

**Guilherme Zorzi Pedrazoli**

**BANCO DE CAPACITORES SEM CORRENTE DE *INRUSH***

Guaratinguetá  
2011

GUILHERME ZORZI PEDRAZOLI

BANCO DE CAPACITORES SEM CORRENTE DE *INRUSH*

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia Mecânica.

Orientadores: Prof. Dr. Luiz Octavio Mattos dos Reis

Guaratinguetá  
2011

|       |   |
|-------|---|
| P371b | <p>Pedrazoli, Guilherme Zorzi<br/>Bancos de capacitores se corrente de Inrush / Guilherme Zorzi<br/>Pedrazoli – Guaratinguetá : [s.n], 2011.<br/>79 f : il.<br/>Bibliografia: f. 58-59</p> <p>Trabalho de Graduação em Engenharia Elétrica – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2011.<br/>Orientador: Prof. Dr. Luis Octavio Mattos dos Reis</p> <p>1. Eletrotécnica 2. Correntes elétricas I. Título</p> <p>CDU 621.3</p> |
|-------|---|

**unesp**  **UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**  
**CAMPUS DE GUARATINGUETÁ**

BANCO DE CAPACITORES SEM CORRENTE DE *INRUSH*

GUILHERME ZORZI PEDRAZOLI

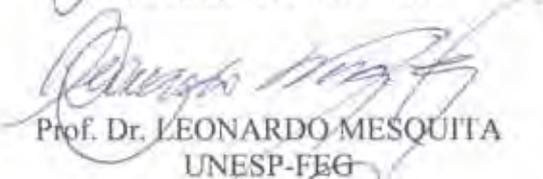
ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO  
PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE **GRADUADO**  
**EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE  
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Prof. Dr. Samuel Euzedice de Lucena  
Coordenador

**BANCA EXAMINADORA:**

  
Prof. Dr. LUIZ OCTAVIO MATTOS DOS REIS  
Orientador/UNESP-FEG

  
Prof. Dr. LEONARDO MESQUITA  
UNESP-FEG

  
ENG. RAFAEL SÉRGIO DE MATTOS

Dezembro de 2011

## **DADOS CURRICULARES**

### **GUILHERME ZORZI PEDRAZOLI**

NASCIMENTO 10.12.1988 – SÃO PAULO/SP

FILIAÇÃO José Paschoal Pedrazoli  
Sandra Valéria Zorzi Pedrazoli

1997/2001 Curso de Graduação  
Universidade Estadual Paulista

## **DEDICATORIA**

Aos meus amigos que são parte essencial do homem que me tornei, e aos meus professores que me guiaram e me ajudaram a me transformar no que sou hoje e de modo especial, à minha família, que sempre me apoiou, incentivou e me ensinou a lutar pelas minhas conquistas.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, *José Paschoal Pedrazoli e Sandra Valéria Zorzi Pedrazoli*, que tornaram possível minha formação e me tornaram a pessoa que sou hoje, me ensinaram o valor das conquistas e me inspiraram ser o que sou hoje.

A minha família que sempre me apoiou e estimulou durante minha travessia.

Aos meus amigos que compartilharam noites acordadas e dividiram conhecimentos, experiências e companhia em todos os momentos

Ao meu orientador, *Prof. Dr. Luiz Octavio Mattos dos Reis* que me guiou, estimulou e inspirou na execução deste trabalho.

Aos funcionários da biblioteca, da secretaria de graduação e bedéis que sempre me ajudaram e foram muito prestativos em suas funções.

À minha namorada, *Juliana Tomazi Theodozio*, cujas palavras de incentivo e apoio tornaram mais fácil minha jornada.

De modo especial agradeço a Deus por minha vida e por colocar nela todas as pessoas citadas acima.

## EPÍGRAFE

“Há três maneiras de agir sabiamente:  
a primeira pela meditação, que é a mais sábia  
a segunda pela imitação, que é a mais fácil  
a terceira pela experiência, que é a mais amarga”

Confúcio

PEDRAZOLI, G.Z. **Bancos de capacitores sem corrente de *inrush***. 2011. 78 f. Trabalho de Graduação (Graduação em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2011.

## RESUMO

Este trabalho trata dos efeitos e métodos de controle e eliminação das correntes transitórias geradas pelo chaveamento de bancos de capacitores, denominadas correntes de *inrush*. Bancos de capacitores são largamente usados para compensar um baixo fator de potência gerado pelo amplo uso de cargas indutivas. Atualmente muito destes bancos são automáticos e desta forma as células capacitivas são conectadas e desconectadas de acordo com as cargas indutivas presentes na rede. Entretanto ao se conectar bancos de capacitores em um barramento pode-se gerar correntes transitórias, geradas por transitórios eletromagnéticos. Aspectos da rede como, por exemplo, a existência de um banco já conectado ao barramento, podem influenciar na intensidade deste fenômeno. Este trabalho aborda algumas características dos capacitores e da rede para justificar e explicar o aparecimento destes transitórios bem como discute seus efeitos para a rede e outros equipamentos. Conclui-se que a principal causa deste fenômeno é a diferença de potencial existente entre o capacitor a ser conectado e a rede, com o resultado do estudo foi possível discutir os métodos tradicionais para a mitigação destas correntes e conseqüentemente seus efeitos negativos. Ainda foi desenvolvido um método de chaveamento eletrônico capaz de diminuir drasticamente os transitórios.

**PALAVRAS-CHAVE:** Banco de Capacitor; corrente de *inrush*; Transitórios eletromagnéticos.

**PEDRAZOLI, G.Z. Capacitor banks without inrush current.**

2011. 78 f. Work Graduation (Graduation in Electrical Engineering) - – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2011.

### **ABSTRACT**

This work discusses about the effects and methods of control and elimination of the currents transients generated by switching capacitor banks, this currents are called inrush currents. Capacitor banks are widely used to compensate a low power factor generated by the widespread use of inductive loads. Currently many of these banks are automatic and therefore the capacitive cells are connected and disconnected according to the inductive loads on the network. However when connecting a capacitor bank to a bus can generate currents transients generated by electromagnetic transients. Aspects of the network, for example, the existence of a bank already connected to the bus, can influence the intensity of this phenomenon. This paper discusses some characteristics of the capacitors and the network to justify and explain the appearance of these transients and discusses its effects on the network and to other equipment. It is concluded that the main cause of this phenomenon is the voltage difference between the capacitor to be connected to the network and the bus, the results of the study were the bases to discuss the traditional methods to mitigate these currents and therefore its negative effects. Although in this paper is yet developed a method of electronic switching that can greatly reduce these transients.

**KEYWORDS:** Capacitor Bank, inrush Current, electromagnetic transients.

## Sumário

|  |           |
|--|-----------|
| <b>DADOS CURRICULARES</b>  | <b>5</b>  |
| <b>DEDICATORIA</b>   | <b>6</b>  |
| <b>AGRADECIMENTOS</b>  | <b>7</b>  |
| <b>EPÍGRAFE</b>  | <b>8</b>  |
| <b>RESUMO</b>  | <b>9</b>  |
| <b>ABSTRACT</b>  | <b>10</b> |
| <b>CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO</b>   | <b>13</b> |
| <b>1.1 OBJETIVOS</b>   | <b>15</b> |
| 1.1.1 GERAIS   | 15        |
| 1.1.2 ESPECÍFICOS  | 16        |
| <b>CAPÍTULO 2 MÉTODOS DE ANÁLISE</b>   | <b>17</b> |
| <b>2.1 INTRODUÇÃO</b>  | <b>17</b> |
| <b>2.2 TRANSITÓRIOS EM CORRENTE CONTINUA</b>   | <b>17</b> |
| <b>2.3 TRANSITÓRIOS EM CORRENTE ALTERNADA</b>  | <b>20</b> |
| 2.3.1 CHAVEAMENTO DE BANCOS ISOLADOS   | 20        |
| 2.3.2 CHAVEAMENTOS BACK-TO-BACK  | 23        |
| 2.3.3 RESSONÂNCIAS SECUNDÁRIAS DO SISTEMA  | 25        |
| <b>2.4 EFEITOS NA REDE</b>   | <b>25</b> |
| 2.4.1 INTRODUÇÃO   | 25        |
| <b>2.4.2 PROTEÇÕES CONTRA SURTOS DE CORRENTE</b>                                       | <b>26</b> |
| <b>2.4.3 AFUNDAMENTOS DE TENSÃO</b>  | <b>26</b> |
| <b>2.4.4 DANOS A EQUIPAMENTOS</b>  | <b>27</b> |
| <b>CAPÍTULO 3 CONTROLE DA CORRENTE DE <i>INRUSH</i></b>                                | <b>28</b> |
| <b>3.1 INTRODUÇÃO</b>  | <b>28</b> |
| <b>3.2 BANCOS DE CAPACITORES DE DERIVAÇÃO AUTOMÁTICOS E RESISTORES DE PRÉ-INserÇÃO</b> | <b>28</b> |
| 3.2.1 RESISTORES DE PRÉ-INserÇÃO   | 29        |
| <b>3.2.1 INDUTORES DE PRÉ-INserÇÃO</b>   | <b>31</b> |

|   |                  |
|---|------------------|
| 3.2.2 LIMITADOR DE CORRENTE DE INRUSH POR TERMISTORES NTC | 32               |
| <b>3.3 ELIMINAÇÃO DA CORRENTE DE <i>INRUSH</i></b>        | <b>32</b>        |
| 3.3.1 CHAVEAMENTO ELETRÔNICO                              | 33               |
| 3.3.1.1 Medidor de Tensão                                 | 33               |
| 3.3.1.2 Comparador de Tensão                              | 36               |
| 3.3.1.3 Comando dos Tiristores                            | 41               |
| 3.3.1.4 Tiristores:                                       | 46               |
| 3.3.2 SIMULAÇÕES  | 50               |
| 3.3.3 COMPENSAÇÃO DINÂMICA UTILIZANDO ELETRÔNICA          | 55               |
| <br>  |                  |
| <b><u>CAPÍTULO 4 CONCLUSÕES</u></b>                       | <b><u>56</u></b> |
| <br>  |                  |
| <b><u>BIBLIOGRAFIA</u></b>                                | <b><u>57</u></b> |
| <br>  |                  |
| <b><u>ANEXO</u></b>                                       | <b><u>59</u></b> |

## CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO

Bancos de capacitores são largamente utilizados para correção do fator de potência nas indústrias. Cargas indutivas, motores elétricos em sua maioria, consomem energia reativa para magnetizar seus enrolamentos e núcleos, esta energia não realiza trabalho e vem pela rede elétrica aumentando a corrente drenada pela carga. A proporção entre a energia ativa (que realiza trabalho) e a aparente (ativa e reativa somadas) nos dá o Fator de Potência (chamado de FP daqui em diante), por lei este FP deve ser maior do que 0,92, ou seja, no mínimo 92% da energia aparente deve ser utilizada para realizar trabalho. Desta forma em instalações cujo FP é baixo é necessária a instalação de Bancos de Capacitores, que geram a energia reativa drenada pelas cargas indutivas, aliviando a energia reativa absorvida da rede da concessionária de energia elétrica, e desta forma a energia aparente da instalação, para a concessionária, diminui e por consequência aumenta o FP da instalação enxergado pela concessionária. É importante lembrar que os efeitos dos bancos de capacitores serão sentidos apenas a montante de sua instalação.

Correntes de *inrush* são correntes transitórias geradas pelo acoplamento ou chaveamento de certos componentes na rede elétrica, no caso deste estudo, banco de capacitores.

Ao se conectar um capacitor descarregado em uma rede elétrica é gerado um curto-circuito por um breve período de tempo, devido ao fato de um capacitor não variar sua tensão instantaneamente. Desta forma a tensão do barramento onde o capacitor foi conectado sofrerá uma queda, a tensão se normalizará através de uma oscilação em frequências mais altas que as nominais, o que gerará correntes transitórias de energização, como mostrado na figura 1.

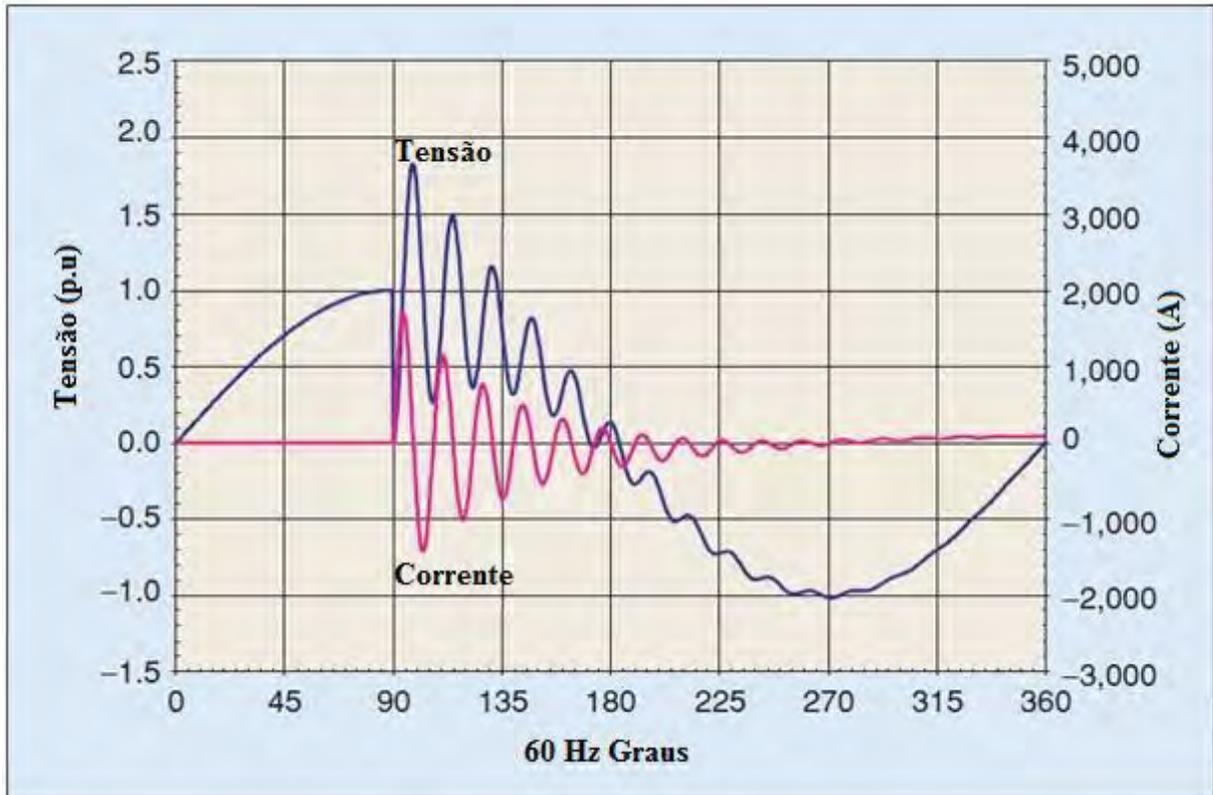


Figura 1- Formação da corrente de *inrush* devido ao ligamento de um banco simples. (Blooming, 2006)

Dependendo do tipo de solicitação de cargas, essas correntes podem ser toleradas por serem pouco freqüentes, é o caso de indústrias com cargas reativas pouco variantes no tempo. Porém em instalações onde as cargas indutivas variam com o tempo essas correntes serão mais freqüentes, devido ao maior número de chaveamentos, e portanto serão mais prejudiciais também.

Segundo Madegan (2011), a amplitude, freqüência e duração das correntes de *inrush*, bem como a queda de tensão no barramento ao qual o capacitor foi conectado, dependem diretamente da impedância característica ao barramento de acoplamento, bem como ao tamanho do banco, em KVAR (diretamente relacionado à capacidade de retenção de carga indicada por Farads).

Em capacitores descarregados, o que faz com que a corrente de energização seja elevada a altos níveis, é a baixa impedância (praticamente nula) que os capacitores possuem nesta condição. Desta forma pela lei de Ohm ( $U=Z \cdot I$ ) a corrente tende a ser extremamente alta. Apesar disto em sistemas com bancos singelos (únicos no barramento) a corrente de *inrush*

normalmente é inferior à corrente de curto-circuito do sistema, o que já não ocorre com múltiplos bancos, pois o chaveamento do tipo *Back-to-Back* (um banco é chaveado na existência de outro banco já energizado e conectado ao mesmo barramento) as correntes de energização são normalmente maiores (Madegan, 2011).

Estes fenômenos ocorrem em chaveamentos *Back-to-Back*, pois a impedância do banco já conectado é referente apenas às indutâncias dos capacitores e do barramento. Desta forma as correntes de *inrush* nestes casos tendem a serem maiores do que as correntes de curto-circuito do barramento.

Normalmente os bancos de capacitores são projetados para suportar no máximo uma corrente de *inrush* equivalente a 100 (cem) vezes a sua corrente nominal, e pelas NBR's assume-se que os condutores devem ser calculados para uma corrente de 135% da corrente nominal e os dispositivos de proteção devem ser dimensionados para suportar 144% da corrente nominal dos capacitores, tendo em vista que estes podem trabalhar em regime constante com uma corrente 31% mais alta que a sua corrente nominal e devem, ainda, levar em consideração as correntes de *Pick up* (corrente “instantânea” capaz de sensibilizar o dispositivo).

As tensões e correntes transitórias originadas do chaveamento das células capacitivas citadas tem como característica de suas formas de onda sinais não senoidais e de alta frequência cuja duração pode variar de uma fração de ciclos a alguns ciclos.

## **1.1 Objetivos**

### **1.1.1 Gerais**

O presente trabalho tem como objetivo analisar a origem e discutir os possíveis problemas causados pela corrente de *inrush* geradas por células capacitivas.

### 1.1.2 Específicos

Ainda o presente estudo se propõe a simular, discutir e propor soluções para as citadas correntes de *inrush* em bancos de capacitores.

## **CAPÍTULO 2 MÉTODOS DE ANÁLISE**

### **2.1 Introdução**

O método de análise deste trabalho se baseia no equacionamento e simulação do problema. A simulação foi realizada pelo software MatLab, ferramenta que auxiliou na plotagem dos gráficos de todo o presente trabalho.

Para o equacionamento foi levado em conta modelos de circuitos sujeitos aos transitórios eletromagnéticos que são abordados neste trabalho. Sendo assim, equações matemáticas são deduzidas dos circuitos apresentados. Estas equações, em sua maioria, são diferenciais, não podendo ser resolvidas de maneira imediata, sem nenhum tipo de manipulação.

Para conseguir resolver estas equações foi utilizado o método da transformada de Laplace, que transforma a equação, do domínio do tempo para o domínio da frequência, o que nos permite resolver as igualdades da equação com maior facilidade.

Após manipulações matemáticas é possível realizar a transformada inversa de Laplace e desta forma transformar a equação de volta para o domínio do tempo.

A transformada de Laplace pode ser melhor entendida no Anexo A deste trabalho.

### **2.2 Transitórios em corrente contínua**

Para descrever completamente o fenômeno dos transitórios causados pelos capacitores em corrente alternada primeiro devemos entender seu comportamento em corrente contínua, para tanto analisaremos o circuito RC em corrente contínua apresentado abaixo.

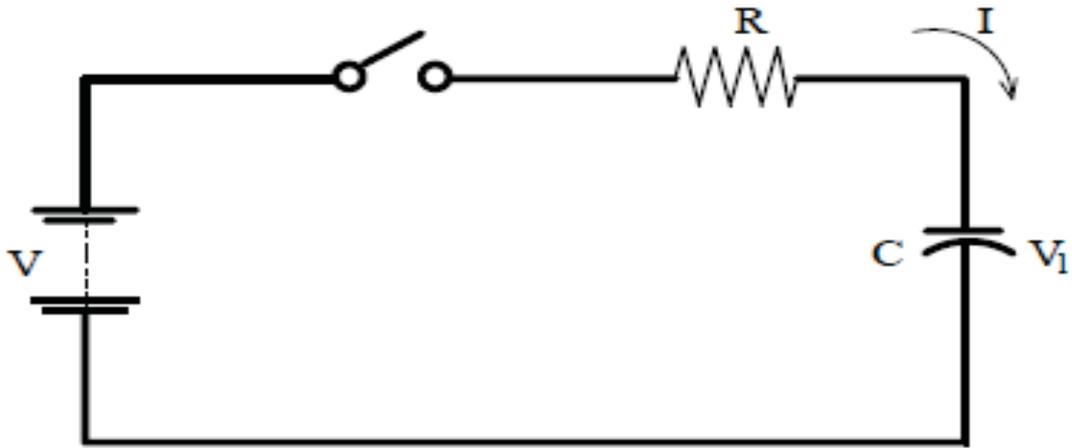


Figura 2 - Representação do circuito constituído de baterias uma resistênci e um capacitor. (Autoria Própria)

Considerando as leis de Kirchoff teremos:

$$V = R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt \quad (2.1)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace teremos:

$$\frac{V}{s} = R \cdot I(s) + \frac{1}{C \cdot s} \cdot I(s) \quad (2.2)$$

Reorganizando:

$$I(s) = \frac{\frac{V}{R}}{s + \frac{1}{RC}} \quad (2.3)$$

Aplicando-se a transformada inversa teremos:

$$i(t) = \frac{V}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (2.4)$$

Como a tensão no capacitor é:

$$V_1 = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt \quad (2.5)$$

Substituindo (2.4) em (2.5) e reorganizando teremos:

$$V_1(t) = V \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (2.6)$$

Graficamente tem-se, para a tensão e corrente no capacitor:

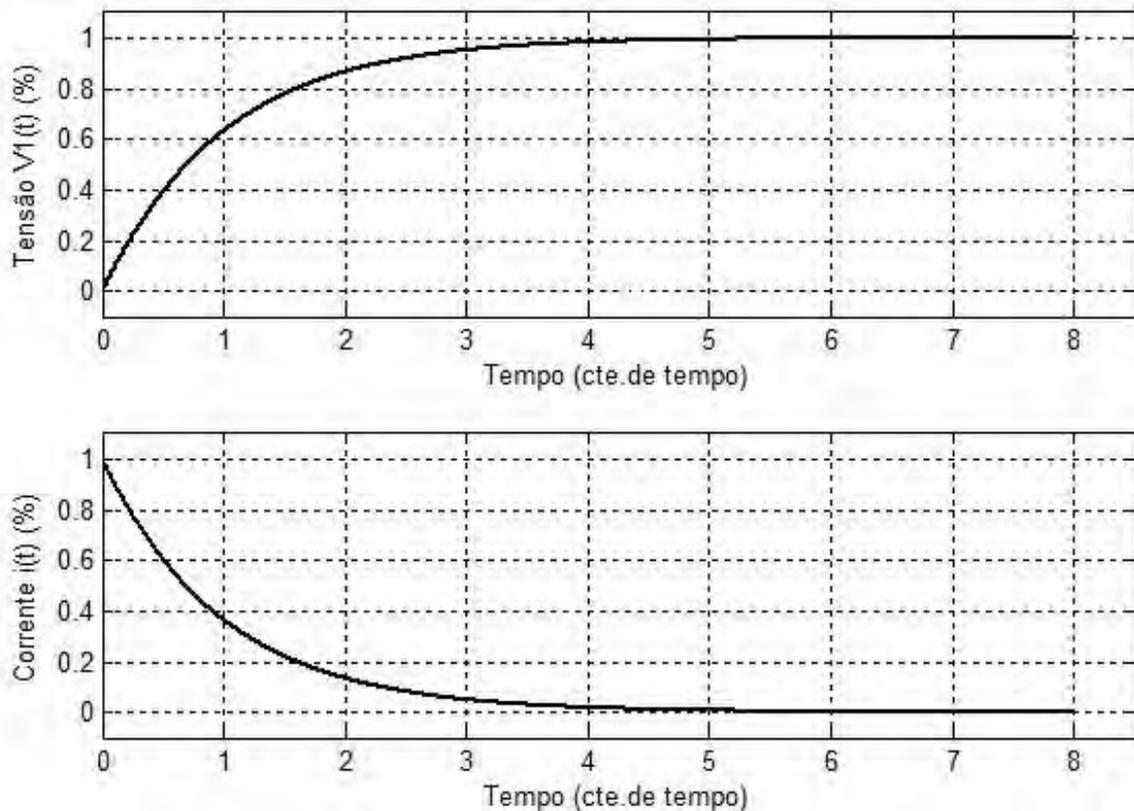


Figura 3 - Forma de ondas da tensão e corrente no capacitor C.(Própria)

Desta forma pode-se observar que o capacitor não atinge sua tensão final instantaneamente, mas carrega a sua energia de forma exponencial de modo que podemos considerar que depois de 3~5 constantes de tempo ( $\zeta=RC$ ) o capacitor já está carregado pois terá atingido de 95%~99% de sua carga final.

## 2.3 Transitórios em corrente alternada

### 2.3.1 Chaveamento de bancos isolados

Como vimos anteriormente um capacitor tem como característica inerente não mudar sua tensão instantaneamente, portanto ao conectarmos um capacitor na linha temos um curto – circuito instantâneo que pode causar um afundamento, em modulo, da tensão, seguido de uma

recuperação transitória da tensão. Em corrente contínua vimos que esta resposta é uma função exponencial e agora iremos verificar a resposta em corrente alternada.

A figura abaixo mostra o sistema equivalente para a inserção de um banco de capacitores em um barramento.

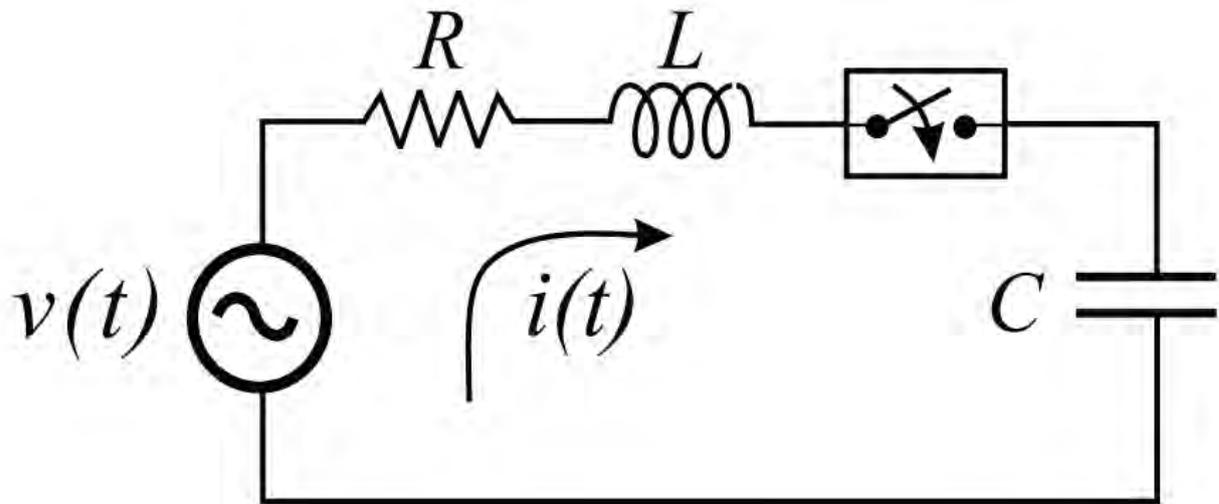


Figura 4 - Circuito RLC em corrente alternada. (Araújo e Neves, 2005)

Segundo Araújo e Neves (2005) se considerarmos, no circuito mostrado na figura 4, que a resistência  $\mathbf{R}$  pode ser considerada desprezível frente à reatância do sistema, a corrente inicial é nula e que o disjuntor se fecha no exato momento em que a tensão está passando pelo seu pico, ou seja, assume seu valor máximo, teremos que:

$$i(t) = \frac{V_{max}}{Z_s} \cdot Sen(\omega_0 \cdot t) \quad (2.7)$$

Onde:

- $V_{max}$  é a tensão no disjuntor no momento do fechamento;
- $Z_s = \sqrt{\frac{L}{C}}$  É a impedância de surto do sistema.
- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$  É a frequência característica durante o período transitório da energização.

Desta forma a corrente máxima de inrush será:

$$I_{max} = \frac{V_{max}}{Z_s} \quad (2.8)$$

Com uma frequência:

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \quad (2.9)$$

Pode-se observar que, devido à natureza do capacitor de não variar sua tensão instantaneamente, ao se ligar no barramento um banco de capacitores desernegizados este componente provocará um curto-circuito instantâneo pois levará a tensão da linha a “zero” momentaneamente, este efeito é conhecido como *Voltage damping* (afundamento de tensão).

Observa-se ainda que o *Voltage damping* é seguido por uma oscilação de alta frequência da tensão e da corrente até que o capacitor se carregue, ou seja, de 3~5 constantes de tempo ( $\zeta=RC$ ). Isto ocorre porque a corrente durante o período inicial de “curto-circuito” será muito elevada e elevará a tensão do componente a um nível muito maior do que o valor da tensão nominal da linha o que fará com que agora o capacitor libere energia para a linha, esta energia será absorvida pela carga indutiva que o banco esta tentando compensar e em seguida será novamente liberada para as células capacitivas e assim sucessivamente até que as tensões da linha e do componente se igualem e os componentes igualem suas tensões com a linha, este fenômeno é conhecido por ressonância e sua frequência é elevada, sua amplitude, contudo, é amortizada pela reatância da linha

Estas tensões e correntes de capacitores ainda dependem da arquitetura da rede elétrica e dos componentes presentes, o caso mostrado acima refere-se a um banco singelo em uma instalação, ou seja, nesta instalação dispõe-se de apenas um grupo capacitivo para chaveamento. Outras arquiteturas serão abordadas a seguir.

### 2.3.2 Chaveamentos Back-to-Back

Quando chaveamos um banco de capacitores 1 na mesma barra onde um segundo banco 2 já está acoplado, a corrente de *inrush* do banco chaveado 1 pode ser potencializada pela presença do banco 2 na linha, este tipo de chaveamento é conhecido como chaveamento *Back-to-Back*.

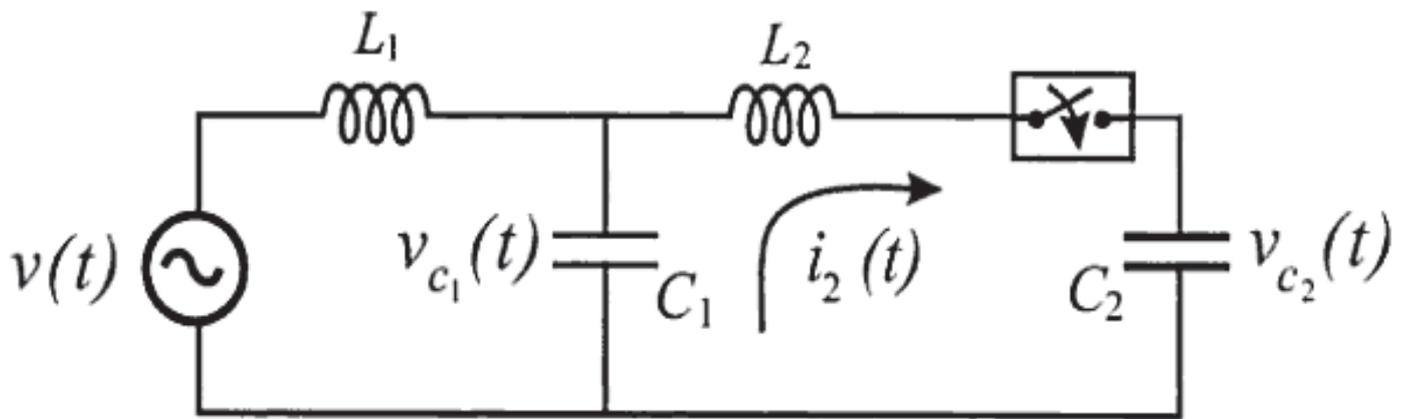


Figura 5 - Circuito equivalente de bancos em paralelo. (Araujo e Neves, 2005)

Conforme Madegan, (2011), ao se chavear um segundo banco na linha ou um segundo estágio do banco, a única coisa que irá limitar a corrente será a própria impedância entre os bancos e tendo em vista que esta será muito menor do que a impedância da rede, o que eleva os valores da corrente de *inrush*.

O banco que já está ligado ao barramento vai fornecer carga para o carregamento do banco recém acoplado, esta corrente de “troca” de cargas é descrita, de acordo com Araújo e Neves (2005), por:

$$i_2 = \frac{v_1 - v_{c2}(0)}{Z_{S2}} \cdot \text{Sen}(\omega_2 \cdot t) \quad (2.10)$$

Onde:

•  $V_1$  corresponde à tensão no capacitor 1 ( C1) no instante em que o disjuntor é fechado;

•  $Z_{S2} = \sqrt{\frac{L_2}{C_{eq}}}$  corresponde à impedância de surto enxergada pelo capacitor 2 (C2);

•  $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 \cdot C_{eq}}}$  corresponde à frequência de energização característica do capacitor 2 (C2);

•  $C_{eq}$  corresponde à capacitância equivalente do circuito completo, ou seja, após se fechar o disjuntor.

Admitindo-se que o capacitor 2 (C2) está inicialmente descarregado e que a corrente inicial para C2 seja nula, ao fecharmos o disjuntor no ponto de maior tensão da fonte e ainda que  $L_1 \gg L_2$  a corrente de energização de C2 será: [1]

$$I_{max} = \frac{V_{max}}{Z_{S2}} \quad (2.11)$$

Com uma frequência:

$$f_2 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L_2 \cdot C_{eq}}} \quad (2.12)$$

Como mostrado a corrente de *inrush* neste caso será dependente da corrente do banco já energizado, assim como a frequência de oscilação.

### 2.3.3 Ressonâncias secundárias do sistema

Os indutores presentes nos transformadores da rede podem entrar em ressonância com os capacitores de tensões mais altas já que seus chaveamentos causam picos de corrente de frequência próxima a frequência de ressonância dos transformadores de potencia instalados.

A existência de bancos em múltiplos níveis de tensão em uma rede de distribuição, além da ressonância mencionada acima, pode aumentar a atuação dos transitórios, pois a corrente transitória pode ser elevada a níveis ainda mais altos pelos transformadores.

Portanto é melhor para o sistema de distribuição, do ponto de vista de correntes transitórias, que todos os bancos fiquem em apenas um nível de tensão. Porém se for necessária a instalação de bancos em diferentes níveis de tensão uma análise detalhada deve ser levada em consideração o que justifica este tópico.

## 2.4 Efeitos na Rede

### 2.4.1 Introdução

Neste item serão apresentados os principais efeitos que as correntes de *inrush* podem causar no sistema elétrico e nos equipamentos a ele ligados. É importante lembrar que as correntes de *inrush* são correntes transitórias e por isso são acompanhadas de seus efeitos na rede e devem ser tratados com o mesmo respeito e precauções.

O primeiro e mais claro efeito é o próprio pico de corrente que pode danificar equipamentos e romper isolamentos mal dimensionados, além disso, o próprio sistema de proteção deve levar em consideração os picos de corrente para que um disjuntor não desarme toda vez que um banco de capacitores é inserido na rede, por exemplo.

### 2.4.2 Proteções contra surtos de corrente

O sistema de proteção deve prever as correntes transitórias, como as correntes de *inrush*, pois caso contrário um pico de tensão pode desarmar um disjuntor. Por tanto devem ser escolhidos relés, disjuntores e outros equipamentos cujos valores da corrente “*Pick Up*” (valor da corrente injetada que sensibiliza o equipamento, corrente que irá fazer um relé atuar, por exemplo) devem ser calculados para que fique a cima dos surtos de corrente causados pelos transitórios.

Ainda equipamentos mais sensíveis, como os eletrônicos podem sofrer danos irreversíveis, como a queima de uma placa de um computador, e por tanto estes equipamentos devem ser protegidos de alguma forma contra estes surtos

### 2.4.3 Afundamentos de tensão

Como dito anteriormente quando um banco de capacitores é inserido em um barramento energizado, devido à sua propriedade de não variar a tensão instantaneamente, ele se comporta como um curto-circuito instantâneo no barramento o que leva a tensão da linha a sofrer um afundamento da tensão, ou seja, há uma diminuição no módulo do valor da tensão.

Este afundamento de tensão pode ser interpretado pelo sistema como uma falta momentânea de energia e forçar, por exemplo, uma comutação desnecessária das linhas de alimentação de uma planta industrial.

Ainda alguns equipamentos podem ser automaticamente desligados pela detecção de “falta de energia” provocada pela queda repentina da tensão, por exemplo, um CLP pode interpretar uma falta elétrica e paralisar um processo.

Desta forma estes afundamentos de tensão também devem ser considerados nos projetos de implementação de novos equipamentos de controle e automação, bem como eles devem ter

sua programação adequada caso um novo banco de capacitor passe a operar no sistema já existente.

#### **2.4.4 Danos a equipamentos**

Se considerarmos que um capacitor ligado em um barramento pode elevar a tensão deste barramento a níveis superiores a 2 p.u., quando ocorre o chaveamento *Back-to-Back*, equipamentos mais sensíveis a variações de tensão poderão ser danificados bem como as próprias células capacitivas que também possuem um nível máximo de tensão suportada.

Alem de que a grande variação da corrente ( $di/dt$ ) pode induzir tensões mais altas que as nominais nos conversores AC/DC o que pode causar danos a equipamentos eletrônicos.

## **CAPÍTULO 3 CONTROLE DA CORRENTE DE *INRUSH***

### **3.1 Introdução**

Este capítulo explora as maneiras de mitigar as correntes transitórias geradas por capacitores, das mais tradicionais como resistores e indutores em série com os bancos, aos métodos mais recentes que envolvem um controle eletrônico do chaveamento dos bancos o que leva à eliminação dessas correntes.

### **3.2 Bancos de capacitores de derivação automáticos e resistores de pré-inserção**

Bancos capacitivos automáticos são provavelmente a solução mais utilizada para a correção do fator de potência. Instalados de forma centralizada, geralmente em subestações, ligados em barramentos de distribuição geral ou ainda em barramentos de subdistribuição, são energizados por controladores automáticos que monitoram continuamente o ângulo de defasagem da corrente em função da tensão, o fator de potência, quando este defasamento atinge certos níveis pré-programados nos controladores, estes ligam ou desligam um determinado número de células capacitivas (geralmente se agrupa um determinado número de células em cada contator e se programa no controlador a potência reativa que aquela chave eletromecânica pode fornecer) dos bancos corrigindo o fator de potência. Esses controladores normalmente acionam as unidades capacitivas através de contadores eletromecânicos. Estes sistemas de controle são chamados de “convencionais”.

Estes sistemas são configurados para operar apenas com capacitores descarregados, por meio de resistores de descarga (vide anexo B, IEEE 2002), prevenindo o aumento da corrente de *inrush*, que neste, caso poderia chegar a uma corrente de  $200 \cdot I_n$  em casos extremos onde não existe nenhuma limitação para sua formação, protegendo tanto a rede como os próprios bancos capacitivos.

### 3.2.1 Resistores de pré-inserção

A maneira mais simples para minimizar os efeitos transitórios causados pelo chaveamento dos bancos capacitivos é a inserção de um resistor em série com o banco. Este resistor em série é chamado de resistor de pré-inserção, através dele os capacitores são carregados e o resistor funciona como um divisor de tensão o que limita a corrente de *inrush*, segundo a lei de Ohm. O circuito é mostrado abaixo:

Os contatos auxiliares são adiantados (do tipo *make-before-break*) e fecham o contato pouco antes dos contatos principais, permanecendo assim por pouco tempo (até o fechamento dos contatos principais). Este tempo em que os resistores ficam em série com as células capacitivas é o suficiente para pré-carregar os capacitores e assim diminuir o efeito das correntes transitórias como mostrado abaixo.

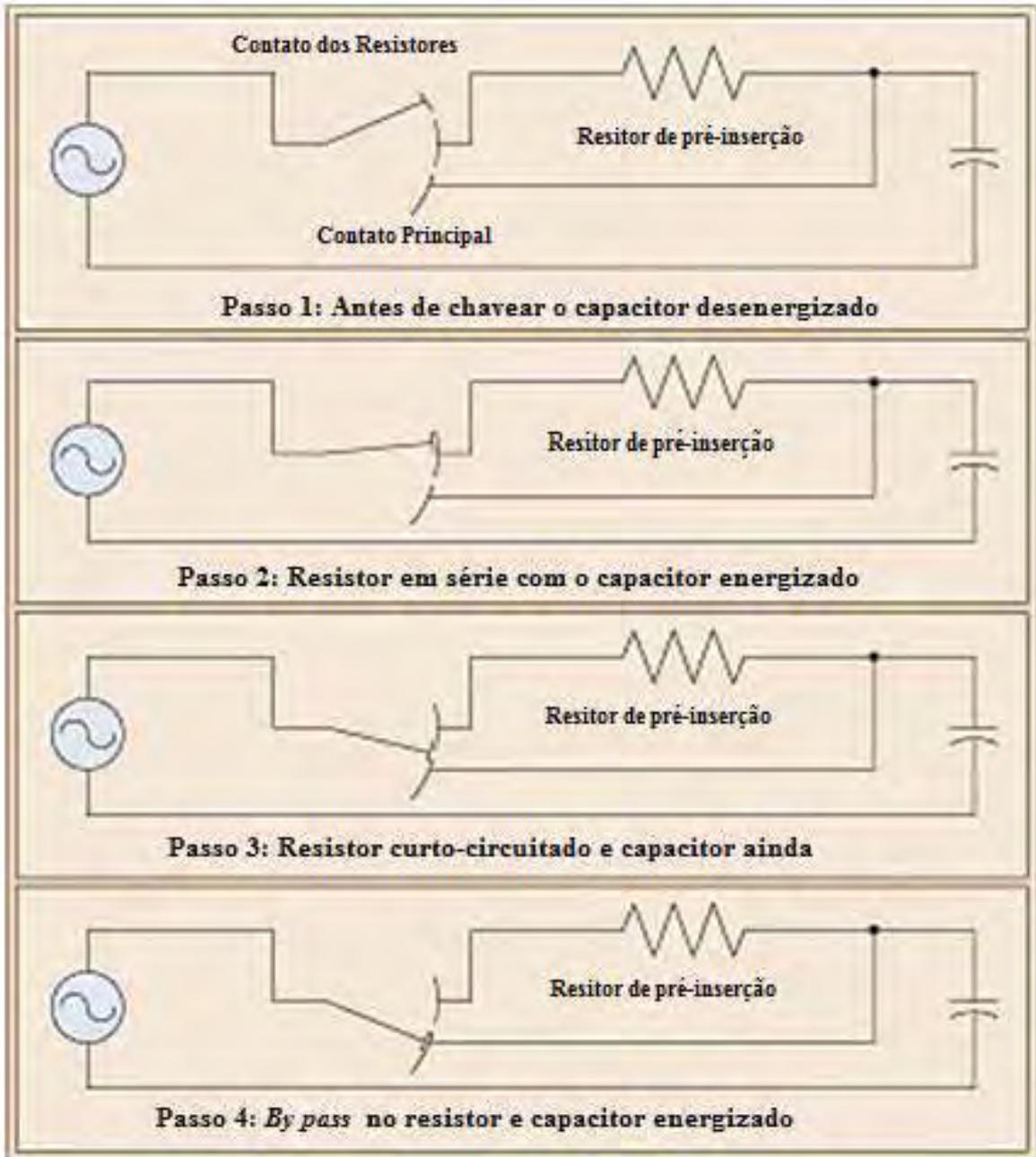


Figura 6 - Funcionamento de um disjuntor com resistores de pré-inserção. (EC&M, em 13/10/2011) – *figura traduzida / adaptada*

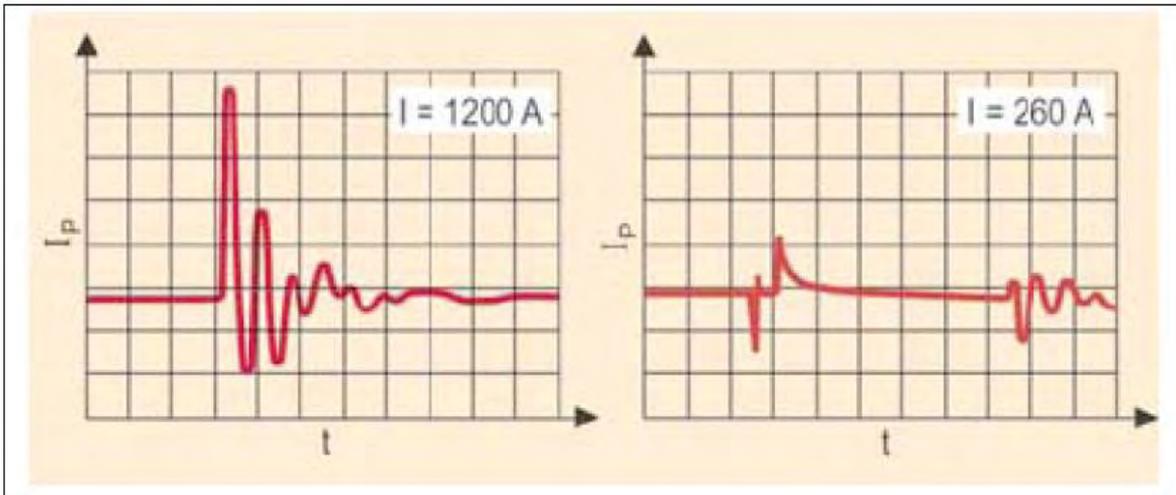


Figura 7 - Redução da corrente de *inrush* por um resistor de pré-inserção.(*EPCOS(1), 2008*) – *figura traduzida / adaptada*

Segundo a (WEG, 2001) são utilizados resistores com resistências na faixa de frações de ohms a até 2 ohms e com potência de dezenas à centenas de Watt's.

Este tipo de sistema de automação, como notado, é recomendado apenas para cargas cuja demanda por energia reativa tenha um mínimo de estabilidade, ou seja, permitam um controle com intervalos de manobra lentos, pois é preciso esperar a descarga de uma célula para poder reinseri-la na rede.

### 3.2.1 Indutores de pré-inserção

Também chamados de reatores de pré-inserção, eles basicamente são projetados como filtros para as frequências transitórias geradas pela inserção dos bancos capacitivos na rede. Através de um mecanismo, similar ao apresentado para os resistores de pré-inserção, são retirados do circuito depois da energização do capacitor, após aproximadamente 12 ciclos, segundo Fehr (2003) .

### 3.2.2 Limitador de Corrente de Inrush por Termistores NTC

Termistores são componentes que variam sua resistência elétrica em função de sua temperatura. São classificados por PTC (positive temperature coefficient – Coeficiente positivo de temperatura) que aumentam sua resistência proporcionalmente a variação da temperatura e por NTC (negative temperature coefficient – Coeficiente negativo de temperatura) que diminuem sua resistência em função do aumento da temperatura.

O NTC pode, portanto, ser utilizado para mitigar efeitos da corrente de *inrush* e funciona de modo similar aos resistores de pré-inserção. Quando o circuito é energizado (e o termistor NTC encontra-se “frio”) o dispositivo funcionará como uma resistência em série com o capacitor, limitando sua corrente (lei de ohm) e por tanto amenizando as correntes de *inrush*. Com o passar do tempo, pela passagem de corrente no termistor, este irá se aquecer e assim sua resistência irá diminuir, permitindo um maior fluxo de corrente, e conseqüentemente potência, para as células capacitivas.

A desvantagem deste componente é que para uma reinserção das células capacitivas acopladas a ele, é necessário que esperar que o componente esfrie para uma temperatura que permita a eficácia do termistor para esta função.

### 3.3 Eliminação da corrente de *Inrush*

Nos casos apresentados nesta seção a corrente de *inrush* é eliminada praticamente por completo com o auxílio de chaves estáticas e controladores eletrônicos, que através do monitoramento da tensão da rede pode comutar os bancos de capacitores sem, ou com extrema mitigação, da ocorrência de transitórios eletromagnéticos.

### 3.3.1 Chaveamento Eletrônico

Observamos que a corrente de *inrush* causadas por bancos de capacitores é causada basicamente por um breve curto circuito no momento do chaveamento do banco e por isso seu efeito é maior quando este chaveamento ocorre enquanto a tensão está em seu valor máximo e é inexistente se ocorrer enquanto a tensão da barra está em zero

Desta forma utilizando-se tiristores unidos à um controle digital podemos fazer com que as unidades capacitivas de compensação reativa sejam inseridas na rede apenas quando a tensão do barramento esteja passando por zero.

O circuito de controle pode ser simplificado pelo diagrama abaixo:

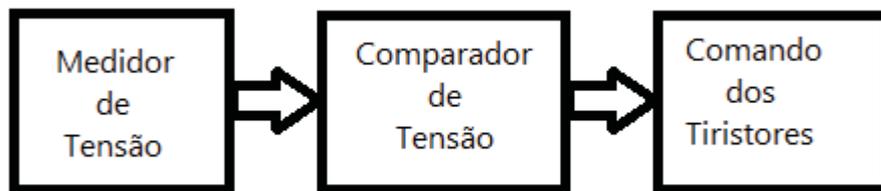


Figura 8 - Diagrama de blocos simplificado do circuito de controle.(Própria)

O circuito de controle possui basicamente estes três blocos onde o medidor de tensão mede a tensão em tempo real do barramento, o comparador de tensão compara a tensão medida com o nível de tensão zero através de uma referencia de terra e o bloco de comando dos tiristores é responsável pelo sinal enviado aos contatos digitais.

#### 3.3.1.1 Medidor de Tensão

O medidor de tensão tem a função de levar a tensão a ser comparada para o comparador, além de condicionar o sinal para que este não seja danificado. Para esta aplicação em

particular o valor da tensão em si não é importante, o que importa é o momento em que a tensão está: se ela está em seu valor máximo em módulo ou se está passando por zero.

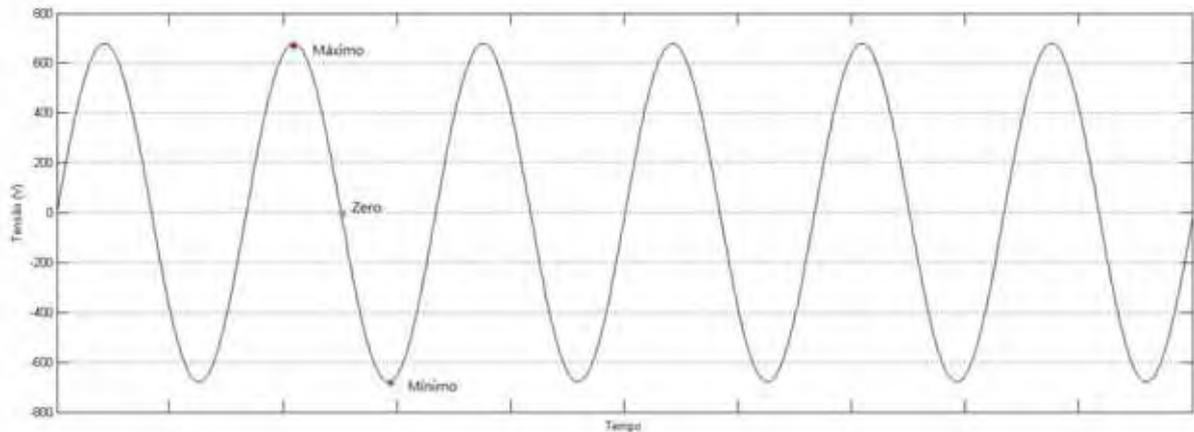


Figura 9 - Forma de onda de tensão de 650V de pico.

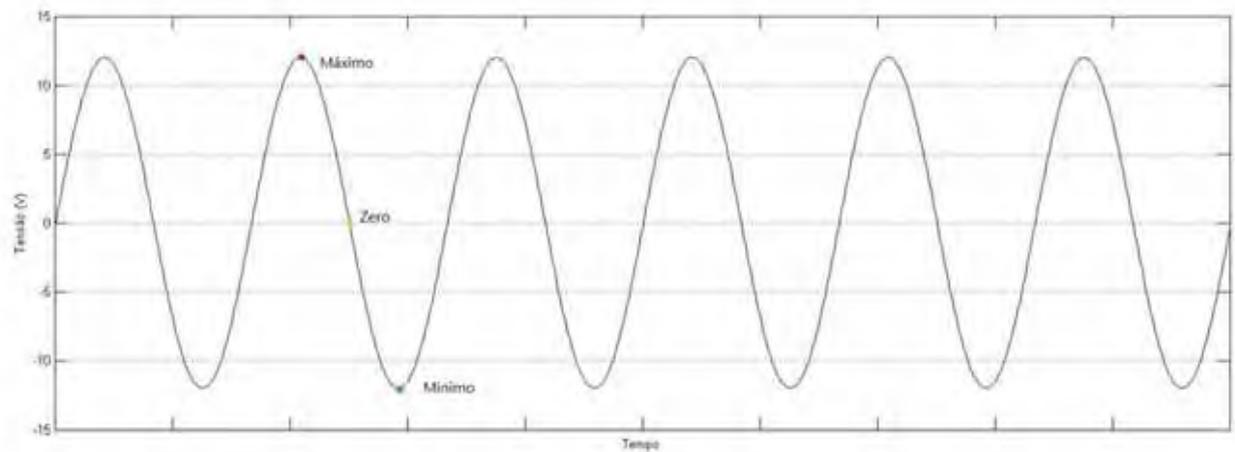


Figura 10 - Forma de onda de tensão de 12V de pico.

Conforme dito, pode-se mudar a amplitude do sinal a ser transmitido para o comparador mas a frequência e fase devem continuar iguais.

Como o circuito comparador, por ser eletrônico, não pode suportar tensões e potências muito altas a solução mais óbvia é utilizar um transformador de baixa potência como componente principal do circuito Amostrador.

Desta forma o circuito amostrador é representado a seguir:

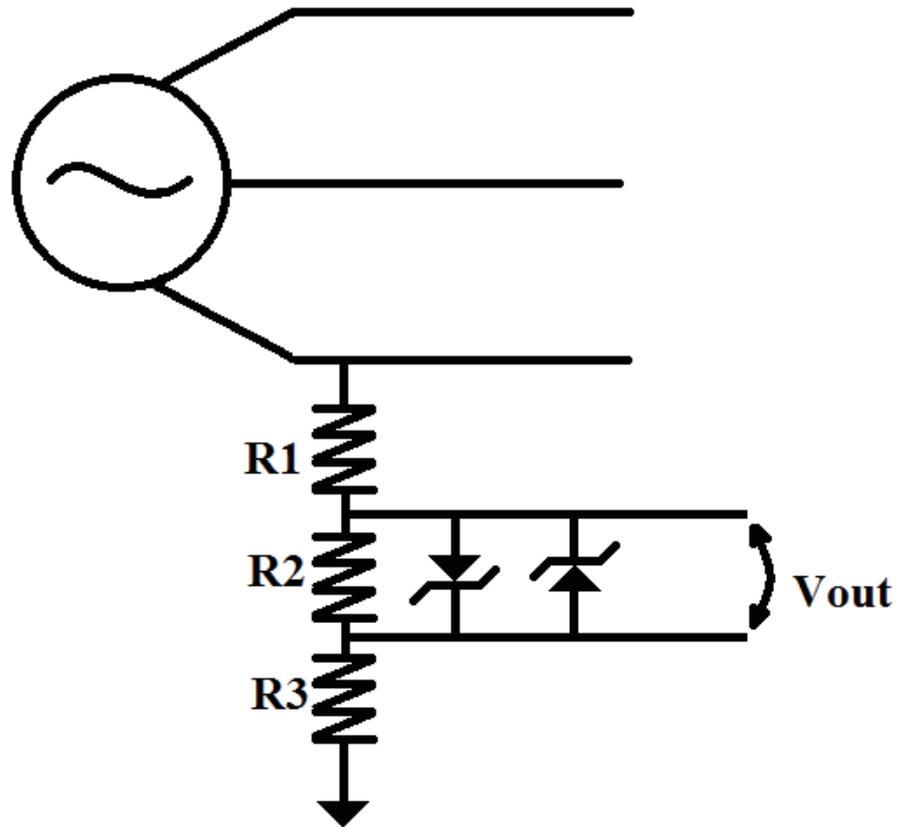


Figura 11 Circuito medidor de tensão. (Autoria Própria)

No divisor a forma de onda dos sinais de entrada e saída são semelhantes mudando apenas em amplitude, porém mantendo a fase e frequência iguais, desta forma atendendo a primeira exigência, além disso, permite a que seja encontrado qualquer valor de tensão apenas mudando-se a relação entre R1, R2 e R3 atendendo a segunda requisição. Os diodos zener garantem que  $V_{out}$  esteja sempre limitado a seus valores de tensão reversa, o que evita que picos de tensão ou a queima de algum resistor eleve a dramaticamente a tensão de saída protegendo o circuito principal.

### 3.3.1.2 Comparador de Tensão

O circuito comparador é responsável por sinalizar quando a tensão do barramento estiver passando por zero, indicando o melhor momento para a energização do capacitor, eliminando as correntes de *inrush*.

Este circuito é composto por um amplificador operacional sem realimentação, ou seja, em malha aberta. Desta forma a tensão de saída é determinada apenas pela tensão de referência.

A tensão de entrada será comparada a uma tensão de referência, que neste caso, será o terra do circuito, ou seja, tensão zero volts. Quando a diferença dos sinais for positiva ( $V_{in} - V_{ref} > 0$ ) o dispositivo saturará, pois seu ganho tende à infinito, e sua saída será  $+V$  (tensão de alimentação positiva do Amp.Op.) e quando a diferença for negativa, também devido à saturação, a saída será  $-V$  (tensão de alimentação negativa do Amp.Op.). Assim durante o semi-ciclo positivo a tensão de saída do circuito será  $+V$  e durante o semi-ciclo negativo a tensão de saída será  $-V$ , ocorrendo sua troca ocorrendo no momento em que a tensão de entrada atinja zero volt.

Abaixo será mostrada a configuração de um Amp.Op. como circuito comparador

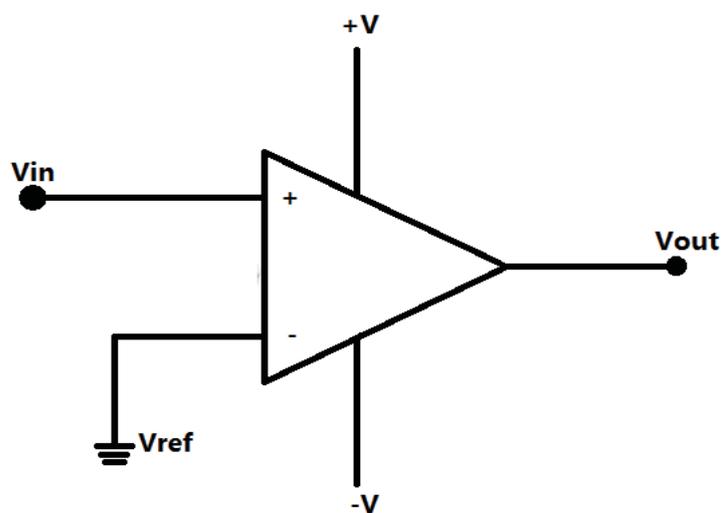


Figura 12 - Amp.Op. como comparador de tensão. (Autoria Própria)

A seguir serão mostradas as formas de ondas de entrada e saída do circuito, lembrando que a entrada deste circuito comparador é o sinal de saída do circuito amostrador anterior.

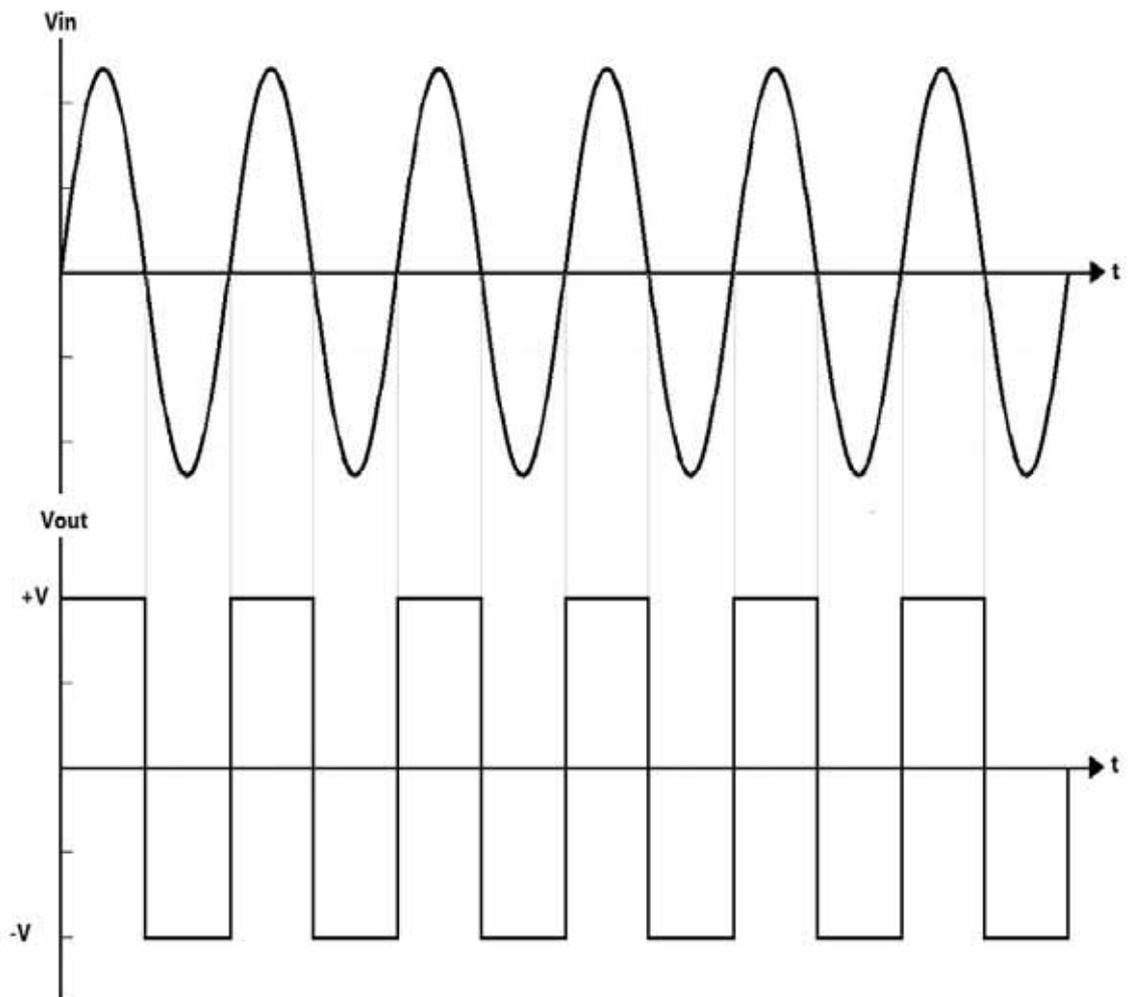


Figura 13 - Forma de onda de  $V_{in}$  em comparação com a  $V_{out}$ . (Autoria Própria)

Desta forma vemos que em todo começo de semi-ciclo positivo o amplificador operacional emite um pulso com valor constante  $+V$  até o final do semi-ciclo e começo do semi-ciclo negativo no qual o componente emitirá um pulso de  $-V$ . Assim podemos utilizar tanto a borda de subida como a borda de descida de  $V_{out}$  como referência para a energização

dos bancos de capacitores, pois nestes momentos a tensão da barra será idealmente zero (existirá uma pequena diferença de tensão no momento da energização do banco devido ao tempo de resposta dos componentes, porém este efeito pode ser desprezado).

O sinal se inverte toda vez que a tensão de entrada do barramento passa por zero, ou seja, o ponto ótimo para energização dos bancos capacitivos

Para bancos ligados em delta, a tensão de referência e a tensão analisada devem ser coletadas das duas fases onde o banco está conectado, desta forma o circuito irá disparar no momento em que as tensões forem iguais, e não mais quando a tensão for igual a zero volt.

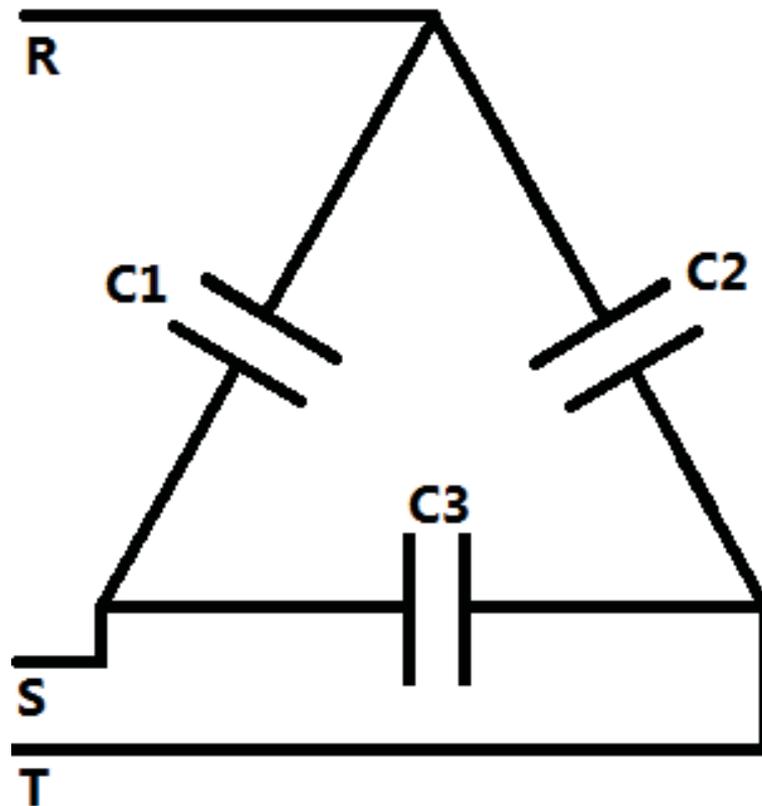


Figura 14 - Banco ligado em delta. (Autoria Própria)

Assim sendo as amostras de tensão do capacitor C2 serão tomadas entre as fases R e T, por exemplo, e o disparo ocorrerá quando as tensões destas fases forem iguais, e a saída do Amp.Op. se comportará de modo semelhante ao apresentado anteriormente porém seu disparo ocorrerá em um momento diferente como é mostrado a seguir, bem como os momentos de igualdade de tensão..

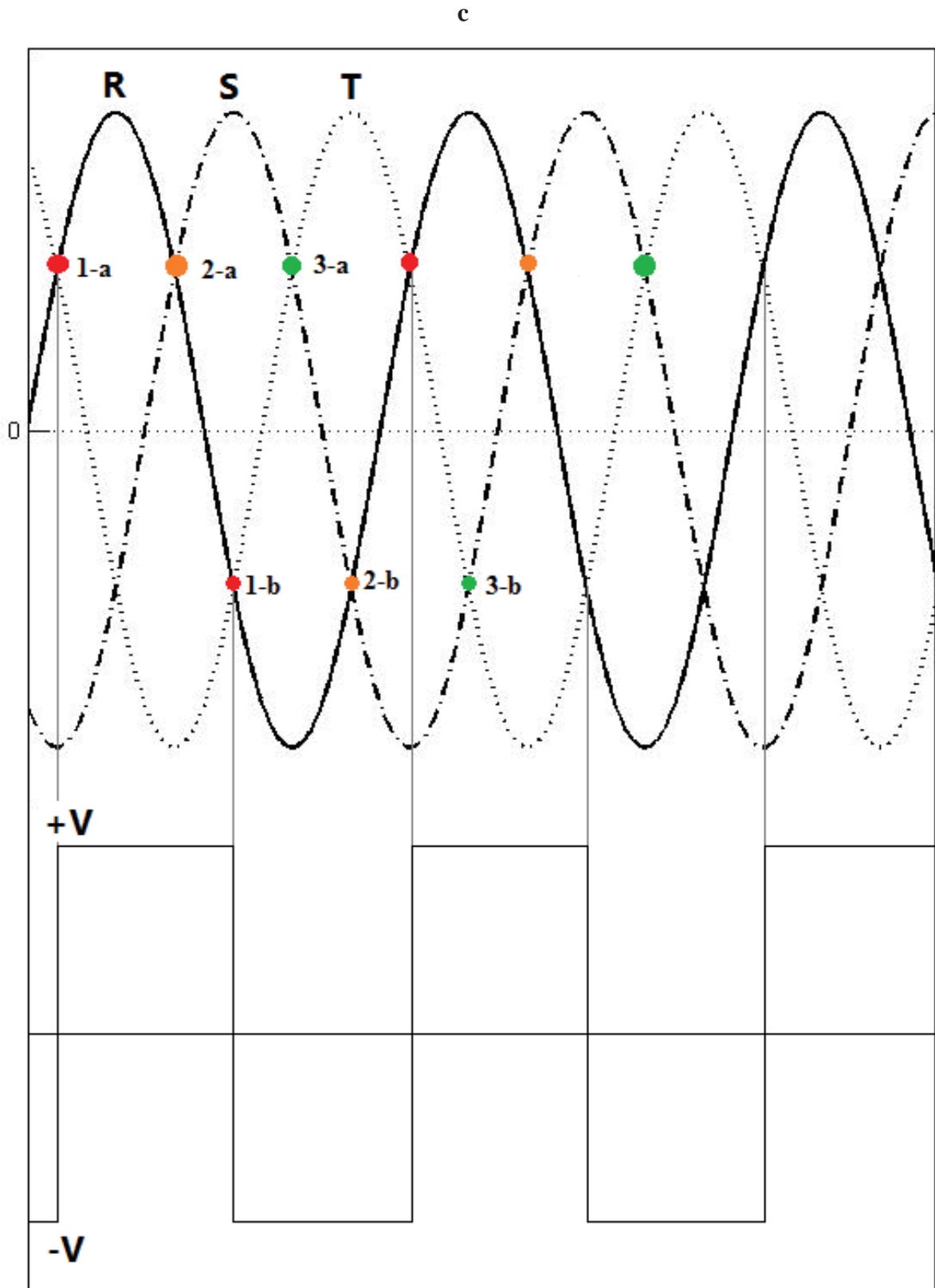


Figura 15 - Sinal de saída do Amp. Op. em função da diferença de tensões das fases. (Autoria Própria)

Dessa forma podemos ainda estender este conceito para os bancos conectados em estrela, e ao invés de se comparar a tensão com zero, compara-se com a tensão do capacitor, de modo que estes não necessitem descarregar (sua tensão retornar a zero volt) para que se possa religá-los novamente evitando assim o tempo de espera desta descarga o tornará o sistema apto a trabalhar com cargas de dinâmica rápida.

Assim a tensão será amostrada como mostrado abaixo.

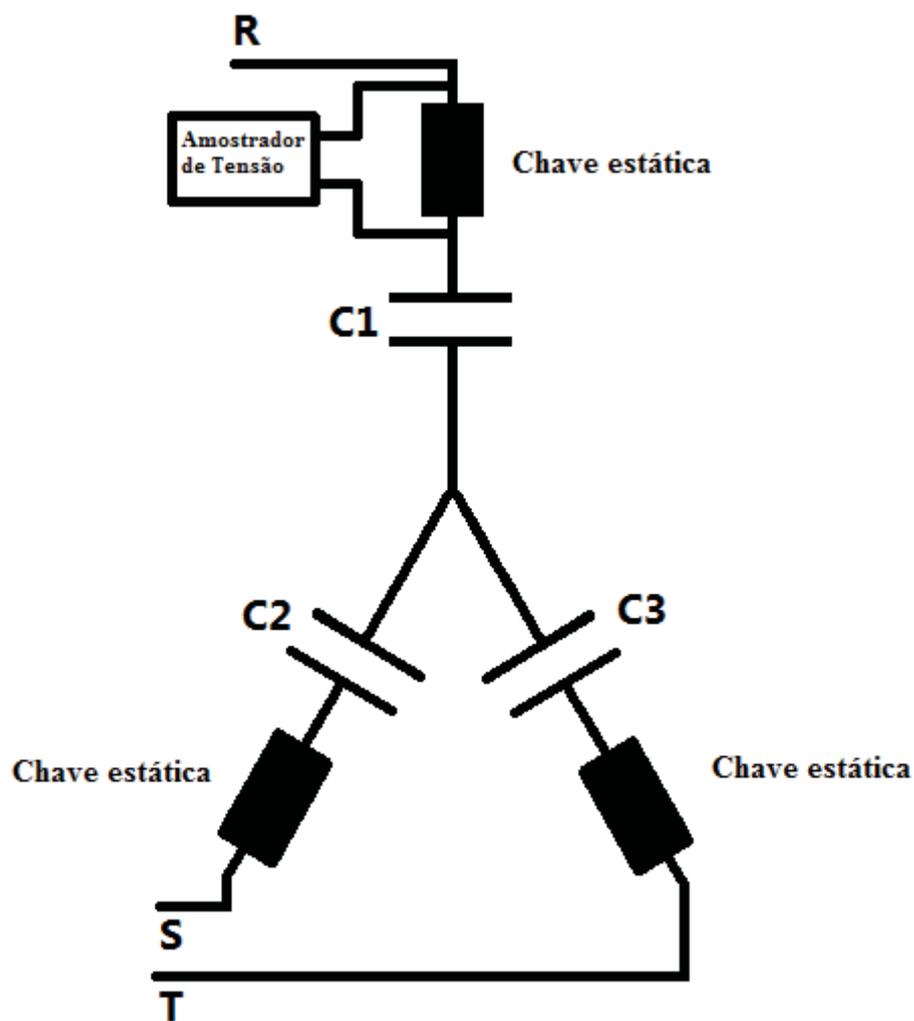


Figura 16 - Banco em estrela com amostrador de tensão realocado (Autoria Própria)

As chaves estáticas são neste momento tratadas como caixas pretas pois serão detalhadas no item 3.3.1.4.

### 3.3.1.3 Comando dos Tiristores

O circuito de Comando dos Tiristores é responsável pelo envio dos pulsos de ativação dos tiristores de potência, ou como também são chamados de chaves estáticas. Este circuito irá interpretar o sinal de saída do amp. Op. e gerar um pulso no instante certo, momento ótimo de energização dos bancos, que fará com que os tiristores disparem conectando o banco ao barramento.

O circuito comparador mesmo alternando seu sinal de saída no momento certo não garante que acionará os tiristores apenas no momento correto, pois se o sistema fosse energizado durante os semi-ciclos os tiristores seriam acionados da mesma forma, como mostrado abaixo:

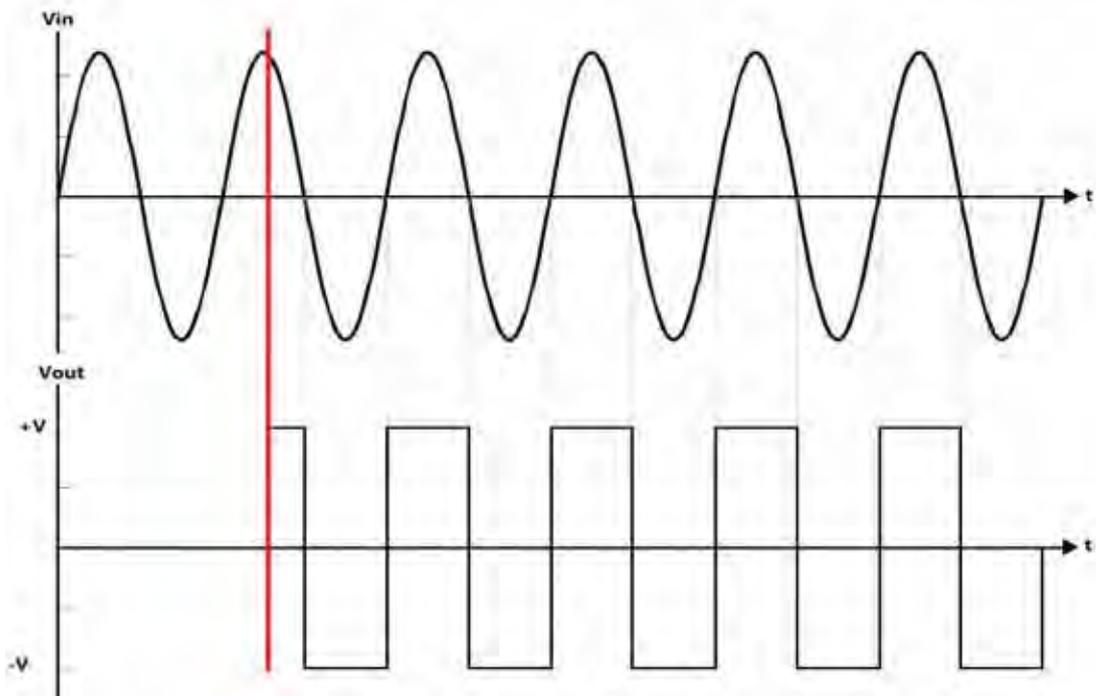


Figura 17 - Formas de ondas de  $V_{in}$  e  $V_{out}$  com momento da energização. (Autoria Própria)

Como mostrado na figura 17 mesmo com os circuitos já apresentados o problema persiste, pois o sinal de saída do amp. Op. não depende do momento do ciclo e sim da amplitude do sinal e o sinal  $V_{out}$  seria capaz de acionar os tiristores no momento errado se o sistema fosse energizado, por exemplo, no momento mostrado na figura acima.

Para resolver este problema o Circuito de Controle dos Tiristores estará sempre energizado assim, os pulsos gerados pelo circuito cruzarão o zero sempre no mesmo momento (mesmo ângulo de disparo) e não importando o momento do comando de energização do banco. Contudo para controlar se o estado ligado/desligado do banco capacitivo, será colocado uma porta AND cujas entradas serão o sinal de liga/desliga e o sinal de comando dos tiristores, desta forma os tiristores só receberam o sinal de comando se o sinal de liga/desliga estiver em nível alto, ou seja, ligado.

O circuito estará sempre enviando aos tiristores os pulsos para ativá-los, porém estes só se acionarão com a presença da tensão na entrada liga/desliga da porta AND.

Porém o circuito ainda pode acionar os tiristores em momento indevido, mesmo com a chave de energização em série com as chaves estáticas, pois se a porta AND receber um sinal de nível alto em sua porta liga/desliga no momento descrito na figura 17 os tiristores serão acionados e energizarão os bancos no momento errado, portanto para combater este problema devemos restringir o tamanho do pulso de ativação das chaves eletrônicas.

Ainda, temos que garantir que o pulso tenha tempo suficiente para ativar o tiristor (pulso > ton) por isso um multivibrador monoestável, mostrado à seguir, foi colocado entre o Comparador de Tensão e os dispositivos de chaveamento eletrônicos.

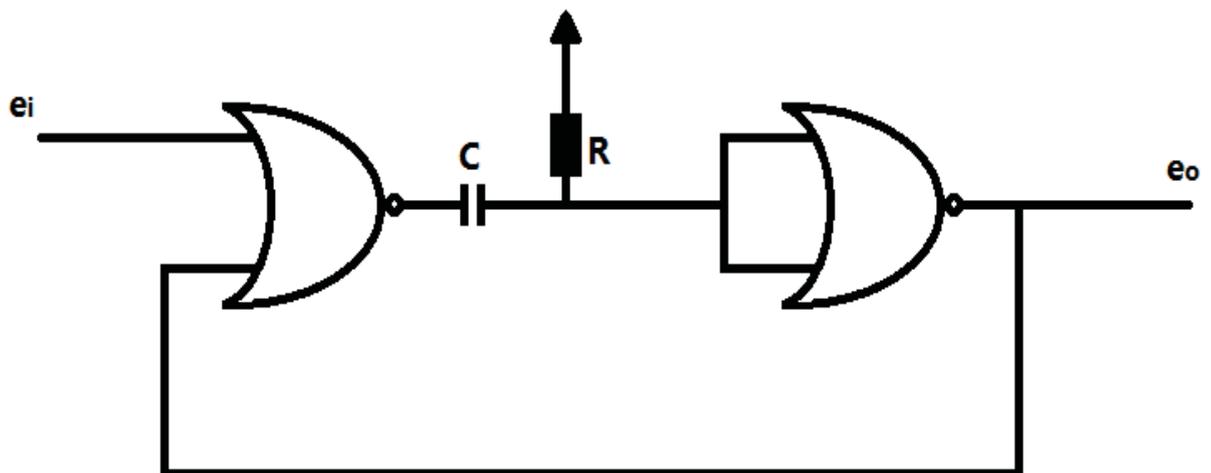


Figura 18 - Multivibrador monoestável com portas NOR, ativado por borda de subida.  
(Própria)

O circuito a cima é montado utilizando-se portas NORs um resistor e um capacitor. E sua forma de onda se encontra abaixo.

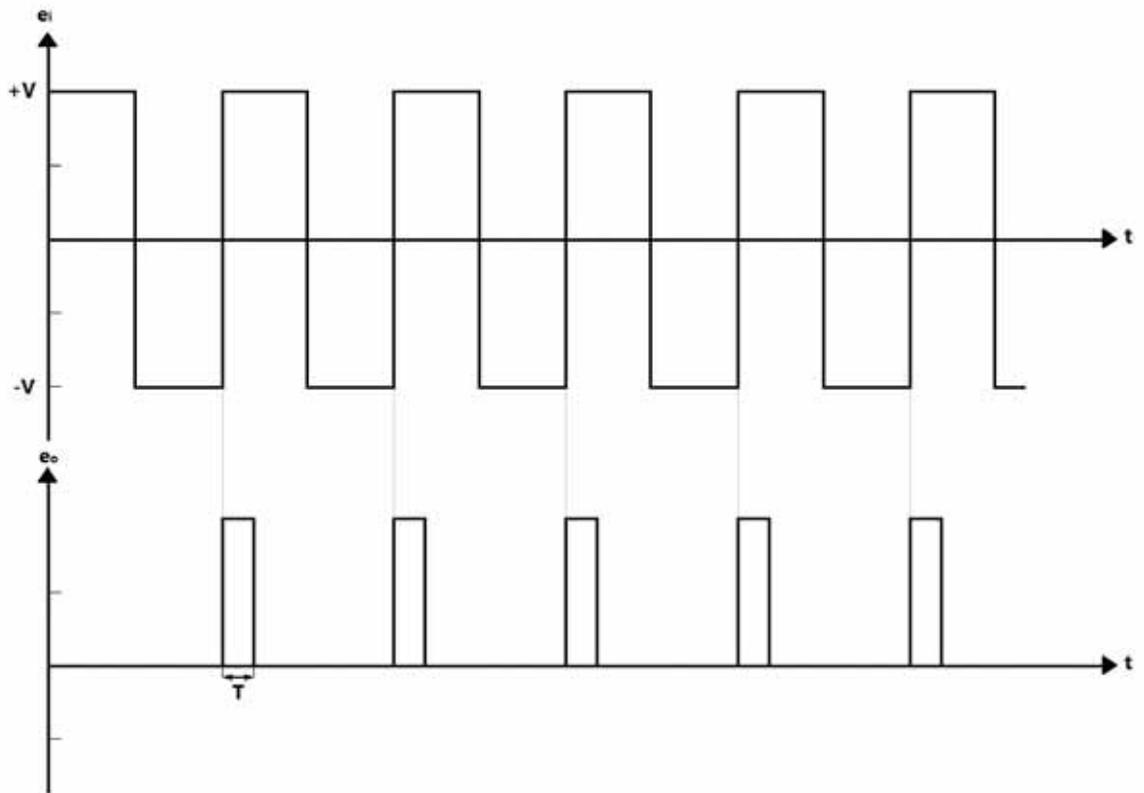


Figura 19 - Forma de onda do circuito mostrado na figura 18. (Autoria Própria)

Contudo, como mostrado pelas formas de onda, este circuito será disparado apenas pelas bordas de subida do sinal de entrada e, portanto só será responsável pelos disparos de metade dos tiristores (apenas os responsáveis pelo semi-ciclo positivo). Para o semi-ciclo negativo devemos utilizar um circuito com resposta semelhante, porém com resposta a sinais com borda de descida. Para se obter este efeito basta trocar as portas NOR's do circuito anterior, mostrado na figura 18, por portas NAND. O circuito alterado é mostrado abaixo.

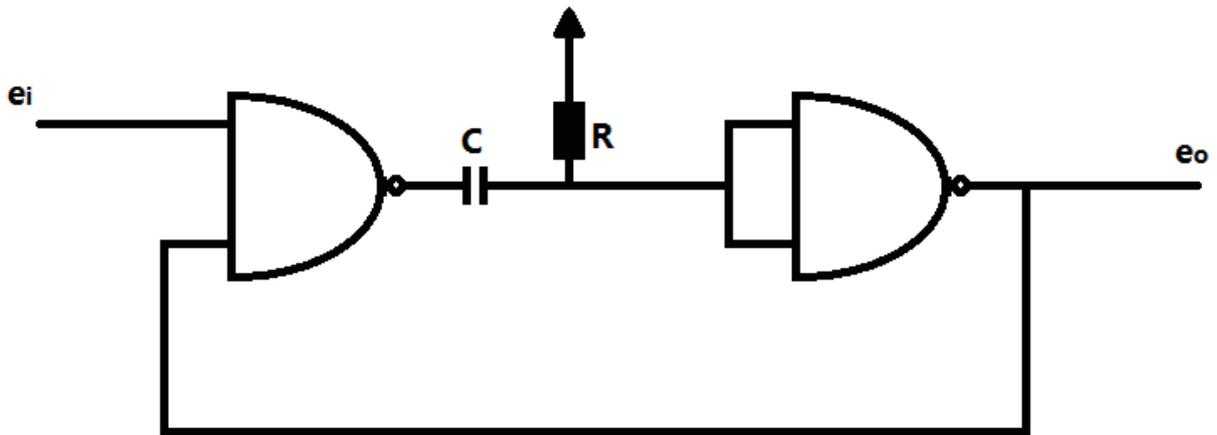


Figura 20 - Multivibrador monoestável com portas NAND, ativado por borda de descida.  
(Autoria Própria)

A forma de onda do circuito acima é mostrada a seguir:

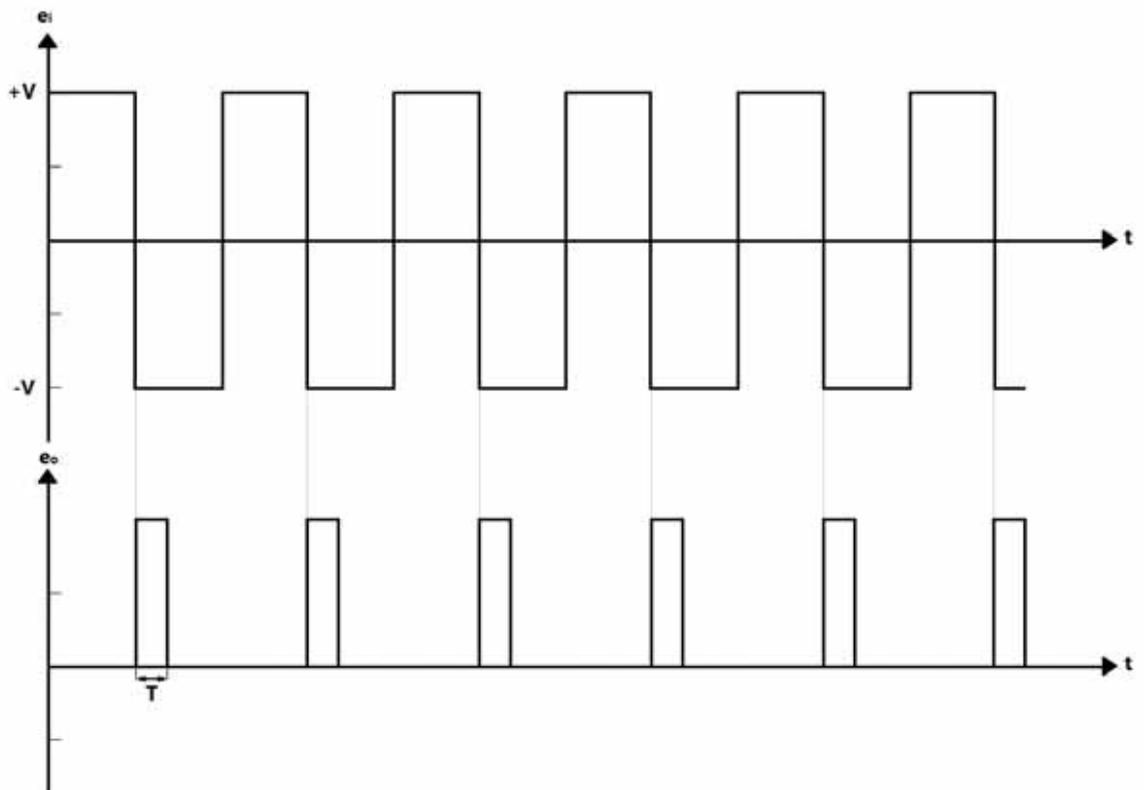


Figura 21 - Forma de onda do circuito mostrado na figura 20. (Autoria Própria)

Como comentado anteriormente e mostrado pela forma de onda da figura 21, o circuito tem suas saídas em função das bordas de descida do sinal de entrada.

É aconselhável a utilização de circuitos integrados que tenham em suas portas de entradas circuitos Schmitt Trigger, que se utiliza da histerese, para combater a interferência causada por ruídos.

Nos circuitos anteriores, mostrados nas figuras 18 e 20, o tempo  $T$  depende da constante de tempo  $\zeta = R \cdot C$  e do nível de tensão de disparo das portas G2's. O controle do tempo  $T$  é fundamental para o funcionamento correto do sistema, se ele for muito pequeno pode não disparar os tiristores e se for muito grande pode não disparar os tiristores no momento certo (situação semelhante a mostrada na figura 17), portanto através do equacionamento mostrado a baixo poderemos projetar esse tempo.

Considerando que um sinal de cinco milissegundos é suficiente para sensibilizar os tiristores e que representa um disparo com um ângulo de no máximo cinco graus (o que corresponde a um desvio aceitável, já que corresponde a apenas 8.71% da tensão) podemos considerar este tempo como alvo para o  $T$ .

Segundo anotações de aula, ( Abud,M 2010)<sup>1</sup> temos que:

$$T \cong (R + R_o) \cdot C \cdot \ln \left( \frac{V_{DD}}{V_{DD} - V_v} \right) \quad (4.1)$$

Como para CMOS comum:

$$V_v \cong 0,5 V_{DD} \quad (4.2)$$

Temos que:

---

<sup>1</sup> Nota de Aula, Matéria Eletrônica Industrial –I, pelo professor Marcio Abud , no curso de Eng. Elétrica pela UNESP Guaratinguetá em 2010.

$$T \cong 0,69 \cdot (R + R_o) \cdot C \quad (4.3)$$

Onde:

- $R_o$  corresponde a resistência de saída das portas G2's, que é baixa.

Desta forma teremos, para  $T = 5\text{ms}$ ,  $R_{eq} \cdot C = 7,246 \cdot 10^{-3}$ , com  $R_{eq} = (R + R_o)$ .

### 3.3.1.4 Tiristores:

Para aplicações de chaveamento de alta potência em corrente alternada a configuração mais simples é projetada por dois SCRs antiparalelos, como na figura abaixo. Para acionar a carga basta gerar um pulso no gate do dispositivo 1 (vide figura 22) no começo do semi-ciclo positivo, já para o segundo dispositivo deve-se gerar o pulso no início do semi-ciclo negativo. A chave SCR passará de imediato para o estado ligado com um pulso de tensão no gate, contudo para manter a carga conectada é necessário gerar esses pulsos de maneira constante pois os tiristores se desligarão automaticamente quando a tensão de alimentação cruzar o ponto de zero volt.

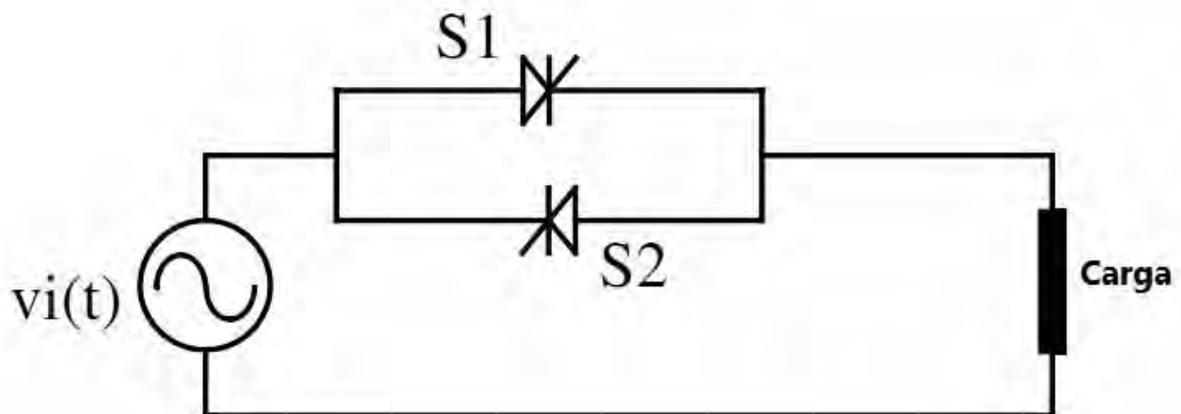


Figura 22 - Exemplo de chave estática formada por dois SCR's. (Autoria Própria)

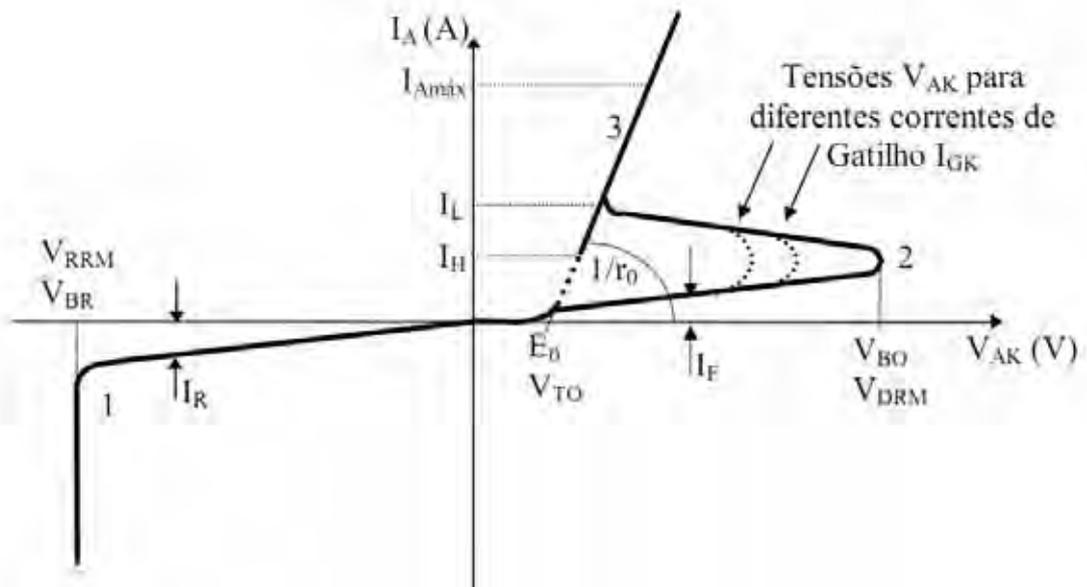


Figura 23 - Característica do tiristor SCR (Corradi,2005)<sup>2</sup>

Para se desligar a carga bastaria suprimir os pulsos, o que será feito pela porta AND, como mostrado abaixo onde é mostrado a resposta da porta em função dos pulsos de controle e o comando de liga/desliga que são suas entradas. Dessa forma se suprime os pulsos de comando e os tiristores não são religados no início dos ciclos seguintes.

<sup>2</sup>Corradi Jr., Romeu, Tiristor SCR Retificador controlado de silício, Campinas 2005

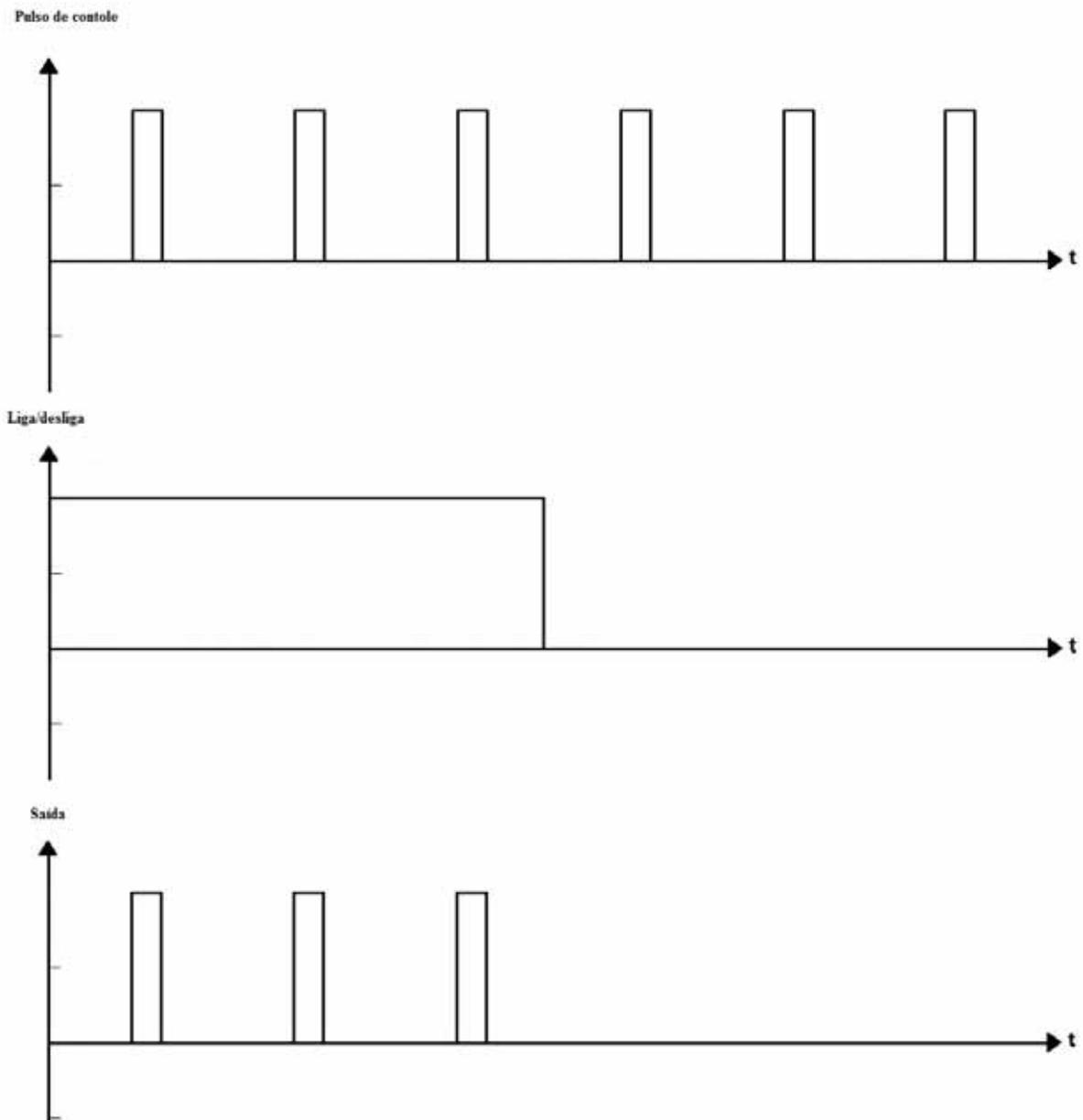


Figura 24 – Resposta da porta AND em função das entradas “Pulso de controle” e “Liga/desliga”. (Autoria Própria)

O TRIAC também funciona como chave estática para este circuito, eliminando a necessidade de um segundo circuito de disparo, porém o TRIAC ainda não atingiu (em 2011) os níveis de potência dos SCRs e são viáveis apenas para cargas menores.

Assim o circuito completo é representado a seguir.



Note que para garantir que o pulso terá potência suficiente para o acionamento dos tiristores foram colocados *drivers* de potência entre as portas AND e os tiristores bem como transformadores de pulso que impediram a alta tensão de *gate* no momento da condução do SCR seja transmitida ao circuito de comando.

Observe que este é um circuito monofásico e pode ser utilizado em sistemas trifásicos e bifásicos, apenas se adicionando circuitos iguais em cada fase do sistema.

### 3.3.2 Simulações

Para comprovar a eficácia do circuito, através do Simulink, ferramenta do programa MatLab, foi simulado o chaveamento de capacitores em um sistema fictício mostrado na figura 25, abaixo.

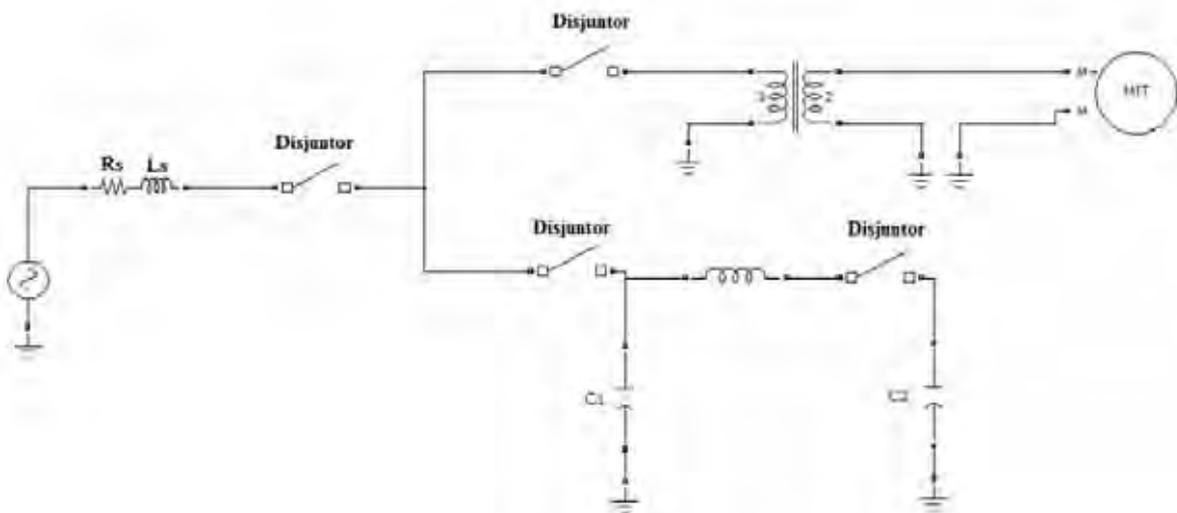


Figura 25 – Circuito simulado. (Autoria Própria)

O circuito é ligado com C1 e C2 desenergizados, ou seja, desacoplados, primeiramente se conecta C1, cujo transitório é mostrado nas figuras 26 e 27, simulando a conexão de um banco singular, posteriormente se liga C2, transitório mostrado nas figuras 28 e 29, simulando um chaveamento do tipo *Back-to-Back*.

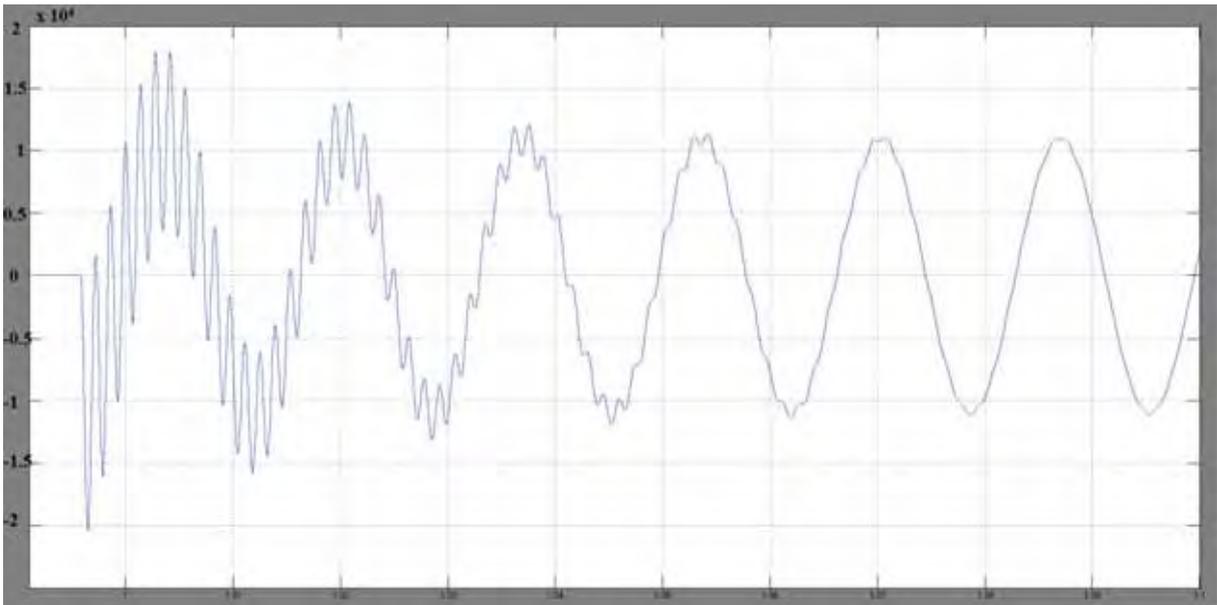


Figura 26 – Forma de onda da tensão no capacitor C1 no momento de seu chaveamento. (Autoria Própria)

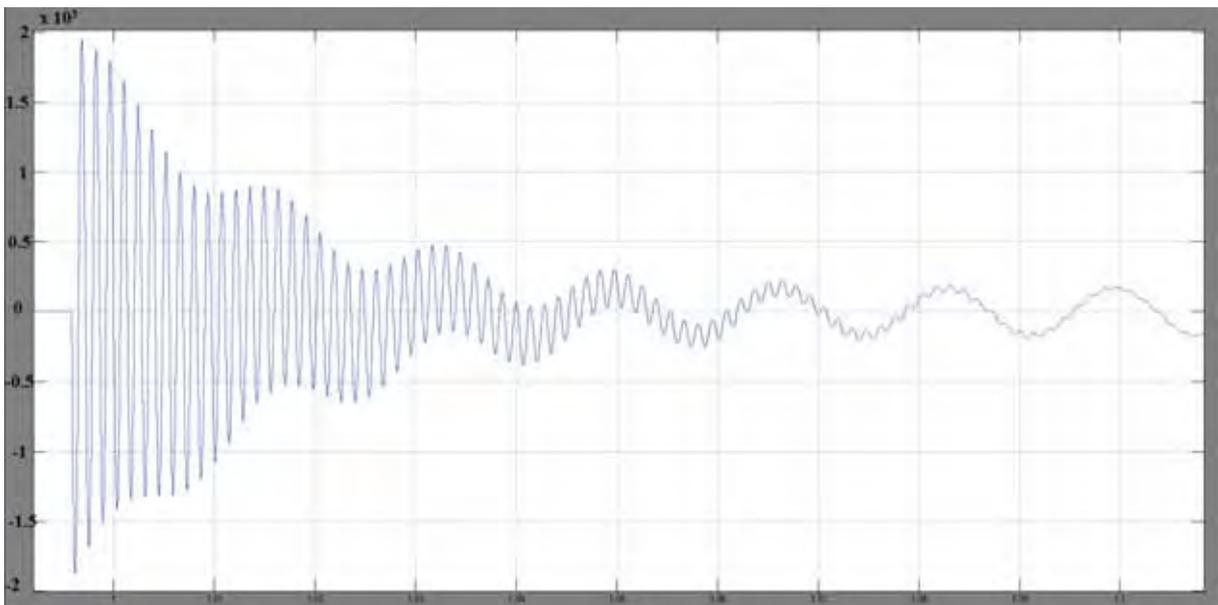


Figura 27 – Forma de onda da corrente no capacitor C1 no momento de seu chaveamento. (Autoria Própria)

Pode-se notar que a corrente de inrush chega 2000 A, mais de 11 vezes a corrente nominal de 167 A, enquanto a tensão chega a 18.000 V, 1,7 vezes maior que a tensão nominal de 11.000V.

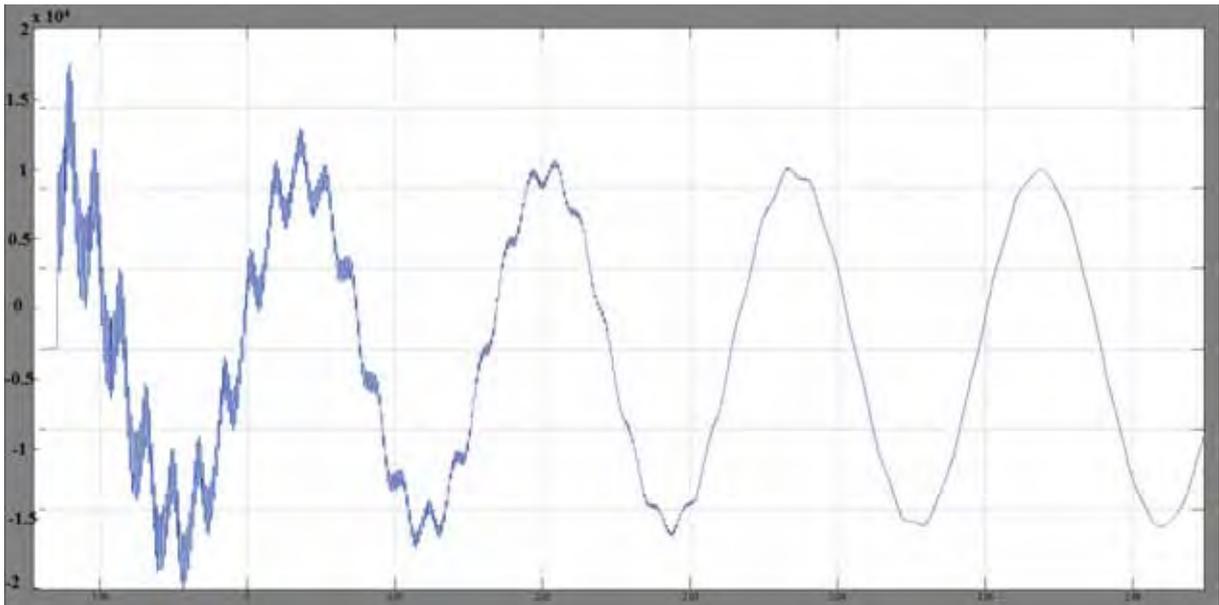


Figura 28 – Forma de onda da tensão no capacitor C2 no momento de seu chaveamento. (Autoria Própria)

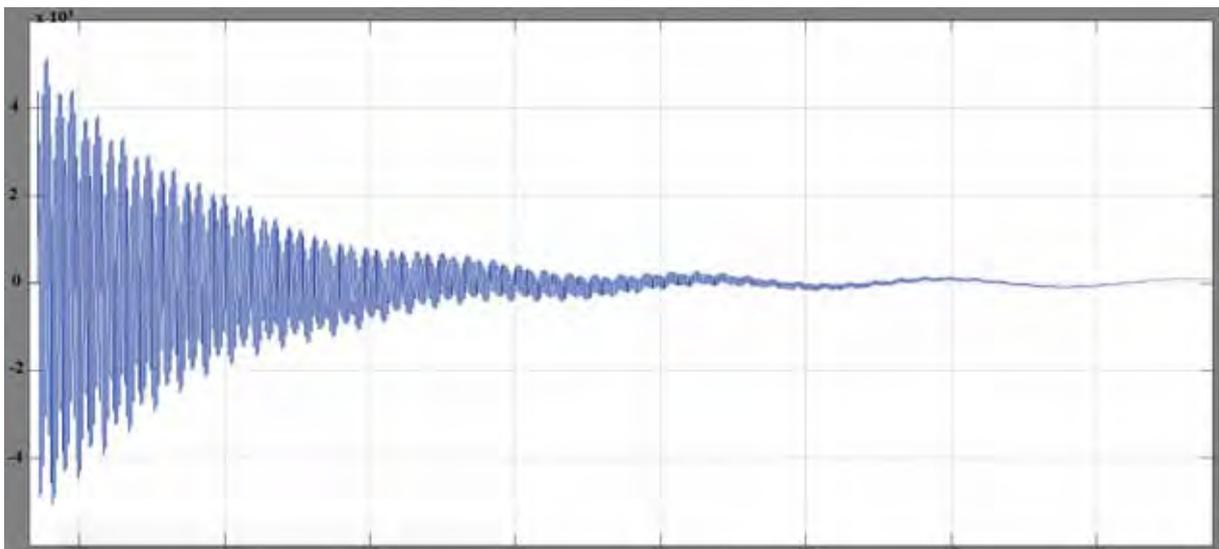


Figura 29 – Forma de onda da corrente no capacitor C2 no momento de seu chaveamento. (Autoria Própria)

Como esperado no chaveamento do tipo *Back-to-Back* a amplitude da corrente foi mais elevada assim como a frequência do transiente. Neste caso a tensão chegou a 1.8 vezes a nominal enquanto a corrente chegou a 55 vezes a corrente nominal.

A seguir mostraremos o chaveamento feito no mesmo circuito da figura 25, porém ao invés de disjuntores para conectar as cargas capacitivas usaremos o circuito desenvolvido neste capítulo e mostrado na figura 25.

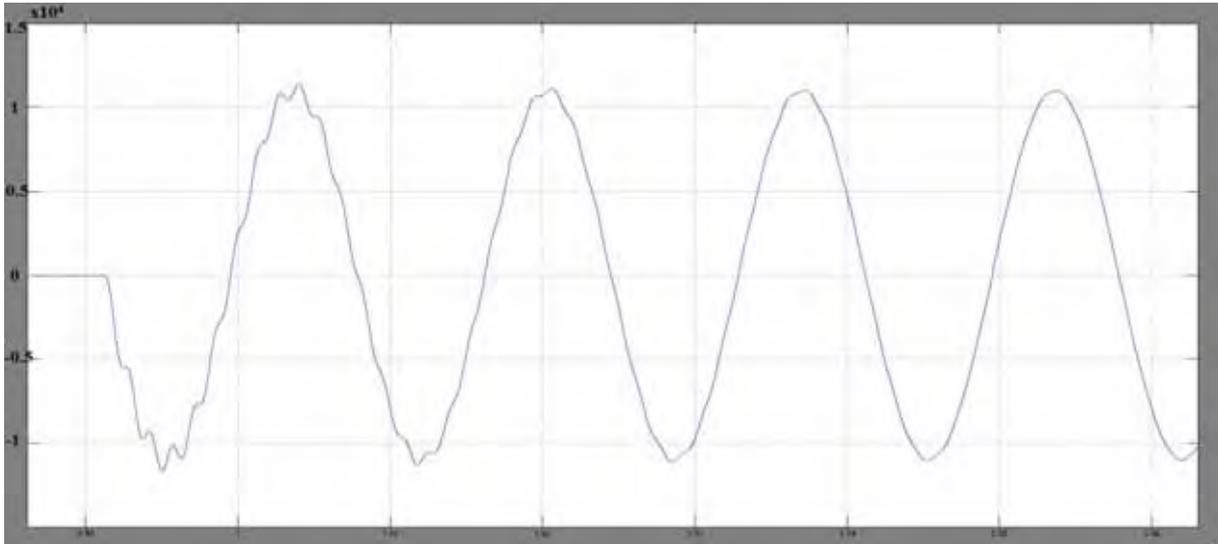


Figura 30 – Forma de onda da tensão no capacitor C1 com chaveamento eletrônico. (Autoria Própria)

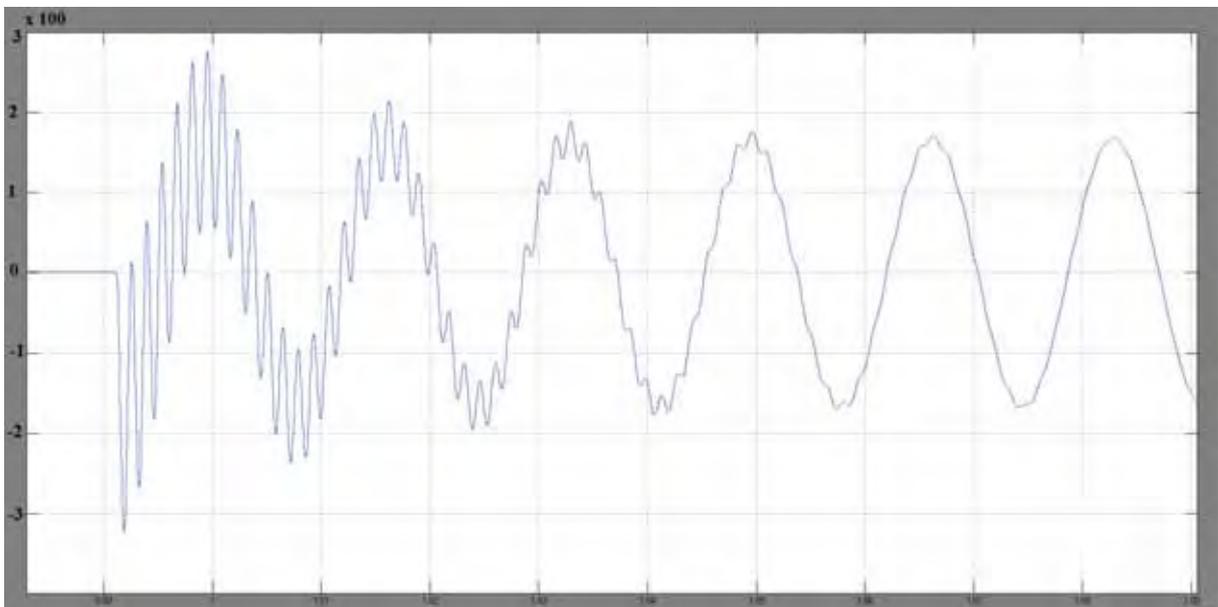


Figura 31 – Forma de onda da corrente no capacitor C1 com chaveamento eletrônico. (Autoria Própria)

Podemos notar uma grande diminuição dos efeitos transitórios com a tensão praticamente sem deformações e a corrente chegando a menos de 1,5 vezes a corrente nominal. Abaixo mostraremos os efeitos do chaveamento eletrônico em chaveamentos *Back-toBack*.



Figura 32 – Forma de onda da tensão no capacitor C2 com chaveamento eletrônico. (Autoria Própria)

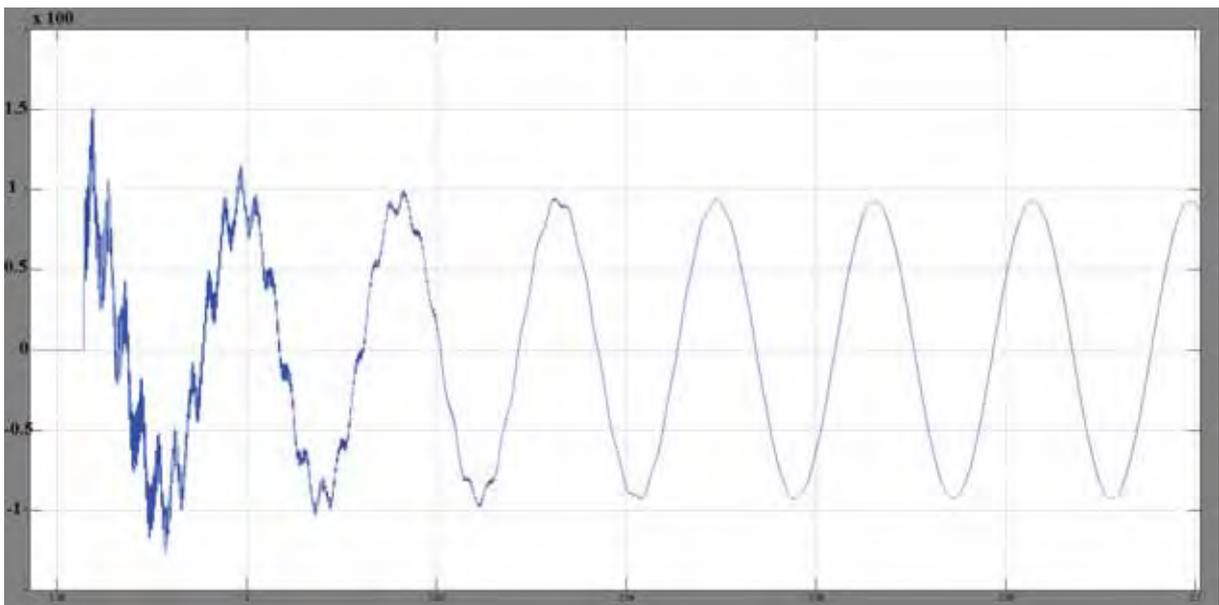


Figura 33 – Forma de onda da corrente no capacitor C2 com chaveamento eletrônico. (Autoria Própria)

No chaveamento *Back-toBack*, quase não existe transitório na tensão e corrente de *inrush* diminuiu de  $55xI_n$  para  $1,6xI_n$ .

Assim sendo através da simulação vemos a eficácia do circuito desenvolvido neste trabalho.

### 3.3.3 Compensação dinâmica utilizando eletrônica

O circuito mostrado anteriormente não necessita que os bancos capacitivos estejam descarregados antes de sua energização, pois como o circuito cria seus pulsos de disparo baseados no momento em que a tensão da fonte é igual a tensão do capacitor no momento do chaveamento. Esta condição permite que este circuito seja utilizado para correção do fator de potência em sistemas com cargas indutivas de rápido chaveamento (cargas dinâmicas).

Nestes sistemas os controladores processam a informação sobre a necessidade de energia reativa que deve ser fornecida a rede no determinado instante. O tempo de disparo dos capacitores é de aproximadamente 1,5 ciclos, ou 25ms em 60 Hz, podendo chegar a um tempo inferior a um ciclo, ou seja, o disparo é feito virtualmente sem atrasos.

Nestes circuitos rápidos o controlador faz a comparação entre a tensão do capacitor e a tensão da rede e emite o pulso de disparo no momento da igualdade dos dois sinais (“zero-crossing”) eliminando assim de maneira semelhante ao circuito anterior, ou seja, este circuito também elimina a corrente de *inrush* pela eliminação da diferença de potencial entre o capacitor e a rede.

## CAPÍTULO 4 CONCLUSÕES

Devido aos altos níveis de tensão e correntes originados dos transitórios eletromagnéticos referentes aos chaveamentos de células capacitivas em redes de distribuição, podem ocorrer danos a equipamentos. As correntes de *inrush* têm sua origem no afundamento de tensão causado pela inserção de capacitores em barramentos energizados aliado a característica inerente ao componente de não variar sua tensão de maneira instantânea. Desta forma o afundamento de tensão provoca uma corrente inicial muito elevada o que faz com que se acumule muita energia entre os indutores que estão sendo compensados pelos capacitores e estas células capacitivas o que ocasiona uma ressonância entre os componentes, que é amortecida pela impedância do barramento.

O transitório está relacionado ao momento em que o chaveamento ocorre, pois se o chaveamento ocorrer no momento em que a ddp., entre os pólos do capacitor, estiver passando pelo momento de máximo ou de mínimo a corrente de *inrush* terá também o seu efeito máximo, porém se o capacitor for chaveado no momento em que a tensão passa por zero o capacitor terá sua curva de carga e descarga acompanhando a rede desde o início eliminando, os efeitos transitórios.

Este trabalho baseou-se neste fato para fabricar um circuito de controle para chaves estáticas que acionariam os capacitores apenas nos momentos certos (com ângulos de zero a cinco graus de disparo) o que faz com que os capacitores sempre disparem com uma ddp de zero volt, eliminando assim a corrente de *inrush*.

Simulações feitas mostram a grande melhoria dos efeitos causados pelo chaveamento dos bancos de capacitores, fato que comprova a eficácia do circuito proposto neste trabalho.

## BIBLIOGRAFIA

Araújo, António E.A e Neves, Washington L.A Calculo de transitórios Eletromagnéticos em Sistemas de Energia, , Editora UFMG, 2005;

Andrade, Doherty, Universidade Estadual de Maringá  
[http://www.dma.uem.br/kit/arquivos/arquivos\\_pdf/transforlaplace.pdf](http://www.dma.uem.br/kit/arquivos/arquivos_pdf/transforlaplace.pdf), acessado em 11/09/2011;

Fehr, R., Trouble With Capacitors em 2003 por EC&M,  
[http://ecmweb.com/mag/electric\\_trouble\\_capacitors\\_part\\_2/](http://ecmweb.com/mag/electric_trouble_capacitors_part_2/), acessado em 13/10/2011;

IEEE, IEEE POWER ENGINEERING SOCIETY. IEEE Std 18-2002: Standard for Shunt PowerCapacitors. New York: IEEE, 2002. 24 p;

IEEE Working Group on Capacitance Switching, “Bibliography on switching of capacitance circuits exclusive of series capacitors,” *IEEE Trans. Power App. Syst.*, vol. PAS-89, no. 6, pp. 1203–1207, Jul./Aug. 1970;

J. C Das, “Analysis and Control of Large-shunt-capacitor-bank Switching Transients”, *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 41, no. 6, novembro/dezembro 2005;

Madegan, Cláudio, Proteção de bancos de capacitores shunt, O setor elétrico 21/02/2011;

Thomas. M. Blooming, “Capacitor Failure Analysis”, *IEEE Industry Applications Magazine*, september/october 2006.

POWER ENGINEERING SOCIETY. IEEE Std 18-2002: Standard for Shunt PowerCapacitors

## **BIBLIOGRAFIA CONSULTADA**

Barbosa, Marcos Antonio, Sobretenões de manobra – Dimencionamento de resistor de pré-inserção, Tese de mestrado aprovada em 07/04/1989 pela UFMG.

Yamakawa, Eduardo Kazumi, Sistema de controle nebuloso para bancos de capacitores automáticos aplicados em alimentadores de distribuição de energia elétrica, tese de mestrado aprovado pela UFPR em 17/8/2007.

Chaves, Fabrício Silveira, Avaliação técnica do desempenho da compensação reativa shunt capacitiva aplicada à expansão de sistemas elétricos, tese de doutorado aprovada pela UFMG em 2007.

Mathur, R.Mohan e Varma, Rajiv K., Thyristor-Based facts controllers for electrical transmission systems, IEEE, 2002.

## ANEXO

### Transformada de Laplace

Este anexo faz parte do artigo completo (Prof. Doherty Andrade, acessado em 11/09/2011)

#### 4. Introdução as EDO's

Esta seção é dedicada ao estudo de problemas de Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

onde a função  $f$  é admitida ser contínua sobre seu domínio de definição.

Equações diferenciais ordinárias são importantes em muitos problemas encontrados quando modelamos fenômenos físicos ou biológicos. Vamos ver mais adiante alguns exemplos que ilustram esta importância.

Uma equação diferencial ordinária, ou simplesmente uma EDO, é uma equação

$$F(x, y, y', y^{(2)}, \dots, y^{(n)}) = 0,$$

envolvendo derivadas de uma função  $y(x)$  que desejamos determinar.

A ordem de uma EDO é a ordem da mais alta derivada que aparece na equação.

Seja  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^{(n+1)}$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , uma função definida e contínua em  $\Omega$ . A equação diferencial ordinária de ordem 1, que estamos interessados, é uma equação do tipo

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)),$$

satisfazendo à seguinte condição inicial  $x(t_0) = x_0$

Dada  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida sobre um aberto  $I$  e de classe  $C^1$  neste intervalo, se estiver verificada a condição (4.2), isto é,

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = f(t, \phi(t)), \quad (4.3)$$

e  $\phi(t_0) = x_0$  dizemos que  $\phi$  é uma solução de (4.2).

Se  $n > 1$ , (4.2) é de fato um sistema de equações diferenciais ordinárias, pois  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  onde  $f_i$  são funções reais e contínuas definidas em  $\Omega$ :

$$f^i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n.$$

A ordem da equação

$$u''' + x^2 u^5 u' - \sin(x) = 0$$

é três. Note que esta equação é não linear.

A equação geral (linear) de ordem  $k$  é do tipo

$$u^{(k)} + p_1(x)u^{(k-1)} + \dots + p_k(x)u = f(x). \quad (4.4)$$

Quando  $f(x) \equiv 0$  em (4.4) dizemos que a EDO é homogênea.

Suponha que sejam dados  $k$  números reais fixados  $b_1, b_2, \dots, b_k$ . Então a EDO de ordem  $k$  juntamente com as condições

$$u^{(k)} + p_1(x)u^{(k-1)} + \dots + p_k(x)u = f(x) \quad (4.5)$$

$$u(x_0) = b_1, u'(x_0) = b_2, \dots, u^{(k-1)}(x_0) = b_k. \quad (4.6)$$

é chamado de problema de valor inicial.

Note que  $x_0$  é o valor da variável independente em que todas as condições iniciais são impostas e que existem tantas condições iniciais quanto é a ordem da EDO. Se condições são

dadas em mais que um valor de  $x$ , resulta num problema de fronteira. É claro que uma combinação dos dois resulta num problema de valor inicial e fronteira.

Uma das três questões fundamentais no estudo das equações diferenciais ordinárias é a determinação de suas soluções. Existem muitos métodos para determinação explícita de soluções, mas estes métodos não são gerais e determinam as soluções apenas de alguns tipos muito particulares de EDO's. A maior parte das EDO's não pode ser resolvida explicitamente. Já que a forma explícita da solução de uma EDO pode não existir, outra grande questão que surge é o estudo das propriedades das soluções (sem conhecê-las), é a teoria qualitativa. Esta parte da teoria das EDO's estuda o comportamento das soluções e propriedades geométricas.

Uma terceira questão importante trata da existência e unicidade de soluções das EDO's. Saber da existência de soluções é o primeiro passo no estudo das EDO's, se existe podemos procurar determiná-la ou uma aproximação para ela. O resultado mais importante e básico da teoria das EDO's é o Teorema 5.1 de existência e unicidade. Antes mais alguns comentários.

Muitas vezes não é possível escrever a EDO (4.1) da forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Esta é uma situação particular que merece uma definição.

A EDO (4.1) é chamada linear se  $F$  é linear na variáveis  $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ . Deste modo uma EDO linear geral de ordem  $n$  é uma expressão do tipo

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x). \quad (4.7)$$

Para começar o nosso estudo vamos considerar primeiramente as EDO's lineares de primeira ordem. Isto é, EDO's do tipo

$$Y' + p(x)y = g(x).$$

Antes de avançarmos precisamos duas novas noções. Para ilustrar, consideremos a EDO  $y'' + y = 0$  que admite solução dada por  $y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$ , em que  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias, tendo então a EDO acima infinitas soluções. Para determinar de modo único a solução, precisamos determinar as constantes e para isto precisamos mais informações sobre a solução. Há duas formas de fazer isto.

Dando condições iniciais que a solução deve satisfazer num ponto. Neste caso temos um problema de valor inicial (PVI). Por exemplo:

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases}$$

Aqui a solução é  $y(x) = \sin(x)$ .

Ou, dando condições de fronteira que a solução deve satisfazer na fronteira de um conjunto. Neste caso temos um problema de valor de fronteira (PVF). Por exemplo:

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1, y(\pi) = -1. \end{cases}$$

Aqui a solução é  $y(x) = \cos(x)$ .

Alguns métodos importantes de solução de EDO's se baseiam no tipo de problema PVI ou PVF.

## 5. Prova do Teorema de Existência

Vamos dar a prova do teorema de existência e unicidade de soluções de EDO's numa situação particular.

**Teorema 5.1 (Existência e Unicidade)** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um aberto e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  função contínua com  $f_y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  também contínua. Dado  $(t_0, y_0) \in \Omega$ , existe um intervalo aberto  $I \ni t_0$  e uma única função diferenciável  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  com  $(t, \phi(t)) \in \Omega$ , para todo  $t \in I$ , que é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (5.1)$$

**Demonstração:** A função  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  é solução de (5.1) se e somente se, for solução da equação integral

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, \quad \forall t \in I. \quad (5.2)$$

Assim, vamos estudar detalhadamente a equação (5.2). Sejam  $a$  e  $b$  reais positivos tal que o retângulo

$$R = \{(t, y); |t - t_0| \leq a \text{ e } |y - y_0| \leq b\}$$

esteja inteiramente contido em  $\Omega$ . Como  $f$  é contínua e  $R$  é compacto, então  $f$  é limitada em  $R$ , seja

$$M = \max\{|f(t, y)|; (t, y) \in R\}.$$

Tome

$$0 < a \leq \min\{a, b/M\}$$

e o intervalo

$$J_a = [t_0 - a, t_0 + a].$$

Seja

$$C = \{g; g : J_a \rightarrow \mathbb{R} \text{ contínua, } g(t_0) = y_0 \text{ e } |g(t) - y_0| \leq b\}.$$

Munimos  $C$  da seguinte métrica

$$d(g_1, g_2) = \max\{|g_1(t) - g_2(t)|; t \in J_a\}.$$

Segue que  $(C, d)$  é um espaço métrico. Mais ainda,  $(C, d)$  é um espaço métrico completo, isto é, toda sequência de Cauchy é convergente.

De (5.2) observamos que toda solução deve ser ponto fixo da aplicação dada por  $C \ni g \mapsto \Phi(g)$  onde

$$\Phi(g)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds. \quad (5.3)$$

É fácil ver que  $\Phi(g)$  é contínua em  $J_a$  e  $\Phi(g)(t_0) = y_0$ . Além disso,

$$|\Phi(g)(t) - y_0| \leq \left| \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\bar{a} \leq b$$

e portanto  $\Phi(g) \in C$ . Logo temos que

$$\Phi : C \rightarrow C.$$

Por outro lado, se  $g_1$  e  $g_2$  pertencem a  $C$  temos que

$$|\Phi(g_1)(t) - \Phi(g_2)(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))| ds.$$

Como  $f$  é Lipschitziana na variável  $y$ , existe uma constante positiva  $k$  tal que

$$|\Phi(g_1)(t) - \Phi(g_2)(t)| \leq \int_{t_0}^t k|g_1(s) - g_2(s)| ds \leq k\bar{a}d(g_1, g_2).$$

Segue que

$$d(\Phi(g_1), \Phi(g_2)) \leq kad(g_1, g_2).$$

Tomando  $ka < 1$  concluímos que  $\Phi$  é uma contração. Pelo Teorema da contração,  $\Phi$  tem um único ponto fixo e o teorema fica provado com  $I = (t_0 - a, t_0 + a)$ .

Agora vamos provar que se duas soluções  $\phi$  e  $\psi$  coincidem em algum ponto  $t = t_0$  então elas coincidirão em todos os valores de  $t$  em que estiveram definidas.

**Teorema 5.2** Sejam  $\phi$  e  $\varphi$  soluções de (5.1), definidas em intervalos  $I_1$  e  $I_2$ , respectivamente. Suponha  $t_0 \in I_1 \cap I_2$  que  $\phi(t_0) = \varphi(t_0) = x_0$ . Então,  $\phi$  e  $\varphi$  coincidem em todos os valores de  $t \in I_1 \cap I_2$ .

**Demonstração:** Sejam  $x = \phi(t)$  e  $y = \varphi(t)$  duas soluções satisfazendo

$$\phi(t_0) = \varphi(t_0) = x_0.$$

Seja  $J = (r_1, r_2) = I_1 \cap I_2$  o intervalo em que  $\phi$  e  $\varphi$  estão definidas. Seja

$$N = \{t; t \in J \text{ e } \phi(t) = \varphi(t).\}.$$

Note que  $N$  é não vazio, pois  $t_0 \in N$ . Mostraremos que  $N$  é aberto e fechado em  $J$  e como  $J$  é conexo teremos que  $J = N$ .

Seja  $(t_n)$  uma sequência de elementos de  $N$  convergente para  $t \in J$ . Assim,  $\phi(t_n) = \varphi(t_n)$ . Como  $\phi$  e  $\varphi$  são contínuas temos que  $\phi(t) = \varphi(t)$ , segue que  $t \in N$ . Logo,  $N$  é fechado em  $J$ . Seja  $t_1 \in N$ . Então, temos que  $\phi(t_1) = \varphi(t_1) = x_1$ . Resolvendo o problema de valor inicial com o par  $(t_1, x_1)$ , o Teorema de existência e unicidade nos dá  $a$  e  $b$  tal que  $Ka < 1$ . Podemos escolher, usando a continuidade de  $\phi$  e  $\varphi$ ,  $a$  tal que

$$\|\varphi(t) - \phi(t)\| \leq b,$$

com  $|t - t_1| < a$ .

Como  $\phi$  e  $\varphi$  são soluções temos que

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= x_1 + \int_{t_1}^t f(s, \varphi(s)) ds, \\ \phi(t) &= x_1 + \int_{t_1}^t f(s, \phi(s)) ds.\end{aligned}$$

Para  $|t - t_1| < a$  obtemos

$$\|\varphi(t) - \phi(t)\| \leq K \int_{t_1}^t \|\varphi(s) - \phi(s)\| ds \leq bK\bar{a}.$$

Voltando na desigualdade anterior obtemos

$$\|\varphi(t) - \phi(t)\| \leq b(K\bar{a})^2.$$

Repetindo o argumento, chegamos que

$$\|\varphi(t) - \phi(t)\| \leq b(K\bar{a})^n,$$

para todo  $n \geq 1$ . Como  $Ka < 1$  obtemos que  $\phi(t) = \varphi(t)$  para todo  $|t - t_1| < a$ . Logo, existe uma vizinhança de  $t_1$  onde  $\phi(t)$  e  $\varphi(t)$  coincidem, isto é,  $N$  é aberto. Como  $N$  é não vazio, aberto e fechado em  $J$  e  $J$  é conexo, segue que  $N = J$ . 2

Para o próximo resultado, que trata da continuidade da solução com os dados iniciais, vamos usar a seguinte notação,  $u(t; t_0, y_0)$  denota a solução de (5.1) com  $u(t_0) = y_0$ .

Teorema 5.3 Sob as mesmas hipóteses do teorema de existência, a solução  $u(t; t_0, y_0)$  é função contínua de  $y_0$  para  $t_0$  e  $t$  fixos.

Demonstração: Consideremos as seguintes aplicações

$$A_0 x(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau,$$

$$A_1 x(t) = y_1 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau,$$

cujos pontos fixos são as soluções com condições iniciais  $y_0$  e  $y_1$  num intervalo  $[t_0, b]$ . Podemos escolher  $h < a$  e considerar  $J_h = [t_0, t_0 + h]$  intervalo fechado de modo que estas aplicações sejam contrações com mesma constante  $k$ . Se  $d(y_0, y_1) \leq \varepsilon$  então as contrações são próximas e portanto a distância entre seus pontos fixos não excede  $\varepsilon/(1 - k)$ . Segue que

$$\max \{d(u(t; t_0, y_0), u(t; t_1, y_1)), t \in J_h\} \leq \varepsilon/(1 - k).$$

Assim, duas soluções diferem no máximo por  $\varepsilon$  em  $t = t_0$  e no máximo por  $\varepsilon/(1 - k)$  em todo o intervalo  $J_h$ .

Movendo o ponto inicial de  $t_0$  para  $t_1 = t_0 + h$  podemos estender a solução para o intervalo  $[t_0, t_0 + 2h]$  e então repetir o argumento, Encontramos que as duas soluções diferem no máximo por  $\varepsilon/(1 - k)^2$

Continuando este argumento, nós normalmente obtemos a seguinte estimativa

$$\max_{t_0 \leq t \leq b} \|u(t, t_0, u_0) - u(t, t_0, u_1)\| \leq \frac{\varepsilon}{(1 - k)^m}, \quad (5.4)$$

Onde

$$m = \left\lceil \frac{b - t_0}{h} \right\rceil + 1,$$

Assim, fazendo  $ku_0 - uk$  suficientemente pequeno, podemos fazer o lado esquerdo de (5.4) tão pequeno quanto desejado. Isto prova a continuidade de  $u(t, t_0, u_0)$ . 2

O teorema de existência de solução para equações diferenciais ordinárias garante a existência de solução numa vizinhança do ponto inicial  $t_0$ . A pergunta que surge naturalmente

é :podemos estender esta solução para intervalos maiores? O seguinte resultado responde esta pergunta.

Se  $\phi$  é uma solução do pvi definida num intervalo aberto  $I$ , dizemos que  $\tilde{\phi}$  é uma extensão de  $\phi$  se  $\tilde{\phi}$  é solução do pvi, está definida em um intervalo aberto  $I$  que contém propriamente  $I$ , e em  $I$ ,  $\tilde{\phi}$  e  $\phi$  coincidem. Se uma solução  $\phi$  não admite uma extensão, dizemos que ela é uma solução maximal.

**Teorema 5.4** Sob as hipóteses do teorema de existência, temos que toda solução do problema (5.1) pode ser estendida a um intervalo maximal e este é aberto.

**Demonstração:** Seja  $S$  o conjunto de todas as soluções  $\phi_\lambda$  do (5.1) definidas em intervalos abertos  $I_\lambda \ni t_0$ . Seja  $I = \cup I_\lambda$ . Dena  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\phi(t) = \phi_\lambda(t), t \in I_\lambda.$$

Notemos que  $I$  é aberto. Em virtude do Teorema 5.2  $\phi$  está bem definida e além disso,  $\phi$  é solução do PVI (5.1).

Suponha que  $I = (\omega^-, \omega^+)$ . Vamos provar que  $I$  é maximal, isto é, não existe um intervalo  $J$  contendo propriamente  $I$  onde o PVI tenha solução  $\phi$ .

De fato, suponha que isto não seja verdade. Então este conteria uma das extremidades, digamos  $\omega^+$ . Assim, o PVI dado por

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(\omega^+) = \bar{\varphi}(\omega^+), \end{cases}$$

teria uma solução  $\phi$  num aberto  $(\omega^- - a, \omega^+ + a)$ . Segue que

$$\bar{\varphi} = \begin{cases} \varphi(t), t \in (\omega^-, \omega^+) \\ \bar{\varphi}(t), t \in [\omega^+, \omega^+ + a) \end{cases}$$

seria solução do PVI (5.1) no intervalo  $J$  que contém propriamente  $I$ . Mas isto é um absurdo

## 6. Transformada L de Laplace

Nesta seção vamos usar o conceito de operador linear e seu inverso, na solução de problemas de valor inicial. A técnica da Transformada de Laplace é uma poderosa ferramenta na determinação de soluções de equações diferenciais ordinárias com condições iniciais. O operador  $L$  é um operador integral (linear) que destrói derivadas, transformando edo's em simples equações algébricas.

Dizemos que  $f$  é contínua por partes em  $[a, b]$  se é contínua exceto num número nito de pontos deste intervalo e se em cada ponto  $x_0$  de descontinuidade existem os limites laterais a direita e a esquerda, isto é,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0 + h) \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0 - h)^2, \quad \text{existem}$$

quando  $h$  tende a zero por valores positivos.

Seja  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  e consideremos

$$\int_0^{\infty} \exp(-st) f(t) dt, \quad (6.1)$$

onde  $s$  é uma variável real. Quando  $f$  é suficientemente bem comportada, que será feito preciso mais adiante, esta integral convergirá para certos valores de  $s$ , denindo uma função de  $s$ , chamada de transformada de Laplace de  $f$ , e será representada por  $L[f]$  ou  $L[f](s)$ .

Como exemplo vamos determinar  $L[\cos(at)]$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos(at)] &= \int_0^{\infty} \exp(-st) \cos(at) dt \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \int_0^{t_0} \exp(-st) \cos(at) dt \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \left[ \frac{\exp(-st_0)}{s^2 + a^2} (a \sin(at_0) - s \cos(at_0)) + \frac{s}{s^2 + a^2} \right] \\ &= \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0, \end{aligned}$$

pois este limite existe se  $s > 0$ .

Observe que para (6.1) existir devemos exigir que  $f$  seja dominada por alguma exponencial, assim  $e^{-st} f(t)$  tende para zero rapidamente quando  $t$  cresce. Mais precisamente, vamos introduzir o seguinte conceito

Definição 6..1 Dizemos que  $f$  é de ordem exponencial em  $[0, \infty)$  se existem constantes  $C > 0$  e  $\alpha$  tais que

$$|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}, \forall t > 0. \quad (6.2)$$

São exemplos de funções de ordem exponencial,  $f(t) = C$  (constante) e

$$t^n, e^{at}, \sin(bt), \cos(at), e^{at} t^n \sin(bt), e^{at} t^n \cos(bt).$$

Como consequência também são funções de ordem exponencial, os polinômios e os polinômios trigonométricos.

Para simplificar a linguagem, uma função de ordem exponencial satisfazendo (6.2) será chamada de função de ordem exponencial  $\alpha$ .

Teorema 6..2 (Condições suficientes para a existência de L) Se  $f$  é contínua por partes e de ordem exponencial, então existe um real  $\alpha$  tal que

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

converge para todos os valores de  $s > \alpha$ .

Demonstração: Como  $f$  é de ordem exponencial, existem  $C > 0$  e  $\alpha$  reais tais que

$$|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}.$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\infty} \exp(-st) f(t) dt \right| &\leq C \int_0^{\infty} \exp(-s(-\alpha)t) dt \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{C}{s - \alpha} [1 - \exp(-(s - \alpha)t_0)] \\ &= \frac{C}{s - \alpha}, \text{ se } s > \alpha. \end{aligned}$$

Logo, a transformada de Laplace de toda função de ordem exponencial existe, mas e a recíproca? Uma função cuja transformada de Laplace existe é necessariamente de ordem

exponencial? A resposta é não, pois a função  $f(t) = 1/\sqrt{t}$  tem transformada de Laplace dada por  $\sqrt{\pi}/(2*s^{3/2})$  embora não seja de ordem exponencial. Também,  $e^{t^2}$  não é função de ordem exponencial.

Assim, o conjunto das funções que possuem transformada de Laplace contém propriamente o conjunto E das funções contínuas por partes e de ordem exponencial. O conjunto E é o suficiente para a maioria das nossas aplicações.

## 7. Propriedades

Vamos representar por E o conjunto de todas as funções contínuas por partes e de ordem exponencial. Note que E munido das operações usuais de soma de funções e de multiplicação de escalar real por função, é um espaço vetorial real. Por F vamos representar o conjunto de todas as funções reais definidas em intervalos da forma  $(a_0, \infty)$  ou  $[a_0, \infty)$ ,  $a_0 \geq -\infty$ . Em F adotamos a seguinte definição modificada de soma de funções: se f e g pertencem a F definimos  $f + g$  como sendo a função cujo domínio é a interseção dos domínios de f e g, e cujo valor em qualquer ponto s da interseção é  $f(s) + g(s)$ . Desta maneira segue que L é um operador linear entre E e F. Vamos resumir este comentário com o seguinte resultado.

**Teorema 7.1 (Linearidade L)** Sejam f e g pertencentes a E e  $k \in \mathbb{R}$ . Então,  $L[kf + g](s) = kL[f](s) + L[g](s)$ . Cuidado ao dizer que L é um operador linear. É preciso deixar bem claro esta noção, pois se considerarmos  $f(t) = 1$  e  $g(t) = -f(t)$ , então  $L[f] + L[g]$  é a função nula no intervalo  $(0, \infty)$ , enquanto  $L[f + g] = L[0]$  é função nula no  $(-\infty, \infty)$ . Assim, só podemos dizer que  $L[f + g]$  e  $L[f] + L[g]$  são iguais para aqueles valores de s onde ambas as funções estão definidas. Esta dificuldade pode ser contornada se concordarmos que duas funções de F são idênticas quando elas coincidem em algum intervalo da forma  $(a, \infty)$ .

**Teorema 7.2 (Lerch)** Sejam f e g pertencentes a E. Suponha que existe  $s_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $L[f](s) = L[g](s)$ ,  $\forall s > s_0$ . Então,  $f(t) = g(t)$ ,  $\forall t > 0$ , exceto possivelmente nos pontos de descontinuidade.

A demonstração será omitida. Observe que o teorema acima diz que L é injetora. 2

**Teorema 7.3 (Comportamento assintótico de  $L[f]$ )** Se  $f \in E$ , então,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}[f](s) = 0.$$

Demonstração: Como existem constantes  $C > 0$  e  $\alpha$  tais que

$$|\mathcal{L}[f](s)| \leq \frac{C}{s - \alpha}, \quad \forall s > \alpha,$$

o resultado segue imediatamente.

Teorema 7.4 (Fórmulas Elementares) Sejam  $f, g \in \mathcal{E}$  e  $a \in \mathbb{R}$ , então

|    | $g$               | $\mathcal{L}[g]$   |
|----|-------------------|--|
| 1  | $\cos(at)$        | $\frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0$   |
| 2  | $\sin(at)$        | $\frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$   |
| 3  | 1                 | $\frac{1}{s}, s > 0$   |
| 4  | $t^n$             | $\frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0, n \in \mathbb{N}$                            |
| 5  | $\exp(at)$        | $\frac{1}{s-a}, s > a$   |
| 6  | $f'$              | $s\mathcal{L}[f] - f(0^+), \text{ se } f' \in \mathcal{E}$               |
| 6' | $f''$             | $s^2\mathcal{L}[f] - sf(0^+) - f'(0^+), \text{ se } f'' \in \mathcal{E}$ |
| 7  | $\exp(at)f$       | $\mathcal{L}[f](s-a), 1^\circ$ deslocamento na variável $s$              |
| 8  | $tf(t)$           | $-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f](s),$  |
| 9  | $t^n f(t)$        | $(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}[f](s),$                             |
| 10 | $\int_0^t f(u)du$ | $\frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s),$  |

Teorema 7.5 ( $1^\circ$  teorema do deslocamento na variável  $s$ ) Seja  $f$  função contínua por partes e de ordem exponencial. Então,

$$\mathcal{L}[e^{at}f] = \mathcal{L}[f](s-a).$$

Demonstração: A demonstração é imediata e deixamos como exercício. Assim, podemos escrever imediatamente:

| $f(t)$                 | $\mathcal{L}[f]$                    |
|------------------------|-------------------------------------|
| $e^{at}t^n$            | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$            |
| $e^{at}\cos(\omega t)$ | $\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$    |
| $e^{at}\sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$ |

Para o próximo resultado precisamos da função degrau unitário  $u_a(t)$  definida por

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq a \\ 1, & \text{se } t > a. \end{cases}$$

A função degrau unitário é útil para escrever funções como esta

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq a \\ \sin(t - a), & \text{se } t > a. \end{cases}$$

Com efeito,  $f(t) = u_a(t) \sin(t - a)$ .

É fácil determinar que

$$\mathcal{L}[u_a(t)] = \frac{e^{-as}}{s}.$$

Teorema 7.6 (2<sup>o</sup> teorema do deslocamento) Seja  $f(t) = u_a(t)g(t-a)$ ,  $a \geq 0$ , função contínua por partes e de ordem exponencial. Então,

$$\mathcal{L}[f] = \exp(-as)\mathcal{L}[g].$$

Demonstração: É imediato e deixamos como exercício.

Teorema 7.7 (Mudança de Escala) Seja  $f$  função contínua por partes e de ordem exponencial e  $a > 0$ . Então,

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right).$$

Teorema 7.8 (Transformada de Laplace da derivada) Seja  $f'(t)$  é função contínua por partes e de ordem exponencial. Então,

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f] - f(0+).$$

Demonstração: A prova decorre de uma integração por partes. De fato,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f'(t) dt \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} [e^{-st} f(t)]_0^b + s \int_0^b e^{-st} f(t) dt \\
&= s\mathcal{L}[f](s) - f(0+).
\end{aligned}$$

Corolário 7.9 Se  $f^{(n)}$  é contínua por partes e de ordem exponencial em  $[0, \infty)$ , então é fácil obter

$$\mathcal{L}[f^{(n)}] = s^n \mathcal{L}[f] - s^{n-1} f(0+) - s^{n-2} f'(0+) - \dots - f^{(n-1)}(0+).$$

Demonstração: A prova segue por indução.

Teorema 7.10 (Transformada de Laplace de integrais)

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u) du\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f].$$

Demonstração:

Se  $G(t) = \int_0^t f(u) du$ , então  $G'(t) = f(t)$  e  $G(0) = 0$ . Logo,

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[G'] = s\mathcal{L}[G] - G(0) = s\mathcal{L}[G],$$

e assim  $\mathcal{L}[G] = 1/s * \mathcal{L}[f]$ .

Teorema 7.11 (Transformada de Laplace de funções periódicas) Se  $f$  é ordem exponencial e de período  $p$ , então

$$\mathcal{L}[f] = \frac{1}{1 - \exp(-ps)} \int_0^p \exp(-st) f(t) dt.$$

Demonstração: Por denição e fazendo  $x = t - Np$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f] &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{np}^{(n+1)p} \exp(-st) f(t) dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nps) \int_0^p \exp(-sx) f(x) dx \\
&= \frac{1}{1 - \exp(-ps)} \int_0^p \exp(-sx) f(x) dx,
\end{aligned}$$

de onde segue o resultado.

## 8. A Inversa da Transformada de Laplace

Na determinação da solução de uma EDO usando a transformada de Laplace devemos reconstruir a solução  $y(t)$  conhecendo-se a sua transformada  $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ . O operador que retorna  $y(t)$  a partir de  $\mathcal{L}(y)$  é a transformada inversa de Laplace. Escrevemos

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) \quad \text{ou} \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}(y)].$$

Observe que o Teorema 7.2, Teorema de Lerch, diz que a transformação linear  $\mathcal{L}(y)$  é injetora. Assim, se denotamos por  $L(E)$  a sua imagem temos que

$$L : E \rightarrow L(E)$$

$$f \rightarrow L(f)$$

é inversível. Como a inversa de uma transformação linear é também linear, temos que  $L^{-1}$  é linear.

Assim temos o seguinte resultado,

**Teorema 8.1** Se  $F = \mathcal{L}[f]$  e  $G = \mathcal{L}[g]$ , então,  $\mathcal{L}^{-1}[kF + G](s) = kf + g$ .

A tabela da página 21 pode ser usada no cálculo de  $\mathcal{L}^{-1}[F]$ .

## 9. Frações Parciais

No trabalho com  $L$ , em geral, nos deparamos com expressões racionais  $F(s) = P(s)/Q(s)$ , onde  $P(s)$  e  $Q(s)$  são polinômios. Para determinar a inversa  $L^{-1}(F)$  é conveniente decompor  $F$  em frações o mais simples possível. Fazemos isto usando o método das frações parciais.

Como  $F(s) \rightarrow 0$  quando  $s \rightarrow \infty$ , podemos considerar apenas o caso em que o grau de  $P$  é menor do que o grau de  $Q$  e sem fatores em comum.

Primeiro caso: Fatores Lineares Distintos:

Se  $Q(s)$  só tem fatores lineares não repetidos, por exemplo,

$$Q(s) = (s - a_1)(s - a_2) \cdots (s - a_n),$$

então decomponmos  $F$  em frações do tipo

$$F(s) = \frac{A_1}{s - a_1} + \cdots + \frac{A_n}{s - a_n}.$$

Como exemplo, decomponha

$$F(s) = \frac{s^2 + 3s - 6}{s(s - 1)(s - 2)}.$$

Como o denominador só tem fatores lineares não repetidos

$$Q(s) = s(s - 1)(s - 2),$$

vamos determinar  $A$ ,  $B$  e  $C$  tais que

$$\frac{s^2 + 3s - 6}{s(s - 1)(s - 2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - 1} + \frac{C}{s - 2}.$$

Realizando uma conta simples, obtemos  $A = -3$ ,  $B = 2$  e  $C = 2$ . Logo, temos que

$$\frac{s^2 + 3s - 6}{s(s-1)(s-2)} = -\frac{3}{s} + \frac{3}{s-1} + \frac{2}{s-2}$$

Segue que a determinação de  $L^{-1}(F)$  agora é mais fácil. De fato,

$$L^{-1}(F)(s) = -3 + 2 \exp(t) + 2 \exp(2t).$$

Segundo caso: Fatores Lineares Repetidos: Se  $Q(s)$  tem fatores lineares repetidos, a cada fator linear repetido  $ax + b$  que aparece  $n$  vezes no denominador, corresponde uma soma de  $n$  frações parciais da forma

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n},$$

onde  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são constantes a serem determinadas.

Por simplicidade vamos supor que  $Q(s)$  tem um único fator linear  $(s - a)$  repetido  $m = 2$  vezes, isto é, em  $Q(s)$  aparece o fator  $(s - a)^m$ . Neste caso  $Q(s)$  tem a forma

$$Q(s) = (s - a)^m (s - b_1) \dots (s - b_n),$$

e então devemos procurar por constantes  $A_1, A_2, B_1, \dots, B_n$  tais que

$$F(s) = \frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \frac{B_1}{s-b_1} + \dots + \frac{B_n}{s-b_n}.$$

Se existem mais termos lineares repetidos devemos incluir termos como os dois primeiros da igualdade acima.

Como exemplo, decomponha

$$F(s) = \frac{s}{(s-1)^2}.$$

Como o denominador tem fatores lineares repetidos,  $Q(s) = (s - 1)^2$ , vamos determinar  $A$  e  $B$

$$\frac{s}{(s-1)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2}.$$

Realizando uma conta simples, obtemos  $A = B = 1$ . Logo, temos que

$$\frac{s}{(s-1)^2} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Segue que

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(s) = t \exp(t) + \exp(t).$$

Terceiro caso: Fatores distintos do segundo grau: A cada fator do segundo grau irredutível  $ax^2 + bx + c$  que aparece uma vez no denominador, corresponde uma fração parcial da forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c},$$

onde A, B e C são constantes a serem determinadas.

Quarto caso: Fatores repetidos de segundo grau: A cada fator do segundo grau irredutível  $ax^2 + bx + c$  que aparece n vezes no denominador, corresponde uma soma de n frações parciais da forma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n},$$

onde  $A_i, B_i$  são constantes a serem determinadas.

Na teoria da transformada de Laplace sempre é possível usar números complexos.

## 10. Teorema da Convolução

Uma questão que surge naturalmente é como expressar  $\mathcal{L}^{-1}[F G]$ . É isto que vamos tentar responder agora.

Dadas funções  $f$  e  $g$ , representamos a convolução entre elas por  $f * g$  e definimos por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du.$$

Note que valem as seguintes propriedades de demonstração imediata:

- (a)  $f * g = g * f$
- (b)  $f * (g + h) = f * g + f * h$
- (c)  $f * (kg) = k(f * g), \forall k \in \mathbb{R}$
- (d)  $1 * f = \int_0^t f(u)du$
- (e)  $1 * f' = f(t) - f(0)$

**Teorema 10.1 (Teorema da Convolução)** Sejam  $f$  e  $g$  contínuas por partes e de ordem exponencial tais que  $F(s) = L[f]$  e  $G(s) = L[g]$ . Então, vale a seguinte relação  $L^{-1}[F G] = f * g$ .

Como exemplo, consideremos  $F(s) = \frac{1}{s^2}$  e  $G(s) = \frac{1}{s^2+1}$  e  $Y(s) = F(s)G(s)$ . Vamos determinar  $y(t)$  tal que  $L[y] = Y$ .

Notemos que  $L[t] = F$  e  $L[\sin(t)] = G$ . Pelo teorema da convolução, temos que

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2+1} \right] \\ &= \int_0^t (t-u) \sin(u) du \\ &= -(t-u) \cos(u) - \sin(u) \Big|_0^t \\ &= -\sin(t) + t. \end{aligned}$$