A Primal-Dual Interior/Exterior Point Method, with Combined Directions and Quadratic Test in Reactive Optimal Power Flow Problems

R. R. Souza, A. R. Balbo, L. Nepomuceno, *Member*, *IEEE*, E. C. Baptista, E. M. Soler and R. B. N. Pinheiro

***Abstract*—In this paper, we propose a primal-dual interior/exterior point method that uses the modified logarithmic barrier function together with a quadratic test strategy and new search direction procedures for solving the reactive optimal power flow problem. The quadratic test is proposed as an alternative strategy for the Cholesky procedure for calculating the positivity of the Hessian matrix of the problem. The new search directions investigated in the paper are determined by combining the search directions calculated in the predictor and corrector steps, and also by using information associated with the complementarity conditions. The method is implemented in Matlab and applied to solving the reactive optimal power flow problem for 9 and 39 bus systems, as well as for the IEEE 14, 30, 57 and 118 test systems. The results reinforce the efficiency of the method proposed for solving the problem.**

***Keywords*—Interior/exterior point method, modified logarithmic barrier function, reactive optimal power flow, non-linear optimization.**

I. INTRODUÇÃO

O PROBLEMA de Fluxo de Potência Ótimo (FPO) foi formulado na década de 60 [1] ao incorporar as equações do Fluxo de Carga (FC) nas restrições do problema de Despacho Econômico (DE). O FPO tem como objetivo de minimizar algum critério relacionado ao desempenho do sistema elétrico, como perdas na transmissão, custo de geração, otimização do perfil de tensão, entre outros, sujeito a restrições físicas e operacionais dos sistemas de transmissão e geração. O FPO, é escrito como um problema de otimização não-linear, não convexo e de grande porte com restrições de igualdade, desigualdade e variáveis contínuas e discretas. Em algumas formulações recentes, o FPO também pode apresentar restrições de complementaridade [2].

Neste trabalho considera-se o problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo (FPOR), que visa a minimização das perdas de potência ativa na transmissão, considerando equações de balanço nodal de potência ativa e reativa nas barras do sistema, restrições canalizadas nas gerações de potência reativa em barras com controle de tensão e restrições canalizadas em magnitudes de tensão e taps de transformadores.

Métodos primal-dual de pontos interiores e exteriores tem apresentado rápida convergência na resolução de problemas de grande porte, assim, com base nos trabalhos de [3], [4] e [5] é proposto um método primal-dual de pontos interiores e exteriores, que explora a função barreira logarítmica modificada (PDPIEBLM), com teste quadrático e a determinação de direções de busca combinadas para resolução do problema de FPOR.

A estratégia de teste quadrático é proposta como uma simplificação ao procedimento de Cholesky [6] e [7], o qual tem como objetivo a verificação da positividade da matriz dual normal θ_k, a cada iteração k do método. A matriz θ_k é, utilizada iterativamente para a resolução do problema de FPOR. A estratégia proposta consiste na realização de um teste de verificação sobre o termo quadrático, $(x^k)^t\theta_k(x^k) > 0$, para o ponto de otimização atual x^k. Caso a matriz dual normal θ_k seja definida positiva, é possível garantir a determinação de direções de descida para a convergência do método.

Para determinar as direções de busca, o método proposto inicialmente adota o procedimento previsor-corretor descrito em [3], em que o parâmetro de barreira μ é considerado em ambos os procedimentos (previsor e corretor), já que este influencia nas condições de complementaridade do problema. As direções propostas envolvem a combinação das direções dos procedimentos previsor e corretor, a atualização dos pontos baseados nesses procedimentos e o teste de complementaridade apresentado em [5], o qual determina as direções mais promissoras. Assim, nas estratégias aqui descritas, as direções calculadas pelo procedimento previsor não são descartadas, como usualmente é feito na literatura [8], mas combinadas com as direções corretoras, de modo a compor novas direções para a solução do FPOR. As estratégias propostas para a composição das direções de busca são baseadas em [3], [5] e [9], e visam reduzir o número de iterações garantindo a mesma eficiência na minimização da função perdas de potência ativa nas linhas de transmissão dos sistemas.

Em relação aos métodos previamente propostos na literatura para a solução do FPOR [3], [7], [10] e [11] podem ser destacadas as seguintes contribuições do método proposto neste trabalho: i) o método proposto busca reduzir o tempo computacional para a solução do problema de FPOR, ao utilizar

R. R. Souza, Unesp - Univ Estadual Paulista, Brasil, Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, rr.souza@live.com.
A. R. Balbo, Unesp - Univ Estadual Paulista, Brasil, Departamento de Matemática, Brasil, arbalbo@fc.unesp.br.
L. Nepomuceno, Unesp - Univ Estadual Paulista, Brasil, Departamento de Engenharia Elétrica, Brasil, leo@feb.unesp.br.
E. C. Baptista, Unesp - Univ Estadual Paulista, Brasil, Departamento de Matemática, Brasil, baptista@fc.unesp.br.
E. M. Soler, Unesp - Univ Estadual Paulista, Brasil, Departamento de Matemática, Brasil, edilaine@fc.unesp.br.
R. B. N. Pinheiro, USP - Universidade de São Paulo, Brasil, Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, ribenopi@hotmail.com.

na verificação da positividade da matriz hessiana θ_k, um procedimento que exige menor esforço computacional em relação ao procedimento de Cholesky, tradicionalmente utilizado na literatura; ii) as estratégias de definição das novas direções de busca propostas, as quais não desprezam as direções associadas ao passo previsor, por meio de um teste de complementaridade, tornam o método mais eficiente para a determinação das soluções ótimas, buscando reduzir o número de iterações para a solução do problema.

Os resultados apresentados mostram a eficiência do método proposto, o qual foi implementado em linguagem Matlab, utilizando a versão R2010b, e aplicado aos sistemas elétricos de 9 e 39 barras, bem como aos sistemas IEEE 14, 30, 57 e 118 barras.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: o problema de FPOR é descrito na seção II; na seção III apresenta-se o método primal-dual de pontos interiores e exteriores barreira logarítmica modificada (PDPIEBLM) em conjunto com as novas estratégias de direção propostas para a solução do FPOR. Por fim, os resultados determinados pelo método são descritos na seção IV e as conclusões e trabalhos futuros são descritos na seção V.

II. O Problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo

O FPOR aqui investigado constitui um problema de otimização não-linear, não convexo e de grande porte. Este problema tem sido de grande relevância para a operação e planejamento de sistemas elétricos de potência. O problema de FPOR tem como objetivo a minimização das perdas de potência ativa na transmissão, considerando restrições físicas e operacionais do sistema, conforme matematicamente formulado em (1):

$$\begin{aligned}
&\text{Min} && \sum_{k,m\in L\cup T} g_{km}\left(\frac{1}{t_{km}^2}V_k^2+V_m^2-2\frac{1}{t_{km}}V_kV_m\cos\theta_{km}\right) && (a)\\
&\text{s.a:} && \sum_{m\in\Omega_k} P_{km}-P_{G_k}+P_{C_k}=0,\forall k\in G'\cup C && (b)\\
& && \sum_{m\in\Omega_k} Q_{km}-Q_{G_k}+Q_{C_k}-Q_k^{sh}=0,\forall k\in C && (c)\\
& && Q_{G_k}^{min}\le Q_{G_k}\le Q_{G_k}^{max},\forall k\in G && (d)\\
& && V_k^{min}\le V_k\le V_k^{max},\forall k\in B && (e)\\
& && t_{km}^{min}\le t_{km}\le t_{km}^{max},\forall k,m\in T, && (f)
\end{aligned} \quad (1)$$

em que:

V_k	Magnitude de tensão da barra k;
V_m	Magnitude de tensão da barra m;
V	Vetor das magnitudes de tensão do sistema;
θ_{km}	Diferença entre os ângulos das tensões das barras k e m;
θ	Vetor de ângulo das tensões do sistema;
t_{km}	Tap do transformador conectado às barras k e m;
t	Vetor de tap de transformadores do sistema;
L	Conjunto de linhas de transmissão do sistema
T	Conjunto de transformadores em fase do sistema
G	Conjunto das barras com controle de tensão do sistema;
G'	Conjunto das barras de geração do sistema, menos a barra *slack*;
B	Conjunto de todas as barras do sistema;
C	Conjunto das barras de carga do sistema;
Ω_k	Conjunto das barras vizinhas à barra k;
g_{km}	Condutância do ramo km (linha de transmissão ou transformador) que conecta as barras k e m; P_{km}, Q_{km} fluxos de potência ativa e reativa no ramo km, respectivamente;
P_{G_k}, P_{C_k}	Potências ativas geradas e consumidas na barra k, respectivamente;
Q_{G_k}, Q_{C_k}	Injeção líquida de potência reativa gerada e consumida, respectivamente, na barra k;
Q_k^{sh}	Componente da injeção de potência reativa devida ao elemento shunt da barra k;
$Q_{G_k}^{min}, Q_{G_k}^{max}$	Limites mínimo e máximo, respectivamente, de injeção de potência reativa na barra k;
V_k^{min}, V_k^{max}	Limites mínimo e máximo, respectivamente, da magnitude de tensão da barra k;
$t_{km}^{min}, t_{km}^{max}$	Limites mínimo e máximo, respectivamente, do tap do transformador do ramo.

As restrições de igualdade (1)(b) e (1)(c) são formadas por equações de balanço de potência ativa e reativa em cada barra do sistema, também conhecidas como equações de fluxo de potência. Estas equações são equivalentes às leis físicas de Kirchhoff de tensão e corrente, e exprimem a conservação de potência (energia) em cada barra do sistema. Matematicamente, estas restrições definem que a injeção de potência líquida injetada em uma barra (dada pela geração menos a carga na barra) deve ser igual à soma das potências que fluem desta barra para as suas vizinhas, por meio de linhas de transmissão ou transformadores. As equações matemáticas para as funções $P_{km}(V,\theta,t)$, $Q_{km}(V,\theta,t)$, Q_{G_k} e Q_k^{sh} são detalhadas em [10]. As restrições de desigualdade canalizadas dadas em (1)(d) representam os limites mínimo e máximo de injeção de potência reativa nas barras com controle de tensão. As variáveis do problema de FPOR envolvem os vetores das magnitudes (V) e dos ângulos (θ) das tensões, bem como dos taps dos transformadores (t) do sistema.

III. Método Primal-Dual de Pontos Interiores e Exteriores

Para a descrição do método primal-dual de pontos interiores e exteriores barreira logarítmica modificada (PDPIEBLM) aqui proposto, considera-se, inicialmente, o modelo geral de otimização não-linear com restrições de igualdade e desigualdade dado em (2):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad f(x) \\ &\text{Sujeito a:} \\ &\qquad g(x) = 0 \\ &\qquad h(x) \leq 0, \end{aligned} \tag{2}$$

em que $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é a função objetivo, $x \in \mathbb{R}^n$, $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $h:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ são funções de classe C_2. Utilizando variáveis de folga $z \in \mathbb{R}^r_+$, as restrições de desigualdade são reescritas conforme (3):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad f(x) \\ &\text{Sujeito a:} \\ &\qquad g(x) = 0 \\ &\qquad h(x) + z \leq 0 \\ &\qquad z \geq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Da mesma forma que o método descrito em [11], neste trabalho as variáveis de folga são tratadas pela função barreira logarítmica modificada de [4] e incorporadas à função objetivo por meio do parâmetro de barreira $\mu > 0$, conforme descrito em (4):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad f(x) - \mu \sum_{i=1}^{r} \delta_i \ln(\mu^{-1} z_i + 1) \\ &\text{Sujeito a:} \\ &\qquad g(x) = 0 \\ &\qquad h(x) + z \leq 0, \end{aligned} \tag{4}$$

em que $\delta \in \mathbb{R}^r_+$, é o vetor de estimadores dos multiplicadores de Lagrange relativos às restrições de não-negatividade das variáveis de folga.

As restrições de igualdade em (4) são incorporadas à função objetivo através de multiplicadores de Lagrange $\eta \in \mathbb{R}^m$ e $\lambda \in \mathbb{R}^r_+$. Desta forma obtém-se a função Lagrangiana aumentada, apresentada em (5):

$$\begin{aligned} L_\mu(x,z,\eta,\lambda) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^{r} \delta_i \ln(\mu^{-1} z_i + 1) + \\ + \sum_{j=1}^{m} \eta g_j(x) + \sum_{i=1}^{r} \lambda (h_i(x) + z_i). \end{aligned} \tag{5}$$

As condições necessárias de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) são aplicadas à função Lagrangiana aumentada (5) e o sistema não linear (6) é obtido:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + [Jg(x)]^t \eta + [Jh(x)]^t \lambda = 0 \quad &(a) \\ -\mu \bar{Z}^{-1} \delta + \lambda = 0 \quad &(b) \\ g(x) = 0 \quad &(c) \\ h(x) + z = 0 \quad &(d), \end{aligned} \tag{6}$$

em que $Jg(x)$ e $Jh(x)$ são as matrizes jacobianas associadas a g e h, respectivamente, e são definidos $\bar{Z}$ em (7) e $\bar{Z}^{-1}$ em (8):

$$\bar{Z} = diag(z_1 + \mu, \ldots, z_m + \mu) \tag{7}$$

$$\bar{Z}^{-1} = diag\left(\frac{1}{z_1 + \mu}, \ldots, \frac{1}{z_m + \mu}\right). \tag{8}$$

De acordo com [3], o sistema definido em (6) é usualmente reescrito como em (9), pois o produto $\bar{Z}\lambda$, pelo teorema da dualidade forte nos fornece a condição de complementaridade entre as variáveis primais z e as duais λ:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + [Jg(x)]^t \eta + [Jh(x)]^t \lambda = 0 \quad &(a) \\ \bar{Z}\lambda - \mu\delta = 0 \quad &(b) \\ g(x) = 0 \quad &(c) \\ h(x) + z = 0. \quad &(d) \end{aligned} \tag{9}$$

A. O sistema de direções de busca

As direções de busca do método, $\mathrm{d}x^k$, $\mathrm{d}z^k$, $\mathrm{d}\eta^k$ e $\mathrm{d}\lambda^k$, são definidas através da linearização do sistema não-linear (9) pela fórmula de Taylor de primeira ordem. As equações linearizadas geram o sistema de direções de busca, definido em (10):

$$\begin{pmatrix} K & 0 & Jg(x^k)^t & Jh(x^k)^t \\ 0 & \Lambda^k & 0 & \overline{Z_k} \\ Jg(x^k) & 0 & 0 & 0 \\ Jh(x^k) & I_r & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x^k \\ \mathrm{d}z^k \\ \mathrm{d}\eta^k \\ \mathrm{d}\lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{r}^k \\ \mathrm{s}^k \\ \mathrm{t}^k \\ \mathrm{u}^k \end{pmatrix}, \tag{10}$$

em que $K = \nabla^2_{xx} L_\mu(x^k, z^k, \eta^k, \lambda^k)$, I_r é a matriz identidade de ordem r. Temos também:

$$\Lambda^k = diag(\lambda^k). \tag{11}$$

Os resíduos são definidos por:

$$\mathrm{r}^k = -\nabla f(x^k) - Jg(x^k)^t \eta - Jh(x^k)^t \lambda \tag{12}$$

$$\mathrm{s}^k = -\bar{Z}_k \lambda^k + \mu\delta^k - \mathrm{d}z^k \circ \mathrm{d}\lambda^k \tag{13}$$

$$\mathrm{t}^k = -g(x^k) \tag{14}$$

$$\mathrm{u}^k = -h(x^k) - z^k \tag{15}$$

Neste trabalho utilizamos o procedimento previsor-corretor, descrito em [3], em que no resíduo (13) o parâmetro de barreira μ é considerado em ambos os procedimentos, segundo os autores, por influenciar nas condições de complementaridade.

No resíduo (13) temos também o termo não linear $\mathrm{d}z^k \circ \mathrm{d}\lambda^k$, definido como o produto de Hadamard, em que é considerado o produto componente-a-componente, entre os vetores $\mathrm{d}z^k$ e $\mathrm{d}\lambda^k$

. No procedimento previsor é considerado $dz^k \circ d\lambda^k = 0$, pois a *priori* não temos direções dz^k e $d\lambda^k$ calculadas. Tais direções, após calculadas no passo previsor, são utilizadas no passo corretor para a atualização do cálculo do produto de Hadamard $dz^k \circ d\lambda^k$.

No procedimento previsor são calculadas as direções previsor, $\tilde{d}x^k$, $\tilde{d}z^k$, $\tilde{d}\eta^k$ e $\tilde{d}\lambda^k$, definidas em (16) a (19):

$$\tilde{d}\eta^k = [Jg(x^k)\theta_k^{-1}Jg(x^k)^t]^{-1}[Jg(x^k)\theta_k^{-1}(r^k - \tilde{p}^k) - t^k] \quad (16)$$

$$\tilde{d}x^k = \theta_k^{-1}[r^k - \tilde{p}^k - [Jg(x^k)^t]\,\tilde{d}\eta^k] \quad (17)$$

$$\tilde{d}z^k = u^k - Jh(x^k)\tilde{d}x^k \quad (18)$$

$$\tilde{d}\lambda^k = \bar{Z}_k^{-1}[\tilde{s}^k - \Lambda^k \tilde{d}z^k], \quad (19)$$

em que:

$$\theta_k = K + [Jh(x^k)^t]\bar{Z}_k^{-1}\Lambda^k Jh(x^k) \quad (20)$$

$$\tilde{s}^k = -\bar{Z}_k \lambda^k + \mu\delta^k \quad (21)$$

$$\tilde{p}^k = [Jh(x^k)^t]\bar{Z}_k^{-1}[\tilde{s}^k - \Lambda^k u^k] \quad (22)$$

No procedimento corretor são calculadas as direções corretor, dx^k, dz^k, $d\eta^k$ e $d\lambda^k$, definidas em (23) a (26):

$$d\eta^k = [Jg(x^k)\theta_k^{-1}Jg(x^k)^t]^{-1}[Jg(x^k)\theta_k^{-1}(r^k - p^k) - t^k] \quad (23)$$

$$dx^k = \theta_k^{-1}[r^k - p^k - [Jg(x^k)^t]d\eta^k] \quad (24)$$

$$dz^k = u^k - Jh(x^k)dx^k \quad (25)$$

$$d\lambda^k = \bar{Z}_k^{-1}[s^k - \Lambda^k dz^k], \quad (26)$$

em que:

$$p^k = [Jh(x^k)^t]\bar{Z}_k^{-1}[s^k - \Lambda^k u^k]. \quad (27)$$

B. Teste Quadrático

As direções calculadas nos procedimentos previsor e corretor precisam ser direções de descida, para garantir a convergência do método para pontos de mínimo. Para isso, a matriz dual normal, ou matriz hessiana do problema, definida em (20) tem que ser definida positiva. Usualmente é utilizado o procedimento de Cholesky nessa verificação. Neste trabalho, é proposta uma simplificação, isto é, a utilização do teste quadrático, definido em (28):

$$(x^k)^t \theta_k (x^k) > 0, \quad (28)$$

em que $x^k = (V, \theta, t)$ é o vetor das variáveis de otimização do problema.

Se a condição (28) for verdadeira, temos que θ_k é definida positiva no ponto x^k, o que é suficiente para garantir uma direção de descida para o método na iteração k. Caso contrário, uma atualização na matriz θ_k é realizada com base na estratégia de convergência global variante de Levenberg-Marquardt, proposta em [3] e definida por (29):

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \beta_k I_n, \quad (29)$$

em que $\beta_k \in \mathbb{R}_+$ é denominado parâmetro de amortecimento, e I_n é a matriz identidade de ordem n. A atualização de β_k é realizada pelo procedimento heurístico apresentado em [3]. Para isso, calcula-se (30), e adota-se a heurística dada a seguir:

$$Dif = L_\mu(x^k, z^k, \eta^k, \lambda^k) - L_\mu(x^{k+1}, z^{k+1}, \eta^{k+1}, \lambda^{k+1}). \quad (30)$$

- Se $Dif < 0,25$, então:

$$\beta_{k+1} = \beta_k \left(\frac{4}{(\sqrt{5}+1) + \sqrt{16\alpha^2 + (\sqrt{5}+1)^2}} \right) \quad (31)$$

- Se $Dif > 0,75$, então:

$$\beta_{k+1} = \beta_k \left(\frac{1 + \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2\alpha^2 + 1}}{2} \right) \quad (32)$$

- Se $0,25 \le Dif \le 0,75$, então $\beta_{k+1} = \beta_k$.

em que $\alpha \in (0,1)$ é um parâmetro pré-estabelecido na inicialização do método.

C. Cálculo do comprimento dos passos

O cálculo do comprimento dos passos primais e duais, denominados de, $\alpha^k_{P,\text{prev}}, \alpha^k_{P,\text{cor}}$, $\alpha^k_{D,\text{prev}}$ e $\alpha^k_{D,\text{cor}}$, respectivamente, e definidos de (33) a (36), é o mesmo utilizado em [3], que baseou-se em [12].

$$\alpha^k_{P,\text{prev}} = \sigma \min\left\{1, -\frac{(z_j^k)}{\tilde{d}z_j^k} : z_j^k > 0 \text{ e } \tilde{d}z_j^k < 0\right\}, \quad (33)$$

$$\alpha^k_{P,\text{cor}} = \sigma \min\left\{1, -\frac{(z_j^k)}{dz_j^k} : z_j^k > 0 \text{ e } dz_j^k < 0\right\}, \quad (34)$$

$$\alpha^k_{D,\text{prev}} = \sigma \min\left\{1, -\frac{\lambda_j^k}{\tilde{d}\lambda_j^k} : \lambda_j^k > 0 \text{ e } \tilde{d}\lambda_j^k < 0\right\}, \quad (35)$$

$$\alpha^k_{D,\text{cor}} = \sigma \min\left\{1, -\frac{\lambda_j^k}{d\lambda_j^k} : \lambda_j^k > 0 \text{ e } d\lambda_j^k < 0\right\}, j = 1,..,r, \quad (36)$$

em que σ é determinado através do procedimento visto em [13], conforme apresentado em (37):

$$\sigma = 1 - \frac{1}{9\sqrt{q}} \quad (37)$$

e q é o número de restrições do problema.

D. Cálculo do novo ponto

Propõe-se que a atualização do novo ponto seja feita através das estratégias baseadas nos trabalhos de [3], [5] e [9], os quais possibilitaram a proposição das estratégias 4 e 5, essas estratégias determinam direções de busca para o método.

Para a atualização do novo ponto e definição das estratégias propostas pelos autores citados e das novas estratégias propostas neste trabalho, considera-se inicialmente as soluções provisórias do procedimento previsor (38) e corretor (39):

$$\begin{aligned} x_p^k &= x^k + \alpha_{P,\text{prev}}^k\, \tilde{\mathrm{d}}x^k \\ z_p^k &= z^k + \alpha_{P,\text{prev}}^k\, \tilde{\mathrm{d}}z^k \\ \eta_p^k &= \eta^k + \alpha_{D,\text{prev}}^k\, \tilde{\mathrm{d}}\eta^k \\ \lambda_p^k &= \lambda^k + \alpha_{D,\text{prev}}^k\, \tilde{\mathrm{d}}\lambda^k \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} x_c^k &= x^k + \alpha_{P,\text{cor}}^k \mathrm{d}x^k \\ z_c^k &= z^k + \alpha_{P,\text{cor}}^k \mathrm{d}z^k \\ \eta_c^k &= \eta^k + \alpha_{D,\text{cor}}^k \mathrm{d}\eta^k \\ \lambda_c^k &= \lambda^k + \alpha_{D,\text{cor}}^k \mathrm{d}\lambda^k . \end{aligned} \tag{39}$$

Essas soluções provisórias são necessárias para a definição das estratégias 2, 4 e 5 propostas, as quais utilizam o teste de complementaridade proposto em [5], para determinar as direções mais promissoras.

As estratégias que determinam as direções de busca para o método são descritas a seguir:

- **Estratégia 1:** baseada em [3], são utilizadas as direções do procedimento corretor, com isso a atualização do novo ponto é feita através de (39);
- **Estratégia 2:** utiliza a atualização feita por [5], verifica-se a cada iteração quais direções são mais promissoras, previsor ou corretor, essa escolha é feita através do teste de complementaridade, definido em (40).
  Se vale a relação, o novo ponto é atualizado através de (38), quando as direções do previsor são mais promissoras, caso contrário, as direções do corretor são mais promissoras e utiliza-se (39).

$$(z_p^k + \mu)^t \lambda_p^k < \chi (z_c^k + \mu)^t \lambda_c^k \tag{40}$$

em que $\chi \in (0,1)$.

- **Estratégia 3:** baseada em [9], as novas direções, $\mathrm{d_n}x^k$, $\mathrm{d_n}z^k$, $\mathrm{d_n}\eta^k$ e $\mathrm{d_n}\lambda^k$ são determinadas utilizando uma combinação das direções previsor com as direções corretor, multiplicadas por um escalar $\omega \in (0,1)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{d_n}x^k &= \tilde{\mathrm{d}}x^k + \omega \mathrm{d}x^k \\ \mathrm{d_n}z^k &= \tilde{\mathrm{d}}z^k + \omega \mathrm{d}z^k \\ \mathrm{d_n}\eta^k &= \tilde{\mathrm{d}}\eta^k + \omega \mathrm{d}\eta^k \\ \mathrm{d_n}\lambda^k &= \tilde{\mathrm{d}}\lambda^k + \omega \mathrm{d}\lambda^k \end{aligned} \tag{41}$$

São calculados novos comprimentos de passo primal $\alpha_{\mathrm{P}}^k > 0$ e dual $\alpha_{\mathrm{D}}^k > 0$, considerando as novas direções determinadas em (41), de tal forma que a atualização do novo ponto é apresentada em (42):

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \alpha_{\mathrm{P}}^k \mathrm{d_n}x^k \\ z^{k+1} &= z^k + \alpha_{\mathrm{P}}^k \mathrm{d_n}z^k \\ \eta^{k+1} &= \eta^k + \alpha_{\mathrm{D}}^k \mathrm{d_n}\eta^k \\ \lambda^{k+1} &= \lambda^k + \alpha_{\mathrm{D}}^k \mathrm{d_n}\lambda^k \end{aligned} \tag{42}$$

- **Estratégia 4:** Proposta neste trabalho, as novas direções, $\mathrm{d_n}x^k$, $\mathrm{d_n}z^k$, $\mathrm{d_n}\eta^k$ e $\mathrm{d_n}\lambda^k$ são determinadas utilizando uma combinação convexa das direções previsor com as direções corretor, ou seja, dados dois escalares ω_1 e $\omega_2 \in (0,1)$, em que $\omega_1 + \omega_2 = 1$, as direções que recebem o maior escalar são as direções mais promissoras, determinadas através do teste de complementaridade (40).

$$\begin{aligned} \mathrm{d_n}x^k &= \omega_1 \tilde{\mathrm{d}}x^k + \omega_2 \mathrm{d}x^k \\ \mathrm{d_n}z^k &= \omega_1 \tilde{\mathrm{d}}z^k + \omega_2 \mathrm{d}z^k \\ \mathrm{d_n}\eta^k &= \omega_1 \tilde{\mathrm{d}}\eta^k + \omega_2 \mathrm{d}\eta^k \\ \mathrm{d_n}\lambda^k &= \omega_1 \tilde{\mathrm{d}}\lambda^k + \omega_2 \mathrm{d}\lambda^k \end{aligned} \tag{43}$$

São calculados novos comprimentos de passo primal $\alpha_{\mathrm{P}}^k > 0$ e dual $\alpha_{\mathrm{D}}^k > 0$, considerando as novas direções determinadas em (43), de tal forma que a atualização do novo ponto é apresentada de forma análoga à (42).

- **Estratégia 5:** as novas direções são determinadas por uma combinação das direções mais promissoras, somadas as outras direções multiplicadas por um escalar $\omega \in (0,1)$. Novamente a direção mais promissora é determinada por (40).
  Assim para cada iteração, se as direções do previsor são mais promissoras, as novas direções são determinadas como em (41).
  Caso contrário, se as direções do corretor são mais promissoras o escalar ω multiplica as direções previsor:

$$\begin{aligned} \mathrm{d_n}x^k &= \omega \tilde{\mathrm{d}}x^k + \mathrm{d}x^k \\ \mathrm{d_n}z^k &= \omega \tilde{\mathrm{d}}z^k + \mathrm{d}z^k \\ \mathrm{d_n}\eta^k &= \omega \tilde{\mathrm{d}}\eta^k + \mathrm{d}\eta^k \\ \mathrm{d_n}\lambda^k &= \omega \tilde{\mathrm{d}}\lambda^k + \mathrm{d}\lambda^k \end{aligned} \tag{44}$$

A partir das novas direções (44), os passos primal $\alpha_{\mathrm{P}}^k > 0$ e dual $\alpha_{\mathrm{D}}^k > 0$ são calculados e o novo ponto é determinado como em (42).

E. Atualização dos parâmetros μ e δ

A atualização do parâmetro de barreira μ segue a heurística dada em [3], e é apresentada em (45):

$$\mu_{k+1} = \tau\mu_k . \tag{45}$$

uma relaxação do parâmetro μ é feita para todo z^{k+1} seguindo o teste:

Se $z^{k+1} \geq -\mu_{k+1}$, então (45) permanece.

Caso contrário, para $z^{k+1} < -\mu_{k+1}$, μ é atualizado por (46):

$$\mu_{k+1} = -(1+\tau) \times min(z) , \tag{46}$$

em que $\tau \in (0,1)$ é um parâmetro de atualização.

Neste trabalho os estimadores dos multiplicadores de Lagrange δ são atualizados seguindo a proposta de [3] e definido em (47):

$$\delta^{k+1} = \lambda^{k+1} . \tag{47}$$

F. Critério de Parada

Os métodos iterativos, como o proposto neste trabalho não determinam uma solução exata para o problema, logo necessitam de um critério de parada.

Neste trabalho é adotado o critério de parada utilizado por [3]. Neste, quando os resíduos relativos à factibilidade primal, t^k e u^k, factibilidade dual, r^k e folgas complementares, s^k, são suficientemente pequenos quanto a uma precisão $\varepsilon > 0$ pré-estabelecida, uma boa solução é obtida.

Isso pode ser expresso por: $\left\| \mathrm{r}^k, \mathrm{s}^k, \mathrm{t}^k, \mathrm{u}^k \right\|_\infty \leq \varepsilon$.

G. O Algoritmo do método PDPIEBLM

O algoritmo do método PDPIEBLM com as estratégias de teste quadrático e determinação de direções de busca combinadas é apresentado em Algoritmo 1.

ALGORITMO 1 MÉTODO PDPIEBLM

---

1. Inicialização: Parâmetro de barreira $\mu^0 > 0$, seu fator de redução $\tau \in (0,1)$, parâmetro de amortecimento $\beta^0 \in (0,1)$, seu fator de atualização $\alpha \in (0,1)$, parâmetro do teste de complementaridade $\chi \in (0,1)$, os escalares das direções previsor e corretor $\omega_1, \omega_2 \in (0,1)$, os estimadores dos multiplicadores de Lagrange $\delta^0 > 0$ e x^0;
2. Calcule: $f(x^0)$, $\nabla f(x^0)$, $g(x^0)$, $Jg(x^0)$, $h(x^0)$, $Jh(x^0)$;
3. Calcule $z^0 = -h(x^0)$ e monte as matrizes $\bar{Z}_k^{-1}$ por (8);
4. Calcule e $\eta^0 = -[Jg(x^0)Jg(x^0)^t]^{-1} Jg(x^0)[\nabla f(x^0) + Jh(x^0)^t \lambda^0]$ e $\lambda^0 = \mu^0 \bar{Z}_k^{-1} \delta^0$;
5. Determine a matriz Λ^k por (11);
6. Calcule os resíduos do previsor: r^k por (12), $\tilde{\mathrm{s}}^k$ por (21), t^k por (14) e u^k por (15);
7. Calcule o vetor $\tilde{p}^k$ por (22) e θ_k por (20);
8. Atualize θ_k através de (29);
9. Realize o teste quadrático de (28) para verificar a positividade da matriz θ_k, e se necessário atualize essa matriz através de (29);
10. Calcule as direções do procedimento previsor: $\tilde{\mathrm{d}}x^k$ por (17), $\tilde{\mathrm{d}}z^k$ por (18), $\tilde{\mathrm{d}}\eta^k$ por (16) e $\tilde{\mathrm{d}}\lambda^k$ por (19);
11. Calcule o resíduo s^k por (13) e o vetor p^k por (27);
12. Calcule as direções do procedimento corretor: $\mathrm{d}x^k$ por (24), $\mathrm{d}z^k$ por (25), $\mathrm{d}\eta^k$ por (23) e $\mathrm{d}\lambda^k$ por (26);
13. Calcule os passos primais $\alpha_{P,\mathrm{prev}}^k$ $\alpha_{P,\mathrm{cor}}^k$ e duais $\alpha_{D,\mathrm{prev}}^k$, $\alpha_{D,\mathrm{cor}}^k$ pelas expressões de (33)-(36);
14. **Enquanto** { $\left\| \mathrm{r}^k, \mathrm{s}^k, \mathrm{t}^k, \mathrm{u}^k \right\|_\infty \geq \varepsilon$ }
15. Escolha uma das estratégias definidas na seção III-D, e atualize a solução, obtendo x^{k+1}, z^{k+1}, η^{k+1} e λ^{k+1};
16. Atualize o parâmetro de barreira por (45) ou, caso exista algum $z_j^{k+1} \leq -\tau\mu^k$, utilize (46).
17. Atualize os estimadores dos multiplicadores de Lagrange por (47);
18. Faça $k = k+1$;
19. Calcule: $f(x^k)$, $\nabla f(x^k)$, $g(x^k)$, $Jg(x^k)$, $h(x^k)$, $Jh(x^k)$;
20. Monte as matrizes $\bar{Z}_k^{-1}$ por (8) e Λ^k por (11);
21. Calcule os resíduos do previsor: r^k por (12), $\tilde{\mathrm{s}}^k$ por (21), t^k por (14) e u^k por (15);
22. Calcule o vetor $\tilde{p}^k$ por (22) e θ_k por (20);
23. Atualize θ_k através de (29);
24. Realize o teste quadrático de (28) para verificar a positividade da matriz θ_k, e se necessário atualize essa matriz através de (29).
25. Calcule as direções do procedimento previsor: $\tilde{\mathrm{d}}x^k$, $\tilde{\mathrm{d}}z^k$, $\tilde{\mathrm{d}}\eta^k$ e $\tilde{\mathrm{d}}\lambda^k$ pelas expressões de (16)-(19)
26. Calcule o resíduo s^k por (13) e o vetor p^k por (27);
27. Calcule as direções do procedimento corretor: $\mathrm{d}x^k$, $\mathrm{d}z^k$, $\mathrm{d}\eta^k$ e $\mathrm{d}\lambda^k$ pelas expressões de (23)-(26);
28. Calcule os passos primais $\alpha_{P,\mathrm{prev}}^k$, $\alpha_{P,\mathrm{cor}}^k$ e duais $\alpha_{D,\mathrm{prev}}^k$, $\alpha_{D,\mathrm{cor}}^k$ pelas expressões de (33)-(36);
29. **FIM**
30. Retorne a solução ótima: $x^* = x^k$, $z^* = z^k$, $\eta^* = \eta^k$ e $\lambda^* = \lambda^k$.

IV. RESULTADOS NUMÉRICOS

O Algoritmo 1 do método PDPIEBLM, com as estratégias 1 a 5 para determinar as direções de busca foi implementado em linguagem Matlab, utilizando a versão R2010b. Para os testes realizados, foram utilizados os sistemas elétricos 9 e 39 barras e os sistemas IEEE 14, 30, 57 e 118 barras. A Tabela I apresenta as principais características e as dimensões dos sistemas utilizados.

As Tabelas de II-VII apresentam os resultados obtidos ao adotar-se as estratégias de busca discutidas neste trabalho. Para possibilitar a verificação da positividade da matriz θ_k, todas as estratégias foram implementadas utilizando primeiramente o teste quadrático e, posteriormente, o procedimento de Cholesky, de modo a comparar os tempos computacionais e números de iterações em cada caso. Os resultados mostrados nestas tabelas, que envolvem as perdas, número de iterações e tempo computacional de cada estratégia estudada, utilizam o mesmo conjunto de parâmetros para a solução dos problemas através do Algoritmo 1. Tais parâmetros são os seguintes: $\varepsilon = 10^{-4}$, $\mu^0 = 0,005$, $\tau = 0,01$, $\beta^0 = 0,01$, $\alpha = 0,25$, $\chi = 0,95$. Na estratégia 3 e 5, $\omega = 0,1$, e na estratégia 4, para a direção mais promissora adota-se a ponderação 0,9, e para a direção menos promissora o valor 0,1; os limites mínimo e máximo das magnitudes de tensão das barras dos sistemas adotados foram $0,95 \le V \le 1,05$; para os limites mínimos e máximos dos taps dos transformadores adotou-se $0,96 \le t \le 1,04$.

TABELA I
CARACTERÍSTICAS DOS SISTEMAS ELÉTRICOS

	9	14	30	39	57	118
# Barra *slack*	1	1	1	1	1	1
# Barra tensão controlada	2	4	5	9	6	53
# Barra de carga	6	9	24	29	50	64
# Linhas	9	20	41	46	80	186
# Taps	0	3	4	12	17	9
# Rest. Igualdade	14	22	53	67	106	181
# Rest. Desigualdade	12	22	40	61	81	181
# Variáveis	18	31	64	90	131	245

Na Tabela II, os resultados para o sistema elétrico 9 barras apresentam para todas as estratégias uma perda de $4,44\,MW$, às quais o método convergiu em 6 iterações, com exceção da estratégia 3, cujo número de iterações foi 7. Para este sistema, a estratégia de teste quadrático possibilitou ao método obter um tempo computacional melhor que o procedimento de Cholesky na verificação da positividade da matriz θ_k.

TABELA II
RESULTADOS DO MÉTODO PDPIEBLM PARA O SISTEMA 9 BARRAS

		Teste Quadrático		Cholesky	
Est.	**Perdas (MW)**	**It.**	**Tempo (s)**	**It.**	**Tempo (s)**
1	4,44	6	0,62	6	0,68
2	4,44	6	0,66	6	0,66
3	4,44	7	0,64	7	0,67
4	4,44	6	0,65	6	0,71
5	4,44	6	0,63	6	0,69

Na Tabela III, são apresentados os resultados para o sistema elétrico IEEE 14 barras. As perdas determinadas pelo método foram de $13,64\,MW$ para todas as estratégias 1 a 5 consideradas. As estratégias 1, 2, 3 e 5 mantiveram o mesmo número de iterações para a estratégia de teste quadrático e o procedimento de Cholesky. Para a estratégia 4, o procedimento de Cholesky reduziu em uma iteração a convergência do método, comparada a estratégia de teste quadrático. Mas em relação ao tempo computacional, a estratégia de teste quadrático foi mais eficiente para a verificação da positividade da matriz θ_k.

Para o sistema IEEE 30 barras, na Tabela IV, as perdas foram de $18,01\,MW$ para todas as estratégias. Na verificação da positividade da matriz θ_k, o número de iterações se manteve o mesmo para ambas as estratégias, de teste quadrático e de Cholesky em relação às estratégias de direção de busca 1 a 5. Em relação ao tempo computacional, o método obteve um melhor desempenho com a estratégia de teste quadrático. As estratégias 2 e 4, que utilizam o teste de complementaridade, convergiram em 6 iterações, e foram mais eficientes para este sistema.

TABELA III
RESULTADOS DO MÉTODO PDPIEBLM PARA O SISTEMA 14 BARRAS

		Teste Quadrático		Cholesky	
Est.	**Perdas (MW)**	**It.**	**Tempo (s)**	**It.**	**Tempo (s)**
1	13,64	6	0,69	6	0,71
2	13,64	6	0,70	6	0,76
3	13,64	8	0,71	8	0,75
4	13,64	6	0,71	5	0,78
5	13,64	6	0,67	6	0,77

TABELA IV
RESULTADOS DO MÉTODO PDPIEBLM PARA O SISTEMA 30 BARRAS

		Teste Quadrático		Cholesky	
Est.	**Perdas (MW)**	**It.**	**Tempo (s)**	**It.**	**Tempo (s)**
1	18,01	7	0,79	7	0,87
2	18,01	6	0,79	6	0,90
3	18,01	9	0,89	9	0,95
4	18,01	6	0,74	6	0,90
5	18,01	7	0,81	7	0,89

Na Tabela V, para o sistema 39 barras, as perdas foram de $41,84\,MW$ em todas as estratégias. O problema teste de 39 barras nos mostra que a estratégia de teste quadrático pode não ter o melhor desempenho em todos os casos investigados, pois neste caso o procedimento de Cholesky, de fato, solucionou o problema com um menor número de iterações.

Mesmo com um menor número de iterações, o tempo computacional em relação ao procedimento de Cholesky foi maior que o da estratégia de teste quadrático pois neste procedimento, em média, o parâmetro de amortecimento β_k foi corrigido pelo menos duas vezes, apesar de ter verificado que $(x^k)^t \theta_k (x^k) > 0$ em todas as iterações. Isto também mostra que, apesar do teste quadrático ter gasto um maior número de iterações, o fato do procedimento de Cholesky ter que efetuar correções do parâmetro de amortecimento β_k, pode aumentar o tempo computacional de execução do método PDPIEBLM. O que pode ser observado na Tabela V.

TABELA V
RESULTADOS DO MÉTODO PDPIEBLM PARA O SISTEMA 39 BARRAS

		Teste Quadrático		Cholesky	
Est.	**Perdas (MW)**	**It.**	**Tempo (s)**	**It.**	**Tempo (s)**
1	41,84	14	1,04	9	1,09
2	41,84	14	1,06	12	1,13
3	41,84	14	1,23	11	1,08
4	41,84	11	1,03	10	1,04
5	41,84	14	1,08	11	1,12

Na Tabela VI, as perdas para o sistema IEEE 57 barras foram de $25{,}18\,MW$. As estratégias 1, 2 e 4 encontraram solução para o problema com o menor número de iterações com a utilização da estratégia de teste quadrático e convergiram em 6 iterações. O tempo computacional com a estratégia de teste quadrático foi menor comparado ao procedimento de Cholesky.

TABELA VI
RESULTADOS DO MÉTODO PDPIEBLM PARA O SISTEMA 57 BARRAS

		Teste Quadrático		Cholesky	
Est.	**Perdas (MW)**	**It.**	**Tempo (s)**	**It.**	**Tempo (s)**
1	25,18	6	0,96	7	1,07
2	25,18	6	0,93	6	1,04
3	25,18	12	1,21	12	1,38
4	25,18	6	1,00	7	1,12
5	25,18	8	1,07	8	1,15

Na Tabela VII, as perdas foram de $118{,}92\,MW$ para o sistema 118 barras. Com a utilização da estratégia de teste quadrático o método encontrou solução para todas as estratégias, convergindo em 10 iterações, com exceção da estratégia 3. Com o procedimento de Cholesky apenas as estratégias 1, 2 e 4 encontraram solução. O teste quadrático obteve os melhores tempos computacionais.

Na verificação da positividade da matriz θ_k pelo procedimento de Cholesky, nas estratégias 3 e 5, o método não encontrou solução. Isto ocorre pois enquanto a estratégia de teste quadrático avalia pontualmente se a matriz θ_k é definida positiva no ponto x^k, o procedimento de Cholesky faz uma avaliação, inclusive, para uma vizinhança deste ponto, o que dificulta a análise da positividade da matriz θ_k conforme a dimensão do problema aumenta, o que de fato ocorreu para o caso de 118 barras.

TABELA VII
RESULTADOS DO MÉTODO PDPIEBLM PARA O SISTEMA 118 BARRAS

		Teste Quadrático		Cholesky	
Est.	**Perdas (MW)**	**It.**	**Tempo (s)**	**It.**	**Tempo (s)**
1	118,92	10	2,25	10	2,42
2	118,92	10	2,38	10	2,42
3	118,92	15	2,99	-	-
4	118,92	10	2,30	11	2,49
5	118,92	10	2,26	-	-

Na Tabela VIII, são apresentados os melhores resultados encontrados para a estratégia 4, a partir dos mesmos parâmetros utilizados nos testes anteriores, com variação dos escalares ω_1 e ω_2, nos sistemas 9, 39 e 118 barras, em que a direção mais promissora recebe 0,7, e a menos promissora 0,3. Os resultados mostram que ao adotar a estratégia 4 obtém-se um menor número de iterações em praticamente todos os casos, quando comparados aos apresentados nas Tabelas II--VII. Este fato mostra que o desempenho do método também depende dos parâmetros iniciais utilizados, mas ainda assim, a estratégia de teste quadrático é mais eficiente que o procedimento de Cholesky na verificação da positividade da matriz θ_k. Observe que o método não convergiu quando utilizou este procedimento à resolução do sistema 118 barras, o que já havia ocorrido nos resultados apresentados na Tabela VII.

TABELA VIII
RESULTADOS PARA A ESTRATÉGIA 4

		Teste Quadrático		Cholesky	
Sist.	**Perdas (MW)**	**It.**	**Tempo (s)**	**It.**	**Tempo (s)**
9	4,44	5	0,61	5	0,67
14	13,64	6	0,71	5	0,78
30	18,01	6	0,74	6	0,90
39	41,84	10	0,96	10	1,14
57	25,18	6	1,00	7	1,12
118	118,92	9	2,16	-	-

V. CONCLUSÃO

O método PDPIEBLM com as estratégias de teste quadrático e direções de busca combinadas, propostas neste trabalho, apresentou bons resultados para a resolução dos sistemas teste com 9 e 39 barras e os sistemas IEEE 14, 30, 57 e 118 barras. Nos resultados apresentados, o teste quadrático reduziu o tempo computacional em todos os sistemas solucionados, quando comparado ao procedimento de Cholesky. Isso ocorreu porque o teste quadrático verifica a positividade da matriz θ_k somente em relação ao ponto x^k, o que é suficiente para determinar direções de descida para o método em uma iteração k. No procedimento de Cholesky verifica-se se a matriz θ_k é definida positiva para uma vizinhança do ponto. Para casos como o sistema 118 barras, sucessivas correções do parâmetro de amortecimento β_k podem gerar sistemas de direções de busca mal condicionados, os quais influenciam na obtenção de soluções ótimas locais, podendo divergir para alguma estratégia de direção de busca adotada. O método com este procedimento tem maior dificuldade na resolução do sistema à medida que a dimensão deste aumenta, como ocorreu para o sistema 118 barras.

Com relação as estratégias de direção de busca, as estratégias 1, 2 e 4 mostraram-se mais eficientes em relação às estratégias de direções combinadas 3 e 5. O teste de complementaridade, utilizado para a determinação das direções mais promissoras para as estratégias 2 e 4 mostrou-se uma alternativa promissora para melhorar o desempenho do método proposto.

De acordo com os resultados, a estratégia 4 apresentou os melhores resultados em praticamente todos os casos utilizados, tanto em relação ao número de iterações quanto ao tempo computacional gasto para a resolução dos sistemas. Uma das vantagens dessa estratégia está na possibilidade de variação dos escalares que compõem a direção determinada, os quais podem ser alterados sem alterar drasticamente a direção, pois esta é definida no cone convexo definido pelas direções de busca dos passos previsor e corretor.

Futuramente, testes serão realizados com este método e com as estratégias propostas em problemas de FPOR de maior dimensão que os apresentados, como o sistema elétrico IEEE 300 barras. Além disso, para a continuidade deste trabalho pretende-se investigar o problema de FPOR com variáveis discretas e tratá-lo através de funções penalidade tal como no trabalho de [14]. Será abordado o modelo de FPOR que considera os taps dos transformadores e os bancos de capacitores *shunt* como variáveis discretas do problema. Pretende-se também aplicar as estratégias propostas neste trabalho, que combinam as direções determinadas nos procedimentos previsor e corretor para a resolução deste modelo, a fim de obter soluções mais realísticas para um sistema elétrico de potência.

VI. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à FAPESP e ao CNPq pelo auxílio financeiro concedido através dos processos (2008/02315-0), (481234/2007-1) e (308531/2009-4).

VII. REFERÊNCIAS

[1] J. Carpentier, "Contribution a l'étude du dispatching économique," *Bulletin de la Société Française des Électricien,* vol. 3, nº 8, pp. 431-447, 1962.

[2] C. Roman e W. Rosehart, "Complementarity model for load tap changing transformers in stability based OPF problem," *Electric Power Systems Research,* vol. 76, nº 6-7, pp. 592-599, Apr. 2006.

[3] R. B. N. Pinheiro, A. R. Balbo, E. C. Baptista e L. Nepomuceno, "Interior-exterior point method with global convergence strategy for solving the reactive optimal power flow problem," *International Journal of Electrical Power & Energy Systems,* vol. 66, pp. 235-246, Mar. 2015.

[4] R. Polyak e M. Teboulle, "Nonlinear rescaling and proximal-like methods in convex optimization," *Mathematical Programming,* vol. 76, nº 2, pp. 265-284, Feb. 1997.

[5] D. N. d. Silva, *Método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores e exteriores com estratégias de correção de inércia e suavização hiperbólica aplicado ao problema de despacho econômico com ponto de carregamento de válvula e representação da transmissão,* 2014.

[6] A. Gupta, Numerical methods using Matlab, Springer - Apress, 2015.

[7] R. B. N. Pinheiro, "Um método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores barreira logarítmica modificada, com estratégias de convergência global e de ajuste cúbico, para problemas de programação não-linear e não-convexa," Bauru - SP, Brasil, 2012.

[8] S. J. Wright, Primal-Dual Interior-Point Methods, Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.

[9] M. Colombo e J. Gondzio, "Further development of multiple centrality correctors for interior point methods," *Computational Optimization and Applications,* vol. 41, nº 3, pp. 277-305, Oct. 2007.

[10] G. G. Lage, "O fluxo de potência ótimo reativo com variáveis de controle discretas e restrições de atuação de dispositivos de controle de tensão," 2013.

[11] V. A. de Sousa, E. C. Baptista e G. R. M. da Costa, "Optimal reactive power flow via the modified barrier Lagrangian function approach," *Electric Power Systems Research,* vol. 84, nº 1, pp. 159-164, Mar. 2012.

[12] S. Granville, "Optimal reactive dispatch through interior point methods," *IEEE Transactions on Power Systems,* vol. 9, nº 1, pp. 136-146, Feb. 1994.

[13] M. Wright, "Why a Pure Primal Newton Barrier Step May be Infeasible," *SIAM Journal on Optimization,* vol. 5, nº 1, pp. 1-12, Feb. 1995.

[14] E. Soler, E. Asada e G. da Costa, "Penalty-Based Nonlinear Solver for Optimal Reactive Power Dispatch With Discrete Controls," *IEEE Transactions on Power Systems,* vol. 28, nº 3, pp. 2174-2182, Aug. 2013.

Rafael Ramos de Souza é graduado em Matemática pela Universidade Estadual Paulista - UNESP, Bauru- SP, em 2013. Atualmente é estudante de doutorado em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista - UNESP, Bauru, onde desenvolve pesquisas na área de otimização, com métodos primal-dual de pontos interiores e exteriores aplicados em sistemas de energia.

Antonio Roberto Balbo é graduado em Matemática Universidade Estadual Paulista-UNESP-SP, em 1986, tendo obtido seu título de mestre em Ciência da Computação em 1991 e seu título de doutor em Engenharia de Estruturas em 1998, ambos pela Universidade de São Paulo-USP. Atualmente é Professor Adjunto do Departamento de Matemática da UNESP, em Bauru, onde desenvolve pesquisas nas áreas de métodos primal-dual previsor-corretor de pontos interiores/exteriores aplicados em sistemas de energia.

Leonardo Nepomuceno é graduado em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Uberlândia-UFU-MG, Brasil, em 1990, tendo obtido os títulos de mestre e doutor em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP, Campinas-SP, Brasil, respectivamente em 1993 e 1997. No período de 1997 a 2000, o professor atuou em projeto de pós-doutorado na UNICAMP. Atualmente, o professor desenvolve pesquisas na Universidade Estadual Paulista - UNESP, Bauru - SP, nas áreas de planejamento e otimização de sistemas de energia em mercados de energia.

Edméa Cássia Baptista é graduada em Matemática pela Universidade Estadual Paulista-UNESP-SP, em 1988, tendo obtido os títulos de mestre em Ciência da Computação e doutora em Engenharia Elétrica pela Universidade de São Paulo-USP, em 1993 e 2001, respectivamente. Atualmente é Professora Adjunta do Departamento de Matemática da UNESP, em Bauru, onde desenvolve pesquisas nas áreas de otimização, programação não linear, fluxo de potência ótimo e planicidade.

Edilaine Martins Soler é graduada em Matemática pela Universidade de São Paulo-USP, em 2007, tendo obtido o título de mestre em Ciência da Computação e Matemática Computacional, em 2008, e o título de doutora em Engenharia Elétrica, em 2011, ambos pela Universidade de São Paulo-USP. Atualmente é Professora Assistente da Universidade Estadual Paulista-UNESP-SP, onde desenvolve pesquisas nas áreas de otimização, atuando principalmente nos seguintes temas: programação não linear, variáveis discretas e problema de fluxo de potência ótimo.

Ricardo Bento Nogueira M. Pinheiro é graduado em Matemática pela Universidade Estadual Paulista - UNESP - SP - Brasil, em 2008. Obteve o título de mestre em Engenharia Elétrica 2012 pela UNESP e atualmente ele desenvolve o seu doutorado em Engenharia Elétrica pela Universidade de São Paulo - USP - SP - Brasil. Sua área de pesquisa é em programação não-linear e em fluxo de potência ótimo.