



Governo do Estado de São Paulo
Universidade Estadual Paulista

FACULDADE DE ENGENHARIA DO CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

*Dinâmica de uma Partícula
Coorbital a um Sistema de
Satélites*

PRISCILA ALVES DA SILVA

GUARATINGUETÁ – SP

BRASIL

PRISCILA ALVES DA SILVA

DINÂMICA DE UMA PARTÍCULA COORBITAL A UM SISTEMA DE
SATÉLITES

Dissertação apresentada à Faculdade
de Engenharia do Campus de
Guaratinguetá, Universidade
Estadual Paulista, para a obtenção
do título de Mestre em Física.

Orientadora: Prof^a. Dra. Silvia Maria Giuliatti Winter

Guaratinguetá

2003

DADOS CURRICULARES

PRISCILA ALVES DA SILVA

NASCIMENTO	16.11.1977 – LORENA / SP
FILIAÇÃO	Aloísio Alves da silva Lourdes Caetano da Cruz Silva
1996/2000	Curso de Graduação Universidade Estadual Paulista – FEG – Campus de Guaratinguetá
2001/2003	Curso de Pós-Graduação em Física, nível de Mestrado, na Universidade Estadual Paulista – FEG – Campus de Guaratinguetá

de modo especial, à minha Mãe meu Pai meus irmãos e amigos
que me amam e a uma grande amiga Sandra que mostrou quão
bela e divertida é a vida.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que me deu em primeiro lugar o dom da vida, que me fez Sua imagem e semelhança e que colocou em minha vida pessoas maravilhosas como meus Pais, amigos e amigas e a Professora Silvia, que foi mais do que uma orientadora foi uma amiga que me ajudou e me agüentou muito durante muitos anos.

Agradeço também a todos os professores e colegas que me estimularam e colaboram com o meu trabalho.

Este trabalho contou com apoio das seguintes entidades:

- CAPES – pelo período de 01/03/2001 à 01/04/2001
- FAPESP – através do contrato nº 84/2194-2 pelo período de 02/04/2001 à 28/02/2003

“Eles partiram por outros assuntos, muitos
Mas no meu canto estarão sempre juntos, muito
Qualquer maneira que eu cante esse canto
Qualquer maneira me vale cantar
Eles se amam de qualquer maneira, a vera
Eles se amam é e pra vida inteira, a vera
Qualquer maneira de amor vale o canto
Qualquer maneira me vale cantar
Qualquer maneira de amor vale aquela
Qualquer maneira de amor valerá”.

Milton Nascimento

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	31
1.1 INTRODUÇÃO	31
CAPÍTULO 2 MECANISMO DE CONFINAMENTO	35
2.1 PROBLEMA CIRCULAR RESTRITO PLANAR DE TRÊS CORPOS	35
2.1.1 Introdução	35
2.1.2 Equações do movimento	35
2.1.3 A Integral de Jacobi	37
2.1.4 Localização dos pontos de equilíbrio	39
2.2 TIPOS DE CONFINAMENTO	41
2.2.1 Órbitas de girino e ferradura	42
2.2.2 Órbitas de ferradura e girino e as curvas de velocidade zero	45
CAPÍTULO 3 DINÂMICA QUE ENVOLVE MÚLTIPLOS SATÉLITES COORBITAIS	51
3.1 INTRODUÇÃO	51
3.2 AS EQUAÇÕES DINÂMICAS SIMPLIFICADAS	52
3.3 CONFIGURAÇÕES ESTACIONÁRIAS	62
3.4 SIMULAÇÕES PARA SATÉLITES COM MASSAS IGUAIS	66
CAPÍTULO 4 SIMULAÇÃO NUMÉRICA E RESULTADOS	70
4.1 INTRODUÇÃO	70
4.2 SATÉLITES DE MESMA MASSA POR UM PERÍODO DE INTEGRAÇÃO DE 500 ANOS	71
4.2.1 Comportamento dos satélites	72
4.2.2 Comportamento das partículas para o caso circular	74
4.2.3 Comportamento da partícula em órbita excêntrica	77
4.2.4 Comportamento da partícula para satélites em órbitas excêntricas	79
4.3 UMA ÓRBITA COMPLETA DA PARTÍCULA	82
4.3.1 Satélites e partículas em órbitas circulares	82

4.3.2 Partícula em órbita excêntrica iguais a 10^{-4} e 10^{-3}	85
4.3.3 Satélites em órbitas excêntricas iguais a 10^{-4} e 10^{-3}	89
4.4 NOVOS PONTOS DE EQUILÍBRIO DAS PARTÍCULAS	
4.4.1 Configuração de equilíbrio do Tipo Ia para dois satélites e duas partículas por um período de 500 anos de integração	
4.4.2 Configuração de equilíbrio do Tipo II para dois satélites e duas partículas por um período de 500 anos de integração	
4.4.3 Configuração de equilíbrio do Tipo Ia para três satélites e três partículas por um período de 500 anos de integração	
4.4.4 Configuração de equilíbrio do Tipo II para três satélites e três partículas por um período de 500 anos de integração	
4.5 SIMULAÇÕES PARA SATÉLITES DE MASSAS DIFERENTES POR UM PERÍODO DE 500 ANOS	
4.5.1 Satélites posicionados na configuração do Tipo Ia	
4.5.2 Satélites posicionados na configuração do Tipo II	
4.5.3 Três satélites posicionados na configuração do Tipo Ia	
4.5.4 Três satélites posicionados na configuração do Tipo II	
4.6 PONTOS DE EQUILÍBRIO DAS PARTÍCULAS PARA SATÉLITES DE MASSAS DIFERENTES	
4.6.1 Configuração do Tipo Ia para dois satélites	
4.6.2 Configuração do Tipo IIa para dois satélites	
4.6.3 Configuração do Tipo Ia para três satélites	
4.6.4 Configuração do Tipo IIa para três satélites	
CAPÍTULO 5 APLICAÇÃO PARA O SISTEMA: ANÉIS DA FALHA DE ENCKE E ANEL F	
5.1 FALHA DE ENCKE	
5.2 ANEL F	
5.3 ACHATAMENTO	
5.3.1 Simulações com a inclusão de J_2 para o anel Central da falha	

de Encke

5.3.2 Simulações para o anel F com a inclusão do achatamento do planeta

LISTA DE FIGURAS

- FIGURA 2.1 – Configuração do sistema que descreve o comportamento de uma partícula de massa desprezível orbitando um corpo central (μ_1), onde $\mu_1 = m_1 / (m_1 + m_2)$, $\mu_2 = m_2 / (m_1 + m_2)$ sendo m_1 a massa do planeta, m_2 a massa do satélite, r_1 a distância entre μ_1 e a partícula, r_2 a distância entre μ_2 e a partícula, (x, y) as coordenadas no sistema rotacional e (ξ, η) as coordenadas da partícula no sistema inercial.
- FIGURA 2.2a – Curvas de velocidade zero para um valor da razão de massa satélite/planeta igual a 0.2 e com o valor da constante de Jacobi igual a 3.9
- FIGURA 2.2b – Curvas de velocidade zero para um valor da razão de massa satélite/planeta igual a 0.2 e com o valor da constante de Jacobi igual a 3.0.
- FIGURA 2.3 – Pontos de equilíbrio Lagrangianos triangulares L_4 e L_5 , para um sistema onde se tem um corpo central μ_1 e um satélite μ_2 , visualizados no sistema de referência rotacional.
- FIGURA 2.4 – Pontos de equilíbrio Lagrangianos L_1 , L_2 e L_3 , conhecidos também como coplanares e são pontos de equilíbrio instáveis.
- FIGURA 2.5a – Descreve o movimento de uma partícula no sistema rotacional que possui uma pequena excentricidade, ao redor do ponto de equilíbrio L_4 .
- FIGURA 2.5b – Ampliação da região de girino da Figura 2.5a.
- FIGURA 2.6a – Órbita de ferradura que libra em torno dos pontos de equilíbrio no sistema de referência rotacional com μ_2 . Essa integração foi obtida para $\mu_2 = 10^{-6}$.
- FIGURA 2.6b – Ampliação da Figura 2.6a.

- FIGURA 2.7a – Variação do semi-eixo maior em função da variação angular para uma razão de massa satélite/planeta igual a 10^{-3} .
- FIGURA 2.7b – Variação do semi-eixo maior em função da variação angular para uma razão de massa satélite/planeta igual a 10^{-6} .
- FIGURA 2.8 – Variação de a x tempo para $\mu_2 = 10^{-6}$.
- FIGURA 2.9 – Variação de e x tempo para $\mu_2 = 10^{-6}$.
- FIGURA 2.10 – Comportamento que uma partícula descreve próximo ao ponto de equilíbrio L_4 pode ser a soma de dois movimentos. (MURRAY; DERMOTT, 1999).
- FIGURA 3.1 – Configuração de dois satélites ao redor de um corpo central em relação a uma origem fixa arbitrária O , onde \vec{r}_1 e \vec{r}_2 são os vetores posição dos respectivos satélites com relação ao corpo central. As três massas possuem os vetores posição \vec{R}_1 , \vec{R}_2 e \vec{R}_p em relação a origem P .
- FIGURA 3.2 – Configurações de equilíbrio estável, onde os círculos pretos correspondem às configurações de equilíbrio estáveis. Pode se observar a existência de uma simetria com relação a um eixo horizontal imaginário.
- FIGURA 3.3 – Configuração de equilíbrio instável, onde os círculos brancos correspondem às configurações de equilíbrio instáveis.
- FIGURA 3.4 – Para o caso em que $N \leq 6$ em que os espaçamentos entre os satélites são idênticos, se obtém configuração de equilíbrio instável. A partir de sete satélites igualmente espaçados essa configuração torna-se estável.
- FIGURA 3.5 – Configuração de equilíbrio instável. Essa configuração foi obtida inserindo inicialmente um satélite à esquerda do corpo central e os satélites posicionados a direita.

Embora exista uma simetria com relação a um eixo horizontal imaginário, as separações angulares entre eles não são as mesmas.

FIGURA 3.6 – Configuração de equilíbrio instável, estando os satélites igualmente posicionados.

FIGURA 3.7 – Essa figura descreve o movimento de três satélites posicionados em pontos de equilíbrio estáveis S_1 , S_2 e S_3 . Observa-se que para o dado valor da intensidade de perturbação, os satélites passam a descrever órbitas diferentes, nesse caso tem-se dois satélites descrevendo uma órbita de girino ao redor dos seus pontos de equilíbrio, enquanto o terceiro executa uma pequena oscilação não periódica. (SALO; YODER 1988).

FIGURA 3.8 – Nesta figura observa-se que os satélites passam a descrever um movimento caótico ao redor de suas posições iniciais para intensidade de perturbação igual a dois. (SALO; YODER 1988).

FIGURA 3.9 – Nessa figura verifica que dois dos satélites passam a descrever uma órbita de “ferradura” (amplitude maior de oscilação) ao redor dos seus pontos estáveis, enquanto que o terceiro satélite passa a ter uma amplitude de oscilação maior, quando comparada com a Figura 3.7, essa oscilação é estável. (SALO; YODER 1988).

FIGURA 4.1 – Variação de a x tempo para três satélites que estão posicionados em uma configuração de equilíbrio do Tipo III.

FIGURA 4.2 – Variação de θ x a dos satélites que estão posicionados em uma configuração de equilíbrio do Tipo Ia, para $N = 2$ satélites.

FIGURA 4.3 – Variação de θ x a dos satélites que estão posicionados em uma configuração de equilíbrio do Tipo II, para $N =$

2 satélites.

FIGURA 4.4 – Variação de θ x a dos satélites que estão posicionados em uma configuração de equilíbrio do Tipo Ia, para $N = 3$ satélites.

FIGURA 4.5 – Variação de θ x a dos satélites que estão posicionados em uma configuração de equilíbrio do Tipo II, para $N = 3$ satélites.

FIGURA 4.6 – Variação de θ x a dos satélites que estão posicionados em uma configuração de equilíbrio do Tipo III, para $N = 3$ satélites.

FIGURA 4.7 – Variação de θ x a dos satélites que estão posicionados em uma configuração de equilíbrio do Tipo III, para $N = 3$ satélites.

FIGURA 4.8a – Variação de r x tempo para (P_1) estando satélites e partículas em órbita circular por um período de 500 anos

FIGURA 4.8b – Ampliação da Figura 4.8a, onde verificamos o comportamento de (P_1) por 20 anos.

FIGURA 4.8c – Variação de r x tempo para (P_2) estando satélites e partículas em órbita circular por um período de 500 anos.

FIGURA 4.8d – Ampliação da Figura 4.8c, onde verificamos o comportamento de (P_2) por 20 anos.

FIGURA 4.9 – Variação de e x tempo para as partículas por um período de 500 anos.

FIGURA 4.10 – Variação de θ x a para as partículas por um período de 500 anos.

FIGURA 4.11 – Posicionamento inicial de uma partícula coorbital aos satélites que estão na configuração $N = 2$ do Tipo II.

FIGURA 4.12a – Ampliação da Figura 4.12a por um período de 20 anos.

FIGURA 4.12b – Variação de r x tempo para (P_1) que está em órbita circular por um período de 500 anos.

- FIGURA 4.13a – Variação de r x tempo para (P_1) que está em órbita excêntrica por um período de 500 anos.
- FIGURA 4.14 – Posicionamento inicial de partículas coorbitais aos satélites que estão na configuração $N = 3$ do Tipo II.
- FIGURA 4.15a – Variação da excentricidade em função do tempo.
- FIGURA 4.15b – Ampliação da Figura 4.15a.
- FIGURA 4.16a – Variação de r x tempo para (P_1) em órbita circular. $\Delta r = 2,23 \times 10^{-4}$. Configuração do Tipo II.
- FIGURA 4.16b – Variação de r x tempo para (P_1) em órbita circular. $\Delta r = 4,4 \times 10^{-4}$. Configuração do Tipo II.
- FIGURA 4.16c – Variação de r x tempo para (P_1) estando os satélites em órbita excêntrica. $\Delta r = 4,8 \times 10^{-4}$. Configuração do Tipo II.
- FIGURA 4.17a – Partícula na posição inicial.
- FIGURA 4.17b – Variação da partícula por um período de 0 à 0,24 ano.
- FIGURA 4.17c – Variação da partícula por um período de 0,24 à 0,30 ano.
- FIGURA 4.17d – Zoom da Figura 4.17c.
- FIGURA 4.17e – Variação da partícula por um período de 0,24 à 0,38 ano.
- FIGURA 4.17f – Variação da partícula por um período de 0,24 à 0,42 ano.
- FIGURA 4.18a – Trajetória da partícula por uma órbita completa
- FIGURA 4.18b – Ampliação da Figura 4.18a.
- FIGURA 4.19 – Variação radial em função do tempo.
- FIGURA 4.20a – Partícula na posição inicial.
- FIGURA 4.20b – Variação da partícula por um período de 0 a 0,30 ano.
- FIGURA 4.20c – Zoom da Figura 4.20b.
- FIGURA 4.20d – Variação da partícula por um período de 0 à 0,34 ano.
- FIGURA 4.20e – Variação da partícula por um período de 0 à 0,42 ano.
- FIGURA 4.21a – Trajetória da partícula por uma órbita completa.
- FIGURA 4.21b – Ampliação da Figura 4.21a.
- FIGURA 4.22 – Variação radial em função do tempo.
- FIGURA 4.23a – Partícula na posição inicial.

- FIGURA 4.23b – Variação da partícula por um período de 0 à 0,30 ano.
- FIGURA 4.23c – Zoom da Figura 4.23b.
- FIGURA 4.23d – Variação da partícula por um período de 0 à 0,34 ano.
- FIGURA 4.23e – Variação da partícula por um período de 0 à 0,42 ano.
- FIGURA 4.24a – Trajetória da partícula por uma órbita completa.
- FIGURA 4.24b – Ampliação da Figura 4.24a.
- FIGURA 4.25 – Variação radial em função do tempo.
- FIGURA 4.26a – Partícula posicionada a 30° dos satélites, em um tempo $t = 0$.
- FIGURA 4.26b – Partícula logo após o encontro com Pan; $t = 0.65$ ano.
- FIGURA 4.27a – Partícula descrevendo uma órbita completa entre os satélites.
- FIGURA 4.28a – Variação radial em função do tempo.
- FIGURA 4.28b – Ampliação da Figura 4.28a.
- FIGURA 4.29a – Trajetória da partícula por uma órbita.
- FIGURA 4.29a – Ampliação da Figura 4.29a.
- FIGURA 4.30 – Variação radial em função do tempo.
- FIGURA 4.31 – Visualização dos pontos de equilíbrio Lagrangianos e do movimento da partícula em forma de ferradura.
- FIGURA 4.32 – Variação do a em função de θ das partículas.
- FIGURA 4.33 – Sistema de referência rotacional com Pan.
- FIGURA 4.34 – Sistema de referência rotacional com Pan.
- FIGURA 4.35 – Variação do a em função de θ dos satélites e de partículas posicionadas nos pontos de equilíbrio e próxima a eles.
- FIGURA 4.36 – Variação do a em função de θ dos satélites e das partículas nos pontos e próximo aos pontos de equilíbrio.
- FIGURA 4.37 – Sistema de referência rotacional com Pan.
- FIGURA 4.38 – Variação do a em função de θ dos satélites e das partículas nos pontos de equilíbrio e ao redor dos pontos.
- FIGURA 4.39 – Variação do a em função do tempo para os satélites que

estão posicionados na configuração do Tipo Ia.

- FIGURA 4.40 – Variação do a em função do tempo para as partículas que estão posicionadas entre os satélites Pan e S_1 .
- FIGURA 4.41a – Variação de r em função do tempo para as partículas que estão inicialmente com uma excentricidade igual a zero.
- FIGURA 4.41a – Ampliação da Figura 4.41a.
- FIGURA 4.42 – Variação de r em função de θ das partículas.
- FIGURA 4.43 – Variação de a em função de θ das partículas.
- FIGURA 4.44a – Variação angular em função do tempo das partículas.
- FIGURA 4.44b – Ampliação da Figura 4.44a.
- FIGURA 4.45a – Variação radial em função do tempo para as partículas coorbitais aos satélites.
- FIGURA 4.45b – Ampliação da Figura 4.45a.
- FIGURA 4.46a – Variação radial em função do tempo para (P_1).
- FIGURA 4.46b – Ampliação da Figura 4.56a.
- FIGURA 4.46c – Variação radial em função do tempo para (P_2) e a direita uma ampliação dessa configuração.
- FIGURA 4.47 – Variação periódica da excentricidade em função do tempo para as partículas que estão inicialmente em uma órbita circular.
- FIGURA 4.48 – Variação do a em função de θ para o caso circular. À direita temos uma ampliação dessa configuração.
- FIGURA 4.49 – Variação do a em função do tempo dos satélites que estão posicionados na configuração de equilíbrio do Tipo II.
- FIGURA 4.50 – Variação angular em função do tempo para as duas partículas.
- FIGURA 4.51 – Variação radial em função do tempo.
- FIGURA 4.52 – Variação radial em função do tempo. A figura a direita é uma ampliação dessa configuração.
- FIGURA 4.53 – Configuração inicial dos satélites de raios diferentes.
- FIGURA 4.54 – Confinamento das partículas entre os satélites por um

período de 500 anos de integração.

- FIGURA 4.55 – Variação angular das partículas em função do tempo
- FIGURA 4.56 – Variação do semi-eixo maior em função do tempo para os satélites que são posicionados na configuração do Tipo Ia.
- FIGURA 4.57 – Variação angular dos satélites em função do semi-eixo maior.
- FIGURA 4.58a – (P_3) está posicionada inicialmente a 67° , Sat_2 está a $47,361^\circ$ e Sat_3 está a $94,722^\circ$. Essa figura mostra o início do movimento da partícula entre os satélites, para o caso circular.
- FIGURA 4.58b – (P_3) completa uma órbita entre os satélites estando Sat_2 a $48,858^\circ$ e Sat_3 a $93,549^\circ$. (P_3) tem uma variação angular de aproximadamente 44° e $\Delta r = 2,4 \times 10^{-4}$.
- FIGURA 4.58c – A partícula possui uma variação angular de aproximadamente 15° e Δr igual a $1,3 \times 10^{-4}$. Sat_2 está a $57,407^\circ$ e Sat_3 a $72,890^\circ$.
- FIGURA 4.59 – Variação radial da (P_1) em função do tempo. Excentricidade da partícula igual a 10^{-4} .
- FIGURA 4.60 – Variação radial da (P_2) em função do tempo. Excentricidade da partícula igual a 10^{-4} .
- FIGURA 4.61 – Variação radial da (P_3) em função do tempo. Excentricidade da partícula igual a 10^{-4} .
- FIGURA 4.62 – Variação radial da (P_1) em função do tempo.
- FIGURA 4.63 – Variação radial da (P_2) em função do tempo.
- FIGURA 4.64 – Variação radial da (P_3) em função do tempo.
- FIGURA 4.65 – Variação da excentricidade da (P_1) em função do tempo.
- FIGURA 4.66 – Variação da excentricidade da (P_2) em função do tempo.
- FIGURA 4.67 – Variação da excentricidade da (P_3) em função do tempo.
- FIGURA 4.68 – Configuração inicial do sistema.
- FIGURA 4.69 – Confinamento radial das partículas coorbitais a satélites

que são posicionados inicialmente na configuração de equilíbrio do Tipo Ia.

- FIGURA 4.70 – Confinamento azimutal das partículas.
- FIGURA 4.71 – Variação radial em função do tempo dos satélites.
- FIGURA 4.72 – Variação angular em função do tempo dos satélites.
- FIGURA 4.73a – Variação radial em função do tempo de (P_1).
- FIGURA 4.73b – Zoom da Figura 4.73a.
- FIGURA 4.74a – Variação radial em função do tempo de (P_2).
- FIGURA 4.74b – Zoom da Figura 4.74a.
- FIGURA 4.75a – Variação radial em função do tempo de (P_3).
- FIGURA 4.75b – Zoom da Figura 4.75a.
- FIGURA 4.76a – Variação radial em função do tempo de (P_1).
- FIGURA 4.76b – Zoom da Figura 4.76a.
- FIGURA 4.77a – Variação radial em função do tempo de (P_2).
- FIGURA 4.77b – Zoom da Figura 4.77a.
- FIGURA 4.78a – Variação radial em função do tempo de (P_3).
- FIGURA 4.78b – Zoom da Figura 4.78a.
- FIGURA 4.79 – Variação da excentricidade em função do tempo para as partículas que inicialmente estão em órbita circular.
- FIGURA 4.80 – Posicionamento inicial dos satélites e das partículas.
- FIGURA 4.81 – Variação do semi-eixo maior em função do tempo dos satélites que são posicionados inicialmente na configuração do Tipo II.
- FIGURA 4.82 – Variação do semi-eixo maior em função da variação angular dos satélites.
- FIGURA 4.83 – Variação do semi-eixo maior em função do tempo das partículas confinadas entre os satélites.
- FIGURA 4.84 – Variação radial em função do tempo de (P_1) que possui uma excentricidade igual a zero.
- FIGURA 4.85 – Variação radial em função da variação angular de três partículas coorbitas aos satélites.

- FIGURA 4.86a – Variação radial em função do tempo para a partícula com excentricidade inicial igual a 10^{-4} .
- FIGURA 4.86b – Ampliação da Figura 4.86a.
- FIGURA 4.87a – Variação radial em função do tempo para a partícula com excentricidade inicial igual a 10^{-4} .
- FIGURA 4.87b – Ampliação da Figura 4.87a.
- FIGURA 4.88a – Variação radial em função do tempo para a partícula com excentricidade inicial igual a 10^{-4} .
- FIGURA 4.88b – Ampliação da Figura 4.88a.
- FIGURA 4.89a – Variação radial em função do tempo da partícula (P_1).
- FIGURA 4.89b – Ampliação da Figura 4.89a.
- FIGURA 4.90a – Variação radial em função do tempo da partícula (P_2).
- FIGURA 4.90b – Ampliação da Figura 4.90a.
- FIGURA 4.91a – Variação radial em função do tempo da partícula (P_3).
- FIGURA 4.91b – Ampliação da Figura 4.91a.
- FIGURA 4.92 – Variação da excentricidade em função do tempo das partículas.
- FIGURA 4.93 – Variação do a em função de θ das partículas e dos satélites. Pan (raio de 10 km) e S_1 (raio de 5 km).
- FIGURA 4.94 – Variação do a em função de θ das partículas e dos satélites. Pan (raio de 10 km) e S_1 (raio de 3 km).
- FIGURA 4.95 – Variação do semi-eixo maior em função da posição angular para satélites e partículas
- FIGURA 4.96 – Variação do semi-eixo maior em função da posição angular para satélites e partículas.
- FIGURA 4.97 – Variação de $a \times \theta$ das partícula e dos satélites.
- FIGURA 4.98 – Variação de $a \times \theta$ das partícula e dos satélites.
- FIGURA 4.99 – Variação de $a \times \theta$ das partícula e dos satélites.
- FIGURA 4.100 – Variação de $a \times \theta$ das partícula e dos satélites.
- FIGURA 4.101 – Mostra a variação angular dos pontos de equilíbrio dos satélites, das partículas e mostra os pontos de equilíbrio

Lagrangiano L_4 , L_3 e L_5 , para a configuração em que os dois satélites tem um raio de 10 km.

FIGURA 4.102 – Mostra a variação angular dos pontos de equilíbrio dos satélites, das partículas e mostra os pontos de equilíbrio Lagrangiano L_4 , L_3 e L_5 , para a configuração em que um satélites tem um raio de 10 km e o outro 5 km.

FIGURA 4.103 – Mostra a variação angular dos pontos de equilíbrio dos satélites, das partículas e mostra os pontos de equilíbrio Lagrangiano L_4 , L_3 e L_5 , para a configuração em que um satélites tem um raio de 10 km e o outro 3 km.

FIGURA 4.104 – Variação angular dos pontos de equilíbrio dos satélites, das partículas e os pontos de equilíbrio Lagrangiano L_4 , L_3 e L_5 , para a configuração do tipo IIa em que todos os satélites tem um raio igual a 10 km.

FIGURA 4.105 – Variação angular dos pontos de equilíbrio dos satélites, das partículas e os pontos de equilíbrio Lagrangiano L_4 , L_3 e L_5 , para a configuração do tipo IIa em que temos um satélite de raio igual a 10 km e outro igual a 5 km.

FIGURA 4.106 – Variação angular dos pontos de equilíbrio dos satélites, das partículas e os pontos de equilíbrio Lagrangiano L_4 , L_3 e L_5 , para a configuração do tipo IIa em que temos um satélite de raio igual a 10 km e outro igual a 3 km.

FIGURA 4.107 – Variação de $a \times \theta$ para os satélites e para as partículas.

FIGURA 4.108 – Variação de $a \times \theta$ para os satélites e para as partículas.

FIGURA 4.109 – Variação de $a \times \theta$ para os satélites e para as partículas.

FIGURA 5.1 – Imagem obtida pela sonda espacial Voyager em 1981 mostra o anel central da falha de Encke e suas estruturas irregulares.

FIGURA 5.2 – Esta imagem mostra o anel interno da falha de Encke, podendo se visualizada uma região mais brilhante.

FIGURA 5.3 – Variação do semi-eixo maior (em km) das partículas,

coorbital aos satélites de massas diferentes, em função do ângulo θ (em graus).

- FIGURA 5.4 – Variação do semi-eixo maior das partículas e dos satélites em função do tempo.
- FIGURA 5.5 – Variação de $a \times t$ para as partícula e satélites que representam os anéis da falha de Encke.
- FIGURA 5.5a – Ampliação do comportamento dos satélites coorbitais no anel central. O satélite do anel interno tem um raio de 3 km.
- FIGURA 5.6 – Variação de $a \times t$ para as partícula e satélites que representam os anéis da falha de Encke. O satélite do anel interno tem um raio de 5 km.
- FIGURA 5.6a – Ampliação do comportamento dos satélites e das partículas posicionados no anel central.
- FIGURA 5.7 – Comportamento dos satélites e das partículas que estão posicionados no anel central da falha de Encke estando os satélites separados a 80° , e o comportamento das partículas posicionadas no semi-eixo maior do anel interno. Essa simulação foi realizada por um período de 200 anos em que todos possuem uma excentricidade inicial igual a 10^{-4} .
- FIGURA 5.8 – As diferentes estruturas observadas no anel F, como por exemplo, os aglomerados de partículas e os entrelaçamentos que ocorre no anel.
- FIGURA 5.9 – Os satélites que possuem uma órbita próxima ao anel F são os satélites Prometeu (interno ao anel) e Pandora (externo ao anel).
- FIGURA 5.10 – Configuração inicial dos satélites e das partículas no anel F.
- FIGURA 5.11a – Configuração do sistema girante com (S_1) para um período de 30 dias.

- FIGURA 5.11b – Ampliação da Figura 5.11a, onde se localizam (S_2) e (P_1).
- FIGURA 5.12a – Configuração do sistema girante com (S_1) para um período de 365 dias.
- FIGURA 5.12b – Ampliação da Figura 5.12a, onde se localizam (S_2) e (P_1).
- FIGURA 5.13 – Variação a x *tempo* dos satélites hipotéticos.
- FIGURA 5.14 – Ampliação da região no sistema girante onde se localizam (S_2) e (P_1) por um período de 1.825 dias.
- FIGURA 5.15 – Comportamento das partículas e dos satélites hipotéticos no sistema girante estando as partículas posicionadas inicialmente a 30° e 180° .
- FIGURA 5.16 – Comportamento das partículas e dos satélites hipotéticos no sistema girante estando as partículas posicionadas inicialmente a 15° e 120° .
- FIGURA 5.17 – Comportamento das partículas e dos satélites hipotéticos no sistema girante quando não consideramos a perturbação de Prometeu e Pandora por um período de 1.825 dias.
- FIGURA 5.18 – Variação do semi-eixo maior em função do tempo para os satélites hipotéticos quando excluímos a perturbação de Prometeu e Pandora.
- FIGURA 5.19 – Variação do semi-eixo maior em função do tempo, por um período de integração de 3.750 dias.
- FIGURA 5.20a – Variação da excentricidade em função do tempo para os satélites hipotéticos.
- FIGURA 5.20b – Variação da excentricidade em função do tempo para Prometeu.
- FIGURA 5.20c – Variação da excentricidade em função do tempo para Pandora.
- FIGURA 5.20d – Variação da excentricidade em função do tempo para as

partículas.

- FIGURA 5.21 – Números de voltas realizadas pelo satélite Pan por um período de 50 anos.
- FIGURA 5.22 – Números de voltas do argumento de pericentro do satélite hipotético (S_1) por um período de 3.750 dias localizado no anel F.
- FIGURA 5.23 – Variação do semi-eixo maior em função do tempo para a configuração do anel Central sem o efeito de J_2 .
- FIGURA 5.24 – Variação do semi-eixo maior em função do tempo para a configuração do anel Central com o efeito de J_2 .
- FIGURA 5.25 – Variação da excentricidade em função do tempo para os satélites localizados no anel central.
- FIGURA 5.26 – Variação da excentricidade em função do tempo para as partículas localizadas no anel central.

LISTA DE TABELA

TABELA 3.1 – Separação angular entre os satélites (YODER; SALO, 1988).	63
TABELA 4.1 – Variação angular e do semi-eixo maior dos satélites por um período de 500 anos de integração.	70
TABELA 4.1 – Variação angular de dois satélites e das partículas a medida que diminuo o raio do satélite hipotético.	122
TABELA 4.1 – Variação angular de dois satélites e das partículas a medida em que diminui o raio do satélite hipotético.	124
TABELA 4.1 – Variação angular de três satélites e das partículas a medida que diminuo o raio de dois satélites.	126
TABELA 4.1 – Variação angular de três satélites e das partículas a medida que diminuo o raio de dois satélites.	128
TABELA 5.1 – Condições iniciais da simulação numérica.	143
TABELA 4.1 – Condições iniciais utilizadas para obter o argumento do pericentro.	156

LISTA DE SÍMBOLOS

B	comprimento	<i>m</i>
c	calor específico	<i>J/Kg °C</i>
<i>Ec</i>	número de Eckert	<i>[1]</i>
h	espaço	<i>m</i>
H	espessura de material sinterizado	<i>m</i>
k	relação entre os coeficientes de condutividade térmica	<i>[1]</i>
p	parâmetro adimensional de pressão	<i>[1]</i>
p*	pressão	<i>N</i>
Pr	número de Prandtl	<i>[1]</i>
q	parâmetro adimensional de geração interna de calor	<i>[1]</i>
.		
q	geração interna de calor	<i>°C/s</i>
r	parâmetro adimensional de raio	<i>[1]</i>
r*	raio	<i>m</i>
R	número de Reynolds	<i>[1]</i>
t	parâmetro adimensional de tempo	<i>[1]</i>
t*	tempo	<i>s</i>
T*	temperatura	<i>°C</i>
T	temperatura adimensionalizada	<i>[1]</i>
u	velocidade adimensionalizada	<i>[1]</i>
u*	componente de velocidade	<i>m/s</i>

SILVA, P. A. **Dinâmica de uma partícula coorbital a um sistema de satélites**. 2003. p. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá.

RESUMO

Pequenos satélites podem ser os responsáveis pela variedade de estruturas encontradas nos anéis planetários estreitos. Os anéis da Falha de Encke e o anel F de Saturno apresentam estranhas características, denominadas de aglomerados e “kinks”, que podem estar relacionadas com esses pequenos satélites. Com o intuito de analisar o comportamento de partículas pertencentes a um anel sob o efeito desses satélites foram numericamente simulados vários sistemas possuindo dois e três satélites. Nessas simulações os satélites, com mesma razão de massa, foram inicialmente localizados em posições de equilíbrio determinadas por Salo & Yoder (1988). Os resultados mostraram que, dependendo da excentricidade das partículas e dos satélites, o anel pode apresentar variações azimutal e radial ao longo de toda a sua extensão. Embora essas variações possam explicar os aglomerados encontrados nos anéis, as simulações numéricas também evidenciaram a característica temporária dessas estruturas, principalmente quando o achatamento do corpo principal (planeta) foi incluído. Para o caso dos anéis da Falha de Encke a inclusão desses pequenos satélites, como proposto por Ferrari & Brahic (1997), pode causar a destruição dos anéis em aproximadamente 200 anos. Foi verificado que o sistema anel F-Prometeu-Pandora é extremamente sensível às condições iniciais, algumas partículas podem permanecer em órbitas de ferradura por um curto período de tempo para determinadas condições iniciais. Esse resultado está de acordo com os trabalhos recentes que mostram que os dois satélites Prometeu e Pandora têm um movimento caótico.

Complementares a esse estudo foram obtidos os pontos de equilíbrio para as partículas e para os satélites (com massas diferentes). Essa análise foi baseada no problema circular restrito de três corpos. Os resultados mostraram que dependendo do tamanho dos satélites e da quantidade desses, essas posições de equilíbrio podem sofrer

consideráveis alterações. Essas posições podem auxiliar na localização de possíveis pequenos satélites imersos nos anéis planetários estreitos.

PALAVRAS-CHAVE: Satélites coorbitais, anéis planetários, dinâmica do sistema solar.

CAPÍTULO 1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.1 INTRODUÇÃO

Nesse capítulo iremos apresentar, de modo sintetizado, alguns trabalhos sobre partículas coorbitais a planetas, satélites e estruturas de anéis planetários. Este estudo se fez necessário para que possamos entender melhor a dinâmica e o comportamento de anéis planetários.

Na busca de compreender a estrutura física e a estabilidade dos anéis de Saturno, Maxwell (1890) (trabalho que resultou na obtenção do prêmio Adams) elaborou um modelo matemático para tentar explicar este sistema. Maxwell verificou que a estabilidade dos anéis só seria possível se eles fossem compostos por pequenas partículas, o que era contra a teoria proposta anteriormente por Laplace, que acreditava que os anéis tinham a forma de um disco sólido.

A partir daí, outros modelos foram elaborados com o objetivo de estudar, de modo sistemático não somente a estabilidade dos anéis, mas também a dinâmica e os possíveis mecanismos de confinamento que ocorrem com as partículas dos mesmos.

Um dos primeiros estudos a respeito de mecanismo de confinamento de partículas de anéis por um satélite foi elaborado por Dermott e Murray (1981). Nesse trabalho, os autores analisam o problema restrito de três corpos (partícula, satélite e planeta), onde a massa da partícula é negligenciada e a massa do satélite é bem menor que a massa do planeta. O movimento da partícula pode ser visualizado no sistema de referência rotacional com o satélite. Como resultado, conseguiram verificar numericamente que o comportamento da partícula está diretamente relacionado à posição inicial e, entre outros, com a razão de massa entre o satélite e o planeta, verificando que quanto maior for o satélite menor será a capacidade de confinar partículas. Dentre as possíveis órbitas que a partícula pode descrever, afirmam os autores, é uma órbita que tem um formato de girino ao redor dos pontos de equilíbrio Lagrangianos L_4 e L_5 (ou seja, uma órbita de girino), sendo esses pontos estáveis e obtidos através de uma modelagem matemática do problema restrito de três corpos

onde considera a partícula com velocidade e aceleração iguais a zero, e a outra órbita que a partícula pode descrever, no sistema rotacional, é uma órbita que tem um formato de ferradura em torno dos pontos Lagrangianos L_4 , L_5 e L_3 . Esse estudo será detalhado no capítulo 2 desse trabalho.

Com o objetivo de estudar o movimento de satélites coorbitais Yoder et al. (1983), elaboraram uma teoria analítica para a função perturbadora levando em consideração a existência de uma ressonância orbital 1:1. Esse estudo foi aplicado para um par de satélites coorbitais de Saturno 1980S1 e 1980S3 (Jano e Epimeteu). Como resultado da integração numérica desse trabalho, os autores obtiveram a separação angular entre esses satélites e as órbitas que esses satélites descrevem no sistema de referência rotacional. Verificaram também que os efeitos da excentricidade e inclinação nos satélites geram uma rápida variação nas coordenadas polares desses satélites. O efeito, nas coordenadas polares, da excentricidade dos satélites foi comprovado em nossas simulações.

Com o objetivo de estudar o encontro de satélites Petit e Hénon (1986) elaboraram um estudo numérico sobre a dinâmica que ocorre quando os dois satélites estão em “closest approach”. O problema pode ser expresso em termos de um parâmetro de impacto sendo esse definido como a diferença entre os raios da órbita circular, inicial e final, dos satélites. Por exemplo: consideremos um satélite m_1 , que possui um raio inicial r_1 e um outro satélite m_2 , que possui um raio inicial r_2 . Depois do encontro os satélites passam a ter um raio orbital final diferente, a diferença entre r_2 e r_1 é denominada de parâmetro de impacto. Os autores obtiveram várias órbitas para diferentes valores do parâmetro de impacto e puderam comparar seus resultados numéricos para o caso limite, quando o parâmetro de impacto é muito pequeno ou muito grande, com teoria de perturbação existente na literatura. O conceito de encontro é definido pelos autores como sendo a distância entre os dois satélites. Faz-se importante ressaltar que o encontro não está ligado à colisão entre os corpos, embora isso possa ocorrer. Para estudar essa dinâmica os autores analisaram o problema de três corpos verificando analiticamente, através de expansões algébricas, que quando o parâmetro de impacto é grande ocorre apenas uma pequena deflexão na órbita dos satélites. Para o caso em que o parâmetro de impacto é pequeno verifica-se que os

satélites passam a descrever uma órbita do tipo ferradura. Petit e Hénon (1986) verificaram que seu modelo numérico era compatível para os casos limites. Eles puderam observar uma riqueza nas órbitas descritas pelos satélites quando o parâmetro de impacto é diminuído, entre elas observaram a formação de “loops”, ou seja, órbitas que possuem simetrias em relação a um dos eixos do sistema de órbitas tipo ferradura, e até colisão entre os satélites.

Um estudo sobre a dinâmica de múltiplos satélites coorbitais ao redor de um corpo central foi elaborado por Salo e Yoder (1988) no qual obtiveram, de modo numérico, configurações de equilíbrio, sendo a estabilidade verificada ao inserir uma pequena perturbação nas equações do movimento. Através desse estudo eles puderam obter a separação angular entre os satélites e vários tipos de configurações. Para o caso de satélites coorbitais igualmente espaçados, a configuração de equilíbrio torna-se instável de $2 < N < 6$, enquanto que para $2 \leq N \leq 8$, onde N representa o número de satélites, se obtém uma configuração de equilíbrio estável onde a separação máxima entre os satélites é de 60° , para $N \geq 7$, onde a configuração é igualmente espaçada, tem-se também uma configuração de equilíbrio estável e para o caso de $N \geq 9$ todas as configurações tornam-se estáveis. Um estudo mais detalhado a respeito desse trabalho encontra-se no capítulo 3.

Com o intuito de estudar a estrutura de um anel planetário gerada por um pequeno satélite os pesquisadores Spahn, Scholl e Hertzsch (1994) simularam para um grande número de partículas (anel) as regiões que podem se formar devido à perturbação de um pequeno satélite imerso nesse anel. Nesse estudo, os autores analisaram a influência gravitacional em uma dimensão, verificando que o satélite pode gerar uma densidade superficial de massa em certas localizações, e em duas dimensões estudaram as componentes radial e azimutal das partículas. Eles conseguiram obter, numericamente, três regiões diferentes formadas pelas partículas: a) regiões de ondas, b) falhas limitadas pelas ondas e c) formação de um anel coorbital a um pequeno satélite. Com esse resultado, foi possível explicar as diferentes estruturas existentes na falha de Encke. No estudo da densidade superficial de massa verificaram regiões onde existe uma maior concentração de partículas, verificaram também que o satélite Pan, coorbital ao anel central da falha de Encke, seria o

responsável pela contínua presença de partículas coorbitais a esse satélite. Com relação às regiões onde são produzidas as ondas, concluíram que para a existência de tal fenômeno é necessário que o satélite possua um raio maior que 10 km.

Namouni (1999) elaborou um trabalho em que estudou a interação secular que ocorre entre objetos coorbitais. Três tipos de famílias de órbitas foram obtidos, através de simulações numéricas do problema de três corpos, onde os satélites estão em ressonância 1:1: a) órbita de ferradura, b) órbita passageira, ou seja, órbita que passa perto da região onde o satélite se encontra e c) órbita de satélites retrógrados. O autor verificou que as duas últimas órbitas só existem quando a excentricidade relativa dos dois objetos (diferença entre a excentricidade dos objetos) é maior que 10^{-3} . Namouni (1999) obteve órbitas de transição entre as diferentes famílias, que somente ocorre em três dimensões, devido à variação secular da excentricidade e do argumento do pericentro. Como resultado mostrou-se que existe uma conexão entre a órbita de ferradura e órbitas de satélites retrógrados.

No próximo capítulo iremos apresentar um estudo a respeito do mecanismo de confinamento que pode ocorrer entre partículas coorbitais a satélites.

CAPÍTULO 2 MECANISMO DE CONFINAMENTO

2.1 PROBLEMA CIRCULAR RESTRITO PLANAR DE TRÊS CORPOS.

Nesse capítulo temos como objetivo fazer uma breve introdução ao problema circular restrito de três corpos, de modo a compreender o comportamento descrito por uma partícula sendo perturbada por dois corpos.

2.1.1 Introdução

O problema circular restrito de três corpos foi estudado por vários pesquisadores, entre eles, Euler, Hamilton e Laplace. Todos com o objetivo de obter analiticamente uma solução para esse problema. No entanto isso não ocorreu, sendo a solução analítica para esse sistema impossível. Assim, mesmo não se tendo uma solução analítica, podemos obter, através de algumas considerações, informações úteis a respeito desse sistema, como por exemplo, regiões onde a partícula poderá ou não estar confinada.

2.1.2 Equações do movimento

Podemos obter analiticamente as equações do movimento de uma partícula P , de massa desprezível, movendo-se ao redor de um corpo central μ_1 e perturbada por um satélite μ_2 , que descreve um órbita circular ao redor do centro de massa desse sistema Figura 2.1. É importante ressaltar que a partícula não perturba o movimento dos corpos, mas sente a influência deles em seu movimento.

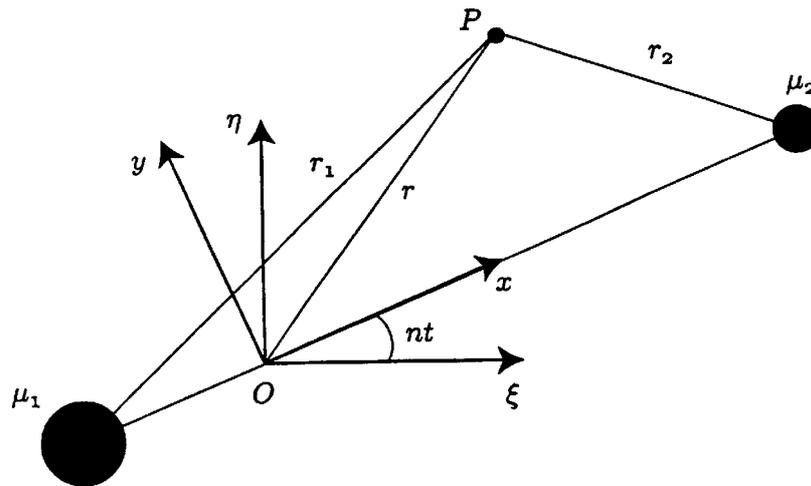


Figura 2.1 - Configuração do sistema que descreve o comportamento de uma partícula de massa desprezível orbitando um corpo central (μ_1), onde $\mu_1 = m_1/(m_1 + m_2)$, $\mu_2 = m_2/(m_1 + m_2)$ sendo m_1 a massa do planeta, m_2 a massa do satélite, r_1 a distância entre μ_1 e a partícula, r_2 a distância entre μ_2 e a partícula, (x, y) as coordenadas no sistema rotacional, (ξ, η) as coordenadas da partícula no sistema inercial e O a origem do sistema.

Consideramos, para facilitar, a distância entre o corpo central e o satélite, que é fixa, igual a um; $\mu = G(m_1 + m_2) = 1$ e o movimento médio (n) igual a um, onde G é a constante de gravitação universal.

Podemos assim escrever as componentes das equações do movimento da partícula de massa desprezível, em relação ao sistema de referência inercial, como sendo (MURRAY; DERMOTT, 1999).

$$\ddot{\xi} = \mu_1 \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3} \quad (2.1)$$

$$\ddot{\eta} = \mu_1 \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3} \quad (2.2)$$

onde

$$r_1^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 \quad (2.3)$$

$$r_2^2 = (\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2 \quad (2.4)$$

As equações do movimento também podem ser escritas no sistema de referência rotacional. Para isso escrevemos as coordenadas do corpo central e do satélite em relação ao centro de massa, $(x_1, y_1) = (-\mu_2, 0)$ e $(x_2, y_2) = (\mu_1, 0)$. Reescrevemos as equações (2.3) e (2.4) da forma

$$r_1^2 = (x + \mu_2)^2 + y^2 \quad (2.5)$$

$$r_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2 \quad (2.6)$$

Os dois sistemas de coordenadas podem ser relacionados através de uma matriz de rotação, que nos fornece as componentes das equações do movimento da partícula no sistema rotacional dadas pelas equações (2.7) e (2.8).

$$\mathcal{L} - 2n\mathcal{E} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.7)$$

$$\mathcal{L} + 2n\mathcal{E} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (2.8)$$

onde U é chamado de “pseudopotencial”, sendo escrito como:

$$U = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \quad (2.9)$$

O “pseudopotencial” é de grande importância em nosso estudo, pois através dele podemos analisar as posições de equilíbrio, determinando assim possíveis regiões de confinamento da partícula.

2.1.3 A integral de Jacobi

Informações a respeito do sistema podem ser obtidas através da única constante de integração que se obtém do problema de três corpos, sendo essa denominada de constante de Jacobi, C_j . Para obter a C_j multiplicamos a equação (2.7) por \mathcal{L} , e a equação (2.8) por \mathcal{E} e somando as duas temos:

$$\mathcal{L}\mathcal{L} - \mathcal{E}\mathcal{E} = \frac{\partial U}{\partial x} \mathcal{L} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathcal{E} = \frac{dU}{dt} \quad (2.10)$$

Integrando a equação acima temos:

$$\mathcal{L}^2 + \mathcal{E}^2 = 2U - C_j \quad (2.11)$$

ou seja, verificamos que a constante de Jacobi está diretamente relacionada à velocidade da partícula e ao pseudopotencial.

A constante de Jacobi pode ser utilizada para obter as curvas de velocidade zero (C.V.Z.). Quando a velocidade é igual a zero $2U = C_j$ ou

$$C_j = n^2(x^2 + y^2) + 2\left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) \quad (2.12)$$

Através da equação (2.12), para um determinado valor da constante de Jacobi, podemos obter em um plano x - y regiões onde a partícula pode estar confinada, podendo assim analisar os possíveis movimento dessa partícula.

Para ilustrar geramos, com o auxílio do software Mathematica as (C.V.Z.), para o caso em que $\mu_2 = 0,2$, e $C_j = 3,9$ e $C_j = 3,7$. As diferentes regiões de confinamento da partícula estão representadas nas Figuras 2.2a e 2.2b. Essas curvas foram obtidas utilizando a equação (2.12). As regiões escuras são regiões proibidas, onde a partícula não pode orbitar.

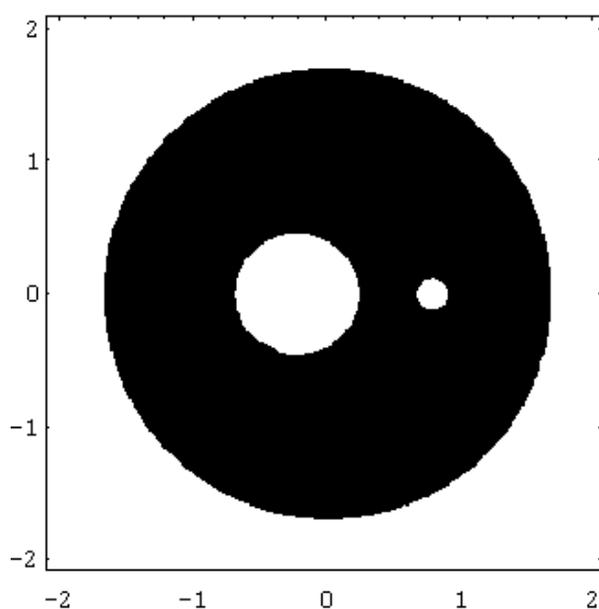


Figura 2.2a - Curvas de velocidade zero para um valor da razão de massa satélite/planeta igual a 0.2 e com o valor da constante de Jacobi igual a 3.9.

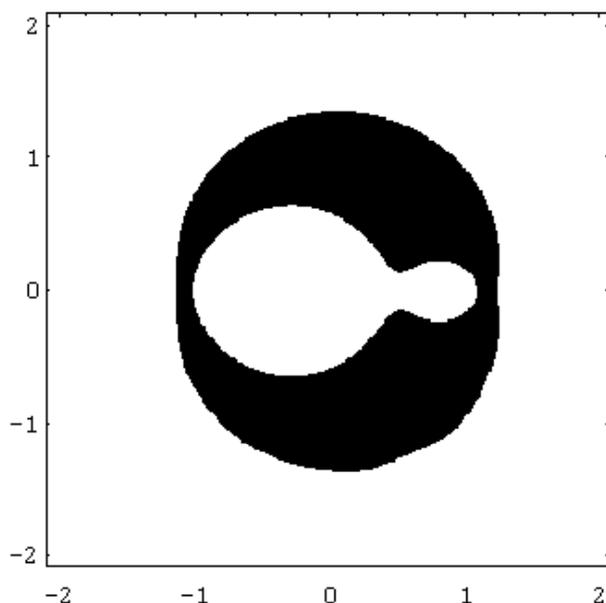


Figura 2.2b - Curvas de velocidade zero para um valor da razão de massa satélite/planeta igual a 0.2 e com o valor da constante de Jacobi igual a 3.7.

Ao analisarmos as figuras acima observamos que à medida que a energia do sistema diminui a região escura também diminui, aumentando assim a área onde a partícula pode se movimentar livremente.

2.1.4 Localização dos pontos de equilíbrio

Podemos obter no problema circular restrito e planar de três corpos pontos de equilíbrio que somente podem ser visualizados no sistema de referência rotacional. Nesses pontos de equilíbrio temos como nulas a velocidade e a aceleração da partícula.

A partir da definição de r_1 e r_2 , das equações (2.5) e (2.6), e usando o fato que $\mu_1 + \mu_2 = 1$ temos:

$$\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2 = x^2 + y^2 + \mu_1 \mu_2 \quad (2.13)$$

assim U , da equação (2.9), pode ser reescrito como:

$$U = \mu_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{n^2 r_1^2}{2} \right) + \mu_2 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{n^2 r_2^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \mu_1 \mu_2 n^2 \quad (2.14)$$

Lembrando que a aceleração e a velocidade da partícula são iguais a zero, podemos reescrever as equações (2.7) e (2.8) como:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial y} = 0$$
(2.15)

A solução trivial da equação (2.15) é:

$$\frac{\partial U}{\partial r_1} = \frac{\partial U}{\partial r_2} = 0$$
(2.16)

Com a qual se obtém $r_1 = r_2 = 1$, sendo que $n = 1$. As equações (2.7) e (2.8) podem ser escritas

$$(x + \mu_2)^2 + y^2 = 1$$

$$(x - \mu_1)^2 + y^2 = 1$$
(2.17)

onde se obtém duas soluções que são dadas pelas equações (2.18) e (2.19)

$$x = \frac{1}{2} - \mu_2$$
(2.18)

$$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$
(2.19)

Assim podemos obter os primeiros pontos de equilíbrio L_4 e L_5 como mostra a Figura 2.3. Estes pontos são denominados pontos de equilíbrio triangulares.

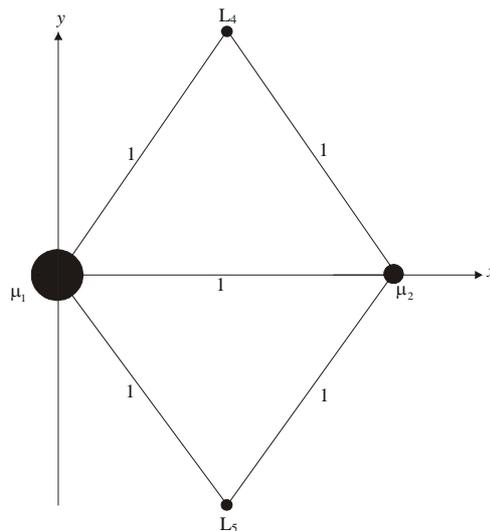


Figura 2.3 - Pontos de equilíbrio Lagrangianos triangulares L_4 e L_5 , para um sistema onde se tem um corpo central μ_1 e um satélite μ_2 , visualizados no sistema de referência rotacional.

Outra solução é obtida fazendo $y=0$ nas equações (2.15). Ao fazermos isso estamos obtendo os pontos de equilíbrio localizados ao longo do eixo x . Esses são os pontos de equilíbrio colineares, denominados de L_1 , L_2 e L_3 . O ponto L_1 fica entre as massas μ_1 e μ_2 , L_2 fica situado à direita de μ_2 e L_3 fica no eixo x negativo, a esquerda de μ_1 Figura 2.4.



Figura 2.4 - Pontos de equilíbrio Lagrangianos L_1 , L_2 e L_3 , conhecidos também como coplanares e são pontos de equilíbrio instáveis.

A estabilidade dos pontos de equilíbrio foi verificada quando um pequeno deslocamento é introduzido na posição inicial da partícula alterando as equações do movimento. Através de manipulações algébricas foi concluído que L_4 e L_5 são pontos de equilíbrio estáveis e L_1 , L_2 e L_3 pontos de equilíbrio instáveis, ou seja, na configuração estável a partícula passa a descrever um movimento oscilatório em torno da posição inicial enquanto na instável a órbita passa a ter um movimento aleatório, ou seja, não é possível prever o comportamento que a partícula irá descrever.

2.2 TIPOS DE CONFINAMENTO.

Existe na literatura dois tipos de mecanismo que podem confinar o movimento de uma partícula de um anel planetário. Um deles é o mecanismo de pastoreamento. Nesse mecanismo dois satélites localizados externamente e internamente ao anel confinam as partículas do anel através de torques de mesma intensidade e sinais contrários. Esse é o caso de Cordélia e Ofélia que pastoreiam o anel ϵ de Urano. O outro mecanismo de confinamento é devido a perturbação de um pequeno satélite imerso no anel fazendo com que as partículas descrevam, em um sistema de referência rotacional, uma órbita do tipo ferradura ou do tipo girino. Exemplo físico desses tipos de órbitas são as órbitas dos asteróides troianos, que libram em torno dos pontos de equilíbrio L_4 e L_5 descrevendo uma órbita tipo girino e dos satélites Jano – Epimeteu (YODER, et al., 1983). A descoberta do satélite Pan de Saturno, imerso na falha de

Encke, confinando as partículas do anel central em uma órbita tipo ferradura, confirmou essa teoria (SHOWALTER, 1991).

2.2.1 Órbitas de girino e ferradura

Como base para o estudo das órbitas de girino e ferradura foi analisado o artigo de Dermott e Murray (1981).

Na secção 2.1 estudamos o problema circular restrito de três corpos e obtivemos as equações do movimento que são dadas pelas equações (2.7) e (2.8), obtendo também uma expressão para a energia do sistema que é dada pela integral de Jacobi. Foram obtidos também pontos de equilíbrio Lagrangianos sendo três pontos instáveis e dois pontos estáveis.

Com o objetivo de obter uma órbita de girino, utilizamos simulações numéricas das equações completas do movimento do problema restrito de três corpos, na vizinhança do ponto de equilíbrio L_4 considerando $\mu_2 = 0.001$ para o caso de uma partícula e de um satélite orbitando Saturno sem considerar efeito de nenhuma força dissipativa. O resultado pode ser observado na Figura 2.5a e na figura 2.5b que é uma ampliação desse sistema. As condições iniciais estão descritas em Murray e Dermott (1999). O nome girino vem da forma alongada da órbita, sendo essa descrita em torno de L_4 . Essas órbitas também podem ser visualizadas no ponto L_5 . Consideramos importante ressaltar que nessa simulação o satélite e a partícula começaram com uma pequena excentricidade, ou seja, em uma órbita quase circular.

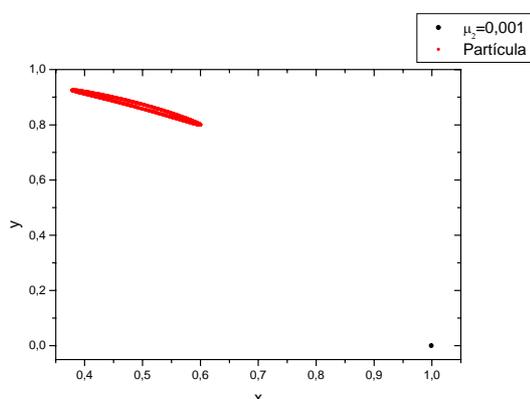


Figura 2.5a - Descreve o movimento de uma partícula no sistema rotacional que possui uma pequena excentricidade, ao redor do ponto de equilíbrio L_4 .

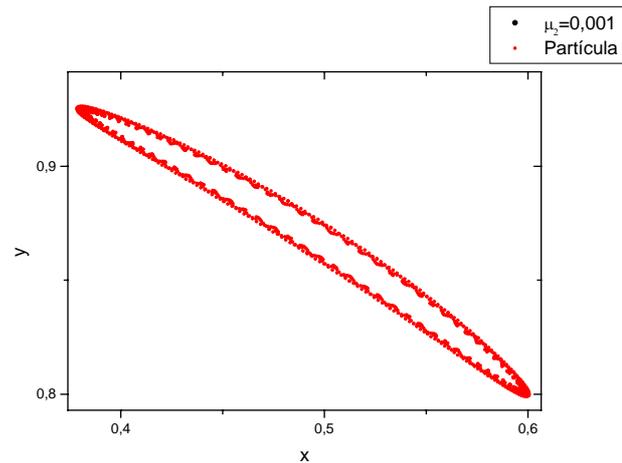


Figura 2.5b - Ampliação da região de girino da Figura 2.5a.

Um outro tipo de órbita pode ser obtido quando aumentamos a separação radial inicial da partícula com relação aos pontos L_4 e L_5 , essa órbita é denominada de ferradura, devido ao formato que ela apresenta no sistema rotacional.

É interessante ressaltar que existe uma relação entre a órbita de ferradura ou girino descrita pela partícula com a curva de velocidade zero, embora seja importante fixar que a curva de velocidade zero não é o caminho orbital da partícula, como veremos mais adiante. A órbita tipo ferradura é apresentada na Figura 2.6a.

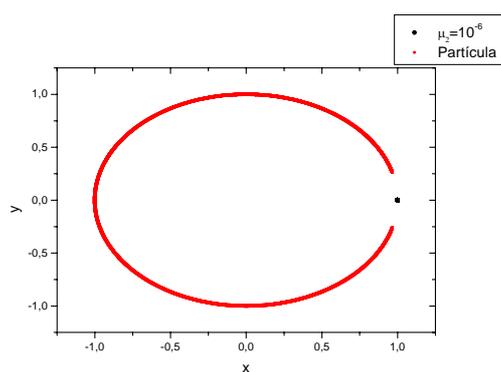


Figura 2.6a - Órbita de ferradura que libra em torno dos pontos de equilíbrio no sistema de referência rotacional com μ_2 . Essa integração foi obtida para $\mu_2 = 10^{-6}$.

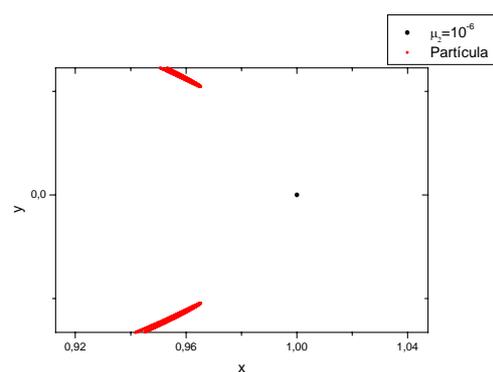


Figura 2.6b - Ampliação da Figura 2.6a.

Podemos discutir algumas propriedades e características das órbitas de girino e de ferradura.

Através de um estudo semi – numérico, Dermott e Murray (1981) chegaram à conclusão que o confinamento de uma partícula, devido à presença de um satélite que descreve uma órbita de ferradura, está diretamente relacionada à razão de massa entre o satélite e o corpo central. Para esse tipo de órbita quanto menor for essa razão de massa maior será a capacidade de confinamento das partículas e mais estável será a órbita descrita pelas mesmas. Em contra partida para uma órbita do tipo girino foi observada que quanto menor for essa razão de massa menos extensa radialmente será a órbita da partícula.

As Figuras 2.7a e 2.7b mostram o movimento de uma partícula que descreve uma órbita de ferradura, para diferentes valores de μ_2 . O gráfico é plotado em função da separação angular (θ°) pelo semi-eixo maior (a).

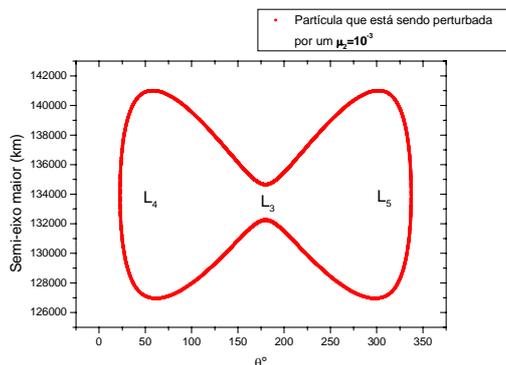


Figura 2.7a - Variação do semi-eixo maior em função da variação angular para uma razão de massa satélite/planeta igual a 10^{-3} .

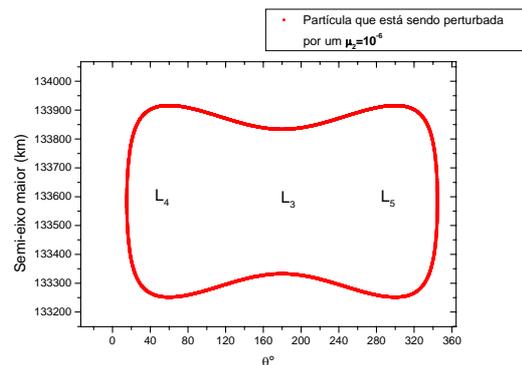


Figura 2.7b - Variação do semi-eixo maior em função da variação angular para uma razão de massa satélite/planeta igual a 10^{-6} .

Uma outra característica existente na órbita de ferradura é o gráfico da variação do semi-eixo maior em função do tempo e da excentricidade em função do tempo.

A Figura 2.8 mostra a variação de $a \times t$ para $\mu_2 = 10^{-6}$ estando a partícula posicionada a aproximadamente 300 km do semi-eixo maior do satélite, não considerando em nossas simulações nenhum tipo de força dissipativa. Nessa figura

podemos observar uma variação súbita do semi-eixo maior. Essa variação se dá quando a partícula encontra o satélite, sentindo a perturbação do mesmo e mudando assim seu semi-eixo maior. A Figura 2.9 mostra, para $\mu_2 = 10^{-6}$ a variação de e x *tempo*. Observamos nessa figura uma pequena oscilação da excentricidade. Os picos apresentados no gráfico estão relacionados justamente com a mínima aproximação que ocorre entre a partícula e o satélite.

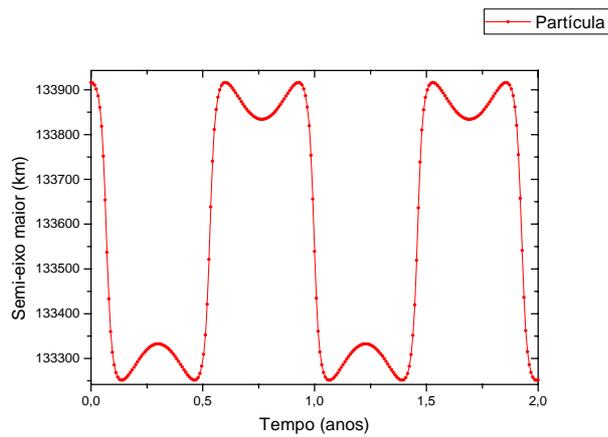


Figura 2.8 - Variação de a x *tempo* para $\mu_2 = 10^{-6}$.

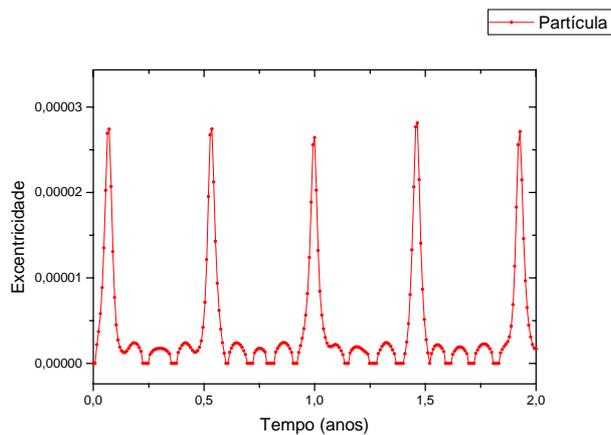


Figura 2.9 - Variação de e x *tempo* para $\mu_2 = 10^{-6}$.

2.2.2 Órbitas de ferraduras e girino e a curva de velocidade zero

A partir da curva de velocidade zero, como citado anteriormente, pode-se obter regiões proibidas, ou seja, regiões onde a partícula não pode estar. Essa curva também pode ser obtida em torno do ponto de equilíbrio L_4 Figura 2.10. Verifica-se que a

partícula descreve um movimento que é a soma de dois outros movimentos, o movimento do epiciclo (pequena elipse) e o movimento do epicentro (a elipse maior). O movimento da pequena elipse aparece devido ao fato de se estar considerando a partícula com uma pequena excentricidade orbitando ao redor do centro guiado como mostra a Figura 2.10, extraída de Murray e Dermott (1999).

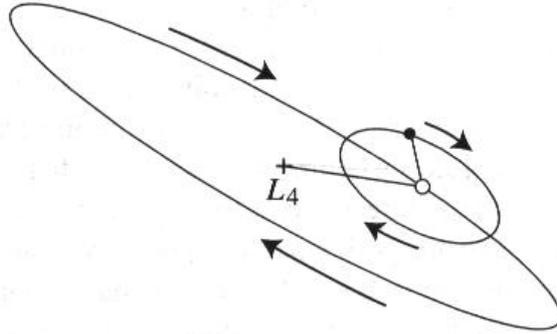


Figura 2.10 - Comportamento que uma partícula descreve próximo ao ponto de equilíbrio L_4 pode ser a soma de dois movimentos. (MURRAY; DERMOTT, 1999).

A curva de velocidade zero descrita pela Figura 2.10, para o caso circular, tem uma forma alongada com uma variação angular de aproximadamente 30° .

Pode-se estudar o comportamento de tal curva na vizinhança dos pontos de equilíbrio triangulares por meio de uma translação da origem do sistema e uma rotação de 30° e realizando também uma expansão em torno da nova origem do sistema.

Como por exemplo, utiliza-se como ponto de partida o ponto de equilíbrio L_4 , tendo esse ponto as seguintes coordenadas:

$$x = \frac{1}{2} - \mu_2 \quad \text{e} \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2.20)$$

A translação da origem é realizada fazendo a seguinte substituição:

$$x \rightarrow \left(\frac{1}{2} - \mu_2\right) + x \quad \text{e} \quad y \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} + y \quad (2.21)$$

nas equações:

$$r_1^2 = (x + \mu_2)^2 + y^2 \quad \text{e} \quad r_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2 \quad (2.22)$$

fazendo isso se obtém as seguintes equações

$$r_1^2 = x^2 + y^2 + x + y\sqrt{3} + 1 \quad (2.23)$$

$$r_2^2 = x^2 + y^2 - x + y\sqrt{3} + 1 \quad (2.24)$$

A rotação de 30° em torno do eixo z é realizada fazendo a seguinte substituição:

$$x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{y'}{2} \quad \text{e} \quad y \rightarrow -\frac{x'}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \quad \text{nas equações (2.23) e (2.24) obtendo as}$$

equações abaixo

$$r_1^2 = x'^2 + y'^2 + 2y' + 1 \quad (2.25)$$

$$r_2^2 = x'^2 + y'^2 + y' - x'\sqrt{3} + 1 \quad (2.26)$$

Utilizando a equação da energia para o caso em que a velocidade é igual a zero e escrevendo em termos das coordenadas temos:

$$C_j = 1 - \mu_2 - \sqrt{3}\mu_2 x' + (2 - \mu_2)y' + x'^2 + y'^2 + 2\left(\frac{(1 - \mu_2)}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) \quad (2.27)$$

onde os termos acima de segunda ordem de μ_2 foram desprezados. Isso pode ser feito porque se considera a razão de massa satélite/planeta muito pequena.

Realizando uma expansão em termos das novas coordenadas, a equação (2.27) torna-se mais simplificada, conforme mostra a equação (2.28)

$$C_j = 3 - \mu_2 + \frac{9}{4}\mu_2 x'^2 + 3y'^2 \quad (2.28)$$

Definindo:

$$C_j = 3 + \gamma\mu \quad (2.29)$$

onde γ é uma quantidade pequena, sendo igual a (-1) nos pontos L_4 e L_5 .

Assim, igualando a equação (2.28) com (2.29), devido ao fato de C_j ser considerado uma constante, obtemos a equação (2.30)

$$\frac{x'^2}{(4/9)(1 + \gamma)} + \frac{y'^2}{(\mu_2/3)(1 + \gamma)} = 1 \quad (2.30)$$

Uma análise da equação (2.30) possibilita ver que a curva de velocidade zero é uma elipse centrada no ponto de equilíbrio L_4 com $a' = (2/3)\sqrt{1 + \gamma}$ e $b' = \sqrt{(\mu_2/3)(1 + \gamma)}$ onde a' representa o semi-eixo maior e b' representa o semi-eixo menor. Como $a'/b' = 1/2\sqrt{3\mu_2}$ verifica-se que a elipse torna-se altamente alongada quando $\mu_2 \rightarrow 0$.

Pode-se estudar a relação existente entre a curva de velocidade zero e a órbita descrita pela partícula para o caso onde $\mu_2 \ll \mu_2^{1/2} \ll \mu_2^{1/3} \ll 1$. Considera-se que a excentricidade da partícula é bem próxima a zero e assim pode-se negligenciar o movimento que o epíciclo realiza em torno do centro guiado.

Existe uma relação matemática entre a forma das curvas de velocidade zero com os pontos de equilíbrio e valores da constante de Jacobi que é dada pelas equações abaixo

$$C_{L_1} \approx 3 + 3^{4/3} \mu_2^{2/3} - 10\mu_2/3 \quad (2.31)$$

$$C_{L_2} \approx 3 + 3^{4/3} \mu_2^{2/3} - 14\mu_2/3 \quad (2.32)$$

$$C_{L_3} \approx 3 + \mu_2 \quad (2.33)$$

$$C_{L_4} \approx 3 - \mu_2 \quad (2.34)$$

$$C_{L_5} \approx 3 - \mu_2 \quad (2.35)$$

Essas equações também podem ser caracterizadas pela quantidade γ definida na equação (2.29) onde

$$-1 \leq \gamma \leq +1 \quad (2.36)$$

sendo $\gamma = -1$ corresponde aos valores da constante de Jacobi nos pontos triangulares. O ponto de equilíbrio estável L_3 está associado a $\gamma = +1$ e nesse caso a curva formada é uma ferradura que pode ser escrita como:

$$C_j = 3 + \xi\mu_2 + O(\mu_2) \quad (2.37)$$

onde.

$$0 \leq \xi \leq 3^{4/3} \quad (2.38)$$

Nesse caso, quando $\xi = 0$ obtemos o valor da constante de Jacobi correspondente ao ponto L_3 , quando $\xi = 3^{4/3}$ obtemos os valores correspondentes a L_1 e L_2 . Portanto os valores de ξ, γ servem para parametrizar o formato da curva de velocidade zero.

Como $n = 1$ e utilizando a solução particular da energia da equação (2.14) tem-se:

$$2U = 2\frac{\mu_1}{r_1} + 2\frac{\mu_2}{r_2} + \mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2 - \mu_1 \mu_2 \quad (2.39)$$

A velocidade pode ser expressa em coordenadas polares, podendo ser relacionada com a pseudoenergia e com a constante de Jacobi, como mostra a equação abaixo

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 = 2U - C_j \quad (2.40)$$

Como considera-se $\mu_2 \ll 1$ pode-se escrever a origem do sistema de coordenadas centrada no corpo principal, ou seja em μ_1 , não precisando fazer uma distinção entre r e r_1 .

Pode-se escrever a órbita da partícula bem próxima a uma órbita circular de raio r , assim tem-se

$$r = 1 + \delta r \quad (2.41)$$

onde $\delta r \ll 1$. Nessas circunstância $|\dot{r}| \ll |r\dot{\theta}|$ exceto na volta próxima aos pontos de equilíbrio onde temos $\dot{\theta} = 0$ e $\dot{r} \neq 0$. Portanto:

$$v \cong r\dot{\theta} = -\frac{3}{2}\delta r \quad (2.42)$$

Utilizando esse mesmo tipo de aproximação pode-se simplificar a expressão para $2U$ da equação (2.39)

$$2U = 3 + 3\delta r^2 + \mu_2 H \quad (2.43)$$

onde

$$H = \frac{2}{r_2} + r_2^2 - 4 \quad (2.44)$$

Usando o fato de que $v^2 = 2U - C_j$, temos:

$$\frac{9}{4}\delta r^2 = 3 + 3\delta r^2 + \mu_2 H - C_j \quad (2.45)$$

considerando $v^2 = 0$, a curva de velocidade zero pode ser definida e obtida pela equação abaixo

$$0 = 3 + 3\delta r_{C.V.Z.}^2 + \mu_2 H_{C.V.Z.} - C_j \quad (2.46)$$

onde o subscrito C.V.Z. indica a curva de velocidade zero e não a órbita da partícula. Fazendo C_j constante pode-se obter uma relação que é dada pela igualdade entre as equações (2.45) e (2.46). Assim obtém-se a equação (2.47)

$$\delta r^2 = (2\delta r_{C.V.Z.})^2 + \frac{4}{3}\mu_2 (H_{C.V.Z.} - H) \quad (2.47)$$

Para os movimentos em órbita de girino e de ferradura considera-se:

$$H_{C.V.Z.} - H \approx \delta r \text{ e } \mu_2 \delta r \ll \delta r^2, \text{ logo tem-se:}$$

$$\delta r = 2\delta r_{C.V.Z.} \quad (2.48)$$

Para o caso da órbita de ferradura a igualdade se faz entre as equações (2.37) e (2.45), obtendo a equação (2.49)

$$\delta r = 2\sqrt{\frac{\xi}{3}}\mu_2^{1/3} = 2\delta r_{C.V.Z.} \quad (2.49)$$

Para a órbita de girino utilizam-se as equações (2.29) e (2.45), obtendo a equação (2.50)

$$\delta r = 2\sqrt{\frac{\mu_2[\gamma - H]}{3}} \quad (2.50)$$

Com isso consegue-se obter a largura da órbita de ferradura ou de girino que uma partícula descreve no sistema rotacional, estando essa partícula confinada devido a presença de um pequeno satélite.

No próximo capítulo iremos apresentar a dinâmica que ocorre quando existe N satélites coorbitais, orbitando ao redor de um corpo central.

CAPÍTULO 3 DINÂMICA DE SATÉLITES COORBITAIS

3.1 INTRODUÇÃO

Esse capítulo tem-se como finalidade estudar o trabalho de Salo e Yoder (1988), onde foi descrito o movimento de N satélites coorbitais ($2 \leq N \leq 9$) ao redor de um corpo central. Foram obtidas, como solução, configurações de equilíbrio dos satélites, ou seja, regiões onde os satélites estariam fixos no sistema de referência rotacional, desde que não houvesse nenhuma perturbação que não fosse a interação gravitacional.

Essas configurações de equilíbrio podem ser obtidas de modo analítico para o caso $N = 2$ e para $N > 2$ são obtidas de modo numérico. As equações do movimento foram escritas em coordenadas polares e em termos da separação angular entre os satélites (Φ). Elas estão apresentadas de modo detalhado para o caso $N = 2$ podendo ser generalizadas para uma configuração de mais satélites. No modelamento matemático considerou-se o movimento dos satélites em torno do corpo central como sendo planar e circular e como sendo idênticas as massas dos satélites. Considerou-se também que o corpo central possui uma massa muito maior que as dos satélites e que a interação mútua entre os corpos de origem gravitacional é a única atuante no sistema.

Como resultados Salo e Yoder (1988) obtiveram várias configurações de equilíbrio, estáveis e instáveis. A estabilidade foi verificada quando inseriram nas equações do movimento uma pequena perturbação inicial.

Para o caso de satélites coorbitais igualmente espaçados, a configuração de equilíbrio torna-se instável para $N \leq 6$ Figura 3.4. Enquanto que para $2 \leq N \leq 8$ existe uma outra configuração de equilíbrio estável Figura 3.2 onde a separação máxima entre os satélites é de 60° . Para $N \geq 7$, onde a configuração é igualmente espaçada, temos também uma configuração de equilíbrio estável e para o caso de $N \geq 9$ todas as configurações tornam-se estáveis.

3.2 AS EQUAÇÕES DINÂMICAS SIMPLIFICADAS

Iremos apresentar as equações do movimento para o caso em que temos dois satélites orbitando ao redor de um corpo central, levando em consideração além da atração gravitacional que o corpo central exerce sobre os satélites, a interação gravitacional mútua entre eles, com o intuito de obter a separação angular entre os satélites.

Este problema já foi estudado por vários pesquisadores entre eles Brown e Shook (1964), Murray e Dermott (1999) que obteve a função perturbadora para dois satélites ao redor de um corpo central, e uma generalização das equações do movimento para vários satélites pode ser vista no trabalho de Salo e Yoder (1988). Um estudo sobre essa configuração também pode ser vista na dissertação de mestrado de Mourão (2001).

Consideremos o sistema de referência como mostra a Figura 3.1, sendo m_1 e m_2 as massas dos respectivos satélites e m_p a massa do corpo principal, estando os satélites descrevendo uma órbita circular ao redor de m_p .

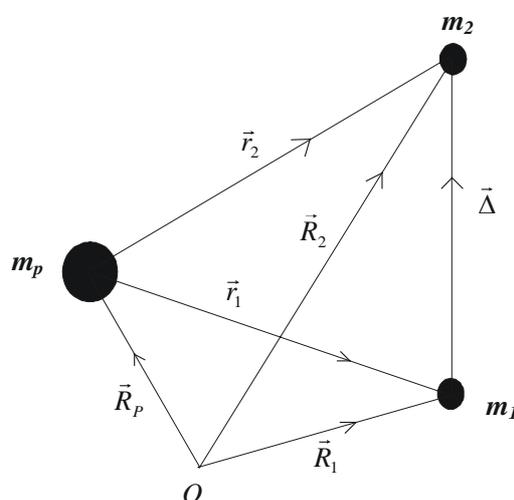


Figura 3.1 - Configuração de dois satélites ao redor de um corpo central em relação a uma origem fixa arbitrária O , onde \vec{r}_1 e \vec{r}_2 são os vetores posição dos respectivos satélites com relação ao corpo central. As três massas possuem os vetores posição \vec{R}_1 , \vec{R}_2 e \vec{R}_p em relação a origem.

Podemos escrever as equações do movimento dos corpos em relação a origem O utilizando a segunda Lei de Newton e a Lei da Gravitação Universal. Assim temos:

$$m_p \ddot{R}_p = G \left(m_1 m_p \frac{\rho}{r_1^3} + m_2 m_p \frac{\rho}{r_2^3} \right) \quad (3.1)$$

$$m_1 \ddot{R}_1 = G \left(m_1 m_2 \frac{\rho}{\Delta^3} - m_p m_1 \frac{\rho}{r_1^3} \right) \quad (3.2)$$

$$m_2 \ddot{R}_2 = G \left(-m_1 m_2 \frac{\rho}{\Delta^3} - m_p m_2 \frac{\rho}{r_2^3} \right) \quad (3.3)$$

onde G é a constante gravitacional e

$$|\rho| = r_1 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{1/2}, \quad |\rho| = r_2 = (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{1/2} \quad (3.4)$$

A aceleração dos satélites em relação ao corpo central são dadas pelas equações (3.5) e (3.6)

$$\ddot{r}_1 = \ddot{R}_1 - \ddot{R}_p \quad (3.5)$$

$$\ddot{r}_2 = \ddot{R}_2 - \ddot{R}_p \quad (3.6)$$

Substituindo as equações (3.1), (3.2) e (3.3) nas equações acima temos:

$$\ddot{r}_1 = G m_2 \left(\frac{\rho}{\Delta^3} - \frac{\rho}{r_2^3} \right) - G \frac{\rho}{r_1^3} (m_p + m_1) \quad (3.7)$$

$$\ddot{r}_2 = G m_1 \left(\frac{\rho}{\Delta^3} - \frac{\rho}{r_1^3} \right) - G \frac{\rho}{r_2^3} (m_p + m_2) \quad (3.8)$$

Com o intuito de simplificar as equações obtidas acima, foram definidos:

$$\mu_1 = m_1 + m_p \text{ e } \mu_2 = m_2 + m_p.$$

Feito isso, podemos reescrever as equações (3.7) e (3.8)

$$\ddot{r}_1 = G m_2 \left(\frac{\rho}{\Delta^3} - \frac{\rho}{r_2^3} \right) - G \frac{\rho}{r_1^3} \mu_1 \quad (3.9)$$

$$\ddot{r}_2 = G m_1 \left(\frac{\rho}{\Delta^3} - \frac{\rho}{r_1^3} \right) - G \frac{\rho}{r_2^3} \mu_2 \quad (3.10)$$

As acelerações relativas podem ser escritas como gradiente de uma função escalar

$$\ddot{r}_1 = \nabla_1 (U_1 + F_{12}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y_1} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z_1} \hat{k} \right) (U_1 + F_{12}) \quad (3.11)$$

$$\ddot{r}_2 = \nabla_2 (U_2 + F_{21}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y_2} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z_2} \hat{k} \right) (U_2 + F_{21}) \quad (3.12)$$

onde:

$$U_1 = G \frac{\mu_1}{r_1}, \quad U_2 = G \frac{\mu_2}{r_2},$$

$$F_{12} = G \frac{m_2}{\Delta} - G m_2 \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_2^3} \quad (3.13)$$

e

$$F_{21} = G \frac{m_1}{\Delta} - G m_1 \frac{\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1}{r_1^3} \quad (3.14)$$

sendo F_{12} e F_{21} denominadas funções perturbadoras.

As equações (3.13) e (3.14) podem ser reescritas em termos das coordenadas polares onde o produto escalar entre os vetores posição \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 é dado pela equação (3.15) e a distância entre eles pela equação (3.16)

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = |\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2| \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad \text{e} \quad (3.15)$$

$$\Delta = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} \quad (3.16)$$

$$F_{12} = G m_2 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{r_2^2} \right) \quad (3.17)$$

$$F_{21} = G m_1 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}{r_1^2} \right) \quad (3.18)$$

É importante lembrar que o estudo realizado se aplica ao caso de dois satélites orbitando um corpo primário, sendo a generalização possível de se fazer.

Depois da obtenção das equações do movimento, nós podemos continuar nosso estudo retornando ao artigo de Salo e Yoder (1988), com o objetivo de obter a separação angular entre os satélites e as possíveis informações que esse sistema nos oferece.

Para simplificar podemos descrever o movimento dos corpos em coordenadas polares, como mostra Brown e Shook (1964), tendo esses corpos a mesma massa.

Para m_1 temos:

$$\frac{d}{dt} \left(r_1^2 \frac{d\theta_1}{dt} \right) = \frac{\partial F_{12}}{\partial \theta_1} \quad (3.19)$$

e

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} - r_1 \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right)^2 = -\frac{G\mu_1}{r_1^2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial r_1} \quad (3.20)$$

e para m_2 temos:

$$\frac{d}{dt} \left(r_2^2 \frac{d\theta_2}{dt} \right) = \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta_2} \quad (3.21)$$

e

$$\frac{d^2 r_2}{dt^2} - r_2 \left(\frac{d\theta_2}{dt} \right)^2 = -G \frac{\mu_2}{r_2^2} + \frac{\partial F_{21}}{\partial r_2} \quad (3.22)$$

onde as equações (3.19) e (3.21) estão relacionadas com a componente angular da aceleração e as equações (3.20) e (3.22) com a componente radial.

É importante ressaltar que a função perturbadora F_{12} não é diretamente proporcional a função perturbadora F_{21} , isso ocorre devido a existência de uma não – simetria no sistema que está relacionada à parte indireta da função. Com o intuito de simplificar os cálculos numéricos, faremos uma aproximação, ou seja, $F_{12} \approx F_{21}$, essa aproximação pode ser feita em relação ao semi-eixo maior e ao movimento médio dos satélites, sendo eles a_0 e n_0 (SALO; YODER, 1988).

Sabemos que o satélite m_1 possui uma órbita circular ao redor do corpo central com uma velocidade angular média n_0 , assim temos:

$$n_0 = \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{2\pi}{T_0} \quad (3.23)$$

onde T_0 é o período orbital do satélite m_1 , que é o mesmo de m_2 ao redor do corpo principal.

Utilizando a terceira de Kepler

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a_0^3 \quad (3.24)$$

e utilizando a equação (3.23) e a (3.24) e realizando algumas manipulações algébricas obtemos a equação (3.25)

$$n_0 = \mu^{1/2} a_0^{-3/2} \quad (3.25)$$

No problema circular restrito de três corpos o terceiro corpo possui massa desprezível, logo não afeta o movimento dos outros dois corpos, contudo em nosso

estudo isso não ocorre devido ao fato dos dois satélites possuírem massas iguais, assim teremos que considerar uma pequena variação radial e no movimento médio dos satélites.

A velocidade angular de m_1 pode ser escrita como:

$$\frac{d\theta_1}{dt} = n_0 + \delta n_1 \quad (3.26)$$

e para m_2

$$\frac{d\theta_2}{dt} = n_0 + \delta n_2 \quad (3.27)$$

Derivando n_0 da equação (3.25) em relação a a_0 , obtemos:

$$da_0 = -\frac{2}{3} \frac{dn_0}{\mu^{1/2} a_0^{-5/2}} \quad (3.28)$$

lembrando que:

$$\frac{1}{n_0} = \frac{a_0^{3/2}}{\mu^{1/2}} \quad (3.29)$$

podemos reescrever a equação (3.28) da forma

$$da_0 = -\frac{2}{3} \frac{dn_0}{n_0} a_0 \quad (3.30)$$

A variação da distância radial (da_0) dos satélites com relação a Saturno devido a uma perturbação no seu movimento médio é descrita pela equação (3.30). Assim podemos escrever que r_1 é dado por a_0 acrescido desta perturbação, semelhante para r_2 , como mostra as equações (3.31) e (3.32)

$$r_1 = a_0 + da_0 + \delta r_1 \quad (3.31)$$

$$r_2 = a_0 + da_0 + \delta r_2 \quad (3.32)$$

Substituindo a equação (3.30) na equação (3.31) temos para m_1

$$r_1 = a_0 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\delta n_1}{n_0} \right) + \delta r_1 \quad (3.33)$$

Substituindo a equação (3.30) na equação (3.32) temos para m_2 a equação (3.34)

$$r_2 = a_0 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\delta n_2}{n_0} \right) + \delta r_2 \quad (3.34)$$

Pode-se escrever as equações do movimento para os satélites em termos dos valores médios do semi-eixo maior e da velocidade angular média, levando em consideração uma pequena variação na distância radial e na velocidade devido à interação mútua entre os satélites. No caso de m_1 , a variação ocorre devido a presença de m_2 e para m_1 esse deslocamento ocorre devido a presença de m_2 .

Para obtermos as equações de m_1 iremos substituir as equações (3.33) e (3.26) nas equações (3.19) e (3.20). Desprezando os termos superiores de segunda ordem em δn_1 e δr_1 obtemos:

$$-\frac{1}{3}a_0^2 \frac{d}{dt}(\delta n_1) + 2a_0 n_0 \frac{d}{dt}(\delta r_1) = \frac{\partial F_{12}}{\partial \theta_1} \quad (3.35)$$

e

$$-\frac{2}{3} \frac{a_0}{n_0} \frac{d^2}{dt^2}(\delta n_1) + \frac{d^2}{dt^2}(\delta r_1) - 3n_0^2 \delta r_1 = \frac{\partial F_{12}}{\partial r_1} \quad (3.36)$$

Para se obter as equações para m_2 substituímos as equações (3.34) e (3.27) nas equações (3.21) e (3.22). Desprezando os termos superiores de segunda ordem em δn_2 e δr_2 temos:

$$-\frac{1}{3}a_0^2 \frac{d}{dt}(\delta n_2) + 2a_0 n_0 \frac{d}{dt}(\delta r_2) = \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta_2} \quad (3.37)$$

e

$$-\frac{2}{3} \frac{a_0}{n_0} \frac{d^2}{dt^2}(\delta n_2) + \frac{d^2}{dt^2}(\delta r_2) - 3n_0^2 \delta r_2 = \frac{\partial F_{21}}{\partial r_2} \quad (3.38)$$

Com o objetivo de obter a separação angular entre os satélites m_1 e m_2 , iremos analisar as equações do movimento que estão relacionadas com a parte angular, sendo desprezada a parte radial.

A função perturbadora para os satélites estava inicialmente escrita em termos de r_1, r_2 e $(\theta_2 - \theta_1)$, podendo agora ser escrita em termos de a_0, a_0 e $(\theta_2 - \theta_1)$.

Definindo Φ como sendo a separação angular entre os satélites podemos escrever a distância entre os satélites em termos de Φ como

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= a_0^2 + a_0^2 - 2a_0 a_0 \cos \Phi \\ \Delta^2 &= 2a_0^2(1 - \cos \Phi) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Sabendo que

$$(1 - \cos \Phi) = 2 \operatorname{sen}^2(\Phi/2)$$

Podemos reescrever a equação (3.39)

$$\Delta^2 = 4a_0^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\Phi}{2}\right) \quad (3.40)$$

As equações das funções perturbadoras (3.17) e (3.18) em termos do a_0 , Δ e Φ são:

$$F_{12} = \frac{Gm_2}{a_0} \left[\frac{1}{2|\operatorname{sen}(\Phi/2)|} - \cos \Phi \right] \quad (3.41)$$

e

$$F_{21} = \frac{Gm_1}{a_0} \left[\frac{1}{2|\operatorname{sen}(\Phi/2)|} - \cos \Phi \right] \quad (3.42)$$

Substituindo a equação (3.41) na equação (3.35) e levando em consideração somente a parte radial obtemos:

$$-\frac{1}{3}a_0^2 \frac{d(\delta n_1)}{dt} = \frac{Gm_2}{a_0} \left[\frac{1}{2|\operatorname{sen}[\Phi/2]} - \cos \Phi \right] \quad (3.43)$$

Sabendo que:

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = \frac{d^2(\theta_2 - \theta_1)}{dt^2} \quad (3.44)$$

e como $m_1 F_{12} = m_2 F_{21}$ obtemos:

$$-\frac{1}{3} \frac{d^2\Phi}{dt^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{a_0^3} \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\frac{1}{2|\operatorname{sen}(\Phi/2)|} - \cos \Phi \right) \quad (3.45)$$

Definindo

$$\varepsilon^2 = \frac{m_1 + m_2}{m_p} \quad (3.46)$$

e multiplicando (3.46) por n_0^2 temos:

$$\varepsilon^2 n_0^2 = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_p} \right) n_0^2 \quad (3.47)$$

Da terceira lei de Kepler temos

$$n_0^2 a_0^3 = Gm_p \Rightarrow n_0^2 = Gm_p / a_0^3 \quad (3.48)$$

Substituindo a equação (3.48) na equação (3.47) temos

$$\varepsilon^2 n_0^2 = \frac{(m_1 + m_2)G}{a_0^3} \quad (3.49)$$

Substituindo a equação (3.49) na equação (3.45) obtemos a equação abaixo

$$-\frac{1}{3} \frac{d^2 \Phi}{dt^2} = \varepsilon^2 n_0^2 \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\frac{1}{2|\text{sen}(\Phi/2)|} - \cos \Phi \right) \quad (3.50)$$

Multiplicando a equação (3.50) por $d\Phi/dt$ e igualando a zero temos:

$$-\frac{1}{3} \frac{d^2 \Phi}{dt^2} \frac{d\Phi}{dt} - \varepsilon^2 n_0^2 \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\frac{1}{2|\text{sen}(\Phi/2)|} - \cos \Phi \right) \frac{d\Phi}{dt} = 0 \quad (3.51)$$

Integrando a equação (5.51) obtemos:

$$C = -\frac{1}{6} \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^2 - \varepsilon^2 n_0^2 \left(\frac{1}{2|\text{sen}(\Phi/2)|} - \cos \Phi \right) \quad (3.52)$$

onde C é uma constante de integração que está relacionada com a energia do sistema.

Definindo:

$$x = \left| \text{sen} \frac{\Phi}{2} \right| \quad (3.53)$$

e sabendo que:

$$\cos \Phi = 1 - 2 \text{sen}^2(\Phi/2) \quad (3.54)$$

podemos substituir a equação (3.53) em (3.54) obtendo a equação (3.55)

$$\cos \Phi = 1 - 2x^2 \quad (3.55)$$

Substituindo a equação (3.55) na equação (3.52) temos:

$$C = -\frac{1}{6} \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^2 - \varepsilon^2 n_0^2 \left(\frac{1}{2x} - 1 + 2x^2 \right) \quad (3.56)$$

Definindo $E = C - \varepsilon^2 n_0^2$ obtemos:

$$E = -\frac{1}{6} \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^2 - \frac{\varepsilon^2 n_0^2}{2x} [1 + 4x^3] \quad (3.57)$$

Uma análise da equação (3.57) nos possibilita ver que o primeiro termo dessa equação pode estar associado à energia cinética do sistema. Podemos observar que a

constante E será definida como sendo uma quantidade negativa, pois trabalhamos com o módulo de x no segundo termo.

Reescrevendo a equação (3.57) obtemos:

$$\sqrt{-6E} = \sqrt{\frac{x}{x + \frac{\varepsilon^2 n_0^2}{2E}(1 + 4x^3)}} \frac{d\Phi}{dt} \quad (3.58)$$

definindo uma função $R(x)$ da forma:

$$R(x) = x - A(1 + 4x^3) \quad (3.59)$$

onde:

$$A = -\frac{\varepsilon^2 n_0^2}{2E} \quad (3.60)$$

assim

$$\sqrt{-6E} = \sqrt{\frac{x}{R(x)}} \frac{d\Phi}{dt} \quad (3.61)$$

Integrando a equação (3.61) obtemos a equação (3.62)

$$(t_f - t_i)\sqrt{-6E} = \int_{\Phi_i}^{\Phi_f} \left(\frac{x}{R(x)} \right)^{1/2} d\Phi \quad (3.62)$$

A equação acima representa a evolução temporal de um par de satélites coorbitais orbitando um corpo central para um dado valor da constante E .

Isolando $d\Phi/dt$ da equação (3.61) temos:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \sqrt{-6E} \sqrt{\frac{R(x)}{x}} \quad (3.63)$$

Quando fazemos $d\Phi/dt=0$ obtemos a mínima (Φ_{\min}) ou a máxima (Φ_{\max}) separação angular entre os satélites. Para que isso ocorra se faz necessário que $R(x)=0$ e ao fazermos isso obtemos as raízes desse polinômio, ou seja, x_1 , x_2 e x_3 , para um dado valor de A .

Para auxiliar na resolução de equação (3.59) iremos definir:

$$\text{sen } \alpha = (3A)^{3/2} \quad (3.64)$$

Então para $R(x_1)=0$ encontramos

$$x_1 = \frac{\text{sen}(\alpha/3)}{(3A)^{1/2}} \quad (3.65)$$

Portanto a separação angular mínima pode ser lembrada a partir da equação (3.53)

$$\Phi_{\min} = 2 \arcsen(x_1) \quad (3.66)$$

Existindo também mais duas raízes

$$x_2 = \frac{\sen\left(\frac{\alpha}{3} + 120^\circ\right)}{(3A)^{1/2}} \quad (3.67)$$

$$x_3 = \frac{\sen\left(\frac{\alpha}{3} - 120^\circ\right)}{(3A)^{1/2}} \quad (3.68)$$

A estabilidade dos pontos é verificada derivando a equação (3.57) e lembrando que $d^2\Phi/dt^2 = 0$ e $d\Phi/dt = 0$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\varepsilon^2 n_0^2}{2x} (1 + 4x^3) \right] \frac{dx}{d\Phi} = 0 \quad \text{ou} \quad (3.69)$$

$$\frac{\varepsilon^2 n_0^2}{2} \left[-\frac{1}{x^2} + 8x \right] \frac{dx}{d\Phi} = 0 \quad (3.70)$$

Para que a igualdade seja válida é necessário que:

$$x = \left(\frac{1}{8}\right)^{1/3} = 0.5 \quad (3.71)$$

De onde encontramos $A = \frac{1}{3}$, $x_1 = \sen 30^\circ$ ou seja $\Phi_{\min} = \pm 60^\circ$, que são os pontos de equilíbrio estáveis Lagrangianos L_4 e L_5 . Outro ponto corresponde a separação máxima entre os satélites $\Phi_{\max} = \pi$ (o que implica $x = 1$) e $d\Phi/dt = 0$, substituindo esses valores na equação (3.57) obtemos:

$$E = -\frac{5\varepsilon^2 n_0^2}{2} \text{ e } A = 0.2 \quad (3.72)$$

Assim obtivemos os pontos de equilíbrio para dois satélites de mesma massa que orbitam ao redor de um corpo central.

De modo numérico pode-se obter, para ($N > 2$), outras configurações de equilíbrio, sendo isso realizado por Salo e Yoder (1988). Esse estudo será discutido na próxima secção.

3.3 CONFIGURAÇÕES ESTACIONÁRIAS.

Através de simulações numéricas Salo e Yoder (1988) obtiverem três tipos de configurações estacionárias, ou seja, três configurações diferentes de pontos de equilíbrio. Essas configurações estão relacionadas com a posição inicial dos satélites. Elas são definidas como: Tipo I, Tipo II e Tipo III.

Tipo Ia.

Nessa configuração tem-se $2 \leq N \leq 8$ satélites posicionados em uma configuração de equilíbrio estável. A separação angular entre os satélites nessa configuração é $\leq 60^\circ$ Figura 3.2.

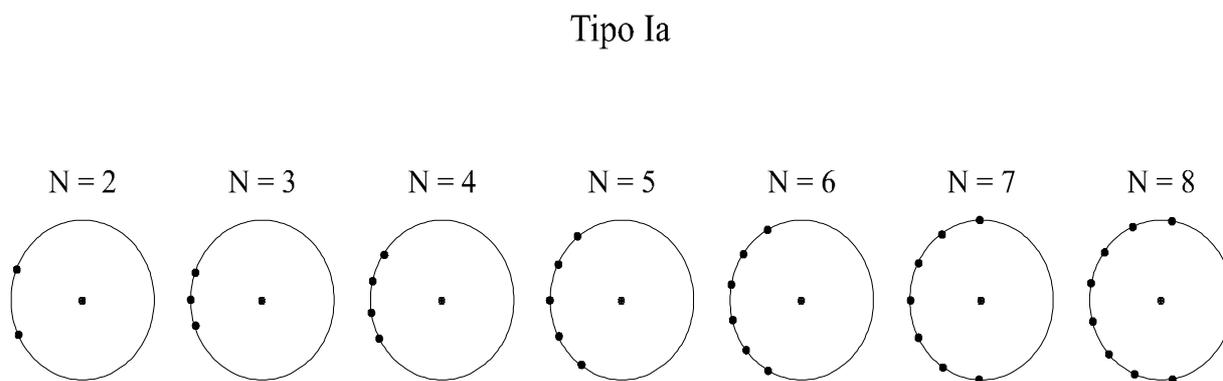


Figura 3.2 - Configurações de equilíbrio estável, onde os círculos pretos correspondem às configurações de equilíbrio estáveis. Pode se observar a existência de uma simetria com relação a um eixo horizontal imaginário.

Tipo Ib.

A configuração de equilíbrio apresentada nesse sistema é instável para o caso $7 \leq N \leq 8$. Os satélites estão posicionados por toda órbita existindo uma simetria, com relação ao eixo x, entre as separações angulares dos satélites. Neste caso não se tem uma separação entre os satélites maior que 60° Figura 3.3.

Tipo Ib

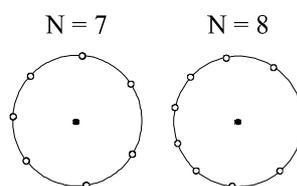


Figura 3.3 - Configuração de equilíbrio instável, onde os círculos brancos correspondem às configurações de equilíbrio instáveis.

Tipo II.

Os satélites estão posicionados de modo que a separação angular seja a mesma entre eles. Esta configuração é considerada de equilíbrio instável para $2 \leq N \leq 6$. A partir de $N \geq 7$ esta configuração torna-se estável Figura 3.4.

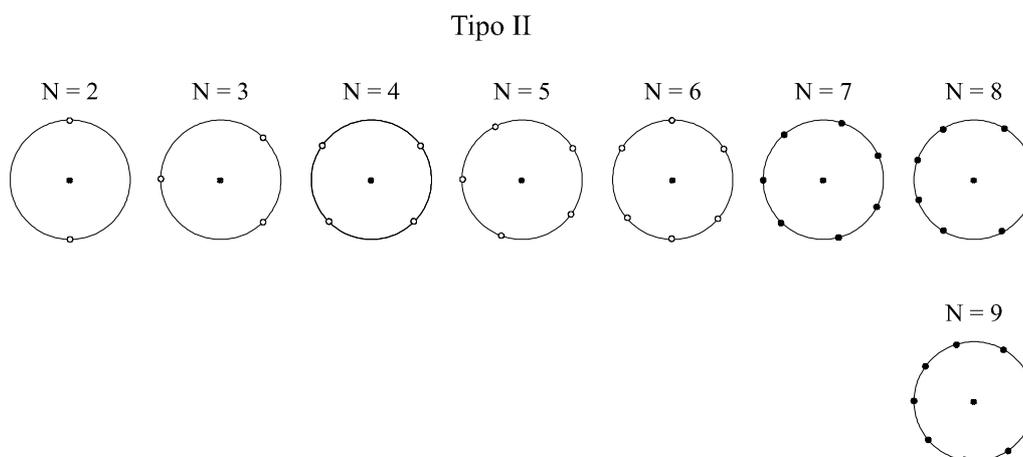


Figura 3.4 - Para o caso em que $N \leq 6$ onde os espaçamentos entre os satélites são idênticos, se obtém configuração de equilíbrio instável. A partir de sete satélites igualmente espaçados essa configuração torna-se estável.

Tipo IIIa.

Esta configuração é denominada de $N-1$. Nesta configuração tem-se um satélite posicionado de modo fixo a 180° do corpo central e os outros satélites posicionados de maneira oposta ao primeiro, enquanto os outros satélites são posicionados do lado direito da órbita. Essa configuração é de equilíbrio instável Figura 3.5.

Tipo IIIa

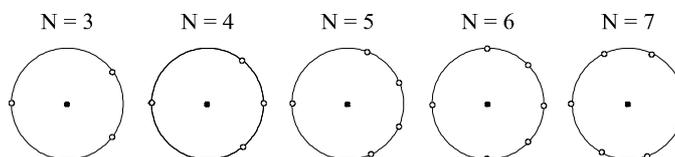


Figura 3.5 - Configuração de equilíbrio instável. Essa configuração foi obtida inserindo inicialmente um satélite à esquerda do corpo central e os satélites posicionados a direita. Embora exista uma simetria com relação a um eixo horizontal imaginário, as separações angulares entre eles não são as mesmas.

Tipo IIIb.

Também é uma configuração $N - 1$, sendo que o que difere da configuração Tipo IIIa é que para $N = 7$ a separação angular entre os satélites não é a mesma. Essa configuração também é de equilíbrio instável Figura 3.6.

Tipo IIIb

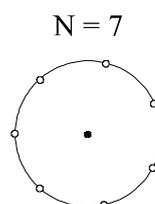


Figura 3.6 - Configuração de equilíbrio instável, onde os satélites não possuem uma mesma separação angular.

A Tabela 3.1 nos fornece a separação angular entre cada satélite posicionado nas diferentes configurações de equilíbrio.

Tabela 3.1 - Separação angular entre os satélites (SALO; YODER, 1988).

<i>N</i>	Tipo	Posição		<i>N</i>	Tipo	Posição		<i>N</i>	Tipo	Posição
2	I	150.000°				165.732°				292.036°
		210.000°				194.268°				337.933°
2	II	90.000°				224.281°		7	IIIa	19.791°
		270.000°				260.591°				61.385°
3	I	132.639°		6	II	30.000°				110.668°
		180.000°				90.000°				180.000°
		227.361°				150.000°				249.332°
3	II	60.000°				210.000°				298.615°
		180.000°				270.000°				340.209°
		300.000°				330.000°		8	I	78.506°
3	III	41.235°		6	III	0.000°				114.408°
		180.000°				40.520°				142.522°
		318.765°				88.044°				167.770°
4	I	119.824°				180.000°				192.230°
		161.322°				271.956°				217.230°
		198.678°				319.480°				245.592°
		240.176°		7	I	89.724°				281.494°
4	II	45.000°				125.187°		8	Ib	46.151°
		135.000°				153.722°				95.643°
		225.000°				180.000°				132.327°
		315.000°				206.278°				164.513°
4	III	0.000°				234.813°				195.487°
		60.000°				270.276°				227.673°
		180.000°		7	Ib	30.275°				264.358°
		300.000°				85.822°				313.846°
5	I	109.138°				134.599°		8	II	22.500°
		147.340°				180.000°				67.500°
		180.000°				225.400°				112.500°
		212.660°				274.179°				157.500°
		250.861°				329.727°				202.500°
5	II	36.000°		7	II	25.716°				247.500°
		108.000°				77.144°				292.500°
		180.000°				128.572°				337.500°
		252.000°				180.000°		9	II	20.000°
		324.000°				231.428°				60.000°
5	III	23.046°				282.856°				100.000°
		74.373°				334.284°				140.000°
		180.000°		7	IIIb	22.063°				180.000°
		285.627°				67.967°				220.000°
		336.954°				119.609°				260.000°
6	I	99.409°				180.000°				300.000°
		135.719°				240.392°				340.000°

A obtenção da estabilidade de cada configuração de equilíbrio foi feita através da inclusão de uma perturbação infinitesimal nas equações do movimento. Esses pontos de equilíbrio são obtidos partindo da mesma forma idealizada (estabilidade dos pontos Lagrangianos) do capítulo 2. Os pontos triangulares Lagrangianos L_4 e L_5 aqui são visualizados no primeiro gráfico que aparece na Figura 3.2 (tipo Ia).

Para a obtenção dos outros pontos, os autores utilizaram uma pequena perturbação obtendo os autovalores dessa matriz que estão relacionados às frequências que os satélites possuem, relacionadas à energia de cada configuração, podendo assim obter as posições de cada satélite. Esse mecanismo, como citado anteriormente, foi verificado através de simulações numéricas.

Faz-se necessário ressaltar que em nosso trabalho não estamos diretamente interessadas em obter esses pontos de equilíbrio, mas sim em estudar o comportamento de uma partícula estando esta posicionada próxima aos satélites que se localizam nas posições de equilíbrio. Essa análise será feita através de simulações numéricas.

3.4 SIMULAÇÕES PARA SATÉLITES COM MASSAS IGUAIS.

Salo e Yoder (1988) fizeram seus estudos para o caso onde as massas dos satélites são as mesmas em todas as configurações, obtendo assim as Figuras 3.7 - 3.9, e posteriormente, buscando uma aplicação real para esse trabalho, simularam o comportamento dos satélites Jano e Epimeteu, que possuem massas diferentes.

Apresentaremos então, um estudo detalhado desses resultados verificando as possíveis configurações que os satélites, de massas iguais, podem descrever no sistema rotacional quando é inserida uma pequena perturbação nesse sistema.

Salo e Yoder (1988) integraram as equações completas do movimento, ou seja, sem fazer aproximações, como por exemplo: levar em consideração os termos maiores de segunda ordem em δn_i e δr_i que estão relacionados com uma variação na posição e velocidade dos satélites (i representa o número de satélites) .

Através da simulação numérica eles obtiveram autovalores que estão ligados à energia do sistema, que está ligada a obtenção dos diferentes tipos de configurações de equilíbrio.

No caso da configuração de equilíbrio estável, quando se insere uma pequena perturbação, os satélites passam a descrever uma órbita em torno dos seus pontos de equilíbrio, o que também verificamos quando estudamos o caso mais simples (P. C. R. 3 – Corpos) que são os pontos de equilíbrio Lagrangianos, enquanto que na configuração instável isso não ocorre, adquirindo o satélite um movimento aleatório.

A perturbação que é inserida no sistema, conforme os autores, é dada pela razão entre a energia total (E) e a energia potencial obtida para cada tipo de configuração.

$$\frac{E}{V_I} = 1 + \frac{T}{V_I} \quad (3.73)$$

Onde T é a energia cinética e V_I é a energia potencial da configuração de equilíbrio estável Tipo I.

Os autores decidiram por estudar a configuração de equilíbrio do Tipo I com uma energia potencial V_I devido ao fato dessa ser a configuração que mais possui satélites em localizações de equilíbrio estáveis. Eles também decidiram dar um enfoque maior na discussão ao problema de $N=3$ satélites de mesma massa.

A obtenção dos vários tipos de órbitas que os satélites podem descrever ao redor dos pontos de equilíbrio são feitas através do aumento da intensidade da perturbação, ou seja, do aumento da razão E/V_I . Essas configurações podem ser visualizadas através das Figuras 3.7, 3.8 e 3.9.

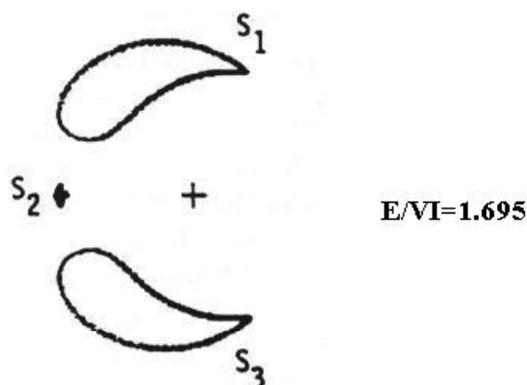


Figura 3.7 - Essa figura descreve o movimento de três satélites posicionados em pontos de equilíbrio estáveis S_1 , S_2 e S_3 . Observa-se que para o dado valor da intensidade de perturbação, os satélites passam a descrever órbitas diferentes, nesse caso tem-se dois satélites descrevendo uma órbita de girino ao redor dos seus pontos de equilíbrio, enquanto o terceiro executa uma pequena oscilação não periódica. (SALO; YODER, 1988).

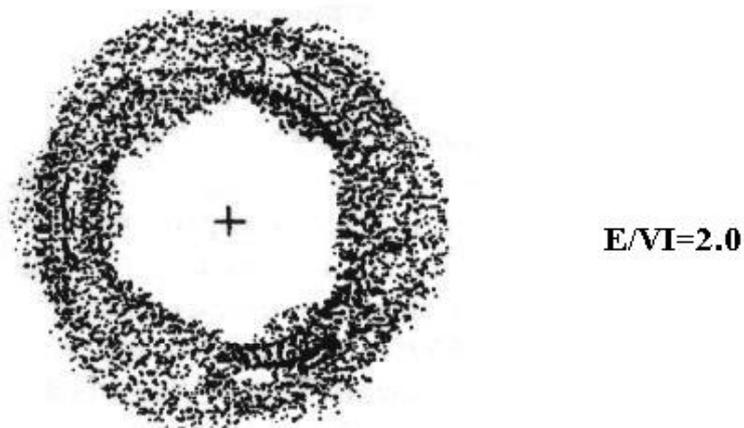


Figura 3.8 - Nesta figura observa-se que os satélites passam a descrever um movimento caótico ao redor de suas posições iniciais para intensidade de perturbação igual a dois. (SALO; YODER, 1988).

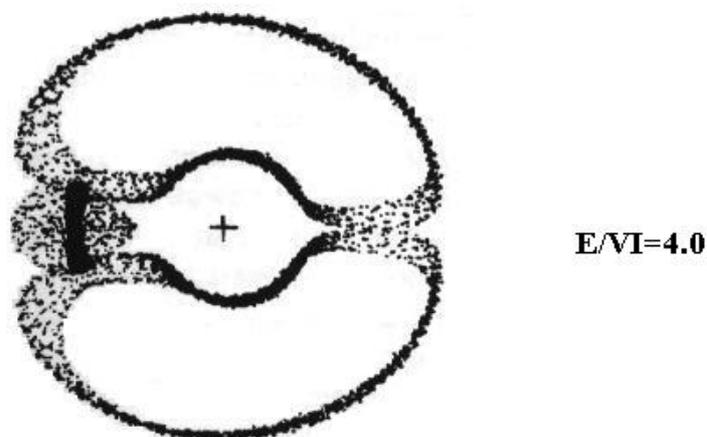


Figura 3.9 - Nessa figura verifica que dois dos satélites passam a descrever uma órbita de “ferradura” (amplitude maior de oscilação) ao redor dos seus pontos estáveis, enquanto que o terceiro satélite passa a ter uma amplitude de oscilação maior, quando comparada com a Figura 3.7 (SALO; YODER, 1988). Essa oscilação é estável.

Pode-se observar a formação de uma órbita periódica, para $E/V_1 = 1.695$, no caso dos satélites localizados próximo aos pontos de equilíbrio S_1 e S_3 enquanto que o satélites que estão próximo a S_2 possuem uma libração não periódica ao redor de sua órbita. Para $E/V_1 = 2.0$ pode se observar que os satélites passam a descrever um movimento caótico. No entanto quando $E/V_1 = 4.0$ os satélites que estão próximos a S_1 e S_3 passam a descrever uma órbita periódica no formato de “ferradura” e o satélite próximo a S_2 descreve uma pequena órbita ao redor de sua posição inicial.

O valor máximo da perturbação utilizada pelos autores foi 4.0, pois a partir desse valor as órbitas dos satélites tornavam-se muito complicada.

No próximo capítulo iremos apresentar nossas simulações numéricas para o caso de 2 e 3 satélites que estão em configuração de equilíbrio estável e instável.

CAPÍTULO 4 SIMULAÇÃO NUMÉRICA E RESULTADOS

4.1 INTRODUÇÃO

Nesse capítulo temos como objetivo apresentar nossos resultados numéricos, obtidos para o problema N satélites ($N = 2$ e $N = 3$) orbitando ao redor de um corpo central, incluindo uma partícula coorbital a esses satélites. Consideramos em nossas simulações satélites com massas idênticas, com massas diferentes tendo a partícula massa desprezível. Os pontos de equilíbrio das partículas, para o caso circular e planar, foram obtidos quando os satélites estavam na configuração de equilíbrio do Tipo I e II.

No programa principal foram escritas as equações do movimento completas para o problema de N-corpos orbitando ao redor de um corpo central, que está representada de maneira geral pela equação (4.1), onde m_i é a massa do i -ésimo corpo, \vec{r}_i sua posição no sistema inercial. Como arquivos de saída temos as componentes da posição dos corpos no sistema de referencia rotacional e inercial. Nós obtemos também a variação dos elementos orbitais: semi-eixo maior e excentricidade de todos os corpos que estão sendo integrados. Como condições iniciais de integração insere-se o valor do semi-eixo maior dos corpos, a massa e a posição angular dos mesmos. É importante ressaltar que o programa foi elaborado de tal modo que a excentricidade não está limitada a pequenos valores, podendo assim assumir valores maiores que 10^{-4} . Devido a esse fato não vimos à necessidade da inclusão do centro guiado nas equações do movimento que é válido apenas para pequenas excentricidades ($\sim 10^{-4}$) (MURRAY; DERMOTT, 1999). Esse programa foi elaborado por Neto (2000)

Nossas simulações foram realizadas para o anel central da falha de Encke que possui um semi-eixo maior igual a 133.589 km e uma largura de aproximadamente 20 km (FERRAI; BRAHIC, 1997). Esse anel possui imerso um pequeno satélite denominado Pan, descoberto por Showalter et al. (1991) e possui um semi-eixo maior de 133.583 km. A razão de massa satélite/planeta é da ordem de 10^{-11} e os corpos têm excentricidade de aproximadamente 10^{-4} (SPAHN et al., (1993)).

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{\nabla}_i U \text{ onde } U = \frac{1}{2} G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad (j \neq i, i = 1, 2, \dots, i - \text{ésima}) \quad (4.1)$$

Na secção 4.2 iremos apresentar uma simulação em que os satélites possuem massas iguais por um período de integração de 500 anos. Observamos um comportamento semelhante Variação de $a \times \theta$ para os satélites e para as partículas das partículas quando estão coorbitais a satélites nas configurações do Tipo I e II, como por exemplo, a variação radial em função do tempo, para o caso circular e excêntrico.

Na secção 4.3 apresentamos como a partícula descreve seu movimento no sistema rotacional, para a configuração do Tipo Ia, com dois satélites em órbita circular e excêntrica. Para outras configurações estudadas o comportamento é semelhante.

Os pontos de equilíbrio das partículas para satélites de massas são apresentados na secção 4.4.

O estudo para satélites de massas diferentes está apresentado na secção 4.5 e os pontos de equilíbrio das partículas são apresentados na secção 4.6.

4.2 SATÉLITES DE MESMA MASSA POR UM PERÍODO DE INTEGRAÇÃO DE 500 ANOS

As simulações foram realizadas para dois e três satélites que estão posicionados nas configurações de equilíbrio do Tipo I, Tipo II e Tipo III, considerando o caso circular e excêntrico. Os valores das excentricidades utilizados são da ordem de 10^{-4} , 10^{-3} e 10^{-2} . O valor do semi-eixo maior das partículas inicialmente foi fixado a 15 km do semi-eixo maior inicial dos satélites. Esse valor inicial do semi-eixo maior parte do estudo de Murray e Dermott (1981), em que a largura de confinamento de uma partícula no anel Central, para o caso circular, é de 30 km. O comportamento das partículas e dos satélites é visualizado no sistema que rotaciona com o movimento médio do satélite Pan e através da variação de alguns dos seus elementos orbitais.

4.2.1 Comportamento dos satélites

A Tabela 4.1 mostra a variação do semi-eixo maior e a variação angular dos satélites, para cada tipo de configuração.

Tabela 4.1 - Variação angular e do semi-eixo maior dos satélites por um período de 500 anos de integração.

	Tipo Ia (N = 2)	Tipo IIa (N = 2)	Tipo Ia (N = 3)	Tipo IIa (N = 3)	Tipo III (N = 3)
Da_{Pan}	$4,0 \times 10^{-4}$ km	$2,0 \times 10^{-3}$ km	$4,0 \times 10^{-4}$ km	$4,0 \times 10^{-4}$ km	$1,4 \times 10^{-1}$ km
Dq_{Pan}	$\sim 0^\circ$	$\sim 0^\circ$	$\sim 0^\circ$	$\sim 0^\circ$	$\sim 0^\circ$
$Da_{Sat 1}$	$4,0 \times 10^{-4}$ km	$2,0 \times 10^{-3}$ km	$4,0 \times 10^{-4}$ km	$4,0 \times 10^{-4}$ km	$5,7 \times 10^{-1}$ km
$Dq_{Sat 1}$	0°	$0,375^\circ$	0°	$1,8 \times 10^{-3}^\circ$	$91,95^\circ$
$Da_{Sat 2}$	*	*	$4,0 \times 10^{-4}$ km	$3,0 \times 10^{-4}$ km	$5,3 \times 10^{-1}$ km
$Dq_{Sat 2}$	*	*	0°	$1,8 \times 10^{-2}^\circ$	$77,90^\circ$

É importante lembrar que Pan é o satélite que está fixo no sistema rotacional, por isso não visualizamos sua variação angular em função do semi-eixo maior (a), mas essa variação se torna possível quando observamos a variação $a \times$ tempo Figura 4.1.

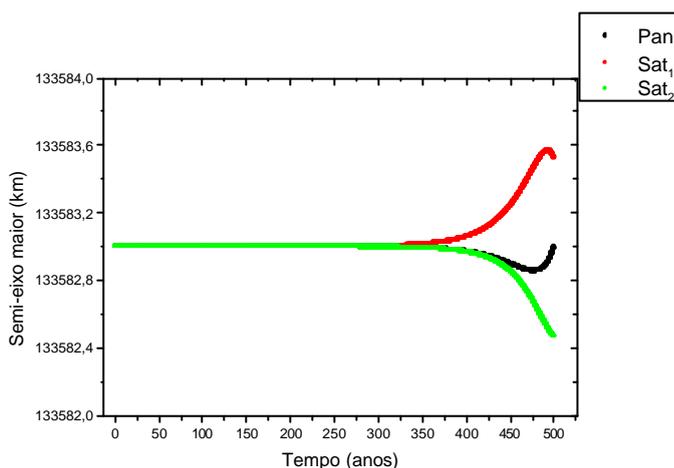


Figura 4.1 - Variação de $a \times$ tempo para três satélites que estão posicionados em uma configuração de equilíbrio do Tipo IIIa.

As figuras a seguir mostram a variação do $a \times \theta$ dos satélites para cada tipo de configuração (Tipo Ia, Tipo IIa e Tipo IIIa). Essas pequenas variações são, da ordem de 10^{-4} km.

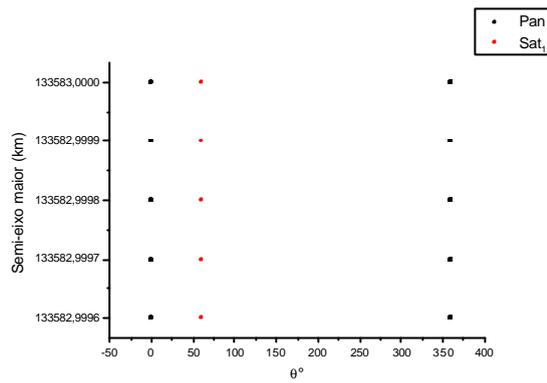


Figura 4.2 - Variação de θ x a dos satélites que estão posicionados em uma configuração de equilíbrio do Tipo Ia, para $N = 2$ satélites.

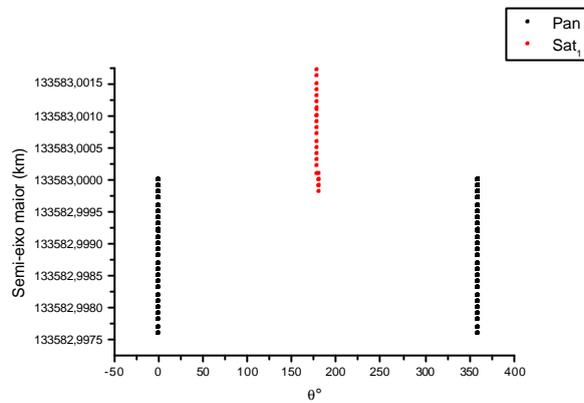


Figura 4.3 - Variação de θ x a dos satélites que estão posicionados em uma configuração de equilíbrio do Tipo IIa, para $N = 2$ satélites.

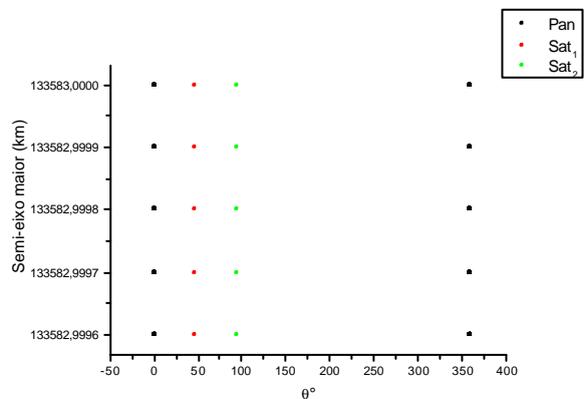


Figura 4.4 - Variação de θ x a dos satélites que estão posicionados em uma configuração de equilíbrio do Tipo Ia, para $N = 3$ satélites.

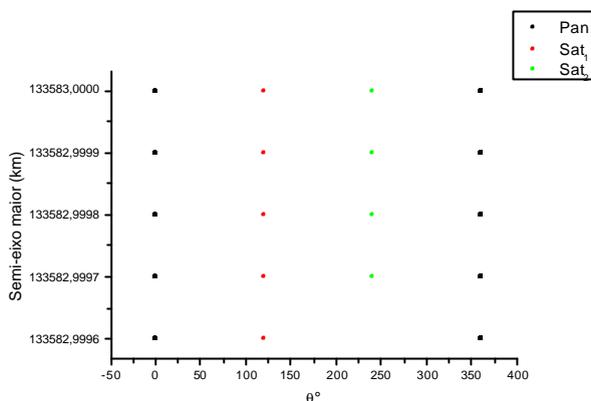


Figura 4.5 - Variação de θ x a dos satélites que estão posicionados em uma configuração de equilíbrio do Tipo IIa, para $N = 3$ satélites.

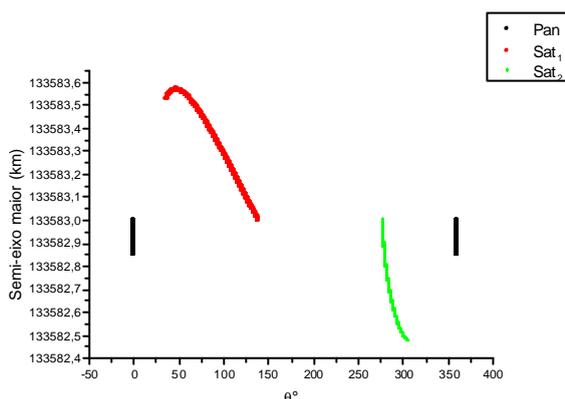


Figura 4.6 - Variação de θ x a dos satélites que estão posicionados em uma configuração de equilíbrio do Tipo IIIa, para $N = 3$ satélites.

4.2.2 Comportamento das partículas para o caso Circular

Verificamos para o caso circular, o confinamento das partículas entre os satélites que estão posicionados em configurações de equilíbrio por um período de integração de 500 anos. O confinamento só não é observado na configuração de equilíbrio do Tipo IIIa para $N = 3$ satélites. Isso ocorre devido a variação do semi-eixo maior dos satélites próximos aos pontos de equilíbrio dos mesmos, Figuras 4.6 e 4.1.

Para exemplificar, apresentamos nossos resultados para $N = 2$ satélites posicionados na configuração **Tipo Ia**, onde a partícula (P_1) está posicionada inicialmente a 30° de Pan e a partícula (P_2) a 180° de Pan Figura 4.7. Pode-se verificar a variação radial em função do tempo Figura 4.8a – 4.8d, a variação da excentricidade em função do tempo Figura 4.9 e a variação angular em função do tempo Figura 4.10 para (P_1) e (P_2).

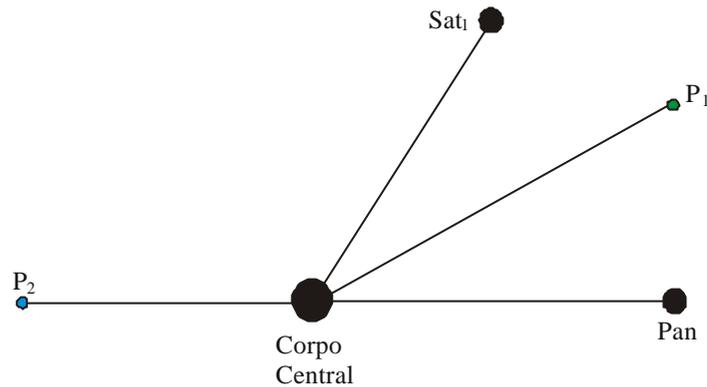
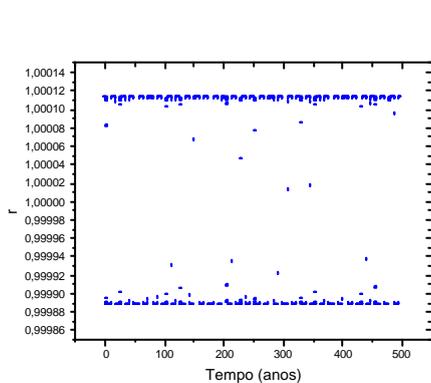
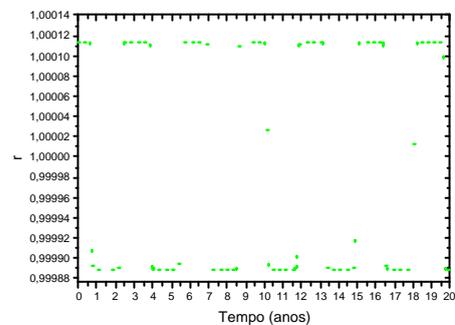


Figura 4.7 - Posicionamento inicial das partículas coorbitais aos satélites que estão na configuração $N = 2$ satélites do Tipo Ia.



P_2



P_1

Figura 4.8a - Variação de r x tempo para (P_1) estando satélites e partículas em órbita circular por um período de 500 anos.

Figura 4.8b - Ampliação da variação radial em função do tempo por um período de 20 anos.

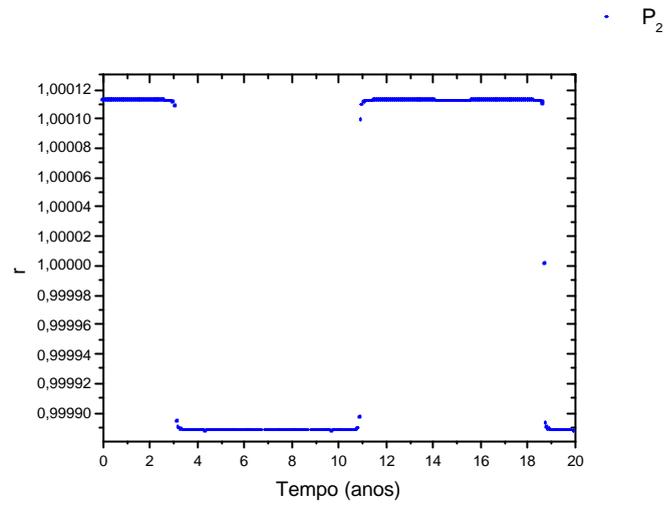


Figura 4.8c - Ampliação da figura 4.8a, onde verificamos o comportamento de (P_2) por 20 anos.

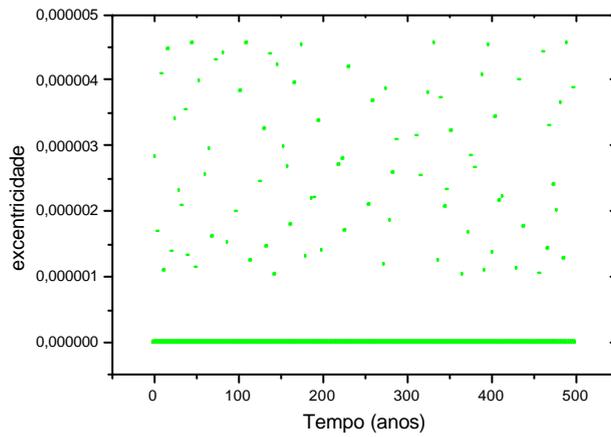


Figura 4.9 - Variação de e x tempo para as partículas por um período de 500 anos.

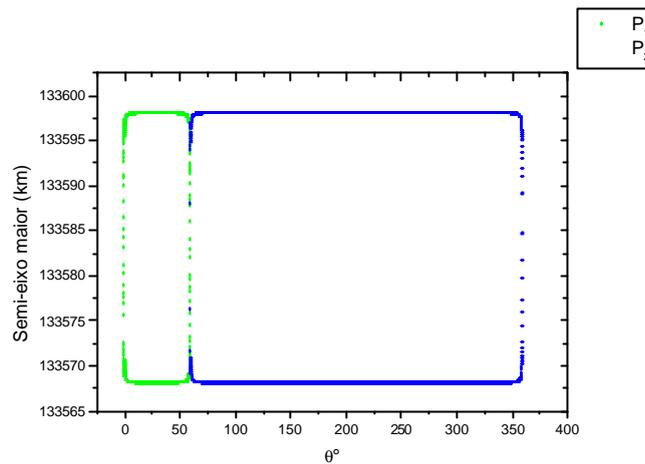


Figura 4.10 - Variação de $\theta \times a$ para as partículas por um período de 500 anos.

4.2.3 Comportamento da partícula em órbita Excêntrica

Quando incluímos a excentricidade, da ordem de 10^{-4} e 10^{-3} , nas órbitas das partículas continuamos a observar o confinamento das mesmas entre os satélites que estão em configurações de equilíbrio. O confinamento não é observado mais uma vez na configuração $N = 3$ do Tipo IIIa e para valores iguais e superior a 10^{-2} , ocorrendo isso para todos os tipos de configurações.

Para exemplificar, simulamos para dois satélites que estão na configuração do Tipo IIa coorbitais a uma partícula (P_1), que está posicionada inicialmente a 90° dos satélites, como mostra a Figura 4.11, para o valor da excentricidade igual a 1×10^{-4} . Como resultado observamos um aumento da variação radial, que para o caso circular era da ordem de $2,34 \times 10^{-4}$ Figuras 4.12a e 4.12b, para $4,41 \times 10^{-4}$ Figuras 4.13a e 4.13b devido a existência da excentricidade da partícula.

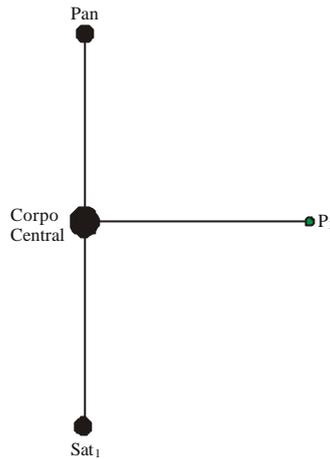


Figura 4.11 - Posicionamento inicial de uma partícula coorbital aos satélites que estão na configuração $N = 2$ do Tipo IIa.

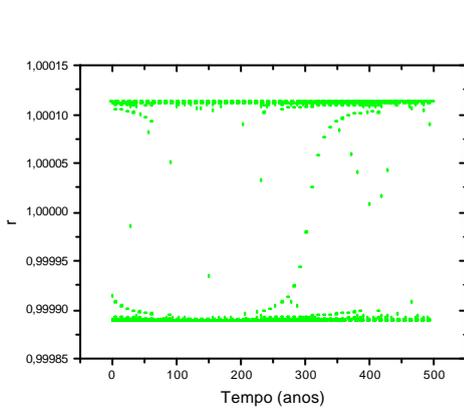


Figura 4.12a - Variação de r x tempo para (P_1) que está em órbita circular por um período de 500 anos.

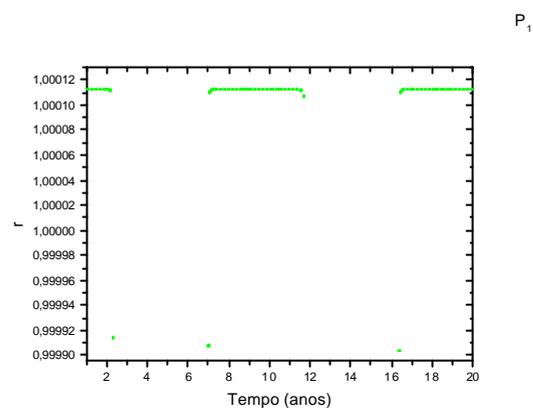


Figura 4.12b - Ampliação da figura (4.12a) por um período de 20 anos.

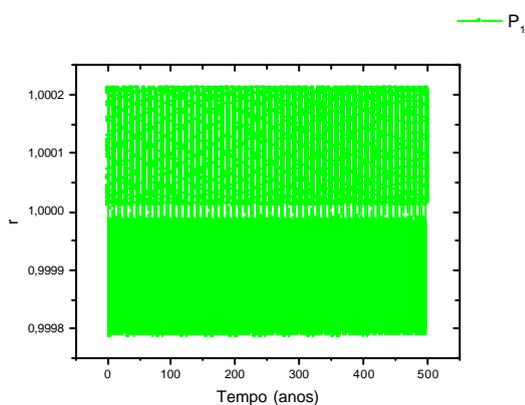


Figura 4.13a - Variação de r x tempo para (P_1) que está em órbita excêntrica por um período de 500 anos.

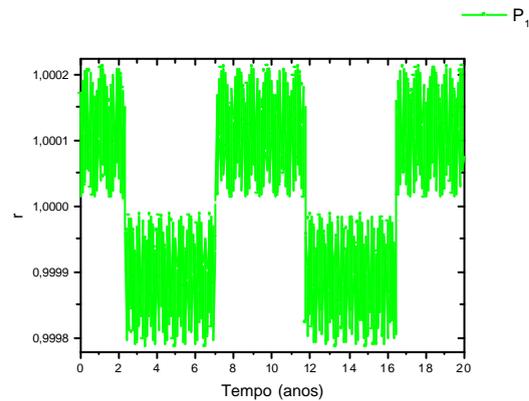


Figura 4.13b - Ampliação da figura (4.13a) por um período de 20 anos.

4.2.4 Comportamento da partícula para satélites em órbitas excêntricas

Ao incluirmos excentricidade somente nos satélites continuamos a observar o confinamento das partículas, entre os satélites, para valores da excentricidade iguais a 10^{-4} e 10^{-3} sendo observado também, uma variação periódica da excentricidade das partículas em função do tempo.

Como exemplo apresentamos resultados para a configuração $N = 3$ satélites do Tipo II, onde a partícula (P_1) está posicionado entre Pan e Sat_1 , a partícula (P_2) entre Sat_1 e Sat_2 e a partícula (P_3) entre Sat_2 e Pan Figura 4.14.

A variação da excentricidade das partículas em função do tempo para excentricidade dos satélites igual a 1×10^{-4} é mostrada na Figuras 4.15a e 4.15b.

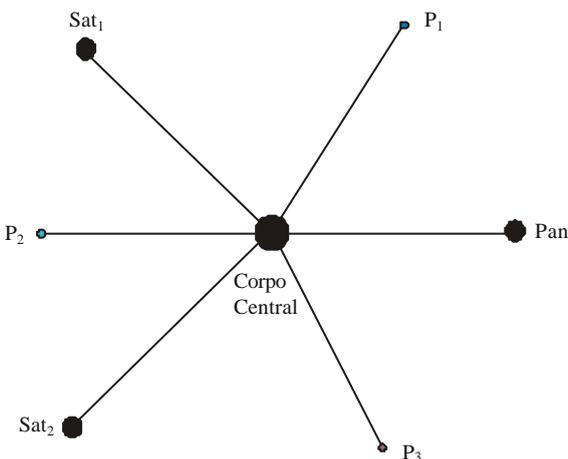


Figura 4.14 - Posicionamento inicial de partículas coorbitais aos satélites que estão na configuração $N = 3$ do Tipo IIa.

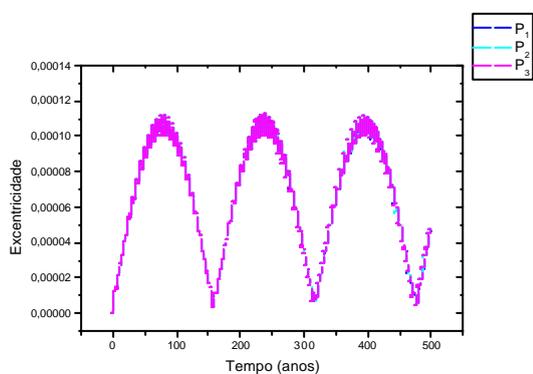


Figura 4.15a - Variação da excentricidade em função do tempo.

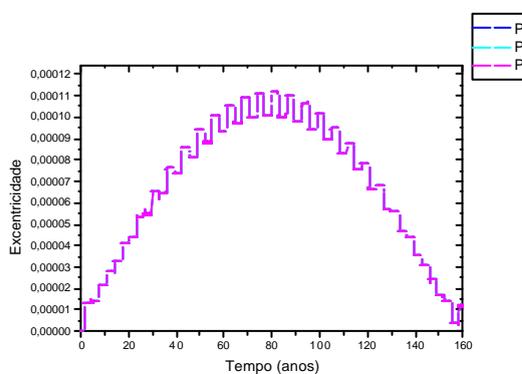


Figura 4.15b - Ampliação da Figura 4.15a.

Na Figuras 4.16a – 4.16c comparamos a variação radial em função do tempo, para a configuração descrita acima, para o caso circular, partícula em órbita excêntrica e satélite em órbita excêntrica.

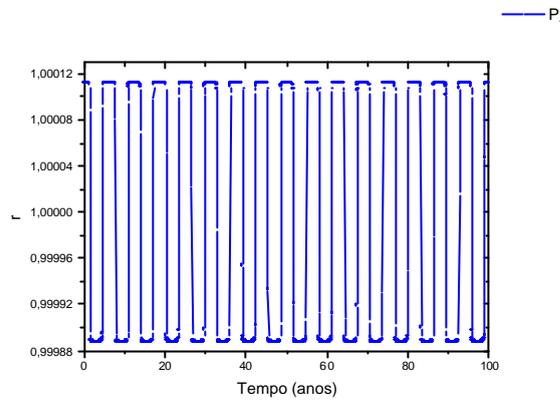


Figura 4.16a - Variação de r x tempo para (P_1) em órbita circular. $\Delta r = 2,23 \times 10^{-4}$.
Configuração do Tipo IIa.

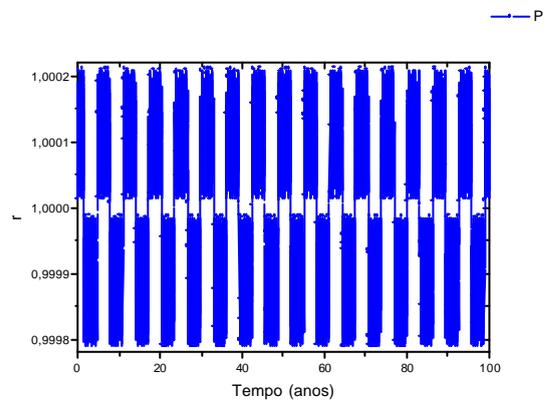


Figura 4.16b - Variação de r x tempo para (P_1) em órbita excêntrica. $\Delta r = 4,4 \times 10^{-4}$.
Configuração do Tipo IIa.

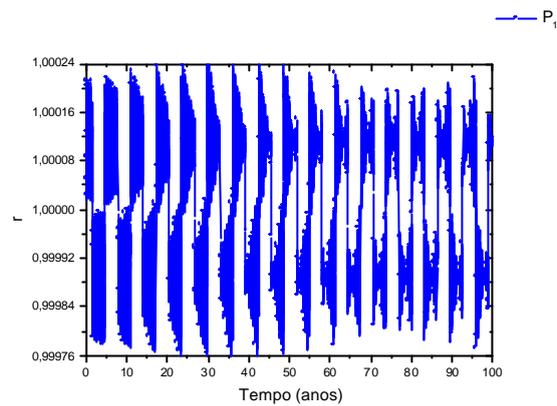


Figura 4.16c - Variação de r x tempo para (P_1) estando os satélites em órbitas excêntricas. $\Delta r = 4,8 \times 10^{-4}$. Configuração do Tipo IIa.

Os três gráficos mostram que a inclusão da excentricidade da ordem de 10^{-4} influencia na variação radial em função do tempo. Para o caso onde a partícula está em uma órbita excêntrica Figura 4.16b observamos uma oscilação radial da partícula antes do encontro com os satélites mudando assim sua variação e sendo a frequência dessa oscilação constante devido ao fato da variação da excentricidade ser praticamente constante. Quando incluímos um satélite em órbitas excêntricas Figura 4.16c continuamos a observar uma oscilação radial antes do encontro com o satélite e logo após o encontro, porém a frequência com que essa oscilação acontece não é a mesma devido à variação da excentricidade que o satélite gera na partícula. E para o caso circular Figura 4.15a, não observamos oscilação radial no comportamento da partícula, apenas a variação radial devido ao encontro com os satélites.

Assim, para esse primeiro estudo concluímos que por um período de integração de 500 anos e para valores da excentricidade iguais a 10^{-4} e 10^{-3} , as partículas permanecem confinadas entre os satélites. Quando incluímos excentricidade vimos uma oscilação radial, que está relacionada à existência da excentricidade, no comportamento da partícula. Para o caso de um satélite em órbita excêntrica a oscilação torna-se diferente devido à variação da excentricidade. A única configuração que não confina as partículas é a do Tipo IIIa para $N = 3$ satélites, que está relacionada à variação da posição inicial dos satélites.

4.3 UMA ÓRBITA COMPLETA DA PARTÍCULA

Nessa parte de nosso trabalho iremos discutir e apresentar nossos resultados para o comportamento de partículas coorbitais a satélites, com o intuito de analisar graficamente e de modo mais preciso suas possíveis trajetórias para órbitas circular e excêntrica.

As condições iniciais são semelhantes a do caso descrito anteriormente, se diferenciando apenas no fato de estarmos interessadas no estudo da trajetória por apenas uma órbita que a partícula descreve entre os satélites.

Assim verificamos que as partículas permanecem confinadas entre os satélites para o caso circular com valores da excentricidade iguais a 10^{-4} e 10^{-3} e para o caso planar. Esse confinamento foi mantido em todos os Tipos de configuração dos satélites, inclusive para a configuração do Tipo IIIa para $N = 3$ satélites. A trajetória descrita pelas as partículas não se altera com o aumento do número de satélites e sendo assim iremos apresentar nossos gráficos para uma partícula (P_1) confinada entre dois satélites (Pan e Sat_1), que estão em uma configuração de equilíbrio do Tipo Ia com uma separação angular de 60° , e estando (P_1) posicionada inicialmente a 30° dos satélites. Com o intuito de simplificar a compreensão de nossos resultados iremos apresentar de modo separado a evolução da trajetória da partícula para os casos: *i*) Satélites e partícula em órbitas circulares; *ii*) Partícula em órbita excêntrica, com valores da excentricidade iguais a 10^{-4} e 10^{-3} ; *iii*) Satélites em órbitas excêntricas com valores da excentricidade iguais a 10^{-4} e 10^{-3} .

4.3.1 Satélites e partícula em órbitas circulares

As figuras abaixo mostram, para o caso circular, a trajetória da partícula ao longo do tempo descrita no sistema de referência rotacional com Pan.

Nas Figuras 4.17a – 4.17f temos a evolução da partícula para um período $t = 0$ a $t = 0,65$ ano.

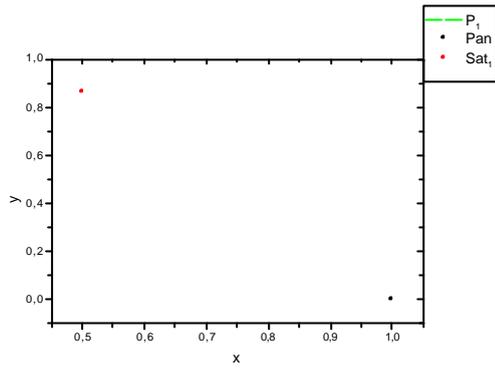


Figura 4.17a - Partícula na posição inicial.

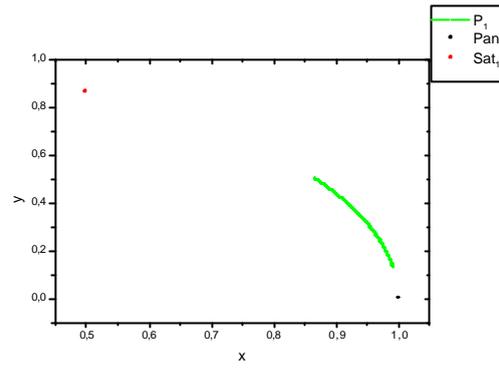


Figura 4.17b - Variação da partícula por um período de 0 à 0,24 ano.

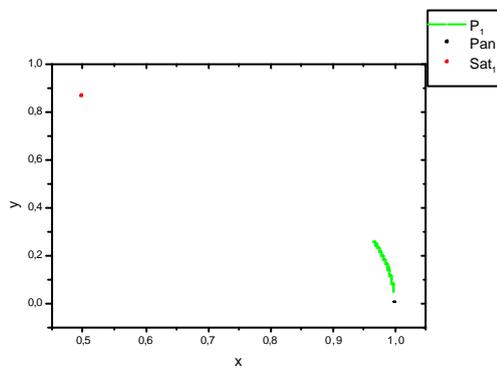


Figura 4.17c - Variação da partícula por um período de 0,24 à 0,30 ano.

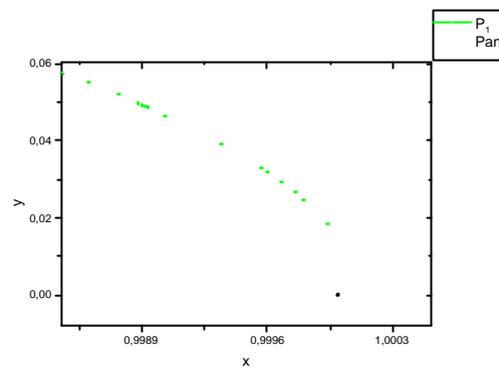


Figura 4.17d - Zoom da Figura 4.17c.

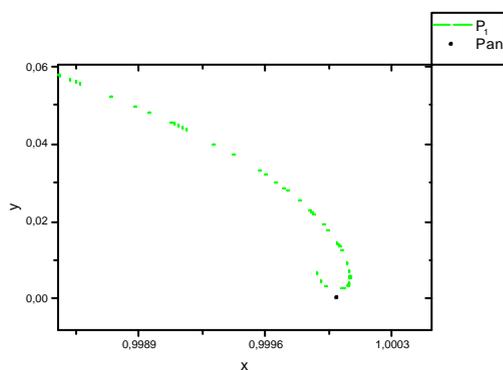


Figura 4.17e - Variação da partícula por um período de 0,24 à 0,38 ano.

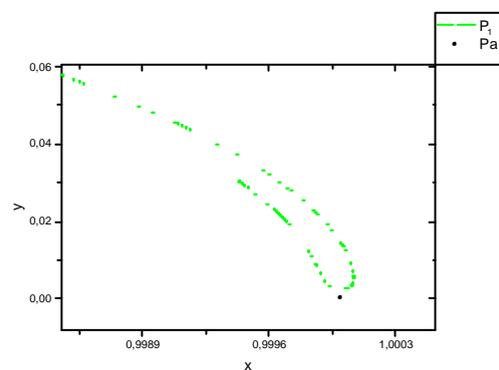


Figura 4.17f - Variação da partícula por um período de 0,24 à 0,42 ano.

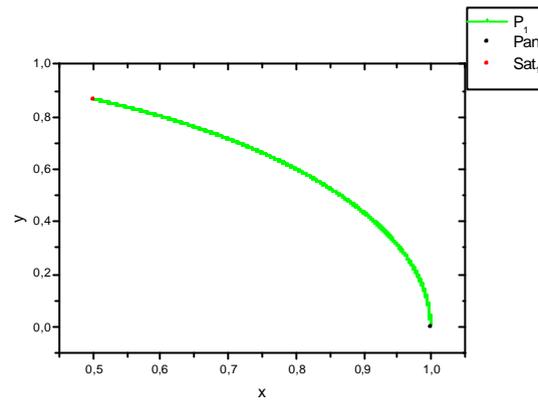


Figura 4.18a - Trajetória da partícula por uma órbita completa.

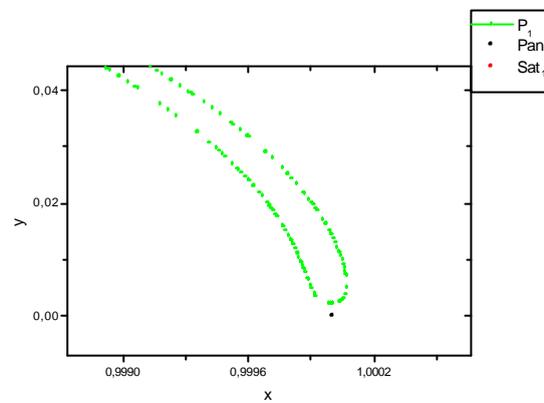


Figura 4.18b - Ampliação da Figura 4.18a.

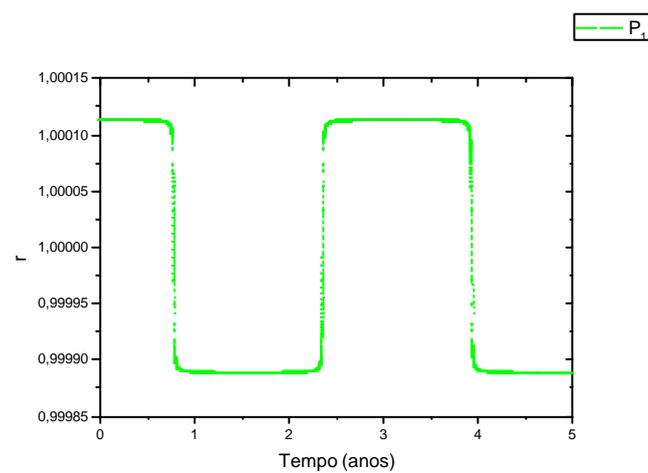


Figura 4.19 - Variação radial em função do tempo.

4.3.2 Partícula em órbita excêntrica igual a 10^{-4} e 10^{-3}

Partícula com excentricidade igual a 10^{-4}

As Figuras 4.20a – 4.20e mostram a evolução da partícula desde sua posição inicial ($t = 0$) até o encontro com Pan, que se dá depois de 0,65 ano.

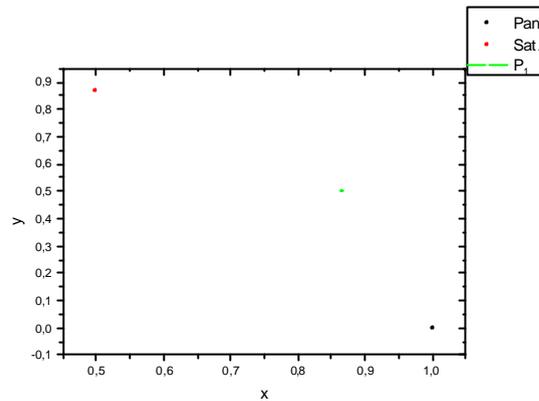


Figura 4.20a - Partícula na posição inicial.

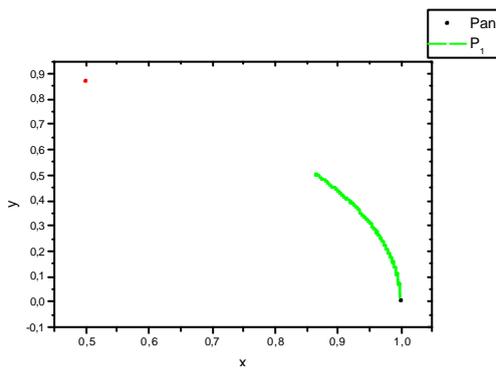


Figura 4.20b - Variação da partícula por um período de 0 a 0,30 ano.

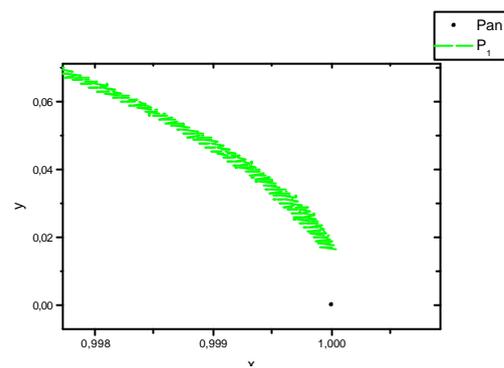


Figura 4.20c - Zoom da Figura 4.20b.

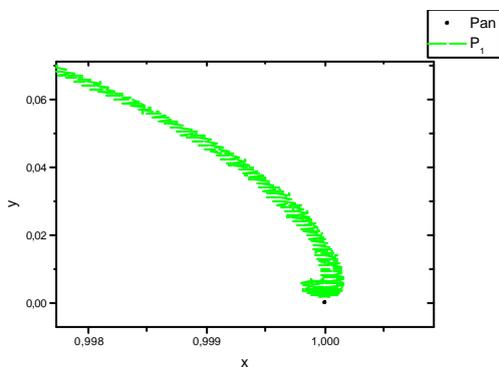


Figura 4.20d - Variação da partícula por um período de 0 à 0,34 ano.

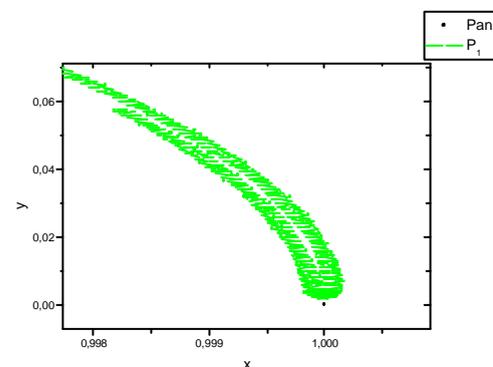


Figura 4.20e - Variação da partícula por um período de 0 à 0,42 ano.

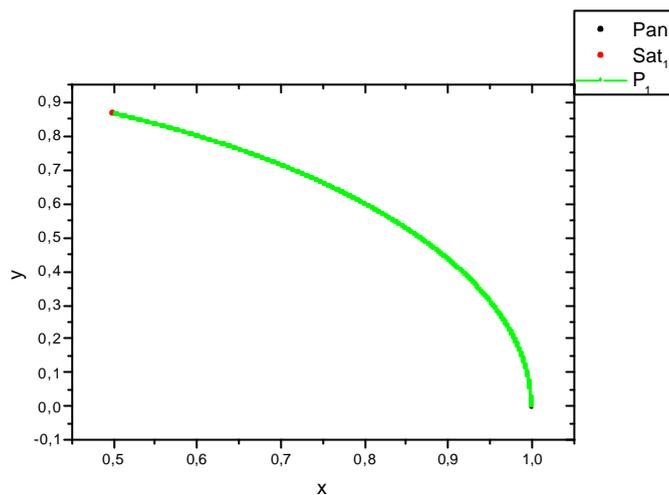


Figura 4.21a: Trajetória da partícula por uma órbita completa.

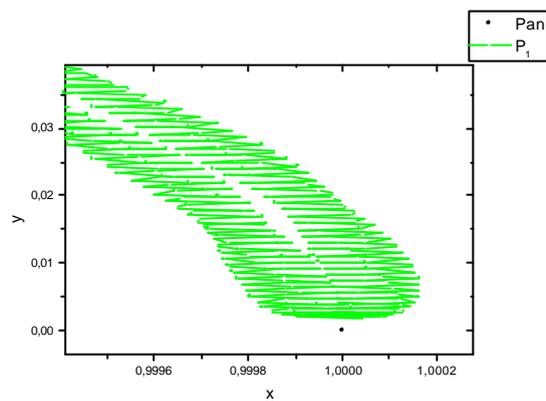


Figura 4.21b: Ampliação da Figura 4.21a.

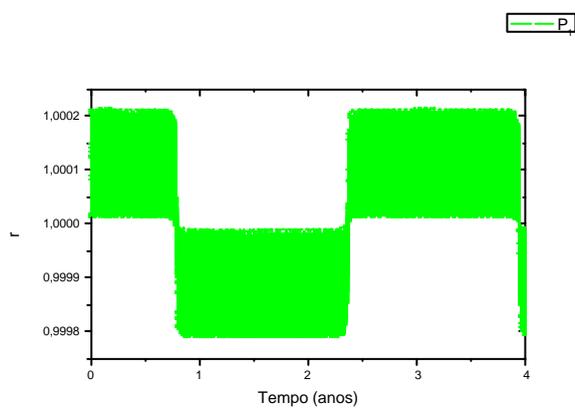


Figura 4.22 - Variação radial em função do tempo.

Partícula com excentricidade igual a 10^{-3}

Novamente podemos verificar através das Figuras 4.23a – 4.23e a evolução da partícula desde sua posição inicial ($t = 0$) até o encontro com Pan, que ocorre depois de 0,65 ano.

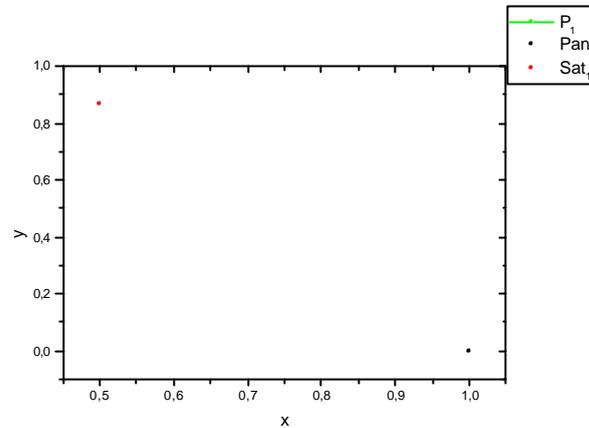


Figura 4.23a - Partícula na posição inicial.

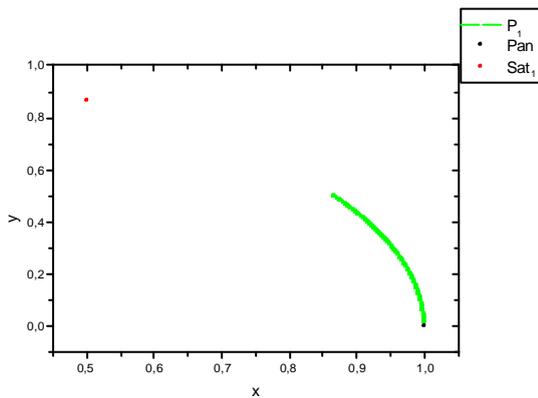


Figura 4.23b - Variação da partícula por um período de 0 à 0,30 ano.

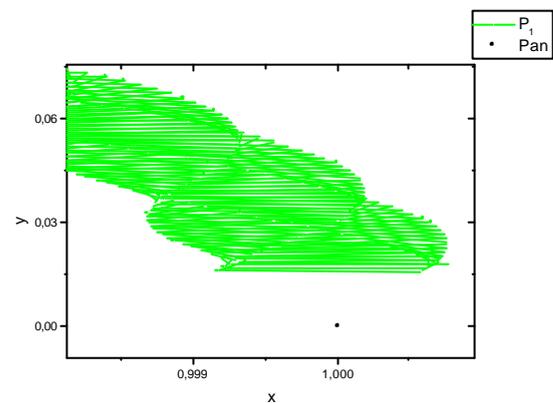


Figura 4.23c - Zoom da Figura 4.23b.

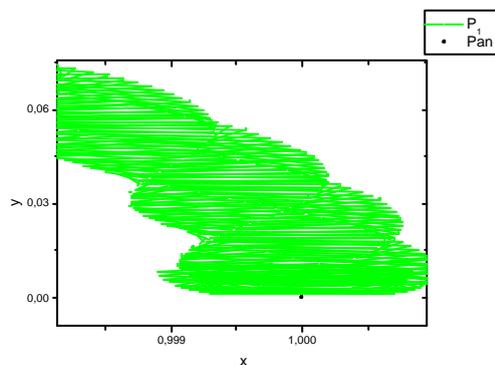


Figura 4.23d - Variação da partícula por um período de 0 à 0,34 ano.

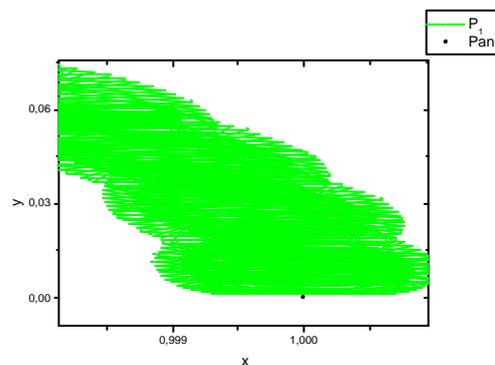


Figura 4.23e - Variação da partícula por um período de 0 à 0,42 ano.

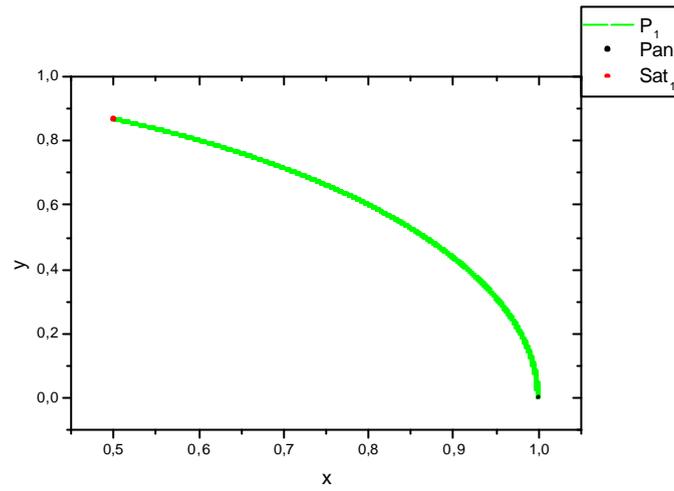


Figura 4.24a - Trajetória da partícula por uma órbita completa.

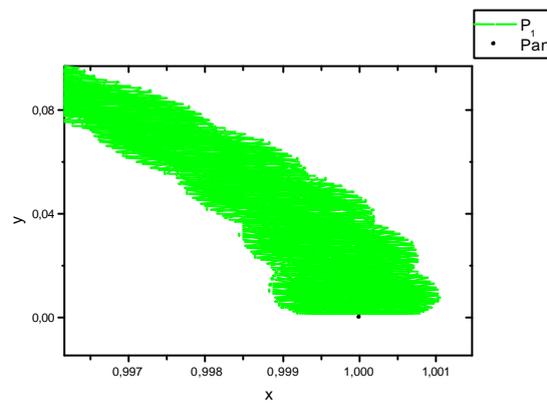


Figura 4.24b - Ampliação da Figura 4.24a.

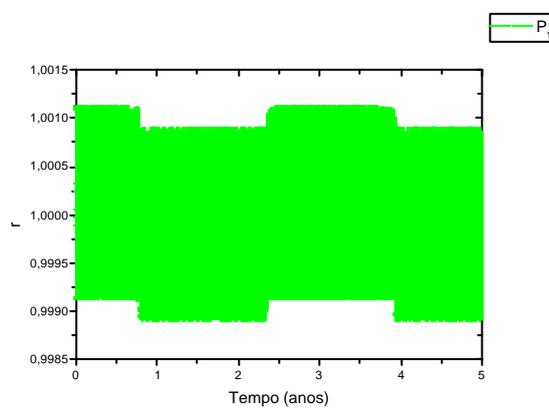


Figura 4.25 - Variação radial em função do tempo.

4.3.3 Satélites em órbitas excêntricas iguais a 10^{-4} e 10^{-3}

Satélite com excentricidade igual a 10^{-4}

As Figuras 4.26a – 4.26b mostram a evolução da partícula desde sua posição inicial ($t = 0$) até o encontro com Pan, que se dá depois de aproximadamente 0,65 ano.

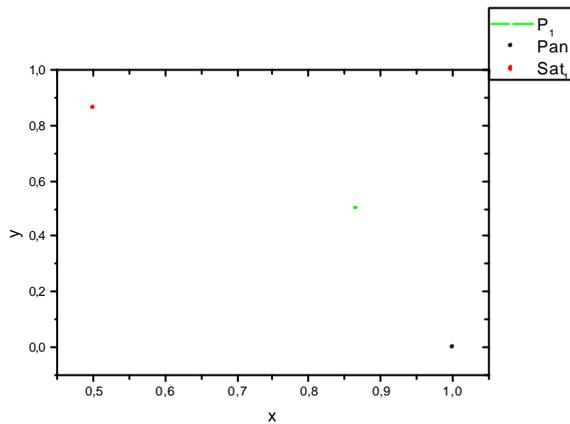


Figura 4.26a - Partícula posicionada a 30° dos satélites, em um tempo $t = 0$.

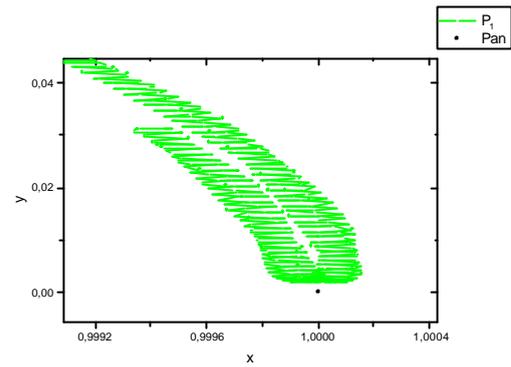


Figura 4.26b - Partícula logo após o encontro com Pan; $t = 0,35$ ano.

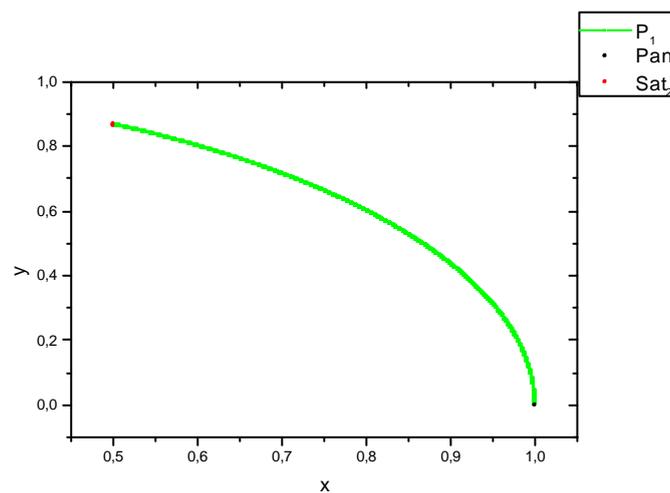


Figura 4.27a - Partícula descrevendo uma órbita completa entre os satélites.

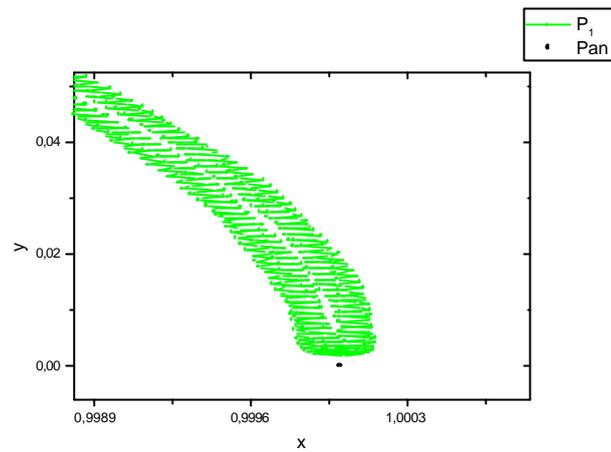


Figura 4.27b - Ampliação da Figura 4.27a.

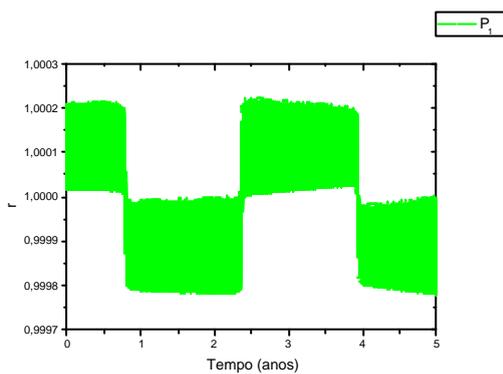


Figura 4.28a - Variação radial em função do tempo.

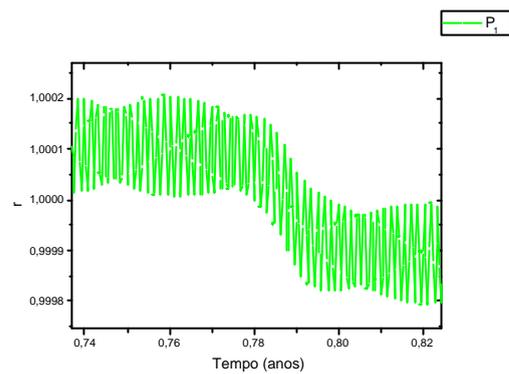


Figura 4.28b - Ampliação da Figura 4.28a.

Satélite com excentricidade igual a 10^{-3}

Para essa última configuração iremos apresentar a órbita completa descrita pela partícula Figura 4.29a, sua ampliação, para melhor visualizarmos sua trajetória próxima a Pan Figura 4.29b, e a variação radial em função do tempo Figura 4.30.

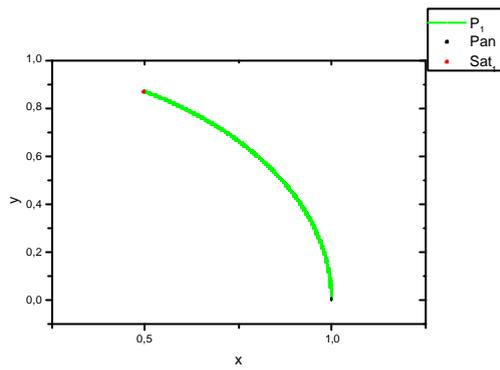


Figura 4.29a - Trajetória da partícula por uma órbita.

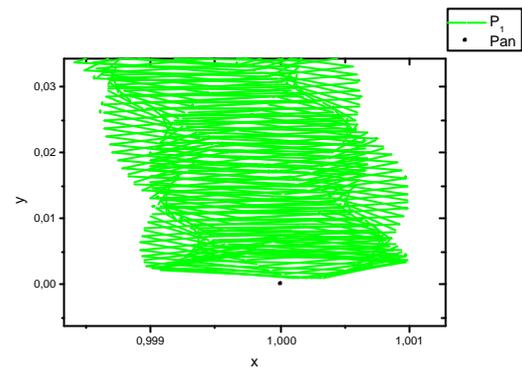


Figura 4.29b - Ampliação da Figura 4.29a.

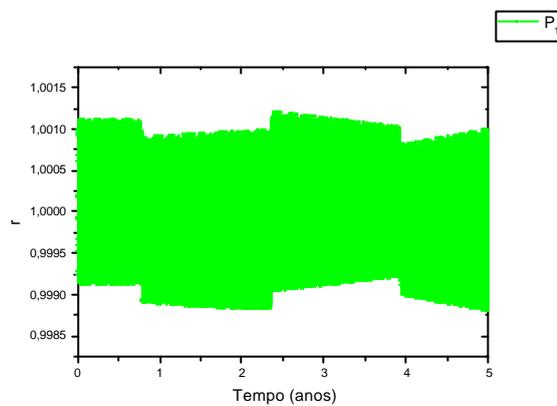


Figura 4.30 - Variação radial em função do tempo.

Assim, podemos concluir a respeito do comportamento das partículas coorbitais a satélites, que por um período de integração de 500 anos elas permanecem confinadas entre os satélites nas configurações do Tipo Ia e IIa. Verificamos que a inclusão da excentricidade gera nas partículas uma variação radial em função do tempo. Essa variação tem forma diferente quando a excentricidade é incluída somente na órbita da partícula e de quando a excentricidade é incluída somente na órbita do satélite. A variação radial também pode ser observada no sistema de referência rotacional Figuras 4.20b e 4.26b.

Na próxima seção iremos apresentar os pontos de equilíbrio que obtivemos para as partículas coorbitais aos satélites, por um período de 500 anos de integração. Esse estudo foi aplicado para o anel central da falha de Encke com satélites de raio de 10 km nas posições do Tipo Ia e IIa.

4.4 NOVOS PONTOS DE EQUILÍBRIO DAS PARTÍCULAS

Um outro resultado que obtivemos foi a obtenção dos pontos de equilíbrio das partículas em órbita circular e planar, coorbital a dois e três satélites, para o caso onde os satélites têm mesma massa e estão posicionados na configuração do Tipo Ia e Tipo IIa, por um período de 500 anos de integração.

Os pontos de equilíbrio foram obtidos de modo numérico a partir do modelo do problema circular restrito de três corpos, no qual é possível verificar através de um gráfico do semi-eixo maior em função do tempo os picos de máximo e de mínimo das partículas que estão relacionados com a aproximação da partícula aos pontos de equilíbrio Lagrangianos. Assim partindo dessa idéia e com o intuito de obtermos os pontos de equilíbrio para as partículas posicionadas entre dois e três satélites em órbita circular, plotamos o gráfico da variação radial em função do tempo para identificarmos quando ocorrem as variações que identificam os pontos de equilíbrio. Em seguida plotamos o gráfico da variação angular em função do tempo para obtermos para aquele dado instante de tempo a posição angular das partículas. Em seguida posicionamos as partículas no mesmo semi-eixo maior dos satélites, nessas posições de equilíbrio, e integramos o nosso sistema verificando o comportamento que as partículas passam a descrever em termos da variação dos seus elementos orbitais.

Com intuito de melhor compreender, o estudo descrito acima, consideremos a configuração descrita pela Figura 4.31 que descreve o comportamento de uma partícula de massa desprezível, no sistema rotacional que passa próxima aos pontos de equilíbrio L_4 , L_5 e L_3 . Na Figura 2.8 verificamos a variação do semi-eixo maior em função do tempo o qual nos mostra claramente os pontos de máximo e de mínimo das partículas e em seguida temos a Figura 2.7a que mostra a variação do semi-eixo maior em função da variação angular da partícula.

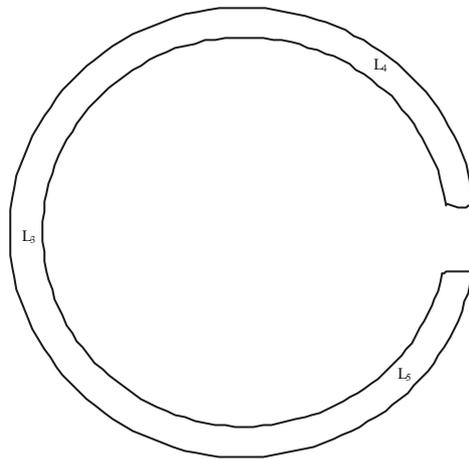


Figura 4.31 - Visualização dos pontos de equilíbrio Lagrangianos e do movimento da partícula em forma de ferradura.

4.4.1 Configuração de equilíbrio do Tipo Ia para dois satélites e duas partículas por um período de 500 anos de integração

Nessa configuração obtivemos quatro pontos de equilíbrio para as partículas realizando o procedimento descrito anteriormente, onde o primeiro ponto está a 30° de Pan, que está fixo a 0° e os restantes estão, com relação a Pan, a 107° , 210° e 313° .

A Figura 4.32 mostra a variação do semi-eixo maior das partículas em função da variação angular.

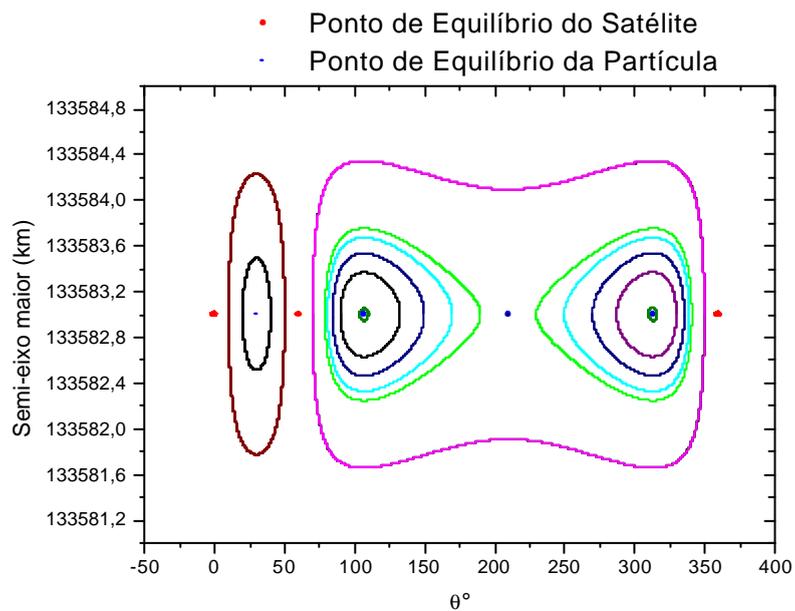


Figura 4.32 - Variação do a em função de θ das partículas.

Os pontos de equilíbrio podem ser melhor visualizados através do gráfico do sistema rotacional com Pan Figura 4.33.

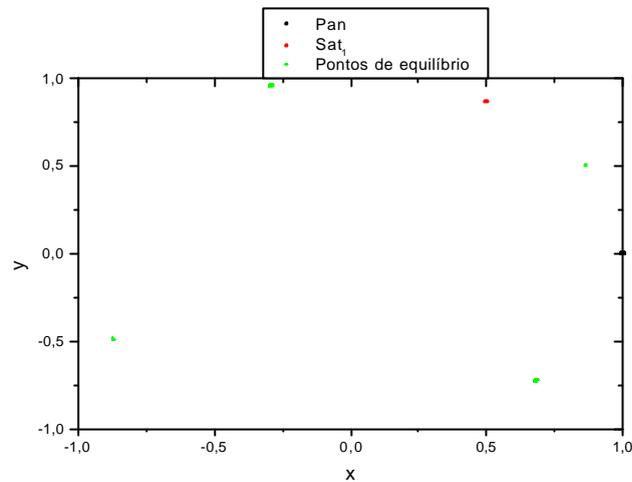


Figura 4.33 - Sistema de referência rotacional com Pan.

4.4.2 Configuração de equilíbrio do Tipo II para dois satélites e duas partículas por um período de 500 anos de integração

Nessa configuração obtivemos dois pontos de equilíbrio das partículas o primeiro se localiza a 0° e o segundo está a 270° , do satélite Pan, como pode ser visualizado na Figura 4.34 que mostra o comportamento dos satélites e das partículas no sistema de referência rotacional.

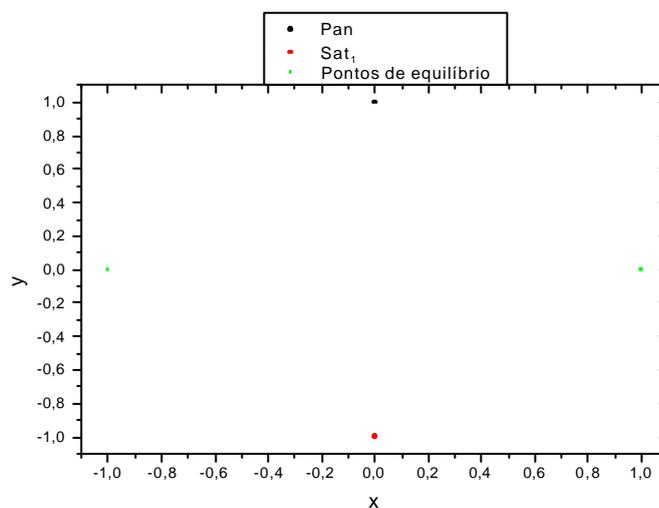


Figura 4.34 - Sistema de referência rotacional com Pan.

A Figura 4.35 nos mostra a variação do semi-eixo maior das partículas e dos satélites em função da variação angular. Nessa figura apresentamos partículas que estão nos pontos de equilíbrio e as que libram em torno deles.

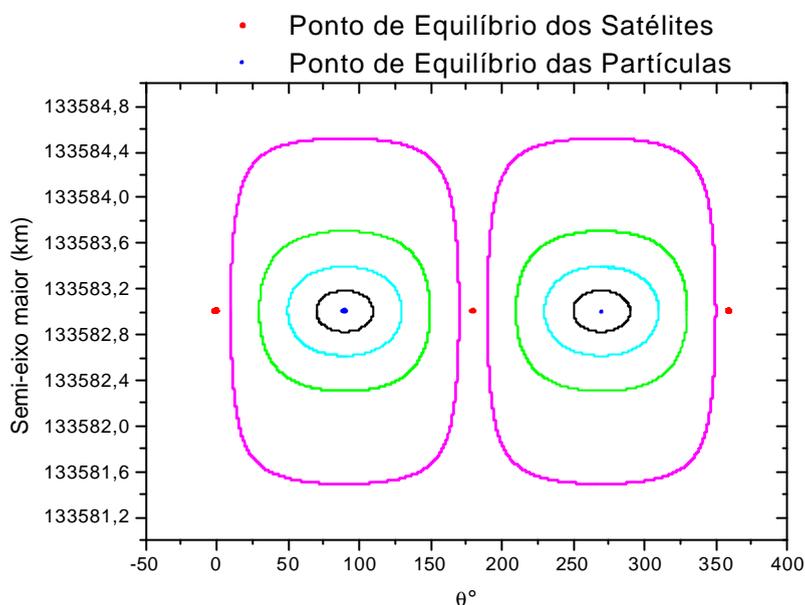


Figura 4.35 - Variação do a em função de θ dos satélites e de partículas posicionadas nos pontos de equilíbrio e próxima a eles.

4.4.3 Configuração de equilíbrio do Tipo Ia para três satélites e três partículas por um período de 500 anos de integração

Para a configuração estável em que temos três satélites coorbitais a três partículas em órbita planar e circular obtivemos os seguintes pontos de equilíbrios das partículas: 0° , $91,1^\circ$, $156,3^\circ$, $203,6^\circ$ e $268,8^\circ$ com relação ao satélite Pan. Assim inserindo partículas nesses pontos de equilíbrio e no mesmo semi-eixo maior dos satélites, podemos visualizar o comportamento das partículas e dos satélites analisando a variação radial em função da variação angular.

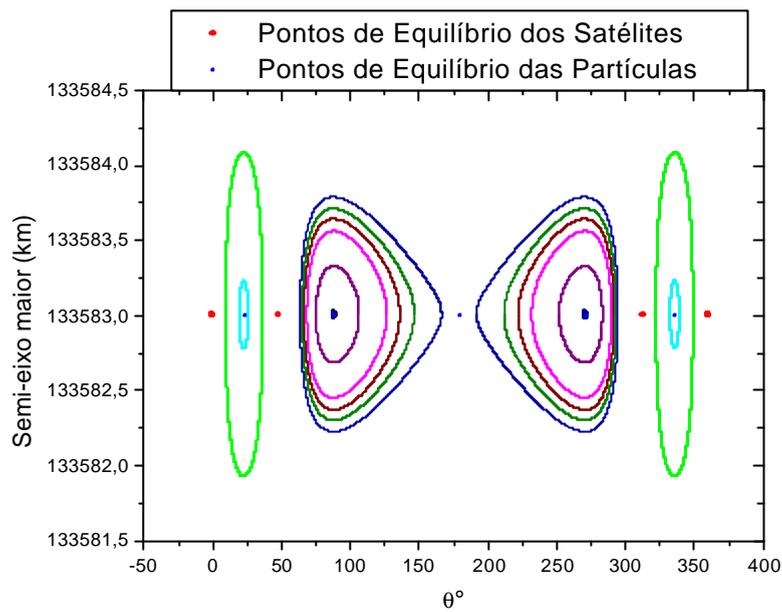


Figura 4.36 - Variação do a em função de θ dos satélites e das partículas nos pontos e próximo aos pontos de equilíbrio.

4.4.4 Configuração de equilíbrio do Tipo IIa para três satélites e três partículas por um período de 500 anos de integração

Nessa configuração instável denominada Tipo IIa temos três partículas coorbitais a três satélites, e obtivemos três pontos de equilíbrio para as partículas estando esses pontos posicionados à 60° , 120° e 300° , com relação ao satélite Pan que está fixo no sistema rotacional posicionado a 0° .

O sistema rotacional, com os satélites e as partículas, para essa configuração está representado na Figura 4.37. A variação do semi-eixo maior em função do tempo para as partículas e os satélites nos pontos de equilíbrio é constante. A variação angular das partículas nos pontos de equilíbrio, e próximas a eles, é mostrada na Figura 4.38.

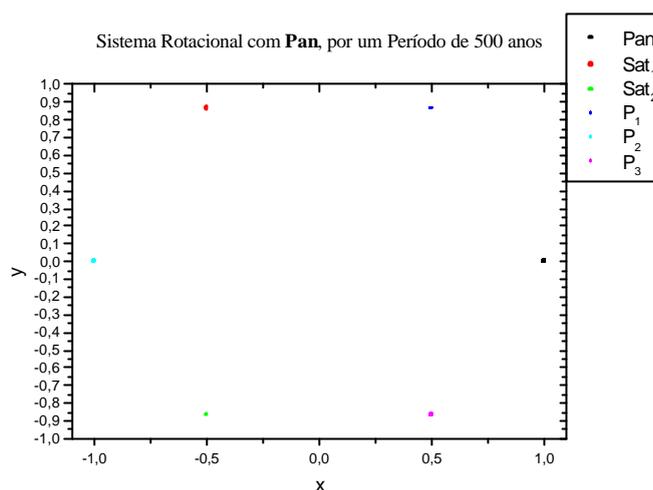


Figura 4.37 - Sistema de referência rotacional com Pan.

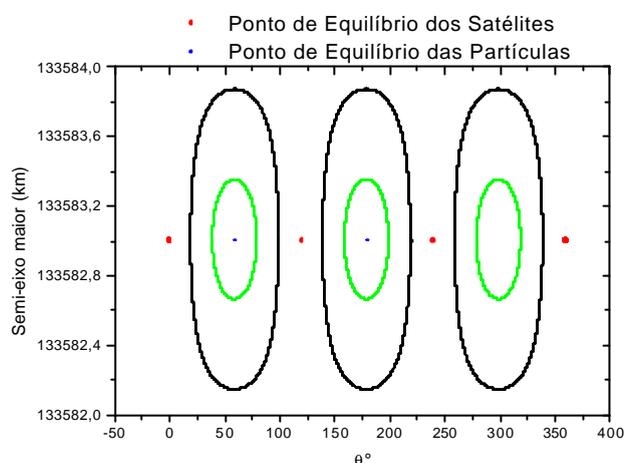


Figura 4.38 - Variação do a em função de θ dos satélites e das partículas nos pontos de equilíbrio e ao redor dos pontos.

O estudo do problema de 2 e 3 satélites posicionados nas configurações de equilíbrio proposto por Salo e Yoder (1988) nos possibilitou obter de modo numérico pontos de equilíbrio das partículas coorbitais a esses satélites a partir da idéia do problema circular restrito de 3 corpos. A estabilidade também pode ser verificada quando posicionamos partículas próximas a tais pontos, com um deslocamento inicial de aproximadamente 5° , verificando que algumas partículas passam a girar em torno dos pontos de equilíbrio inicial, e outras não.

A localização de pontos de equilíbrio para partículas coorbitais a hipotéticos satélites, que orbitam os anéis planetários, pode ajudar a explicar várias das estruturas encontradas nesses anéis.

4.5 SIMULAÇÕES PARA SATÉLITES DE MASSAS DIFERENTES POR UM PERÍODO DE 500 ANOS

Como proposto em nosso plano de pesquisa inicial iremos alterar o raio dos satélites, mantendo como constante a densidade dos mesmos, com o objetivo de estudar como as partículas, que estão coorbitais a eles, irão se comportar. Esse estudo foi realizado para o caso circular e excêntrico, para dois e três satélites posicionados nas configurações de equilíbrio como proposto por Salo e Yoder (1988). O valor da excentricidade utilizada foi de 10^{-4} . As configurações de equilíbrio obtidas foram para o caso onde os satélites têm massas iguais.

Nossas simulações foram realizadas para um satélite de raio igual a 5 km e com uma densidade igual a $1,2 \text{ g/cm}^3$ o que nos fornece uma massa igual a $6,283 \times 10^{14} \text{ kg}$. Em nossas simulações tivemos o objetivo de realizar o estudo do comportamento buscando uma configuração em que as partículas ficassem confinadas pelos satélites. Para tal propósito, consideramos vários valores de semi-eixo maior das partículas. Para isso posicionamos os satélites em suas posições iniciais, como proposto por Salo e Yoder (1988), e em seguida posicionamos as partículas a 15 km do semi-eixo inicial dos satélites, e fomos diminuindo passo-a-passo o semi-eixo maior das partículas até que obtivéssemos o confinamento destas.

A seguir iremos apresentar nossos resultados obtidos para essa configuração.

4.5.1 Satélites posicionados na configuração do Tipo Ia

Nessa configuração os satélites estão em um semi-eixo maior igual a 133.583 km, (P_1) está posicionada em um semi-eixo maior igual a 133.591 km, e (P_2) a 133.592 km, todos os corpos estão em um mesmo plano e em órbita circular ao redor de um corpo central Figura 4.7. O corpo que está como referência no sistema girante é Pan, que tem uma massa igual a $5,026 \times 10^{15} \text{ kg}$ e o segundo satélite tem uma massa igual a $6,283 \times 10^{14} \text{ kg}$. Nosso estudo será feito analisando não somente o comportamento das partículas, mas também dos satélites.

Nas Figuras 4.39 e 4.40 verificamos a variação do semi-eixo maior dos satélites em função do tempo e das partículas.

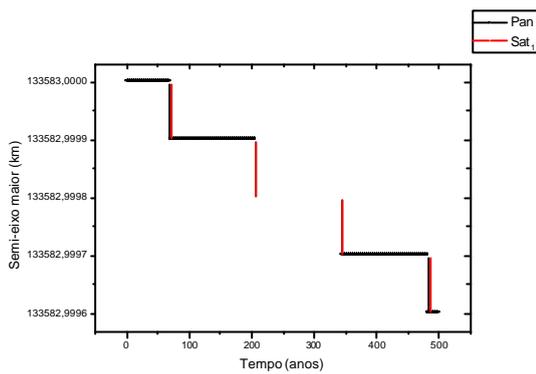


Figura 4.39 - Variação do a em função do tempo para os satélites que estão posicionados na configuração do Tipo Ia.

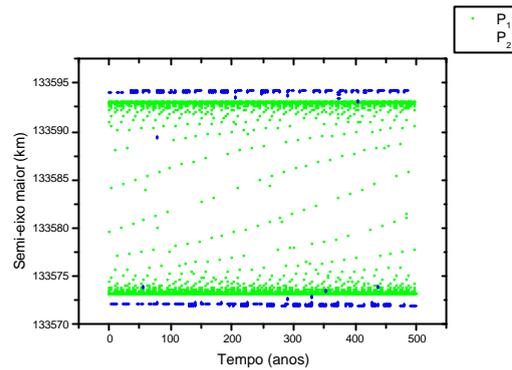


Figura 4.40 - Variação do a em função do tempo para as partículas que estão posicionadas entre os satélites Pan e Sat₁.

A variação do semi-eixo maior dos satélites é da ordem de $4,0 \times 10^{-4}$ km, sendo interessante ressaltar que para esse período de integração a variação dos dois satélites é idêntica à variação que ocorre nessa mesma configuração quando temos satélites de mesma massa Tabela 4.1.

A variação radial da partícula em função do tempo pode ser visualizada na Figura 4.41.

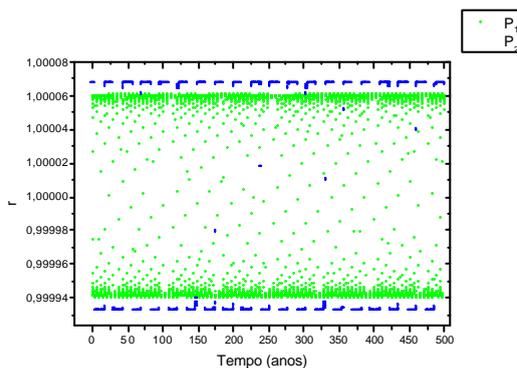


Figura 4.41a - Variação de r em função do tempo para as partículas que estão inicialmente com uma excentricidade igual a zero.

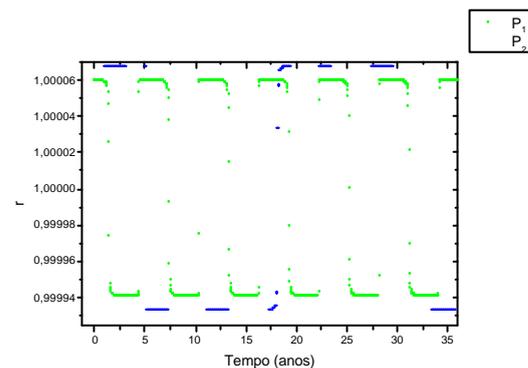


Figura 4.41b - Ampliação da Figura 4.41a.

A Figura 4.42 mostra de modo mais compreensível o confinamento radial e azimutal das partículas entre os satélites.

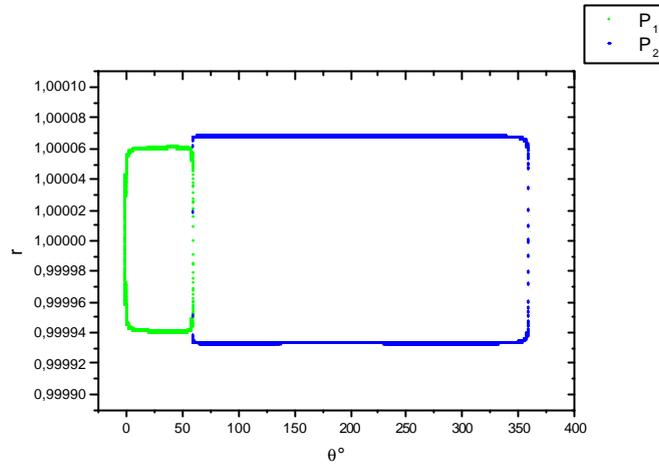


Figura 4.42 - Variação de r em função de θ das partículas.

Esse confinamento também pode ser visualizado através da variação do semi-eixo maior em função de θ , Figura 4.43.

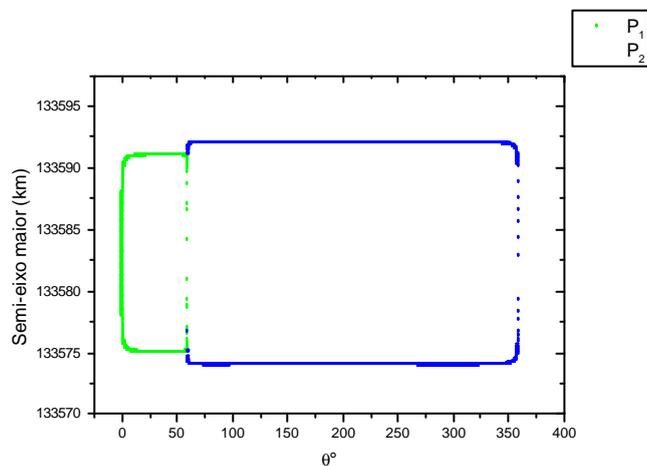


Figura 4.43 - Variação de a em função de θ das partículas.

Por último podemos analisar a variação angular em função do tempo, Figuras 4.44a e 4.44b.

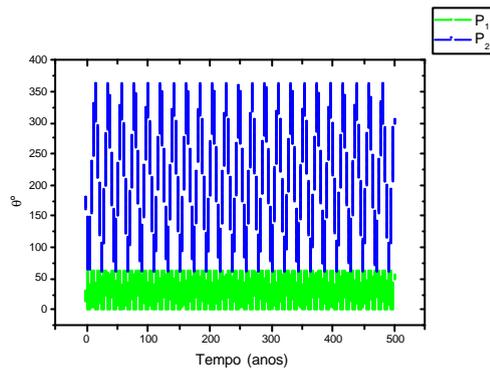


Figura 4.44a - Variação angular em função do tempo das partículas.

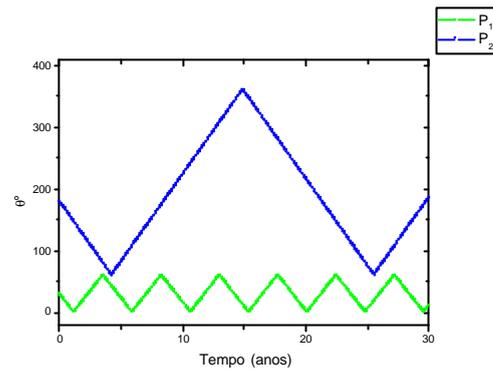


Figura 4.44b - Ampliação da Figura 4.44a.

Quando incluímos excentricidade na partícula igual a 10^{-4} , mantendo as mesmas condições descritas anteriormente para o caso circular verificamos que os satélites têm o mesmo comportamento visualizado na Figura 4.39 e uma variação radial em função do tempo das partículas que pode ser visualizada nas Figuras 4.45 e 4.45a.

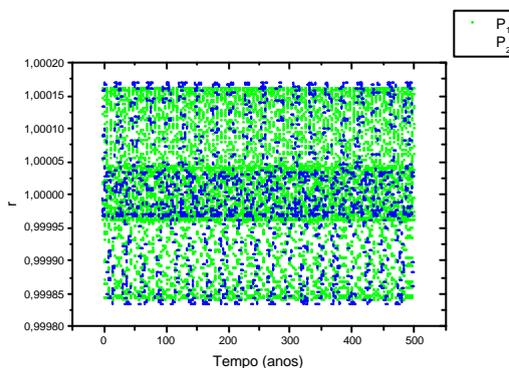


Figura 4.45a - Variação radial em função do tempo para as partículas coorbitais aos satélites.

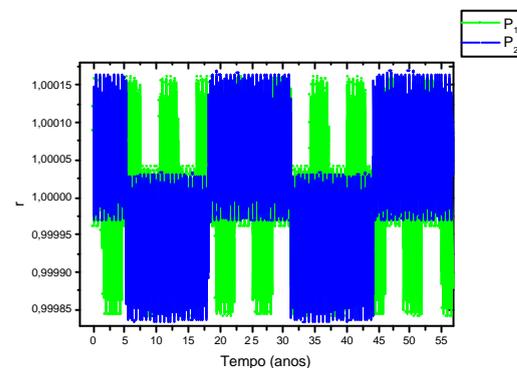


Figura 4.45b - Ampliação da Figura 4.45a.

Simulamos também o caso onde a excentricidade dos satélites é igual a 10^{-4} . O resultado verificado, de modo geral, foi semelhante ao caso estudado para satélites de mesma massa, ou seja, além de termos o confinamento das partículas verificamos que os satélites têm a mesma variação do semi-eixo maior em função do tempo, Figura 4.42. Verificamos também que a excentricidade do satélite gera uma variação periódica nas partículas sendo estas visualizadas através do gráfico de r em função do

tempo como mostram as Figuras 4.46a – 4.46b e através do gráfico da variação da excentricidade da partícula em função do tempo, Figura 4.47.

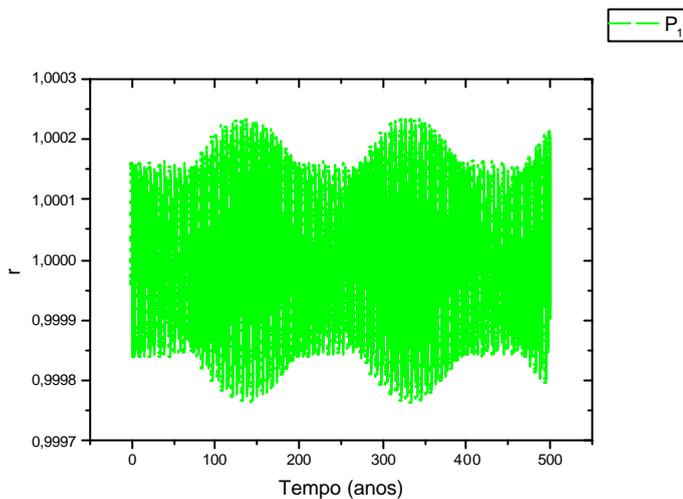


Figura 4.46a - Variação radial em função do tempo para (P_1).

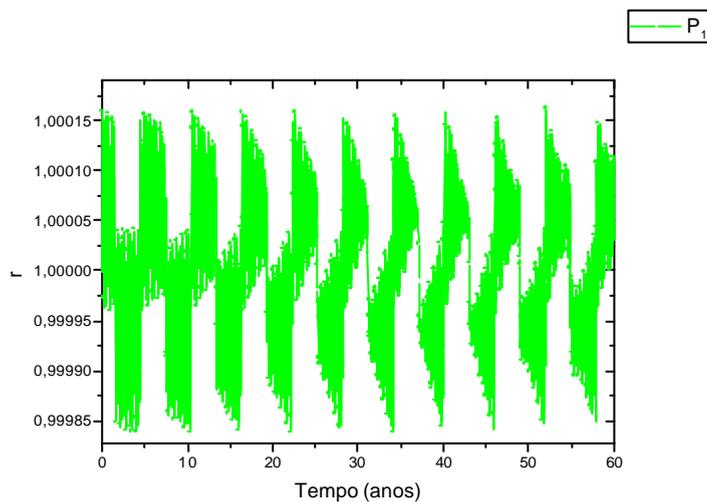


Figura 4.46b - Ampliação da Figura 4.46a.

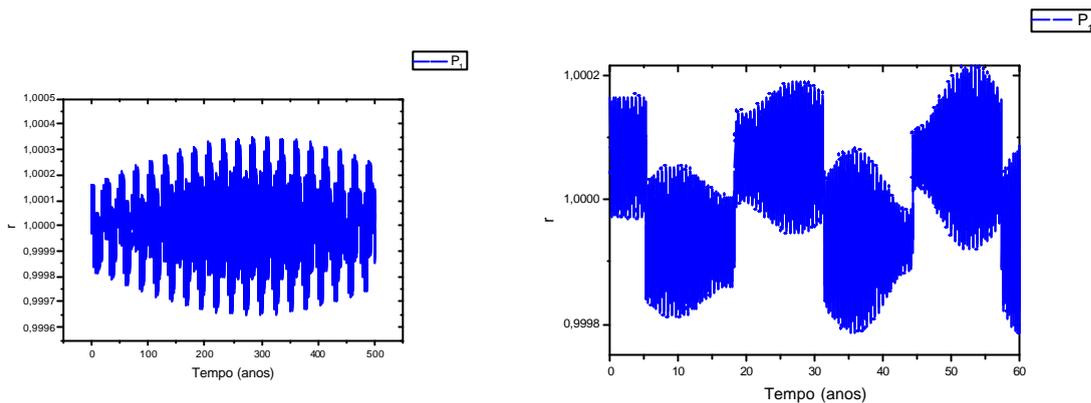


Figura 4.46c - Variação radial em função do tempo para (P_2) e a direita uma ampliação dessa configuração.

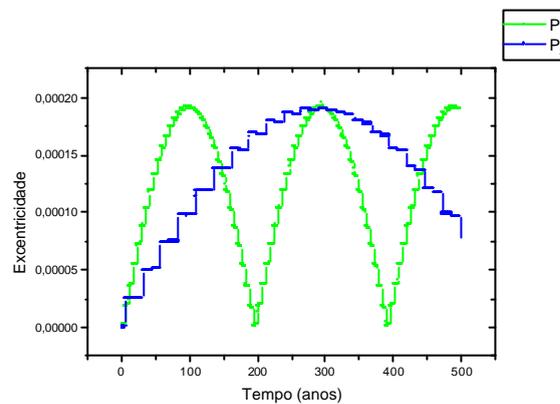


Figura 4.47 - Variação da excentricidade em função do tempo para as partículas que estão inicialmente em uma órbita circular.

4.5.2 Satélites posicionados na configuração do Tipo IIa.

A simulação foi realizada para dois satélites coorbitais a duas partículas buscando obter um semi-eixo maior em que seja possível observar o confinamento das partículas. Faz-se importante ressaltar que para esse caso excêntrico o que irá diferenciar será a variação radial em função do tempo das partículas, pois no primeiro caso a excentricidade inicial é inserida nas partículas o que gera uma variação radial semelhante à observada na Figura 4.45, e no segundo caso excentricidade é inserida nos satélites o que gera uma variação na excentricidade como observada na Figura 4.47 gerando uma variação radial semelhante à observada nas Figuras 4.46a – 4.46b.

Com esse intuito verificamos que as partículas permanecem confinadas a partir de um semi-eixo maior igual a 133.593 km.

Para o caso circular a Figura 4.48 mostra o confinamento angular e azimutal das partículas.

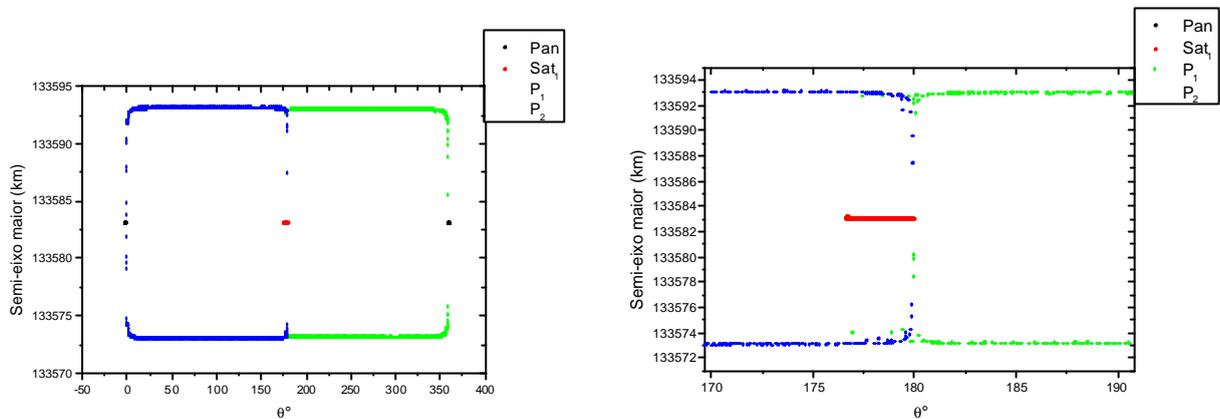


Figura 4.48 - Variação do a em função de θ para o caso circular. À direita temos uma ampliação dessa configuração.

Verificamos que os satélites descrevem comportamentos diferenciados próximos aos pontos de equilíbrio sendo que Pan, que tem raio de 10 km, tem uma variação da ordem de $2,0 \times 10^{-3}$ km, ou seja, o mesmo observado na configuração dos satélites para massas iguais conforme a Tabela 4.1, e Sat₁ que tem um raio de 5 km tem uma variação de $2,4 \times 10^{-1}$ km, como mostra a Figura 4.49.

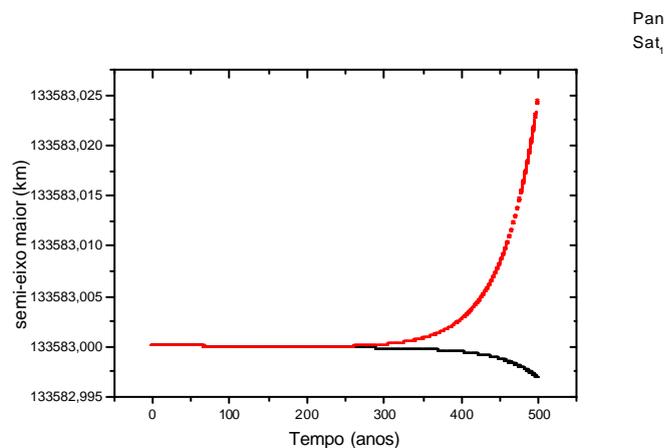


Figura 4.49 - Variação do a em função do tempo dos satélites que estão posicionados na configuração de equilíbrio do Tipo IIa.

Outra forma de se visualizar o confinamento é através do gráfico da variação angular em função tempo Figura 4.50.

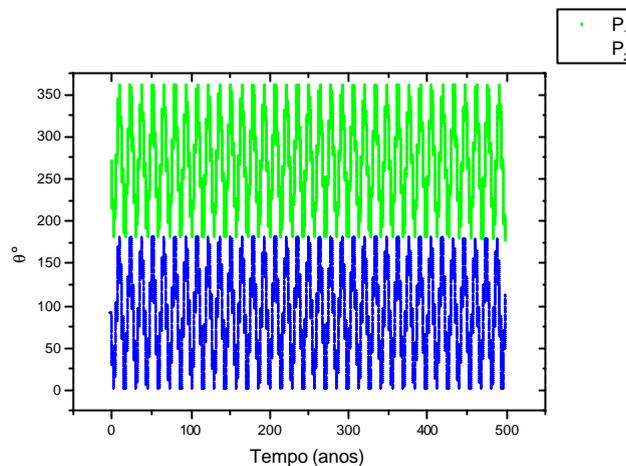


Figura 4.50 - Variação angular em função do tempo para as duas partículas.

Como citado anteriormente, o efeito da excentricidade causa um efeito maior na variação radial em função do tempo das partículas, assim para o caso em que incluímos inicialmente excentricidade nas partículas podemos visualizar esse comportamento através da Figura 4.51 e quando a excentricidade é incluída nos satélites a variação que passa a ser gerada na partícula é observada na Figura 4.52.

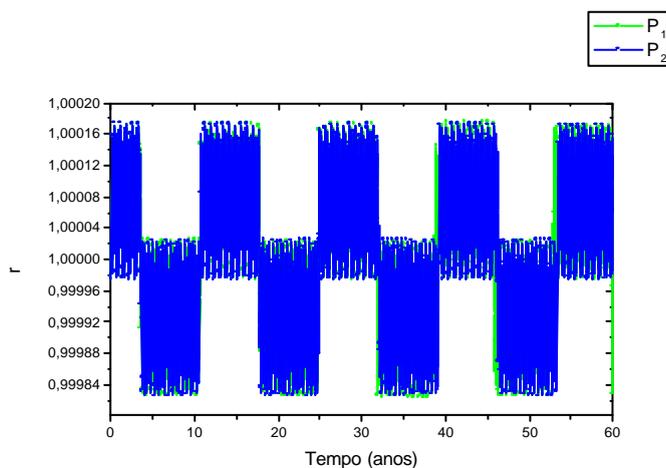


Figura 4.51 - Variação radial em função do tempo.

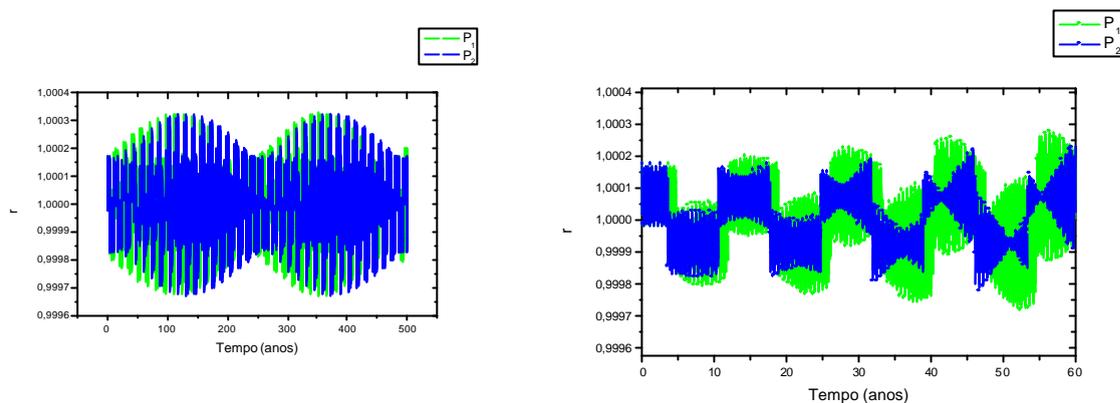


Figura 4.52 - Variação radial em função do tempo. A figura a direita é uma ampliação dessa configuração.

4.5.3 Três satélites posicionados na configuração do Tipo Ia.

Nós iremos considerar a configuração onde temos três satélites que inicialmente estão posicionados nos pontos de equilíbrio da configuração do Tipo Ia. Na primeira simulação consideramos a existência de um satélite com um raio de 10 km e dois outros satélites com raios de 5 km cada, como mostra a Figura 4.53.

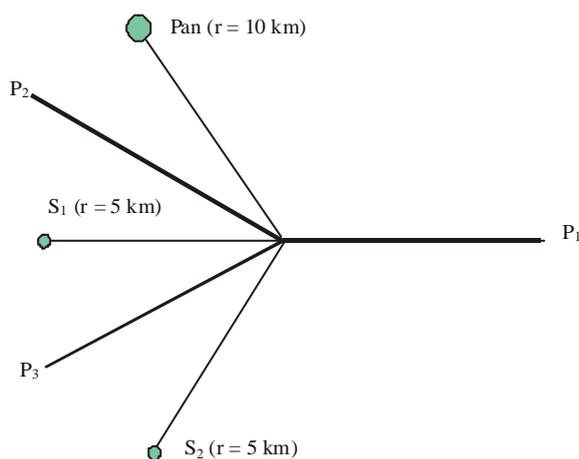


Figura 4.53 - Configuração inicial dos satélites de raios diferentes.

Para essa configuração verificamos que a partícula (P_1) foi confinada a partir de um semi-eixo maior de 133.593 km; as partículas (P_2) e (P_3) foram confinadas em um semi-eixo maior igual a 133.586 km como mostra a Figura 4.54.

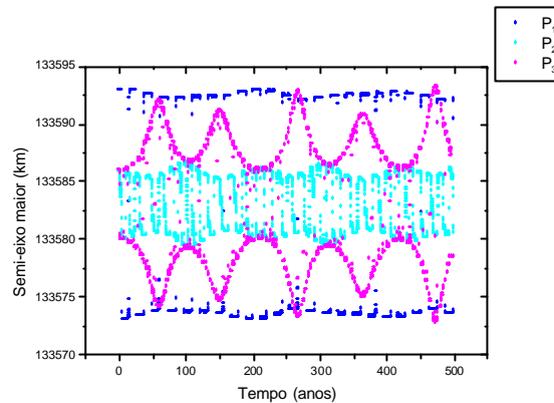


Figura 4.54 - Confinamento das partículas entre os satélites por um período de 500 anos de integração.

Esse confinamento também pode ser verificado através do gráfico da variação angular em função do tempo.

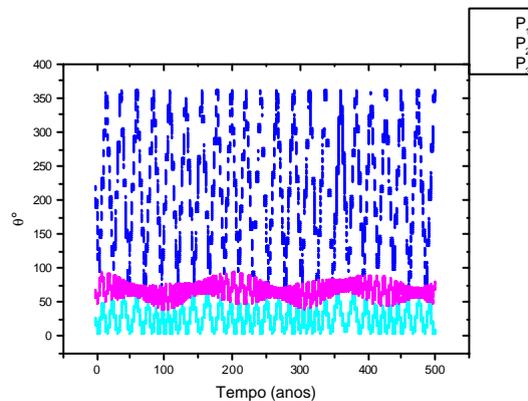


Figura 4.55 - Variação angular das partículas em função do tempo.

A Figura 4.54 nos mostra o confinamento das partículas entre os satélites e uma amplitude de oscilação em termos do semi-eixo maior ao decorrer do tempo, no entanto a Figura 4.55 nos possibilita ver a existência de picos de máximo e de mínimos na variação angular das mesmas.

Com o intuito de explicar a figura acima, apresentamos nas Figura 4.56 e 4.57 o comportamento que os satélites realizam em função do tempo e angularmente.

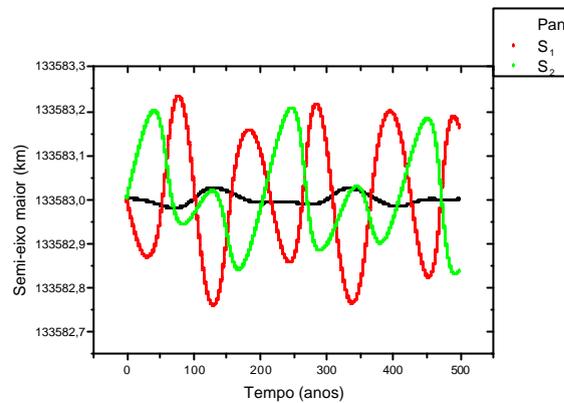


Figura 4.56 - Variação do semi-eixo maior em função do tempo para os satélites que são posicionados na configuração do Tipo Ia.

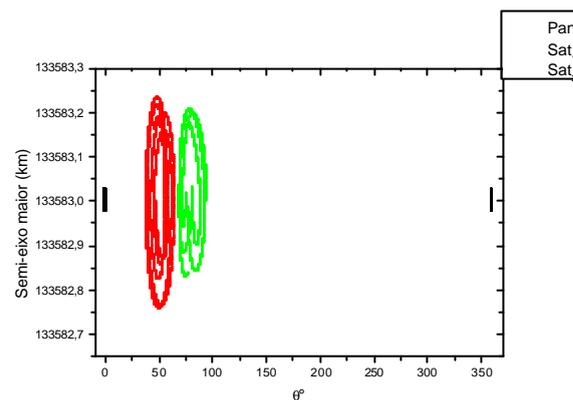


Figura 4.57 - Variação angular dos satélites em função do semi-eixo maior.

Pan, o satélite de raio de 10 km, tem uma amplitude de oscilação aproximadamente de 0,046 km, e os outros satélites tem uma variação de aproximadamente 0,358 km.

Verificamos assim que os satélites não permanecem em suas posições iniciais apesar de uma pequena variação, ou seja, há diferença na posição dos pontos de equilíbrio obtidos por Salo e Yoder (1988). O movimento dos satélites é responsável pela variação da amplitude radial angular das partículas. Uma seqüência do movimento da partícula e do movimento dos satélites por um período de 62 anos é apresentada. Essa seqüência é visualizada na Figura 4.58.

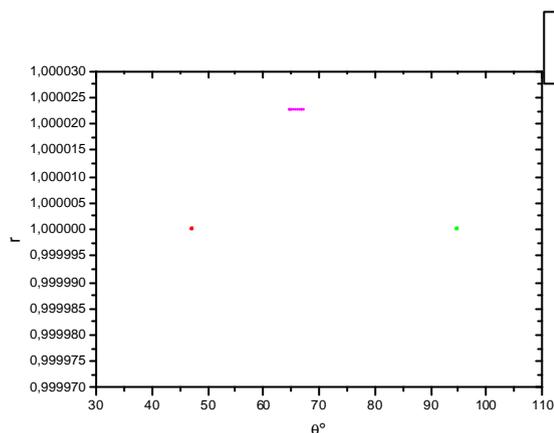


Figura 4.58a - (P_3) está posicionada inicialmente a 67° , Sat_2 está a $47,361^\circ$ e Sat_3 está a $94,722^\circ$. Essa figura mostra o início do movimento da partícula entre os satélites, para o caso circular.

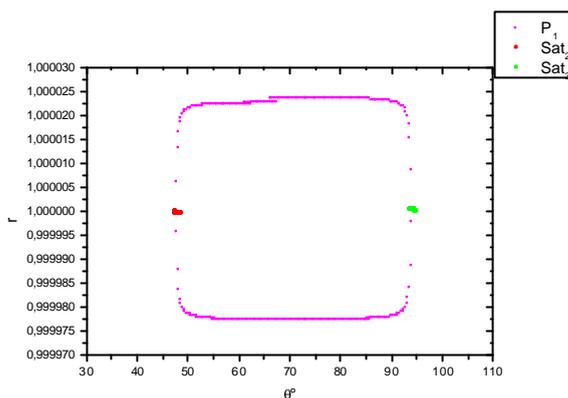


Figura 4.58b - (P_3) completa uma órbita entre os satélites estando Sat_2 a $48,858^\circ$ e Sat_3 a $93,549^\circ$. (P_3) tem uma variação angular de aproximadamente 44° e $\Delta r = 2,4 \times 10^{-4}$.

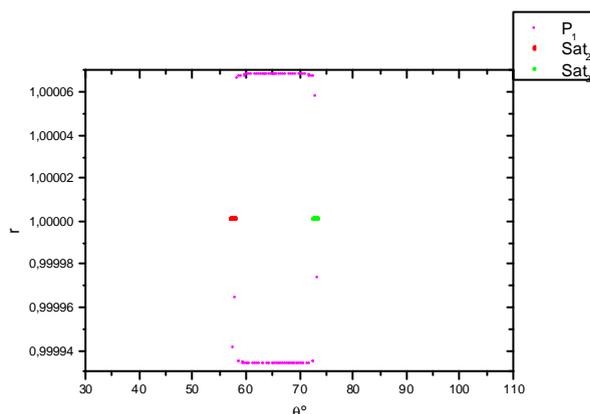


Figura 4.58c - A partícula possui uma variação angular de aproximadamente 15° e Δr igual a $1,3 \times 10^{-4}$. Sat_2 está a $57,407^\circ$ e Sat_3 a $72,890^\circ$.

Para essa configuração, e estando as massas dos satélites distribuídas como mostra a Figura 4.53, verificamos que devido a sincronia existente no comportamento descrito pelos satélites em torno de suas posições iniciais, as partículas passam a apresentar radialmente picos de máximos e de mínimos e variações angulares mantendo o confinamento.

A simulação descrita acima é para o caso circular. Quando incluímos a excentricidade na órbita das partículas, esta irá provocar uma variação radial no comportamento das partículas, como mostram as Figuras 4.59, 4.60 e 4.61.

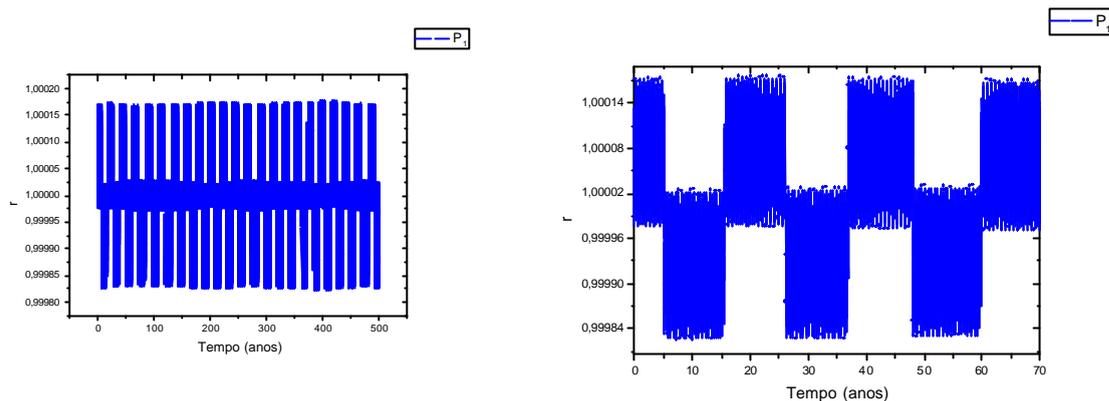


Figura 4.59 - Variação radial da (P_1) em função do tempo. Excentricidade da partícula igual a 10^{-4} .

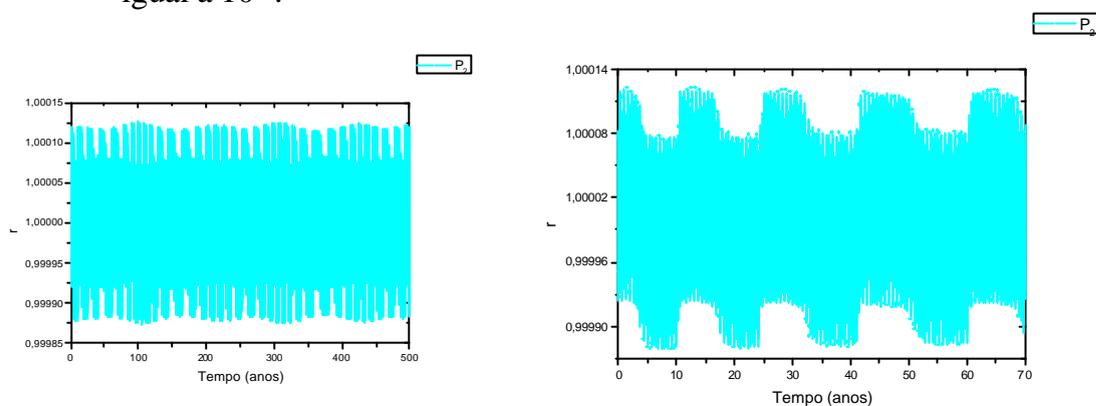


Figura 4.60 - Variação radial da (P_2) em função do tempo. Excentricidade da partícula igual a 10^{-4} .

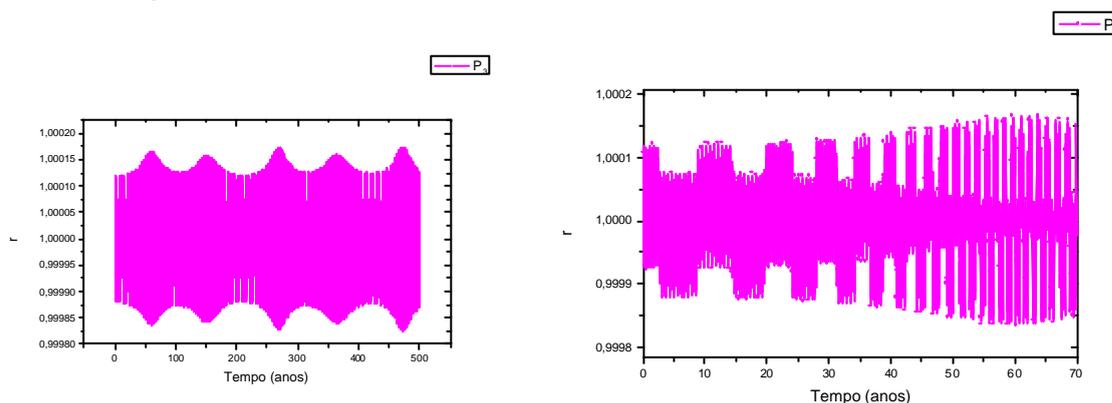


Figura 4.61 - Variação radial da (P_3) em função do tempo. Excentricidade da partícula igual a 10^{-4} .

Ao incluirmos excentricidade somente no satélite verificamos uma variação radial em função do tempo das partículas e uma variação da excentricidade das

mesmas. As Figuras 4.62, 4.63 e 4.64 mostram a variação radial e as Figuras 4.65, 4.66 e 4.67 a variação da excentricidade em função do tempo.

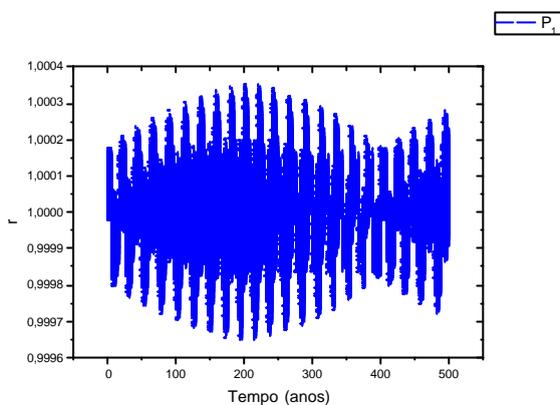


Figura 4.62 - Variação radial da (P_1) em função do tempo.

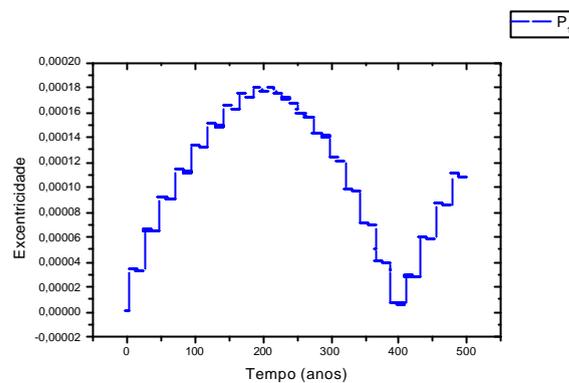


Figura 4.65 - Variação da excentricidade da (P_1) em função do tempo.

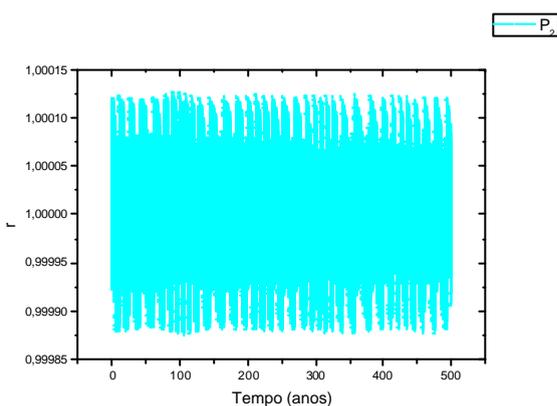


Figura 4.63 - Variação radial da (P_2) em função do tempo.

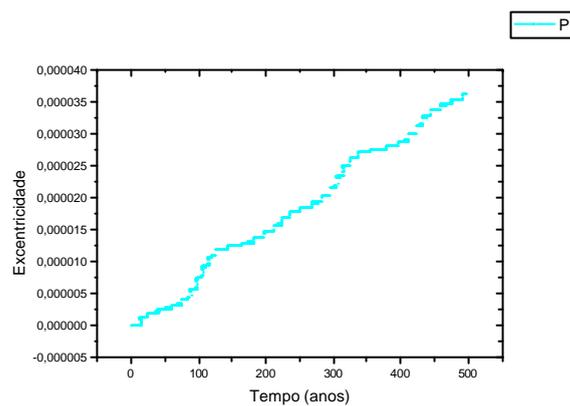


Figura 4.66 - Variação da excentricidade da (P_2) em função do tempo.

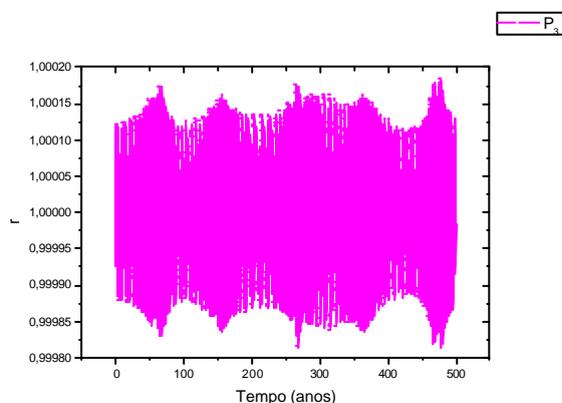


Figura 4.64 - Variação radial da (P_3) em função do tempo.

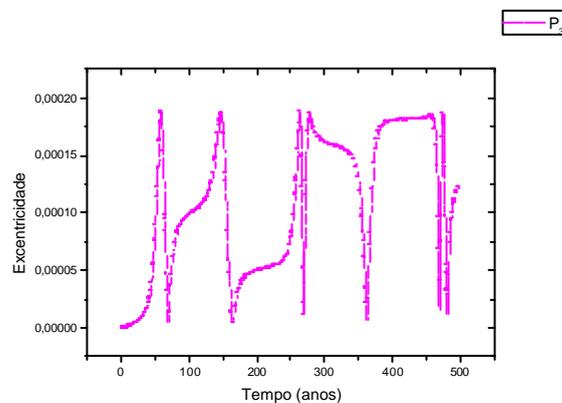


Figura 4.67 - Variação da excentricidade da (P_3) em função do tempo.

Alterando a configuração inicial das distribuições de massa dos satélites, como mostra a Figura 4.68, obtemos um comportamento diferente das partículas e dos satélites.

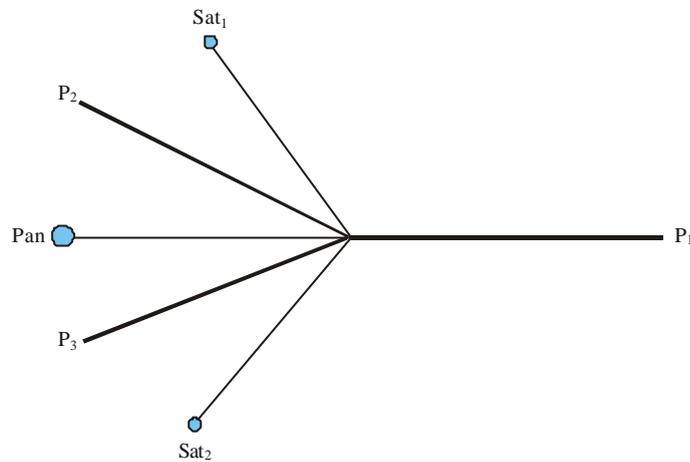


Figura 4.68 - Configuração inicial do sistema.

A partícula (P_1) é confinada a partir de um semi-eixo maior igual a 133.588 km enquanto as partículas (P_2) e (P_3) são posicionadas em um semi-eixo maior igual a 133.590,50 km. As Figuras 4.69 e 4.70 mostram o confinamento radial das partículas e o confinamento angular pelo período de 500 anos.

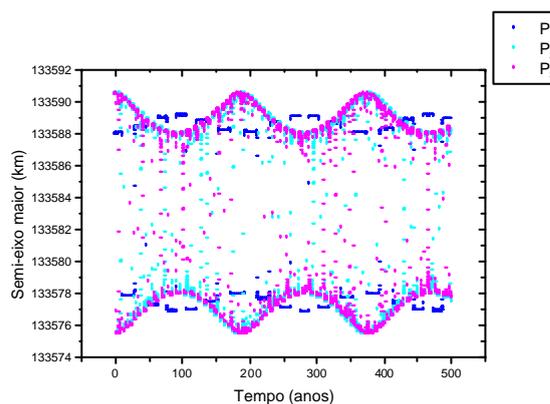


Figura 4.69 - Confinamento radial das partículas coorbitais a satélites que são posicionados inicialmente na configuração de equilíbrio do Tipo Ia.

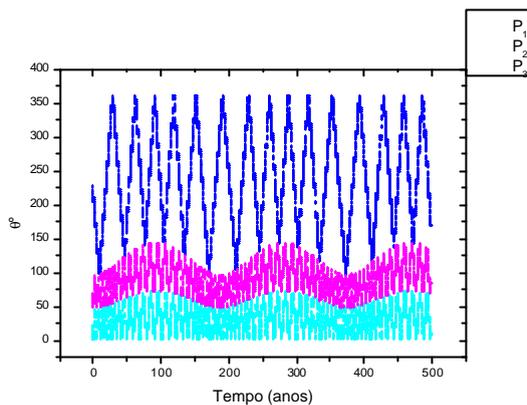


Figura 4.70 - Confinamento azimutal das partículas.

O comportamento dos satélites pode ser visualizado pelas Figuras 4.71 e 4.72.

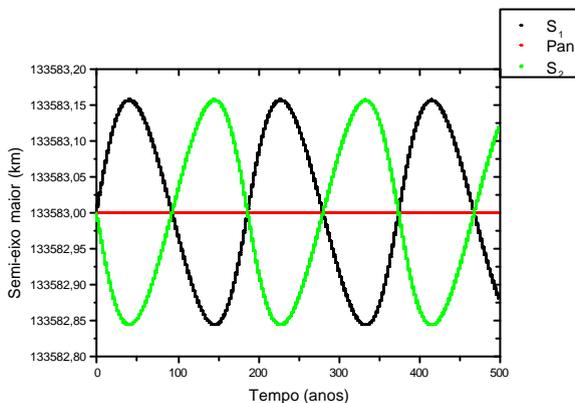


Figura 4.71 - Variação radial em função do tempo dos satélites.

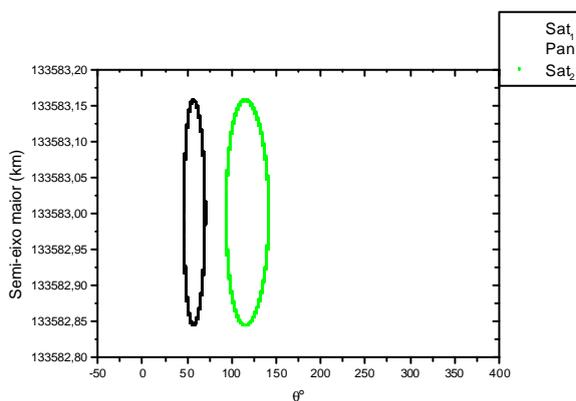


Figura 4.72 - Variação angular em função do tempo dos satélites.

Sat₁ e Sat₂ têm uma variação radial que é de 0,314 km. Pan permanece constante. A variação angular do Sat₁ é de 23,888° e para Sat₂ é 47,637°. Novamente ocorre a

variação radial da amplitude das partículas devido à variação de maneira sincronizada entre os satélites, porém verificamos uma periodicidade no comportamento dos satélites o que nos possibilitará posteriormente obter seus novos pontos de equilíbrio.

Ao incluirmos excentricidade na partícula obtemos uma variação radial das mesmas em função do tempo que é visualizada pelas Figuras 4.73, 4.74 e 4.75.

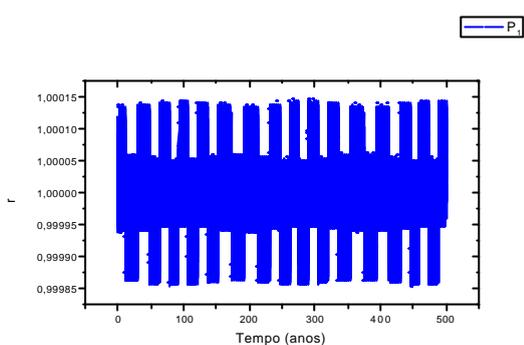


Figura 4.73a - Variação radial em função do tempo de (P_1).

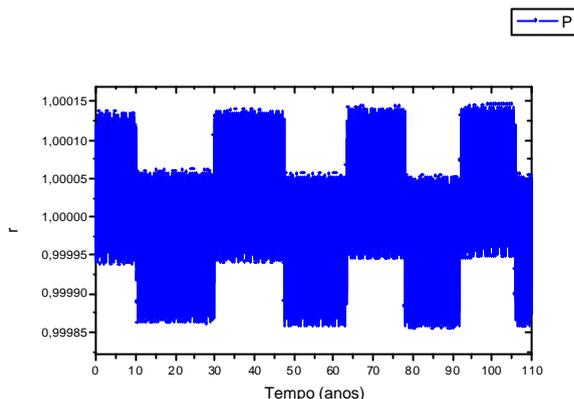


Figura 4.73b - Zoom da Figura 4.73a.

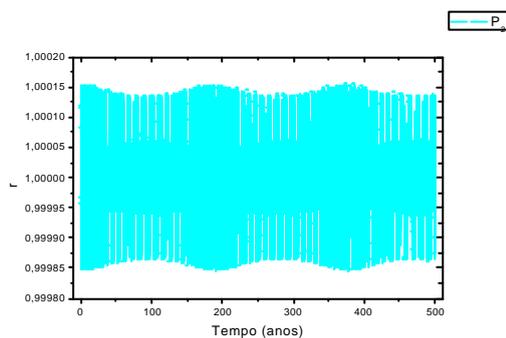


Figura 4.74a - Variação radial em função do tempo de (P_2).

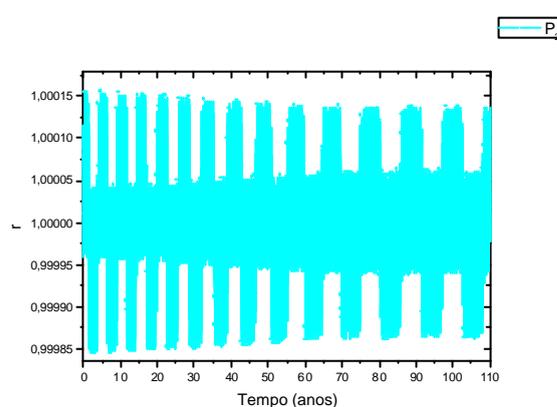


Figura 4.74b - Zoom da Figura 4.74a.

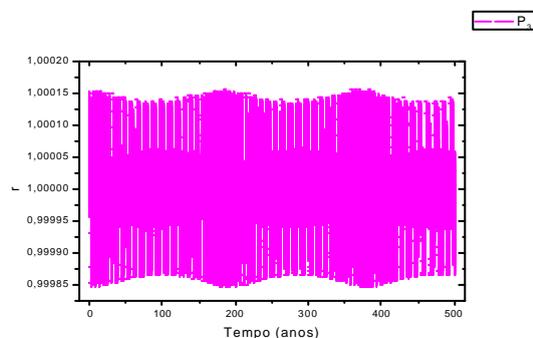


Figura 4.75a - Variação radial em função do tempo de (P_3).

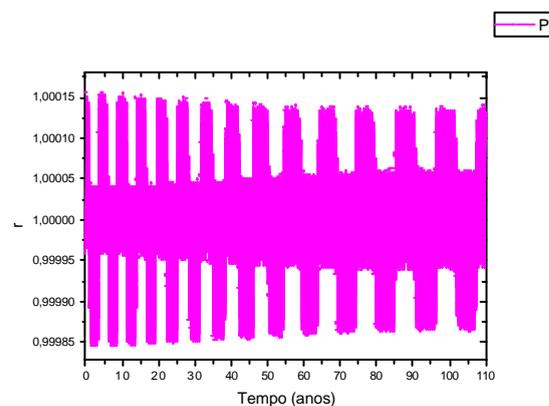


Figura 4.75b - Zoom da Figura 4.75a.

Com a inclusão da excentricidade nos satélites, a variação radial das partículas pode ser visualizada pelas Figuras 4.76, 4.77 e 4.78 e a variação da excentricidade é visualizada pela Figura 4.79.

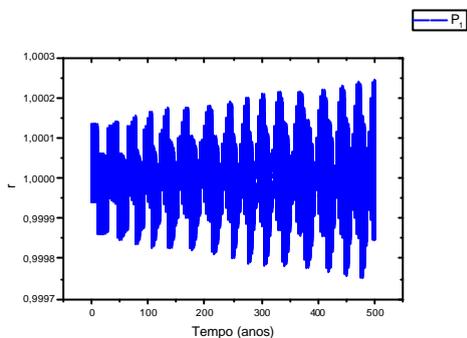


Figura 4.76a - Variação radial em função do tempo de (P_1) .

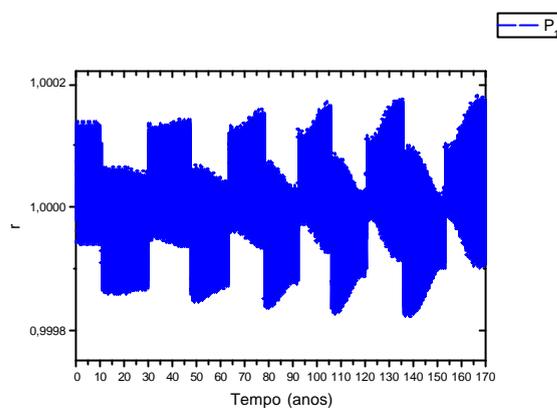


Figura 4.76b - Zoom da Figura 4.76a.

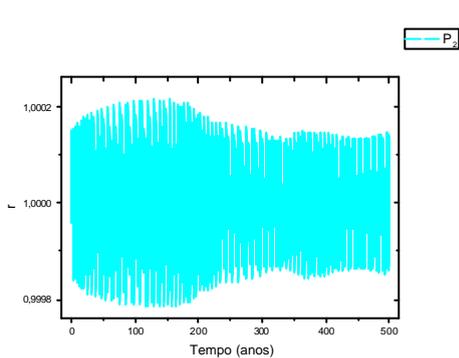


Figura 4.77a - Variação radial em função do tempo de (P_2) .

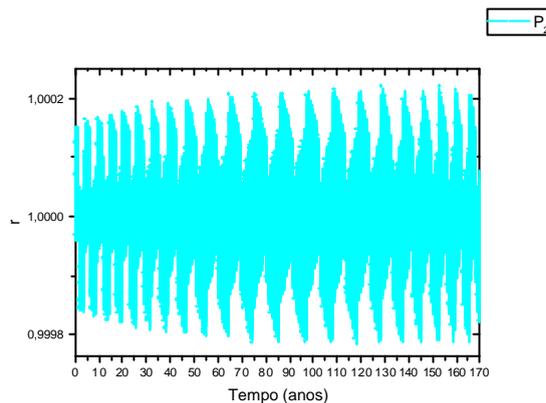


Figura 4.77b - Zoom da Figura 4.77a.

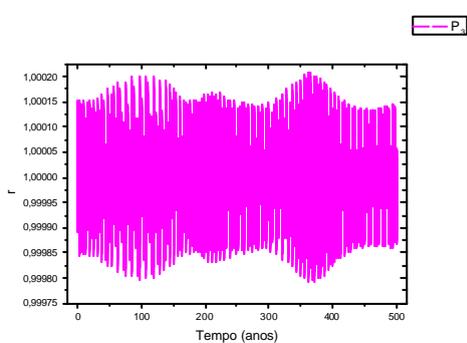


Figura 4.78a - Variação radial em função do tempo de (P_3) .

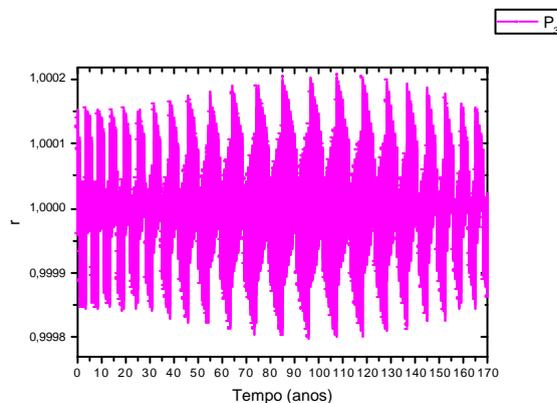


Figura 4.78b - Zoom da Figura 4.78a.

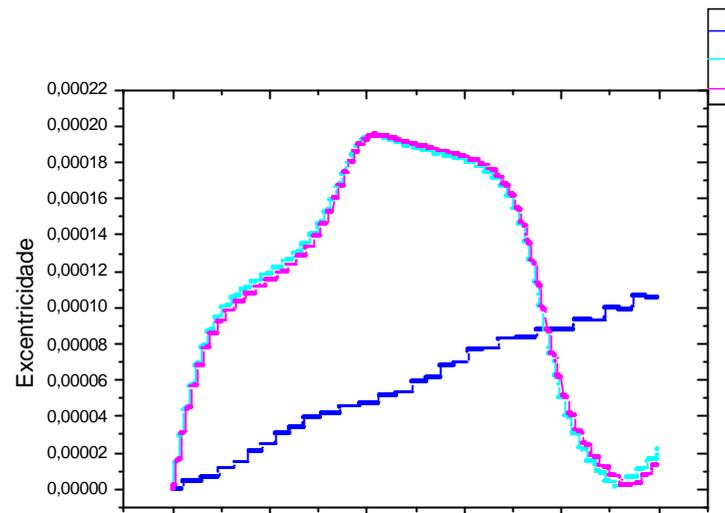


Figura 4.79 - Variação da excentricidade em função do tempo para as partículas que inicialmente estão em órbita circular.

Para três satélites posicionados inicialmente na configuração do Tipo *Ia* verificamos numericamente que a combinação no posicionamento entre dois satélites de raio igual a 5 km com um satélite de raio de 10 km pode resultar na obtenção de outros pontos de equilíbrio dos satélites graficamente Figura 4.72. Com o intuito de se obter a largura de confinamento de partículas entre os satélites, verificamos uma variação na largura de confinamento, ou seja, para o caso em que tínhamos todos os satélites com mesma massa o confinamento ocorria para o semi-eixo maior da partícula igual a 30 km, a partir do momento em que variamos a massa verificamos que a largura variou, isso ocorreu de modo geral para todas as partículas devido à distribuição de massa dos satélites nas suas posições iniciais, Figura 4.54 e Figura 4.69, sendo esse resultado esperado para o problema circular restrito de 3 corpos.

4.5.4 Três satélites posicionados na configuração do Tipo IIa

Nessas simulações posicionamos os satélites de massas diferentes na configuração inicial do Tipo IIa, como mostra a Figura 4.80.

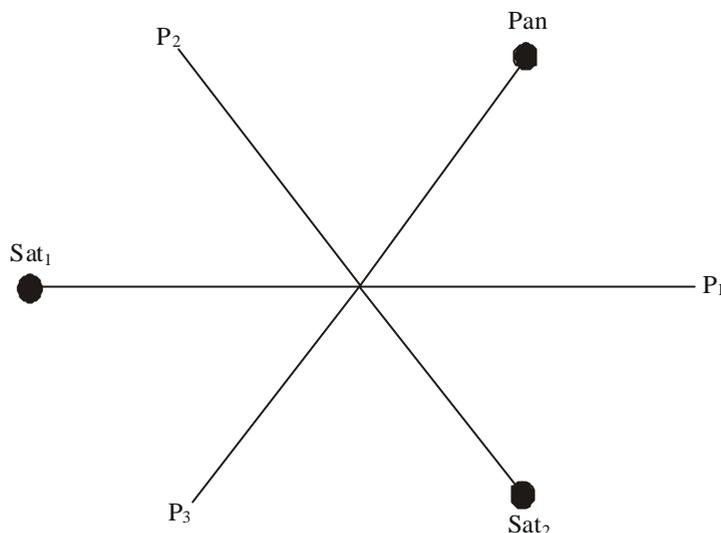


Figura 4.80 - Posicionamento inicial dos satélites e das partículas.

As Figuras 4.81 e 4.82 mostram a variação do semi-eixo maior em função do tempo e a variação do semi-eixo maior em função da variação radial dos satélites.

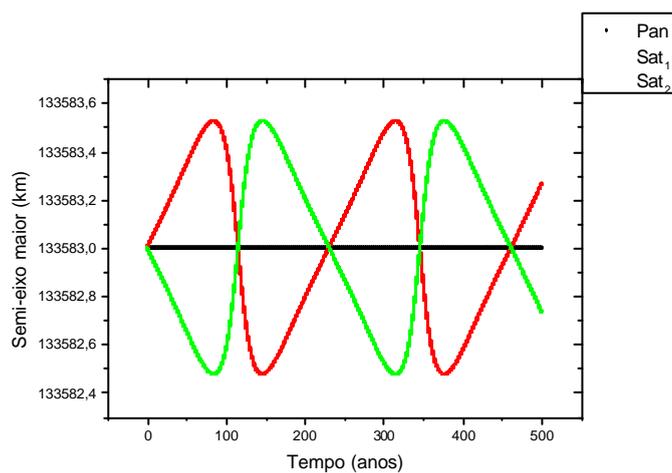


Figura 4.81 - Variação do semi-eixo maior em função do tempo dos satélites que são posicionados inicialmente na configuração do Tipo IIa.

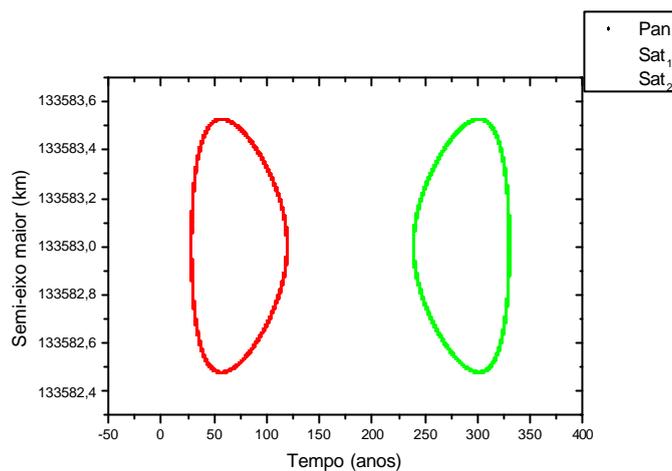


Figura 4.82 - Variação do semi-eixo maior em função da variação angular dos satélites.

O confinamento de (P_1) e de (P_2) foi obtido a partir do semi-eixo maior igual a 133.585 km, e para (P_3) a partir de 133.590 km como mostra a Figura 4.83.

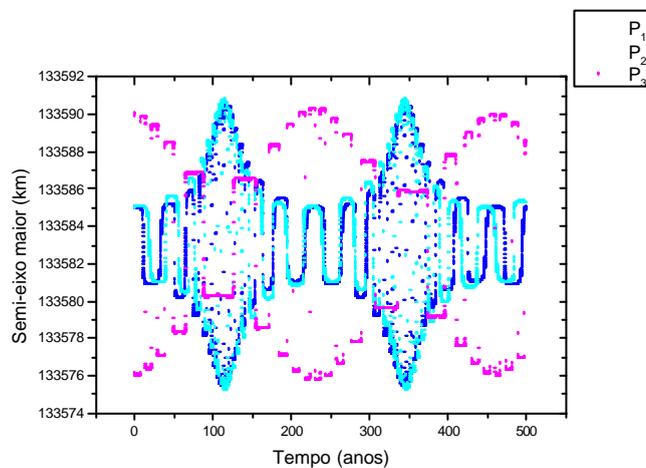


Figura 4.83 - Variação do semi-eixo maior em função do tempo das partículas confinadas entre os satélites.

Para o caso circular temos o comportamento radial em função do tempo para (P_1) visualizado pela Figura 4.84.

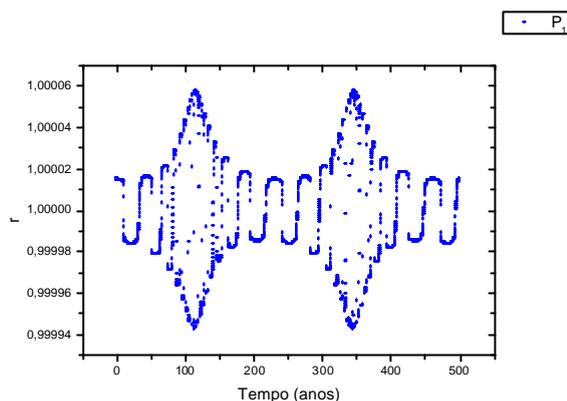


Figura 4.84 - Variação radial em função do tempo de (P_1) que possui uma excentricidade igual a zero.

Na Figura 4.83 observamos novamente variações de máximo e de mínimo do semi-eixo maior das partículas, essas variações são decorrentes, como explicado anteriormente, do movimento dos satélites ao redor dos pontos de equilíbrio. Para visualizar essa variação plotamos também a gráfico do semi-eixo maior em função da variação angular das partículas, Figura 4.85.

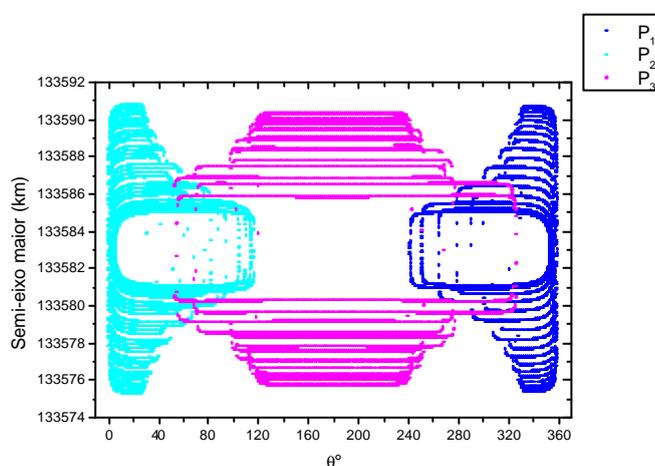


Figura 4.85 - Variação radial em função da variação angular de três partículas coorbitas aos satélites.

Ao incluirmos excentricidade nas partículas a variação radial em função do tempo das mesmas pode ser visualizada pelas Figuras 4.86, 4.87 e 4.88.

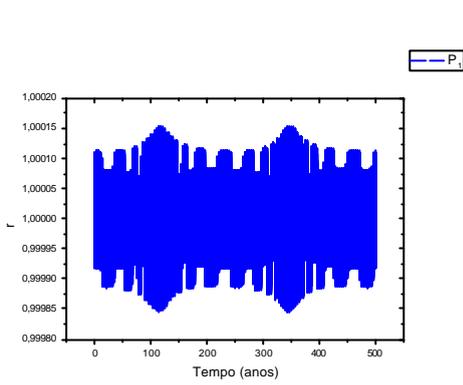


Figura 4.86a - Variação radial em função do tempo para a partícula com excentricidade inicial igual a 10^{-4} .

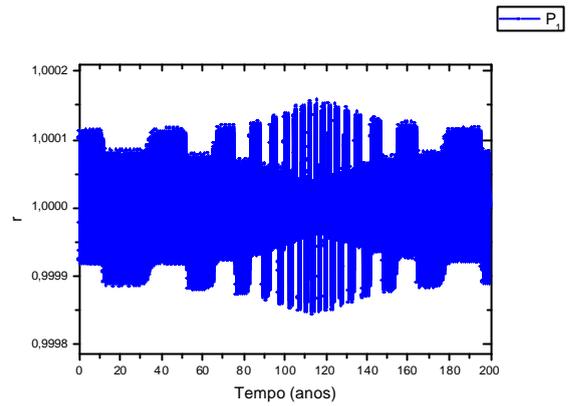


Figura 4.86b - Ampliação da Figura 4.86a.

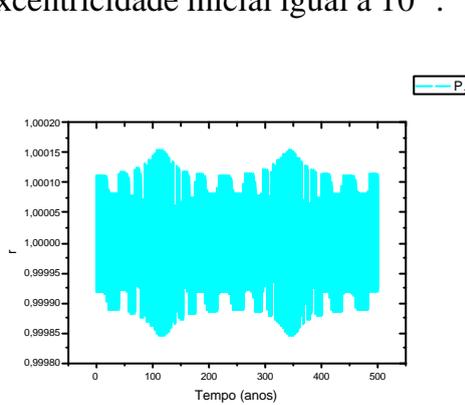


Figura 4.87a - Variação radial em função do tempo para a partícula com excentricidade inicial igual a 10^{-4} .

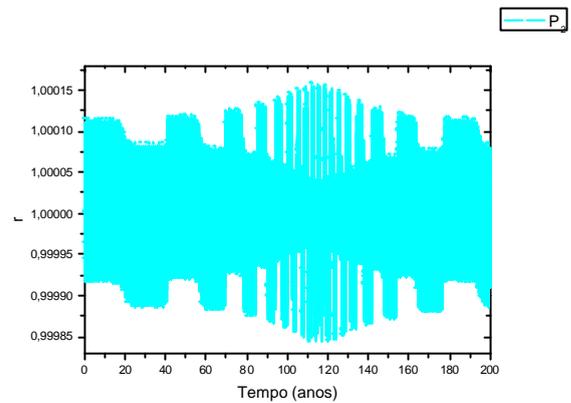


Figura 4.87b - Ampliação da Figura 4.87a.

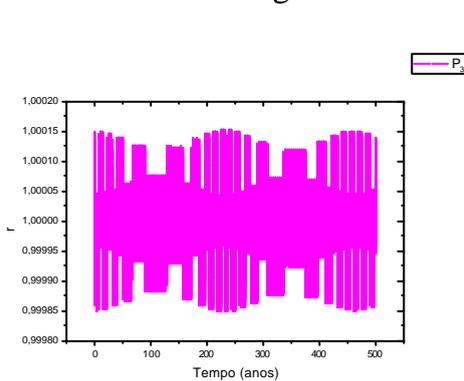


Figura 4.88a - Variação radial em função do tempo para a partícula com excentricidade inicial igual a 10^{-4} .

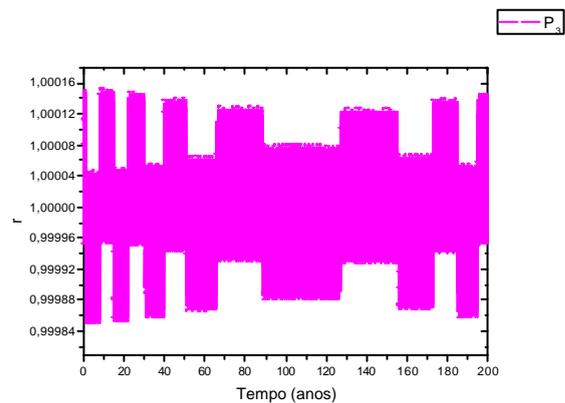


Figura 4.88b - Ampliação da Figura 4.88a.

A variação radial das partículas e a variação da excentricidade das partículas podem ser visualizadas pelas Figuras 4.89, 4.90, 4.91 e 4.92, para o caso em a excentricidade é inserida apenas na órbita dos satélites.

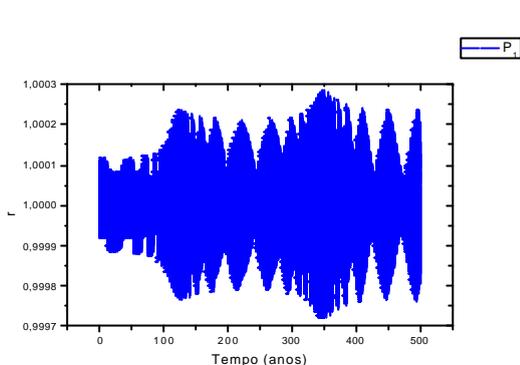


Figura 4.89a - Variação radial em função do tempo da partícula (P_1).

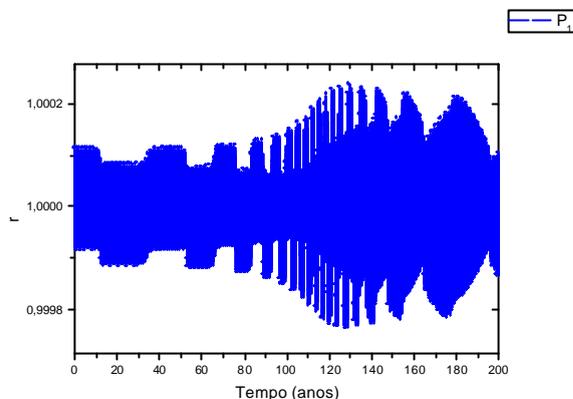


Figura 4.89b - Ampliação da Figura 4.89a.

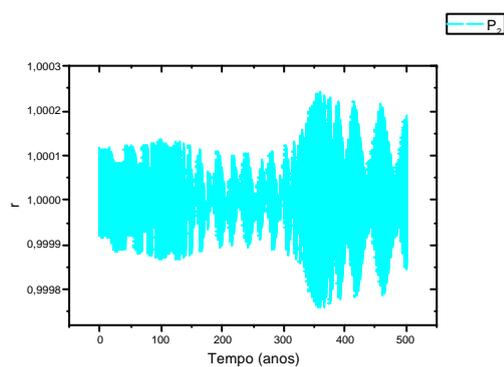


Figura 4.90a - Variação radial em função do tempo da partícula (P_2).

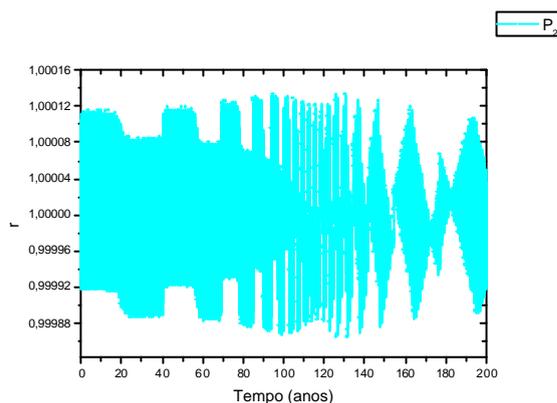


Figura 4.90b - Ampliação da Figura 4.90a.

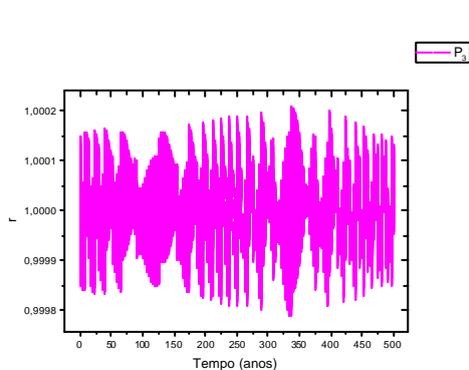


Figura 4.91a - Variação radial em função do tempo da partícula (P_3).

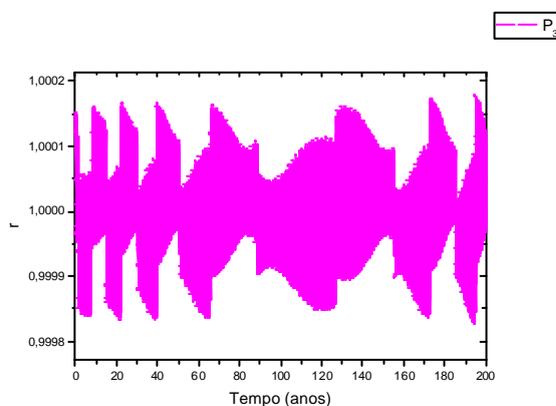


Figura 4.91b - Ampliação da Figura 4.91a.

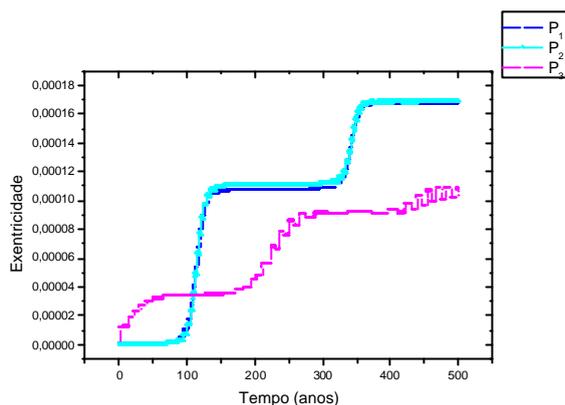


Figura 4.92 - Variação da excentricidade em função do tempo das partículas.

Na configuração do Tipo *IIa* verificamos o confinamento das partículas e obtivemos novos pontos de equilíbrio para o caso onde existem dois satélites de raio igual a 5 km, e um satélite de raio igual a 10 km.

De modo geral, quando diminuimos a massa dos satélites diminuimos a largura de confinamento das partículas, e que dependendo da distribuição das massas, conseguimos obter uma nova configuração de equilíbrio para os satélites. Verificamos que a excentricidade da partícula não possui uma variação periódica obtida para o caso em que os satélites têm a mesma massa e quando a excentricidade é incluída inicialmente nos satélites. E por último, mostramos que devido a variação dos satélites em torno dos pontos de equilíbrio temos períodos em que a partícula sofre uma maior variação radial enquanto diminui angularmente.

Uma combinação de satélites pequenos nos anéis estreitos pode ser a explicação para várias das estruturas observadas nesses anéis.

4.6 PONTOS DE EQUILÍBRIO DAS PARTÍCULAS PARA SATÉLITES DE MASSAS DIFERENTES

Nessa secção iremos obter para a configuração em que temos satélites de massas diferentes, os pontos de equilíbrio das partículas coorbitais a eles, por um período de integração de 300 anos. Esse estudo será aplicado para a configuração em que temos dois e três satélites nas configurações do Tipo Ia, Ib, IIa e IIb com raio igual a 5 e 3 km. Um satélite de raio igual a 5 km nos fornece uma massa igual a $6,283 \times 10^{14}$ kg e, um satélite de raio igual a 3 km nos fornece uma massa igual a $1,335 \times 10^{14}$ kg para uma densidade igual a $1,2 \text{ g/cm}^3$. Esse estudo foi aplicado para o anel central da falha de Encke onde consideramos além de Pan, outros satélites coorbitais a ele.

A maneira em que esses pontos foram obtidos é análoga ao apresentado na secção 4.4.

Nessa secção além dos pontos de equilíbrio iremos apresentar as órbitas que as partículas descrevem ao redor desses pontos.

4.6.1 Configuração do Tipo Ia para dois satélites

Raio do satélite hipotético (S_1) igual a 5 km

A Figura 4.93 mostra as posições de equilíbrio dos satélites (Pan e S_1), das partículas e as curvas que elas descrevem ao redor dos pontos.

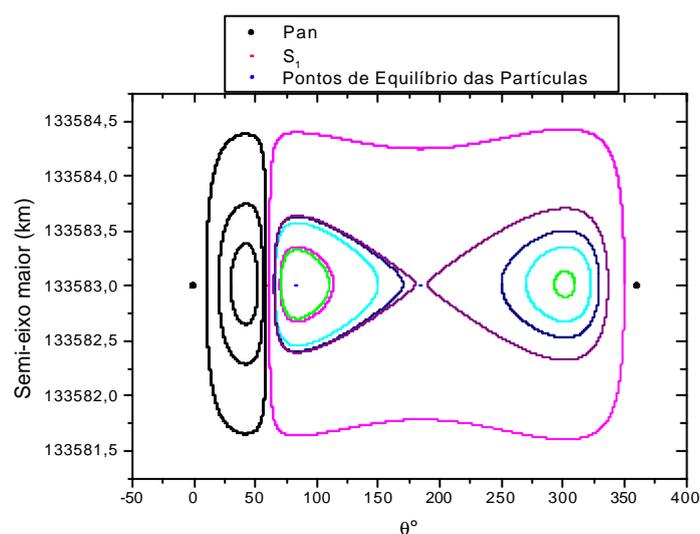


Figura 4.93 - Variação do a em função de θ das partículas e dos satélites. Pan (raio de 10 km) e S_1 (raio de 5 km).

Raio do satélite hipotético (S_1) igual a 3 km

A Figura 4.94 mostra a variação do semi-eixo maior em função da variação angular para os satélites e partículas tendo um satélite (Pan) de raio igual a 10 km e um outro satélite hipotético (S_1) de raio igual a 3 km.

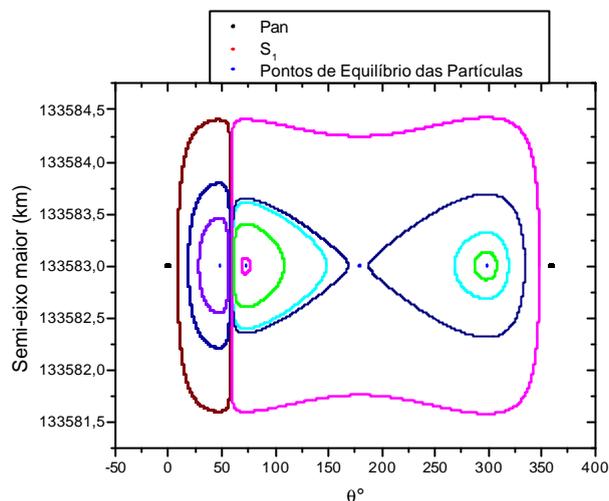


Figura 4.94 - Variação do a em função de θ das partículas e dos satélites. Pan (raio de 10 km) e S_1 (raio de 3 km).

Nós observamos que os satélites permanecem na configuração inicial do Tipo Ia, ou seja, Pan a 0° e S_1 a 60° , mesmo quando alteramos suas massas

A Tabela 4.2 apresenta a posição angular dos satélites e das partículas para satélites de raio igual a 10, 5 e 3 km.

Tabela 4.2 - Variação angular de dois satélites e das partículas a medida que diminuo o raio do satélite hipotético.

Raio dos Satélites	10 km
Posição Angular dos Satélites	Posição Angular das Partículas
0°	30°
60°	107°
	210°
Raio dos Satélites	10 e 5 km
Posição Angular dos Satélites	Posição Angular das Partículas
0°	42.30°
60°	84.00°
	185.00°

	301.90°
Raio dos Satélites	10 e 3 km
Posição Angular dos Satélites	Posição Angular das Partículas
0°	48.65°
60°	73.70°
	300.40°
	180.00°

Continuação da Tabela 4.2.

4.6.2 Configuração do Tipo IIa para dois satélites

Raio do satélite hipotético (S_1) igual a 5 km.

A Figura 4.95 mostra o comportamento das partículas e dos satélites, quando esses estão com uma separação angular de 180° tendo um satélite com raio de 10 km e outro com 5 km de raio.

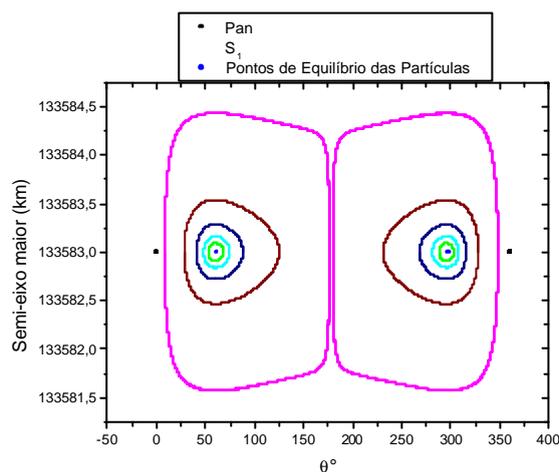


Figura 4.95 - Variação do semi-eixo maior em função da posição angular para satélites e partículas.

Raio do satélite hipotético (S_1) igual a 3 km

A variação do semi-eixo maior em função de θ pode ser visualizada através da Figura 4.96, onde mandemos o raio de Pan com 10 km e alteramos o radio do satélite hipotético de 5 km para 3 km.

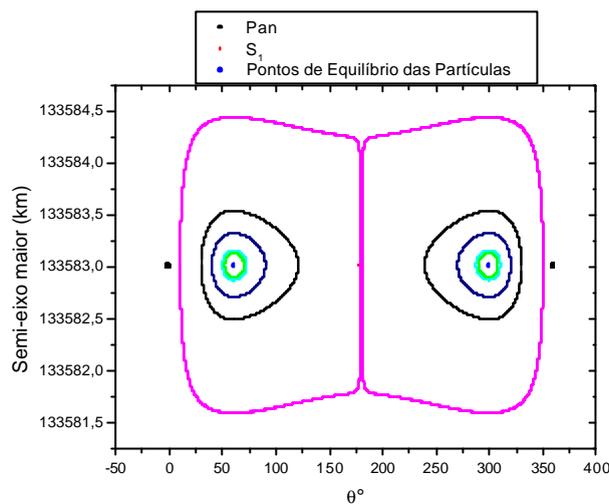


Figura 4.96 - Variação do semi-eixo maior em função da posição angular para satélites e partículas.

Nós observamos que para essa configuração os satélites não se deslocam da sua configuração inicial mesmo quando alteramos a massa. A Tabela 4.3 apresenta a posição angular dos satélites e das partículas para diferentes massas.

Tabela 4.3 - Variação angular de dois satélites e das partículas a medida em que diminui o raio do satélite hipotético.

Raio dos Satélites	10 km
Posição Angular dos Satélites	Posição Angular das Partículas
0°	90°
180°	270°
Raio dos Satélites	10 e 5 km
Posição Angular dos Satélites	Posição Angular das Partículas
0°	62.100°
180°	297.917°
Raio dos Satélites	10 e 3 km
Posição Angular dos Satélites	Posição Angular das Partículas
0°	60.43°
180°	299.58°

4.6.3 Configuração do Tipo Ia para três satélites

Vimos na secção (4.5) que os satélites ($N = 3$) podem ter comportamentos diferentes devido somente a distribuição de massa desses satélites. Assim para a obtenção dos novos pontos de equilíbrio das partículas é necessário obter primeiramente os novos pontos de equilíbrio dos satélites. A Tabela 4.4 mostra os pontos de equilíbrio dos satélites para essa configuração quando todos possuem mesma massa e quando alteramos as massas dos satélites, além das posições de equilíbrio das partículas.

Raio dos satélites hipotéticos S_1 e S_2 igual a 5 km

A Figura 4.97 mostra o comportamento angular das partículas e dos satélites.

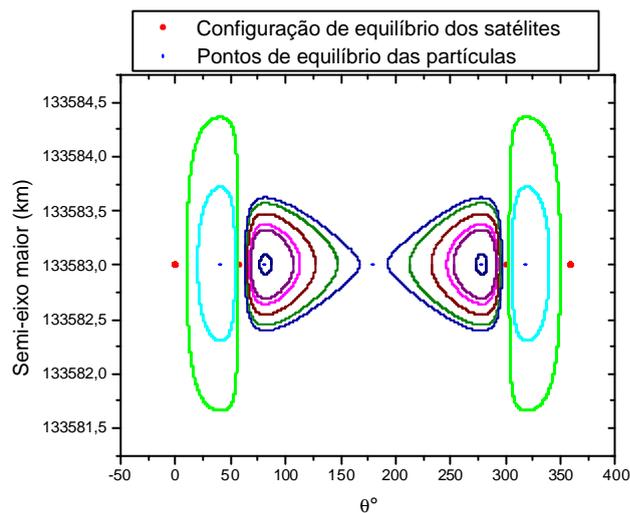


Figura 4.97 - Variação de $a \times \theta$ das partículas e dos satélites.

Raio dos satélites hipotéticos S_1 e S_2 igual a 3 km

A Figura 4.98 mostra o comportamento angular das partículas e dos satélites.

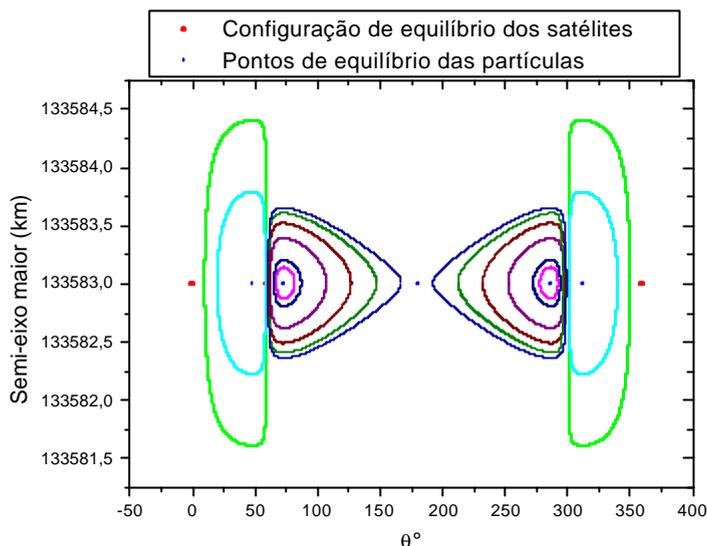


Figura 4.98 - Variação de $a \times \theta$ das partículas e dos satélites.

Tabela 4.4 - Variação angular de três satélites e das partículas a medida que diminuo o raio de dois satélites.

Raio dos Satélites	10 km
Posição Angular dos Satélites	Posição Angular das Partículas
0°	23.35°
47.361°	88.68°
312.639°	180.00°
	271.32°
	336.65°
Raio dos Satélites	10 e 5 km
Posição Angular dos Satélites	Posição Angular das Partículas
0°	40.891°
58.079°	81.585°
301.920°	180.00°
	278.415°
	319.100°
Raio dos Satélites	10 e 3 km
Posição Angular dos Satélites	Posição Angular das Partículas
0°	40.28°
59.590°	73.22°
300.416°	180.00°
	286.78°
	311.70°

Verificamos que para essa configuração existe uma variação da posição angular inicial dos satélites, o que nós faz de início obter os novos pontos de equilíbrio dos satélites para a obtenção dos pontos de equilíbrio das partículas.

4.6.4 Configuração do Tipo IIa para três satélites

Os pontos de equilíbrio das partículas foram obtidos a partir da obtenção dos novos pontos de equilíbrio dos satélites, devido ao fato descrito anteriormente (4.6.3).

A Tabela 4.5 mostra a variação angular dos satélites e das partículas devido a variação da massa dos satélites.

Raio dos satélites hipotéticos S_1 e S_2 igual a 5 km

A Figura 4.99 mostra o comportamento angular das partículas e dos satélites para a configuração que inicialmente era do Tipo IIa.

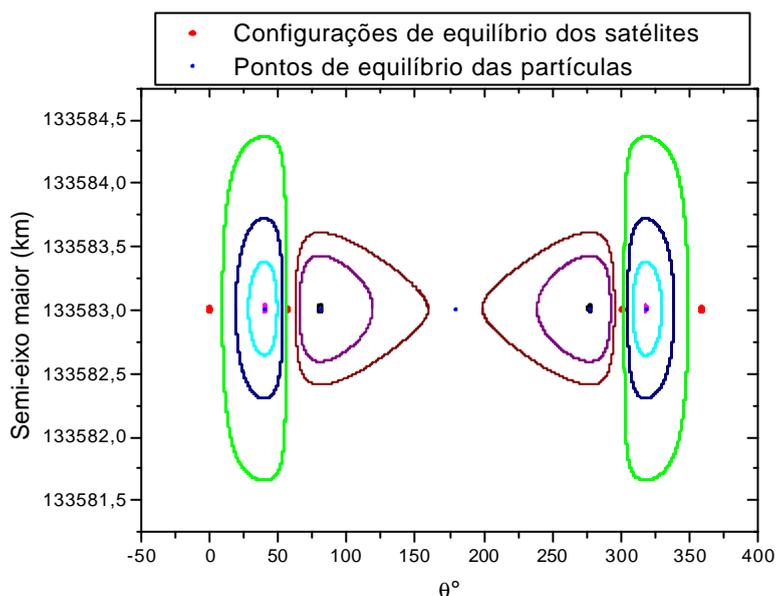


Figura 4.99 - Variação de $a \times \theta$ das partículas e dos satélites.

Raio dos satélites hipotéticos S_1 e S_2 igual a 3 km

A Figura 4.100 mostra o comportamento angular das partículas e dos satélites para a configuração que inicialmente era do Tipo IIa.

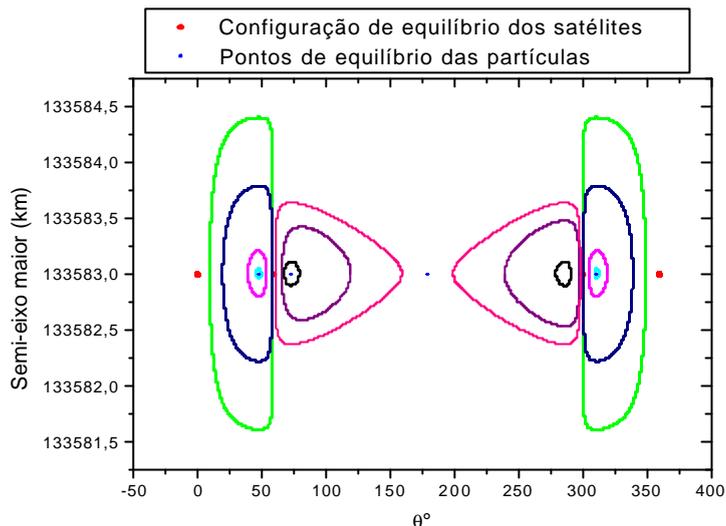


Figura 4.100 - Variação de $a \times \theta$ das partículas e dos satélites.

Tabela 4.5 - Variação angular de três satélites e das partículas a medida que diminuo o raio de dois satélites.

Raio dos Satélites	10 km
Posição Angular dos Satélites	Posição Angular das Partículas
0°	60°
120°	180°
240°	300°
Raio dos Satélites	10 e 5 km
Posição Angular dos Satélites	Posição Angular das Partículas
0°	40.809°
58.118°	81.620°
301.918°	180.000°
	278.41°
	319.100°
Raio dos Satélites	10 e 3 km
Posição Angular dos Satélites	Posição Angular das Partículas
0°	48.30°
59.581°	73.21°
300.419°	180.000°
	286.778°
	311.68°

Para concluir os resultados que obtivemos nesse capítulo, com relação a simulações onde temos satélites de massas diferentes e os pontos de equilíbrio, iremos apresentar alguns gráficos que mostram o movimento dos pontos de equilíbrio dos satélites e das partículas devido a variação da massa dos mesmos.

Na configuração do Tipo *Ia* e *IIa* para dois satélites verificamos que esses satélites, mesmo quando alteramos suas massas, não se deslocam das suas configurações iniciais que foram as obtidas por Salo e Yoder (1988) para massas iguais. Nessas configurações os satélites estão posicionados nos pontos de equilíbrio, que para o problema de 3 corpos são conhecidos como os Lagrangianos, L_4 e L_3 . Quando alteramos a massa dos satélites verificamos que os satélites continuam nesses pontos, porém observamos o deslocamento angular das partículas em direção a esses pontos Lagrangianos observando também que a medida que diminuimos a massa dos satélites as partículas tendem a se aproximarem mais. A Figura 4.101 mostra o comportamento dos satélites que estão na configuração inicial do Tipo *Ia*, os pontos de equilíbrio Lagrangianos e o comportamento dos pontos de equilíbrio das partículas quando todos os satélites têm um raio igual a 10 km e uma massa da ordem de $5,7 \times 10^{15}$ kg. A Figura 4.102 mostra o comportamento dos satélites que estão na configuração inicial do Tipo *Ia*, os pontos de equilíbrio Lagrangianos e o comportamento dos pontos de equilíbrio das partículas quando temos um satélite de raio igual a 10 km e uma massa da ordem de $5,7 \times 10^{15}$ kg e o segundo satélite tem raio igual a 5 km com uma massa de $6,283 \times 10^{14}$ kg. A Figura 4.103 mostra o comportamento dos satélites que estão na configuração inicial do Tipo *Ia*, os pontos de equilíbrio Lagrangianos e o comportamento dos pontos de equilíbrio das partículas quando temos um satélite de raio igual a 10 km e uma massa da ordem de $5,7 \times 10^{15}$ kg e o segundo satélite tem raio igual a 5 km com uma massa de $1,335 \times 10^{14}$ kg.

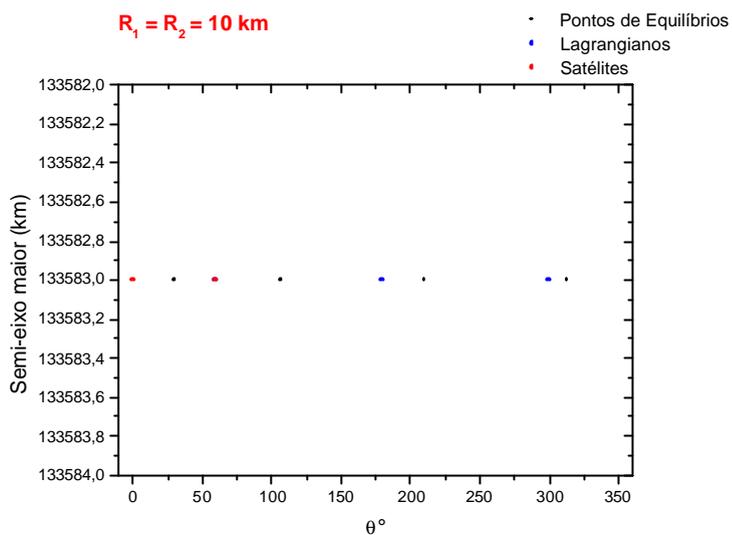


Figura 4.101 - Mostra a variação angular dos pontos de equilíbrio dos satélites, das partículas e mostra os pontos de equilíbrio Lagrangiano L_4 , L_3 e L_5 , para a configuração em que os dois satélites tem um raio de 10 km.

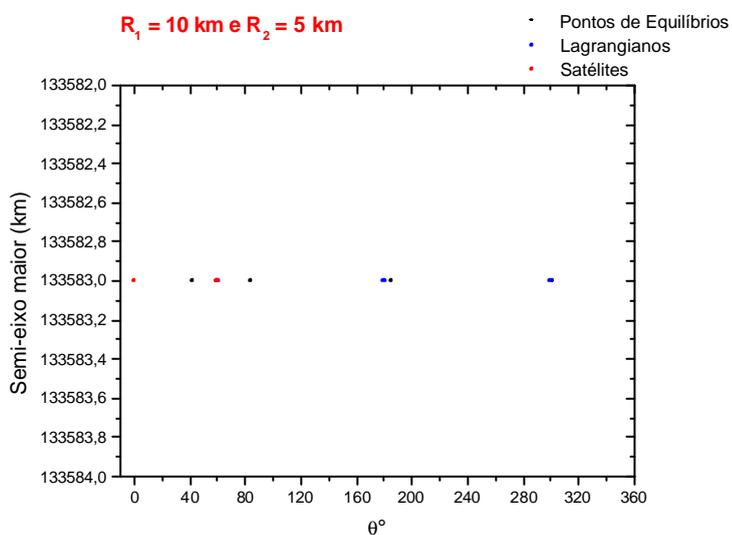


Figura 4.102 - Mostra a variação angular dos pontos de equilíbrio dos satélites, das partículas e mostra os pontos de equilíbrio Lagrangiano L_4 , L_3 e L_5 , para a configuração em que um satélites tem um raio de 10 km e o outro 5 km.

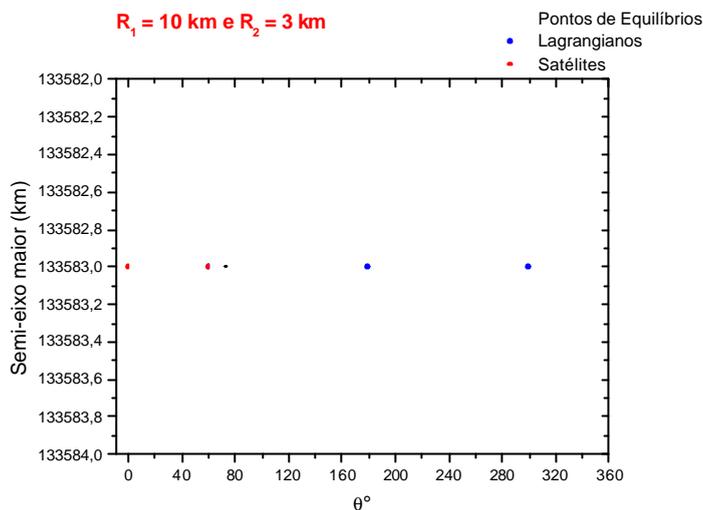


Figura 4.103 - Mostra a variação angular dos pontos de equilíbrio dos satélites, das partículas e mostra os pontos de equilíbrio Lagrangiano L_4 , L_3 e L_5 , para a configuração em que um satélite tem um raio de 10 km e o outro 3 km.

A configuração do Tipo IIa , para dois satélites, quando temos dois satélites de raio igual a 10 km, onde temos um satélite de raio igual a 10 km e outro igual a 5 km e quando temos um satélite de raio de 10 km e outro de 3 km são mostradas nas Figuras (4.104, 4.105 e 4.106).

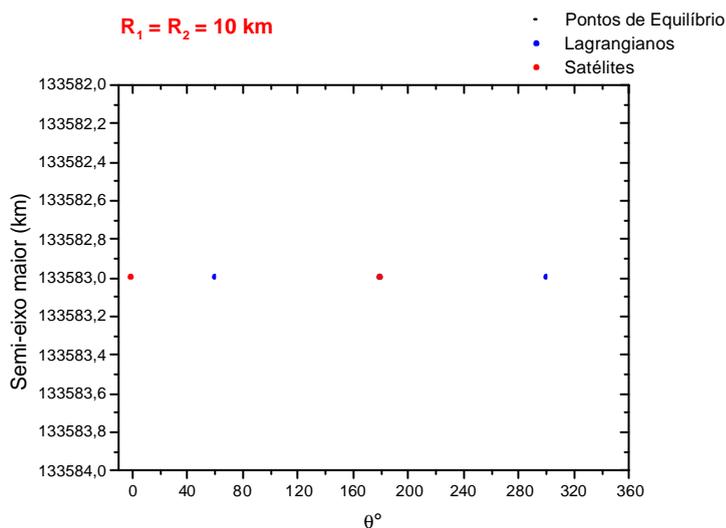


Figura 4.104 - Variação angular dos pontos de equilíbrio dos satélites, das partículas e os pontos de equilíbrio Lagrangiano L_4 , L_3 e L_5 , para a configuração do tipo IIa em que todos os satélites tem um raio igual a 10 km.

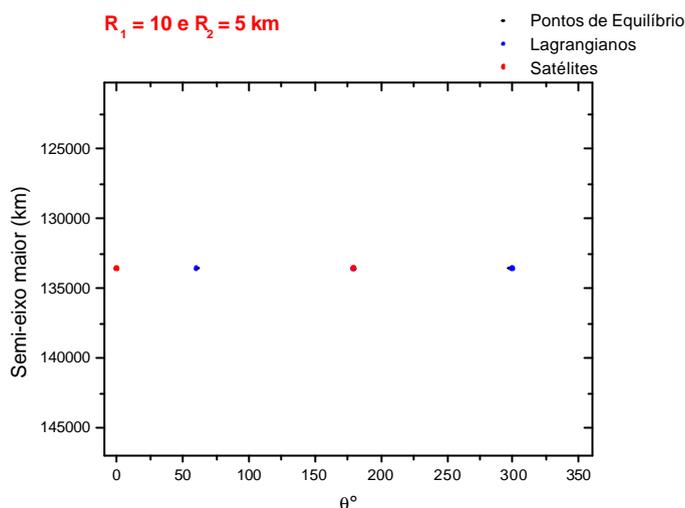


Figura 4.105 - Variação angular dos pontos de equilíbrio dos satélites, das partículas e os pontos de equilíbrio Lagrangiano L_4 , L_3 e L_5 , para a configuração do tipo IIa em que temos um satélite de raio igual a 10 km e outro igual a 5 km.

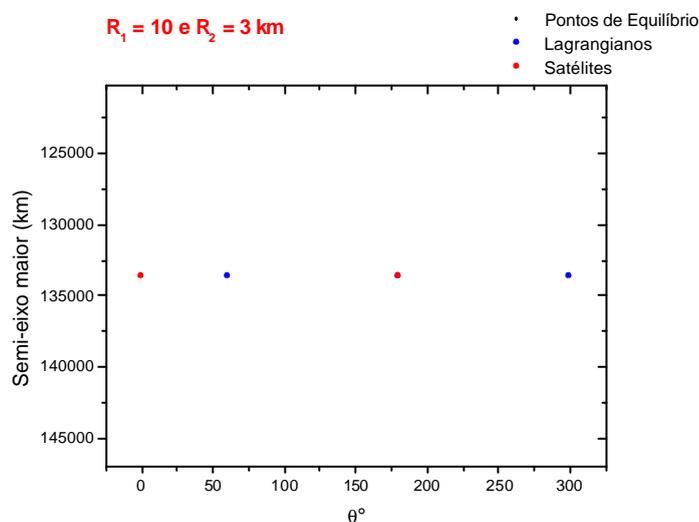


Figura 4.106 - Variação angular dos pontos de equilíbrio dos satélites, das partículas e os pontos de equilíbrio Lagrangiano L_4 , L_3 e L_5 , para a configuração do tipo IIa em que temos um satélite de raio igual a 10 km e outro igual a 3 km.

Quando temos três satélites coorbitais, de massas diferentes, vimos que para obter os pontos de equilíbrio das partículas era necessário obter antes os novos pontos

de equilíbrio dos satélites. Assim verificamos que para três satélites que estavam inicialmente nas configurações do Tipo I e II (SALO; YODER, 1988) uma variação periódica das suas posições iniciais ao redor dos seus novos pontos de equilíbrio. Esses novos pontos estão próximos dos pontos Lagrangianos L_5 e L_4 e a medida em que diminuimos a massa dos satélites mais próximos dos Lagrangianos eles vão chegando. Isso ocorre com relação aos pontos de equilíbrio das partículas.

Para ilustrar iremos apresentar o comportamento dos pontos de equilíbrio e das partículas para o caso em que temos três satélites na configuração do Tipo I tendo eles massas iguais e diferentes. A Figura 4.107 mostra o comportamento das partículas e dos satélites quando todos os satélites têm um raio igual a 10 km. A Figura 4.108 mostra o comportamento das partículas e dos satélites quando um satélite tem um raio igual a 10 km e os outros têm raio igual a 5km. A Figura 4.109 mostra o comportamento das partículas e dos satélites quando um satélite tem um raio igual a 10 km e os outros têm raio igual a 3 km.

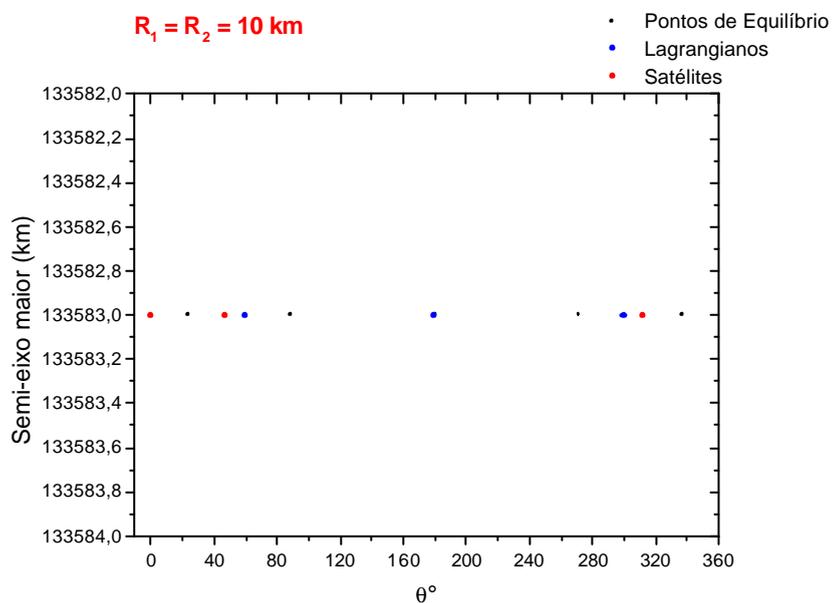


Figura 4.107 - Variação de $a \times \theta$ para os satélites e para as partículas.

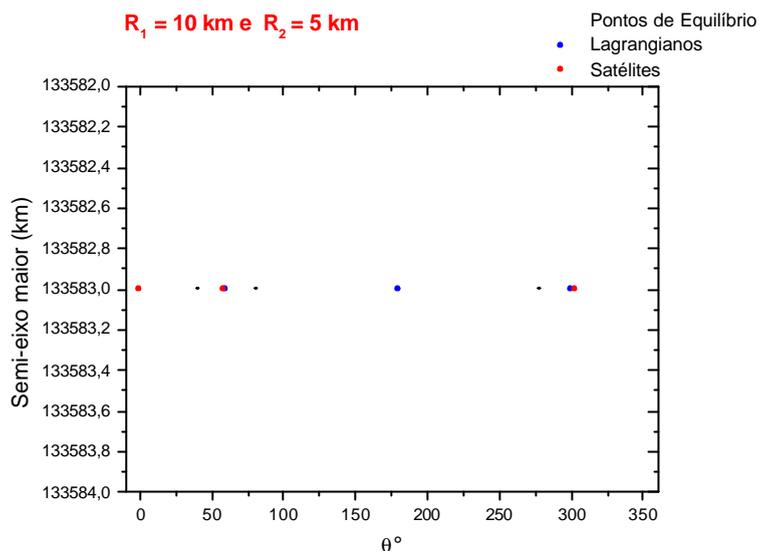


Figura 4.108 - Variação de $a \times \theta$ para os satélites e para as partículas.

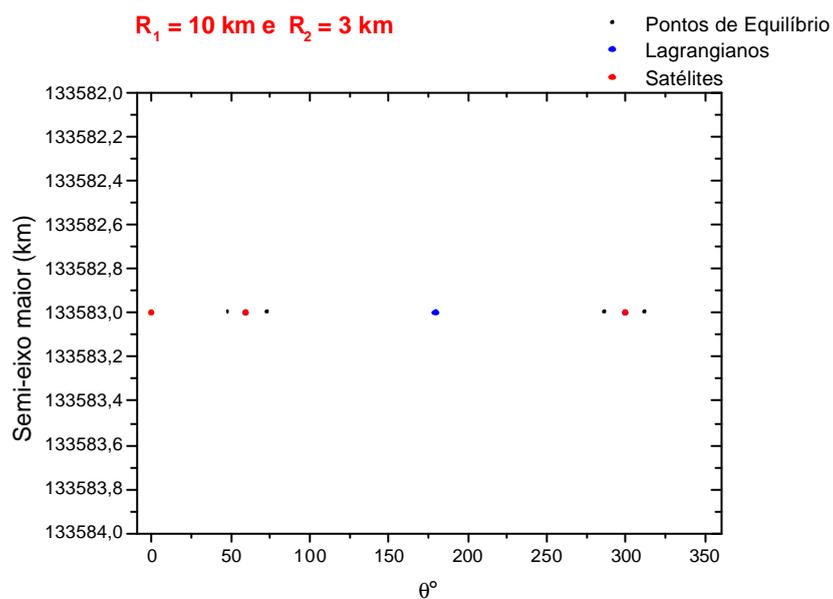


Figura 4.109 - Variação de $a \times \theta$ para os satélites e para as partículas.

Assim verificamos que quando alteramos a massa dos satélites, eles tendem a orbitar em torno dos novos pontos de equilíbrio, sendo esses os conhecidos do problema de 3 corpos L_4 e L_5 e que os pontos de equilíbrio das partículas também tendem a se aproximarem dos pontos Lagrangianos L_4 , L_5 e L_3 .

CAPÍTULO 5 - APLICAÇÃO PARA O SISTEMA: ANÉIS DA FALHA DE ENCKE E ANEL F

5.1 FALHA DE ENCKE

A Falha de Encke se situa a aproximadamente 133.600 km de Saturno, ela apresenta em suas bordas ondulações provocadas pelas perturbações gravitacionais de um pequeno satélite coorbital ao anel central dessa falha. A análise de imagens obtida pela sonda espacial Voyager em 1981 foi suficiente para determinar a posição do novo satélite confirmando sua existência, mas não foi capaz de visualizá-lo devido à impossibilidade da sonda fotografar objetos que tenham um raio igual ou menor que 10 km. As informações derivadas do trabalho de Cuzzi e Scargle (1985) foram relacionadas por Showalter (1991) com um modelo cinemático semelhante ao das ondas formadas atrás de um barco em movimento, formando um “rastro”. Embora esse modelo não levasse em conta qualquer efeito coletivo das partículas do anel (resultando em uma determinação da órbita sujeita a uma série de incertezas), a análise das ondas nas bordas da falha evidenciou a existência de um satélite ainda não observado, que foi denominado Pan.

A descoberta de Pan veio confirmar a teoria proposta em 1981 por Demott e Murray, que sugere o confinamento de partículas de anéis devido a existência de um pequeno satélite coorbital a esse sistema. Este anel está localizado na região central da falha em um semi-eixo maior de 133.583 km e possui uma largura, obtida através das imagens da Voyager, de aproximadamente 20 km. Um outro anel também foi visualizado na falha de Encke localizado perto da borda interna em um semi-eixo maior de 133.483 km. Este anel se caracteriza por ser incompleto possuindo uma estrutura semelhante à encontrada no anel central, ou seja, formações de aglomerados de partículas (**figura (5.2)**).

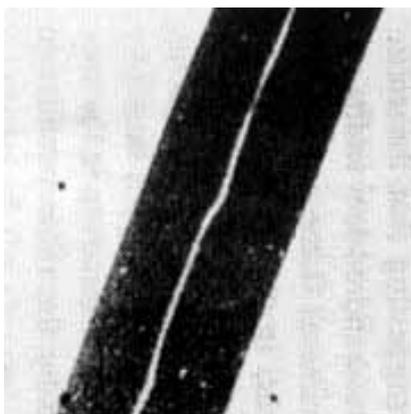


Figura 5.1: Imagem obtida pela sonda espacial Voyager em 1981 mostra o anel central da falha de Encke e suas estruturas irregulares.

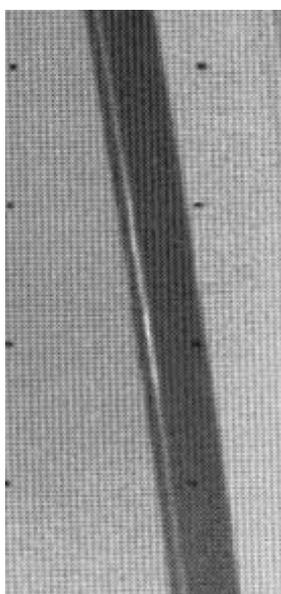


Figura 5.2: Esta imagem mostra o anel interno da falha de Encke, pondendo se visualizada uma região mais brilhante.

Alguns pesquisadores como Ferrari e Brahic (1997) acreditam que os aglomerados de partículas visualizados no anel central são decorrentes da presença de satélites, cujo raio pode variar de 3 a 2 km, coorbital a Pan. Esses satélites estariam posicionados a 80° ou a 250° de Pan. Essas posições foram obtidas a partir da análise de imagens. Neste estudo pretendemos verificar numericamente como seria o comportamento das partículas e dos satélites quando incluíssemos esses satélites hipotéticos nas posições mencionadas por Ferrari e Brahic (1997).

Nas simulações realizadas para o anel central não consideramos a influência do achatamento de Saturno e verificamos que satélites com raios iguais a 2 e 3 km não são capazes de confinar partículas entre os satélites a uma largura de 20 km, largura essa que foi visualizada pela sonda Voyager 1. No entanto quando incluímos um satélite de raio igual a 8 km, coorbital a Pan, observamos a variação angular dos satélites inseridos inicialmente a 80° ou a 250° . A libração na órbita dos satélites fez com que as partículas, que foram inicialmente posicionadas a 10 km do semi-eixo maior dos satélites, tivessem uma variação angular e radial (**figuras** (5.3) e (5.4)). A simulação numérica foi realizada para um período de 200 anos. A partícula (P_1), mais próxima aos satélites, sofre uma variação na sua largura chegando a uma variação máxima de aproximadamente 34 km e uma variação mínima de 20 km. A partícula (P_2) também sofre uma variação na largura de sua órbita, no entanto é menor, ($\Delta a_{MÁX} = 20$ km e $\Delta a_{MÍN} = 18$ km), do que (P_1) devido ao fato de estar mais afastada dos satélites. Esses resultados poderiam explicar regiões nos anéis em que se tem uma maior concentração de partículas do que outras regiões, sendo esse comportamento diferenciado ao longo do tempo.

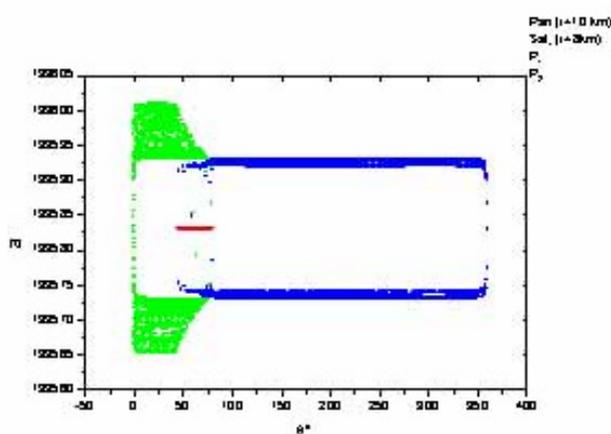


Figura 5.3: Variação do semi-eixo maior (em km) das partículas, coorbital aos satélites de massas diferentes, em função do ângulo θ (em graus).

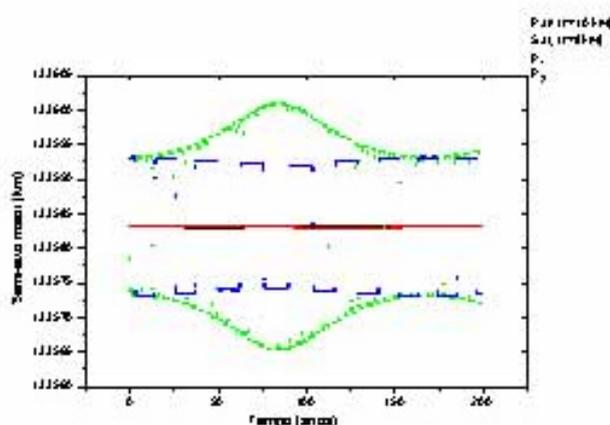


Figura 5.4: Variação do semi-eixo maior das partículas e dos satélites em função do tempo.

Para o anel interno da falha de Encke, simulamos mantendo a configuração dos satélites e das partículas descrita anteriormente para o anel central alterando apenas a configuração do anel interno, de modo que preservássemos a configuração do anel central. As simulações mostraram que quando incluímos um satélite de raio menor que 3 km no anel interno e uma partícula posicionada a 2 km do semi-eixo maior dos satélites, esse satélite não confina a partícula (**figura (5.5)**). Como visto no caso do anel central o satélite de raio de 3 km começa, a partir de aproximadamente 100 anos, a perturbar o comportamento das partículas e dos satélites no anel central (**figura (5.5a)**).

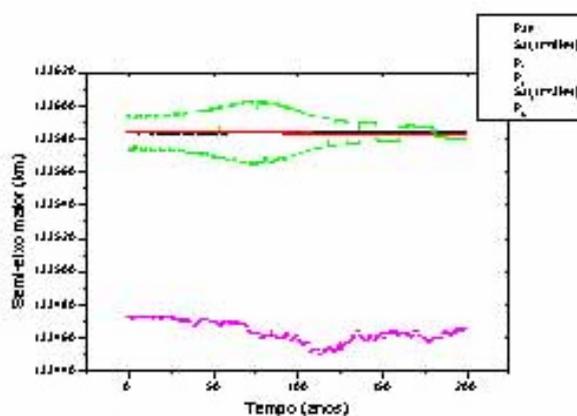


Figura 5.5: Variação de $a \times t$ para as partículas e satélites que representam os anéis da falha de Encke.

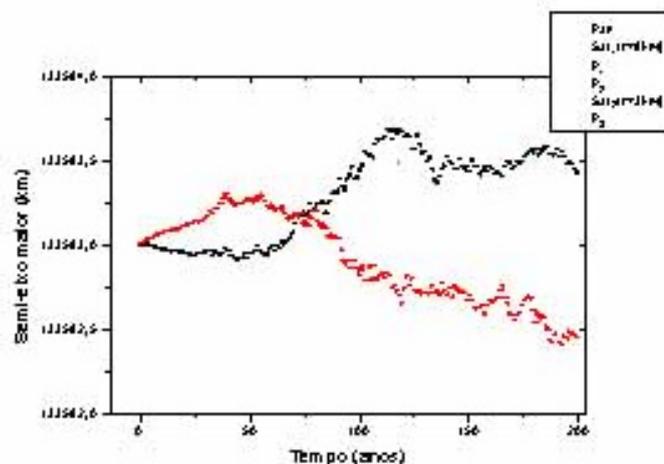


Figura 5.5a: Ampliação do comportamento dos satélites coorbitais no anel central. O satélite do anel interno tem um raio de 3 km.

Para o caso em que posicionamos satélites de raio igual a 5 km no anel interno, e uma partícula a 3 km do semi-eixo maior do satélite, observamos que as partículas não permanecem confinadas (**figura** (5.6)), e observamos que esse satélite passa a influenciar o comportamento dos outros satélites que estão situados no anel central da falha (**figura** (5.6a)).

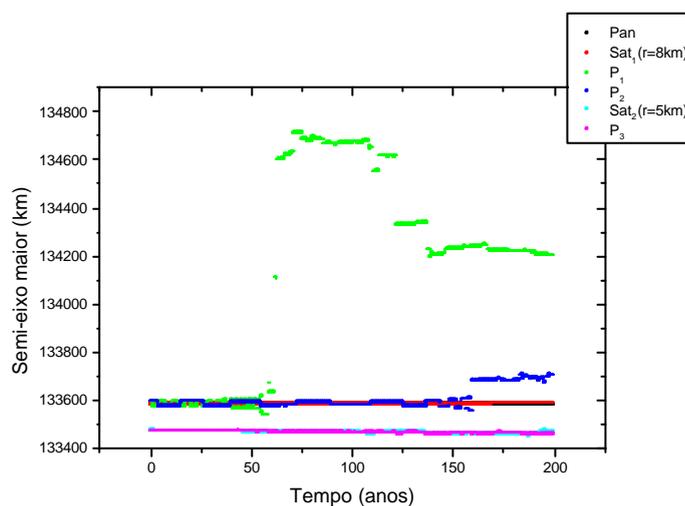


Figura 5.6: Variação de $a \times t$ para as partícula e satélites que representam os anéis da falha de Encke. O satélite do anel interno tem um raio de 5 km.

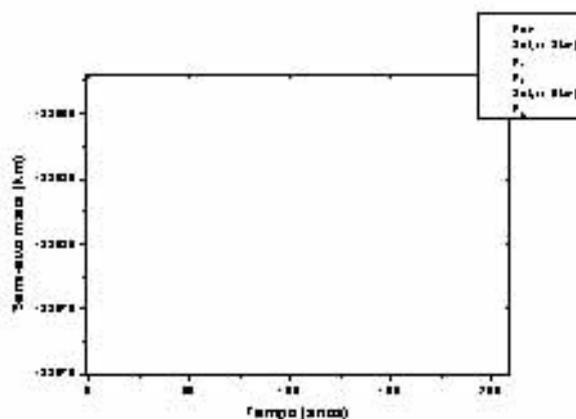


Figura 5.6a: Ampliação do comportamento dos satélites e das partículas posicionados no anel central.

Para que a configuração do anel central seja mantida e ao mesmo tempo observarmos partículas no anel interno, simulamos, inserindo na região do anel interno, 5 partículas que estão separadas inicialmente a 2 km. Como resultado obtivemos a figura (5.7). Essa figura nos mostra o confinamento de partículas no anel central e partículas no anel interno, sendo que esse não teria ao longo do período de 200 anos um comportamento periódico.

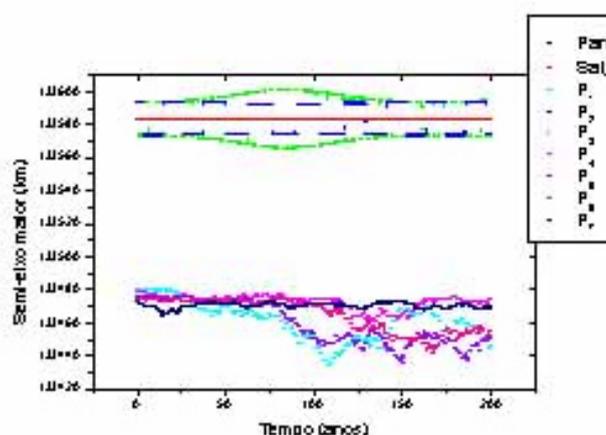


Figura 5.7: Comportamento dos satélites e das partículas que estão posicionados no anel central da falha de Encke estando os satélites separados a 80° , e o comportamento das partículas posicionadas no semi-eixo maior do anel interno. Essa simulação foi realizada por um período de 200 anos em que todos possuem uma excentricidade inicial igual a 10^{-4} .

Assim, com relação ao anel interno, podemos propor que esse anel seja um anel temporário, pois nenhum dos mecanismos até agora por nós conhecidos foi capaz de atuar sobre as partículas fazendo com que elas permaneçam confinadas por uma largura de 20 km (imagem da Sonda Voyager), ou que seja um anel que tenha variações não periódicas no decorrer do tempo, podendo assim ter estruturas diferentes às visualizadas pelas sondas.

5.2 ANEL F

O anel F possui outras características interessantes além das observadas nos anéis da falha de Encke. Esse anel possui aglomerados de partículas, dobras e em algumas regiões pode-se observar a formação de anéis entrelaçados (**figura** (5.8)). O anel F se localiza a aproximadamente 140.219 km de Saturno e possui uma largura variável de 50 – 500 km.

Esse anel ainda possui dois satélites próximos a sua órbita, Prometeu e Pandora (**figura** (5.9)). Pandora se localiza a 141.712,63 km de Saturno tendo uma excentricidade de 0.0042 e um raio de aproximadamente 55 x 45 x 35 km. Prometeu localiza-se a 139.377,35 km de Saturno com uma excentricidade de 0.0024 e um raio de aproximadamente 70 x 50 x 40 km (Murray e Dermott (1999)).



Figura 5.8: As diferentes estruturas observadas no anel F, como por exemplo, os aglomerados de partículas e os entrelaçamentos que ocorre no anel.



Figura 5.9: Os satélites que possuem uma órbita próxima ao anel F são os satélites Prometeu (interno ao anel) e Pandora (externo ao anel).

Nas simulações propomos a existência de dois satélites de raio igual a 3 km coorbitas a duas partículas que foram posicionadas no semi-eixo maior do anel F sendo essas partículas e satélites perturbados também por Prometeu e Pandora. A tabela (5.1) mostra as condições iniciais da simulação numérica. Os elementos orbitais de Prometeu e Pandora foram extraídos de (Murray e Dermott (1999) e Murray *et al.* (2000)).

Tabela 5.1: Condições iniciais da simulação numérica.

	Semi-eixo maior (km)	Excentricidade	Massa (kg)	Argumento do pericentro
Prometeu	139.377,35	0,0024	$1,4 \times 10^{23}$	228°
Pandora	141.712,63	0,0042	$1,3 \times 10^{23}$	57°
S_1	140.219	0,0028	$1,335 \times 10^{14}$	0°
S_2	140.219	0,0028	$1,335 \times 10^{14}$	60°
P_1	140.221	0,0028	0	30°
P_2	140.221	0,0028	0	180°

Os satélites hipotéticos que foram inseridos no anel F estão posicionados com uma separação angular entre eles de 60° sendo (S_1) o satélite que estará “fixo” no sistema girante. No instante $T = 0$ (dia) podemos observar a configuração inicial desse sistema através da **figura** (5.10).

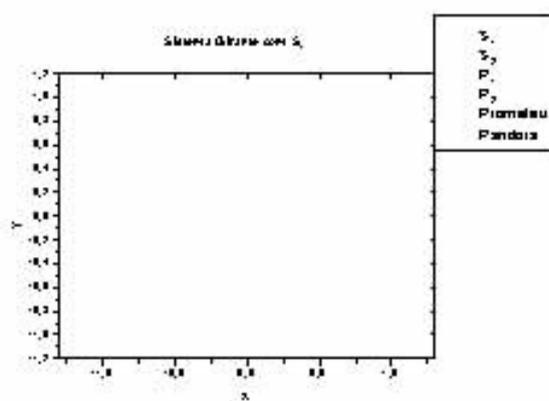


Figura 5.10: Configuração inicial dos satélites e das partículas no anel F.

Para um período de 30 dias observamos um deslocamento de Prometeu e Pandora no sistema girante. Isso ocorre devido ao fato dos satélites (S_1) e (S_2) estarem inicialmente em uma posição de equilíbrio “estável”, embora saibamos que essa estabilidade só é válida para a configuração em que todos os satélites estejam em um mesmo semi-eixo maior, e as partículas terem praticamente o mesmo movimento médio de (S_1). A **figura** (5.11a) mostra no sistema girante essa configuração.

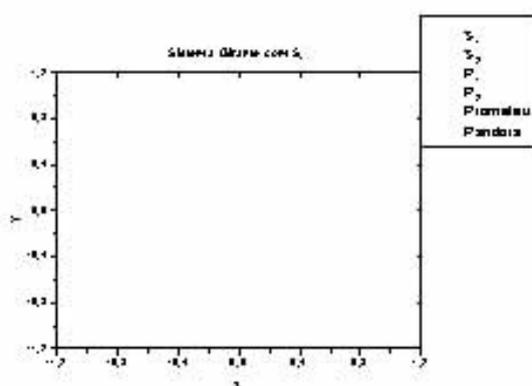


Figura 5.11a: Configuração do sistema girante com (S_1) para um período de 30 dias.

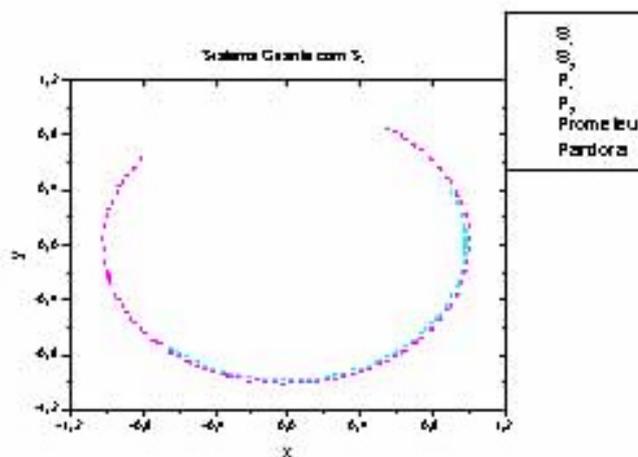


Figura 5.11b: Ampliação da **figura** (5.11a), onde se localizam (S_2) e (P_1).

Aumentamos o período de integração para 365 dias e observamos que as partículas continuam confinadas entre os satélites hipotéticos mesmo observando uma variação na posição de (S_2) (**figura** (5.12b)). É importante lembrar que como fixamos (S_1) não somos capazes de observar a sua variação no sistema girante embora essa possa ser observada no gráfico de $a \times tempo$ (**figura** (5.13)).

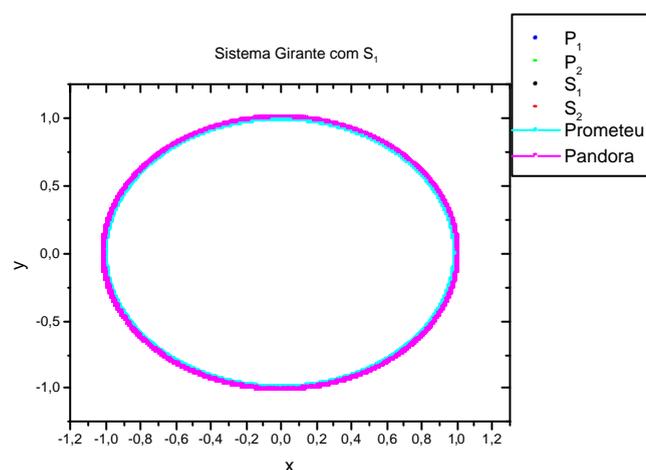


Figura 5.12a: Configuração do sistema girante com (S_1) para um período de 365 dias.



Figura 5.12b: Ampliação da **figura** (5.12a), onde se localizam (S_2) e (P_1).

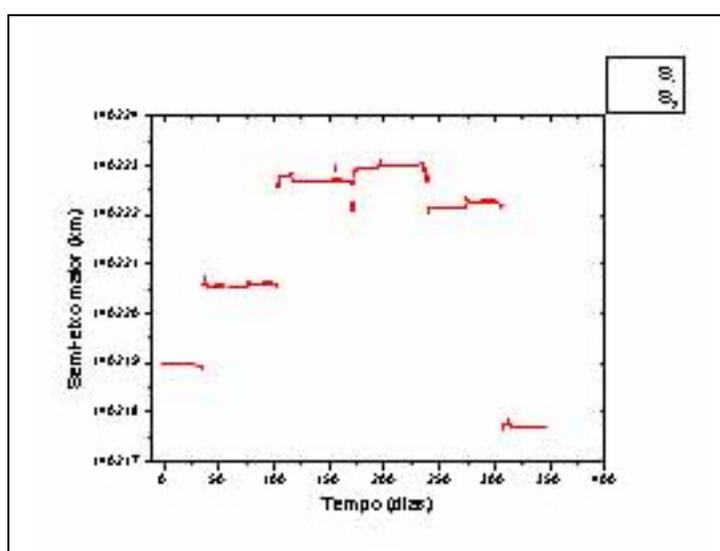


Figura 5.13: Variação $a \times tempo$ dos satélites hipotéticos.

Para um período de 1.825 dias, o equivalente a 5 anos, continuamos a observar o confinamento das partículas entre os satélites, mesmo continuando a existir uma variação na posição dos satélites hipotéticos (**figura** (5.14)). Resultados recentes (Goldreich e Borderies (2002), Giuliatti Winter e Winter (2002)) mostraram que o movimento dos satélites Prometeu e Pandora é caótico, portanto, dependendo da posição em que coloquemos os satélites hipotéticos ou até mesmo as partículas poderemos observar outra estrutura no anel causada pela influência de Prometeu e Pandora. Para explicarmos melhor isso realizamos uma simulação com as condições iniciais da tabela (5.1) alterando apenas a posição das partículas que estavam a 30° e 180° passando agora a 15° e 120° e integramos por um período de 1.825 dias. As **figuras** (5.15) e (5.16) mostram as configurações dos satélites hipotéticos e das partículas. Embora esse sistema seja perturbado por Prometeu e Pandora resolvemos excluir Prometeu e Pandora para que pudéssemos verificamos o comportamento das partículas que são posicionadas inicialmente a 30° e 180° , a **figura** (5.17) mostra o comportamento das partículas entre os satélites no sistema girante, e um comportamento do semi-eixo maior em função do tempo para os satélites hipotéticos pode ser visualizado na **figura** (5.18).

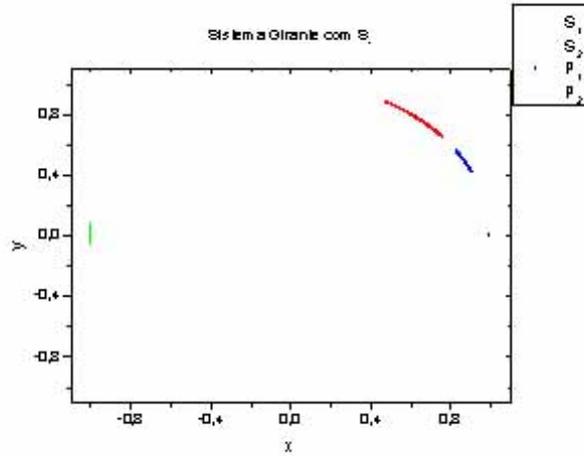


Figura 5.15: Comportamento das partículas e dos satélites hipotéticos no sistema girante estando as partículas posicionadas inicialmente a 30° e 180° .

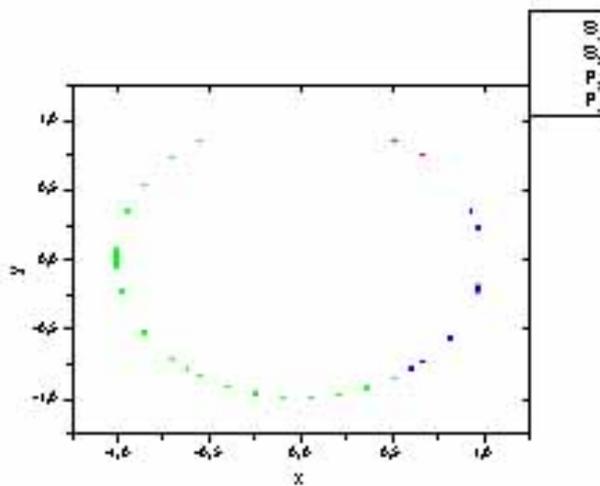


Figura 5.16: Comportamento das partículas e dos satélites hipotéticos no sistema girante estando as partículas posicionadas inicialmente a 15° e 120° .

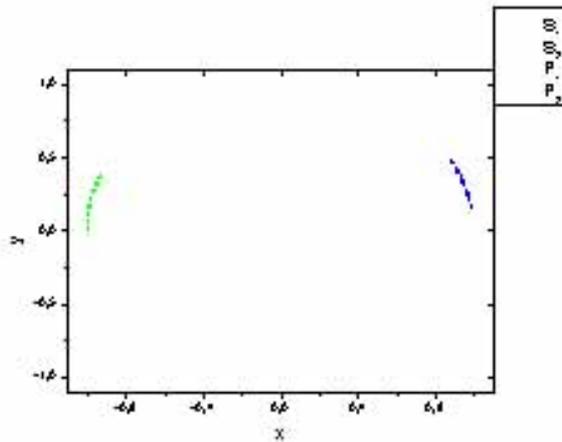


Figura 5.17: Comportamento das partículas e dos satélites hipotéticos no sistema girante quando não consideramos a perturbação de Prometeu e Pandora por um período de 1.825 dias.

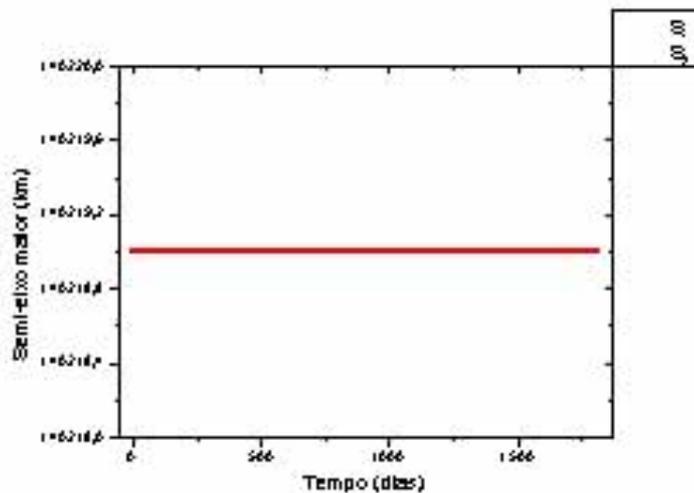


Figura 5.18: Variação do semi-eixo maior em função do tempo para os satélites hipotéticos quando excluimos a perturbação de Prometeu e Pandora.

Para um período de integração de 3.750 dias, ou seja, 10 anos verificamos para o sistema em que temos Prometeu, Pandora, 2 satélite hipotéticos e 2 partículas, com as condições iniciais descritas pela tabela (5.1), que os satélites não confinam mais as partículas devido ao fato desses não se encontrarem mais em uma configuração de equilíbrio, porém permanecem pelo tempo de integração de 10 anos no semi-eixo

maior do anel F (**figura** (5.19)), que por sua vez tem uma largura que varia de 50 a 500 km.

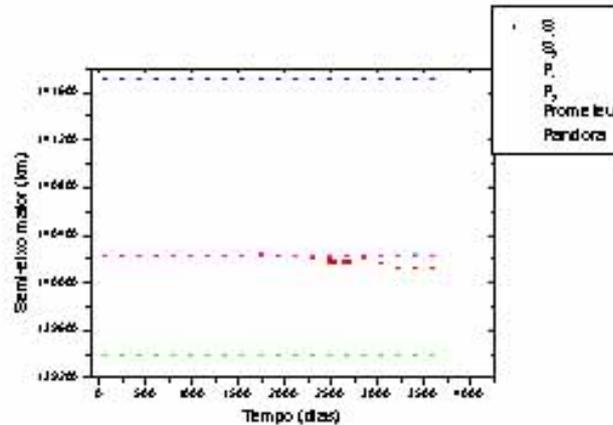


Figura 5.19: Variação do semi-eixo maior em função do tempo, por um período de integração de 3.750 dias.

A variação da excentricidade em função do tempo para os satélite hipotéticos, Prometeu, Pandora e para as partículas são mostradas nas **figuras** (5.20a), (5.20b), (5.20c) e (5.20d).

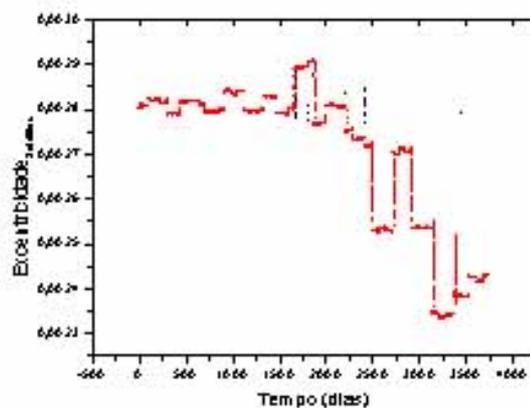


Figura 5.20a: Variação da excentricidade em função do tempo para os satélites hipotéticos.

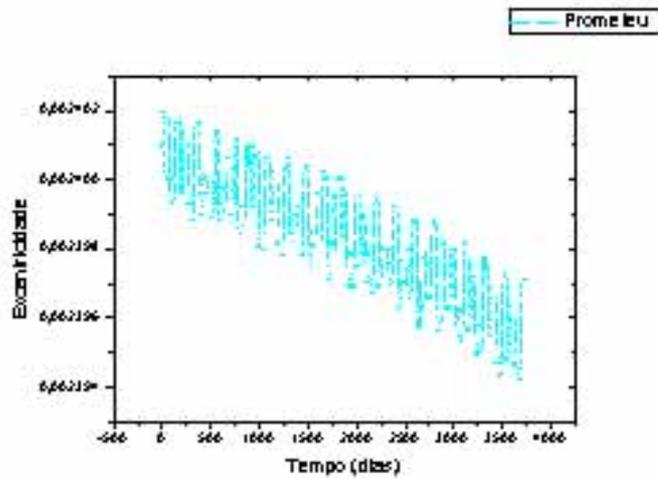


Figura 5.20b: Variação da excentricidade em função do tempo para Prometheus.

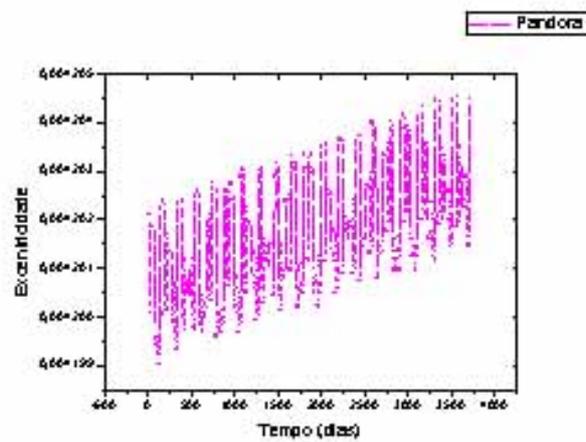


Figura 5.20c: Variação da excentricidade em função do tempo para Pandora.

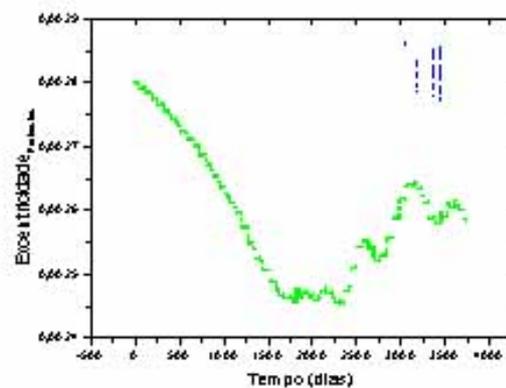


Figura 5.20d: Variação da excentricidade em função do tempo para as partículas.

5.3 ACHATAMENTO

Nessa secção iremos apresentar o potencial perturbador devido ao achatamento do corpo central (Roy (1988) e Hamilton (1993)) e a variação que este potencial causa nos elementos orbitais. Posteriormente iremos inserir essa perturbação nas equações do movimento e integrar para o caso do anel Central da falha de Encke, onde supomos a existência e um satélite de raio de 8 km coorbital a Pan, com uma separação angular entre os satélites de 80° e com excentricidade igual a 1×10^{-4} ; e para o anel F onde suponhamos a existência de dois satélites coorbitais às partículas do anel, para o caso em que não consideramos a influência de Prometeu e Pandora e para o caso em que a perturbação desses dois satélites é considerada. As simulações sem a influência do achatamento para esses anéis foram apresentadas e discutidas nas secções (5.1) e (5.2).

Consideremos um corpo de massa m' em órbita planar e circular ao redor de um corpo central (M_c) e que $M_c \gg m'$. O potencial do corpo central (U), devido a sua não esfericidade, pode ser expresso como (Roy, 1988 e Brouwer e Clemence, 1961):

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_p}{r} \right)^n P_n(\sin \delta) \right], \quad (5.1)$$

onde $\mu = Gm'M_c$, G é a constante da gravitação universal, r é a distância de (m') ao corpo central, R_p é o raio do corpo central, J_n são constantes e $P_n(\sin \delta)$ são os polinômios de Legendre de ordem n e δ é a declinação da partícula em relação ao corpo central.

O potencial perturbador R é expresso como sendo:

$$\begin{aligned} R &= U - U_0 = U - \frac{\mu}{r} = \\ &= -\frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_p}{r} \right)^n P_n(\sin \delta) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Expandindo os polinômios de Legendre até $n=2$ podemos obter o potencial perturbador expresso pela equação (5.3)

$$R = -\frac{\mu}{r} \left[J_2 \left(\frac{R_p}{r} \right)^2 P_2(\sin \delta) + J_3 \left(\frac{R_p}{r} \right)^3 P_3(\sin \delta) \right]. \quad (5.3)$$

Sabendo que:

$$P_2(\text{sen } \delta) = \frac{1}{2}(3\text{sen}^2 \delta - 1), \quad (5.4)$$

$$P_3(\text{sen } \delta) = \frac{1}{2}(5\text{sen}^3 \delta - 3\text{sen } \delta).$$

Logo

$$R = -\frac{\mu}{r} \left[J_2 \left(\frac{R_p}{r} \right)^2 \frac{1}{2} (3\text{sen}^2 \delta - 1) + J_3 \left(\frac{R_p}{r} \right)^3 \frac{1}{2} (5\text{sen}^3 \delta - 3\text{sen } \delta) \right]. \quad (5.5)$$

É importante lembrar que para o caso do planeta Saturno o potencial R não inclui termos de ordem ímpar em J_n (Brouwer e Clemence, 1961).

A distância de (m') ao corpo central pode ser escrita em termos dos elementos orbitais da forma,

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}, \quad (5.6)$$

onde e é a excentricidade do corpo, a o semi-eixo maior de (m') e f a anomalia verdadeira e

$$\text{sen } \delta = \text{sen } i \text{sen}(f + \omega), \quad (5.7)$$

onde i é a inclinação e ω é o argumento do pericentro.

Substituindo as equações (5.6) e (5.7) na equação (5.5) obtemos:

$$R = \mu \left\{ \frac{3}{2} \frac{J_2 R_p^2}{a^3} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \text{sen}^2 i + \frac{1}{2} \text{sen}^2 i \cos 2(f + \omega) \right] - \right. \\ \left. \mu \left\{ \frac{J_3 R_p^3}{a^4} \left(\frac{a}{r} \right)^4 \left[\left(\frac{15}{8} \text{sen}^2 i - \frac{3}{2} \right) \text{sen}(f + \omega) - \frac{5}{8} \text{sen}^2 i \text{sen} 3(f + \omega) \right] \text{sen } i \right\} \right\}. \quad (5.8)$$

A anomalia verdadeira pode ser transformada para anomalia média M através da relação descrita abaixo

$$\frac{df}{dM} = \frac{a^2}{r^2} (1 - e^2)^{1/2}. \quad (5.9)$$

Através de algumas manipulações algébricas podemos separar a função perturbadora R em quatro partes

$$R_1 = \frac{3}{2} \frac{\mu J_2 R_p^2}{a^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 i \right) (1 - e^2)^{-3/2}, \quad (5.10)$$

$$R_2 = 0, \quad (5.11)$$

$$R_3 = \frac{3}{2} \frac{\mu J_3 R_p^3}{a^4} \sin i \left(1 - \frac{5}{4} \sin^2 i \right) e (1 - e^2)^{-5/2} \sin \omega \quad (5.12)$$

e

$$R_4 = \frac{3}{2} \frac{\mu J_2 R_p^2}{a^3} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 i \right) \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^3 (1 - e^2)^{-3/2} \right] + \frac{1}{2} \sin^2 i \cos 2(f + \omega) \right\}. \quad (5.13)$$

A equação (5.10) é uma função perturbadora secular de primeira ordem, a equação (5.11) secular de segunda ordem, a (5.12) é uma função perturbadora de longo-período e a (5.13) de curto período (Roy, 1988).

Negligenciando os termos de curto período podemos obter a variação média dos elementos orbitais fazendo $R = R_I$ Hamilton (1993).

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle_{J_2} = 0, \quad (5.14)$$

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle_{J_2} = 0, \quad (5.15)$$

$$\left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle_{J_2} = 0, \quad (5.16)$$

$$\left\langle \frac{d\Omega}{dt} \right\rangle_{J_2} = -\frac{3nJ_2 R_p^2}{2a^2(1 - e^2)^2} \cos i, \quad (5.17)$$

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle_{J_2} = \frac{3nJ_2 R_p^2}{2a^2(1 - e^2)^2} \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right), \quad (5.18)$$

e

$$\left\langle \frac{dM}{dt} - n \right\rangle_{J_2} = \frac{3nJ_2 R_p^2}{2a^2(1 - e^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right). \quad (5.19)$$

Assim verifica-se que o semi-eixo maior, excentricidade e inclinação permanece constante devido a perturbação de J_2 (dentro da hipótese adotada), enquanto os elementos angulares ω e Ω variam linearmente no decorrer do tempo.

Nós temos agora o objetivo de obter a variação de ω devido ao efeito de J_2 para o anel Central da falha de Encke e anel F de saturno. Nesse estudo iremos considerar o semi-eixo maior médio do anel Central da falha de Encke e do anel F e consideraremos também como sendo circular e planar suas órbitas ao redor de Saturno. As tabelas abaixo mostram as condições iniciais que utilizamos para obtenção de ω .

Para o anel central da falha de Encke iremos fazer uma aproximação considerando, como semi-eixo maior (a), excentricidade (e) e movimento médio n do satélite Pan (tabela (5.2)). Para o anel F iremos considerar o semi-eixo maior, excentricidade e movimento médio como sendo de um satélite hipotético (S_1) de raio igual a 3 km (tabela (5.2)).

(Duvida será que tem algo a ver se eu fizer de Prometeu e Pandora?)

Tabela 5.2: Condições iniciais utilizadas para obter o argumento do pericentro.

Satélites	a (km)	J_2 de Saturno	e	ω_0 (°)	n	Raio de Saturno (km)
Pan	133.583	0.016298	0.0001	0	228804.0 (°/ano)	60.330
S₁	140.219	0.016298	0.0028	60	579.808 (°/dia)	60.330

Para o anel central da Falha de Encke obtemos através da equação (5.18) o valor de 2281.83 (°/ano) e para um período de 50 anos a variação secular do argumento do pericentro pode ser visualizada através da **figura** (5.20).

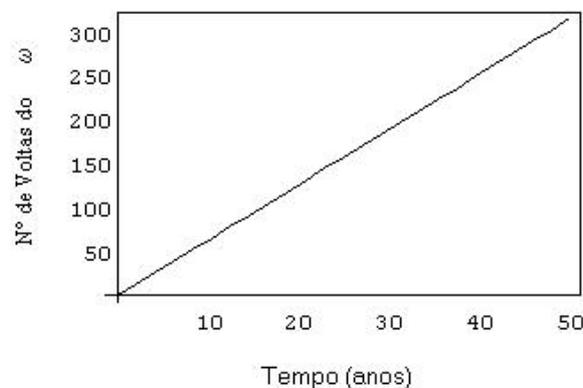


Figura 5.20: Números de voltas do argumento de pericentro do satélite Pan por um período de 50 anos.

Para o satélite hipotético (S_1) encontramos a velocidade do argumento do pericentro igual a 5.24807 ($^\circ$ /dias) e para um período de 3.750 dias, o equivalente a 10 anos, a variação secular do argumento do pericentro pode ser visualizada através da **figura** (5.21).

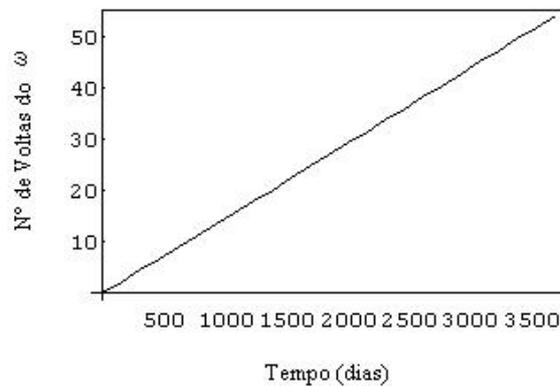


Figura 5.21: Números de voltas do argumento de pericentro do satélite hipotético (S_1) por um período de 3.750 dias que se localiza no anel F.

5.3.1 Simulações com J_2 para o anel central da falha de Encke

As condições iniciais em que incluímos o efeito de J_2 foram semelhantes as utilizadas na secção (5.1), diferenciando apenas no tempo de integração que na secção (5.1) foi de 200 anos e agora integramos para 50 anos e estamos considerando o efeito de J_2 .

Nossos resultados mostraram uma variação da excentricidade em função do tempo e do semi-eixo maior em função do tempo, o que não havia sido observado quando não levávamos em consideração o efeito de J_2 . A **figura** (5.22) nos mostra a variação do semi-eixo maior em função do tempo para uma configuração sem J_2 e a **figura** (5.23) levando em consideração o efeito de J_2 .

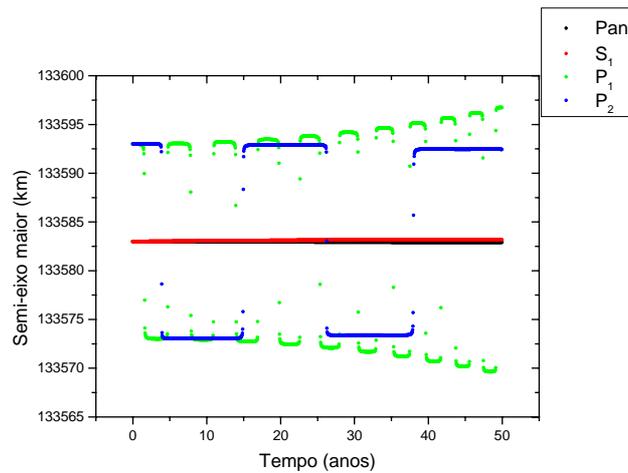


Figura 5.22: Variação do semi-eixo maior em função do tempo para a configuração do anel Central sem o efeito de J_2 .

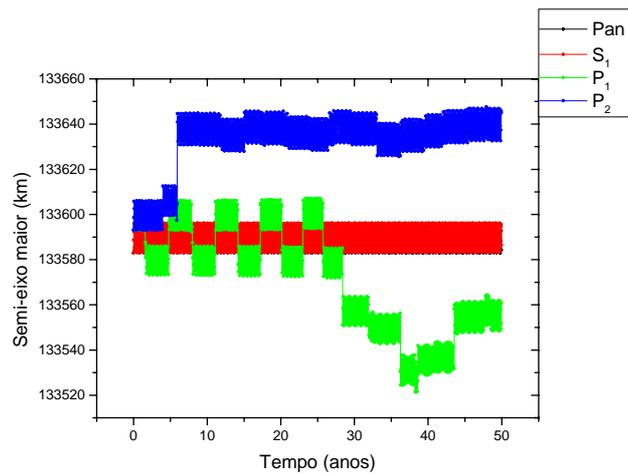


Figura 5.23: Variação do semi-eixo maior em função do tempo para a configuração do anel Central com o efeito de J_2 .

Nos observamos também que a excentricidade varia constante sem J_2 e que agora com o efeito de J_2 tornou-se oscilante essa variação foi observada tanto para os satélites quando para as partículas (**figura (5.24)** e **figura (5.25)**).

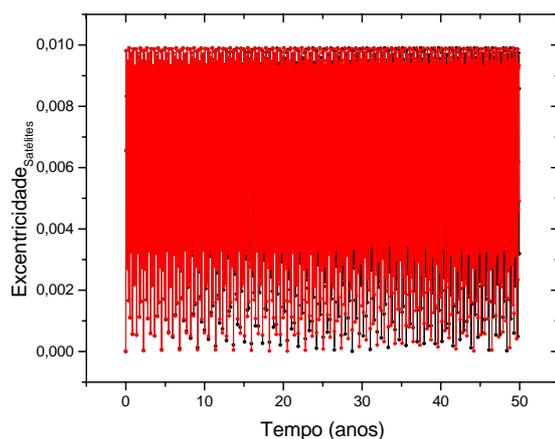


Figura 5.24: Variação da excentricidade em função do tempo para os satélites localizados no anel central.

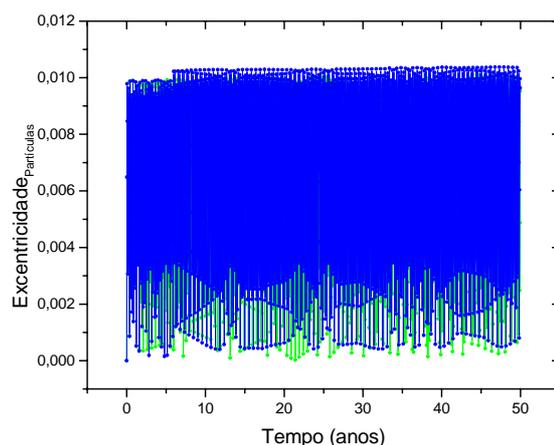


Figura 5.25: Variação da excentricidade em função do tempo para as partículas localizadas no anel central.

Assim podemos concluir para o anel central da falha de Encke que o efeito do achatamento de Saturno não causa somente uma variação secular, mas também gera uma variação de curto período devido aos termos periódicos que surgem na integração numérica das equações completas do movimento, ou seja, existe uma combinação entre os termos seculares e de curto período, não podendo assim esses (de curto período) ser desprezado, pois, vimos que ele afeta de modo considerável a configuração existente nesse anel, como mostra a **figura** (5.23) onde vimos que as

partículas não mais permanecem coorbitais aos satélites como acontecia antes sem o efeito do J_2 (**figura** (5.22)).

5.3.2 Simulações com J_2 para o anel F

Como vimos na secção (5.2) a configuração em que o anel F está localizado é uma região caótica (**não sei se está certo o que estou afirmando**), pois temos os satélites Prometeu e Pandora perturbando o anel.

CAPÍTULO 6 DISCUSSÃO

6.1 COMENTÁRIOS GERAIS

O estudo numérico do problema N - corpos possibilitou verificar que a partícula pode permanecer confinada entre N satélites (N igual a 2 e 3) estando esta partícula posicionada a 15 km do semi-eixo maior dos satélites, por um período de integração de 500 anos, exceto para a configuração de equilíbrio do Tipo III.

Para o caso circular verificamos que a largura da órbita de ferradura para os casos onde temos 2 e 3 satélites pode ser obtida através do problema circular restrito de 3 corpos estudado por Dermott e Murray (1981). O confinamento se manteve quando incluímos excentricidade da ordem de 10^{-3} e 10^{-4} , sendo que para valores igual ou superior a 10^{-2} não houve confinamento.

Incluímos em nosso trabalho o estudo dos pontos de equilíbrio para o caso de 2 e 3 satélites nas configurações estáveis e instáveis, em que os satélites têm a mesma razão de massa.

Para o caso em que temos satélites com massas diferentes (Pan com raio=10 km, Sat. com raio = 5 km e densidade de ambos iguais a $1,2 \text{ g/cm}^3$) verificamos que para a configuração N = 2, estável e instável, os satélites, por um período de 500 anos, permanecem nas configuração de equilíbrio proposta por Salo e Yoder (1988), no entanto há uma diminuição na largura de confinamento das partículas. Para o caso N = 3, estável e instável, os satélites não mais permanecem nas posições de equilíbrio iniciais, mas sim passam a realizar uma órbita em torno dos pontos de equilíbrio para o caso em que as massas estão distribuídas de modo em que exista uma simetria e um equilíbrio de forças entre os satélites. Assim, quando os satélites estão com uma largura radial máxima observamos que a órbita da partícula confinada entre eles passa a ter uma largura radial mínima.

Nós realizamos um estudo das configurações de equilíbrio proposta por Salo e Yoder (1988) alterando a massa dos satélites e verificamos que para dois satélites as configurações do Tipo Ia e IIa são as mesmas, ou seja essa configuração de equilíbrio por um período de integração de 500 anos para satélites de massas diferentes é mantida. No entanto verificamos que para três satélites de massas diferentes, que

inicialmente são posicionadas nas configurações de equilíbrio do Tipo Ia e IIa, há o movimento desses satélites em torno dos novos pontos de equilíbrio para a configuração onde o satélites mais massivo se encontra entre os outros dois satélites menos massivo separado pela mesma distância radial. Esses novos pontos, para os dois Tipos de configuração dos satélites, se aproximam, a medida em que diminuimos a massa dos satélites, dos “Lagrangianos” L_4 (60°) e L_5 (300°) (obtidos no problema circular restrito de 3-corpos) enquanto o mais massivo se encontra posicionado a 0° .

Outro estudo por nós realizado foi a obtenção dos pontos de equilíbrio das partículas coorbitais aos satélites para o caso circular, quando consideramos as massas dos satélites iguais e posteriormente quando alteramos suas massas. Nesse estudo verificamos a existência dos pontos de equilíbrio sendo alguns estáveis e outros instáveis, onde essa instabilidade pode ser estudada, numericamente, quando deslocamos inicialmente a partícula de sua posição de equilíbrio inicial e analisamos as curvas que ela irá descrever ao redor ou não dos pontos de equilíbrio. Quando alteramos as massas dos satélites observamos, de modo geral para as configurações de dois e três satélites, um deslocamento dos pontos de equilíbrio no sentido de se aproximar dos pontos de equilíbrio “Lagrangianos” mais próximos, seguindo assim a mesma tendência do comportamento dos satélites de massas diferentes.

Assim, mesmo sabendo que os pontos Lagrangianos L_4 , L_3 e L_5 foram obtidos para o problema de 3 corpos, concluímos para o caso em que alteramos as massas dos satélites uma tendência dos satélites e das partículas se deslocarem para esses pontos de equilíbrio, isso pode gerar nas estruturas dos anéis regiões em que poderão existir aglomerados de partículas ou mesmo satélites nessas posições de equilíbrio.

O estudo para os anéis da falha de Encke, Figuras 5.1 e 5.2, sobre o comportamento das partículas quando incluíssemos satélites nas posições propostas por Ferrai e Brahic (1997) foi realizado e apresentado no capítulo 4. Nossos resultados mostraram ser possível a existência de um satélite nas posições de 80° e/ou 240° de raio igual a 8 km coorbital a Pan verificando que esse satélite hipotético coorbital a Pan passa a descrever um comportamento ao redor do ponto de equilíbrio, para o caso em que o posicionamos a 80° esse comportamento se dá ao redor de L_4 , gerando uma variação do semi-eixo maior em função do tempo de modo a alterar a largura do anel.

Quando incluímos um satélite de raio maior que 3 km, posicionado no anel interno, observamos que esse passa a perturbar os satélites que estão no anel central (Pan + S₁) e as partículas dos mesmos. Assim com o intuito de manter a configuração do anel central (Pan + S₁) incluímos um anel com raio menor que 3 km no anel interno e verificamos que esse não confina as partículas desse anel, como o visto no anel central, e que a estrutura desse anel é bastante irregular devido ao comportamento das partículas que sentem o efeito dos satélites do anel central.

No anel F observamos que devido ao movimento dos satélites Prometeu e Pandora ser caótico, os anéis também passam a descrever um comportamento não previsível e que mesmo com a existência de um satélite imerso no anel não verificamos confinamento por um período superior a 5 anos. Assim é possível que as estruturas observadas nesses anéis sejam estruturas temporárias causadas pela perturbação dos satélites Prometeu e Pandora.

E finalmente, quando incluímos o efeito do achatamento de Saturno sobre os anéis e sobre os satélites que estão imersos nesses anéis observamos que as perturbações seculares, que geram uma variação no argumento do pericentro, e as perturbações periódicas, que fazem com que haja uma variação na excentricidade e no semi-eixo maior, fazem com que a estrutura dos anéis seja modificada.

REFERÊNCIAS

- BROWN, E. W.; SHOOK, C. A. **Planetary Theory**. New York Dover Publications. 1964.
- CUZZI, J. N.; SCARGLE, J. D. (1985). Wavy edges suggest moonlet in Encke's gap. **Astrophysical Journal**, Chicago, v. 292, n. 1, p. 276 – 290. 1985.
- DERMOTT, S. F.; MURRAY, C. D. The dynamics of tadpole and horseshoe orbits. **Icarus**, San Diego, v. 48, n. 1, p. 1 – 11. 1981.
- FERRARI, C.; BRAHIC, A. Arcs and clumps in the Encke division of Saturn's rings. **Planetary and Space Science**, Oxford, v. 45, n. 9, p. 1051 – 1067. 1997.
- GIULIATTI WINTER, S. M.; WINTER, O. C. The Wandering of Prometheus and Pandora. Submetido à **Advances in Space Research**.
- MAXWELL, C. J. On the stability of the motion of Saturn's Rings. Scientific Paper of Clerk Maxwell, Cambridge University Press, v. 1, p. 228. 1890.
- Mourão, D. C. (2001). “Estudo de estrutura dinâmica de satélites coorbitais. Caso não-restrito”. Dissertação (Mestrado) – UNESP – Guaratinguetá.
- Murray, C. D. e S. F. Dermott (1999). “Solar system dynamics”. Cambridge University Press.
- Murray, C. D. *et al.*, (2000). “The orbits of Prometheus, Pandora and Atlas in 1980 and 1981”. *Bull. Am. Astron. Soc.*, vol 32, pág. 1090.
- Namoni, F. (1999). “Secular interaction of coorbiting objects”. *Icarus*, vol. 137, pág. 296 – 314.
- Petit, J. M. e M. Hénon (1986). “Satellite encounters”. *Icarus*, vol. 66, pág. 536 – 555.
- Rappaport, N. J. e P. Goldreich (2002). “The chaotic dynamics of Prometheus and Pandora”. *Bull. Am. Astron. Soc.*, vol. 34, n°3.

Salo, H. e C. F. Yoder (1988). “The dynamics of coorbital satellites systems”. *Astron. Astrophys.*, vol. 205, pág. 309 – 327.

Showalter, M. R. *et al.* (1991). “The visual detection of 1981S13 and its role in the Encke gap. *Nature*, vol. 351, pág. 709 – 713.

Spahn, F., Scholl, H. e J. M. Hertzsch (1994). “Structures in planetary ring caused by embedded moonlets”. *Icarus*, vol. 111, pág. 514 – 535.

Yoder, C. F., G. Colombo, S. P. Synnott e K. A. Yoder (1983). “Theory of motion of Saturn’s coorbiting Satellites”. *Icarus*, Vol. 53, pg. 431 – 443.