

Marcio Miazaki

**Controle de Vibrações em Rotores Flexíveis Utilizando Molas
Helicoidais de Liga com Memória de Forma**

Ilha Solteira

2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JULIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE ENGENHARIA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA

Marcio Miazaki

**Controle de Vibrações em Rotores Flexíveis Utilizando Molas
Helicoidais de Liga com Memória de Forma**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Luiz Chagas Manhães de Abreu

Ilha Solteira

2017

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

Miazaki, Márcio.

M618c Controle de vibrações em rotores flexíveis utilizando molas helicoidais de liga com memória de forma / Marcio Miazaki. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2017
92 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2017

Orientador: Gustavo Luiz Chagas Manhães de Abreu
Inclui bibliografia

1. Rotores flexíveis. 2. Ligas com memória de forma (LMF). 3. Molas helicoidais de LMF.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

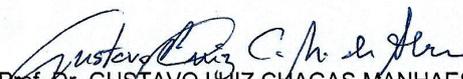
CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

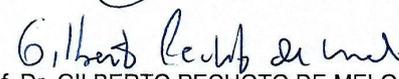
TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Controle de Vibrações em Rotores Flexíveis Utilizando Molas Helicoidais de Liga com Memória de Forma

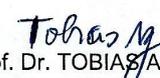
AUTOR: MARCIO MIAZAKI

ORIENTADOR: GUSTAVO LUIZ CHAGAS MANHAES DE ABREU

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA MECÂNICA, área: MECANICA DOS SÓLIDOS pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. GUSTAVO LUIZ CHAGAS MANHAES DE ABREU
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. GILBERTO PECHOTO DE MELO
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. TOBIAS ANDERSON GUIMARÃES
Departamento de Engenharia Mecânica / Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM

Ilha Solteira, 30 de novembro de 2017

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta de utilização de molas helicoidais de liga com memória de forma presentes em rotores flexíveis para a atenuação dos deslocamentos laterais decorrentes de forças de perturbação, notadamente das forças de desbalanceamento. Num primeiro momento, o trabalho apresenta os principais modelos constitutivos de ligas com memória de forma (LMF), onde o princípio de funcionamento deste tipo de material é demonstrado por meio de simulações numéricas, e os resultados obtidos são confrontados com dados disponíveis na literatura. Discute-se também a questão da utilização de um modelo mais simplificado para representar o comportamento da liga para diferentes carregamentos termomecânicos. Dois modelos termomecânicos são confrontados numericamente visando representar adequadamente o comportamento termomecânico da LMF durante as transformações de fase. O trabalho evolui para a construção do modelo matemático via elementos finitos de rotores flexíveis contendo molas helicoidais de LMF e por fim apresenta um conjunto de simulações numéricas para comprovar a eficiência e a potencialidade do procedimento teórico formulado. O trabalho termina comentando as potencialidades da proposta apresentada, discutindo as facilidades e dificuldades encontradas na sua implementação e apontando para o desenvolvimento de futuros estudos.

Palavras-chave: Rotores flexíveis. Ligas com memória de forma (LMF). Molas helicoidais de LMF. Controle de vibrações.

ABSTRACT

This work proposes shape memory alloy helical springs present in flexible rotors for the attenuation of lateral displacements mainly caused by unbalance forces. This work presents some constitutive models of shape memory alloys (SMA). The principle of operation of this type of material is demonstrated by numerical simulations and the results obtained are compared with data available in the literature. The present work investigates the use of a simplified model to represent the behavior of the SMA for different thermomechanical loads. Two thermomechanical models are numerically confronted in order to represent properly the thermomechanical behavior of the SMA during the phase transformations. Based on the finite element model of flexible rotors containing helical springs of SMA, the efficiency and the potentiality of the theoretical procedure are shown through numerical simulations. This work is concluded presenting the potentialities of the design methodology proposed and future developments to be implemented.

Keywords: Flexible rotors. Shape memory alloy (SMA). Helical springs of SMA. Control of vibrations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Gráfico representando as delimitações de transformação de fase de uma LMF.	17
Figura 2 - Efeito de Memória de Forma.	18
Figura 3 - Efeito Pseudoelástico.	19
Figura 4 - Diagrama de fases de uma liga com memória de forma.	26
Figura 5 - Região de Transformação de fase da Martensita.	28
Figura 6 - Região de Transformação de fase do "overlapping".	31
Figura 7 - Gráfico de Fases com representação do carregamento na temperatura de $50^{\circ}C$	32
Figura 8 - Comportamento do efeito Pseudoelástico.	33
Figura 9 - Gráfico de fases com representação do carregamento na temperatura de $5^{\circ}C$	34
Figura 10 - Comportamento do efeito memória de forma.	35
Figura 11 - Carregamento cíclico da temperatura.	36
Figura 12 - Carregamento térmico cíclico com tensão mecânica constante.	37
Figura 13 - Carregamento cíclico da tensão mecânica.	37
Figura 14 - Carregamento mecânico cíclico com temperatura constante.	38
Figura 15 - Laço de histerese no modelo de Ikuta et al. (1991).	39
Figura 16 - Carregamentos termomecânicos durante o aquecimento.	40
Figura 17 - Evolução de ξ durante o aquecimento.	40
Figura 18 - Carregamentos termomecânicos durante o resfriamento.	41
Figura 19 - Evolução de ξ durante o resfriamento.	41
Figura 20 - Mola helicoidal.	44

Figura 21 - Distribuição da tensão de cisalhamento ao longo da seção transversal do fio de uma mola linear	45
Figura 22 - Distribuição constante da transformação de fase e da tensão de cisalhamento.	46
Figura 23 - Modelo discreto do rotor.	48
Figura 24 - Desenho esquemático do rotor.	51
Figura 25 - Diagrama de <i>Campbell</i>	53
Figura 26 - Resposta ao Desbalanceamento do Disco 1.	55
Figura 27 - Tensões cisalhantes máximas da mola de LMF no mancal 1: direção <i>X</i>	56
Figura 28 - Tensões cisalhantes máximas da mola de LMF no mancal 2: direção <i>X</i>	56
Figura 29 - Deslocamento do disco 1 na direção <i>X</i> durante a passagem na primeira crítica da fase martensítica.	57
Figura 30 - Deslocamento do disco 1 na direção <i>X</i> durante a passagem na primeira crítica em $\xi = 0.5$	58
Figura 31 - Deslocamento do disco 1 na direção <i>X</i> durante a passagem na primeira crítica da fase austenítica.	58
Figura A.1 - Sistema de coordenadas.	63
Figura A.2 - Elemento de eixo.	67
Figura A.3 - Sistema de coordenadas do eixo.	73
Figura A.4 - Fundação ligada ao rotor pelo mancal.	78
Figura A.5 - Massa de desbalanceamento.	80
Figura A.6 - Dois elementos de árvore com um nó em comum.	81

LISTA DE TABELAS

Tabela 1-	Pontos de entrada, saída e direções normais para cada zona (GAO et al., 2007).	29
Tabela 2-	Propriedades termomecânicas da liga com memória de forma (GAO et al., 2007).	32
Tabela 3-	Dados dos discos.	52
Tabela 4-	Rigidez e amortecimento nos mancais.	52
Tabela 5-	Velocidades críticas para a mola em martensita [rpm]	53
Tabela 6-	Velocidades críticas para a mola em austenita [rpm]	54
Tabela 7-	Velocidades críticas para a mola em $\xi = 0.5$ [rpm]	54

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Latinas

- $[A]$ - Matriz dinâmica em espaço estado
- $[B]$ - Matriz de entrada em espaço estado
- F - Força
- $[a]$ - Região onde ocorre a transformação de martensita para austenita
- A_f - Temperatura final de formação de austenita
- A_s - Temperatura de início de formação de austenita
- C_a - Coeficiente de influência de tensão (austenita)
- C_D - Inclinação da região de transformação de martensita maclada em não maclada
- C_m - Coeficiente de influência de tensão (martensita)
- e - Excentricidade máxima da massa de desbalanceamento no disco
- E - Módulo de elasticidade
- E_A - Módulo de elasticidade da austenita pura
- E_M - Módulo de elasticidade da martensita pura
- f^A - Função de transformação direta
- f^M - Função de transformação reversa
- $[m]$ - Região de transformação de austenita e/ou martensita maclada para não maclada
- M_f - Temperatura final de formação de martensita
- M_s - Temperatura inicial de formação de martensita
- n^i - Direção normal do vetor que representa determinada a i -ésima transformação
- $[o]$ - Região de transformação de martensita maclada para não maclada
- $[o, t]$ - Região de overlapping
- $[t]$ - Região de transformação de austenita para martensita maclada
- T - Temperatura
- T_{in}^i - Temperatura de entrada na zona de transformação i
- T_{out}^i - Temperatura de saída na zona de transformação i
- T_0 - Temperatura inicial do material
- Z^i - Razão de distância da zona i com relação ao último ponto de transição

Letras Gregas

α_{LMF}	-	Coefficiente térmico de expansão
γ	-	Deformação angular
γ_L	-	Deformação angular residual máxima do material
Γ	-	Caminho arbitrário de um carregamento
ε	-	Deformação do material
ε_L	-	Deformação residual
Θ	-	Deformação relacionada á expansão térmica
ν	-	Coefficiente de Poisson
ξ	-	Fração martensítica
ξ_j	-	Fração martensítica do último ponto de transformação
ξ_o	-	Fração martensítica inicial
ξ_S	-	Fração martensítica não maclada
ξ_T	-	Fração martensítica maclada
ξ_t^{swi}	-	Fração martensítica maclada do último ponto de transição computado
ξ_o^{swi}	-	Fração martensítica não maclada do último ponto de transição computado
ρ_0^i	-	Largura da zona de transformação
ρ_j^i	-	Distância entre o último ponto de transição de transformação à fronteira
ρ^i	-	Distância entre o ponto atual ao ponto de entrada da zona de transformação i
σ	-	Tensão
σ_{A_f}	-	Tensão final de transformação de austenita
σ_{A_s}	-	Tensão de início de transformação de austenita
σ_f	-	Tensão crítica final de alinhamento das variantes martensíticas
σ_s	-	Tensão de início de alinhamento das variantes martensíticas
σ_{in}^i	-	Tensão do ponto de entrada na zona de transformação i
σ_{out}^i	-	Tensão do ponto de saída na zona de transformação i
σ_j	-	Tensão do último ponto de transformação
σ_{M_f}	-	Tensão final de transformação de martensita
σ_{M_s}	-	Tensão de início de transformação de martensita
τ	-	Tensão de cisalhamento
τ'	-	Direção tangente ao caminho do carregamento
$\dot{\phi}$	-	Frequência de rotação

SUMÁRIO

	Página
1	INTRODUÇÃO 13
2	LIGAS COM MEMÓRIA DE FORMA 16
2.1	TRANSFORMAÇÕES DE FASE 16
2.2	EFEITO MEMÓRIA DE FORMA 17
2.3	EFEITO PSEUDOELÁSTICO 19
2.4	MODELOS CONSTITUTIVOS DE LIGAS COM MEMÓRIA DE FORMA 20
2.4.1	Modelo de Tanaka 20
2.4.2	Modelo Polinomial 21
2.4.3	Modelo de Liang e Rogers 22
2.4.4	Modelo de Ikuta 23
2.4.5	Modelo de Brinson 24
2.4.6	Modelo de Gao 26
2.5	AFERIÇÃO DO MODELO DE GAO 31
2.5.1	Carregamento Cíclico 35
2.6	COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS DE GAO E IKUTA 38
3	MOLAS HELICOIDAIS DE LIGA COM MEMÓRIA DE FORMA 43
3.1	MODELAGEM MATEMÁTICA DE MOLAS DE LMF 43
4	ROTOR FLEXÍVEL COM MOLAS DE LMF 47
4.1	MODELO DO ROTOR 47
4.2	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS 50

4.2.1	Determinação das velocidades críticas	52
4.2.2	Resposta ao desbalanceamento	54
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	59
	REFERÊNCIAS	60
	Apêndice A – MODELAGEM MATEMÁTICA DE ROTORES FLEXÍVEIS	63
A.1	MODELO DO ROTOR	63
A.2	O DISCO	64
A.3	A ÁRVORE	67
A.3.1	ENERGIA CINÉTICA DO EIXO	68
A.3.2	ENERGIA DE DEFORMAÇÃO DO EIXO	72
A.4	O MANCAL	77
A.5	FORÇAS DE DESBALANCEAMENTO	79
A.6	OBTENÇÃO DO MODELO GLOBAL	80
	Apêndice B – CÓDIGO DESENVOLVIDO EM ANSYS: DIAGRAMA DE CAMPBELL	83
	Apêndice C – CÓDIGO DESENVOLVIDO EM ANSYS: RESPOSTA AO DESBALANCEAMENTO	87

1 INTRODUÇÃO

Em máquinas rotativas a presença de perturbações causadas por forças excitadoras pode ocasionar grandes níveis de vibrações, especialmente nas passagens pelas velocidades críticas. A presença de vibrações indesejadas provoca uma diminuição no tempo de vida dos rotores, demanda manutenções periódicas mais frequentes e, em algumas situações, pode colocar em risco a operação segura das máquinas, particularmente as que operam em altas rotações. Este fenômeno é naturalmente tanto mais importante quanto mais refinado e preciso é o desempenho esperado para a máquina (ABREU, 1998).

O problema do amortecimento dos níveis de vibrações em máquinas rotativas é indiscutivelmente um dos temas mais importantes da dinâmica e a literatura é rica em propostas de solução para esta questão (ALVES, 2015). Os procedimentos se diferenciam ou pela natureza das forças de amortecimento empregadas ou pelo modo de operação dos controladores: ativos ou passivos.

Tradicionalmente, uma máquina rotativa pode passar rapidamente e com segurança por sua frequência crítica ao aumentar consideravelmente sua velocidade de rotação. Porém, esse método é ineficaz e geralmente falha, principalmente em casos onde a máquina não possui alta potência requerida. Outro método que vem sendo estudado pelos pesquisadores é a capacidade de controlar a rigidez e amortecimento do sistema utilizando materiais inteligentes. Tais materiais possuem a capacidade de mudar suas características mecânicas, tais como rigidez e amortecimento, quando submetidos a um determinado estímulo como: variação de temperatura, tensão mecânica ou campo elétrico aplicado. Pesquisas mais recentes com materiais inteligentes (HE et al., 2007; AQUINO, 2011; SILVA, 2011; ALVES, 2015; ENEMARK; SANTOS, 2016) mostram que as ligas de memória de forma são vistas como substitutos potenciais às molas helicoidais presentes nos mancais de sistemas rotativos.

As ligas de memória de forma (LMF) são materiais metálicos capazes de recuperar a geometria original quando induzidas por variação de temperatura e/ou de tensão, devido a transformação de fases que ocorrem no material. Os principais fenômenos associados à estas ligas são: a pseudoelasticidade e o efeito memória de forma (PAIVA, 2004). Existem diversos tipos de LMFs, sendo as mais conhecidas: as ligas à base de cobre e à base de ferro. As mais utilizadas e que apresentam os melhores resultados em aplicações tecnológicas

são as ligas de Níquel-Titânio (Ni-Ti).

As LMFs vêm sendo aplicadas nas mais diversas áreas comerciais como: aeroespacial (ABREU et al., 2013), biomédico (MACHADO; SAVI, 2003) entre outros (LAGOUDAS, 2008), destacando-se principalmente no controle de vibrações (SILVA, 2017). As LMFs pertencem à única classe dos materiais inteligentes que possui a habilidade de recuperar a sua forma quando aquecidas a uma determinada temperatura. Durante a transformação de fase entre martensita e austenita, uma histerese é formada, e a área sob a curva da histerese representa a energia dissipada no processo. Esta característica faz com que as LMFs sejam uma boa alternativa para a absorção de impactos e amortecimento de vibrações (LAGOUDAS, 2008).

Nayaga et al. (1987) propuseram um controlador ativo para minimizar as vibrações decorrentes da passagem nas velocidades críticas de um eixo rotativo utilizando um suporte de mancal com molas de LMF atuando em conjunto com molas de aço convencionais. O princípio de funcionamento do controlador é baseado na alteração da rigidez com a temperatura, sendo que no aquecimento há o encurtamento das molas, aumentando sua rigidez, e no resfriamento provoca-se o efeito inverso, diminuindo a rigidez do sistema.

Lees et al. (2007) avaliaram experimentalmente um controlador de rigidez de um pedestal de mancal por uma série de fios de LMF, dispostos em forma de bobina. O controle da temperatura foi realizado pela injeção de corrente elétrica nos fios de tal forma que o aquecimento provoca um aumento de rigidez e o resfriamento a sua diminuição. Por fim, os resultados teóricos simulados foram confrontados com os experimentais, especialmente durante o regime transiente para verificar a influência do aquecimento e resfriamento dos fios de LMF no comportamento dinâmico do sistema mecânico.

Zhu et al. (2009) realizaram experimentalmente o controle de vibrações de um rotor flexível utilizando o método de análise estatística multivariada. Um modelo não linear de histerese foi utilizado a fim de interpretar a curva de carga e descarga da LMF. O método de regressão múltipla foi aplicado com a finalidade de encontrar uma relação entre a tensão, deformação e temperatura. Realizou-se um controle ativo do tipo PID a fim de descrever a curva de tensão-deformação em diferentes temperaturas, além de verificar a região de temperatura em que o controle de vibração é mais eficiente.

Enemark et al. (2015) realizaram uma investigação experimental acerca da aplicação de molas helicoidais de LMF, em diferentes temperaturas, a fim de avaliar o comportamento dinâmico de um rotor flexível. Os resultados experimentais mostraram

que as mudanças na rigidez e o comportamento histerético das molas de LMF alteram substancialmente a dinâmica do sistema, tanto em termos de velocidade crítica quanto das formas modais de vibração.

Alves (2015) propôs um controle semi-ativo de vibrações em rotores flexíveis usando fios de LMF. O rotor em questão foi apoiado sobre dois mancais com bases flexíveis e suspenso por fios de LMF. O controle de vibrações foi realizado pelo tracionamento dos fios em ambos os lados do mancal de base flexível, funcionando como um amortecedor. Com isso, a pré-tensão gerada é obtida para que haja um ângulo entre o fio e a vertical, fazendo com que as forças exercidas pelos fios sejam decompostas em um plano e as atuantes estejam na direção horizontal. A suspensão do mancal foi encapsulada por uma câmara de aquecimento que visa controlar a temperatura dos fios de LMF.

Este trabalho apresenta uma proposta de utilização de molas helicoidais de LMF presentes em rotores flexíveis, cuja finalidade é promover a atenuação das vibrações laterais decorrentes das forças de desbalanceamento. Além disso, o presente trabalho busca avaliar numericamente a utilização de um modelo mais simplificado para representar adequadamente o comportamento da liga para diferentes carregamentos termomecânicos.

No desenvolvimento do trabalho, mais especificamente no capítulo 2, é formulado o modelo matemático de ligas com memória de forma (LMF). No capítulo 3 é apresentada a modelagem de molas de LMF. No capítulo 4, simulações numéricas são efetuadas para verificar o comportamento das molas de LMF no amortecimento dos sistemas mecânicos formulados. O trabalho se encerra com o capítulo 5 onde são apresentados os comentários, as conclusões e propostas futuras.

2 LIGAS COM MEMÓRIA DE FORMA

Neste capítulo são apresentados os fundamentos teóricos das ligas com memória de forma (LMFs), onde uma abordagem sobre as transformações de fase nestes materiais é apresentada de forma sucinta servindo como base para a compreensão de sua fenomenologia.

2.1 TRANSFORMAÇÕES DE FASE

Ligas metálicas podem ser representadas por diagramas de fases metalúrgicas, que são representações esquemáticas das condições de equilíbrio entre fases distintas. Esses diagramas são constituídos por linhas de equilíbrio ou fases limites que separam as diferentes fases uma das outras (LAGOUDAS, 2008).

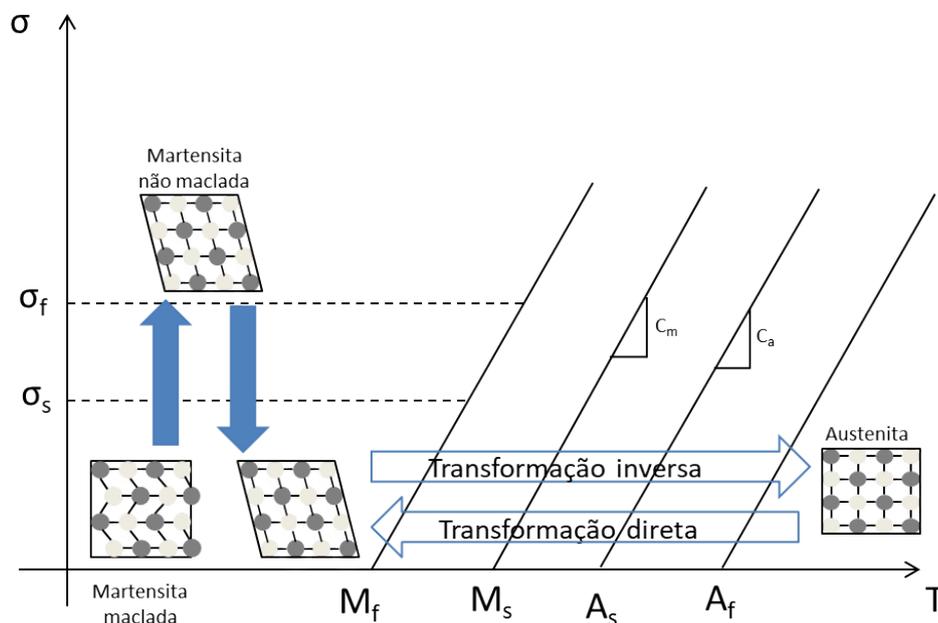
As ligas com memória de forma (LMF) apresentam duas fases estáveis distintas, uma em alta temperatura (austenita) e outra a baixa temperatura (martensita). Estas fases diferenciam-se entre si pelas suas estruturas cristalinas e pelas suas propriedades. A austenita apresenta uma estrutura cristalina cúbica e uma única variante ao passo que a martensita pode ter estrutura tetragonal, ortorrômbica ou monoclinica e pode apresentar até 24 variantes para uma liga NiTi.

A transformação de uma fase para outra não ocorre por difusão atômica, mas por distorção da rede cristalina. Cada cristal de martensita formado pode ter uma orientação específica que caracteriza uma variante. Estas variantes se agrupam em duas categorias: martensita maclada (*twinned martensite*), induzida por variação de temperatura, a qual é formada pela combinação das variantes auto-acomodadas, e martensita não maclada (*detwinned martensite*) ou reorientada, induzida por tensões mecânicas, na qual uma variante específica é dominante. A transformação de fase reversível de austenita para martensita e vice-versa, induzida pela temperatura ou por tensão, é que define o comportamento das LMFs (LAGOUDAS, 2008).

Ao resfriar uma LMF sem carregamento, a estrutura cristalina muda da austenita para martensita maclada. Essa transformação de fase é denominada de transformação direta. Quando ocorre a transformação da martensita para a austenita por meio de aquecimento, denomina-se essa mudança de fase de transformação inversa.

Na Figura 1, tem-se um esquema da estrutura cristalina da martensita e austenita para uma LMF e as delimitações de transformação de fase. Existem quatro delimitações associadas à temperatura. Durante a transformação direta, a austenita, sem carregamento, começa a se transformar em martensita maclada na temperatura de M_s (*martensitic start*) e completa sua transformação em M_f (*martensitic finish*). Na transformação inversa, a martensita inicia a transformação de fase em A_s (*austenitic start*) e se transforma completamente em austenita no ponto A_f (*austenitic finish*). Observa-se também o caso em que a martensita maclada se transforma em martensita não maclada. Essa transformação se dá por meio de uma aplicação de tensão mecânica, iniciando sua transformação em σ_s (*detwinning start process*) e se transforma completamente em martensita não maclada quando a tensão atinge um nível de σ_f (*detwinning finish stress*) (LAGOUDAS, 2008). Essa transformação de martensita maclada para a não maclada ocorre em baixas temperaturas (menores que M_f) e, mesmo retirando o carregamento, o material não retorna a sua forma original.

Figura 1- Gráfico representando as delimitações de transformação de fase de uma LMF.



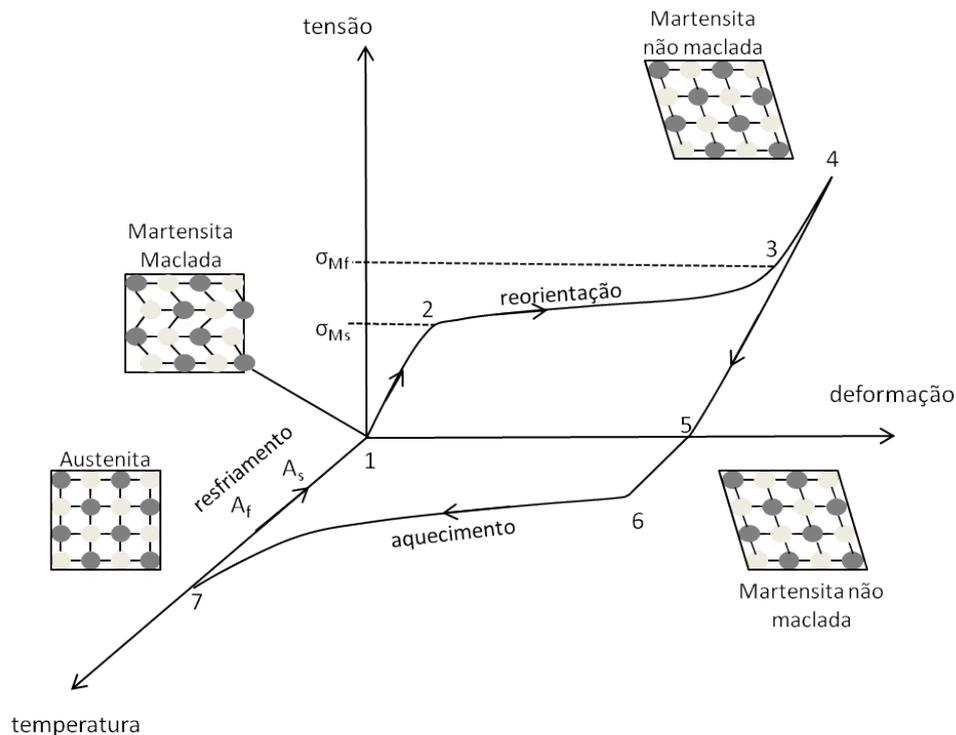
Fonte: Adaptado de Lagoudas (2008).

2.2 EFEITO MEMÓRIA DE FORMA

O efeito de memória de forma é descrito esquematicamente na Fig. 2. O material inicia em um ponto de referência dado pela temperatura e tensão mecânica iguais a

zero (o material está na fase martensítica). Inicia-se o processo de transformação aumentando a tensão sobre o material que tem um comportamento linear elástico (trecho de 1-2). Em seguida, apresenta deformação quasiplástica ao atingir a tensão crítica (trecho 2-3, região de transformação da martensita maclada em não maclada). O comportamento quasiplástico consiste em uma grande deformação residual advinda de uma reorientação martensítica induzida mecanicamente. No trecho 3-4, o material volta a se comportar elasticamente, sofrendo deformação linear (o material está completamente na fase martensita não maclada). No trecho 4-5, remove-se o carregamento, mas observa-se que, mesmo removendo a tensão mecânica, o material não retorna à sua forma original. O material apresenta uma deformação residual, sendo esse valor representado pelo ponto 5 no gráfico. Quando o material é aquecido acima da temperatura de A_f (temperatura final de austenita), a martensita se torna austenita. Essa mudança de fase faz com que ocorra a recuperação de forma do material (trecho 6-7). Durante o resfriamento, a transição de austenita para martensita ocorre sem carregamento e não ocorre mudanças no material (trecho 7-1), fechando o ciclo de recuperação de forma (ANTONUCCI; MARTONE, 2015).

Figura 2- Efeito de Memória de Forma.

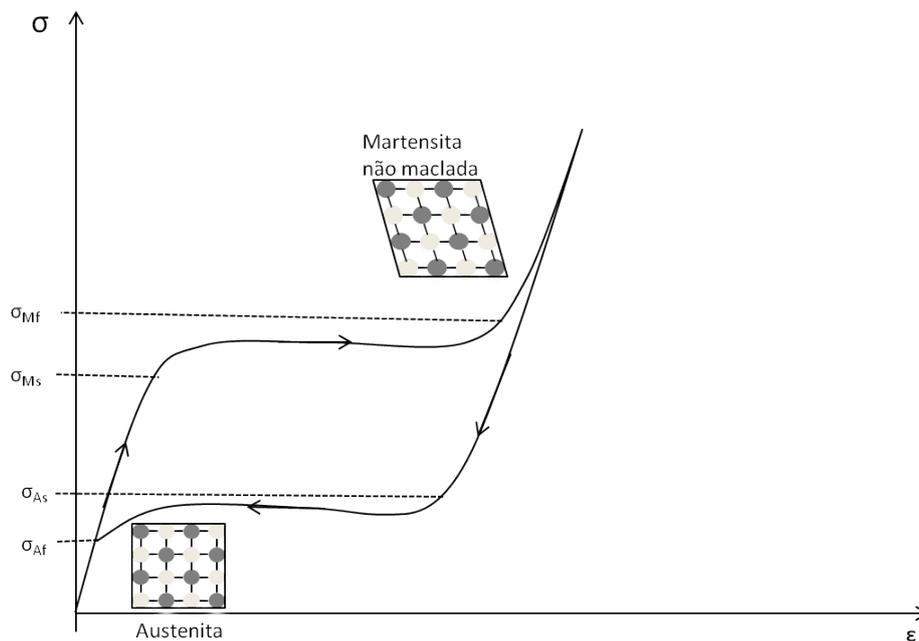


Fonte: Adaptado de Lagoudas (2008).

2.3 EFEITO PSEUDOELÁSTICO

O efeito de memória de forma, descrito anteriormente, requer mudanças na temperatura. Já o efeito pseudoelástico é de natureza isotérmica e envolve acúmulo de energia potencial. O comportamento pseudoelástico está associado a uma transformação induzida pela tensão mecânica quando a liga com memória de forma (LMF) estiver a uma temperatura acima de A_f (temperatura final de austenita). Este efeito pseudoelástico permite que a liga possua um comportamento elástico acima de níveis normais quando aplicado um carregamento na fase austenítica. Especificamente, a liga de NiTi apresenta deformação elástica em torno de 8%, enquanto a maioria dos metais apresenta deformação elástica menor que 1% (LAGOUDAS, 2008). O carregamento induz uma transformação de fase da austenita para martensita não maclada. No descarregamento, a fase da martensita se torna instável e volta a se transformar para a sua fase original austenita, resultando em uma recuperação completa de deformação após a remoção da carga (veja Fig. 3).

Figura 3- Efeito Pseudoelástico.



Fonte: Adaptado de Lagoudas (2008).

Na Figura 3, a microestrutura inicia-se em austenita. Durante o carregamento, a tensão crítica de transformação para martensita não maclada (σ_{Ms} - tensão de início de transformação de martensita) é alcançada e o material se transforma completamente em martensita não maclada ao atingir σ_{Mf} (tensão final de transformação de martensita). Uma vez que a transformação de fase está completa, o aumento de tensão mecânica apenas provocará deformação elástica na fase de martensita não maclada. A austenita é a única

fase estável a altas temperaturas sem carregamento. Portanto, durante o descarregamento, a tensão crítica para a transformação reversa é alcançada em σ_{A_s} (tensão de início de transformação de austenita) e termina sua transformação em σ_{A_f} (tensão final de transformação de austenita). Ao fim da remoção da tensão mecânica, o material possui sua deformação macroscópica recuperada completamente (ANTONUCCI; MARTONE, 2015). Observa-se também a formação de um laço de histerese, formado durante o carregamento e descarregamento. O efeito de histerese representa a energia mecânica dissipada. Todos os materiais possuem esse efeito, no entanto, este efeito é maior nas LMFs devido às suas transformações de fases.

A recuperação de forma que o material pode sofrer possui um limite devido ao regime elástico da martensita não maclada, obtida após a transformação. Se este limite for ultrapassado, o material irá se comportar plasticamente e a deformação não poderá ser mais recuperada (PAIVA, 2004).

2.4 MODELOS CONSTITUTIVOS DE LIGAS COM MEMÓRIA DE FORMA

Nas últimas décadas, diversos modelos matemáticos foram desenvolvidos para descrever o comportamento de uma liga com memória de forma (LMF) de forma adequada, sendo estes modelos divididos em dois tipos de abordagem: microscópica e macroscópica. Alguns destes modelos constitutivos são descritos a seguir.

2.4.1 Modelo de Tanaka

Tanaka e Nagaki (1982) utilizaram funções exponenciais para caracterizar a transformação de fase de uma LMF. Originalmente foi proposto para resolver problemas tridimensionais de materiais com efeito de memória de forma, mas ficou restrito a problemas unidimensionais.

Na transformação de fase de austenita para martensita, tem-se:

$$\xi = 1 - \exp[-a_m(M_s - T) - b_m\sigma] - \xi_0 \quad (1)$$

sendo a_m e b_m constantes do material, M_s é a temperatura de início de transformação em martensita, T a temperatura da liga, σ a tensão mecânica aplicada e ξ_0 fração martensita inicial e ξ é a fração martensita da liga.

A tensão limite para iniciar a transformação de fase é dada por:

$$\sigma_{m_s} = \frac{a_m}{b_m(T - M_s)} \quad (2)$$

Como a função de transformação é exponencial, o valor tende a 1 e, para contornar este problema, considera-se que ao fim da transformação, a fração martensítica total tem valor $\xi = 0.99$. A equação para determinar a tensão ao término da transformação é expressa por:

$$\sigma_{m_f} \geq \frac{2 \ln(10)}{b_m} - \frac{a_m}{b_m}(M_s - T) \quad (3)$$

Para a transformação de martensita para austenita, tem-se:

$$\xi = \xi_0 \exp[-a_A(T - A_s) - b_A \sigma] \quad (4)$$

sendo a_A e b_A constantes do material, T é a temperatura da liga, A_s é a temperatura de início de transformação para austenita e σ a tensão mecânica na liga.

Analogamente, a transformação de austenita para martensita, considera-se que ao término da transformação: $\xi = 0.01$. Esta relação se aplica para valores de tensão mecânica tais que:

$$\sigma_{A_s} \leq \frac{a_A}{b_A(T - A_s)} \quad (5)$$

Assim, no fim da transformação, a tensão mecânica é dada por:

$$\sigma_{A_f} \geq \frac{-2 \ln(10)}{b_A} - \frac{a_A}{b_A}(A_s - T) \quad (6)$$

2.4.2 Modelo Polinomial

Inicialmente proposto por Falk e Konopka (1990), este modelo baseia-se na teoria de *Devonshire*, utilizando energia livre na forma polinomial. O modelo é unidimensional e não leva em conta as variáveis internas da liga. Com isto, a energia depende apenas das variáveis observáveis, que são: a temperatura e a deformação.

Para temperaturas acima da qual a fase austenita é estável, a energia livre possui apenas um ponto de mínimo, correspondente à deformação nula, e representa a estabilidade da fase austenita. Já para temperaturas intermediárias, a energia deve possuir três pontos de mínimo, correspondentes à fase austenita, martensita não-maclada, associada à tração, e martensita não-maclada, associada a compressão. Para temperaturas abaixo da qual a martensita é estável, a energia deve possuir dois pontos de mínimo, correspondentes a martensita não-maclada, associada à tração e compressão, com deformação não nula.

Neste modelo, a equação constitutiva é dada por:

$$\sigma = a(T - M_f)\varepsilon - b\varepsilon^3 + \frac{b^2}{4a(A_f - M_f)}\varepsilon^5 \quad (7)$$

sendo a e b constantes positivas, variantes para cada material, T é a temperatura da liga, A_f a temperatura final de transformação para austenita, M_f é a temperatura final de transformação para martensita e ε é a deformação da liga.

Este é um modelo simples e representa qualitativamente a pseudoelasticidade e a memória de forma, mas não compreende a martensita livre de tensões.

2.4.3 Modelo de Liang e Rogers

Liang e Rogers (1990) utilizaram funções cosseno para descrever as transformações de fase de uma LMF. Neste modelo, a transformação de fase de austenita para martensita é equacionada por:

$$\xi = \frac{1 - \xi_0}{2} \cos\left[a_m\left(T - A_f - \frac{\sigma}{C_M}\right)\right] + \frac{1 - \xi_0}{2} \quad (8)$$

A transformação ocorre para tensões de:

$$C_M(T - M_s) < \sigma < C_M(T - M_f) \quad (9)$$

sendo C_M o coeficiente de influência da tensão nas temperaturas de transformação para a martensita, T é a temperatura da liga, A_s é a temperatura de início de transformação para austenita e σ é a tensão mecânica na LMF. O coeficiente a_m é dado por:

$$a_m = \frac{\pi}{M_s - M_f} \quad (10)$$

Já para a transformação de martensita para austenita, tem-se:

$$\xi = \frac{\xi_0}{2} \left\{ \cos \left[a_A \left(T - A_s - \frac{\sigma}{C_A} \right) \right] + 1 \right\} \quad (11)$$

A transformação de fase ocorrerá quando:

$$C_A(T - A_f) < \sigma < C_M(T - A_s) \quad (12)$$

Analogamente, C_A corresponde ao coeficiente de influência da tensão mecânica nas temperaturas de transformação para a austenita. O termo a_A é dado por:

$$a_A = \frac{\pi}{A_f - A_s} \quad (13)$$

sendo A_f e A_s as temperaturas final e inicial de transformação para austenita, respectivamente.

2.4.4 Modelo de Ikuta

Ikuta et al. (1991) utilizaram funções exponenciais para descrever as transformações de fase no material. O modelo leva em consideração o comportamento termoelástico de uma LMF, cujas transformações de fase dependem apenas da temperatura.

Há duas equações básicas para descrever o comportamento de uma LMF durante a transformação segundo este modelo. A equação 14 refere-se ao processo de aquecimento, onde ocorre a transformação de martensita para austenita, enquanto que a Eq. 15 descreve o resfriamento da liga, ocorrendo a transformação de austenita para martensita:

$$\xi_h = \frac{\xi_M}{1 + \exp \left[\frac{6.2}{A_f - A_s} \left(T - \frac{A_f + A_s}{2} \right) \right]} \quad (14)$$

$$\xi_c = \frac{1 - \xi_A}{1 + \exp\left[\frac{6.2}{M_s - M_f} \left(T - \frac{M_f + M_s}{2}\right)\right]} + \xi_A \quad (15)$$

sendo ξ_h e ξ_c as frações martensíticas presentes na liga durante o aquecimento e o resfriamento, respectivamente; A_s é a temperatura de início de transformação para austenita; A_f é a temperatura final de transformação para austenita; M_s é a temperatura de início da transformação para martensita; M_f é a temperatura final da transformação para martensita; ξ_M e ξ_A correspondem, respectivamente, à fração martensítica no início do aquecimento e do resfriamento; T é a temperatura no material e \exp a função exponencial.

2.4.5 Modelo de Brinson

Assim como o modelo de Liang e Rogers (1990), Brinson (1993) utilizou funções cosseno para caracterizar a transformação de fase, mas separou a fração martensítica em duas partes: a primeira, induzida por tensão mecânica (martensita não maclada ξ_S) e a segunda, induzida por temperatura (martensita maclada ξ_T). Deste modo, a fração martensita total (ξ) é dada por:

$$\xi = \xi_S + \xi_T \quad (16)$$

O modelo de Brinson (1993) é um modelo unidimensional e sua lei constitutiva é:

$$\sigma = E(\xi)(\varepsilon - \varepsilon_L \xi_S) + \Theta(T - T_0) \quad (17)$$

sendo σ a tensão; $E(\xi)$ é o módulo de elasticidade que está em função da fração martensítica (ξ); ε é a deformação; ε_L é a deformação residual máxima do material; Θ é relacionado com o coeficiente de expansão térmica ($\Theta = -\alpha_{LMF}E$), α_{LMF} é o coeficiente de expansão térmica do material, E é o módulo de elasticidade do material e T_0 é a temperatura de referência na qual não existe deformação devida a campo térmico.

O módulo de elasticidade da LMF está em função da fração martensítica (ξ), assim, a equação que define esta propriedade é dada por:

$$E(\xi) = \xi E_M + (1 - \xi) E_A \quad (18)$$

sendo E_A e E_M os módulos de elasticidade da austenita e da martensita, respectivamente.

Quando ξ for zero, o módulo de elasticidade da LMF será totalmente representado pela martensita (E_M) e caso ξ for um, o módulo de elasticidade da LMF será representado totalmente pela austenita (E_A). Desconsiderando a componente da expansão térmica da Eq. 17, pois seu valor é desprezível se comparado com a deformação decorrente da transformação de fases, a Eq. 17 se torna:

$$\sigma = (\xi E_M + (1 - \xi) E_A)(\varepsilon - \varepsilon_L \xi_S) \quad (19)$$

Segundo o modelo de Brinson (1993), as equações da cinética de transformação de fase são dadas por:

- Transformação para martensita não maclada:

Se $T > M_s$ e $\sigma_s + C_M(T - M_s) < \sigma < \sigma_f + C_M(T - M_s)$:

$$\xi_S = \frac{1 - \xi_{S0}}{2} \cos \left\{ \frac{\pi}{\sigma_s - \sigma_f} [\sigma - \sigma_f - C_M(T - M_s)] \right\} + \frac{1 + \xi_{S0}}{2} \quad (20)$$

$$\xi_T = \xi_{T0} - \frac{\xi_{T0}}{1 - \xi_{S0}} \xi_S - \xi_{S0} \quad (21)$$

Se $T < M_s$ e $\sigma_s < \sigma < \sigma_f$

$$\xi_S = \frac{1 - \xi_{S0}}{2} \cos \left[\frac{\pi}{\sigma_s - \sigma_f} (\sigma - \sigma_f) \right] + \frac{1 + \xi_{S0}}{2} \quad (22)$$

$$\xi_T = \xi_{T0} - \frac{\xi_{T0}}{1 - \xi_{S0}} (\xi_S - \xi_{S0}) + \Delta_{T\xi} \quad (23)$$

onde, se $M_f < T < M_s$ e $T < T_0$, tem-se:

$$\Delta_{T\xi} = \frac{1 - \xi_{T0}}{2} \cos [a_M(T - M_f)] + 1 \quad (24)$$

caso contrário, $\Delta_{T\xi} = 0$.

- Transformação para austenita:

Para $T > A_s$ e $C_A(T - A_f) < \sigma < C_A(T - A_s)$

$$\xi = \frac{\xi_0}{2} \left\{ \cos \left[a_A \left(T - A_s - \frac{\sigma}{C_A} \right) \right] + 1 \right\} \quad (25)$$

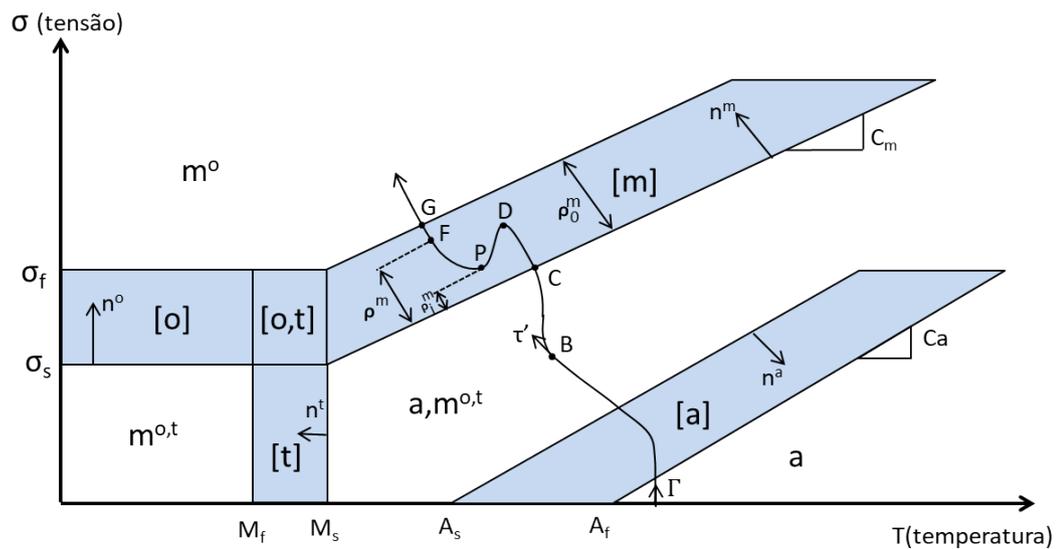
$$\xi_S = \xi_{S0} - \frac{\xi_{S0}}{\xi_0}(\xi_0 - \xi) \quad (26)$$

$$\xi_T = \xi_{T0} - \frac{\xi_{T0}}{\xi_0}(\xi_0 - \xi) \quad (27)$$

2.4.6 Modelo de Gao

O modelo de Gao et al. (2007) é similar ao de Brinson (1993), também dividindo a fração martensítica em duas partes, mas apresenta diferentes funções de transformação de fase. O diagrama de fases (Fig. 4) representa as regiões de transformação da LMF de acordo com o modelo de Gao et al. (2007).

Figura 4- Diagrama de fases de uma liga com memória de forma.



Fonte: Gao et al. (2007).

No diagrama de fases acima, as regiões em azul representam as zonas de transformação de fase do material e as regiões em branco são chamadas de “*Dead Zones*”, onde não ocorre nenhuma transformação. Na região [a] ocorre a transformação da martensita em austenita; [t] representa a região que ocorre a transformação da austenita em martensita maclada; na região [m] ocorre a transformação da martensita maclada e/ou austenita em martensita não maclada e em [o] ocorre a transformação da martensita maclada em não maclada. A região designada por [o,t] é chamada de “*overlapping*” e nessa região pode ocorrer as transformações tanto de [o] quanto de [t].

Nas regiões de transformação, a fração martensítica irá ser alterada somente se

o caminho do carregamento tiver uma componente positiva na direção do vetor que caracteriza determinada transformação de fase, ou seja, a transformação só ocorre se a seguinte condição for satisfeita:

$$\tau' \cdot n^i > 0 \quad i = [m], [a], [o] \text{ ou } [t] \quad (28)$$

sendo τ' a direção tangente ao caminho do carregamento e n^i o vetor direcional da transformação de fase.

Na Figura 4 é mostrado um caminho arbitrário (Γ) de um carregamento onde pode ser observado um ponto D na região $[m]$. Neste ponto ocorre a interrupção da transformação de fase do material devido à mudança do caminho do carregamento. Este ponto é chamado de ponto de transição (*switching point*). Os pontos de entrada C , saída G e de reinício de transformação P , também são considerados pontos de transição. Na formulação matemática, somente os últimos pontos de transição são considerados, possibilitando, dessa forma, um modelo computacional mais rápido (GAO et al., 2007).

A evolução da fração martensítica nas transformações direta e inversa pode ser escrita como:

$$\xi = \xi_j f^{[a]}(Z^{[a]}) \quad (29)$$

$$\xi = \xi_j + (1 - \xi_j) f^{[m]}(Z^{[m]}) \quad (30)$$

onde o subscrito j representa o último ponto de transição e $f^{[a]}$ e $f^{[m]}$ são as funções de transformação que variam de 0 a 1. Existem diversas funções que podem ser utilizadas para interpolar os valores entre 0 e 1, mas este modelo utiliza a função cosseno devido a sua simplicidade de integração e diferenciação (GAO et al., 2007).

Assim, as funções de transformação são dadas por:

$$f^{[a]}(Z^i) = 1 - \frac{1}{2}[1 - \cos(\pi Z^i)] \quad (31)$$

$$f^{[m]}(Z^i) = \frac{1}{2}[1 - \cos(\pi Z^i)] \quad (32)$$

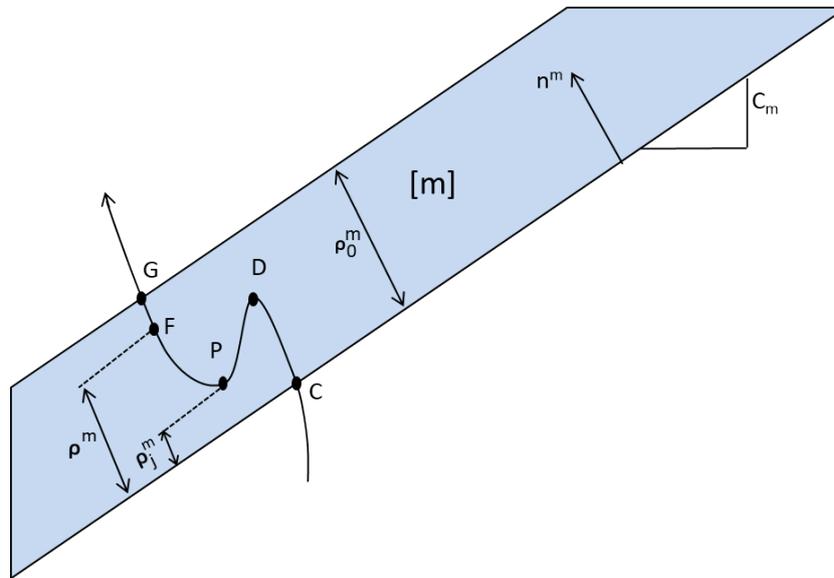
onde Z^i é a razão de distância na zona i (representa as regiões $[m]$, $[a]$, $[o]$ ou $[t]$) com relação ao último ponto de transição j . Assim, Z^i varia de 0 a 1 e é definida como:

$$Z^i(T, \sigma) = \frac{\rho^i - \rho_j^i}{\rho_o^i - \rho_j^i} \quad (33)$$

sendo ρ_i a distância do ponto atual ao ponto de entrada da fronteira da zona de transformação i , notando que, por definição, ρ_i é igual a 0 na entrada e ρ_i igual a 1 no ponto de saída; ρ_j^i é a distância entre o último ponto de transição de transformação à fronteira e ρ_o^i é o comprimento da zona de transformação (GAO et al., 2007).

A Figura 5 apresenta um exemplo destes últimos parâmetros na região da martensita.

Figura 5- Região de Transformação de fase da Martensita.



Fonte: Adaptado de Gao et al. (2007).

As distâncias ρ_i , ρ_j^i e ρ_o^i podem ser determinadas pelas expressões abaixo (GAO et al., 2007):

$$\begin{aligned} \rho^i &= n_1^i(T - T_{in}^i) + n_2^i(\sigma - \sigma_{in}^i) \\ \rho_j^i &= n_1^i(T_j - T_{in}^i) + n_2^i(\sigma_j - \sigma_{in}^i) \\ \rho_o^i &= n_1^i(T_{out}^i - T_{in}^i) + n_2^i(\sigma_{out}^i - \sigma_{in}^i) \end{aligned} \quad (34)$$

onde (n_1^i, n_2^i) são as componentes do vetor n^i ; $(T_{in}^i; \sigma_{in}^i)$ é o ponto de entrada na zona de transformação i ; $(T_{out}^i; \sigma_{out}^i)$ é o ponto de saída da zona de transformação e $(T_j^i; \sigma_j^i)$ é o último ponto de transição de transformação computado.

Os valores de cada uma dessas variáveis podem ser determinados por meio da Tab. 1.

Tabela 1- Pontos de entrada, saída e direções normais para cada zona (GAO et al., 2007).

Zona	$(T_{in}^i, \sigma_{in}^i)$	(n_1^i, n_2^i)	$(T_{out}^i, \sigma_{out}^i)$
[a]	$(A_s, 0)$	$\frac{C_A}{\sqrt{1+C_A^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1+C_A^2}}$	$(A_f, 0)$
[t]	$(M_s, 0)$	-1, 0	$(M_f, 0)$
[m]	(M_s, σ_s)	$-\frac{C_M}{\sqrt{1+C_M^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+C_M^2}}$	(M_s, σ_f)
[o]	(M_s, σ_s)	$-\frac{C_D}{\sqrt{1+C_D^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+C_D^2}}$	(M_s, σ_f)

Com as equações apresentadas, obtêm-se as expressões para as frações de martensita maclada e não maclada para cada região de transformação, onde o índice *swi* refere-se ao último ponto de transição.

As equações 35 e 36 são obtidas para a zona de transformação [a] e são determinadas por meio das equações 29 e 31. Dessas equações observamos que se o caminho do carregamento tiver componentes positivas na direção do vetor de transformação de fase n^a , a fração martensítica pode ser calculada a partir do último ponto de transição e de Z (distância do ponto atual):

$$\xi_T^{[a]} = \xi_T^{swi} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\pi Z^{[a]}) \right] \quad (35)$$

$$\xi_S^{[a]} = \xi_S^{swi} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\pi Z^{[a]}) \right] \quad (36)$$

Para a região de transformação [t] a fração da martensita não maclada (ξ_S) que possui transformação induzida pela tensão mecânica, permanece inalterada, enquanto que a fração martensítica maclada (ξ_T) que possui transformação induzida pela temperatura, aumenta com o decréscimo da temperatura até um valor máximo de $1 - \xi_S$.

Desta forma, na região [t], as frações martensíticas podem ser escritas como:

$$\xi_T^{[t]} = 1 - \xi_S^{swi} - (1 - \xi_S^{swi} - \xi_T^{swi}) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\pi Z^{[t]}) \right] \quad (37)$$

$$\xi_S^{[t]} = \xi_S^{swi} \quad (38)$$

Para as regiões $[m]$ e $[o]$, a reorientação da martensita maclada e a transformação da austenita em martensita não maclada ou orientada ocorre quando o caminho do carregamento possui componentes positivas na direção do vetor de transformação de cada região. Dessa forma, as frações martensíticas são (GAO et al., 2007):

$$\xi_T^{[m]} = \xi_T^{swi} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\pi Z^{[m]}) \right] \quad (39)$$

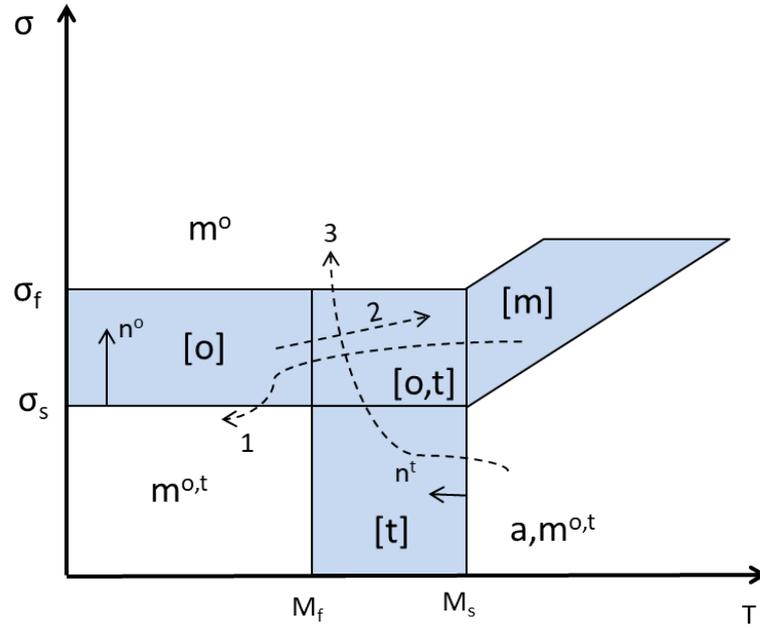
$$\xi_S^{[m]} = \xi_S^{swi} + (1 - \xi_S^{swi}) \left[1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\pi Z^{[m]}) \right) \right] \quad (40)$$

$$\xi_T^{[o]} = \xi_T^{swi} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\pi Z^{[o]}) \right] \quad (41)$$

$$\xi_S^{[o]} = \xi_S^{swi} + (1 - \xi_S^{swi}) \left[1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\pi Z^{[o]}) \right) \right] \quad (42)$$

A última região a ser analisada é a região de "overlapping". Esta região necessita de uma atenção maior do que as outras devido sua maior complexidade de funcionamento. A Figura 6 mostra três caminhos de carregamentos de transformação possíveis nesta região. O primeiro carregamento possui componente positiva somente na direção do vetor de transformação da região $[t]$, de forma que para se calcular a fração martensítica se utiliza as equações 37 e 38. O segundo carregamento possui componente positiva somente na direção normal de $[o]$, desta forma para o cálculo da fração martensítica se utiliza as equações 39 e 40. O terceiro caminho se destaca por possuir componente positiva em ambas as direções, $[o]$ e $[t]$. Neste caso, ocorre uma transformação induzida pela tensão mecânica e temperatura simultaneamente.

Figura 6- Região de Transformação de fase do "overlapping".



Fonte: Gao et al. (2007).

Dessa forma, para a região de "overlapping" (região $[o,t]$), o cálculo das frações martensíticas é dado por (GAO et al., 2007):

$$\xi_T^{[o,t]} = (1 - \xi_S^{swi} - (1 - \xi_S^{swi} - \xi_T^{swi})[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\pi Z^{[t]})])[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\pi Z^{[o]})] \quad (43)$$

$$\xi_S^{[o,t]} = \xi_S^{swi} + (1 - \xi_S^{swi})(1 - [\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\pi Z^{[o]})]) \quad (44)$$

2.5 AFERIÇÃO DO MODELO DE GAO

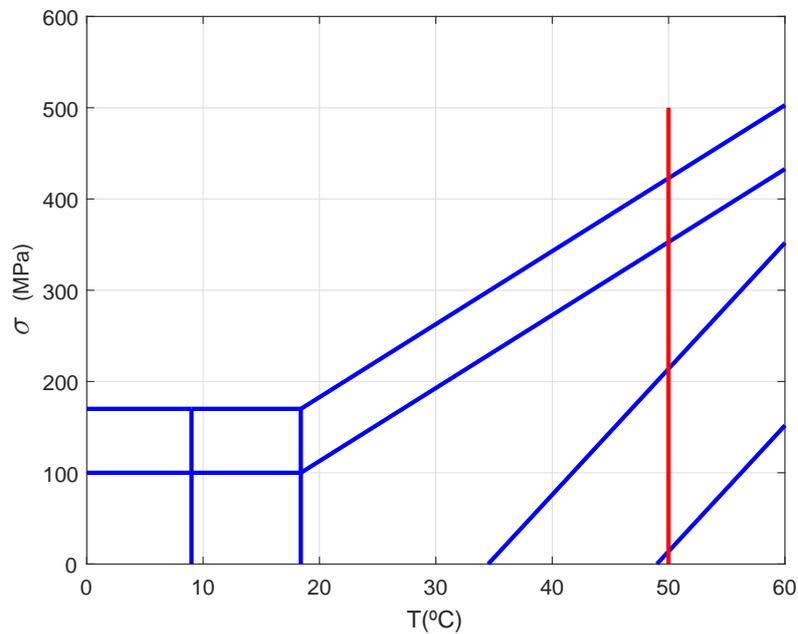
Nesta seção será feita uma aferição do modelo numérico simulado em relação ao trabalho de Gao et al. (2007). O material utilizado para a realização da simulação será uma liga de Níquel-Titânio e suas propriedades termomecânicas estão apresentadas na Tab. 2.

Tabela 2- Propriedades termomecânicas da liga com memória de forma (GAO et al., 2007).

Material	Temperaturas	Constantes
$E_A = 67 \text{ GPa}$	$M_f = 9 \text{ }^\circ\text{C}$	$C_M = 8 \text{ MPa }^\circ\text{C}^{-1}$
$E_M = 26.3 \text{ GPa}$	$M_s = 18.4 \text{ }^\circ\text{C}$	$C_A = 13.8 \text{ MPa }^\circ\text{C}^{-1}$
$\varepsilon_L = 0.067$	$A_s = 34.5 \text{ }^\circ\text{C}$	$\sigma_s = 100 \text{ MPa}$
	$A_f = 49 \text{ }^\circ\text{C}$	$\sigma_f = 170 \text{ MPa}$

O carregamento aplicado será de 500 MPa seguido de seu descarregamento completo a uma temperatura fixa de 50 °C. O caminho deste carregamento pode ser visto na Fig. 7, representada pela linha vermelha. Nota-se que, nessa temperatura, o material está em uma região que ocorre o efeito pseudoelástico (veja Seção 2.3).

Figura 7- Gráfico de Fases com representação do carregamento na temperatura de 50°C .

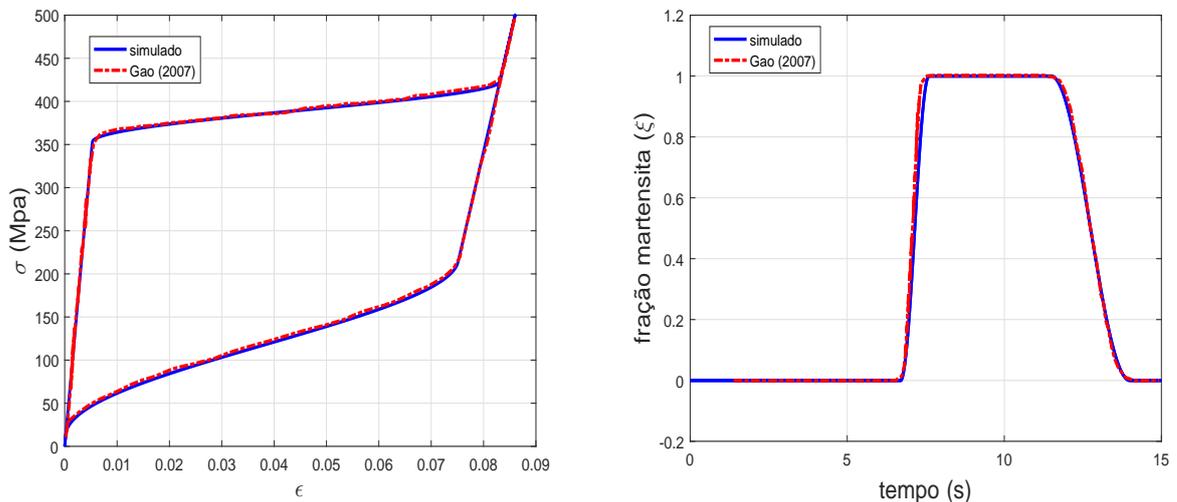


Fonte: Autor.

A Figura 8a apresenta a comparação e a validação do modelo simulado com o trabalho de Gao et al. (2007). O gráfico corresponde a uma curva tensão-deformação que evidencia o efeito pseudoelástico. Pelo gráfico é possível observar que o modelo simulado corresponde à aproximadamente o mesmo valor de tensões críticas de transformações de fase e de deformação com o modelo simulado por Gao et al. (2007). Na Figura 8b, tem-se a

comparação da fração martensítica em função do tempo. O material inicia em austenita, com o valor da fração martensítica igual a zero, até que a tensão mecânica atinja a região de transformação em martensita. O tempo em que inicia a transformação da austenita para a martensita não maclada é por volta dos 6.7 segundos e termina a transformação aos 7.6 segundos. A próxima transformação de fase ocorre no descarregamento no tempo de 11.5 segundos e termina sua transformação aos 14 segundos. A partir desse tempo, o material se encontra novamente na fase austenítica ($\xi_S = \xi_T = 0$). O tempo compreendido entre os 8 e 11.5 segundos é onde se encontra a martensita não maclada pura ($\xi_S = 1$) e corresponde a região de transição do carregamento, ou seja, o carregamento atinge seu valor máximo aos 8 segundos e a partir desse ponto inicia-se a retirada do carregamento.

Figura 8- Comportamento do efeito Pseudoelástico.

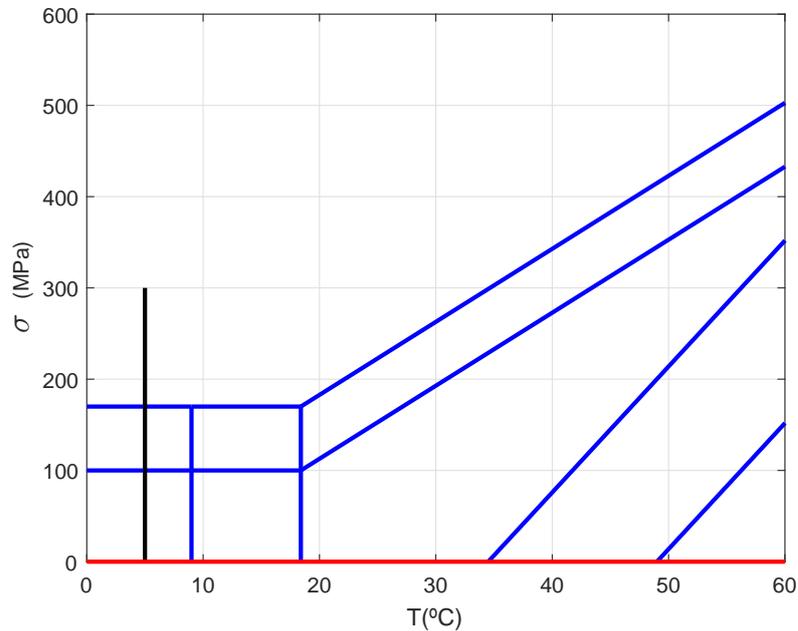


(a) Diagrama tensão-deformação em $T = 50^{\circ}C$

(b) Fração martensítica

O próximo efeito a ser verificado é o efeito de memória de forma. A Figura 9 mostra o gráfico de fases, e nele está representado o caminho percorrido pelo carregamento termomecânico. O caminho em preto representa uma transformação induzida pela tensão mecânica e em vermelho uma transformação induzida pela temperatura.

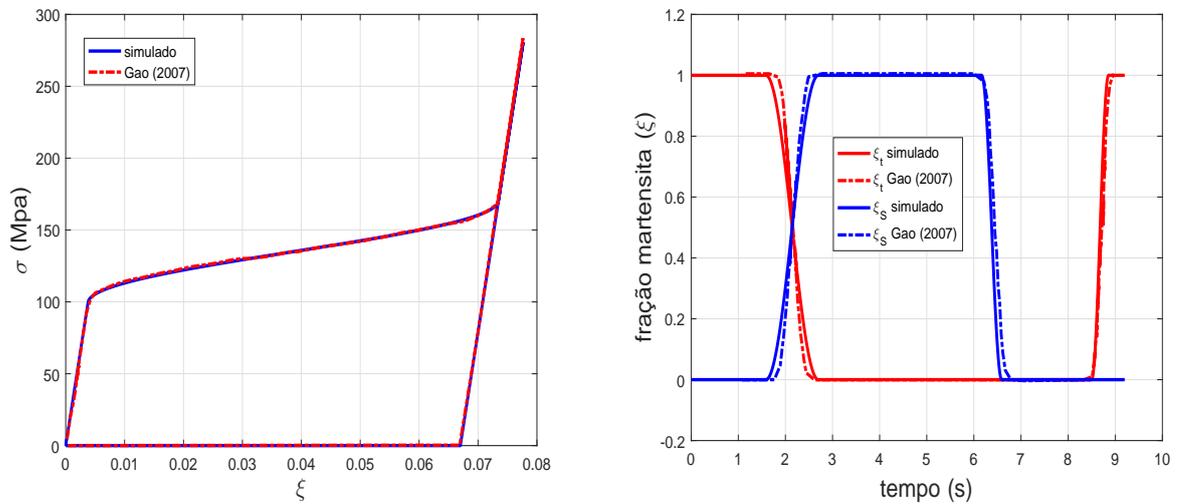
Figura 9- Gráfico de fases com representação do carregamento na temperatura de 5°C .



Fonte: Autor.

A Figura 10a mostra o gráfico de tensão por deformação para este carregamento termomecânico, no qual o material é submetido nas seguintes condições:

- O material se encontra a uma temperatura constante de 5°C na fase de martensita maclada ($\xi_T = 1$ e $\xi_S = 0$) e livre de tensão mecânica.
- aplica-se ao material um carregamento de até 280 MPa e posteriormente realiza-se um descarregamento de até 0 MPa. O material, após esse ciclo, sofre transformação de martensita maclada para não maclada ($\xi_T = 0$ e $\xi_S = 1$).
- ao término do segundo passo, faz-se o aquecimento do material a uma temperatura acima de A_f , ou seja, realiza-se a transformação de fase induzida termicamente, no qual, ao fim desse processo, o material recupera toda a sua deformação e se encontra na fase austenítica ($\xi_T = \xi_S = 0$).
- e finalmente, resfria-se o material a uma temperatura abaixo de M_f . Ao fim desse processo, o material retorna a fase de martensita maclada ($\xi_T = 1$ e $\xi_S = 0$).

Figura 10- Comportamento do efeito memória de forma.(a) Diagrama tensão-deformação para $T = 5^\circ C$

(b) Fração Martensítica

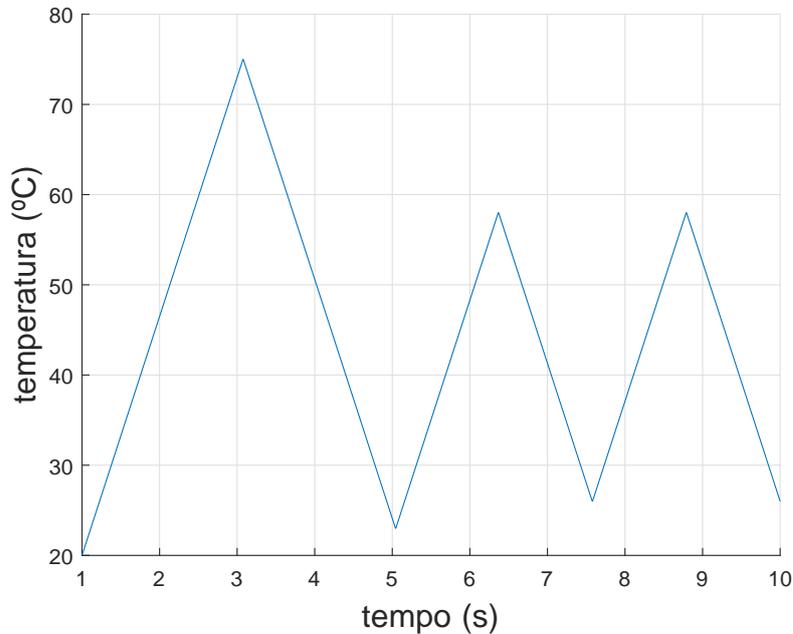
A Figura 10b apresenta a evolução da fração martensítica para esse ciclo termomecânico em função do tempo. Inicialmente, o material está na fase completa de martensita maclada ($\xi_T = 1$) e então se transforma em martensita não maclada ao longo do carregamento. A transformação de fase inicia-se em 1.8 segundos e termina em 2.7 segundos aproximadamente. O descarregamento não induz mudança na fração martensítica e corresponde a faixa de tempo de 2.7 segundos a 6.3 segundos. A fração martensítica terá seu valor alterado ao se realizar o aquecimento do material. O aquecimento se inicia em 5 segundos e termina em 7.5 segundos. A transformação induzida pelo aquecimento se inicia em 6.3 segundos e termina por volta dos 6.8 segundos. Ao fim dessa transformação, tem-se austenita pura. Por fim, realiza-se o resfriamento que inicia em 7.5 segundos e termina em 9.5 segundos. A transformação induzida pelo resfriamento inicia no tempo de 8.5 segundos e termina em 9.5 segundos, aproximadamente. Ao fim dessa transformação, tem-se martensita maclada.

2.5.1 Carregamento Cíclico

Nesta seção são simulados dois exemplos de carregamentos cíclicos e comparados com os resultados obtidos por Gao et al. (2007). O objetivo principal dessas simulações é demonstrar a robustez de seu modelo em representar transformações incompletas.

No primeiro caso, a temperatura sofre variação cíclica (veja Fig. 11), enquanto a tensão mecânica é mantida constante em 230 MPa. No início da simulação, o material se encontra na fase de martensita não maclada pura à uma temperatura de 25°C .

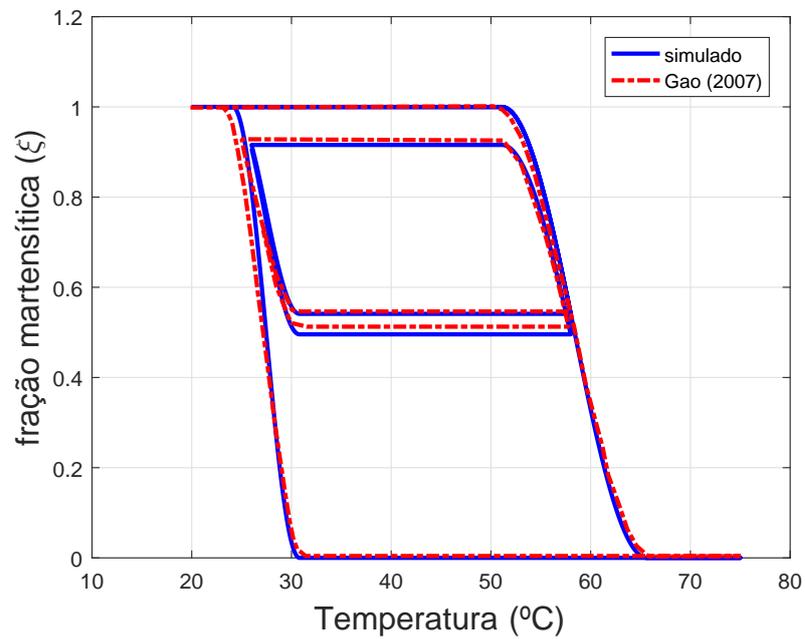
Figura 11- Carregamento cíclico da temperatura.



Fonte: Autor.

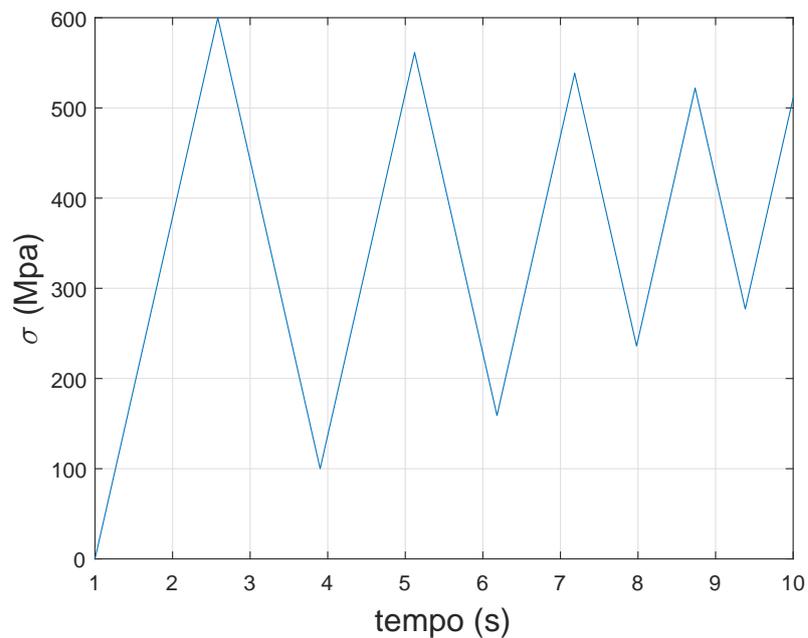
Na Figura 12, observa-se a formação de curvas internas. Estas curvas surgem devido ao fato do carregamento cíclico provocar transformações incompletas no material. Este fenômeno é denominado de *Minor Loopings* ou pequenos laços de histereses. Comparando-se os resultados obtidos pelo autor com aqueles fornecidos por Gao et al. (2007), nota-se que os gráficos são semelhantes. A pequena diferença existente entre eles é devido aos dados que foram coletados para a simulação. Tais dados foram obtidos de forma aproximada no trabalho de Gao et al. (2007) e não estão disponíveis todos os dados necessários para realizar a mesma simulação. Os dados que foram utilizados de forma aproximada são: a ciclagem da temperatura, a ciclagem da tensão mecânica e o número de ciclos utilizados.

Figura 12- Carregamento térmico cíclico com tensão mecânica constante.



Fonte: Autor.

Figura 13- Carregamento cíclico da tensão mecânica.

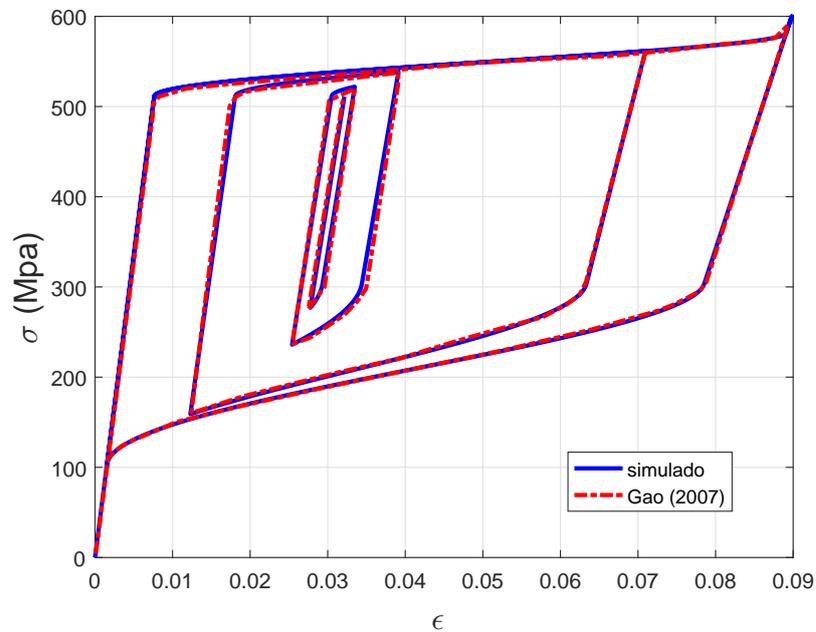


Fonte: Autor.

Para o segundo caso é aplicada uma tensão mecânica cíclica (veja Fig. 13) à uma temperatura constante de $56.5^{\circ}C$. O material inicialmente se encontra na fase austenítica e se transforma em martensita não maclada induzida pela tensão. Com a gradual redução

da tensão ao longo do tempo, começam a surgir transformações incompletas, surgindo dessa forma os *loops* de histerese, como podem ser observados na Fig. 14.

Figura 14- Carregamento mecânico cíclico com temperatura constante.



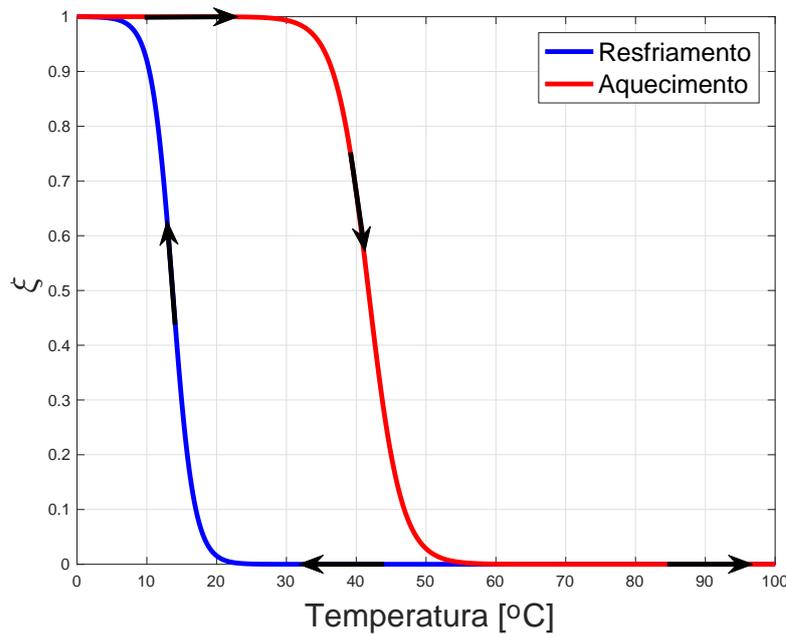
Fonte: Autor.

No gráfico de tensão-deformação (Fig. 14) também é importante destacar que o comportamento das LMF asseguram que, sob carregamento cíclico, ocorre dissipação de energia e, como pode ser visto, a largura da histerese é proporcional à amplitude da tensão mecânica alternada.

2.6 COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS DE GAO E IKUTA

Utilizando as equações 14 e 15, obteve-se o laço de histerese descrito pelo modelo de Ikuta et al. (1991) (veja Fig. 15), gerado pelo aquecimento e resfriamento da LMF. Na Fig. 15, as setas representam o caminho da fração martensítica (ξ) durante o processo.

Figura 15- Laço de histerese no modelo de Ikuta et al. (1991).



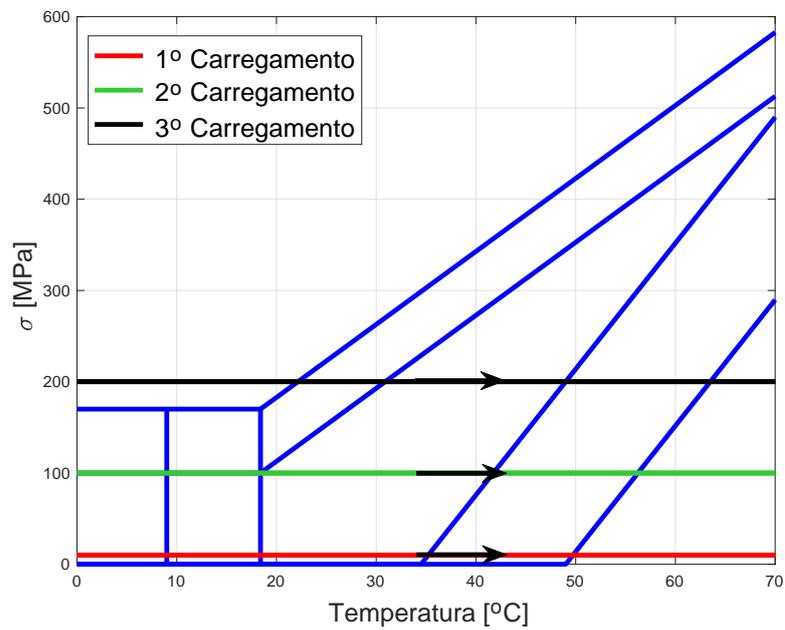
Fonte: Autor.

Vale ressaltar que, devido à presença da função exponencial utilizada neste modelo, o valor da fração martensítica não atinge o valor 0 quando a temperatura A_f na liga é atingida no aquecimento. Analogamente, o valor de ξ não atinge o valor igual a 1 no resfriamento, onde a temperatura chega à M_f . Além disso, deve-se notar que as transformações de fase independem da tensão mecânica atuante, diferentemente do modelo de Gao et al. (2007), descrito anteriormente.

Como visto na Seção 2.4.6, o modelo de Gao et al. (2007) tem um nível de complexidade numérica maior que o modelo de Ikuta et al. (1991), embora seja o que melhor descreve o comportamento termomecânico de uma LMF (SILVA, 2017). Neste sentido, avaliou-se a possibilidade de se utilizar o modelo de Ikuta et al. (1991) para a liga estudada neste trabalho. Para isto, foram simulados três carregamentos termomecânicos distintos de aquecimento e de resfriamento, com tensão mecânica variável, verificando-se a evolução das frações martensíticas (ξ) em ambos os modelos.

Para o aquecimento, os carregamentos foram divididos da seguinte forma: aplicou-se inicialmente um valor mais baixo de tensão mecânica: 15 MPa, seguido de um valor intermediário de 100 MPa e, por fim, um valor mais elevado igual a 200 MPa. Os carregamentos termomecânicos para o modelo de Gao et al. (2007) estão representados na Fig. 16.

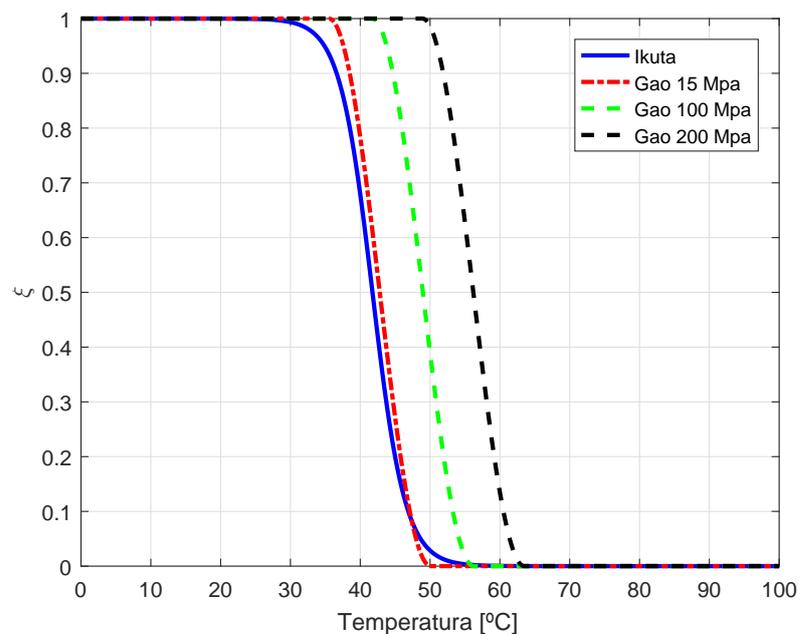
Figura 16- Carregamentos termomecânicos durante o aquecimento.



Fonte: Autor.

As curvas para a evolução da fração martensítica (ξ) obtidas durante o aquecimento são mostradas na Fig. 17.

Figura 17- Evolução de ξ durante o aquecimento.

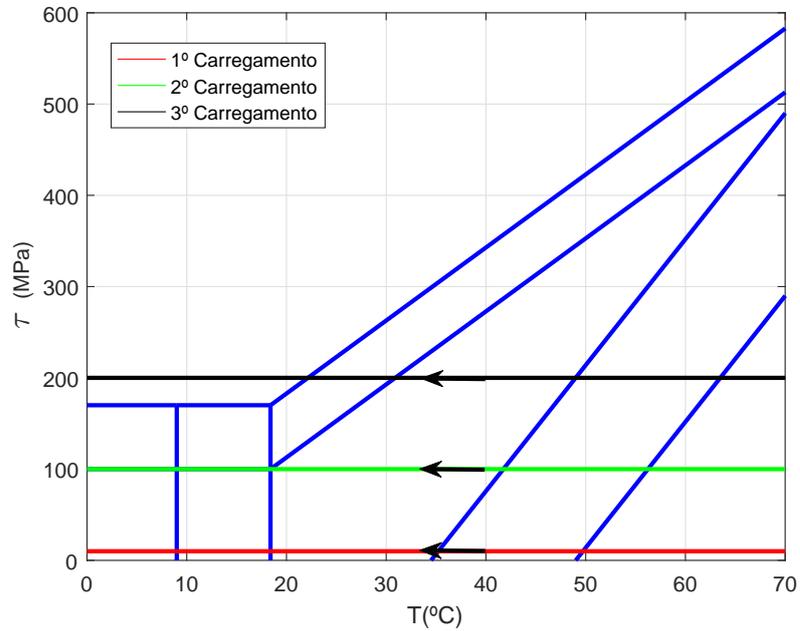


Fonte: Autor.

Similarmente ao aquecimento, no resfriamento os carregamentos termomecânicos são representados pela Fig. 18. Assim, as curvas para a evolução da fração martensítica (ξ),

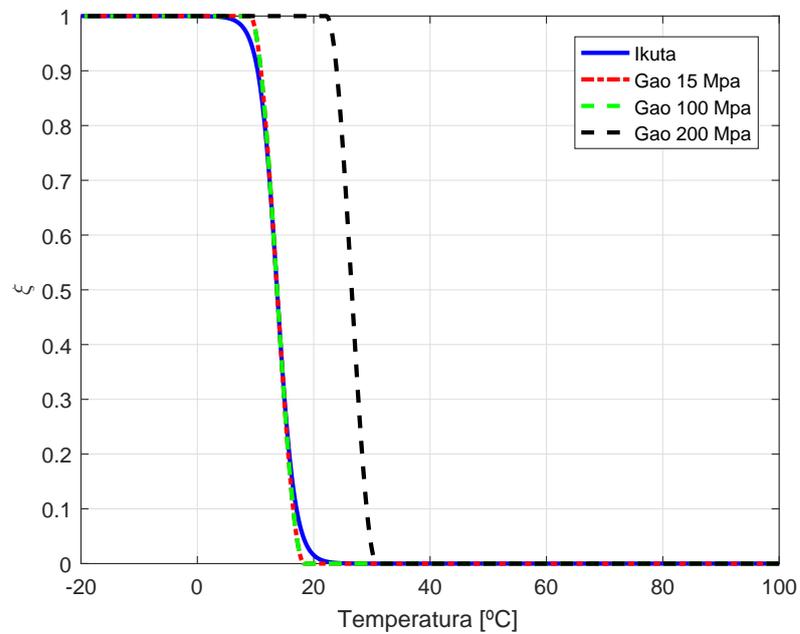
obtidas durante o resfriamento, são mostradas na Fig. 19.

Figura 18- Carregamentos termomecânicos durante o resfriamento.



Fonte: Autor.

Figura 19- Evolução de ξ durante o resfriamento.



Fonte: Autor.

A partir da análise das figuras 17 e 19, conclui-se que, para baixos valores de tensão mecânica durante o aquecimento (de até 15 MPa) e valores até 100 MPa no resfriamento, as curvas dos modelos de Ikuta et al. (1991) e Gao et al. (2007) são muito próximas. Desta forma, para tais faixas de valores, é justificável a utilização do modelo de Ikuta et al. (1991) para descrever o comportamento termomecânico da LMF durante as transformações de fase, o que facilita a implementação numérica devido à simplicidade do modelo utilizado.

Silva (2017) efetuou uma série de simulações numéricas utilizando os modelos de Ikuta et al. (1991) e Gao et al. (2007), para demonstrar a atenuação de vibrações em sistemas de um e dois graus de liberdade contendo molas helicoidais de LMF. Notou-se, entretanto, que para pequenas forças de excitação, não houve diferença entre os deslocamentos apresentados pelos sistemas dinâmicos (1 e 2 gdl) utilizando os modelos de Ikuta et al. (1991) e Gao et al. (2007).

3 MOLAS HELICOIDAIS DE LIGA COM MEMÓRIA DE FORMA

As molas são componentes mecânicos que possuem como característica principal a capacidade de apresentar grandes deslocamentos recuperáveis. São utilizadas em máquinas para exercer força, fornecer flexibilidade e armazenar ou absorver energia. Dentre os diversos tipos de elementos existentes para aplicações na redução de vibrações, as molas helicoidais de LMF são uma boa alternativa por apresentarem variação de rigidez quando sujeitas à aquecimentos ou resfriamentos. Para molas helicoidais confeccionadas de LMF o módulo de elasticidade pode aumentar até aproximadamente três vezes com o aumento da temperatura (AGUIAR, 2011).

3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA DE MOLAS DE LMF

Segundo Shigley e Mischke (2005), a força de restauração interna (F_{LMF}), sofrida por uma mola helicoidal (Fig. 20), pode ser calculada por:

$$F_{LMF} = \tau \frac{\pi d^3}{K_s 8D} \quad (45)$$

sendo τ a tensão de cisalhamento, d é o diâmetro do fio, D é o diâmetro médio de espira e K_s é um fator de correção da tensão de cisalhamento definido por:

$$K_s = \frac{2C + 1}{2C} \quad (46)$$

sendo C dada pela equação abaixo:

$$C = \frac{D}{d} \quad (47)$$

Figura 20- Mola helicoidal.



Fonte: Shigley e Mischke (2005).

A equação para o cálculo da tensão de cisalhamento é semelhante ao apresentada pela Eq. 19, como pode ser observado a seguir (JUNIOR, 2012):

$$\tau = G(\xi)(\gamma - \gamma_L \xi_S) \quad (48)$$

sendo

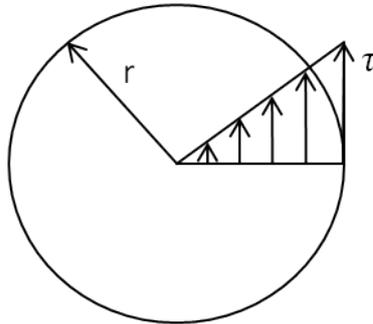
$G(\xi) = \frac{E(\xi)}{2(1+\nu)}$ - módulo de cisalhamento, onde ν é o coeficiente de Poisson e o módulo de elasticidade (E) é função da fração martensítica (ξ).

γ - deformação angular;

γ_L - deformação angular residual máxima do material.

Em uma mola helicoidal a tensão de cisalhamento atuante no fio é formada de esforços envolvendo componentes de dois tipos: cortante e torção (AGUIAR, 2011). As molas metálicas normalmente operam no regime linear e elástico, apresentando uma distribuição linear das tensões de cisalhamento ao longo da seção transversal do fio da mola, como mostrado na Fig. 21.

Figura 21- Distribuição da tensão de cisalhamento ao longo da seção transversal do fio de uma mola linear .



Fonte: Aguiar (2011).

Pela Fig. 21, observa-se que a deformação é nula no centro da mola. Segundo Aguiar (2011), na superfície do fio, o valor máximo da deformação angular é:

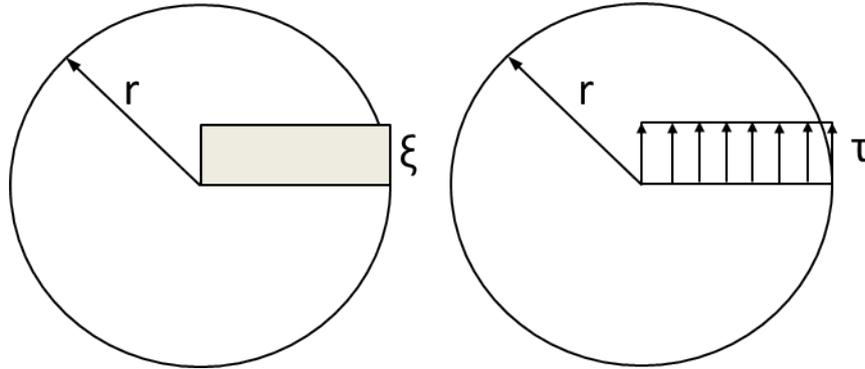
$$\gamma_{max} = \frac{d}{\pi D^2 N} x \quad (49)$$

sendo N o número de espiras da mola e x é o deslocamento longitudinal.

As molas helicoidais de LMF podem apresentar transformações de fase ao longo do fio durante o seu uso. Devido a essa capacidade, a distribuição de tensão de cisalhamento ao longo da seção transversal do fio é não linear. Dessa forma, na seção transversal do fio podem estar presentes duas regiões distintas: uma região linear elástica, onde a transformação de fase não ocorreu e uma região não linear onde a transformação de fase está ocorrendo.

Existem vários modelos propostos para representar a não linearidade da distribuição de tensões de cisalhamento ao longo da seção transversal do fio da mola. No entanto, este trabalho adotará o modelo mais simples, isto é, considerando as distribuições da fase e da tensão de cisalhamento constantes e homogêneas ao longo da seção transversal do fio (AGUIAR, 2011) (veja Fig. 22).

Figura 22- Distribuição constante da transformação de fase e da tensão de cisalhamento.



Fonte: Aguiar (2011).

A hipótese de homogeneidade das tensões e das frações volumétricas pode descrever adequadamente o comportamento de uma mola helicoidal de LMF, dependendo da sua faixa de operação (AGUIAR, 2011). Neste sentido, o cálculo para a deformação angular pode ser dado pela Eq. 49.

Por fim, a rigidez de uma mola helicoidal pode ser expressa por (SHIGLEY; MISCHKE, 2005):

$$k_{LMF} = \frac{d^4 G(\xi)}{8D^3 N} \quad (50)$$

onde k_{LMF} pode assumir valores mínimo ($\xi = 1$) e máximo ($\xi = 0$), isto é, martensita (m) e austenita (a). Dessa forma, a Eq. 50 pode ser encontrada nas formas abaixo:

$$k_m = \frac{d^4 G(\xi = 1)}{8D^3 N} \quad (51)$$

ou

$$k_a = \frac{d^4 G(\xi = 0)}{8D^3 N} \quad (52)$$

4 ROTOR FLEXÍVEL COM MOLAS DE LMF

Neste capítulo é apresentado o modelo discreto do rotor, modelo este obtido pelo método de elementos finitos. Uma técnica de redução modal é também apresentada, tendo em vista as dimensões elevadas normalmente presentes nos problemas tratados por elementos finitos. O capítulo encerra apresentando os resultados numéricos obtidos para diferentes valores de rigidez das molas de LMF.

4.1 MODELO DO ROTOR

O modelo do rotor é construído via a integração das matrizes de rigidez, massa e amortecimento dos seus vários elementos constituintes, conforme detalhado no Apêndice A. Este modelo integrado, ou modelo global, quando escrito numa forma matricial, resulta em:

$$[M] \{\ddot{\delta}\} + [D_s + \dot{\phi}C] \{\dot{\delta}\} + [K_s + \ddot{\phi}K_2] \{\delta\} = \{F(t)\} \quad (53)$$

sendo

$[M]$: Matriz de massa do sistema.

$[D_s]$: Matriz de amortecimento do sistema.

$[C]$: Matriz giroscópica do sistema.

$[K_s]$: Matriz de rigidez do sistema.

$[K_2]$: Matriz de rigidez devido o movimento transiente.

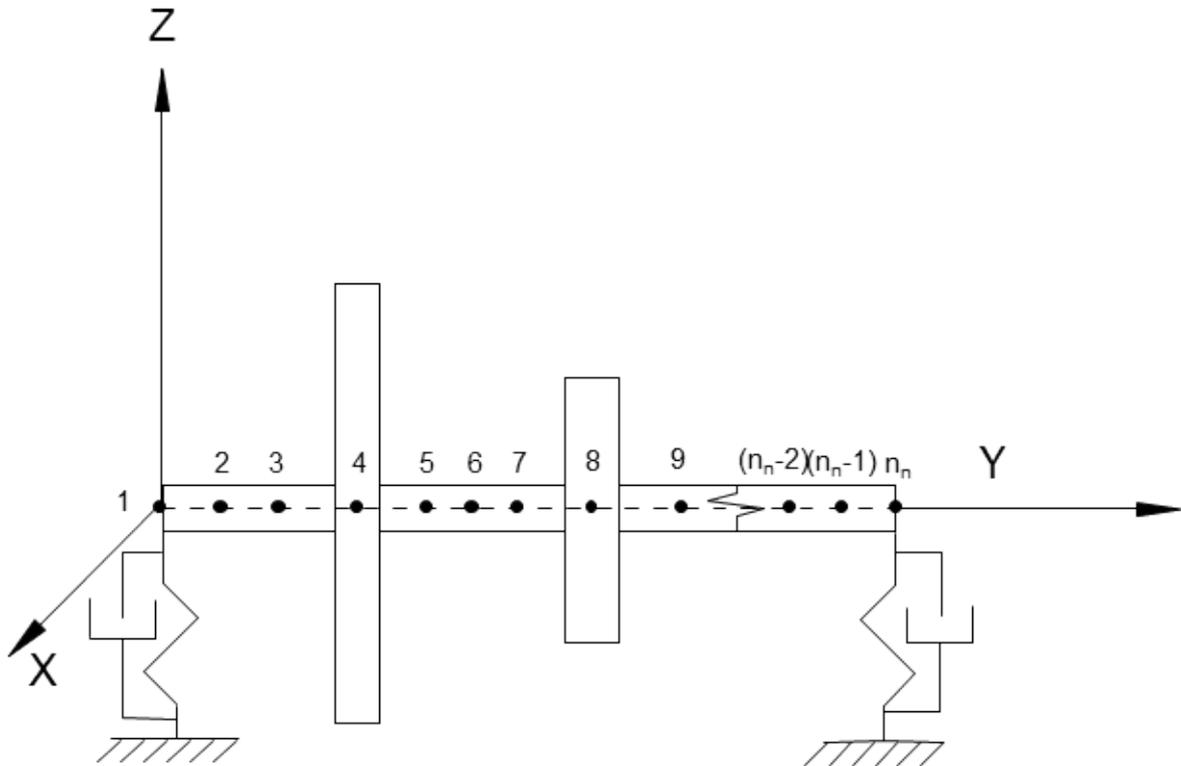
$\dot{\phi}(t)$: Velocidade angular.

$\ddot{\phi}$: Aceleração angular.

$\{\delta\}$: Vetor de deslocamentos nodais.

$\{F(t)\}$: Vetor de forças atuantes no sistema.

Figura 23- Modelo discreto do rotor.



Fonte: Autor.

Uma vez que cada nó admite quatro graus de liberdade, duas rotações e duas translações, o vetor $\{\delta\}$ tem dimensão $4n_n$, onde n_n é o número de nós (veja Fig. 23) em que a estrutura foi discretizada. As matrizes presentes na Eq. 53 são quadradas de ordem $4n_n$ e a força é um vetor de dimensão $4n_n$.

A análise do sistema descrito pela expressão 53, sua estabilidade, frequências naturais, modos de vibrar, resposta ao desbalanceamento, estudo dos transientes, etc., torna-se cada vez mais complexa na medida em que a ordem do sistema cresce, ou seja, na medida em que se eleva o número de nós na tentativa de aproximar a estrutura discretizada da estrutura real contínua.

Frequentemente é necessário reduzir a ordem do modelo para estudá-lo. Uma técnica de redução clássica utilizada em análise estrutural é a chamada técnica pseudo-modal (LALANNE; FERRARIS, 1998), onde a base modal do sistema não giroscópico, obtida a partir da solução do problema de autovalores e autovetores para $\dot{\phi} = 0$, é utilizada com o objetivo de reduzir a ordem do sistema e diagonalizar as matrizes $[M]$ e $[K_s]$. Para isso, define-se a seguinte transformação de variável:

$$\{\delta\} = [\Phi]\{q\} \quad (54)$$

onde as colunas da matriz de transformação $[\Phi]$ - $4n_n$ por N_m - são constituídas pelos N_m primeiros autovetores (N_m primeiros modos) do sistema não giroscópico e $\{q\}$ - N_m por 1 - é o vetor das coordenadas nodais.

A base modal $\tilde{\Phi}$ é obtida a partir da solução da equação:

$$[M]\ddot{\delta} + [K_s]^* \dot{\delta} = 0 \quad (55)$$

onde $[K_s]^*$ é a matriz de rigidez do sistema, derivada de $[K_s]$, onde os termos cruzados de rigidez introduzidos pelos mancais são cancelados. Os N_m primeiros modos da equação 55 são obtidos usando um método iterativo denominado algoritmo *QR* (LALANNE; FERRARIS, 1998).

Substituindo a Eq. 54 na Eq. 53, e pré multiplicando-a por $[\Phi]^t$ obtém-se:

$$\begin{aligned} & [\Phi]^t [M] [\Phi] \{\ddot{q}\} + [\Phi]^t [D_s] [\Phi] \{\dot{q}\} + [\Phi]^t \dot{\phi} [C] [\Phi] \{\dot{q}\} + [\Phi]^t [K_s] [\Phi] \{q\} + \\ & [\Phi]^t \ddot{\phi} [K_2] [\Phi] \{q\} = [\Phi]^t \{F\} \end{aligned} \quad (56)$$

Então, a equação do movimento do sistema na base modal, escrita na sua forma matricial se torna:

$$[\tilde{M}] \{\ddot{q}\} + [\tilde{D}_s + \dot{\phi}\tilde{C}] \{\dot{q}\} + [\tilde{K}_s + \ddot{\phi}\tilde{K}_2] \{q\} = \{\tilde{F}(t)\} \quad (57)$$

onde

$$[\tilde{M}] = [\Phi]^t [M] [\Phi] \quad (58)$$

$$[\tilde{D}_s] = [\Phi]^t [D_s] [\Phi] \quad (59)$$

$$[\tilde{C}] = [\Phi]^t [C] [\Phi] \quad (60)$$

$$[\tilde{K}_s] = [\Phi]^t [K_s] [\Phi] \quad (61)$$

$$[\tilde{K}_2] = [\Phi]^t [K_2] [\Phi] \quad (62)$$

$$[\tilde{F}] = [\Phi]^t [F] \quad (63)$$

Assim, a Eq. 57 pode ser reescrita na forma em espaço de estados abaixo:

$$\{\dot{X}\} = [A] \{X\} + [B] \{u\} \quad (64)$$

onde $\{X\}$ representa o vetor de estado, $\{u\}$ representa o vetor de forças de excitação e controle, $[A]$ é conhecida como matriz dinâmica do sistema e $[B]$ é a matriz de entrada de forças que atuam no sistema. Tais vetores e matrizes são dados pelas expressões abaixo:

$$\{X\} = \{\{q\}, \{\dot{q}\}\}^t \quad (65)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\tilde{M}^{-1}(\tilde{K}_s + \ddot{\phi}\tilde{K}_2) & -\tilde{M}^{-1}(\tilde{D}_s + \dot{\phi}\tilde{C}) \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$\{u\} = \left\{ 0 \quad \{\tilde{F}(t)\} \right\}^t \quad (68)$$

onde I é a matriz identidade.

A Equação 64 representa, sob o ponto de vista de controle, a planta ou o rotor a ser controlado. A sua solução requer, no entanto, um método de integração numérica que obtenha a resposta do sistema no domínio do tempo. É o caso, por exemplo, dos integradores de *Runge-Kutta* de quarta ordem com passo variável (ABREU, 1998).

4.2 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

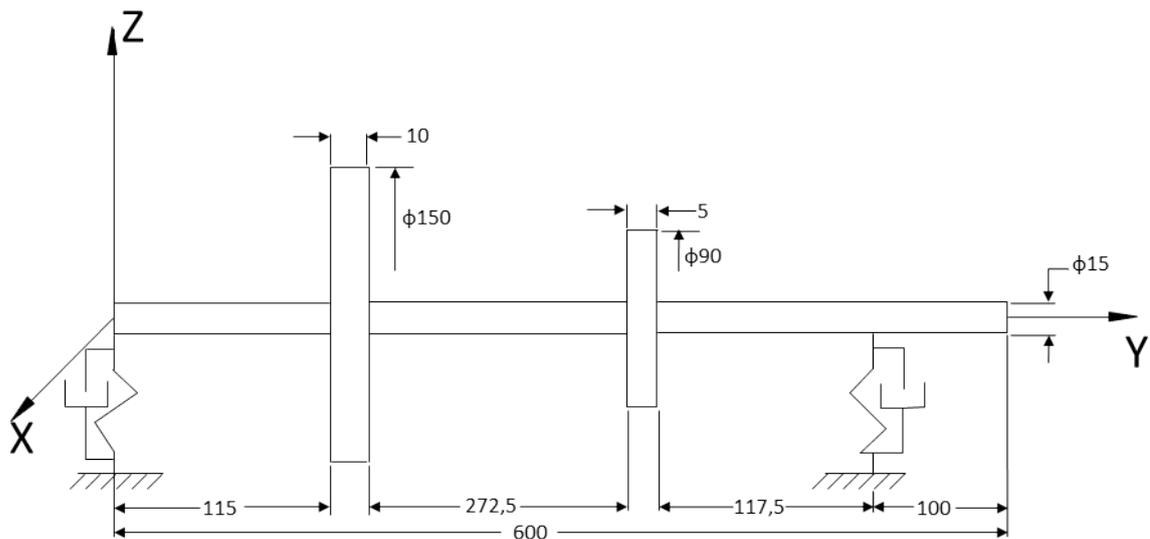
Para avaliar a eficiência da atenuação das vibrações laterais de um rotor, utilizando em seus mancais molas de LMF, são apresentadas a seguir as simulações numéricas efetuadas para um rotor modelado via elementos finitos.

A Figura 24 representa o rotor do laboratório do departamento de engenharia mecânica - área de mecânica dos sólidos - da Unesp de Ilha Solteira - SP, o qual será utilizado nas simulações. O rotor possui dois discos fixados a um eixo flexível apoiado sobre dois mancais contendo molas helicoidais de LMF montadas em paralelo com molas comuns de aço (veja Eq. A.79). Este procedimento foi adotado devido as molas de

LMF não possuem uma elevada rigidez, uma vez que seus fios devem possuir pequeno diâmetro para facilitar o aquecimento e resfriamento. Por este motivo, a rigidez das molas de LMF ficam limitadas a baixos valores, tornando-se, assim, necessária a utilização de molas comuns de aço em paralelo.

O modelo do rotor foi discretizado em 30 elementos finitos de viga de aço (módulo de elasticidade de $E = 210 \text{ GPa}$, coeficiente de Poisson de $\nu = 0.3$ e densidade igual a $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$) e reduzido considerando os cinco primeiros modos de vibrar.

Figura 24- Desenho esquemático do rotor.



Fonte: Autor.

Uma massa de desbalanceamento foi introduzida nos dois discos seguindo a Norma *ISO 1940* (Qualidade de Equilíbrio dos Corpos Rígidos em Rotação), que define um grau de desbalanceamento admissível em rotores para diferentes situações. Neste trabalho, foi utilizado um desbalanceamento de grau *G250*. Dessa forma, pode-se definir a excentricidade máxima (e) (em metros) pela equação (veja Fig. A.5):

$$e_i = \frac{0.25}{\dot{\phi}_{max}} \quad (69)$$

onde

$\dot{\phi}_{max}$ - velocidade máxima de rotação do rotor em rad/s;

A massa de desbalanceamento utilizada corresponde à 10% da massa do disco, ou seja:

$$m_i = 0.1M_i \quad (70)$$

onde

m_i - massa de desbalanceamento;

M_i - massa do disco;

Os parâmetros utilizados para os discos e os mancais estão dispostos nas Tabs. 3 e 4. Os parâmetros das molas helicoidais de LMF utilizados nas simulações numéricas efetuadas foram (veja Eq. 50): $d = 3 \text{ mm}$, $D = 18 \text{ mm}$ e $N = 4$ espiras.

Tabela 3- Dados dos discos.

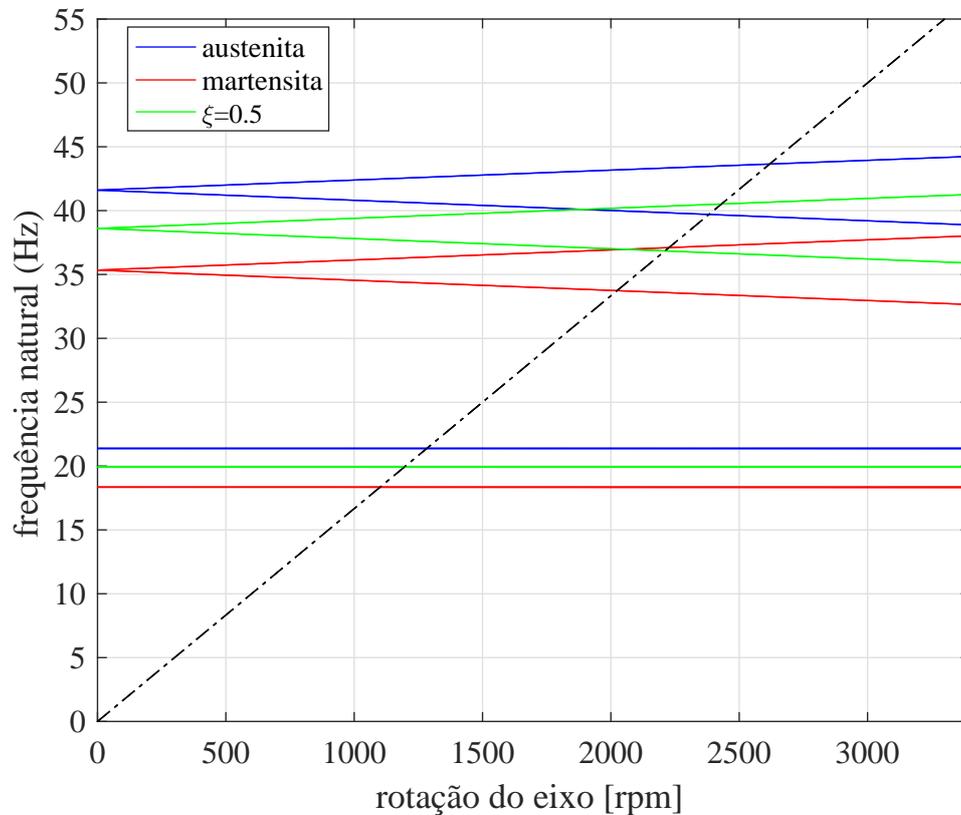
Disco	Massa (kg)	$I_x(kg.m^2)$	$I_y(kg.m^2)$
1	1.3646	0.0019	0.0039
2	0.2412	0.000126	0.000251

Tabela 4- Rigidez e amortecimento nos mancais.

	Martensita	Austenita	$\xi = 0.5$	Mola comum	
Rigidez (N/m)	k_{xx}	4390.4	11185	7787.5	13000
	k_{zz}	4390.4	11185	7787.5	13000
	$k_{xz} = k_{zx}$	0	0	0	0
Amortecimento	c	0	0	0	0

4.2.1 Determinação das velocidades críticas

O rotor é um sistema dinâmico cujas frequências naturais variam com a velocidade de rotação, ou seja, para cada velocidade de rotação existe uma frequência natural característica devido aos efeitos giroscópicos inerentes neste tipo de sistema (ABREU, 1998). A Figura 25 mostra o diagrama de *Campbell*, determinado a partir do modelo completo. As velocidades críticas são obtidas pela interseção da reta da velocidade de rotação do rotor ($\dot{\phi}$) (veja linha tracejada preta na Fig. 25), com as curvas das frequências naturais.

Figura 25- Diagrama de *Campbell*.

Fonte: Autor.

Por meio de um modelo desenvolvido em Matlab gerou-se o diagrama de *Campbell*, (veja Fig. 25), para a rigidez das molas de LMF obtidas nas fases martensítica, austenítica e para uma fração martensítica de $\xi = 0.5$, os valores das velocidades críticas do rotor para cada rigidez mencionada são apresentadas nas Tabs. 5, 6 e 7, respectivamente. Estes mesmos valores foram comparados com os resultados obtidos pelo programa de simulação *ANSYS*, utilizando a linguagem de programação APDL (veja código apresentado no Apêndice B).

Tabela 5- Velocidades críticas para a mola em martensita [rpm]

	Ansys	Matlab	Erro(%)
1 ^a	1072.53	1071.31	0.11
2 ^a	1073.70	1071.94	0.16
3 ^a	1864.89	1974.00	5.85
4 ^a	2000.60	2128.67	6.40

Tabela 6- Velocidades críticas para a mola em austenita [rpm]

	Ansys	Matlab	Erro(%)
1 ^a	1252.04	1246.30	0.46
2 ^a	1252.97	1246.79	0.49
3 ^a	2194.61	2322.44	5.82
4 ^a	2354.79	2503.99	6.34

Tabela 7- Velocidades críticas para a mola em $\xi = 0.5$ [rpm]

	Ansys	Matlab	Erro(%)
1 ^a	1166.68	1163.32	0.29
2 ^a	1167.72	1163.86	0.33
3 ^a	2036.73	2155.69	5.84
4 ^a	2185.17	2324.38	6.37

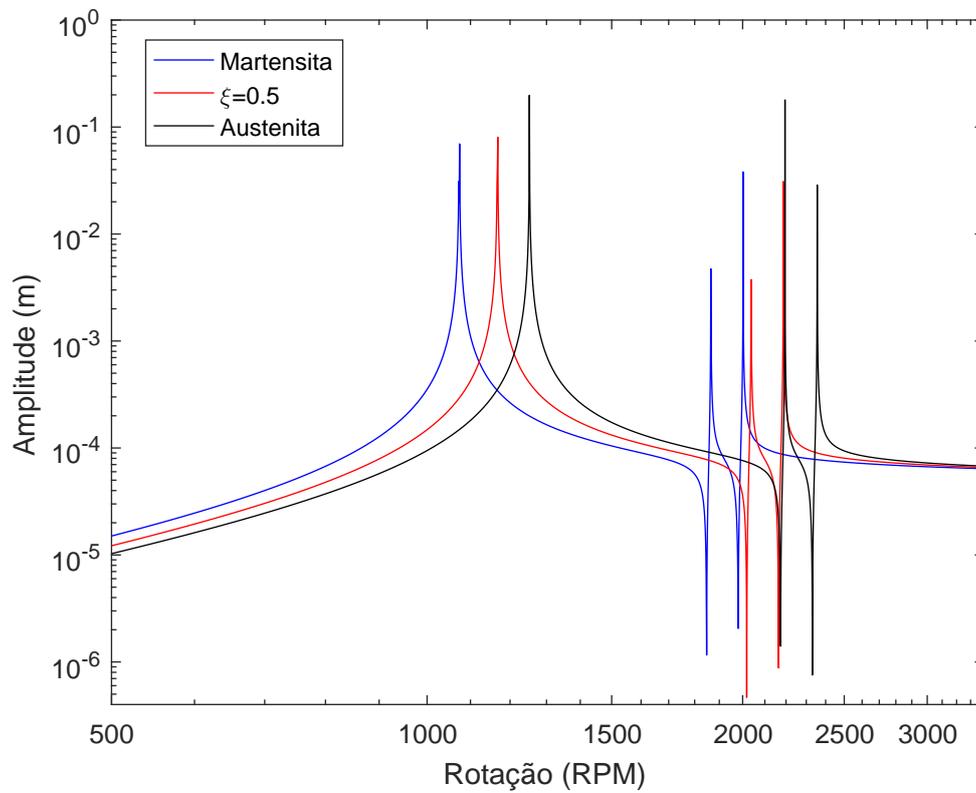
4.2.2 Resposta ao desbalanceamento

Para avaliar o comportamento dinâmico do rotor em diferentes velocidades, o mesmo foi acelerado de 0 até 3400 rpm, utilizando-se o programa de simulação *ANSYS* (veja código apresentado no Apêndice C).

A Figura 26 apresenta a resposta ao desbalanceamento do rotor para o disco 1 na direção X (na direção Y foi observado o mesmo comportamento) para três valores de rigidezes obtidos para as fases: martensita, austenita e $\xi = 0.5$. A partir da análise da Fig. 26, observa-se que durante a mudança de fase do material da mola de LMF, as frequências críticas resultantes são alteradas substancialmente.

Por meio da presente análise é possível demonstrar a capacidade das molas de LMF em atenuar as amplitudes de vibração do rotor durante a passagem nas regiões críticas. Assim, quando o rotor se aproxima da primeira crítica da fase martensítica, pode-se então aquecer o material da liga até a fase austenítica, evitando-se, com isso, o rotor experimentar grandes amplitudes durante a passagem na primeira crítica da martensita. Por outro lado, ao se aproximar da primeira crítica em austenita, pode-se resfriar o material da liga e evitar a passagem do rotor nas regiões críticas de cada fase de transformação da mola de LMF.

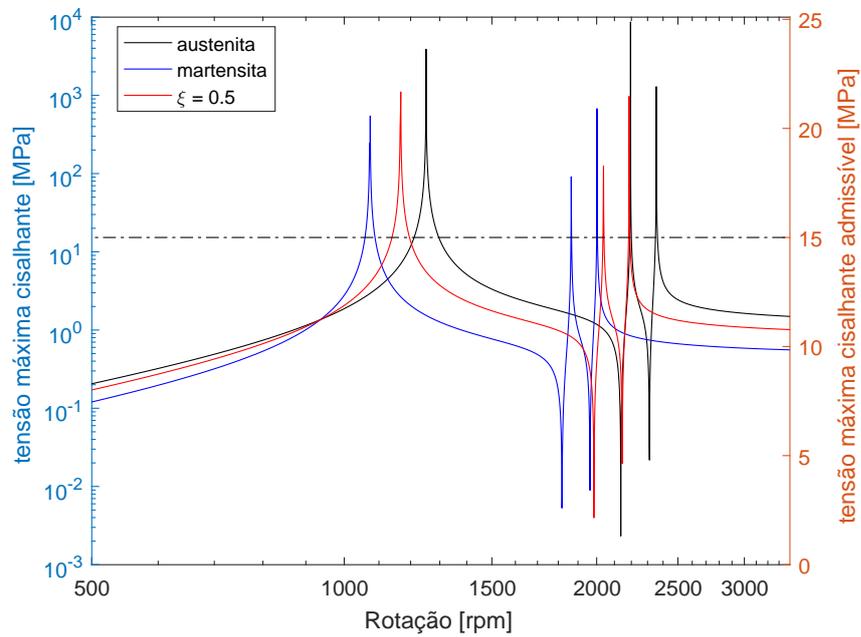
Figura 26- Resposta ao Desbalanceamento do Disco 1.



Fonte: Autor.

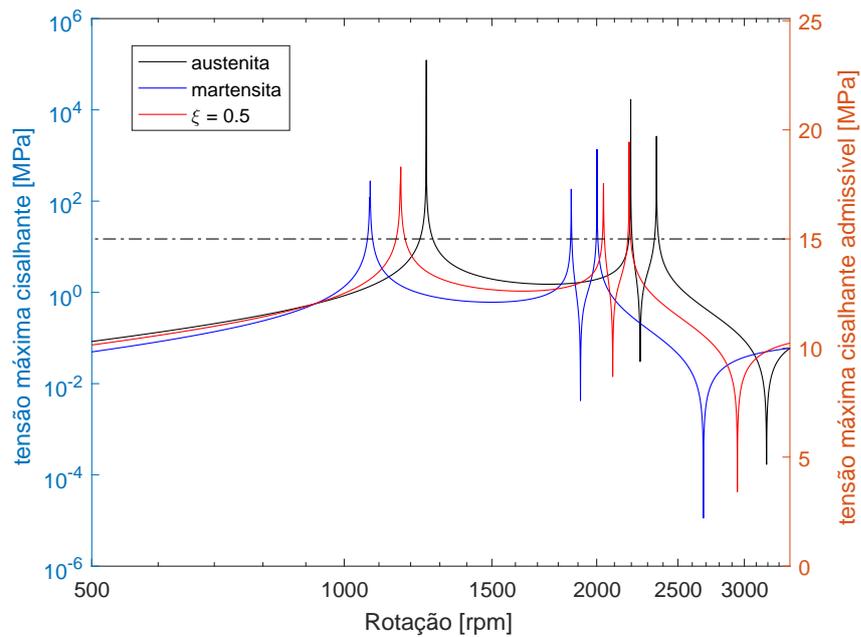
Neste caso, as máximas tensões cisalhantes atingidas pelas molas de LMF ($\tau_{max} = G(\xi)\gamma_{max}$, veja Eqs. 48 e 49) estão dispostas nos gráficos das Figs. 27 e 28.

Figura 27- Tensões cisalhantes máximas da mola de LMF no mancal 1: direção X .



Fonte: Autor.

Figura 28- Tensões cisalhantes máximas da mola de LMF no mancal 2: direção X .

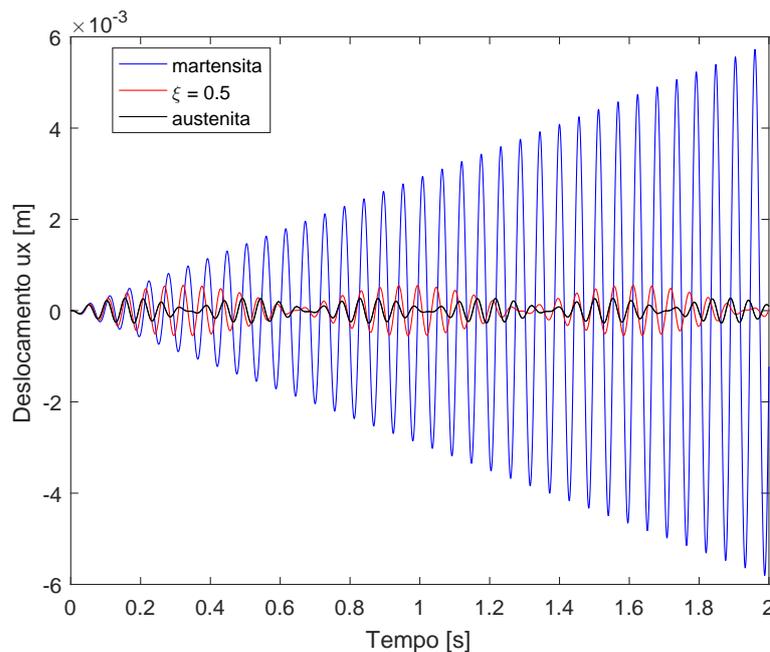


Fonte: Autor.

Como visto no Capítulo 2, o modelo constitutivo de Ikuta et al. (1991) é de fácil implementação numérica quando comparado com o modelo de Gao et al. (2007). No entanto, para utilizá-lo, é necessário que a tensão máxima aplicada na LMF seja inferior a 15 *MPa*. Por meio das Figs. 27 e 28, observa-se que a tensão cisalhante ultrapassa 15 *MPa* somente durante a passagem do rotor nas regiões críticas.

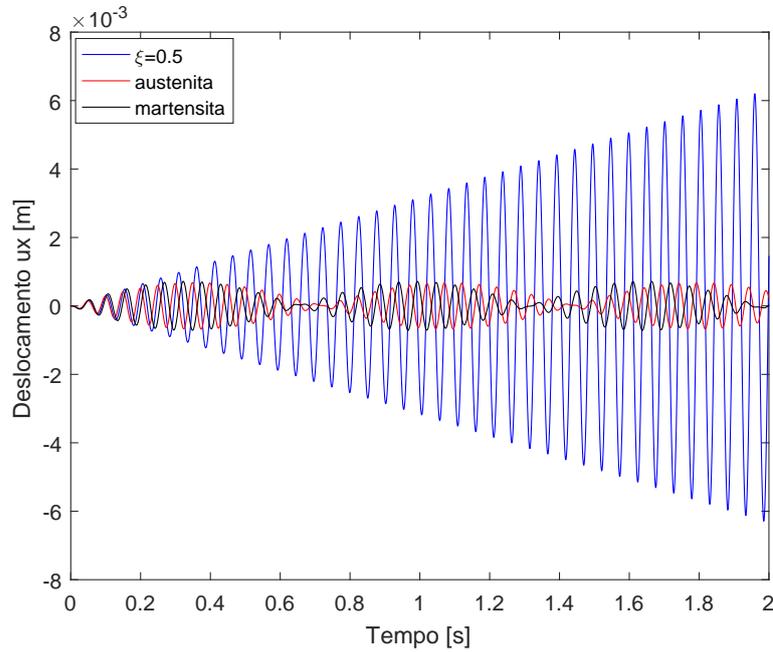
O rotor foi simulado com condições iniciais nulas usando um integrador de Runge-Kutta de quarta ordem e passo variável. O tempo de discretização ($dt = 0.001$) foi escolhido de forma a garantir a presença da maior frequência da dinâmica nos resultados. As Figuras 29 a 31 apresentam os deslocamentos do disco 1 na direção X quando o rotor é excitado nas primeiras velocidades críticas durante as fases martensítica, austenítica e $\xi = 0.5$. Assim, cada excitação é mantida na frequência crítica de cada fase de transformação e variando somente a rigidez da mola de LMF. Assim, ao se introduzir uma excitação na primeira crítica da martensita, aplica-se esta mesma excitação utilizando-se os valores de rigidez na austenita e quando $\xi = 0.5$. Este procedimento também foi realizado para as fases de $\xi = 0.5$ e da austenita. Por meio destes gráficos, observa-se a eficiência das molas helicoidais de LMF em atenuar as vibrações mecânicas, alterando-se a fase de transformação da mola de LMF, evitando, com isso, a passagem do rotor nas regiões críticas onde ocorreriam as máximas amplitudes de vibração do sistema.

Figura 29- Deslocamento do disco 1 na direção X durante a passagem na primeira crítica da fase martensítica.



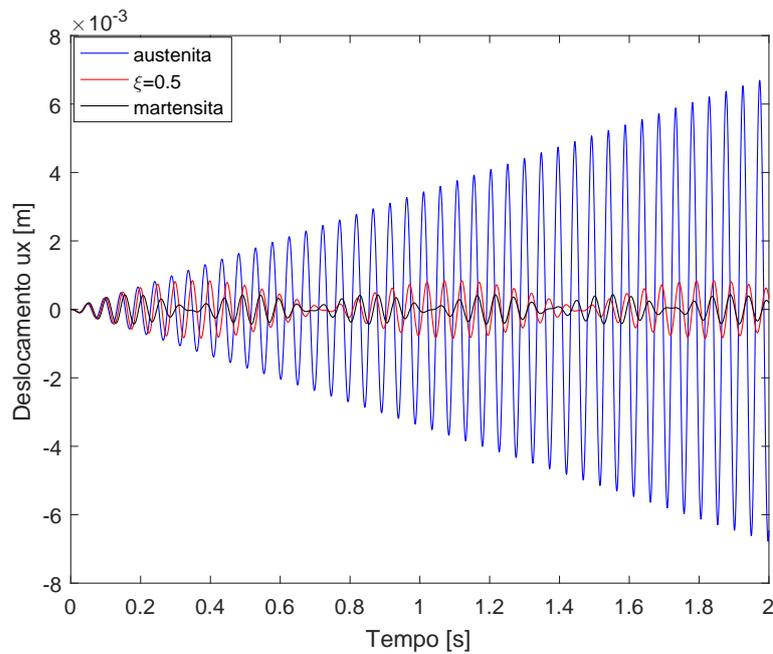
Fonte: Autor.

Figura 30- Deslocamento do disco 1 na direção X durante a passagem na primeira crítica em $\xi = 0.5$.



Fonte: Autor.

Figura 31- Deslocamento do disco 1 na direção X durante a passagem na primeira crítica da fase austenítica.



Fonte: Autor.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Este trabalho apresentou, num primeiro momento, o comportamento termodinâmico de Ligas com Memória de Forma (LMF) utilizando como referência os modelos unidimensionais de Ikuta et al. (1991) e Gao et al. (2007). Após a implementação do modelo de Gao et al. (2007), os resultados auferidos foram comparados com aqueles apresentados por Gao et al. (2007), com o propósito de validar o modelo numérico implementado. Além disso, foi realizada uma comparação entre os modelos de Ikuta et al. (1991) e Gao et al. (2007), a fim de verificar as diferenças entre os dois modelos. Com isso, foi possível observar que o modelo de Ikuta et al. (1991) é capaz de gerar resultados equivalentes ao modelo de Gao et al. (2007), desde que a tensão aplicada na LMF seja inferior a 15 *MPa* durante o aquecimento. Dos modelos apresentados, o modelo de Gao et al. (2007) se destaca por separar a martensita em dois tipos: maclada e não maclada, influenciadas, respectivamente, pela temperatura e tensão mecânica aplicada. Já o modelo de Ikuta et al. (1991) se destaca por utilizar equações mais simples, sendo as transformações de fases influenciadas apenas pela variação de temperatura.

Neste trabalho, discutiu-se também a modelagem matemática de rotores flexíveis contendo molas helicoidais de LMF presentes em seus mancais. O sistema foi formulado pelo método dos elementos finitos e truncado considerando seus cinco primeiros modos de vibrar. As simulações numéricas foram realizadas para o sistema em três fases distintas das molas de LMF: na fase martensítica ($\xi = 1$), em $\xi = 0.5$ e na fase austenítica ($\xi = 0$). Com base nos resultados obtidos através de simulações numéricas efetuadas para o rotor, pôde-se verificar uma variação significativa nas frequências críticas. Verificou-se também que a máxima tensão cisalhante atingida nas molas de LMF não ultrapassou 15 *MPa*, permitindo, desta forma, a utilização do modelo de Ikuta et al. (1991) para as faixas de frequência fora das regiões críticas. Com base nos resultados obtidos, pôde-se comprovar, através da resposta ao desbalanceamento e a partir da seleção adequada da rigidez da mola de LMF, a capacidade da mola em atenuar as vibrações laterais geradas pelas forças de desbalanceamento nas regiões críticas do rotor.

Como proposta natural de continuidade deste trabalho, propõe-se a implementação de estratégias de controle ativo de temperatura em molas de LMF para a atenuação de vibrações em rotores flexíveis e a avaliação experimental dos resultados teóricos previstos.

REFERÊNCIAS

- ABREU, G. L. C. M. **Controle ativo de vibrações laterais em rotores flexíveis usando atuadores magnéticos**. 1998. 119 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 1998.
- ABREU, G. L. C. M. de; MELO, G. P. de; LOPES, V. Fuzzy control embedded in microcontroller and applied to an experimental apparatus using magnetorheological fluid damper. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, Heidelberg, v. 24, n. 1, p. 54-69, 2013. ISSN 2195-3899. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s40313-013-0012-7>>. Acesso em: 10 set. 2016.
- AGUIAR, R. A. **Análise da redução de vibrações em sistemas mecânicos utilizando ligas com memória de forma**. 2011. 139 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.
- ALVES, M. T. S. **Controle de vibrações em máquinas rotativas usando ligas com memória de forma**. 2015. 119 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2015. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/14768>>. Acesso em: 20 out. 2016.
- ANTONUCCI, V.; MARTONE, A. Chapter 2 - phenomenology of shape memory alloys. In: LECCE, L.; CONCILIO, A. (Ed.). **Shape memory alloy engineering**. Boston: Butterworth-Heinemann, 2015. p. 33-56. ISBN 978-0-08-099920-3. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780080999203000024>>.
- AQUINO, A. S. **Controle de vibração de um sistema sob desbalanceamento rotativo utilizando atuador de liga com memória de forma**. 2011. 117 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2011. Disponível em: <<http://tede.biblioteca.ufpb.br:8080/handle/tede/5310>>. Acesso em: 02 out. 2016.
- BRINSON, L. One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: Thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, London, 4, n. 2, p. 229-242, 1993. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1177/1045389X9300400213>>. Acesso em: 28 set. 2015.
- ENEMARK, S.; SANTOS, I. F. Rotor-bearing system integrated with shape memory alloy springs for ensuring adaptable dynamics and damping enhancementótheory and experiment. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, 369, p. 29-49, 2016. ISSN 0022-460X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X16000511>>. Acesso em: 10 dez. 2016.
- ENEMARK, S.; SANTOS, I. F.; SAVI, M. A. Shape memory alloys applied to improve rotor-bearing system dynamics ñ an experimental investigation. In: 17

INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON DYNAMIC PROBLEMS OF MECHANICS, DINAME 2015, 2015, Natal, RN. **Anais...** Natal: ABCM, 2015. Disponível em: <<http://abcm.org.br/anais/diname/2015/PDFS/DIN-2015-0009.PDF>>. Acesso em: 15 dez. 2016.

FALK, F.; KONOPKA, P. Three-dimensional landau theory describing the martensitic phase transformation of shape-memory alloys. **Journal of Physics: Condensed Matter**, v. 2, n. 1, p. 61, 1990. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0953-8984/2/i=1/a=005>>.

GAO, X.; QIAO, R.; BRINSON, L. C. Phase diagram kinetics for shape memory alloys: a robust finite element implementation. **Smart Materials and Structures**, Bristol, v. 16, n. 6, p. 2102, 2007. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0964-1726/16/i=6/a=013>>. Acesso em: 22 set. 2015.

HE, Y.-Y.; OI, S.; CHU, F.-L.; LI, H.-X. Vibration control of a rotor-bearing system using shape memory alloy: Ii. experimental study. **Smart Materials and Structures**, Bristol, v. 16, n. 1, p. 122, 2007. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0964-1726/16/i=1/a=015>>. Acesso em: 02 out. 2016.

IKUTA, K.; TSUKAMOTO, M.; HIROSE, S. Mathematical model and experimental verification of shape memory alloy for designing micro actuator. In: IEEE MICRO ELECTRO MECHANICAL SYSTEMS, 1991, Nara. **Proceeding of the...** Nara: IEEE, 1991. p. 103-108. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/114778/?reload=true>>. Acesso em: 25 out. 2016.

JUNIOR, W. L. P. **Modelagem e avaliação numérica de absorvedores dinâmicos de vibrações sintonizáveis baseados em ligas com memória de forma**. 2012. 70 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2012. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/14941>>. Acesso em: 17 abr. 2015.

LAGOUDAS, D. **Shape memory alloys: modeling and engineering applications**. New York: Springer, 2008. (Springer ebook collection / Chemistry and Materials Science 2005-2008). ISBN 9780387476858. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=jY-qVrZkqBEC>>. Acesso em: 11 maio 2015.

LALANNE, M.; FERRARIS, G. **Rotordynamics prediction in engineering**. John Wiley, 1998. (Rotordynamics prediction in engineering, v. 2). ISBN 9780471972884. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=JONSAAAAMAAJ>>.

LEES, A. W.; JANA, S.; INMAN, D. J.; CARTMELL, M. P. The control of bearing stiffness using shape memory alloy. In: CONFERENCE AND EXPOSITION ON STRUCTURAL DYNAMICS, IMAC-25, 2007, Orlando, FL. **Proceedings of the...** [S.l.], 2007.

LIANG, C.; ROGERS, C. One-dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, London, 1, n. 2, p. 207-234, 1990. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1177/1045389X9000100205>>. Acesso em: 03 nov. 2015.

MACHADO, L.; SAVI, M. Medical applications of shape memory alloys. **Brazilian Journal of Medical and Biological Research**, Ribeirão Preto, v. 36, p. 683-691, 06 2003. ISSN 0100-879X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/S0100-879X2003000600001>>. Acesso em: 25 set. 2015.

NAYAGA, K.; TAKEDA, S.; TSUKUI, Y.; KUMAIIDO, T. Active control method for passing through critical speeds of rotating shafts by changing stiffness of the support with use of memory metals. **Journal of Sound and Vibration**, Longon, v. 113, p. 307-317, 1987. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X87802171?via%3Dihub>>. Acesso em: 20 dez. 2016.

PAIVA, A. **Modelagem do Comportamento Termomecânico das Ligas com Memória de Forma**. 2004. 128 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.17771/PUCRio.acad.4942>>. Acesso em: 15 abr. 2016.

SHIGLEY, J.; MISCHKE, C. **Projeto de engenharia mecânica**. Porto Alegre: Bookman, 2005. ISBN 9788536305622. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=xZFaJHZfuTwC>>. Acesso em: 02 dez. 2015.

SILVA, L. C. **Análise dinâmica de um sistema rotor-mancal utilizando ligas com memória de forma**. 2011. 62 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011. Disponível em: <http://objdig.ufrj.br/60/teses/coppe_m/LeandroDaCostaSilva.pdf>. Acesso em: 20 fev. 2017.

SILVA, R. O. **Atenuação de vibrações em sistemas que utilizam molas de liga de memória de forma**. 2017. 101 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2017. Disponível em: <<https://repositorio.unesp.br/handle/11449/150444>>. Acesso em: 15 abr. 2017.

TANAKA, K.; NAGAKI, S. A thermomechanical description of materials with internal variables in the process of phase transitions. **Ingenieur-Archiv**, Heildeberg, 51, n. 5, 287–299, 1982. ISSN 1432-0681. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF00536655>>. Acesso em: 20 dez. 2015.

ZHU, Z. W.; WANG, H. L.; XU, J. Application on rotor vibration control of sma model based on multivariate statistical analysis. In: WORLD CONGRESS ON COMPUTER SCIENCE AND INFORMATION ENGINEERING, 2009, Los Angeles, CA. **Proceedings of the...** Los Angeles: IEEE, 2009. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/5170574/?reload=true>>. Acesso em: 15 out. 2016.

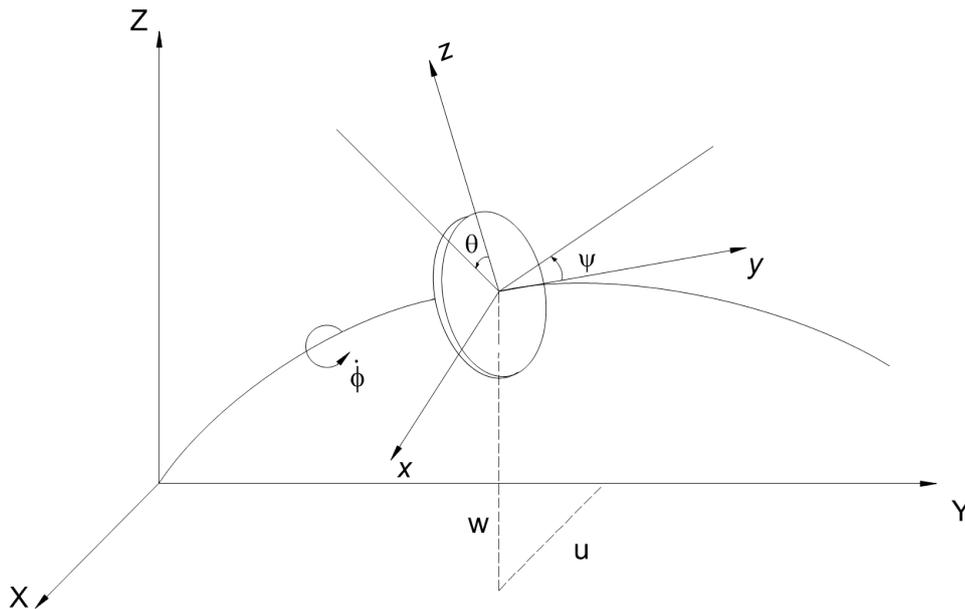
APÊNDICE A – MODELAGEM MATEMÁTICA DE ROTORES FLEXÍVEIS

Este apêndice apresenta o modelo matemático de um rotor flexível, elaborado a partir das técnicas de elementos finitos, onde inicia descrevendo os elementos estruturais que o compõem, ou seja, os discos, os eixos flexíveis e os mancais.

A.1 MODELO DO ROTOR

O rotor é um sistema mecânico constituído fundamentalmente de discos, eixos e mancais, que apresenta uma velocidade de rotação $\dot{\phi}$ em torno de um eixo principal.

Figura A.1- Sistema de coordenadas.



Fonte: Autor.

As equações do movimento para o rotor podem ser obtidas aplicando-se as equações de Lagrange, equação A.1, nas expressões que fornecem as energias cinética e potencial dos elementos que o compõem.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i \quad (\text{A.1})$$

onde $1 \leq i \leq N$, sendo N o número de graus de liberdade de um rotor; q_i é a i -ésima coordenada generalizada; F_i é o i -ésimo esforço generalizado; T e U são as energias cinética e potencial, respectivamente.

O sistema de coordenadas mostrados na Fig A.1 será utilizado para a obtenção da energia cinética, da energia potencial e do trabalho virtual realizado por cada um destes elementos, sendo:

$[XYZ]$ – Sistema de coordenadas fixo.

$[xyz]$ – Sistema de coordenadas móvel, ligado ao disco ou a um elemento de árvore definido.

A.2 O DISCO

Os elementos de discos são considerados como sendo rígido, dessa forma caracteriza-se por possuir apenas energia cinética e apresentam quatro graus de liberdade (podem transladar e girar em duas direções).

O disco (veja Fig A.1) possui seus movimentos completamente descritos utilizando-se os dois sistemas de coordenadas, R_0 (sistema de coordenadas fixo $[X, Y, Z]$) e R_1 (sistema de coordenadas móvel $[x, y, z]$), que são os sistemas de coordenadas inercial e móvel, respectivamente.

O sistema de coordenadas móvel xyz está relacionado com o sistema de coordenadas fixo XYZ através do conjunto de ângulos θ , ϕ e ψ . A primeira rotação do referencial móvel é feita em torno do eixo Z , caracterizando o ângulo ψ . Então, gira-se o sistema de coordenadas de um ângulo θ em torno do novo eixo x (x_1). Por último, gira-se o referencial móvel de ϕ em torno do eixo y . Assim, a velocidade angular instantânea no referencial xyz é dada por:

$$\vec{w}_{R_1/R_0} = \dot{\psi}Z + \dot{\theta}x_1 + \phi y \quad (\text{A.2})$$

A energia cinética do disco é calculada em relação ao referencial fixo R_0 , onde sua velocidade angular é dada por:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \cos(\theta) \sin(\phi) + \dot{\theta} \cos(\phi) \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin(\theta) \\ \dot{\psi} \cos(\theta) \cos(\phi) + \dot{\theta} \sin(\phi) \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

O centro do disco (O) está localizado nas coordenadas u e w no referencial fixo R_0 . A massa do disco é m_D e seu tensor de inércia em O , com as direções principais de inércia coincidindo com os eixos x , y , z , é dado por:

$$I = \begin{bmatrix} I_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dz} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Então a energia cinética do disco é fornecida pela seguinte expressão:

$$T_D = \frac{1}{2} m_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{Dx} \omega_x^2 + I_{Dy} \omega_y^2 + I_{Dz} \omega_z^2) \quad (\text{A.5})$$

Considera-se que o disco é simétrico, ou seja, os momentos de inércia em torno de z e x são iguais ($I_{Dx} = I_{Dz}$), os ângulos θ e ψ são pequenos ($\cos(\theta) = \cos(\psi) \cong 1$) e que a velocidade de rotação do disco é uma função do tempo: $\dot{\phi} = \dot{\phi}(t)$. Substituindo-se a equação A.3 na equação A.5 e realizando as devidas simplificações adotadas, tem-se para a energia cinética do disco:

$$T_D = \frac{1}{2} m_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{Dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + I_{Dy} \dot{\phi} \dot{\psi} \theta + \frac{1}{2} I_{Dy} \dot{\phi}^2 \quad (\text{A.6})$$

O terceiro termo do segundo membro da equação acima representa o efeito giroscópico e o último termo desta equação representa a energia de rotação do disco em torno do seu próprio eixo de rotação.

Se as coordenadas u , w , θ , ψ e ϕ são as coordenadas independentes que descrevem o movimento do centro do disco, aplicando-se a equação de Lagrange (Eq. A.1) na equação A.6, obtém-se as seguintes expressões:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_D}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial u} = M_D \ddot{u} \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_D}{\partial \dot{w}} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial w} = M_D \ddot{w} \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_D}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial \theta} = I_{Dx} \ddot{\theta} - I_{Dy} \dot{\phi} \dot{\psi} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_D}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial \psi} = I_{Dx} \ddot{\psi} + I_{Dy} \dot{\phi} \dot{\theta} + I_{Dy} \ddot{\phi} \theta \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_D}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial \phi} = I_{Dy} \ddot{\phi} + I_{Dy} \ddot{\psi} \theta + I_{Dy} \dot{\psi} \dot{\theta} \quad (\text{A.11})$$

A equação A.11 fornece o torque que é necessário para acelerar o disco a uma velocidade angular $\dot{\phi}$. Como a velocidade angular do rotor já é conhecida, aqui não há necessidade de usar esta equação para determiná-la. Desta forma o vetor de deslocamento nodal para o centro do disco é dado por δ .

$$\delta = [u, w, \theta, \psi]^t \quad (\text{A.12})$$

Com isto pode-se expressar as equações A.7 à A.10 na forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_D}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial \delta} = M_D + \dot{\phi} C \dot{\delta} + \ddot{\phi} K_{DT} \delta \quad (\text{A.13})$$

onde $[M_D]$ é a matriz de massa do disco, $[C]$ é a matriz giroscópica ou de amortecimento do disco e $[K_{DT}]$ é a matriz de rigidez resultante do movimento transiente.

$$M_D = \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dx} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

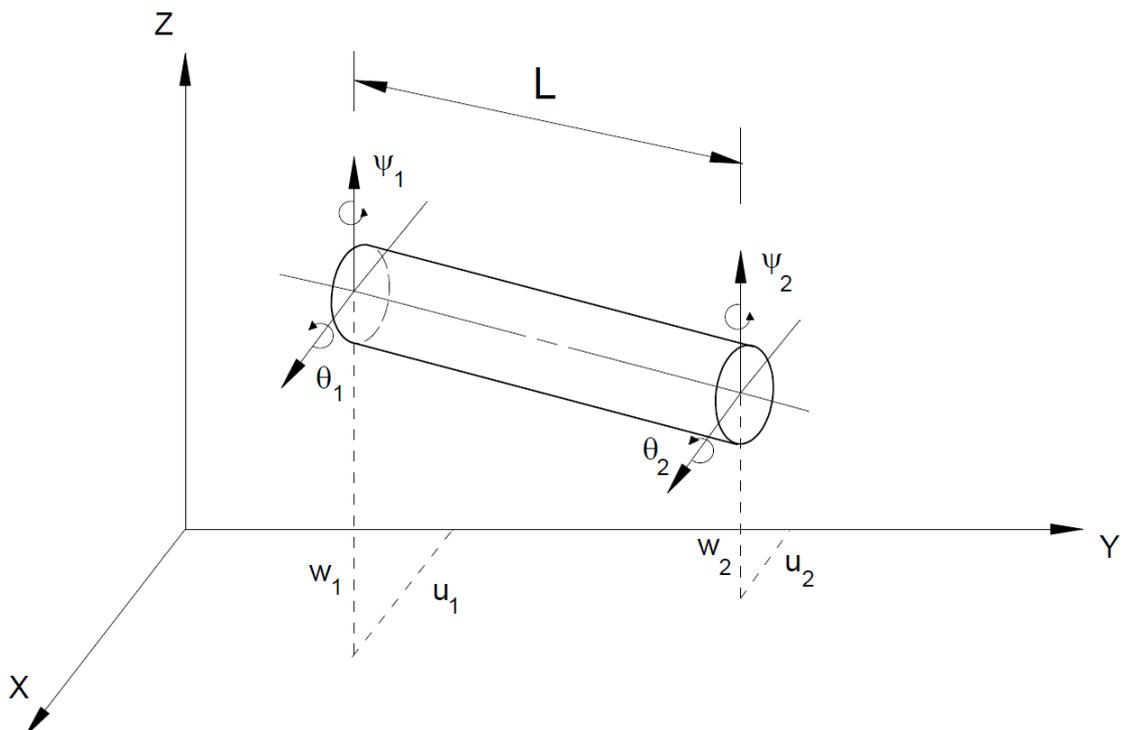
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$K_{DT} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

A.3 A ÁRVORE

A árvore do rotor é composta por elementos de viga (eixo) com características geométricas que variam linearmente ao longo de um elemento e que admitem movimentos de translação (u e w) e rotação (θ e ψ) em torno dos eixos X e Z . Na Figura A.2, é mostrado um elemento de viga (eixo) para o qual são considerados os efeitos de cisalhamento e da inércia de rotação da secção transversal.

Figura A.2- Elemento de eixo.



Fonte: Autor.

A.3.1 ENERGIA CINÉTICA DO EIXO

A energia cinética de um elemento de eixo de comprimento L é dada por:

$$T_s = \frac{\rho I}{2} \int_0^L \{(\dot{\theta})^2 + (\dot{\psi})^2\} dy + \frac{\rho S}{2} \int_0^L \{(\dot{u})^2 + (\dot{w})^2\} dy + 2\rho I \dot{\phi} \int_0^L \dot{\psi} \theta dy + \rho I L \dot{\phi}^2 \quad (\text{A.17})$$

onde ρ é a densidade volumétrica do material, S é a área da seção transversal da viga e I é o momento de inércia de área da seção transversal da viga.

O eixo é aqui representada por um elemento finito que tem dois nós, os quais admitem quatro graus de liberdade, sendo duas translações (u , w) e duas rotações (θ , ψ). O vetor de deslocamento para um elemento de eixo é dado por:

$$\delta = [u_1, w_1, \theta_1, \psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \psi_2]^t \quad (\text{A.18})$$

que inclui os deslocamentos δu e δw correspondentes aos movimentos nas direções X e Z respectivamente, que são dados por:

$$\delta u = [u_1, \psi_1, u_2, \psi_2]^t \quad (\text{A.19})$$

$$\delta w = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2]^t \quad (\text{A.20})$$

Admitindo que os deslocamentos u e w são:

$$u = N_1(y) \delta u \quad (\text{A.21})$$

$$w = N_2(y) \delta w \quad (\text{A.22})$$

onde N_1 e N_2 são funções de forma expressas por equações polinomiais cúbicas, dadas por:

$$N_1 = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (\text{A.23})$$

$$N_2 = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (\text{A.24})$$

As rotações são expressas por:

$$\psi = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{A.25})$$

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{A.26})$$

Substituindo-se as derivadas das equações A.21, A.22, A.25 e A.26 na equação A.17, obtém-se a expressão da energia cinética para um elemento de viga de comprimento L .

$$\begin{aligned} T_s = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L [\delta \dot{u}^t N_1^t N_1 \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^t N_2^t N_2 \delta \dot{w}] dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left[\delta \dot{u}^t \frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^t \frac{dN_2^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \dot{w} \right] + \\ & \rho I_p \dot{\phi} \int_0^L \delta \dot{u}^t \frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta w dy + \rho I L \dot{\phi}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Substituindo-se as equações A.23, A.24 e suas derivadas na equação A.27, tem-se:

$$T_s = \frac{1}{2} \delta \dot{u}^t M_1 \delta \dot{u} + \frac{1}{2} \delta \dot{w}^t M_2 \delta \dot{w} + \frac{1}{2} \delta \dot{u}^t M_3 \delta \dot{u} + \frac{1}{2} \delta \dot{w}^t M_4 \delta \dot{w} + \dot{\phi} \delta \dot{u}^t M_5 \delta w + \rho I L \dot{\phi}^2 \quad (\text{A.28})$$

onde M_1 e M_2 são as matrizes de massa clássica, M_3 e M_4 são as matrizes de inércia rotatória e M_5 aparece devido ao efeito giroscópico. As matrizes M_1, M_2, M_3, M_4 e M_5 são dadas por:

$$M_1 = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & 13L \\ -22L & 4L^2 & -13L & -3L^2 \\ 54 & -13L & 156 & 22L \\ 13L & -3L^2 & 22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

$$M_2 = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

$$M_3 = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & -3L & -36 & -3L \\ -3L & 4L^2 & 3L & -L^2 \\ -36 & 3L & 36 & 3L \\ -3L & -L^2 & 3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

$$M_4 = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

$$M_5 = \frac{\rho I \dot{\phi}}{15L} \begin{bmatrix} -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

Sendo que as matrizes M_1, M_2, M_3, M_4 e M_5 são provenientes das seguintes integrações:

$$M_1 = \rho S \int_0^L [N_1^t N_1] dy \quad (\text{A.34})$$

$$M_2 = \rho S \int_0^L [N_2^t N_2] dy \quad (\text{A.35})$$

$$M_3 = \rho S \int_0^L \left[\frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_1}{dy} \right] dy \quad (\text{A.36})$$

$$M_4 = \rho S \int_0^L \left[\frac{dN_2^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} \right] dy \quad (\text{A.37})$$

$$M_5 = \rho I_p \int_0^L \left[\frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} \right] dy \quad (\text{A.38})$$

Aplicando-se a equação de Lagrange na expressão da energia cinética do eixo, dada pela equação A.28, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_s}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_s}{\partial \delta} = (M + M_s)\ddot{\delta} + \dot{\phi}C\dot{\delta} + \ddot{\phi}K_{ST}\delta \quad (\text{A.39})$$

obtém-se a matriz de massa clássica, $[M]$, relacionada com $[M_1]$ e $[M_2]$, a matriz da massa secundária, $[M_s]$, relacionada com $[M_3]$ e $[M_4]$, e a matriz giroscópica, $[C]$, relacionada com $[M_5]$ e $[K_{ST}]$ é a matriz de rigidez do eixo proveniente do movimento transiente:

$$M = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.40})$$

$$M_s = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.41})$$

$$C = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.42})$$

$$K_{ST} = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.43})$$

A.3.2 ENERGIA DE DEFORMAÇÃO DO EIXO

A deformação de um ponto $B(x, z)$ contido na seção transversal da viga, mostrada na Fig. A.3, é dada por:

$$\varepsilon = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \quad (\text{A.44})$$

A equação acima pode ser separada em uma parcela linear e outra não linear:

$$\varepsilon = \varepsilon_l + \varepsilon_{nl} \quad (\text{A.45})$$

Sendo que ε_l é igual aos dois primeiros termos do segundo membro da equação A.44 e ε_{nl} é igual aos dois últimos termos da mesma equação e corresponde à parcela não linear da equação.

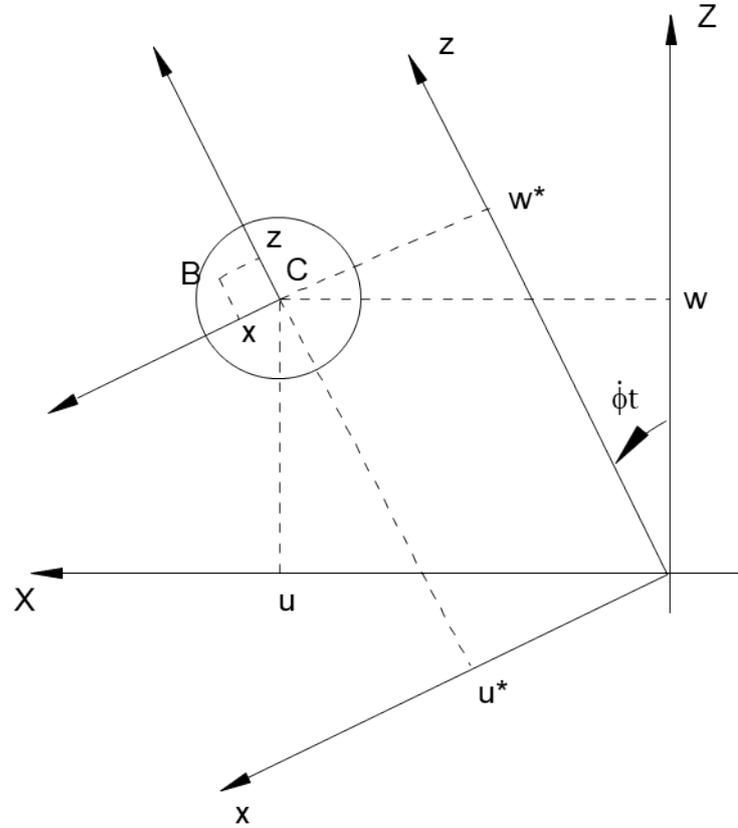
A energia de deformação de uma viga submetida a uma tensão σ é dada pela seguinte expressão:

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_{\varphi} \varepsilon^t \sigma d\varphi \quad (\text{A.46})$$

onde ε é a deformação longitudinal de um ponto x, y da seção, σ é o vetor de esforços e φ é o volume da viga considerada. A relação entre tensão e deformação é dada por:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (\text{A.47})$$

Figura A.3- Sistema de coordenadas do eixo.



Fonte: Autor.

Substituindo-se a equação A.47 na equação A.46 tem-se:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_{\varphi} \varepsilon^t \varepsilon d\varphi \quad (\text{A.48})$$

Substituindo-se a equação A.45 na equação A.48 obtém-se:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_{\varphi} (\varepsilon_l^2 + 2\varepsilon_l \varepsilon_{nl} + \varepsilon_{nl}^2) d\varphi \quad (\text{A.49})$$

Devido a simetria da seção transversal do eixo em relação a x e z , tem-se que:

$$\int_{\varphi} \varepsilon_{nl} \varepsilon_l = 0 \quad (\text{A.50})$$

e o terceiro termo da integral da equação A.49 é um termo de segunda ordem e pode ser desprezado. Considerando-se esta simplificação e substituindo-se o valor de ε_l nesta equação, tem-se:

$$U_1 = \int_0^L \int_S \left(-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dS dy \quad (\text{A.51})$$

Após a manipulação algébrica, obtém-se:

$$U_1 = \int_0^L \int_S \left[x^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] dS dy \quad (\text{A.52})$$

Devido à simetria da seção transversal do eixo em relação aos eixos x e z , a integral do terceiro termo entre colchetes na equação A.52 é nula. Os momentos de inércia de área em relação aos eixos x e z são dados respectivamente por:

$$I_x = \int_S z^2 dS \quad (\text{A.53})$$

$$I_z = \int_S x^2 dS \quad (\text{A.54})$$

Substituindo-se as equações A.53 e A.54 na equação A.52, chega-se:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (\text{A.55})$$

Se o eixo é submetido a uma força axial constante F_0 , então deve-se acrescentar a energia potencial de deformação do eixo dada por:

$$U_2 = \int_0^L \frac{F_0}{S} (\varepsilon_l + \varepsilon_n l) d\varphi \quad (\text{A.56})$$

Devido a simetria da seção transversal do eixo em relação a x e z , a integral do primeiro termo entre parênteses na equação acima é nulo. Substituindo-se o valor de $\varepsilon_n l$ na equação acima, tem-se:

$$U_2 = \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (\text{A.57})$$

A energia total de deformação do eixo U_S é dada pela soma das parcelas U_1 e U_2 :

$$U_S = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (\text{A.58})$$

As coordenadas u^* e w^* são coordenadas dependentes do tempo, mas podem ser reescritas em função de u e w , como é mostrado na Fig. A.3.

$$u^* = u \cos(\dot{\phi}t) - w \operatorname{sen}(\dot{\phi}t) \quad (\text{A.59})$$

$$w^* = u \operatorname{sen}(\dot{\phi}t) + w \cos(\dot{\phi}t) \quad (\text{A.60})$$

Substituindo-se as derivadas de u^* e w^* na equação A.58, tem-se:

$$U_S = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\cos(\dot{\phi}t) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \operatorname{sen}(\dot{\phi}t) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\operatorname{sen}(\dot{\phi}t) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos(\dot{\phi}t) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\left(\cos(\dot{\phi}t) \frac{\partial u}{\partial y} - \operatorname{sen}(\dot{\phi}t) \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\operatorname{sen}(\dot{\phi}t) \frac{\partial u}{\partial y} + \cos(\dot{\phi}t) \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (\text{A.61})$$

Para eixos de seção transversal circular, $I_x = I_y = I$. Após algumas simplificações algébricas na equação A.61, tem-se a expressão final para a energia de deformação do eixo dada por:

$$U_S = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (\text{A.62})$$

Desprezando-se os esforços axiais ($F_0 = 0$), a equação acima é simplificada, resultando em:

$$U_S = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (\text{A.63})$$

Substituindo-se as derivadas das equações A.21 e A.22 na equação A.63, obtém-se a energia de deformação de um elemento de eixo de comprimento L , escrita de acordo com o método dos elementos finitos.

$$U_S = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\delta u^t \frac{d^2 N_1^t}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} \delta u + \delta w^T \frac{d^2 N_2^t}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta w \right] dy \quad (\text{A.64})$$

Após integrar a equação acima tem-se:

$$U_S = \frac{1}{2} \delta u^t K_1 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^T K_2 \delta w \quad (\text{A.65})$$

onde K_1 e K_2 são matrizes dadas por:

$$K_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.66})$$

$$K_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.67})$$

obtidas a partir da integração das seguintes equações:

$$K_1 = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\frac{d^2 N_1^t}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} \right] dy \quad (\text{A.68})$$

$$K_2 = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\frac{d^2 N_2^t}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \right] dy \quad (\text{A.69})$$

Aplicando a equação de Lagrange na expressão da energia de deformação dada pela equação A.65, tem-se:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = K_c \delta \quad (\text{A.70})$$

onde K_c é matriz de rigidez clássica, dada por:

$$K_c = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.71})$$

onde

$$a = \frac{12EI}{GS_r L^2} \quad (\text{A.72})$$

e

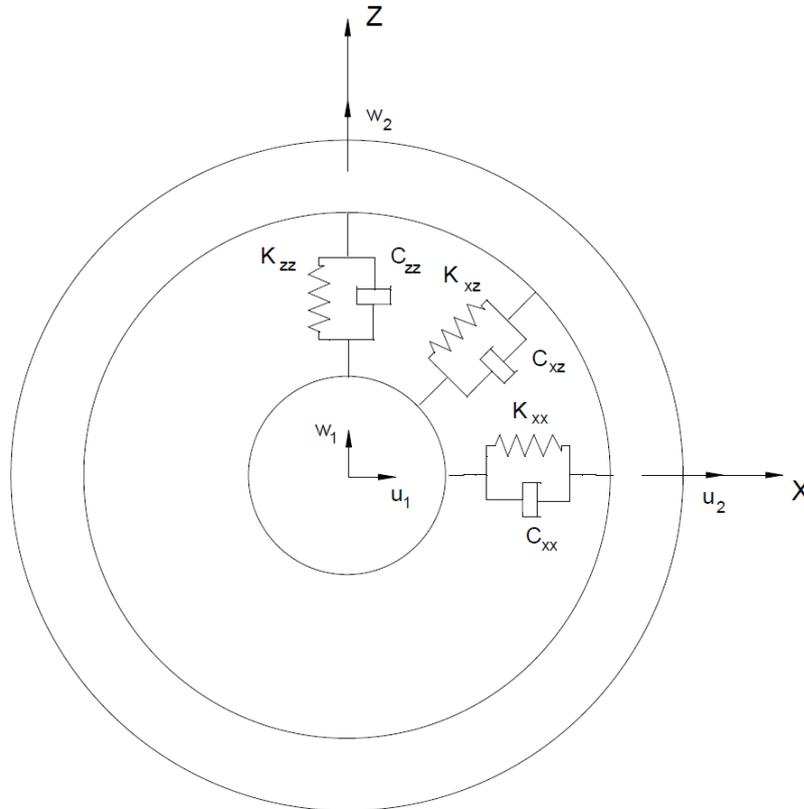
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{A.73})$$

sendo a uma variável que caracteriza o cisalhamento da seção transversal do eixo (viga de Timoshenko); S_r é a área reduzida da seção transversal do elemento e G é o módulo transversal de elasticidade do material do eixo.

A.4 O MANCAL

Os mancais são elementos estruturais que estabelecem ligações entre os graus de liberdade de translação de dois nós, um no rotor e outro pode ser no engastamento fixo ou apoiado sobre uma fundação elástica, conforme mostra a Fig. A.4.

Figura A.4- Fundação ligada ao rotor pelo mancal.



Fonte: Autor.

O princípio do Trabalho Virtual é usado para calcular as forças que o mancal exerce sobre o eixo. Assume-se que os valores dos termos de rigidez e amortecimento são conhecidos, então o trabalho sobre o eixo é dado por:

$$\delta W = -k_{xx}u\delta u - k_{xz}w\delta u - k_{zz}w\delta w - k_{zx}u\delta w - c_{xx}\dot{u}\delta u - c_{xz}\dot{w}\delta u - c_{zz}\dot{w}\delta w - c_{zx}\dot{u}\delta w \quad (\text{A.74})$$

ou

$$\delta W = F_u\delta u + F_w\delta w \quad (\text{A.75})$$

onde

$$F_u = -k_{xx}u - k_{xz}w - c_{xx}\dot{u} - c_{xz}\dot{w} \quad (\text{A.76})$$

e

$$F_w = -k_{zz}w - k_{zx}u - c_{zz}\dot{w} - c_{zx}\dot{u} \quad (\text{A.77})$$

Considerando que os momentos fletores e as rotações são nulas, $F_\theta = F_\phi = 0$, é possível reescrever as equações A.76 e A.77 na forma matricial abaixo:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_\theta \\ F_w \\ F_\psi \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zx} & 0 & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \theta \\ w \\ \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & c_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & 0 & c_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (\text{A.78})$$

A primeira matriz é a matriz de rigidez do mancal e a segunda é a matriz de amortecimento viscoso.

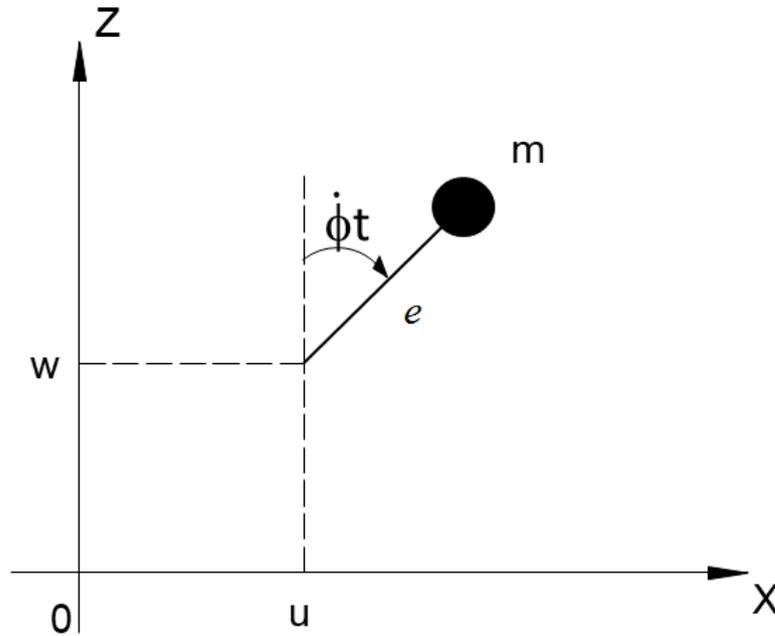
Como neste trabalho é utilizado uma mola helicoidal convencional em paralelo com uma mola helicoidal de liga com memória de forma (LMF), nas direções x e z , a equação A.78 se torna:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_\theta \\ F_w \\ F_\psi \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} + K_{LMF} & 0 & k_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zx} & 0 & k_{zz} + K_{LMF} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \theta \\ w \\ \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & c_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & 0 & c_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (\text{A.79})$$

A.5 FORÇAS DE DESBALANCEAMENTO

O desbalanceamento é normalmente definido como uma massa m posicionada à uma distância e do centro geométrico do elemento. A massa permanece sempre no plano xz e sua coordenada ao longo do eixo y é constante.

Figura A.5- Massa de desbalanceamento.



Fonte: Autor.

O cálculo da energia cinética da massa de desbalanceamento (m) para um sistema transiente é obtida por meio da equação abaixo (LALANNE; FERRARIS, 1998):

$$T = me\dot{\phi}(\dot{u}\cos(\phi) - \dot{w}\sin(\phi)) \quad (\text{A.80})$$

Aplicando as equações de Lagrange em A.80, tem-se:

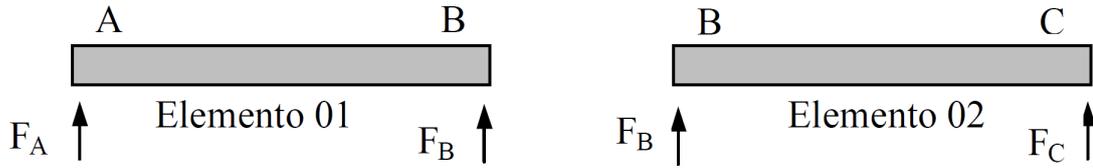
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial T}{\partial u} = me\ddot{\phi}\cos(\phi) - me\dot{\phi}^2\sin(\phi) \quad (\text{A.81})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{w}} \right) - \frac{\partial T}{\partial w} = -me\ddot{\phi}\sin(\phi) - me\dot{\phi}^2\cos(\phi) \quad (\text{A.82})$$

A.6 OBTENÇÃO DO MODELO GLOBAL

Uma vez construído as matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento dos vários elementos presentes no rotor, integra-se estes elementos para se obter o modelo global. Para exemplificar, este processo de integração, seja os dois elementos de árvore, que apresentam um nó em comum, conforme ilustra a Fig. A.6.

Figura A.6- Dois elementos de árvore com um nó em comum.



Fonte: Autor.

Seja δ_i o vetor de deslocamento (4×1) do nó i e F_i (4×1) o vetor de forças atuando no nó i ($i = A, B, C$). A equação que descreve o movimento do elemento 01 é dada por:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}_1 \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_A \\ \ddot{\delta}_B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}_1 \begin{Bmatrix} \dot{\delta}_A \\ \dot{\delta}_B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}_1 \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix}_1 \quad (\text{A.83})$$

onde M_{ij} é uma submatriz 4×4 , da matriz de massa do elemento 01. Definição análoga vale para as submatrizes de amortecimento C_{ij} e rigidez K_{ij} .

Para o elemento 02, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}_2 \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_B \\ \ddot{\delta}_C \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}_2 \begin{Bmatrix} \dot{\delta}_B \\ \dot{\delta}_C \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}_2 \begin{Bmatrix} \delta_B \\ \delta_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_B \\ F_C \end{Bmatrix}_2 \quad (\text{A.84})$$

Como o nó B é comum aos dois elementos, e admitido que os dois elementos são idênticos, então o modelo “integrado” dos elementos 01 e 02 é expresso por (usando as equações A.83 e A.84):

$$\bar{M} \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_A \\ \ddot{\delta}_B \\ \ddot{\delta}_C \end{Bmatrix} + \bar{C} \begin{Bmatrix} \dot{\delta}_A \\ \dot{\delta}_B \\ \dot{\delta}_C \end{Bmatrix} + \bar{K} \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \\ \delta_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{Bmatrix} \quad (\text{A.85})$$

onde

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 \\ M_{21} & M_{22} + M_{11} & M_{12} \\ & M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.86})$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} + C_{11} & C_{12} \\ & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.87})$$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22} + K_{11} & K_{12} \\ & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.88})$$

Uma vez integrado dois elementos, integra-se aos mesmos um terceiro, um quarto, e assim por diante, até obter-se o modelo global do rotor. Tal modelo, escrito numa forma compacta, resulta em:

$$[M] \{\ddot{\delta}\} + [D_s + \dot{\phi}C] \{\dot{\delta}\} + [K_s + \ddot{\phi}K_2] \{\delta\} = \{F(t)\} \quad (\text{A.89})$$

onde

$[M]$: Matriz de massa do sistema.

$[D_s]$: Matriz de amortecimento do sistema.

$[C]$: Matriz giroscópica do sistema.

$[K_s]$: Matriz de rigidez do sistema.

$[K_2]$: Matriz de rigidez devido o movimento transiente.

$\dot{\phi}(t)$: Velocidade de rotação do rotor.

$\{\delta\}$: Vetor de deslocamentos nodais.

$\{F(t)\}$: Vetor de forças atuantes no sistema.

Uma vez que cada nó admite quatro graus de liberdade, duas rotações e duas translações, o vetor de estado $\{\delta\}$ tem dimensão $4n_n \times 1$, onde n_n é o número de nós em que a estrutura foi discretizada. As matrizes presentes na equação A.89 são quadradas de ordem $4n_n$ e as forças são vetores $4n_n \times 1$.

**APÊNDICE B – CÓDIGO DESENVOLVIDO EM ANSYS: DIAGRAMA
DE CAMPBELL**

```

/config,NRES,1000000
/prep7
!Rotor Properties
L=0.60           !Length of shaft
D=0.015         !Diameter of shaft
R=D/2

D1=0.15         !Diameter of Discs
D2=0.09
H1=0.01        !Thickness of Discs
H2=0.005
E=2.1E11
PR=0.3
Density=7800
R1=D1/2
R2=D2/2
pi=acos(-1)

m1=pi*( R1**2 - R**2 )*H1*Density
Id1=m1*( 3*R1**2 + 3*R**2 + H1**2 )/12
Ip1=m1*( R1**2 + R**2 )/2

m2=pi*( R2**2 - R**2 )*H2*Density
Id2=m2*( 3*R2**2 + 3*R**2 + H2**2 )/12
Ip2=m2*( R2**2 + R**2 )/2

kxx=1.3E4
kyy=1.3E4

```

!SHAFT - Element Type and Material Properties

```
et,1,188
sectype,1,beam,csolid
secdata,R,20
mp,ex,1,E
mp,prxy,1,PR
mp,dens,1,Density
```

!SHAFT - Element Creation

```
type,1
mat,1
k,1
k,2,,L
l,1,2
lesize,1,,30
lmesh,all
```

!DISCS - Concentrated Mass

```
et,2,21
r,2,m1,m1,m1,Id1,Id1,Ip1
type,2
real,2
e,7
```

```
et,3,21
r,3,m2,m2,m2,Id2,Id2,Ip2
type,3
real,3
e,21
```

!BEARINGS

$E_m = 26.3E9$

$E_a = 67E9$

$E_m = E_m * 0.5 + 0.5 * E_a$

$G_m = E_m / (2 * (1 + \nu))$

$G_a = E_a / (2 * (1 + \nu))$

$N = 4$

$D = 18E-3$

$d_m = 3E-3$

$\gamma = d_m / (\pi * D^2 * N)$

$k_m = d_m^4 * G_m / (8 * D^3 * N)$

$k_a = d_m^4 * G_a / (8 * D^3 * N)$

n,32,0

n,33,,0.5

et,4,214

keyopt,4,2,0

r,4,kxx + km,kyy + ka

type,4

real,4

e,32,1

e,33,27

!Boundary conditions

d,all,uz

d,all,rotz

d,32,all

d,33,all

fini

```
!Campbell diagram
```

```
/solu
```

```
antype,modal
```

```
nmodes=30
```

```
spin=10000*pi/30
```

```
modopt,qr damp,nmodes,,on
```

```
qrdopt,on
```

```
mxpand,nmodes
```

```
coriolis,on,,on
```

```
omega,,0.1
```

```
solve
```

```
omega,,spin/2
```

```
solve
```

```
omega,,spin
```

```
solve
```

```
fini
```

```
! Results
```

```
/post1
```

```
/yrange,0.1,200
```

```
/show,jpeg
```

```
plcamp,1,1,rpm
```

```
/show,close
```

```
prcamp,1,1,rpm
```

```
fini
```

APÊNDICE C – CÓDIGO DESENVOLVIDO EM ANSYS: RESPOSTA AO DESBALANCEAMENTO

```

/config,NRES,1000000
/prep7
!Rotor Properties
L=0.60           !Length of shaft
D=0.015         !Diameter of shaft
R=D/2

D1=0.15         !Diameter of Discs
D2=0.09
H1=0.01        !Thickness of Discs
H2=0.005
E=2.1E11
PR=0.3
Density=7800
R1=D1/2
R2=D2/2
pi=acos(-1)

m1=pi*( R1**2 - R**2 )*H1*Density
Id1=m1*( 3*R1**2 + 3*R**2 + H1**2 )/12
Ip1=m1*( R1**2 + R**2 )/2

m2=pi*( R2**2 - R**2 )*H2*Density
Id2=m2*( 3*R2**2 + 3*R**2 + H2**2 )/12
Ip2=m2*( R2**2 + R**2 )/2

kxx=1.3E4
kyy=1.3E4

```

!SHAFT - Element Type and Material Properties

```
et,1,188
sectype,1,beam,csolid
secdata,R,20
mp,ex,1,E
mp,prxy,1,PR
mp,dens,1,Density
```

!SHAFT - Element Creation

```
type,1
mat,1
k,1
k,2,,L
l,1,2
lesize,1,,30
lmesh,all
```

!DISCS - Concentrated Mass

```
et,2,21
r,2,m1,m1,m1,Id1,Id1,Ip1
type,2
real,2
e,7
```

```
et,3,21
r,3,m2,m2,m2,Id2,Id2,Ip2
type,3
real,3
e,21
```

!BEARINGS

$E_m = 26.3E9$

$E_a = 67E9$

$E_m = E_m * 0.5 + 0.5 * E_a$

$G_m = E_m / (2 * (1 + \nu))$

$G_a = E_a / (2 * (1 + \nu))$

$N = 4$

$D = 18E-3$

$d_m = 3E-3$

$\gamma = d_m / (\pi * D^{2 * N})$

$k_m = d_m^{4 * N} * G_m / (8 * D^{3 * N})$

$k_a = d_m^{4 * N} * G_a / (8 * D^{3 * N})$

n,32,0

n,33,,0.5

et,4,214

keyopt,4,2,0

r,4,kxx + km,kyy + ka

type,4

real,4

e,32,1

e,33,27

!Boundary conditions

d,all,uz

d,all,rotz

d,32,all

d,33,all

fini

!Select all rotating elements supports Coriolis command

```
esel,,ename,,188
esel,a,ename,,21
cm,rot_part, elem
esel, all
```

!HARMONIC Analysis

```
/solu
```

!Unbalance analysis – Input (high speed resolution)

```
start = 0           !rpm
End = 3400          !rpm
Inc = 1             !rpm
Diff = End-start
Ndiv = Diff/Inc
```

!Unbalance mass

```
w = 3400*pi/30
e=250e-3/w
md1=0.1*m1*e
md2=0.1*m2*e
```

```
antype,harmic           ! Perform Harmonic analysis
```

```
F,7,fx,md1
```

```
F,7,fy,-md1
```

```
F,21,fx,md2
```

```
F,21,fy,-md2
```

```
spinRds = 1           ! Rotating velocity of the shaft
```

!Frequency of excitation

```

spinRpm1 = start
spinRpm2 = End

begin_freq = spinRpm1/60           ! Begin frequency
end_freq = spinRpm2/60           ! End frequency

hropt,full           ! Choose full harmonic analysis

synchro,,ROT_PART
nsubst,Ndiv
harfrq,begin_freq,end_freq

kbc,1

cmomega,ROT_PART,,spinRds           ! Specify velocity of rotor
coriolis,on,,on           ! Coriolis command activated

solve
fini

/post26

n = Ndiv + 1
*dim,uxTab,table,n,,TIME
*dim,uyTab,table,n,,TIME

!Simple rotor- Maximum displacement

NodeP = 7
nsol,2,NodeP,U,Y,UY
nsol,3,NodeP,U,X,UX

realvar,4,2,,UYR
realvar,5,3,,UXR

prod,6,4,4,,UYR_2

```

```
prod,7,5,5,UXR_2
```

```
add,8,6,7,,UYR_2+UXR_2
```

```
sqrt,9,8,,AMPL_7
```

```
/Axlabs,x,Frequency,[Hz]
```

```
/Axlabs,y,Displacement,[m]
```

```
plvar,3
```

```
vget,uxTab,3
```

```
vget,uyTab,2
```

```
/out,ansys_desbal_u.dat
```

```
*vwrite,uxTab(1,1),uyTab(1,1)
```

```
(1X,F15.12,' ',F15.12)
```

```
/out
```

```
fini
```