Universidade Estadual Paulista

Câmpus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Problemas de valor de contorno não clássicos: Uma abordagem usando funções de Green

Glauce Barbosa Verão

Orientador: Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Câmpus São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São José do Rio Preto

Fevereiro 2011

GLAUCE BARBOSA VERÃO

Problemas de valor de contorno não clássicos: Uma abordagem usando funções de Green

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz

São José do Rio Preto, 18 de fevereiro de 2011.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz

Professor Doutor - IBILCE - UNESP

Orientador

Prof. Dr. Luiz Augusto Fernandes de Oliveira

Professor Doutor - IME - USP

Prof. Dr. José Marcio Machado

Professor Doutor - IBILCE - UNESP

À minha mãe, psicóloga,

médica, professora...

Valdete

dedico.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, agradeço:

A Deus, por mais esta conquista.

Aos meu pais, minha querida irmã e familiares que acreditaram no meu sonho, pela paciência durante minhas crises existênciais e por todo amor e carinho que me dão.

Ao meu orientador German pelo apoio, atenção e credibilidade em mim depositada.

Aos meus amigos e professores da UEMS, Cosme e Maristela pelo estímulo, conselhos e por sempre estarem dispostos a me ajudar.

Aos professores Luiz Augusto Fernandes de Oliveira e José Márcio Machado que ajudaram a enriquecer e melhorar este trabalho.

Aos meus amigos, companheiros de mestrado, Érica, Ana Cláudia, Juliano, Meire e Marcos por toda e qualquer tipo de ajuda que recebi de vocês.

Ao André, Andrea, Michelli e Júnior por me proporcionar momentos inesquecíveis e pelas amizades sinceras que conquistei.

As meninas do futebol e o pessoal da capoeira pela agradável companhia.

Aos meus amigos de Dourados que mesmo distantes, vibram a cada etapa concluída, a cada conquista.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

A todos que de alguma forma contribuíram para a conclusão deste trabalho.

“O futuro pertence àqueles que acreditam na beleza de seus sonhos.”

(Elleanor Roosevelt)

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar problemas de valor de contorno do tipo

$$\begin{cases} \ddot{y} + f(t) = 0 \\ y(0) = 0 \quad \dot{y}(1) = ky(\eta), \end{cases} \tag{1}$$

onde $\eta \in (0,1)$, $k \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Para antingirmos nosso objetivo usamos as funções de Green $G(t,s)$ que nos permitem escrever a solução do problema (1) na seguinte forma:

$$w(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds.$$

Usando esta solução, investigamos através do ponto fixo de Schauder a solvabilidade do problema não linear

$$\begin{cases} \ddot{y} + f(t,y) = 0 \\ y(0) = 0 \quad \dot{y}(1) = ky(\eta). \end{cases}$$

Palavras chave: Problemas de valor de contorno em três pontos, função de Green, problemas não lineares.

Abstract

The main goal of this work is study the following boundary value problems

$$\begin{cases} \ddot{y} + f(t) = 0 \\ y(0) = 0 \quad \dot{y}(1) = ky(\eta), \end{cases} \tag{2}$$

where $\eta \in (0,1)$, $k \in \mathbb{R}$ and $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. To achieve our goal we use the Green's function $G(t,s)$ which allow us to write the solution of the problem (2) in the form:

$$w(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds.$$

Using this solution and the Schauder fixed point theory, also we study the solvability of a nonlinear problem

$$\begin{cases} \ddot{y} + f(t,y) = 0 \\ y(0) = 0 \quad \dot{y}(1) = ky(\eta). \end{cases}$$

Keywords: ***Three-point boundary value problems, green's function, nonlinear problems***.

Sumário

Introdução **10**

1 Preliminares **14**

1.1 Conceitos básicos 14

1.2 Funções de Green 21

2 Problemas de valor de contorno em dois pontos **23**

2.1 Problemas lineares 23

2.2 Problemas não lineares 33

3 Problemas de valor de contorno em três pontos **38**

3.1 Problemas lineares 38

3.1.1 Abordagem axiomática 38

3.1.2 Abordagem integral 51

3.2 Problemas não lineares 63

Conclusão **69**

Referências Bibliográficas **71**

Introdução

Em 1828 George Green[1] publicou a obra *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism.* Nesta obra da Física Matemática, Green buscava determinar o potencial elétrico dentro de um vácuo limitado por condutores com potenciais específicos. Assim nascia as primeiras ideias da chamada "função de Green". Historicamente, as funções de Green eram usadas apenas em equações diferenciais parciais (EDP's), a aplicação do método para equações diferenciais ordinárias (EDO's) envolvendo problemas de valor de contorno começou com o trabalho de Burkhardt[2] usando resultados da teoria de Picard [3].

Para termos uma ideia intuitiva do sentido físico das funções de Green em um problema de valor de contorno, considere o problema unidimensional da condução de calor constante em um fio fino

$$\begin{cases} -\ddot{y} = f(t), \qquad 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

onde y é a temperatura do fio e $f(t)$ é a densidade (por unidade de medida do fio) de fonte de calor. Vamos introduzir um problema auxiliar, ao invés de uma fonte de calor distribuída, vamos considerar somente uma fonte unitária de força concentrada em $t = s$.(Ver Figura 1).

A solução do problema auxiliar é conhecida como função de Green e é denotada por $G(t, s)$. Aqui s é a posição da fonte e t é o ponto de observação. Geralmente usamos s como um parâmetro e t é a variável. Porém s também varia entre $[0, 1]$ então tratamos

[1] $(1793 - 1841)$ - Matemático e físico inglês

[2] $(1861 - 1941)$ - Matemático alemão

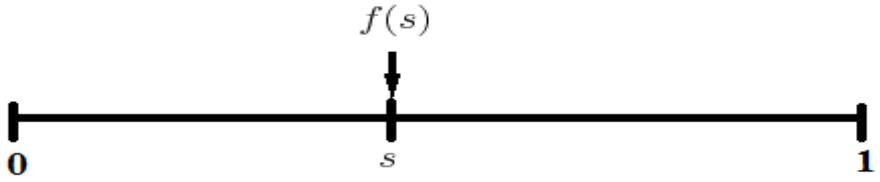

Figura 1: Fonte de calor unitária em $t = s$.

G como uma função de duas variáveis. Como não há fontes em $[0, s)$ e $(s, 1]$ a equação governante em ambos os intervalos é $-\ddot{G} = 0$. Considerando ainda que a temperatura G é nula em $t = 0$ e $t = 1$ temos

$$G(t,s) = \begin{cases} At, & 0 \leq t \leq s \\ B(1-t), & s \leq t \leq 1, \end{cases}$$

onde A e B são constantes que independe de t, porém podem depender de s. Por exemplo, uma fonte colocada muito próxima da extremidade $t = 0$, para que a temperatura nesse ponto seja nula, o coeficiente angular da reta At deve ser menor do que uma fonte colocada no meio do fio. Se G fosse descontínua em $t = s$ então o fio seria "quebrado", o que não é o caso, então

$$As = B(1-s).$$

Agora, se desejássemos que $\dot{G}$ fosse contínua em $t = s$ teríamos $A = B = 0$, isto é, G seria identicamente nula em $t = s$, o que não faz sentido pois este é o ponto onde a fonte de calor esta concentrada. Calculando então as derivada laterais de G neste ponto temos

$$\left.\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right|_{t=s^-}^{t=s^+} = \frac{\partial G(s^+,s)}{\partial t} - \frac{\partial G(s^-,s)}{\partial t} = -B - A.$$

Pela Lei do Balanço Integral (Ver [13] página 33)

$$G_t(s^+,s) - G_t(s^-,s) = -1.$$

Com essas informações encontramos $A = (1-s)$ e $B = s$, logo a função de Green para o problema é

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \leq t \leq s \\ s(1-t), & s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Fisicamente, $G(t,s)$ é a temperatura em t quando a única fonte unitária está concentrada em s.

Vamos decompor a fonte distribuída $f(t)$ em um número de pequenas fontes localizadas em vários pontos ao longo do fio. Dividimos o intervalo $(0,1)$ em n partes iguais, onde o centro do k-ésimo subintervalo é s_k e a medida de cada subintervalo é $\Delta s = \frac{1}{n}$. (Ver Figura 2).

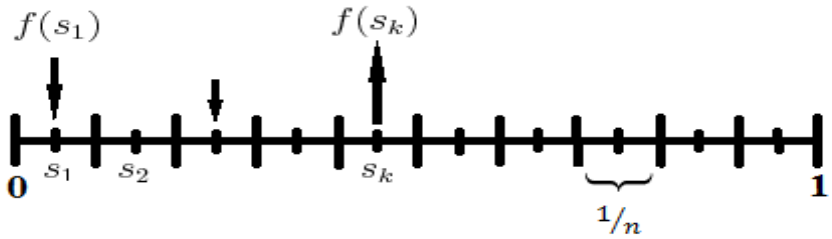

Figura 2: Fontes localizadas

A temperatura em t de cada subintervalo, devido a fonte $f(s_i)$ em s_i, é dada por $G(t,s_i)f(s_i)\Delta s$. Logo se somarmos as temperaturas de todos os subintervalos temos

$$\sum_{i=1}^{n} G(t,s_i)f(s_i)\Delta s$$

fazendo $n \longrightarrow \infty$ temos que a temperatura ao longo do fio é dada por

$$y(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds.$$

O estudo de problemas de valor de contorno em três pontos tem atraído a atenção de vários pesquisadores nos últimos anos, alguns artigos atribuem a Gupta[3] ter iniciado o estudo desses tipos de problemas em 1992. Tais problemas tem aplicações na Física, Biologia, Química, etc. Por exemplo, em um modelo para a resposta da membrana de uma capa esférica na difusão não linear gerado por fontes não lineares e na teoria do reator químico [5].

[3]GUPTA, C.P. Solvability of a three-point nonlinear boundary value problem for a second order ordinary differential equations

O objetivo principal do nosso trabalho é estudar alguns problemas de valor de contorno em três pontos usando as funções de Green tanto para problemas lineares quanto não lineares. Basicamente, os artigos que formaram uma base para nosso estudo foram [15] [11] e [14].

Nosso trabalho está dividido em 3 capítulos. No capítulo 1 apresentamos alguns conceitos básicos de EDO's e análise funcional que serão necessários para o entendimento dos próximos capítulos.

No capítulo 2 propomos mostrar como as funções de Green atuam nas soluções de equações diferenciais ordinárias sujeitas a certas condições de contorno.

Finalmente no capítulo 3 estudamos a equação

$$\ddot{y} + f(t) = 0$$

sujeita as seguintes condições de contorno

$$\begin{array}{ll}
y(a) = 0 & \dot{y}(b) = ky(\eta) \\
y(a) = ky(\eta) & \dot{y}(b) = 0 \\
\dot{y}(a) = 0 & y(b) = ky(\eta) \\
\dot{y}(a) = ky(\eta) & y(b) = 0 \\
y(a) = 0 & \dot{y}(b) = k\dot{y}(\eta) \\
y(a) = k\dot{y}(\eta) & \dot{y}(b) = 0 \\
\dot{y}(a) = 0 & y(b) = k\dot{y}(\eta) \\
\dot{y}(a) = k\dot{y}(\eta) & y(b) = 0,
\end{array}$$

onde $a < \eta < b$ e k constante real. Ainda no capítulo 3 estudamos a existência de soluções não triviais do problema não linear

$$\begin{cases} \ddot{y} + f(t, y) = 0 \\ y(0) = 0 \quad \dot{y}(1) = ky(\eta), \end{cases}$$

onde $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo abordaremos alguns conceitos básicos da teoria de equações diferenciais ordinárias tais como teoremas que garantam existência e unicidade de problemas de valor de contorno, alguns conceitos de análise funcional, a definição clássica das funções de Green e algumas ferramentas necessárias para o entendimento e desenvolvimento dos próximos capítulos.

1.1 Conceitos básicos

Muitos fenômenos naturais que aparecem em vários ramos da ciência, como por exemplo, Ecologia, Física, Economia, Neurologia, entre outros, são modelados por equações diferenciais da forma

$$p(t)\ddot{y} + q(t)\dot{y} + r(t)y = f(t), \tag{1.1}$$

onde $p, q, r, f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas. Se $p(t) = m$, $q(t) = \gamma$ e $r(t) = k$, onde m,γ e k são constantes positivas, a equação (1.1) modela o movimento de um bloco de massa m presa a uma mola vertical [2]. Nesta seção estudaremos a equação (1.1) sujeita a condições de contorno do tipo

$$\begin{aligned} l_1[y] &= a_0 y(a) + a_1 \dot{y}(a) + b_0 y(b) + b_1 \dot{y}(b) = A \\ l_2[y] &= c_0 y(a) + c_1 \dot{y}(a) + d_0 y(b) + d_1 \dot{y}(b) = B \end{aligned} \tag{1.2}$$

onde A, B, a_i, b_i, c_i e d_i com $i = 0, 1$ são constantes e ainda $(a_0 \;\; b_0 \;\; c_0 \;\; d_0) \neq C(a_1 \;\; b_1 \;\; c_1 \;\; d_1)$ para qualquer constante real C. A partir de (1.2) temos as seguintes condições de contorno particulares:

i) Condições Homogêneas

$$l_1[y] = 0 \;\text{ e }\; l_2[y] = 0. \tag{1.3}$$

ii) Condição de Dirichlet

$$y(a) = A \;\text{ e }\; y(b) = B.$$

iii) Condição de Neumann

$$\dot{y}(a) = A \;\text{ e }\; \dot{y}(b) = B.$$

iv) Condição Mista

$$y(a) = A \;\text{ e }\; \dot{y}(b) = B, \;\text{ ou}$$
$$\dot{y}(a) = A \;\text{ e }\; y(b) = B.$$

v) Condições Separáveis

$$a_0 y(a) + a_1 \dot{y}(a) = A$$
$$d_0 y(b) + d_1 \dot{y}(b) = B.$$

vi) Condições Periódicas

$$y(a) = y(b)$$
$$\dot{y}(a) = \dot{y}(b).$$

Se $f(t) = 0$, então a equação (1.1) tem a seguinte forma

$$p(t)\ddot{y} + q(t)\dot{y} + r(t)y = 0 \tag{1.4}$$

e esta é chamada equação homogênea associada a (1.1).

Teorema 1.1 (Princípio da Superposição) *Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluções dos respectivos problemas* (1.4)-(1.2) *e* (1.1)-(1.3). *Então $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ é solução do problema* (1.1)-(1.2).

Demonstração. A função y satisfaz a equação (1.1) assim como as condições de contorno (1.2). De fato,

$$\begin{aligned} p(t)\ddot{y} + q(t)\dot{y} + r(t)y &= p(t)[\ddot{y_1} + \ddot{y_2}] + q(t)[\dot{y_1} + \dot{y_2}] + r(t)[y_1 + y_2] \\ &= [p(t)\ddot{y_1} + q(t)\dot{y_1} + r(t)y_1] + c_2[p(t)\ddot{y_2} + q(t)\dot{y_2} + r(t)y_2] \\ &= 0 + f(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_1[y] &= l_1[y_1 + y_2] \\ &= a_0[y_1(a) + y_2(a)] + a_1[\dot{y_1}(a) + \dot{y_2}(a)] + b_0[y_1(b) + y_2(b)] + b_1[\dot{y_1}(b) + \dot{y_2}(b)] \\ &= [a_0y_1(a) + a_1\dot{y_1}(a) + b_0y_1(b) + b_1\dot{y_1}(b)] + [a_0y_2(a) + a_1\dot{y_2}(a) + b_0y_2(b) + b_1\dot{y_2}(b)] \\ &= l_1[y_1] + l_1[y_2] \\ &= A + 0. \end{aligned}$$

Analogamente verificamos que

$$l_2[y] = l_2[y_1] + l_2[y_2] = B.$$

□

Considere o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n &= b_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n &= b_2 \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + \ldots + a_{3n}y_n &= b_3 \\ &\ldots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n &= b_n \end{aligned} \tag{1.5}$$

a_{ij},$b_i \in \mathbb{R}$ e y_i são as componentes desconhecidas do sistema, com $1 \leq i, j \leq n$. O sistema pode ser escrito na forma compacta

$$Ay = b,$$

onde A é uma matriz $n \times n$ cujos coeficientes são os números reais a_{ij}, b é um vetor $n \times 1$ formado pelos $b_i^{'}s$ e y é o vetor incógnita $n \times 1$ formado pelos $y_i^{'}s$.

Teorema 1.2 *O sistema* (1.5) *tem solução única se, e somente se* $\det A \neq 0$. *Alternativamente, se o sistema tem somente a solução trivial, então* $\det A \neq 0$.

Demonstração. Se $\det A \neq 0$ então existe uma única matriz inversa A^{-1} tal que $A^{-1}Ay = A^{-1}b$, logo $y = A^{-1}b$ é solução única do sistema. □

Teorema 1.3 *Sejam* $y_1(t)$ *e* $y_2(t)$ *quaisquer duas soluções linearmente independentes de* (1.4). *Então o problema de valor de contorno homogêneo* (1.4)-(1.3) *tem somente a solução trivial se, e somente se*

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1[y_1] & l_1[y_2] \\ l_2[y_1] & l_2[y_2] \end{vmatrix} \neq 0.$$

Demonstração. Detalhes da demonstração podem ser visto em [1], página 235.

Teorema 1.4 *O problema de valor de contorno não homogêneo* (1.1)-(1.2) *tem solução única se, e somente se o problema de valor homogêneo* (1.4)-(1.3) *tem somente a solução trivial.*

Demonstração. Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ quaisquer duas soluções linearmente independentes de (1.4) e $y_p(t)$ uma solução particular de (1.1). Então a solução geral de (1.1) pode ser escrita como

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + y_p(t). \tag{1.6}$$

A função dada em (1.6) é solução do problema de valor de contorno (1.1)-(1.2) se, e somente se

$$\begin{aligned} l_1[c_1y_1 + c_2y_2 + y_p] &= A \\ l_2[c_1y_1 + c_2y_2 + y_p] &= B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_1[c_1y_1 + c_2y_2 + y_p] &= a_0(c_1y_1(a) + c_2y_2(a) + y_p(a)) + a_1(c_1\dot{y}_1(a) + c_2\dot{y}_2(a) + \dot{y}_p(a)) \\ &\quad + b_0(c_1y_1(b) + c_2y_2(b) + y_p(b)) + b_1(c_1\dot{y}_1(b) + c_2\dot{y}_2(b) + \dot{y}_p(b)) \\ &= c_1(a_0y_1(a) + a_1\dot{y}_1(a) + b_0y_1(b) + b_1\dot{y}_1(b)) \\ &\quad + c_2(a_0y_2(a) + a_1\dot{y}_2(a) + b_0y_2(b) + b_1\dot{y}_2(b)) \\ &\quad + (a_0y_p(a) + a_1\dot{y}_p(a) + b_0y_p(b) + b_1\dot{y}_p(b)) \\ &= c_1l_1[y_1] + c_2l_1[y_2] + l_1[y_p], \end{aligned}$$

analogamente

$$l_2[c_1y_1 + c_2y_2 + y_p] = c_1l_2[y_1] + c_2l_2[y_2] + l_2[y_p].$$

Então

$$\begin{aligned} l_1[c_1y_1 + c_2y_2 + y_p] &= c_1l_1[y_1] + c_2l_1[y_2] + l_1[y_p] = A \\ l_2[c_1y_1 + c_2y_2 + y_p] &= c_1l_2[y_1] + c_2l_2[y_2] + l_2[y_p] = B. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Colocando o sistema (1.7) na forma matricial temos

$$\begin{pmatrix} l_1[y_1] & l_1[y_2] \\ l_2[y_1] & l_2[y_2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - l_1[y_p] \\ B - l_2[y_p] \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Pelo Teorema 1.2, o sistema (1.8) tem solução única se, e somente se

$$\det \begin{vmatrix} l_1[y_1] & l_1[y_2] \\ l_2[y_1] & l_2[y_2] \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.9}$$

Pelo Teorema 1.3, o problema de valor de contorno (1.4)-(1.3) tem somente solução trivial se, e somente se

$$\det \begin{vmatrix} l_1[y_1] & l_1[y_2] \\ l_2[y_1] & l_2[y_2] \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.10}$$

Logo o sistema (1.8) ter solução única é equivalente a dizer que o problema (1.4)-(1.3) tem somente a solução trivial. □

Exemplo 1.1 *O problema de valor de contorno*

$$\begin{cases} \ddot{y} + f(t) = 0 \\ y(a) = 0 \qquad \dot{y}(b) = 0, \end{cases} \tag{1.11}$$

tem solução única. De fato, sejam $y_1(t) = t$ *e* $y_2(t) = 1$ *soluções linearmente independentes de*

$$\begin{cases} -\ddot{y} = 0 \\ l_1[y] = 0 \quad l_2[y] = 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

Como

$$\begin{aligned} l_1[y_1] &= y_1(a) = a \\ l_1[y_2] &= y_2(a) = 1 \\ l_2[y_1] &= \dot{y}_1(b) = 1 \\ l_2[y_2] &= \dot{y}_2(b) = 0, \end{aligned}$$

e

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1[y_1] & l_1[y_2] \\ l_2[y_1] & l_2[y_2] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

pelo Teorema 1.3 *o problema* (1.12) *tem somente a solução trivial.*

Teorema 1.5 (Regra de Leibniz) *Dado $U \subset \mathbb{R}^n$, aberto, seja $f : U \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função com as seguintes propriedades:*

1) Para todo $t \in U$, a função $s \longmapsto f(t,s)$ é integrável em $a \leq s \leq b$.

2) A i-ésima derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)$ existe para cada $(t,s) \in U \times [a,b]$ e a função $\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s) : U \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, assim definida, é contínua.

Então a função $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $\varphi(t) = \int_a^b f(t,s)ds$, possui i-ésima derivada parcial em cada ponto $t \in U$, sendo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)ds.$$

Em suma: Pode-se derivar sob o sinal de integral, desde que o integrando resultante seja uma função contínua.

Demonstração. Detalhes da demonstração podem ser visto em [9], página 144.

Corolário 1.1 *Seja $f : U \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, com derivadas parciais contínuas $\frac{\partial f}{\partial t_1}(t,s), \ldots \frac{\partial f}{\partial t_n}(t,s) : U \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e sejam $g_1, g_2 : U \longrightarrow [a,b]$ funções de classe C^1. Então $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\varphi(t) = \int_{g_1(t)}^{g_2(t)} f(t,s)ds$$

é de classe C_1, e suas derivadas parciais são expressas pela fórmula:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(t) = \int_{g_1(t)}^{g_2(t)} \frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)ds + \frac{\partial g_2}{\partial t_i}(t)f(t,g_2(t)) - \frac{\partial g_1}{\partial t_i}(t)f(t,g_1(t)).$$

Demonstração. Como

$$\varphi(t) = \int_{g_1(t)}^{g_2(t)} f(t,s)ds$$

é equivalente a

$$\varphi(t) = \int_{g_1(t)}^{c} f(t,s)ds + \int_{c}^{g_2(t)} f(t,s)ds$$

calculemos primeiro a derivada da integral

$$\varphi_2 = \int_c^{g_2(t)} f(t,s)ds.$$

Considere a função $\xi : U \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\xi(t,u) = \int_c^u f(t,s)ds$, pela Regra de Leibniz e o Teorema Fundamental do Cálculo

$$\frac{\partial \xi}{\partial t_i}(t,u) = \int_c^u \frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)ds \quad \text{e} \quad \frac{\partial \xi}{\partial u}(t,u) = f(t,u).$$

Assim, ξ é de classe C^1. Podemos então usar a regra da cadeia, segundo a qual a função composta $\varphi_2(t) = \xi(t, g_2(t))$ tem como derivada parcial

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_i}(t) &= \frac{\partial \xi}{\partial t_i}(t, g_2(t)) + \frac{\partial g_2}{\partial t_i}(t)\frac{\partial \xi}{\partial u}(t, g_2(t)) \\ &= \int_c^{g_2(t)} \frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)ds + \frac{\partial g_2}{\partial t_i}(t) f(t, g_2(t)).\end{aligned}$$

Analogamente, se

$$\varphi_1 = \int_{g_1(t)}^c f(t,s)ds = -\int_c^{g_1(t)} f(t,s)ds$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}(t) &= -\int_c^{g_1(t)} \frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)ds - \frac{\partial g_1}{\partial t_i}(t) f(t, g_1(t)) \\ &= \int_{g_1(t)}^c \frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)ds - \frac{\partial g_1}{\partial t_i}(t) f(t, g_1(t)),\end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) &= \dot{\varphi}_1(t) + \dot{\varphi}_2(t) \\ &= \int_{g_1(t)}^c \frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)ds - \frac{\partial g_1}{\partial t_i}(t) f(t, g_1(t)) + \int_c^{g_2(t)} \frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)ds + \frac{\partial g_2}{\partial t_i}(t) f(t, g_2(t)) \\ &= \int_{g_1(t)}^{g_2(t)} \frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)ds + \frac{\partial g_2}{\partial t_i}(t) f(t, g_2(t)) - \frac{\partial g_1}{\partial t_i}(t) f(t, g_1(t)).\end{aligned}$$

□

Definição 1.1 *Seja $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p < \infty$, definamos o conjunto*

$$L^p([a,b]) = \left\{ \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}; \varphi \ \text{ é mensurável e } \int_a^b |\varphi(t)|^p dt < \infty \right\}.$$

Definição 1.2 (Operador completamente contínuo) *Sejam X e Y espaços normados. Um operador $T : X \to Y$ é chamado de completamente contínuo se para todo subconjunto $\Omega \subset X$ limitado, a imagem $T(\Omega)$ é relativamente compacta, isto é, $\overline{T(\Omega)}$ é compacto.*

Definição 1.3 (Conjunto uniformemente limitado) *Uma família $\mathfrak{F}$ de funções f definida em um intervalo $[a, b]$ é dita uniformemente limitada se existe $M > 0$ tal que*

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall \ x \in [a, b] \ \ e \ \ \forall \ \ f \in \mathfrak{F}.$$

Definição 1.4 (Conjunto equicontínuo) *Uma família $\mathfrak{F}$ de funções f definidas em um intervalo fechado $[a, b]$ é dita equicontínua se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\forall \ \ x, y \in [a, b] \quad |x - y| < \delta$$

tem-se

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \forall \ \ f \in \mathfrak{F}.$$

Teorema 1.6 (Teorema de Arzela) *Se Y é compacto, um subconjunto $\mathfrak{F} \subset C(Y)$ é relativamente compacto se, e somente se, $\mathfrak{F}$ é uniformemente limitado e equicontínuo.*

Demonstração. Detalhes da demonstração podem ser vistos em [8], página 102.

Teorema 1.7 (Alternativa não linear de Leray-Schauder) *Seja E um espaço de Banach e $\Omega \subset E$ um subconjunto convexo, $0 \in \Omega$, $T : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ um operador completamente contínuo. Então ou existe $u \in \partial\Omega$ e $\lambda > 1$ tal que $Tu = \lambda u$, ou existe um ponto fixo $u \in \overline{\Omega}$.*

Demonstração. Detalhes da demonstração podem ser vistos em [4], página 123.

1.2 Funções de Green

Na introdução deste trabalho usamos um problema físico simples para dar um sentido físico e para prepararmos o leitor para a definição clássica matemática que será apresentada a seguir.

Definição 1.5 *Chamamos de função de Green para o problema* (1.4)-(1.3)*, uma função real* G *definida em* $[a,b]\times[a,b]$ *que possui as seguintes propriedades:*

i) G *é contínua em* $[a,b]\times[a,b]$.

ii) Para cada $s\in[a,b]$, $z(t)=G(t,s)$ *é a solução de* (1.4) *em* $[a,b]$.

iii) Para cada $s\in[a,b]$, $z(t)=G(t,s)$ *satisfaz as condições de contorno* (1.3).

iv) $\dfrac{\partial G(t,s)}{\partial t}$ *é contínua em cada um dos triângulos* $a\leq t\leq s\leq b$ *e* $a\leq s\leq t\leq b$. *Porém,* $\dfrac{\partial G(t,s)}{\partial t}$ *tem descontinuidade de salto na diagonal* $t=s$ *dada por*

$$\left.\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right|_{t=s^-}^{t=s^+}=\frac{\partial G(s^+,s)}{\partial t}-\frac{\partial G(s^-,s)}{\partial t}=\frac{1}{p(s)}, \tag{1.13}$$

onde

$$\frac{\partial G(s^+,s)}{\partial t}=\lim_{\substack{t\longrightarrow s\\ t>s}}\frac{\partial G(t,s)}{\partial t} \qquad\qquad \frac{\partial G(s^-,s)}{\partial t}=\lim_{\substack{t\longrightarrow s\\ t<s}}\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}.$$

Observação 1.1 G *é simétrica, isto é,* $G(t,s)=G(s,t)$.

Capítulo 2

Problemas de valor de contorno em dois pontos

Neste capítulo propomos mostrar como as funções de Green atuam nas soluções de equações diferenciais ordinárias sujeitas a certas condições de contorno.

2.1 Problemas lineares

Como vimos na introdução, a solução do problema não homogêneo foi dada na forma de uma integral usando a função de Green. No teorema a seguir veremos sob quais condições é possível encontrar a solução na forma integral e quando existe a função de Green.

Teorema 2.1 *Se o problema homogêneo* (1.4)-(1.3) *tiver somente a solução trivial, então*

(*i*) *Existe uma única função de Green para o problema* (1.4)-(1.3).

(*ii*) *O problema* (1.1)-(1.3) *tem solução única* $y(t)$ *que pode ser representada por*

$$y(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds, \tag{2.1}$$

onde $G(t,s)$ *é a função de Green do item* (*i*).

Demonstração. (i) Sejam y_1, y_2 duas soluções de (1.4), satisfazendo

$$l_1[y_1] = 0 \ \text{ e } \ l_2[y_2] = 0.$$

Afirmação: y_1 e y_2 são linearmente independentes.

De fato, se y_1 e y_2 fossem linearmente dependentes então existiria uma constante c não nula, tal que $y_1 = cy_2$. Assim, temos por um lado

$$l_1[y_1] = 0$$

e por outro lado

$$l_2[y_1] = cl_2[y_2] = 0.$$

Isto contradiz a hipótese de que (1.4)-(1.3) tem somente solução trivial.

Sejam $c_1, c_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, funções contínuas. Definamos $G : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$G(t, s) = \begin{cases} c_1(s)y_1(t), & \text{para} \quad a \leq t \leq s \\ c_2(s)y_2(t), & \text{para} \quad s \leq t \leq b, \end{cases} \tag{2.2}$$

à qual vamos impor as seguintes condições:

a) Quando $t = s$

$$c_1(s)y_1(s) = c_2(s)y_2(s). \tag{2.3}$$

Esta condição nos assegura a continuidade da função G em todo o domínio $[a, b] \times [a, b]$.

b) G tem uma descontinuidade de salto $\frac{1}{p(s)}$ na primeira derivada quando avaliada em $t = s$, logo

$$\left.\frac{\partial G(t, s)}{\partial t}\right|_{t=s^-}^{t=s^+} = c_2(s)\dot{y}_2(s) - c_1(s)\dot{y}_1(s) = \frac{1}{p(s)}. \tag{2.4}$$

Para completar as 4 propriedades que caracterizam G como uma função de Green devemos verificar se G satisfaz a equação (1.4) e as condições de contorno (1.3).

Denotemos $G_1(t, s) = c_1(s)y_1(t)$ e $G_2(t, s) = c_2(s)y_2(t)$.

Para $s \in [a, b]$ fixo segue que

$$\frac{\partial G_1}{\partial t}(t, s) = c_1(s)\dot{y}_1(t)$$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2}(t, s) = c_1(s)\ddot{y}_1(t).$$

Logo,

$$p(t)\frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2}(t,s) + q(t)\frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s) + r(t)G_1(t,s) = c_1(s)\left[p(t)\ddot{y}_1 + q(t)\dot{y}_1 + r(t)y_1\right] = 0.$$

Analogamente, verifica-se que G_2 satisfaz a equação (1.4). Como s é arbitrário, $G(t,s)$ define uma solução de (1.4).

Fixando novamente um $s \in [a,b]$

$$\begin{aligned} l_1[G_1] &= l_1[c_1 y_1] = c_1(s) l_1[y_1] = 0 \\ l_2[G_2] &= l_2[c_2 y_2] = c_2(s) l_2[y_2] = 0. \end{aligned}$$

Como s é arbitrário, $G(t,s)$ satisfaz as condições de contorno (1.3). Portanto existe função de Green para o problema (1.4)-(1.3).

Afirmação: A função de Green é única.

De fato, das igualdades (2.3) e (2.4) temos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} -c_1(s)y_1(s) + c_2(s)y_2(s) &= 0 \\ -c_1(s)\dot{y}_1(s) + c_2(s)\dot{y}_2(s) &= \frac{1}{p(s)}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Como $W(y_1, y_2; s) \neq 0$[1] para todo $s \in [a,b]$, pois y_1 e y_2 são linearmente independentes. Logo pelo Teorema 1.2 o sistema (2.5) tem solução única, isto é, G é unicamente determinada por c_1 e c_2. Portanto a função e Green para o problema (1.4)-(1.3) existe e é única. □

(*ii*) Pelo Teorema 1.4, o problema (1.1)-(1.3) tem solução única. Seja $G(t,s)$ a função de Green do problema de valor de contorno (1.4)-(1.3).

A função dada por

$$y(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds \tag{2.6}$$

é a solução do problema (1.1)-(1.3). De fato, podemos escrever

$$y(t) = \int_a^t G_1(t,s)f(s)ds + \int_t^b G_2(t,s)f(s)ds.$$

[1]Wronskiano de y_1 e y_2 em s

Como G é contínua e sua derivada é contínua em cada um dos triângulos $a \leq s \leq t \leq b$ e $a \leq t \leq s \leq b$, pelo Corolário 1.1

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \int_a^t \frac{\partial G_1(t,s)}{\partial t} f(s)ds + G_1(t,t)f(t) + \int_t^b \frac{\partial G_2(t,s)}{\partial t} f(s)ds - G_2(t,t)f(t) \\ &= \int_a^t \frac{\partial G_1(t,s)}{\partial t} f(s)ds + \int_t^b \frac{\partial G_2(t,s)}{\partial t} f(s)ds + [G_1(t,t) - G_2(t,t)]f(t).\end{aligned}$$

Da equação (2.3), segue que $G_1(t,t) = G_2(t,t)$, logo

$$\dot{y}(t) = \int_a^t \frac{\partial G_1(t,s)}{\partial t} f(s)ds + \int_t^b \frac{\partial G_2(t,s)}{\partial t} f(s)ds. \tag{2.7}$$

Mais uma vez usando a regra de Leibniz obtemos

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t) = &\int_a^t \frac{\partial^2 G_1(t,s)}{\partial t} f(s)ds + \frac{\partial G_1(t,t^-)}{\partial t} f(t) \\ &+ \int_t^b \frac{\partial^2 G_2(t,s)}{\partial t} f(s)ds - \frac{\partial G_2(t,t^+)}{\partial t} f(t).\end{aligned}$$

Por $G(t,s)$ ser simétrica podemos concluir que

$$\frac{\partial G_1(t,t^-)}{\partial t} = \frac{\partial G_2(t^+,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial G_2(t,t^+)}{\partial t} = \frac{\partial G_1(t^-,t)}{\partial t}.$$

Pela propriedade (iv) das funções de Green

$$\frac{\partial G_2(t^+,t)}{\partial t} - \frac{\partial G_1(t^-,t)}{\partial t} = \frac{1}{p(t)}.$$

Logo

$$\ddot{y}(t) = \frac{f(t)}{p(t)} + \int_a^t \frac{\partial^2 G_1(t,s)}{\partial t} f(s)ds + \int_t^b \frac{\partial^2 G_2(t,s)}{\partial t} f(s)ds. \tag{2.8}$$

Substituindo (2.6), (2.7) e (2.8) em (1.1) temos

$$\begin{aligned}
p(t)\ddot{y}+q(t)\dot{y}+r(t)y &= p(t)\left[\frac{f(t)}{p(t)}+\int_a^t \frac{\partial^2 G_1(t,s)}{\partial t}f(s)ds+\int_t^b \frac{\partial^2 G_2(t,s)}{\partial t}f(s)ds\right]\\
&\quad + q(t)\left[\int_a^t \frac{\partial G_1(t,s)}{\partial t}f(s)ds+\int_t^b \frac{\partial G_2(t,s)}{\partial t}f(s)ds\right]\\
&\quad + r(t)\left[\int_a^t G_1(t,s)f(s)ds+\int_t^b G_2(t,s)f(s)ds\right]\\
&= f(t)+\int_a^t \left[p(t)\frac{\partial^2 G_1(t,s)}{\partial t}+q(t)\frac{\partial G_1(t,s)}{\partial t}+r(t)G_1(t,s)\right]f(s)ds\\
&\quad + \int_t^b \left[p(t)\frac{\partial^2 G_2(t,s)}{\partial t}+q(t)\frac{\partial G_2(t,s)}{\partial t}+r(t)G_2(t,s)\right]f(s)ds\\
&= f(t).
\end{aligned}$$

A função (2.1) satisfaz as condições (1.3). De fato

$$y(a)=\int_a^b G(a,s)f(s)ds \qquad y(b)=\int_a^b G(b,s)f(s)ds$$

$$\dot{y}(a)=\int_a^b G_t(a,s)f(s)ds \qquad \dot{y}(b)=\int_a^b G_t(b,s)f(s)ds,$$

logo

$$\begin{aligned}
l_1[y] &= a_0y(a)+a_1\dot{y}(a)+b_0y(b)+b_1\dot{y}(b)\\
&= \int_a^b [a_0G(a,s)+a_1G_t(a,s)+b_0G(b,s)+b_1G_t(b,s)]f(s)ds\\
&= \int_a^b l_1[G(t,s)]f(s)ds\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_2[y] &= c_0y(a)+c_1\dot{y}(a)+d_0y(b)+d_1\dot{y}(b)\\
&= \int_a^b [c_0G(a,s)+c_1G_t(a,s)+d_0G(b,s)+d_1G_t(b,s)]f(s)ds\\
&= \int_a^b l_2[G(t,s)]f(s)ds\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto a função y dada em (2.1) é a solução do problema (1.1)-(1.3). □

Corolário 2.1 *Seja $y_1(t)$ solução de* (1.4)-(1.2)*. Se o problema* (1.4)-(1.3) *tiver somente a solução trivial então a solução de* (1.1)-(1.2) *pode ser representada por*

$$y(t) = y_1(t) + \int_a^b G(t,s)f(s)ds$$

Demonstração. Aplicação direta dos Teoremas 2.1 e 1.1. □

Quando a função de Green existe para um certo problema homogêneo, esta será a mesma para um problema não homogêneo associado. Quando o problema homogêneo tiver pelo menos uma solução não trivial, então não existirá função de Green para o problema homogêneo, mas é possível encontrar a função de Green para o problema não homogêneo associado, neste caso chamamos de função de Green generalizada. Mais informações sobre funções de Green generalizada podem ser encontradas em [6] [12].

Observe que resolvendo o sistema (2.5) temos

$$c_1(s) = \frac{y_2(s)}{p(s)W(y_1,y_2;s)} \quad e \quad c_2(s) = \frac{y_1(s)}{p(s)W(y_1,y_2;s)}. \tag{2.9}$$

Substituindo (2.9) em (2.2) obtemos uma fórmula explícita da função de Green para problemas do tipo (1.4)-(1.3)

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{y_1(t)y_2(s)}{p(s)W(y_1,y_2;s)}, & \text{para} \quad a \le t \le s \\ \\ \dfrac{y_2(t)y_1(s)}{p(s)W(y_1,y_2;s)}, & \text{para} \quad s \le t \le b. \end{cases} \tag{2.10}$$

A construção da função de Green depende somente das condições de contorno e da equação homogênea do problema estudado. Nos exemplos a seguir podemos ver que diferenças nas condições de contorno ou na equação homogênea rendem funções de Green diferentes.

Exemplo 2.1 *A função de Green do problema*

$$\begin{cases} \ddot{y} + f(t) = 0 \\ y(0) = 0 \quad y(1) = 0, \end{cases} \tag{2.11}$$

é

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \le t \le s \\ s(1-t), & s \le t \le 1. \end{cases} \tag{2.12}$$

Neste caso devemos considerar a equação homogênea $-\ddot{y} = 0$*, pois para o cálculo das funções de Green não fazemos uso do termo não homogêneo* $f(t)$*, logo o sinal negativo deve ser agregado à equação homogênea e não ao termo não homogêneo. Observe que calculando a função de Green pela fórmula dada em* (2.10) *temos os seguintes dados para o problema* (2.11)*:*

$$p(s) = -1, \quad W(y_1, y_2; s) = 1, \quad y_1(t) = t \quad e \quad y_2(t) = t - 1,$$

com esses dados chegamos na função de Green obtida em (2.12)*.*

Já o problema

$$\begin{cases} \ddot{y} - f(t) = 0 \\ y(0) = 0 \quad y(1) = 0, \end{cases} \tag{2.13}$$

tem a seguinte função de Green

$$G(t,s) = \begin{cases} t(s-1), & 0 \leq t \leq s \\ s(t-1), & s \leq t \leq 1, \end{cases}$$

pois os dados do problema (2.13) *são*

$$p(s) = 1, \quad W(y_1, y_2; s) = 1, \quad y_1(t) = t \quad e \quad y_2(t) = t - 1.$$

Exemplo 2.2 *A única solução do problema* (1.11) *é dada por*

$$y(t) = \int_a^b B(t,s) f(s) ds, \tag{2.14}$$

onde

$$B(t,s) = \begin{cases} t - a & a \leq t \leq s \\ s - a & s \leq t \leq b, \end{cases} \tag{2.15}$$

é a função de Green para o problema (1.11)*.*

De fato, foi provado no Exemplo 1.1 *que o problema* (1.12) *tem somente a solução trivial. Logo, pelo Teorema* 2.1 *existe uma única função de Green para* (1.12)*. Vamos construir a função de Green de acordo com a demonstração do referido Teorema.*

A solução $y_1(t)$ deve satisfazer a condição $l_1[y] = y(a) = 0$ e $y_2(t)$ a condição $l_2[y] = \dot{y}(b) = 0$, logo

$$y_1(t) = t - a \qquad e \qquad y_2(t) = 1.$$

Como $p(s) = -1$ e $W(y_1, y_2; s) = -1$, substituindo esses dados em (2.10) encontramos a função de Green (2.15). Pelo item (ii) do Teorema 2.1, o problema (1.12) tem solução única dada por (2.14).

Exemplo 2.3 *O problema de valor de contorno*

$$\begin{cases} \ddot{y} + f(t) = 0 \\ \dot{y}(a) = 0 \qquad y(b) = 0, \end{cases} \tag{2.16}$$

tem solução única dada por

$$y(t) = \int_a^b H(t,s) f(s) ds, \tag{2.17}$$

onde

$$H(t,s) = \begin{cases} b - s & a \leq t \leq s \\ b - t & s \leq t \leq b, \end{cases} \tag{2.18}$$

é a função de Green para o problema (2.16).

De fato, a solução $y_1(t)$ deve satisfazer a condição $l_1[y] = \dot{y}(a) = 0$ e $y_2(t)$ a condição $l_2[y] = y(b) = 0$, logo

$$y_1(t) = 1 \qquad e \qquad y_2(t) = t - b.$$

Como $p(s) = -1$ e $W(y_1, y_2; s) = 1$, substituindo esses dados em (2.10) encontramos a função de Green (2.18). Pelo item (ii) do Teorema 2.1, o problema (2.16) tem solução única dada por (2.17).

Exemplo 2.4 *Considere o seguinte problema de valor de contorno:*

$$\ddot{y} + \frac{2t}{1+t^2}\dot{y} = \frac{1}{(1+t^2)^2} \tag{2.19}$$

$$\begin{cases} l_1[y] = y(0) + \dot{y}(0) = 0 \\ l_2[y] = 2y(1) + \dot{y}(1) = 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

A função

$$y(t) = A\arctan(t) + B, \qquad A, B \quad \textit{constantes} \tag{2.21}$$

é a solução geral da equação homogênea

$$\ddot{y} + \frac{2t}{1+t^2}\dot{y} = 0. \tag{2.22}$$

Aplicando as condições de contorno (2.20) *em* (2.21) *obtemos o seguinte sistema*

$$\begin{cases} A\arctan(0) + B + A = 0 \\ \\ 2(A\dfrac{\pi}{4} + B) + \dfrac{A}{2} = 0, \end{cases}$$

cuja única solução é $A = B = 0$. *Portanto o problema* (2.22)-(2.20) *possui somente a solução trivial e pelo Teorema 2.1, existe uma única função de Green para este problema.*

Desejamos encontrar y_1 *e* y_2, *soluções linearmente independentes de* (2.21) *tais que* $l_1[y_1] = 0$ *e* $l_2[y_2] = 0$.

$$\begin{aligned} l_1[y_1] &= y_1(0) + \dot{y}_1(0) = 0 \\ &= A\arctan(0) + B + A = 0 \\ A &= -B. \end{aligned}$$

Logo, qualquer solução da forma

$$y_1 = A\arctan(t) - A$$

satisfaz $l_1[y_1]$. *Para* $A = 1$ *temos*

$$y_1(t) = \arctan(t) - 1. \tag{2.23}$$

Analogamente encontramos

$$y_2(t) = \arctan(t) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}. \tag{2.24}$$

Segundo (2.10) *a função de Green tem a seguinte forma:*

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(\arctan(t)-1)\left(\arctan(s)-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{4}\right)}{\dfrac{1}{1+s^2}\left[\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{3}{4}\right]}, & \textit{para} \quad 0 \le t \le s \\ \\ \dfrac{(\arctan(s)-1)\left(\arctan(t)-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{4}\right)}{\dfrac{1}{1+s^2}\left[\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{3}{4}\right]}, & \textit{para} \quad s \le t \le 1 \end{cases}$$

ou na forma simplificada

$$G(t,s) = \frac{4(1+s^2)}{4\frac{\pi}{4}-3} \begin{cases} (\arctan(t)-1)\left(\arctan(s)-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{4}\right), & 0 \le t \le s \\ \\ (\arctan(s)-1)\left(\arctan(t)-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{4}\right), & s \le t \le 1. \end{cases}$$

Pelo item (*ii*) *do Teorema* 2.1 *a solução do problema* (2.19)-(2.20) *possui a seguinte forma*

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^1 G(t,s)f(s)ds \\ &= \frac{4}{4\frac{\pi}{4}-3}\left[\int_0^t (1+s^2)(\arctan(s)-1)\left(\arctan(t)-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{(1+s^2)^2}ds\right. \\ &\qquad \left. + \int_t^1 (1+s^2)(\arctan(t)-1)\left(\arctan(s)-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{(1+s^2)^2}dt\right] \\ &= \frac{4}{4\frac{\pi}{4}-3}\left[\left(\arctan(t)-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\right)\int_0^t (\arctan(s)-1)\frac{1}{1+s^2}ds\right. \\ &+ \left.(\arctan(t)-1)\int_t^1 \left(\arctan(s)-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{1+s^2}ds\right] \\ &= \frac{4}{4\frac{\pi}{4}-3}\left[\frac{\frac{\pi}{4}\arctan^2(t)}{2} - \frac{3\arctan^2(t)}{8} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2} + \frac{\frac{\pi}{4}}{4} - \frac{\arctan(t)\frac{\pi}{4}^2}{2} - \frac{\arctan(t)\frac{\pi}{4}}{4}\right] \\ &= \frac{1}{8\frac{\pi}{4}-6}\left[4\frac{\pi}{4}\arctan^2(t) - 3\arctan^2(t) + 4\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + 2\frac{\pi}{4} - 4\arctan(t)\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right. \\ &\qquad \left. -2\arctan(t)\frac{\pi}{4}\right]. \end{aligned}$$

cujo gráfico pode ser visto na figura abaixo.

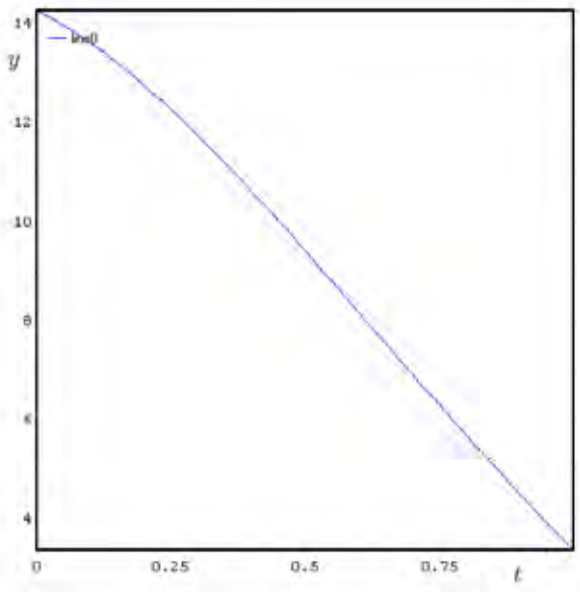

Figura 2.1: Gráfico de $y(t)$, $0 \leq t \leq 1$.

2.2 Problemas não lineares

Nesta seção desejamos resolver a seguinte equação

$$\ddot{y} + f(t, y) = 0. \tag{2.25}$$

com certas condições de contorno e $f : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.

Suponhamos que a equação (2.25) tem solução, integrando esta de 0 a t temos

$$\int_0^t \ddot{y}(s)ds = -\int_0^t f(s, y(s))ds$$

$$\dot{y}(t) - \dot{y}(0) = -\int_0^t f(s, y(s))ds,$$

chamando $\dot{y}(0) = c_2$ e integrando mais uma vez obtemos

$$\int_0^t \dot{y}(s)ds = \int_0^t \left[c_2 - \int_0^s f(\tau, y(\tau))d\tau\right] ds$$

$$y(t) - y(0) = tc_2 - \int_0^t \int_0^s f(\tau, y(\tau))d\tau ds,$$

se $y(0) = c_1$ temos

$$y(t) = c_1 + tc_2 - \int_0^t \int_0^s f(\tau, y(\tau))d\tau ds. \tag{2.26}$$

Chame $K(s) = \int_0^s f(\tau, y(\tau))d\tau$, assim

$$\int_0^t \int_0^s f(\tau, y(\tau))d\tau ds = \int_0^t K(s)ds. \tag{2.27}$$

Vamos usar o método da integração por partes em (2.27) com as seguintes mudanças de variáveis:

$$\begin{aligned} u &= K(s), & du &= f(s, y(s))ds, \\ dv &= ds, & v &= s, \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} \int_0^t K(s)ds &= \Big[sK(s) - \int sf(s, y(s))ds\Big]_0^t \\ &= tK(t) - \int_0^t sf(s, y(s))ds \\ &= \int_0^t tf(s, y(s))ds - \int_0^t sf(s, y(s))ds \\ &= \int_0^t (t-s)f(s, y(s))ds. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Substituindo (2.28) em (2.26) concluímos que, uma solução $y(t)$ de (2.25) tem a seguinte forma

$$y(t) = c_1 + tc_2 - \int_0^t (t-s)f(s, y(s))ds. \tag{2.29}$$

Condições de Contorno: Vamos supor que a equação (2.25) satisfaz as seguintes condições de contorno:

$$y(a) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{y}(b) = 0. \tag{2.30}$$

Logo temos

$$\begin{aligned} y(a) = c_1 + ac_2 - \int_0^a (a-s)f(s, y(s))ds &= 0 \\ c_1 = \int_0^a (a-s)f(s, y(s))ds - ac_2. & \\ \dot{y}(b) = c_2 - \frac{d}{dt}\left[\int_0^t (t-s)f(s, y(s))ds\right]_{t=b} &= 0 \\ c_2 = \int_0^b f(s, y(s))ds. & \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
y(t) &= c_1 + tc_2 - \int_0^t (t-s)f(s,y(s))ds \\
&= \int_0^a (a-s)f(s,y(s))ds - a\int_0^b f(s,y(s))ds + t\int_0^b f(s,y(s))ds \\
&\quad - \int_0^t (t-s)f(s,y(s))ds \\
&= \int_0^a (a-s)f(s,y(s))ds + \int_0^b (t-a)f(s,y(s))ds - \int_0^t (t-s)f(s,y(s))ds \\
&= \int_0^t (a-s)f(s,y(s))ds + \int_t^a (a-s)f(s,y(s))ds + \int_0^t (t-a)f(s,y(s))ds \\
&\quad + \int_t^b (t-a)f(s,y(s))ds - \int_0^t (t-s)f(s,y(s))ds \\
&= \int_0^t (a-s+t-a-t+s)f(s,y(s))ds + \int_t^a (a-s)f(s,y(s))ds \\
&\quad + \int_t^b (t-a)f(s,y(s))ds \\
&= \int_a^t (s-a)f(s,y(s))ds + \int_t^b (t-a)f(s,y(s))ds.
\end{aligned}$$

Definindo $B : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ onde

$$B(t,s) = \begin{cases} s-a & a \leq s \leq t \\ t-a & t \leq s \leq b. \end{cases} \tag{2.31}$$

segue que

$$y(t) = \int_a^b B(t,s)f(s,y(s))ds. \tag{2.32}$$

Por outro lado, se

$$y(t) = \int_a^t (s-a)f(s,y(s))ds + \int_t^b (t-a)f(s,y(s))ds$$

então

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= \frac{d}{dt}\left[\int_a^t (s-a)f(s,y(s))ds\right] + \frac{d}{dt}\left[\int_t^b (t-a)f(s,y(s))ds\right] \\
&= \int_a^t \frac{\partial}{\partial t}(s-a)f(s,y(s))ds + (t-a)f(t,y(t)) \\
&\quad + \int_t^b \frac{\partial}{\partial t}(t-a)f(s,y(s))ds - (t-a)f(t,y(t)) \\
&= \int_t^b f(s,y(s))ds,
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t) &= \frac{d}{dt}\left[\int_t^b f(s,y(s))ds\right] \\ &= \int_t^b \frac{\partial}{\partial t} f(s,y(s))ds - f(t,y(t)) \\ &= -f(t,y(t)).\end{aligned}$$

Os argumentos acima provam o seguinte resultado:

Teorema 2.2 *Se $f : [a,b]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função não linear e contínua então a solução do problema de valor de contorno*

$$\begin{cases} \ddot{y} + f(t,y) = 0 \\ y(a) = 0 \qquad\qquad \dot{y}(b) = 0 \end{cases} \tag{2.33}$$

é equivalente a solução da equação integral

$$y(t) = \int_a^b B(t,s) f(s,y(s))ds. \tag{2.34}$$

Teorema 2.3 *Se $f : [a,b]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função não linear e contínua então a solução do problema de valor de contorno*

$$\begin{cases} \ddot{y} + f(t,y) = 0 \\ \dot{y}(a) = 0 \qquad\qquad y(b) = 0 \end{cases} \tag{2.35}$$

é equivalente a solução da equação integral

$$y(t) = \int_a^b H(t,s) f(s,y(s))ds, \tag{2.36}$$

onde

$$H(x,t) = \begin{cases} b-x & a \le t \le x \\ b-t & x \le t \le b. \end{cases} \tag{2.37}$$

Demonstração. Aplicando as condições de contorno do problema (2.35) em (2.29) temos

$$\dot{y}(a) = c_2 - \frac{d}{dt}\left[\int_0^t (t-s) f(s,y(s))ds\right]_{t=a} = 0.$$

Disto segue que $c_2 = \int_0^a f(s, y(s))ds$. Por outro lado

$$y(b) = c_1 + bc_2 - \int_0^b (b-s)f(s, y(s))ds = 0.$$

Assim $c_1 = \int_0^b (b-s)f(s, y(s))ds - bc_2$. Então

$$\begin{aligned}
y(t) &= c_1 + tc_2 - \int_0^t (t-s)f(s, y(s))ds \\
&= \int_0^b (b-s)f(s, y(s))ds - b\int_0^a f(s, y(s))ds + t\int_0^a f(s, y(s))ds - \int_0^t (t-s)f(s, y(s))ds \\
&= \int_0^b (b-s)f(s, y(s))ds + \int_0^a (t-b)f(s, y(s))ds - \int_0^t (t-s)f(s, y(s))ds \\
&= \int_0^t (b-s)f(s, y(s))ds + \int_t^b (b-s)f(s, y(s))ds + \int_0^t (t-b)f(s, y(s))ds \\
&\quad + \int_t^a (t-b)f(s, y(s))ds - \int_0^t (t-s)f(s, y(s))ds \\
&= \int_0^t (b-s+t-b-t+s)f(s, y(s))ds + \int_t^a (t-b)f(s, y(s))ds + \int_t^b (b-s)f(s, y(s))ds \\
&= \int_a^t (b-t)f(s, y(s))ds + \int_t^b (b-s)f(s, y(s))ds.
\end{aligned}$$

Basta definir H como em (2.37) para obter (2.36).

Por outro lado, se

$$y(t) = \int_a^t (b-t)f(s, y(s))ds + \int_t^b (b-s)f(s, y(s))ds,$$

então

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= \int_a^t \frac{\partial}{\partial t}(b-t)f(s, y(s))ds + (b-t)f(t, y(t)) \\
&\quad + \int_t^b \frac{\partial}{\partial t}(b-s)f(s, y(s))ds - (b-t)f(t, y(t)) \\
&= -\int_a^t f(s, y(s))ds,
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
\ddot{y}(t) &= -\int_a^t \frac{\partial}{\partial t} f(s, y(s))ds + f(t, y(t)) \\
&= -f(t, y(t)).
\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Problemas de valor de contorno em três pontos

3.1 Problemas lineares

Fenômenos físicos como o movimento de uma partícula, o deslocamento de uma corda sob ação de uma carga, distribuição constante de calor em uma barra homogênea são exemplos de problemas que, com condições apropriadas, podem ter como equação governante

$$\ddot{y} + f(t) = 0, \tag{3.1}$$

onde $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Norteados pelos artigos [15] e [11] estudamos, via funções de Green, soluções de (3.1) acoplada com 8 diferentes tipos de condições de contorno avaliados em 3 pontos.

Para os teoremas desta seção considere $t \in [a, b]$, $a < \eta < b$ e k é uma constante real.

3.1.1 Abordagem axiomática

Até o presente momento, as funções de Green tem sido entendida como um certo conjunto de axiomas. Quando tratamos de problemas de valor de contorno com equações de alta ordem, a lista de axiomas da função de Green acompanha a ordem do problema.

Por exemplo a função de Green de um problema que tem como equação

$$-\frac{d^n y}{dt^n} = f(t), \quad n \geq 2$$

deve ser contínua até a n-ésima ordem e ter a $n-1$-ésima derivada descontínua em $t = s$. Vamos investigar nesta subseção se a Definição 1.5 se aplica a problemas de valor de contorno avaliados em 3 pontos.

Teorema 3.1 *Se $k(\eta - a) \neq 1$, então o problema de valor de contorno*

$$\begin{cases} \ddot{y} + f(t) = 0 \\ y(a) = 0 \quad \dot{y}(b) = ky(\eta), \end{cases} \tag{3.2}$$

tem solução única dada por

$$w(t) = \int_a^b G_1(t,s) f(s) ds \tag{3.3}$$

onde

$$G_1(t,s) = B(t,s) + \frac{k(t-a)}{1-k(\eta-a)} B(\eta,s) \tag{3.4}$$

e $B(t,s)$ como no Exemplo 2.2.

Demonstração. Seja y a solução do problema (1.11). Suponha que $w(t)$ é a solução de (3.2). Então temos a seguinte relação:

$$-\ddot{w} = f(t) = -\ddot{y}. \tag{3.5}$$

Disto segue que

$$w(t) = y(t) + c + dt, \quad c, d \text{ constantes.} \tag{3.6}$$

Sabemos que a solução única de (1.11) é dada por

$$y(t) = \int_a^b B(t,s) f(s) ds,$$

e ainda

$$\begin{aligned} y(a) &= \dot{y}(b) = 0 \\ y(\eta) &= \int_a^b B(\eta,s) f(s) ds. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Logo,

$$\begin{aligned} w(a) &= c + da + y(a) = c + da = 0 \\ \dot{w}(b) &= d + \dot{y}(b) = kw(\eta) \\ w(\eta) &= c + \eta d + y(\eta). \end{aligned} \tag{3.8}$$

De (3.8) temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} c + da = 0 \\ d = k(c + \eta d + y(\eta)). \end{cases}$$

Do sistema acima temos

$$c = -\frac{aky(\eta)}{1 - k(\eta - a)} \quad \text{e} \quad d = \frac{ky(\eta)}{1 - k(\eta - a)}.$$

Substituindo c e d em (3.6)

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_a^b B(t,s)f(s)ds - \frac{aky(\eta)}{1 - k(\eta - a)} + t\frac{ky(\eta)}{1 - k(\eta - a)} \\ &= \int_a^b B(t,s)f(s)ds - \frac{k(t-a)}{1 - k(\eta - a)}y(\eta) \\ &= \int_a^b \left[B(t,s) - \frac{k(t-a)}{1 - k(\eta - a)}B(\eta,s)\right] f(s)ds. \end{aligned}$$

Definindo $G_1 : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$G_1(t,s) = B(t,s) + \frac{k(t-a)}{1 - k(\eta - a)}B(\eta,s)$$

temos a solução (3.3). □

Observação 3.1 *$G_1(t,s)$ possui as seguintes propriedades:*

(i) G_1 é contínua em todo domínio $[a,b] \times [a,b]$. De fato, B é uma função de Green e por definição é contínua em todo domínio $[a,b] \times [a,b]$. Com a restrição $k(\eta - a) \neq 1$, $\dfrac{k(t-a)}{1 - k(\eta - a)}$ é uma função bem definida e contínua.

(ii) G_1 satisfaz a equação homogênea $-\ddot{y} = 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}G_1(t,s) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}B(t,s) = 0.$$

(iii) G_1 *satisfaz as condições de contorno de* (3.2)*. De fato,*

$$G_1(a,s) = B(a,s) + \frac{k(a-a)}{1-k(\eta-a)}B(\eta,s) = 0$$

$$\dot{G}_1(b,s) = \dot{B}(b,s) + \frac{k}{k(\eta-a)}B(\eta,s)$$

como $G(\eta,s) = \dfrac{1}{k(\eta-a)}B(\eta,s)$ *e* $\dot{B}(b,s) = 0$ *temos*

$$\dot{G}_1(b,s) = kG_1(\eta,s).$$

(iv) A primeira derivada de G_1 *em* $t = s$ *é descontínua e tem salto -1. De fato,*

$$\frac{\partial}{\partial t}G_1(t,s)\Big|_{t=s^-}^{t=s^+} = \frac{\partial}{\partial t}B(t,s)\Big|_{t=s^-}^{t=s^+} + \frac{kB(\eta,s)}{1-k(\eta-a)}\left(\frac{\partial}{\partial t}(t-a)\Big|_{t=s^-}^{t=s^+}\right) = -1.$$

Tome $\xi = \min\{\eta,t\}$ *e* $\zeta = \max\{\eta,t\}$*,* G_1 *pode ser escrita como*

$$G_1(t,s) = \begin{cases} (s-a)\left(1+\dfrac{k(t-a)}{1-k(\eta-a)}\right) & a \le s \le \xi \\ \\ \begin{cases} Se \quad \xi = \eta \\ (s-a) + \dfrac{k(t-a)}{1-k(\eta-a)}(\eta-a) & \eta \le s \le t \end{cases} \\ \\ \begin{cases} Se \quad \xi = t \\ (t-a) + \dfrac{k(t-a)}{1-k(\eta-a)}(s-a) & t \le s \le \eta \end{cases} \\ \\ (t-a) + \dfrac{k(t-a)}{1-k(\eta-a)}(\eta-a) & \zeta \le s \le b. \end{cases}$$

Exemplo 3.1 *Considere o seguinte problema*

$$\begin{cases} \ddot{y} + \cos(t) = 0 \qquad t \in [0,1] \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(1) = -\dfrac{3}{2}y\left(\dfrac{1}{3}\right). \end{cases} \tag{3.9}$$

Neste problema temos $a = 0$*,* $b = 1$*,* $k = -\frac{3}{2}$*,* $\eta = \frac{1}{3}$ *e* $f(t) = \cos(t)$ *e como*

$$-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} - 0\right) = -\frac{1}{2} \neq 1,$$

pelo Teorema 3.1, o problema (3.9) *tem solução única dada por*

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_a^b B(t,s)f(s)ds + \frac{k(t-a)}{1-k(\eta-a)}\int_a^b B(\eta,s)f(s)ds \\ &= \int_0^1 B(t,s)\cos(s)ds - t\int_0^1 B\left(\frac{1}{3},s\right)\cos(s)ds \\ &= \int_0^t s\cos(s)ds + \int_t^1 t\cos(s)ds - t\left(\int_0^{\frac{1}{3}} s\cos(s)ds + \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{3}\cos(s)ds\right) \\ &= \frac{2}{3}t\sin(1) - t\cos\left(\frac{1}{3}\right) + t + \cos(t) - 1, \end{aligned} \tag{3.10}$$

cujo gráfico pode ser visto na Figura 3.1.

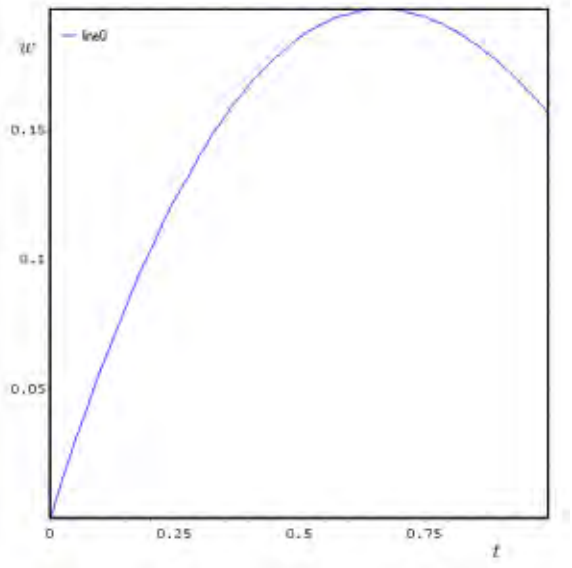

Figura 3.1: Gráfico de $w(t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Teorema 3.2 *Se $k \neq 1$, então o problema de valor de contorno*

$$\begin{cases} \ddot{y} + f(t) = 0 \\ y(a) = ky(\eta) \quad \dot{y}(b) = 0, \end{cases} \tag{3.11}$$

tem solução única dada por

$$w(t) = \int_a^b G_2(t,s)f(s)ds \tag{3.12}$$

onde

$$G_2(t,s) = B(t,s) + \frac{k}{1-k}B(\eta,s) \tag{3.13}$$

e $B(t,s)$ *como no Exemplo* 2.2.

Demonstração. Seguindo o mesmo raciocínio feito na demonstração do Teorema 3.1 e usando as condições de contorno de (3.11) em (3.6) e usando (3.7) obtemos

$$\begin{aligned} w(a) &= c + da + y(a) = c + da = kw(\eta) \\ \dot{w}(b) &= d + \dot{y}(b) = 0 \\ w(\eta) &= c + d\eta + y(\eta). \end{aligned} \tag{3.14}$$

De (3.14) concluímos que

$$c = \frac{ky(\eta)}{1-k} \quad \text{e} \quad d = 0.$$

Substituindo c e d em (3.6)

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_a^b B(t,s)f(s)ds + \frac{ky(\eta)}{1-k} \\ &= \int_a^b \left[B(t,s) + \frac{k}{1-k}B(\eta,s)\right] f(s)ds. \end{aligned}$$

Definindo $G_2 : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$G_2(t,s) = B(t,s) + \frac{k}{1-k}B(\eta,s)$$

temos a solução (3.12). □

Observação 3.2 $G_2(t,s)$ *possui as seguintes propriedades:*

(i) G_2 *é contínua em todo domínio* $[a,b] \times [a,b]$ *pelo fato de* B *ser uma função de Green e com a restrição* $k \neq 1$, $\dfrac{k}{1-k}$ *é uma constante bem definida.*

(ii) G_2 *satisfaz a equação homogênea* $-\ddot{y} = 0$*.(Imediato)*

(iii) G_2 *satisfaz as condições de contorno de* (3.11)*. De fato,*

$$G_2(a,s) = B(a,s) + \frac{k}{1-k}B(\eta,s)$$

como $G_2(\eta,s) = \dfrac{1}{1-k}B(\eta,s)$ *e* $B(a,s) = 0$ *temos*

$$G_2(a,s) = kG_2(\eta,s) \quad e$$

$$\dot{G}_2(b,s) = \dot{B}(b,s) = 0.$$

(iv) A primeira derivada de G_2 em $t = s$ é descontínua e tem salto -1. De fato,

$$\frac{\partial}{\partial t} G_2(t,s)\Big|_{t=s^-}^{t=s^+} = \frac{\partial}{\partial t} B(t,s)\Big|_{t=s^-}^{t=s^+} = -1.$$

Tome $\xi = \min\{\eta, t\}$ e $\zeta = \max\{\eta, t\}$, G_2 pode ser escrita como

$$G_2(t,s) = \begin{cases} (s-a)\left(1+\dfrac{k}{1-k}\right) & a \le s \le \xi \\ \begin{cases} Se \quad \xi = \eta \\ (s-a) + \dfrac{k}{1-k}(\eta - a) & \eta \le s \le t \\ \\ Se \quad \xi = t \\ (t-a) + \dfrac{k}{1-k}(s-a) & t \le s \le \eta \end{cases} & \\ \\ (t-a) + \dfrac{k}{1-k}(\eta - a) & \zeta \le s \le b. \end{cases}$$

Exemplo 3.2 *Considere o seguinte problema*

$$\begin{cases} \ddot{y} + \cos(t) = 0 & t \in [0,1] \\ y(0) = -\dfrac{3}{2} y\left(\dfrac{1}{3}\right) \\ \dot{y}(1) = 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Como $k = -\frac{3}{2} \neq 1$, pelo Teorema 3.2, o problema (3.15) tem solução única dada por

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_a^b B(t,s) f(s) ds + \frac{k}{1-k} \int_a^b B(\eta, s) f(s) ds \\ &= \int_0^1 B(t,s)\cos(s) ds - \frac{3}{5} \int_0^1 B\left(\frac{1}{3}, s\right)\cos(s) ds \\ &= \int_0^t s\cos(s) ds + \int_t^1 t\cos(s) ds - \frac{3}{5}\left(\int_0^{\frac{1}{3}} s\cos(s) ds + \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{3}\cos(s) ds\right) \\ &= \cos(t) + t\sin(1) - \frac{3}{5}\cos\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{5}\sin(1) - \frac{2}{5}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

cujo gráfico pode ser visto na Figura 3.2.

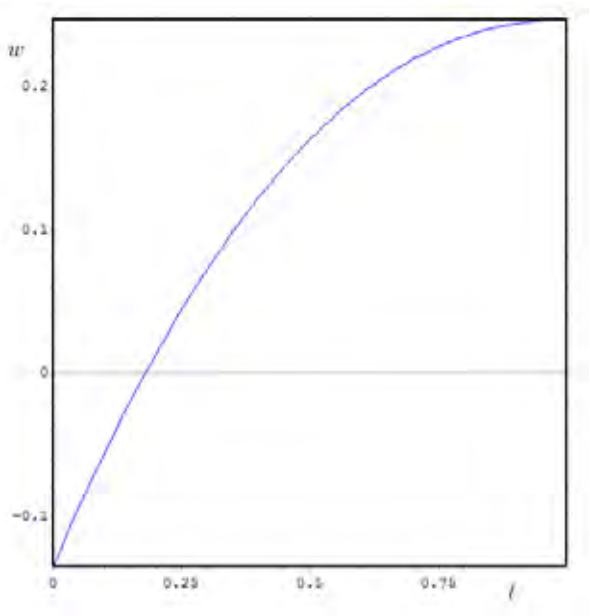

Figura 3.2: Gráfico de $w(t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Teorema 3.3 *Se $k \neq 1$, então o problema de valor de contorno*

$$\begin{cases} \ddot{y} + f(t) = 0 \\ \dot{y}(a) = 0 \quad y(b) = ky(\eta), \end{cases} \tag{3.17}$$

tem solução única dada por

$$w(t) = \int_a^b G_3(t,s) f(s) ds \tag{3.18}$$

onde

$$G_3(t,s) = H(t,s) + \frac{k}{1-k} H(\eta, s) \tag{3.19}$$

e $H(t,s)$ como no Exemplo 2.3.

Demonstração. Desde que $y(t)$ é solução de (2.16), então

$$\begin{aligned} &\dot{y}(a) = y(b) = 0, \\ &y(\eta) = \int_a^b H(\eta, s) f(s) ds. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Usando as condições de contorno de (3.17) em (3.6) e usando (3.20) obtemos

$$\begin{aligned} \dot{w}(a) &= d + \dot{y}(a) = 0 \\ w(b) &= c + db + y(b) = kw(\eta) \\ w(\eta) &= c + d\eta + y(\eta). \end{aligned} \tag{3.21}$$

De (3.21) concluímos que

$$c = \frac{ky(\eta)}{1-k} \quad \text{e} \quad d = 0.$$

Substituindo c e d em (3.6)

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_a^b H(t,s)f(s)ds + \frac{ky(\eta)}{1-k} \\ &= \int_a^b \left[H(t,s) + \frac{k}{1-k}H(\eta,s) \right] f(s)ds. \end{aligned}$$

Definindo $G_3 : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$G_3(t,s) = H(t,s) + \frac{k}{1-k}H(\eta,s)$$

temos a solução (3.18). □

Observação 3.3 *$G_3(t,s)$ possui as seguintes propriedades:*

(i) G_3 é contínua em todo domínio $[a,b] \times [a,b]$ pelo fato de H ser uma função de Green e com a restrição $k \neq 1$, $\dfrac{k}{1-k}$ é uma constante bem definida.

(ii) G_3 satisfaz a equação homogênea $-\ddot{y} = 0$.(Imediato)

(iii) G_3 satisfaz as condições de contorno de (3.17). De fato,

$$G_3(b,s) = H(b,s) + \frac{k}{1-k}H(\eta,s)$$

como $G_3(\eta,s) = \dfrac{1}{1-k}H(\eta,s)$ e $H(b,s) = 0$ temos

$$G_3(b,s) = kG_3(\eta,s) \quad e$$

$$\dot{G}_3(a,s) = \dot{H}(a,s) = 0.$$

(iv) A primeira derivada de G_3 em $t = s$ é descontínua e tem salto -1. De fato,

$$\frac{\partial}{\partial t}G_3(t,s)\Big|_{t=s^-}^{t=s^+} = \frac{\partial}{\partial t}H(t,s)\Big|_{t=s^-}^{t=s^+} = -1.$$

Tome $\xi = \min\{\eta, t\}$ *e* $\zeta = \max\{\eta, t\}$, G_3 *pode ser escrita como*

$$G_3(t,s) = \begin{cases} (b-t) + \dfrac{k}{1-k}(b-\eta) & a \leq s \leq \xi \\ \begin{cases} Se \quad \xi = \eta \\ (b-t) + \dfrac{k}{1-k}(b-s) & \eta \leq s \leq t \end{cases} & \\ \begin{cases} Se \quad \xi = t \\ (b-s) + \dfrac{k}{1-k}(b-\eta) & t \leq s \leq \eta \end{cases} & \\ (b-s)\left(1 + \dfrac{k}{1-k}\right) & \zeta \leq s \leq b. \end{cases}$$

Exemplo 3.3 *Considere o seguinte problema*

$$\begin{cases} \ddot{y} + \cos(t) = 0 \qquad t \in [0,1] \\ \dot{y}(0) = 0 \\ y(1) = -\dfrac{3}{2} y\left(\dfrac{1}{3}\right). \end{cases} \tag{3.22}$$

Como $k = -\frac{3}{2} \neq 1$, *pelo Teorema* 3.5, *o problema* (3.22) *tem solução única dada por*

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_a^b H(t,s) f(s) ds + \frac{k}{1-k} \int_a^b H(\eta, s) f(s) ds \\ &= \int_0^1 H(t,s)\cos(s) ds - \frac{3}{5} \int_0^1 H\left(\frac{1}{3}, s\right) \cos(s) ds \\ &= \int_0^t (1-t)\cos(s) ds + \int_t^1 (1-s)\cos(s) ds - \frac{3}{5}\left(\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{2}{3}\cos(s) ds + \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{3}(1-s)\cos(s) ds \right) \\ &= \cos(t) - \frac{3}{5}\cos\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{5}\cos(1), \end{aligned} \tag{3.23}$$

cujo gráfico pode ser visto na Figura 3.3.

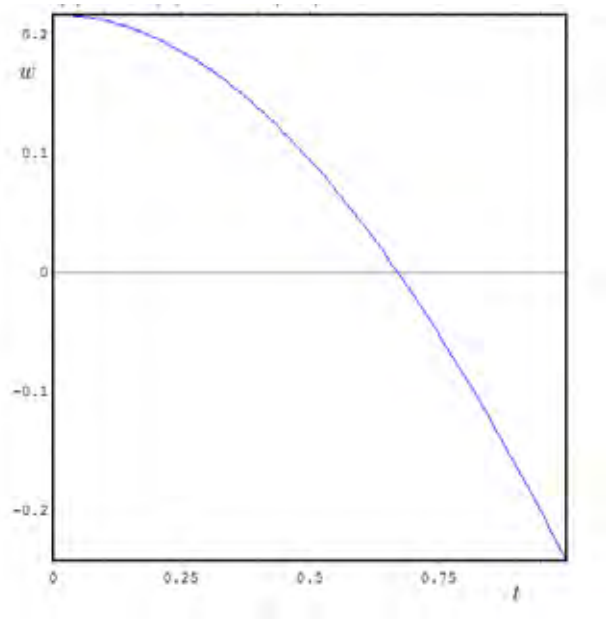

Figura 3.3: Gráfico de $w(t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Teorema 3.4 *Se $k(b-\eta) \neq -1$, então o problema de valor de contorno*

$$\begin{cases} \ddot{y} + f(t) = 0 \\ \dot{y}(a) = ky(\eta) \quad y(b) = 0, \end{cases} \tag{3.24}$$

tem solução única dada por

$$w(t) = \int_a^b G_4(t,s) f(s) ds \tag{3.25}$$

onde

$$G_4(t,s) = H(t,s) - \frac{k(b-t)}{1+k(b-\eta)} H(\eta,s). \tag{3.26}$$

e $H(t,s)$ como no Exemplo 2.3.

Demonstração. Usando as condições de contorno de (3.24) em (3.6) e usando (3.20) obtemos

$$\begin{aligned} \dot{w}(a) &= d + \dot{y}(a) = kw(\eta) \\ w(b) &= c + db + y(b) = 0 \\ w(\eta) &= c + d\eta + y(\eta) \end{aligned} \tag{3.27}$$

De (3.27) temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} d = kc + d\eta + y(\eta) \\ c + db = 0, \end{cases}$$

e do sistema acima concluímos que

$$c = -\frac{bky(\eta)}{1 + k(b-\eta)} \quad \text{e} \quad d = \frac{ky(\eta)}{1 + k(b-\eta)}.$$

Substituindo em c e d em (3.6)

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_a^b H(t,s)f(s)ds - \frac{bky(\eta)}{1 + k(b-\eta)} + t\frac{ky(\eta)}{1 + k(b-\eta)} \\ &= \int_a^b \left[H(t,s) - \frac{k(b-t)}{1 + k(b-\eta)} H(\eta,s) \right] f(s)ds. \end{aligned}$$

Definindo $G_4 : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$G_4(t,s) = H(t,s) - \frac{k(b-t)}{1 + k(b-\eta)} H(\eta,s)$$

temos a solução (3.25). □

Observação 3.4 *$G_4(t,s)$ possui as seguintes propriedades:*

(i) G_4 é contínua em todo domínio $[a,b] \times [a,b]$, pois H é uma função de Green e por definição é contínua em todo domínio $[a,b] \times [a,b]$. Com a restrição $k(b-\eta) \neq -1$, $\dfrac{k(b-t)}{1 + k(b-\eta)}$ é uma função bem definida e contínua.

(ii) G_4 satisfaz a equação homogênea $-\ddot{y} = 0$.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G_4(t,s) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} H(t,s) = 0$$

(iii) G_4 satisfaz as condições de contorno de (3.24). De fato,

$$G_4(b,s) = H(b,s) + \frac{k(b-b)}{1 - k(b-\eta)} H(\eta,s) = 0$$

$$\dot{G}_4(a,s) = \dot{H}(a,s) - \frac{k}{1 + k(b-\eta)} H(\eta,s)$$

como $G_4(\eta,s) = -\dfrac{1}{1 + k(b-\eta)} H(\eta,s)$ e $\dot{H}(a,s) = 0$ temos

$$\dot{G}_4(a,s) = kG_4(\eta,s).$$

(iv) A primeira derivada de G_4 em $t = s$ é descontínua e tem salto -1. De fato,

$$\frac{\partial}{\partial t}G_4(t,s)\Big|_{t=s^-}^{t=s^+} = \frac{\partial}{\partial t}H(t,s)\Big|_{t=s^-}^{t=s^+} - \frac{kH(\eta,s)}{1+k(b-\eta)}\left(\frac{\partial}{\partial t}(b-t)\Big|_{t=s^-}^{t=s^+}\right) = -1. \tag{3.28}$$

Tome $\xi = \min\{\eta, t\}$ e $\zeta = \max\{\eta, t\}$, G_4 pode ser escrita como

$$G_4(t,s) = \begin{cases} (b-t) - \dfrac{k(b-t)}{1+k(b-\eta)}(b-\eta) & a \le s \le \xi \\ \\ \begin{cases} Se \quad \xi = \eta \\ (b-t) - \dfrac{k(b-t)}{1+k(b-\eta)}(b-s) & \eta \le s \le t \\ \\ Se \quad \xi = t \\ (b-s) - \dfrac{k(b-t)}{1+k(b-\eta)}(b-\eta) & t \le s \le \eta \end{cases} \\ \\ (b-s)\left(1 + -\dfrac{k(b-t)}{1+k(b-\eta)}\right) & \zeta \le s \le b. \end{cases}$$

Exemplo 3.4 *Considere o seguinte problema*

$$\begin{cases} \ddot{y} + \cos(t) = 0 & t \in [0,1] \\ \dot{y}(0) = \dfrac{3}{2}y\left(\dfrac{1}{3}\right) \\ y(1) = 0. \end{cases} \tag{3.29}$$

Pelo Teorema 3.6 *o problema* (3.37) *tem solução única na forma*

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_0^1 H(t,s)\cos(s)ds - \frac{3(t-1)}{4}\int_0^1 H\left(\frac{1}{3},s\right)\cos(s)ds \\ &= \int_0^t (1-t)\cos(s)ds + \int_t^1 (1-s)\cos(s)ds \\ &\quad - \frac{3(t-1)}{4}\left(\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{2}{3}\cos(s)ds + \int_{\frac{1}{3}}^1 (1-s)\cos(s)ds\right) \\ &= \cos(t) + \frac{3}{4}t\cos\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{3}{4}t\cos(1) - \frac{3}{4}\cos\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\cos(1). \end{aligned} \tag{3.30}$$

cujo gráfico pode ser visto na Figura 3.4.

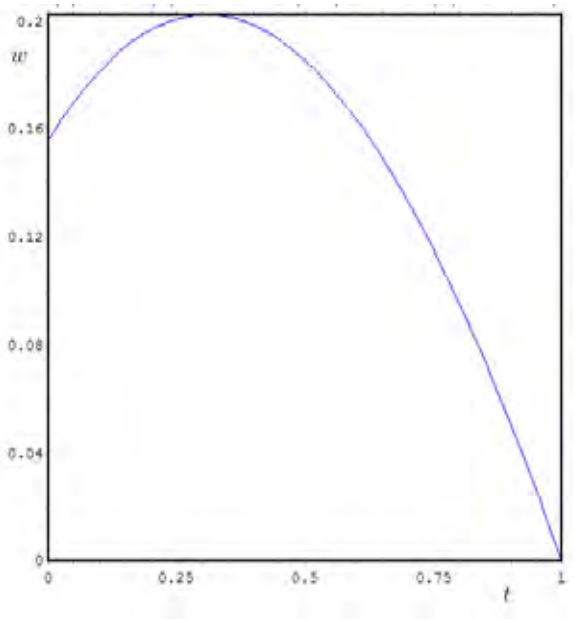

Figura 3.4: Gráfico de $w(t)$, $0 \leq t \leq 1$.

3.1.2 Abordagem integral

Pokornyi e Borovskikh propõem no artigo [11] uma definição mais geral das funções de Green do que na Definição 1.5. Chamam de função de Green qualquer função $G(t, s)$ cuja solução do problema (1.1)-(1.2) pode ser escrita na forma

$$y(t) = \int_a^b G(t, s) f(s) ds. \tag{3.31}$$

Segundo os autores essa definição abre caminhos para novas e vários tipos de fórmulas explícitas das funções de Green e ainda preserva seu sentido físico. A lista de axiomas então fica como um conjunto de propriedades com maior ou menor importância. A definição axiomática das funções de Green é eficiente em problemas clássicos, porém algumas propriedades falham quando abordamos essa definição para alguns problemas não clássicos como veremos a seguir.

Teorema 3.5 *Se $k \neq 1$, então o problema de valor de contorno*

$$\begin{cases} \ddot{y} + f(t) = 0 \\ y(a) = 0 \quad \dot{y}(b) = k\dot{y}(\eta), \end{cases} \tag{3.32}$$

tem solução única dada por

$$w(t) = \int_a^b G_5(t,s)f(s)ds \tag{3.33}$$

onde

$$G_5(t,s) = B(t,s) + \frac{k(t-a)}{1-k}B_t(\eta,s) \tag{3.34}$$

e $B(t,s)$ *como no Exemplo* 2.2 *e*

$$B_t(\eta,s) = \begin{cases} 0 & a \leq s < \eta \\ 1 & \eta < s \leq b. \end{cases} \tag{3.35}$$

Demonstração. Usando as condições de contorno de (3.32) em (3.6) e usando (3.7) obtemos

$$\begin{aligned} w(a) &= c + da + y(a) = c + da = 0 \\ \dot{w}(b) &= d + \dot{y}(b) = k\dot{w}(\eta) \\ w(\eta) &= c + d\eta + y(\eta) \\ \dot{w}(\eta) &= d + \dot{y}(\eta). \end{aligned} \tag{3.36}$$

De (3.36) temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} c + da = 0 \\ d = k(d + \dot{y}(\eta)). \end{cases}$$

E do sistema acima concluímos que

$$c = -\frac{ak\dot{y}(\eta)}{1-k} \quad \text{e} \quad d = \frac{k\dot{y}(\eta)}{1-k}.$$

Substituindo c e d em (3.6) temos

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_a^b B(t,s)f(s)ds - \frac{ak\dot{y}(\eta)}{1-k} + t\frac{k\dot{y}(\eta)}{1-k} \\ &= \int_a^b B(t,s)f(s)ds + \frac{k(t-a)}{1-k}\left[\frac{d}{dt}\int_a^b B(\eta,s)f(s)ds\right] \\ &= \int_a^b \left[B(t,s) + \frac{k(t-a)}{1-k}B_t(\eta,s)\right] f(s)ds. \end{aligned}$$

Definindo $G_5 : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$G_5(t,s) = B(t,s) + \frac{k(t-a)}{1-k}B_t(\eta,s)$$

temos a solução (3.33). □

Observação 3.5 *$G_5(t,s)$ possui as seguintes propriedades:*

(i) G_5 satisfaz a equação homogênea $-\ddot{y}=0$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}G_5(t,s)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}B(t,s)=0.$$

(ii) G_5 satisfaz as condições de contorno de (3.32). De fato,

$$G_5(a,s)=B(a,s)+\frac{k(a-a)}{1-k}B_t(\eta,s)=0$$

$$\dot{G}_5(b,s)=\dot{B}(b,s)+\frac{k}{1-k}B_t(\eta,s)$$

como $\dot{G}_5(\eta,s)=\dfrac{1}{1-k}B_t(\eta,s)$ e $\dot{B}(b,s)=0$ temos

$$\dot{G}_5(b,s)=k\dot{G}_5(\eta,s).$$

(iii) A primeira derivada de G_5 em $t=s$ é descontínua e tem salto -1. De fato,

$$\frac{\partial}{\partial t}G_5(t,s)\Big|_{t=s^-}^{t=s^+}=\frac{\partial}{\partial t}B(t,s)\Big|_{t=s^-}^{t=s^+}+\frac{kB_t(\eta,s)}{1-k}\left(\frac{\partial}{\partial t}(t-a)\Big|_{t=s^-}^{t=s^+}\right)=-1.$$

(iv) G_5 é contínua em $[a,b]\times[a,b]$, exceto em $t=\eta=s$.

Tome $\xi=\min\{\eta,t\}$ e $\zeta=\max\{\eta,t\}$, G_5 pode ser escrita como

$$G_5(t,s)=\begin{cases} s-a & a\le s<\xi \\ \begin{cases} Se \quad \xi=\eta \\ (s-a)+\dfrac{k(t-a)}{1-k} & \eta<s\le t \\ \\ Se \quad \xi=t \\ (t-a) & t\le s<\eta \end{cases} & \\ \\ (t-a)+\dfrac{k(t-a)}{1-k} & \zeta<s\le b. \end{cases}$$

Exemplo 3.5 *Considere o seguinte problema*

$$\begin{cases} \ddot{y}+\cos(t)=0 & t\in[0,1] \\ y(0)=0 & \\ \dot{y}(1)=-\dfrac{3}{2}\dot{y}\left(\dfrac{1}{3}\right). & \end{cases} \tag{3.37}$$

Como $k = -\frac{3}{2} \neq 1$, *pelo Teorema* 3.5 *o problema* (3.37) *tem solução única na forma*

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_0^1 B(t,s)\cos(s)ds - \frac{3}{5}t\int_0^1 B_t\left(\frac{1}{3},s\right)\cos(s)ds \\ &= \int_0^t s\cos(s)ds + \int_t^1 t\cos(s)ds - \frac{3}{5}t\int_{\frac{1}{3}}^1 \cos(s)ds \\ &= \cos(t) + t\sin(1) + \frac{3}{5}t\sin\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{3}{5}t\sin(1) - 1, \end{aligned} \tag{3.38}$$

cujo gráfico pode ser visto na Figura 3.5.

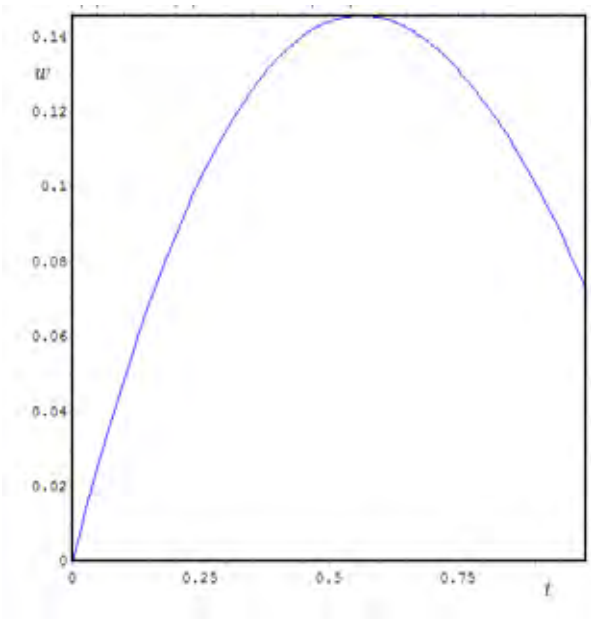

Figura 3.5: Gráfico de $w(t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Teorema 3.6 *O problema de valor de contorno*

$$\begin{cases} \ddot{y} + f(t) = 0 \\ y(a) = k\dot{y}(\eta) \quad \dot{y}(b) = 0, \end{cases} \tag{3.39}$$

tem solução única dada por

$$w(t) = \int_a^b G_6(t,s)f(s)ds \tag{3.40}$$

onde

$$G_6(t,s) = B(t,s) + kB_t(\eta,s) \tag{3.41}$$

e $B(t,s)$ *como no Exemplo* 2.2 *e* $B_t(t,s)$ *como em* (3.35).

Demonstração. Usando as condições de contorno de (3.39) em (3.6) e usando (3.7) obtemos

$$\begin{aligned} w(a) &= c + da + y(a) = c + da = k\dot{w}(\eta) \\ \dot{w}(b) &= d + \dot{y}(b) = 0 \\ w(\eta) &= c + d\eta + y(\eta) \\ \dot{w}(\eta) &= d + \dot{y}(\eta). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Concluímos a partir de (3.42) que

$$c = k\dot{y}(\eta) \quad \text{e} \quad d = 0.$$

Substituindo c e d em (3.6)

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_a^b B(t,s)f(s)ds + k\dot{y}(\eta) \\ &= \int_a^b \left[B(t,s) + kB_t(\eta,s)\right] f(s)ds. \end{aligned}$$

Definindo $G_6 : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$G_6(t,s) = B(t,s) + kB_t(\eta,s)$$

temos a solução (3.40). □

Observação 3.6 $G_6(t,s)$ *possui as seguintes propriedades:*

(*i*) G_6 *satisfaz a equação homogênea* $-\ddot{y} = 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G_6(t,s) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} B(t,s) = 0.$$

(*ii*) G_6 *satisfaz as condições de contorno de* (3.39)*. De fato,*

$$\dot{G}_6(b,s) = \dot{B}(b,s) = 0$$

$$G_6(a,s) = B(a,s) + kB_t(\eta,s)$$

como $\dot{G}_6(\eta,s) = B_t(\eta,s)$ *e* $B(a,s) = 0$ *temos*

$$G_6(a,s) = k\dot{G}_6(\eta,s).$$

(iii) A primeira derivada de G_6 em $t = s$ é descontínua e tem salto -1. De fato,

$$\frac{\partial}{\partial t}G_6(t,s)\Big|_{t=s^-}^{t=s^+} = \frac{\partial}{\partial t}B(t,s)\Big|_{t=s^-}^{t=s^+} = -1.$$

(iv) G_6 é contínua em $[a,b]\times[a,b]$, exceto em $t = \eta = s$.

Tome $\xi = \min\{\eta, t\}$ e $\zeta = \max\{\eta, t\}$, G_6 pode ser escrita como

$$G_6(t,s) = \begin{cases} s-a & a \le s < \xi \\ \begin{cases} Se \quad \xi = \eta & \\ (s-a)+k & \eta < s \le t \end{cases} & \\ \begin{cases} Se \quad \xi = t & \\ (t-a) & t \le s < \eta \end{cases} & \\ (t-a)+k & \zeta < s \le b. \end{cases}$$

Exemplo 3.6 *Considere o seguinte problema*

$$\begin{cases} \ddot{y} + \cos(t) = 0 & t \in [0,1] \\ y(0) = -\dfrac{3}{2}\dot{y}\left(\dfrac{1}{3}\right) & \\ \dot{y}(1) = 0. & \end{cases} \tag{3.43}$$

Pelo Teorema 3.6 *o problema* (3.43) *tem solução única na forma*

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_0^1 B(t,s)\cos(s)ds - \frac{3}{2}\int_0^1 B_t\left(\frac{1}{3},s\right)\cos(s)ds \\ &= \int_0^t s\cos(s)ds + \int_t^1 t\cos(s)ds - \frac{3}{2}\int_{\frac{1}{3}}^1 \cos(s)ds \\ &= \cos(t) + t\sin(1) + \frac{3}{2}\sin\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{3}{2}\sin(1) - 1. \end{aligned} \tag{3.44}$$

cujo gráfico pode ser visto na Figura 3.7.

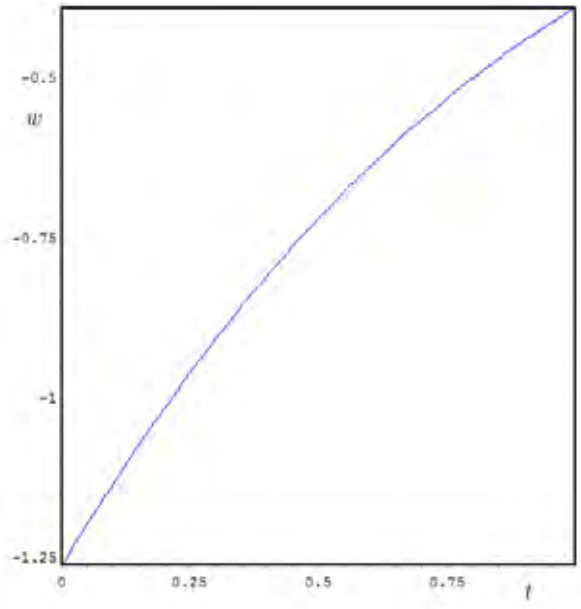

Figura 3.6: Gráfico de $w(t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Teorema 3.7 *O problema de valor de contorno*

$$\begin{cases} \ddot{y} + f(t) = 0 \\ \dot{y}(a) = 0 \quad y(b) = k\dot{y}(\eta), \end{cases} \tag{3.45}$$

tem solução única dada por

$$w(t) = \int_a^b G_7(t,s) f(s) ds \tag{3.46}$$

onde

$$G_7(t,s) = H(t,s) + kH_t(\eta, s) \tag{3.47}$$

e $H(t,s)$ como no Exemplo 2.3 e

$$H_t(\eta, s) = \begin{cases} -1 & a \leq s < \eta \\ 0 & \eta < s \leq b. \end{cases} \tag{3.48}$$

Demonstração. Usando as condições de contorno de (3.45) em (3.6) e usando (3.20) obtemos

$$\begin{aligned} \dot{w}(a) &= d + \dot{y}(a) = 0 \\ w(b) &= c + db + y(b) = k\dot{w}(\eta) \\ w(\eta) &= c + d\eta + y(\eta) \\ \dot{w}(\eta) &= d + \dot{y}(\eta). \end{aligned} \tag{3.49}$$

De (3.49) concluímos que

$$d = 0 \quad \text{e} \quad c = k\dot{y}(\eta).$$

Substituindo c e d em (3.6)

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_a^b H(t,s)f(s)ds + k\dot{y}(\eta) \\ &= \int_a^b H(t,s)f(s)ds + k\left[\frac{d}{dt}\int_a^b H(t,s)f(s)ds\right]_{t=\eta} \\ &= \int_a^b \left[H(t,s) + kH_t(\eta,s)\right] f(s)ds. \end{aligned}$$

Definindo $G_7 : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$G_7(t,s) = H(t,s) + kH_t(\eta,s)$$

temos a solução (3.46). □

Observação 3.7 *$G_7(t,s)$ possui as seguintes propriedades:*

(i) G_7 satisfaz a equação homogênea $-\ddot{y} = 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}G_7(t,s) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}H(t,s) = 0.$$

(ii) G_7 satisfaz as condições de contorno de (3.45)*. De fato,*

$$\dot{G}_7(a,s) = \dot{H}(a,s) = 0$$

$$G_7(b,s) = H(b,s) + kH_t(\eta,s)$$

como $\dot{G}_7(\eta,s) = H_t(\eta,s)$ e $H(b,s) = 0$ temos

$$G_7(b,s) = k\dot{G}_7(\eta,s).$$

(iii) A primeira derivada de G_7 em $t = s$ é descontínua e tem salto -1. De fato,

$$\frac{\partial}{\partial t}G_7(t,s)\Big|_{t=s^-}^{t=s^+} = \frac{\partial}{\partial t}H(t,s)\Big|_{t=s^-}^{t=s^+} = -1.$$

(iv) G_7 é contínua em $[a,b]\times[a,b]$, exceto em $t = \eta = s$.

Tome $\xi = \min\{\eta, t\}$ e $\zeta = \max\{\eta, t\}$, G_7 pode ser escrita como

$$G_7(t,s) = \begin{cases} (b-t) - k & a \le s < \xi \\ \begin{cases} Se \quad \xi = \eta \\ (b-t) \qquad\quad \eta < s \le t \end{cases} & \\ \begin{cases} Se \quad \xi = t \\ (b-s) \qquad\quad t \le s < \eta \end{cases} & \\ (b-s) & \zeta < s \le b. \end{cases}$$

Exemplo 3.7 *Considere o seguinte problema*

$$\begin{cases} \ddot{y} + \cos(t) = 0 \qquad t \in [0,1] \\ \dot{y}(0) = 0 \\ y(1) = -\dfrac{3}{2}\dot{y}\left(\dfrac{1}{3}\right). \end{cases} \tag{3.50}$$

Pelo Teorema 3.7 *o problema* (3.50) *tem solução única na forma*

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_0^1 H(t,s)\cos(s)ds - \frac{3}{2}\int_0^1 H_t\left(\frac{1}{3},s\right)\cos(s)ds \\ &= \int_0^t (1-t)\cos(s)ds + \int_t^1 (1-s)\cos(s)ds - \frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{3}} \cos(s)ds \\ &= \cos(t) - \cos(1) + \frac{3}{2}\sin\left(\frac{1}{3}\right), \end{aligned} \tag{3.51}$$

cujo gráfico pode ser visto na Figura 3.7.

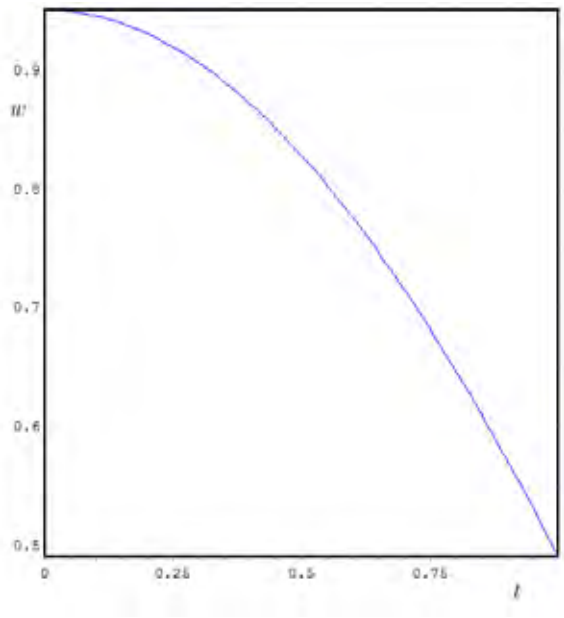

Figura 3.7: Gráfico de $w(t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Teorema 3.8 *Se $k \neq 1$, então o problema de valor de contorno*

$$\begin{cases} \ddot{y} + f(t) = 0 \\ \dot{y}(a) = k\dot{y}(\eta) \quad y(b) = 0, \end{cases} \tag{3.52}$$

tem solução única dada por

$$w(t) = \int_a^b G_8(t,s) f(s) ds \tag{3.53}$$

onde

$$G_8(t,s) = H(t,s) - \frac{k(b-t)}{1-k} H_t(\eta, s) \tag{3.54}$$

e $H(t,s)$ como no Exemplo 2.3 *e $H_t(\eta, s)$ como em* (3.48)

Demonstração. Usando as condições de contorno de (3.52) em (3.6) e usando (3.20) obtemos

$$\begin{aligned} \dot{w}(a) &= d + \dot{y}(a) = k\dot{w}(\eta) \\ w(b) &= c + db + y(b) = 0 \\ w(\eta) &= c + d\eta + y(\eta) \\ \dot{w}(\eta) &= d + \dot{y}(\eta). \end{aligned} \tag{3.55}$$

De (3.55) concluímos que

$$d = \frac{k\dot{y}(\eta)}{1-k} \quad \text{e} \quad c = -\frac{bk\dot{y}(\eta)}{1-k}.$$

Substituindo c e d em (3.6)

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_a^b H(t,s)f(s)ds - \frac{bk\dot{y}(\eta)}{1-k} + t\frac{k\dot{y}(\eta)}{1-k} \\ &= \int_a^b H(t,s)f(s)ds - \frac{k(b-t)}{1-k}\dot{y}(\eta) \\ &= \int_a^b \left[H(t,s) - \frac{k(b-t)}{1-k}H_t(\eta,s)\right] f(s)ds. \end{aligned}$$

Definindo $G_8 : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$G_8(t,s) = H(t,s) - \frac{k(b-t)}{1-k}H_t(\eta,s)$$

temos a solução (3.53). □

Observação 3.8 *$G_8(t,s)$ possui as seguintes propriedades:*

(i) G_8 satisfaz a equação homogênea $-\ddot{y} = 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}G_8(t,s) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}H(t,s) = 0.$$

(ii) G_8 satisfaz as condições de contorno de (3.52). De fato,

$$G_8(b,s) = H(b,s) - \frac{k(b-b)}{1-k}H_t(\eta,s) = 0$$

$$\dot{G}_8(a,s) = \dot{H}(a,s) - \frac{k}{1-k}H_t(\eta,s)$$

como $\dot{G}_8(\eta,s) = -\dfrac{1}{1-k}H_t(\eta,s)$ e $\dot{H}(a,s) = 0$ temos

$$\dot{G}_8(a,s) = k\dot{G}_8(\eta,s).$$

(iii) A primeira derivada de G_8 em $t = s$ é descontínua e tem salto -1. De fato,

$$\frac{\partial}{\partial t}G_8(t,s)\Big|_{t=s^-}^{t=s^+} = \frac{\partial}{\partial t}H(t,s)\Big|_{t=s^-}^{t=s^+} - \frac{kH_t(\eta,s)}{1-k}\left(\frac{\partial}{\partial t}(b-t)\Big|_{t=s^-}^{t=s^+}\right) = -1.$$

(iv) G_8 é contínua em $[a,b] \times [a,b]$, exceto em $t = \eta = s$.

Tome $\xi = \min\{\eta, t\}$ *e* $\zeta = \max\{\eta, t\}$, G_8 *pode ser escrita como*

$$G_8(t,s) = \begin{cases} (b-t) - \dfrac{k(b-t)}{1-k} & a \leq s < \xi \\ \\ \begin{cases} Se \quad \xi = \eta & \\ (b-t) & \eta < s \leq t \end{cases} & \\ \\ \begin{cases} Se \quad \xi = t & \\ (b-s) & \leq s < \eta \end{cases} & \\ \\ (b-s) & \zeta < s \leq b. \end{cases}$$

Exemplo 3.8 *Considere o seguinte problema*

$$\begin{cases} \ddot{y} + \cos(t) = 0 \qquad t \in [0,1] \\ \dot{y}(0) = -\dfrac{3}{2}\dot{y}\left(\dfrac{1}{3}\right) \\ y(1) = 0. \end{cases} \tag{3.56}$$

Pelo Teorema 3.8 *o problema* (3.56) *tem solução única na forma*

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_0^1 H(t,s)\cos(s)ds + \frac{3}{5}(1-t)\int_0^1 H_t\left(\frac{1}{3}, s\right)\cos(s)ds \\ &= \int_0^t (1-t)\cos(s)ds + \int_t^1 (1-s)\cos(s)ds + \frac{3}{5}(1-t)\int_0^{\frac{1}{3}} \cos(s)ds \\ &= \cos(t) - \cos(1) + \frac{3}{5}t\sin\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{3}{5}\sin\left(\frac{1}{3}\right), \end{aligned} \tag{3.57}$$

cujo gráfico pode ser visto na Figura 3.8.

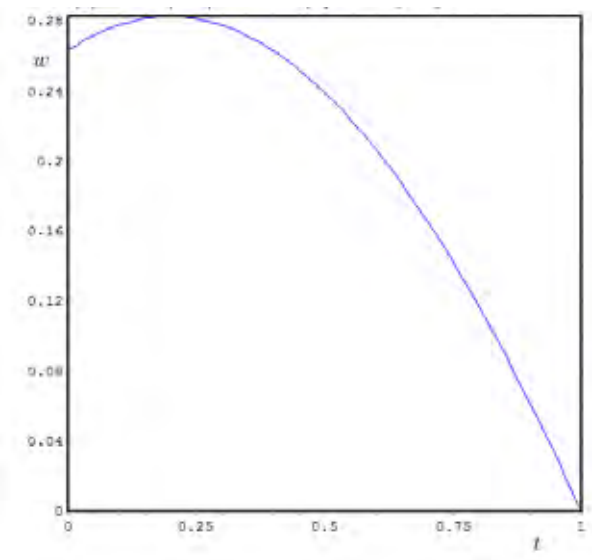

Figura 3.8: Gráfico de $w(t)$, $0 \leq t \leq 1$.

3.2 Problemas não lineares

Recentemente os problemas de valor de contorno não lineares em três pontos tem sido aplicados na Física, Biologia e Química entre outros. Por exemplo, as equações de segunda ordem são usados como um modelo para a resposta da membrana de uma capa esférica.(Ver [10] e as referências do referido artigo). Nesta seção vamos estudar o seguinte problema

$$\begin{cases} \ddot{y} + f(t, y) = 0 \\ y(0) = 0 \quad \dot{y}(1) = ky(\eta), \end{cases} \tag{3.58}$$

onde f é uma função contínua, $k \in \mathbb{R}$ e $\eta \in (0, 1)$.

Começaremos provando o seguinte resultado

Teorema 3.9 *Se $f : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função não linear e contínua então a solução do problema de valor de contorno* (3.58) *é equivalente a solução da equação integral*

$$y(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, y(s)) ds, \tag{3.59}$$

onde

$$G(t,s) = B(t,s) + \frac{kt}{1-k\eta}B(\eta,s)$$

e $B(t,s) = \min\{t,s\}$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.2 temos que a solução de (2.33) é dada por

$$y(t) = \int_a^b B(t,s)f(s,y(s))ds.$$

Em particular, para $a = 0$ e $b = 1$ temos

$$\begin{aligned} y(0) &= \dot{y}(1) = 0 \\ y(\eta) &= \int_0^1 B(\eta,s)f(s,y(s))ds \end{aligned} \tag{3.60}$$

e $B(t,s) = \min\{t,s\}$.

Supondo que w é solução de (3.58) temos a relação

$$-\ddot{w} = f(t,y) = -\ddot{y}. \tag{3.61}$$

Disto segue que

$$w(t) = y(t) + c + dt, \quad c, d \text{ constantes.} \tag{3.62}$$

Usando as condições de contorno de (3.58) em (3.62) e usando (3.60) obtemos

$$c = 0 \quad \text{e} \quad d = \frac{ky(\eta)}{1-k\eta}.$$

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_0^1 B(t,s)f(s,y(s))ds + t\frac{k}{1-k\eta}y(\eta) \\ &= \int_0^1 B(t,s)f(s,y(s))ds + \frac{kt}{1-k\eta}\int_0^1 B(\eta,s)f(s,y(s))ds \\ &= \int_0^1 \left[B(t,s) + \frac{kt}{1-k\eta}B(\eta,s)\right] f(s,y(s))ds. \end{aligned}$$

Definindo $G : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$G(t,s) = B(t,s) + \frac{kt}{1-k\eta}B(\eta,s)$$

temos a solução (3.59). □

Agora provaremos a existência de soluções não triviais do problema (3.58).

Teorema 3.10 *Se $f(t,0) \neq 0$, $k\eta \neq 1$ e existem funções não negativas $g, h \in L^1[0,1]$ tais que*

$$|f(t,y)| \leq g(t)|y| + h(t) \qquad q.t.p. \quad (t,y) \in [0,1] \times \mathbb{R} \tag{3.63}$$

e ainda

$$\int_0^1 \left(1 + \left|\frac{k}{1-k\eta}\right|\right) g(s)ds < 1.$$

Então

(*i*) *O operador $T : \overline{\Omega} \to \mathcal{C}([0,1])$,*

$$Ty(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,y(s))ds$$

é completamente contínuo, onde $\Omega = \{y \in C([0,1]); \|y\| < m, m > 0\}$.

(*ii*) *O problema* (3.58) *tem pelo menos uma solução não trivial.*

Demonstração. Primeiro considere

$$A = \int_0^1 \left(1 + \left|\frac{k}{1-k\eta}\right|\right) g(s)ds$$

e

$$B = \int_0^1 \left(1 + \left|\frac{k}{1-k\eta}\right|\right) h(s)ds.$$

Por hipótese $A < 1$. Como $f(t,0) \neq 0$, então existe um intervalo $[a_1, b_1] \subset [0,1]$ tal que

$$0 < \min_{t \in [a_1,b_1]} |f(t,0)| \leq |f(t,0)| \leq g(t)|0| + h(t).$$

Assim $h(t) > 0$ implica que $B > 0$.

(*i*) Provaremos que $T(\Omega)$ é relativamente compacto. Pelo Teorema de Arzela basta provar que $T(\Omega)$ é uniformemente limitado e equicontínuo. $T(\Omega)$ é uniformemente limitado. De fato, primeiro observe que

$$\begin{aligned} |G(t,s)| &= \left|B(t,s) + \frac{kt}{1-k\eta}B(\eta,s)\right| \\ &\leq |B(t,s)| + \left|\frac{kt}{1-k\eta}B(\eta,s)\right| \\ &\leq 1 + \left|\frac{kt}{1-k\eta}\right| \end{aligned}$$

pois $|B(t,s)| \leq 1$ e $|B(\eta,s)| \leq 1$.

Então

$$\begin{aligned}
|Ty(t)| &= \left|\int_0^1 G(t,s)f(s,y(s))ds\right| \leq \int_0^1 |G(t,s)||f(s,y(s))|ds \\
&\leq \int_0^1 \left(1+\left|\frac{k}{1-k\eta}\right|\right)|f(s,y(s))|ds \\
&\leq \int_0^1 \left(1+\left|\frac{k}{1-k\eta}\right|\right) g(s)|y(s)|ds + \int_0^1 \left(1+\left|\frac{k}{1-k\eta}\right|\right) h(s)ds \\
&\leq \int_0^1 \left(1+\left|\frac{k}{1-k\eta}\right|\right) g(s) \max_{0\leq s\leq 1}\{|y(s)|\}ds + \int_0^1 \left(1+\left|\frac{k}{1-k\eta}\right|\right) h(s)ds \\
&= \|y\| \int_0^1 \left(1+\left|\frac{k}{1-k\eta}\right|\right) g(s)ds + \int_0^1 \left(1+\left|\frac{k}{1-k\eta}\right|\right) h(s)ds \\
&= A\|y\| + B \\
&< Am + B < m + B
\end{aligned}$$

Tome $M = m + B > 0$.

$T(\Omega)$ é equicontínuo. De fato, sejam $t_1, t_2 \in [0,1]$ como

$$\begin{aligned}
|G(t_1,s) - G(t_2,s)| &= \left|B(t_1,s) + \frac{kt_1}{1-k\eta}B(\eta,s) - B(t_2,s) + \frac{kt_2}{1-k\eta}B(\eta,s)\right| \\
&\leq |B(t_1,s) - B(t_2,s)| + \left|\frac{k(t_1-t_2)}{1-k\eta}B(\eta,s)\right| \\
&\leq |t_1-t_2| + |t_1-t_2|\left|\frac{k}{1-k\eta}\right||B(\eta,s)| \\
&\leq \left(1+\left|\frac{k}{1-k\eta}\right|\right)|t_1-t_2|
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
|Ty(t_1) - Ty(t_2)| &= \left|\int_0^1 [G(t_1,s) - G(t_2,s)]\, f(s,y(s))ds\right| \\
&\leq \int_0^1 |G(t_1,s) - G(t_2,s)|\, |f(s,y(s))|ds \\
&\leq \int_0^1 \left(1+\left|\frac{k}{1-k\eta}\right|\right)|t_1-t_2||f(s,y(s))|ds \\
&\leq |t_1-t_2|\left(\int_0^1 \left(1+\left|\frac{k}{1-k\eta}\right|\right) g(s)|y(s)|ds + \int_0^1 \left(1+\left|\frac{k}{1-k\eta}\right|\right) h(s)ds\right)
\end{aligned}$$

$$\leq |t_1 - t_2| \left(\|y\| \int_0^1 \left(1 + \left|\frac{k}{1-k\eta}\right|\right) g(s)ds + \int_0^1 \left(1 + \left|\frac{k}{1-k\eta}\right|\right) h(s)ds \right)$$
$$= |t_1 - t_2|(A\|y\| + B)$$
$$\leq |t_1 - t_2|(Am + B) \leq |t_1 - t_2|(m + B)$$

Para cada ϵ dado, existe $\delta = \dfrac{\epsilon}{m+B}$ tal que

se $|t_1 - t_2| < \delta$

$$|Ty(t_1) - Ty(t_2)| \leq |t_1 - t_2|(m + B) < \delta(m + B) = \frac{\epsilon}{m+B}(m + B) = \epsilon$$

(ii) Tome $m = B(1 - A)^{-1}$.

Suponha que existe $y \in \partial\Omega$, $\lambda > 1$ tal que $Ty = \lambda y$

$$\lambda m = \lambda\|y\| = \|Ty\|$$
$$= \max_{t\in[0,1]} |(Ty)(t)|$$
$$\leq A\|y\| + B$$
$$\leq Am + B.$$

Sendo assim

$$\lambda \leq A + \frac{B}{m} = A + \frac{B}{B(1-A)^{-1}} = A + 1 - A = 1$$

o que contradiz a hipótese $\lambda > 1$. Pelo Teorema 1.7, T tem um ponto fixo e como $f(t, 0) \neq 0$ o problema (3.58) tem pelo menos uma solução não trivial em $C([0, 1])$. □

Exemplo 3.9 *Considere o seguinte problema*

$$\begin{cases} \ddot{y} + t^2 y e^{-|\sin(y-t)|} + 3e^t - 2\sin t = 0 \\ y(0) = 0 \quad \dot{y}(1) = -\dfrac{3}{2} y\left(\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \tag{3.64}$$

No problemas acima temos $k = -\dfrac{3}{2}$, $\eta = \dfrac{1}{2}$ *e*

$$f(t, y) = t^2 y e^{-|\sin(y-t)|} + 3e^t - 2\sin t.$$

Verifiquemos as hipóteses do Teorema 3.10*:*

- $k\eta = -\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{4} \neq 1$
- $f(t,0) = 3e^t - 2\sin t$. *Não é dificil de ver que para todo* $t \in [0,1]$, $f(t,0)$ *é positivo.*
- *As funções* g *e* h *dadas por* $g(t) = t^2$ *e* $h(t) = 3e^t - 2\sin t$, *satisfazem as hipóteses do Teorema 3.10 e além disso*

$$\begin{aligned} |f(t,y)| &= \left|t^2 y e^{-|\sin(y-t)|} + 3e^t - 2\sin t\right| \\ &\leq |t^2||y||e^{-|\sin(y-t)|}| + \left|3e^t - 2\sin t\right| \\ &\leq t^2|y| + \left|3e^t - 2\sin t\right| \\ &= g(t)|y| + h(t). \end{aligned}$$

- *Calculemos* A

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \left(1 + \left|-\frac{6}{7}\right|\right) s^2 ds \\ &= \left(\frac{13}{7}\right) \frac{s^3}{3}\Big|_0^1 \\ &= \frac{13}{21} < 1. \end{aligned}$$

Logo o problema (3.64) *tem pelo menos uma solução não trivial.*

Conclusão

Nosso objetivo era estudar problemas de valor de contorno do tipo

$$\begin{cases} \ddot{y} + f(t) = 0 \\ y(a) = 0 \quad \dot{y}(b) = ky(\eta), \end{cases} \tag{3.65}$$

usando as funções de Green. Basicamente, aprofundamos as ideias contidas no artigo [15] e mostramos que (3.65) tem solução única dada por

$$y(t) = \int_a^b G_1(t,s) f(s) ds$$

onde

$$G_1(t,s) = B(t,s) + \frac{k(t-a)}{1-k(\eta-a)} B(\eta,s)$$

é chamada de função de Green para o problema (3.65) e

$$B(t,s) = \begin{cases} t-a & a \leq t \leq s \\ s-a & s \leq t \leq b, \end{cases}$$

é a função de Green para o problema

$$\begin{cases} \ddot{y} + f(t) = 0 \\ y(a) = 0 \quad \dot{y}(b) = 0. \end{cases} \tag{3.66}$$

Verificando as propriedades de cada função de Green encontrada, percebemos que a definição axiomática não se aplicava em alguns casos não clássicos, porém a falta de algumas propriedades não a impedia de desempenhar seu papel na integral, que é a de encontrar a solução. Diante disto fizemos uma relação entre a definição axiomática e

a definição integral das funções de Green de forma análoga ao exposto por Pokornyi e Borovskikh no artigo [11] para problemas clássicos.

Ao estudarmos problemas não lineares do tipo

$$\begin{cases} \ddot{y} + f(t, y) = 0 \\ y(0) = 0 \quad \dot{y}(1) = ky(\eta), \end{cases} \tag{3.67}$$

concluimos que se o problema (3.67) tiver solução e se $f : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ for uma função não linear e contínua então a solução do problema de valor de contorno (3.67) é equivalente a solução da equação integral

$$y(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, y(s)) ds, \tag{3.68}$$

onde

$$G(t, s) = B(t, s) + \frac{kt}{1 - k\eta} B(\eta, s)$$

e $B(t, s) = \min\{t, s\}$.

Definindo o operador

$$Ty(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, y(s)) ds \tag{3.69}$$

e usando a Alternativa não linear de Leray-Schauder mostramos que, sob algumas hipóteses, o operador (3.69) tem ponto fixo, garantindo assim a existência de pelo menos uma solução não trivial.

Como trabalhos futuros, pode-se realizar o mesmo estudo para os seguintes problemas:

$$\begin{cases} \ddot{y} + f(t) = 0 \\ y(a) = 0 \quad \dot{y}(b) = ky(b), \end{cases} \tag{3.70}$$

e

$$\begin{cases} \ddot{y} + f(t) = 0 \\ \dot{y}(a) = 0 \quad \dot{y}(b) = ky(\eta). \end{cases} \tag{3.71}$$

Um estudo análogo pode ser feito para o caso em que o termo não homogêneo é da forma $f(t, y)$.

Referências Bibliográficas

[1] AGARWAL, R. P. ;O'REGAN, D. **An Introduction to Ordinary Differential Equations**. Springer, New York, 2008.

[2] BOYCE, E. W. ; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1985.

[3] DUFFY, D. G. **Green's Functions with applications**. CRC Press LLC, New York, 2000.

[4] GRANAS, A.; DUGUNDJI, J. **Fixed Point Theory**. Springer Monographs in Mathematics, New York, 2003.

[5] GUEZANE-L. A. KELAIAIA,S.; **Solvability of a three-point nonlinear boundary value problem**. Eletronic Journal of Differential Equations. Vol 2010 (2010), 1-9.

[6] HA, S. N.; LEE, C. R. **Numerical Study for Two-Point Boundary Value Problems Using Green's Functions**. Computers and Mathematics with Applications, pp. 1599–1608, 2002.

[7] KREYSZIG, E.; **Introductory Functional Analysis with Applications**. John Wiley and Sons, New York, 1978.

[8] KOLMOGOROV, A. N.; FORMIN, S. V. **Introductory Real Analysis**. Dover Publications, New York, 1975.

[9] LIMA, E. L. **Curso de Análise** vol 2. IMPA, Rio de Janeiro, 2000.

[10] PALAMIDES, P. K. **Boundary-value problems for shallow elastic membrane caps**. IMA J. Appl. Math, 281–299, 2002 .

[11] POKORNYI, Y. V.; BOROVSKIKH, A. V. **The Connection of The Green's Function and the Influence Function for Nonclassical Problems**. Journal of Mathematical Sciences, pp. 739–768, 2004.

[12] RITGER, P. D.; ROSE, N. J. **Differential Equations with Applications**. McGraw-Hill, New York, 1968.

[13] STAKGOLD, I. **Green's Functions and Boundary Value Problems**. John Wiley, New York, 1998.

[14] SUN, Y-P; **Nontrivial solution for a three-point boundary value problem**. Eletronic Journal of Differential Equations, pp. 1–10, 2004 .

[15] ZHAO, Z. **Positive solutions for singular three-point boundary-value problems**. Eletronic Journal of Differential Equations, pp.1–8, 2007.