simples (grupo abeliano das translações), aproxima um dos regimes de comportamento próximo da singularidade do modelo Bianchi IX. A álgebra do modelo Bianchi IX por sua vez é isomorfa ao do grupo $SO(3, \mathbb{R})$. O modelo F.R.W. fechado é um caso especial do modelo Bianchi IX e assim não é difícil imaginar que o modelo F.R.W. que tão bem se adapta às observações atuais pudesse ser uma evolução do modelo Bianchi IX. Em um modelo espacialmente homogêneo o espaço-tempo é "preenchido" com hipersuperfícies 3-dim $H(t)$. A homogeneidade espacial significa que sobre cada $H(t_0)$ a métrica não muda. À medida que t cresce $H(t)$ evolui no tempo. O fato de o grupo de movimentos do modelo Bianchi IX ser o $SO(3, \mathbb{R})$ indica que estas hipersuperfícies $H(t)$ são esferas S^3 . (veja [20] para uma discussão mais aprofundada).

Com estes três apêndices podemos indicar como se demonstram as importantes equações de campo do modelo IX (1) da referência [13]. Toma-se inicialmente as constantes de estrutura do modelo em questão (vide tabela III e relação (C.17)).

e pela identificação (C.11) determinamos os símbolos λ^a_{bc} .
 A seguir basta introduzi-los nas equações de Einstein (B.19)
 e levar em conta que a métrica é suposta em nosso caso diago-
 nal. A tarefa é trabalhosa mas direta.

tabela III

	Modelos Bianchi	a	n_1	n_2	n_3
T I P O A	IX	0	1	1	1
	VIII	0	1	1	-1
	VII ₀	0	1	1	0
	VI ₀	0	1	-1	0
	II	0	1	0	0
	I	0	0	0	0
T I P O B	IV	1	0	0	1
	V	1	0	0	0
	III	1	0	1	1
	VII	$a+1$	0	1	1
	VI	a	0	1	-1

REFERÊNCIAS

- [1] H. Bondi - cosmologia - editorial Labor
- [2] G. F. R. Ellis - Cosmology and Verifiability - Q. J. R. astr. Soc. (1975), 16, 245-264.
- [3] G. F. R. Ellis and G. Schreiber - Observational and Dynamical Properties of Small Universes - Phys. Lett. A (1986) Vol. 115, nº 3, 97.
- [4] G. F. R. Ellis - The Homogeneity of the Universe - G. R. G. Vol. 11, nº 4, (1979).
- [5] L. Landau, E. Lifshitz - Teoria do Campo (1980) MIR
- [6] Bogoyavlenskii, O. I. - Methods of Qualitative Theory of Dynamical Systems in Astrophysics and gas Dynamics, Mosc, Nauka, (1980).
- [7] Bogoyavlenskii, O. I. - Methods of Qualitative Theory of Dynamical Systems in Problems of Theoretical Physics Math. Phys. Rev. - Soviet Sc. Rev., Sect. C, Vol. 2 (1981) - 117 - 164.
- [8] E. M. Lifshitz and I. M. Khalatnikov (1963). Adv. Phys., 12, 185.
- [9] V. A. Belinskii, I. M. Khalatnikov, E. M. Lifshitz (1970) adv. Phys., 19, 525.
- [10] V. A. Belinskii, I. M. Khalatnikov, E. M. Lifshitz (1982) adv. Phys., 31, 639.
- [11] M. P. Ryan - Hamiltonian Cosmology (Springer Verlag, 1972).
- [12] J. D. Barrow - Chaotic Behaviour in General Relativity Phys. Rep. 85, nº 1, 1982, 1-49.

- [13] G. Francisco, G. E. A. Matsas - Qualitative and Numerical Study of Bianchi IX Models - Preprint-IFT-24/87.
- [14] S. Smale; M. Hirsh - Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra - Academic Press (1974).
- [15] J. Sotomayor - Lições de Equações diferenciais ordinárias - Livros técnicos e científicos editora (1979).
- [16] J. P. Eckmann, D. Ruelle - Ergodic theory chaos and strange attractors Rev. Mod. Phys. Vol. 57, nº 3, Part. I, July 1985.
- [17] T. M. Mello and N. B. Tufillaro - Strange attractor of a bouncing ball - Am. J. Phys. 55(4), April 1987.
- [18] R. Adler, M. Bazin and M. Schiffer - Introd. to Gen. Relativity - McGraw - Hill Book Company.
- [19] B. G. Wybourne - Classical Groups for Physicists - Wiley - Interscience publication.
- [20] M. P. Ryan and L. C. Shepley - Homogeneous Relativistic Cosmologies - Princeton University Press.
- [21] Hao Bai-Lin - Chaos - World Scientific.
- [22] R. M. Wald - General Relativity - The University of Chicago Press.
- [23] V. L. Ginsburg - Key Problems of Physics and Astrophysics - MIR Publisher Moscow.
- [24] J. Rosen "When did the Universe Begin?" Am. J. Phys. 55 (6) June 1987 pg. 498.
- [25] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler 1973, Gravitation (San Francisco - Freeman).

[26] Barrow, Stein Schabes, preprint the Kasner Universe and Padé approximation.

QUALITATIVE AND NUMERICAL STUDY OF
BIANCHI IX MODELS

G. Francisco and G. E. A. Matsas
Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista
Rua Pamplona 145
01405 - São Paulo, SP - Brazil

ABSTRACT

The continuous evolution of the Mixmaster universe towards the cosmological singularity contains features that differ substantially from its discrete counterpart. We examine here the determination and interpretation of the Liapunov exponent of the continuous orbit. It is briefly mentioned that this is not the only aspect of the Mixmaster dynamics to be affected when we switch from continuous to discrete mode of evolution.

INTRODUCTION

In the work of Misner [1] and Belinskii, Khalatnikov and Lifshitz [2-4] the phenomenon of stochasticity was for the first time detected in Einstein's equations. The homogeneous Bianchi IX model, or its diagonal version called Mixmaster universe, were the prime example of chaoticity. Several subsequent studies were made on the consequences of the chaotic behaviour in general relativity ([5] and references therein, [6], [7]).

The parameters that characterize chaotic motion in dynamical systems theory are the Liapunov exponents (L.E.). When the Mixmaster universe evolves towards the cosmological singularity it approaches an attractor that contains three circles of unstable equilibrium points [8-10] and thus only one L.E. is usually considered when describing its chaotic properties. The discretization of the model refers to finding an approximation to the continuous orbit in terms of a sequence of points defined on these circles. The transitions on the circles can be concisely described by iterations of a map on only one circle, the Poincaré map. Using numerical simulation we find that the L.E. λ_t computed directly from the differential equations is not a fixed stable value as opposed to the exponent λ_p computed from the Poincaré map. Other substantial differences are likely to be found when we switch from continuous to discrete evolution on the circles because one has to neglect not only the time between iterations of the Poincaré map but also what happens during the iteration.

2. CONTINUOUS/DISCRETE EVOLUTION AND LIAPUNOV EXPONENTS

The evolution Einstein's equations can be expressed in terms of three spatial scales $(g_{ij}) = \text{diag}(a^2, b^2, c^2)$ that define the geometrical properties of the model [1; 3-4; 12] : $(\ln a^2)' = (b^2 - c^2)^2 - a^4$, and cyclic permutations. Here the prime denotes $\partial_\tau = abc \partial_t$ with t the proper time. In order to conveniently study the evolution we introduce the following first order system

$$\begin{aligned} x' &= (b^2 - c^2)^2 - a^4 & a' &= ax/2 \\ y' &= (a^2 - c^2)^2 - b^4 & b' &= by/2 \\ z' &= (a^2 - b^2)^2 - c^4 & c' &= cz/2. \end{aligned} \tag{1}$$

When dealing with (1) a constraint equation must be considered

$$xy + xz + yz + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 0. \tag{2}$$

Whenever the initial conditions satisfy (2) then such relation is preserved during the evolution (see Zardecki [7] for a presentation of different kinds of initial conditions for this model).

Our simulation used Hamming predictor-corrector algorithm together with a 4th-order Runge-Kutta as a starter

[7,13]. Several sets of initial conditions were run on a VAX 11/780 and on a PC equipped with a floating-point coprocessor, giving the same qualitative results. The system was iterated typically $2 \cdot 10^5$ times with a time step of roughly 5×10^{-4} (double precision always). Kasner initial conditions at $\tau = \tau_0$ were imposed

$$a = \exp(\tau_0 p_1), \quad b = \exp(\tau_0 p_2), \quad c = \exp(\tau_0 p_3) \quad (3)$$

where p_i satisfy $\sum p_i = 1 = \sum p_i^2$ and can be expressed in terms of a single parameter, the Kasner parameter, as $p_1 = -u/f(u)$, $p_2 = (1+u)/f(u)$, $p_3 = u(1+u)/f(u)$, with $f(u) = 1+u+u^2$ and $u > 0$. Clearly u is defined on the circle determined by p_i and using a convenient parametrization of phase space Bogogavlenskii and Novikov [8-10] have shown that this circle can be expressed in terms of the field variables as a set of unstable equilibrium points.

In FIG. 1 we see a complicated pattern of oscillations which is found in all simulations of type IX models. As $\tau \rightarrow -\infty$ [NOTE 1] each oscillation can always be approximated by a Kasner configuration (3) for some $u > 0$. The motion is coded [1; 3-6; 12] into a sequence that define the transitions of the parameter u during the evolution. Only a subset $\{x_n\}$ of transitions, called bounce transitions, are responsible for the chaotic aspects of the model and the Poincaré map is defined [5,6] as $x_{n+1} = T x_n$ where $0 < x_n < 1$ and

$$T x_n = \frac{1}{x_n} - \left[\frac{1}{x_n} \right], [u] = \text{integer part of } u. \quad (4)$$

The discrete orbit $\{T^n x\}$ can now be studied using well known methods. One can find a measure preserved by T and compute its Liapunov exponent $\lambda_p = \pi^2/6(\ln 2)^2$ (see Barrow [5]). This exponent measures the average rate of exponential separation between nearby orbits. Whenever the L.E. is positive the system is called chaotic [15-17]. On the other hand we have the true orbit evolving continuously in phase space. Our algorithm for finding the L.E. directly from the differential equations followed the prescription given by Benettin et al [16] (see NOTE 2). Since the configuration space is 6-dimensional we could, in principle, find six L.E.s. Special care must be taken in the determination of the smaller exponents since any fluctuation (e.g. round-off errors) will be exponentially amplified and divergence will point to the direction of the maximal exponent [15]. Thus the maximal L.E. is highly stable under any perturbation and the method in [16] can be confidently implemented (we tested our algorithm against well know systems: for the Lorenz attractor Shaw's result [11] was recovered to within 2%). It is shown in FIG. 2 a simulation in which we can identify the stabilization value $\bar{\lambda}_t \sim 0.44$ which starts at the stabilization time $\bar{\tau} \sim 56$. We see that $\bar{\lambda}_t$ cannot be taken as the average rate of divergence since this value varies along the motion. At $\tau \sim 406$ the decay of $\bar{\lambda}_t$ represented nearly 30% of the initial stabilization value.

This behaviour in λ_t could have been anticipated from a formula derived by Shaw [11] in which use has to be made of the Poincaré map. On the discrete orbit $\{T^n x\}$ the time associated to the n-th iteration can be estimated as [18] $\tau_n \sim -e^n$. Clearly the amount of time elapsed between successive iterations $\theta(x_n) \sim |\Delta \tau_n|$ becomes unbounded as $n \rightarrow \infty$. Then the expression [11]

$$\lambda_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\ln |T'(x_i)|}{\theta(x_i)} \quad (5)$$

readily indicates that decreasing stabilization values should be observed when determining the L.E. Note that $\theta(x_n)$ is a well defined function on the discrete orbit amenable to computation from (1). We used (1) directly in our simulations instead of (5) because it involves the discrete evolution operator.

Our results can be summarized as follows. Whenever the system reaches a stabilization value it subsequently decreases to a lower value. In addition to FIG. 2 we see this behaviour in FIG. 3 where $u \sim 2.98$. The origin of this effect can be traced back to the long Kasner eras [12] responsible for the chaotic behaviour of the model: a long time is spent between successive contributions to λ_t as $\tau \rightarrow -\infty$. Similarly, in Misner's [1] approach, the system is described by a point bouncing inside an expanding triangular wall and the effective diversions of the orbit take longer and longer to occur.

Another effect that we observed is related to the Kasner conditions (3). Moving the initial conditions towards the singularity (i.e. increasing $|Z_0|$) the deviation of the trajectory will be more pronounced and the contribution to the initial stabilization value increases. The reason for this behaviour, shown in FIG. 4, should be clear: Kasner configurations represent only approximations that are recurrently visited by the true orbit. They are nevertheless useful approximations because a simple expression (3) can be found for them in the region where the r.h.s. of (1) is negligible. In any case we can always obtain a meaningful estimate of the average rate at which orbits diverge. The exponent λ_p plays no role either here or in any simulation of the true orbit evolving continuously in phase space.

3. DISCUSSION

Misner's representation of the Mixmaster model relies on the hard-wall approximation. If we suppose for a moment that such approximation is exact then the inevitable conclusion is that, for the continuous orbit, λ_t must show a steady decrease to very small values (note that $\lambda_t > 0$ always since the system is chaotic). This occurs because in this case the bounce against the wall is assumed to be instantaneous and the time between effective collisions contributing to λ_t tends to become unbounded. In the Bogoyavlenskii-Novikov method the structure of the bounce cannot be neglected (see below) and they offer a better setting for evaluating the time spent during the shift of Kasner eras than the hard-wall approximation. This might provide a mechanism that prevents λ_t from tending to zero as $\tau \rightarrow -\infty$. In any case the numerical simulations contained here reveal that the value of λ_t cannot be inferred from the stabilization value as opposed to the usual systems studied by physicists. Such behaviour is mainly due to the fact that the model possesses a time-dependent Hamiltonian and consequently its canonical representation is not described by an autonomous set of differential equations. This points out to the existence of a large class of systems, that could be rightfully called "expanding-wall billiards", where the notion of Liapunov exponent must be carefully examined.

We have seen that the simulation of the differential equations defining the Mixmaster dynamics contains features not

found in the usual discretization given in terms of the Kasner parameter. Although several reasons can be put forward in favor of the usefulness and simplicity of the discrete orbit $\{T^n x\}$ there is another instance in which such treatment does not give a complete understanding of the model. This refers to the fact that in the canonical formalism developed by Misner [1] the system has two degrees of freedom while the discrete orbit is completely specified by only one parameter. Since the true orbit is well approximated by the discrete one during the Kasner stages there is no other place to look for any new effect but to enquire what happens during the transitions. The current belief that the replacement of Kasner configurations is brief finds no confirmation in the Bogoyavlenskii and Novikov approach (during the Kasner stages their time scale coincides with the one used here). One can prove that the bounce transition is described in terms of a separatrix that can be explicitly calculated. The point is that the time an orbit spends close to separatrices as $\tau \rightarrow -\infty$ cannot be negligible (the bounce separatrix must necessarily be visited by the orbit since it belongs to an attractor). Thus it is an oversimplification to believe that the precise structure of the bounce can be neglected in the continuous evolution and this might throw additional light into the contents of this paper. A full discussion of these topics is the subject of an on going investigation where we intend to show that the bounce separatrix contains two parameters for its specification and that they can be directly related to Misner's pair of canonical momenta for the Mixmaster model.

ACKNOWLEDGEMENTS

We would like to acknowledge financial support from FINEP, CNPq (G.F.) and FAPESP (G.M.).

REFERENCES

1. Misner, C. (1969) Phys. Rev., 186, 1319.
2. Lifshitz, E. M. and Khalatnikov, I. M. (1963). Adv. Phys., 12, 185.
3. Belinskii, V. A., Khalatnikov, I. M. and Lifshitz, E. M. (1970). Adv. Phys., 19, 525.
4. Belinskii, V. A., Khalatnikov, I. M. and Lifshitz, E. M. (1982). Adv. Phys., 31, 639.
5. Barrow, J. D. (1982) Phys. Rep. 85, 1.
6. Barrow, J. D. and Chernoff, D. F. (1983) Phys. Rev. Lett. 50, 134.
7. Zardecki, A. (1983) Phys. Rev. D28, 1235.
8. Bogoyavlenskii, O. I. and Novikov, S. P. (1973) Sov., Phys. JETP, 37, 747.
9. Bogoyavlenskii, O. I. and Novikov, S. P. (1982) Sel. Math. Sov. 2, 159.
10. Bogoyavlenskii, O. I. Qualitative Theory of Dynamical Systems in Astrophysics and Gas Dynamics (Springer Verlag, Berlin, 1985).
11. Shaw, R. (1981) Z. Naturforsch. 36a, 80-112.
12. Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. The Classical Theory of Fields (Pergamon Press, Oxford, 1975).

13. Carnahan, B., Luther, H. A. and Wilkes, J. O., Applied Numerical Methods (Willey, N. Y., 1969).
14. Billingsley, P. Probability and Measure, John Willey Inc., New York, 1986.
15. Eckmann, J. P. and Ruelle, D. (1985) Rev. Mod. Phys., 57, 617.
16. Benettin, G., Galgani, L. and Strelcyn, J. M. (1976) Phys. Rev. A14, 2338.
17. Shimada, I. and Nagashima, T. (1979) Prog. Theor. Phys., 61, 1605.
18. Lifshitz, E. M. and Khalatnikov, I. M. (1964) Sov. Phys. Usp. 6, 495; (1971), 13, 745.

NOTE 1 (p. 3): As $\mathcal{E} \rightarrow -\infty$ a contraction of space will be observed since $abc \rightarrow 0$.

NOTE 2 (p. 4): Benettin et al [16] have suggested an operational definition of the L.E.:

$$\lambda_t = \frac{1}{N \Delta \mathcal{E}} \sum_{n=1}^N \ln \frac{\|D_n^x v_n\|}{\|v_n\|}$$

with $\|v_n\| \ll 1$, $N \gg 1$. Here x is an initial condition and the separation v_1 between nearby orbits is evolved to $D_x^1 v_1$ during $\Delta \mathcal{E}$ (around .2 in our simulations). Then the first term of the summation can be calculated. The second one is computed similarly by choosing a vector v_2 , with $\|v_2\| = \|v_1\|$, along the direction of $D_x^1 v_1$, and so on. These successive redefinitions avoid overflow due to exponential divergence of orbits.

FIGURE CAPTIONS

FIG. 1: Evolution of the components $x = \ln a^2$, $y = \ln b^2$, $z = \ln c^2$, from Kasner initial condition $u = 8\pi$, $\tau_0 = -6$. We show the portion between $\tau = -66$ and $\tau = -126$. At $\tau = -117$ we see the beginning of a long Kasner era.

Fig. 2: Liapunov exponent for a pair of trajectories given by initial conditions $u_1 = 8\pi$, $u_2 = 8\pi + 0.001$. After stabilization around $\bar{\lambda}_t \sim 0.44$ the exponent drops to a lower value. A stabilization time $\tau \sim -56$ can be naturally defined from this figure.

FIG. 3: Liapunov exponent for a trajectory with $u \sim 2.98$ (Kasner initial conditions from Zardecki [7]: $a(\tau_0) = 1.8541$, $b(\tau_0) = 0.4385$, $c(\tau_0) = 0.0854$; $a'(\tau_0) = -0.4292$, $b'(\tau_0) = 0.1355$, $c'(\tau_0) = 0.0788$; $\tau_0 = -2.6670$).

FIG. 4: Liapunov exponent as a function of the initial time τ_0 (in FIG. 2, $\tau_0 = -6$). Here λ_t refers to stabilization values of orbits with $u = 8\pi$.

FIG. 1

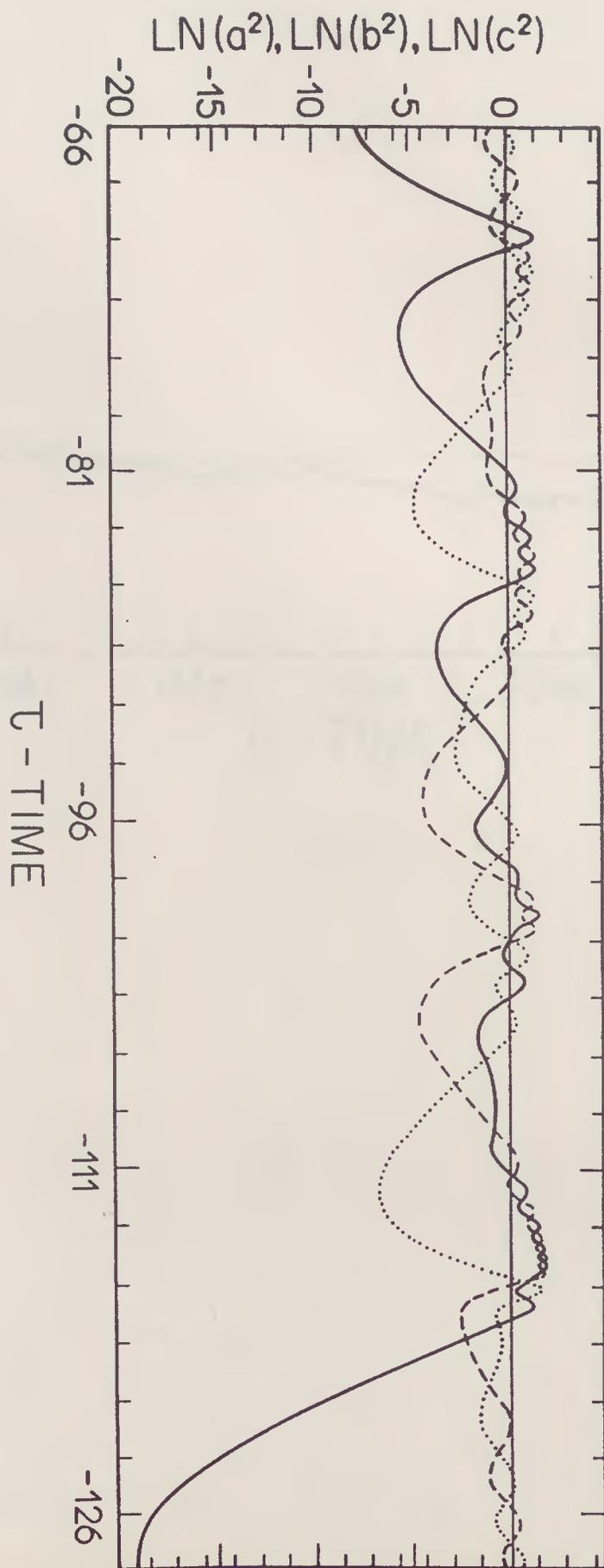


FIG. 2

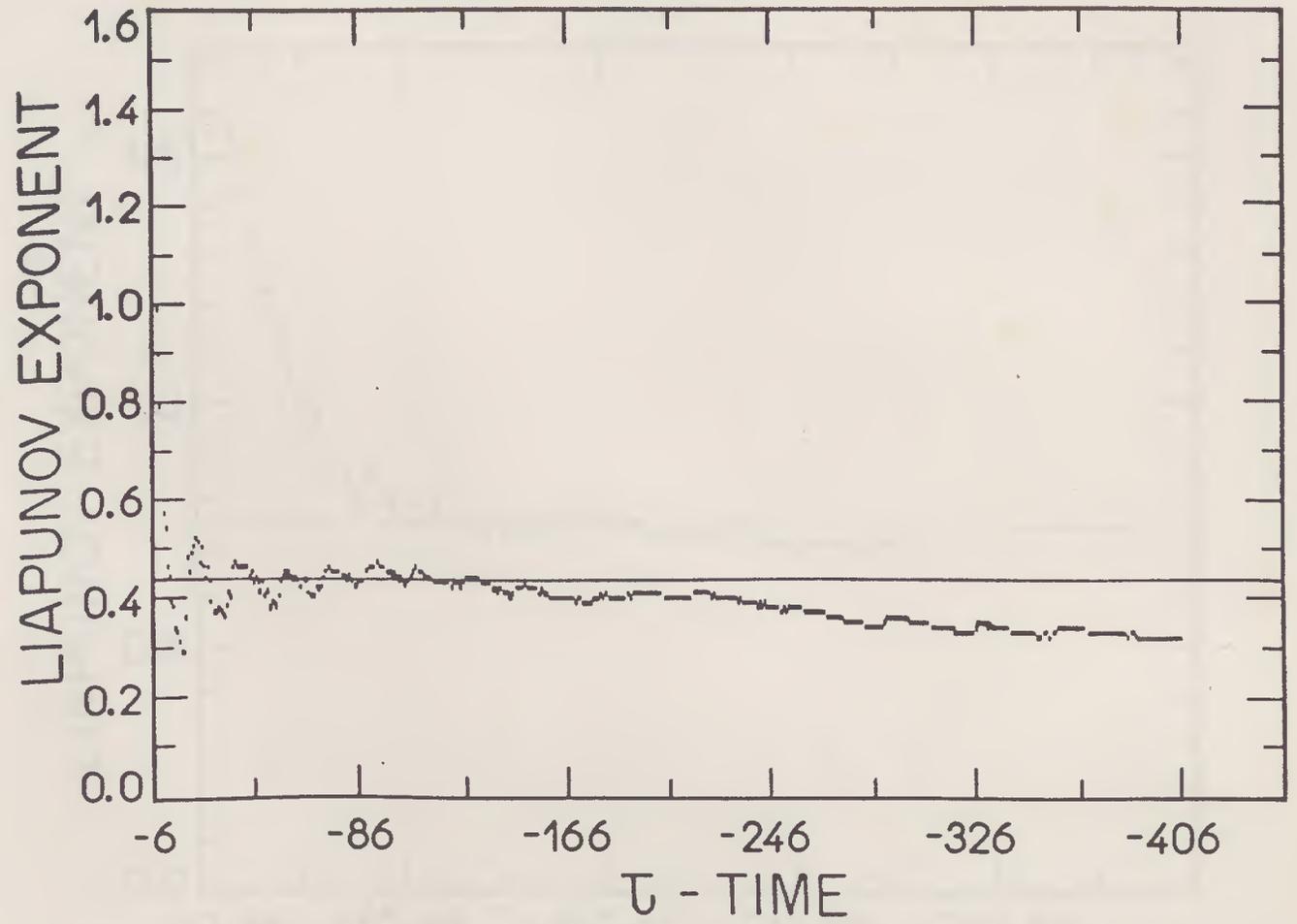


FIG. 3

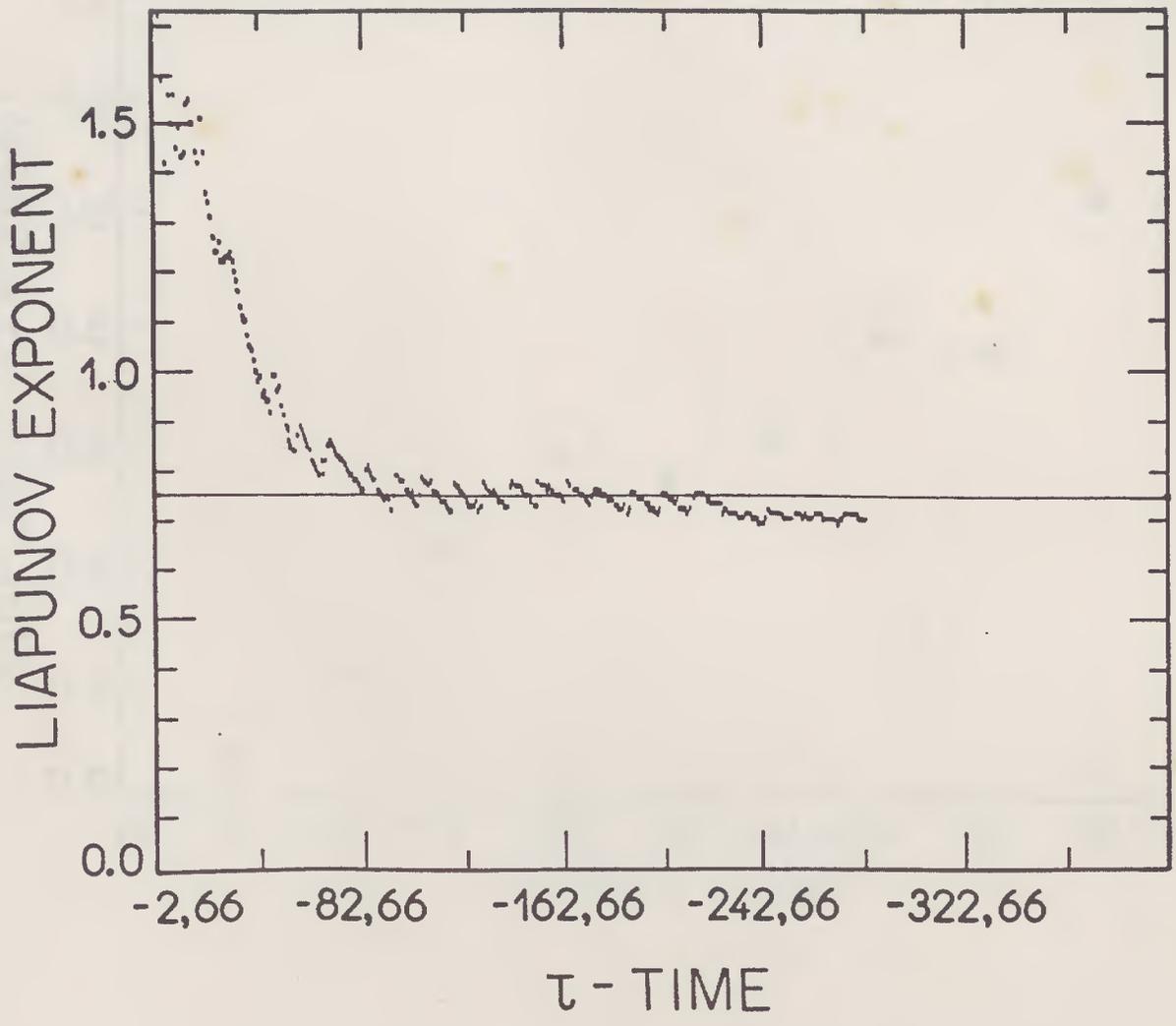


FIG. 4

