

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA
CAMPUS DE BAURU**

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**UMA ADAPTAÇÃO DO MÉTODO BARREIRA PENALIDADE
QUASI-NEWTON AO PROBLEMA DE FLUXO
DE POTÊNCIA ÓTIMO**

Paulo Sérgio Campanha

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Bauru, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Bauru

2011

**UMA ADAPTAÇÃO DO MÉTODO BARREIRA PENALIDADE
QUASI-NEWTON AO PROBLEMA DE FLUXO
DE POTÊNCIA ÓTIMO**

Paulo Sérgio Campanha

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Bauru, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

ORIENTADORA: Prof. Dr^a. Edméa Cássia Baptista

COORIENTADORA: Prof. Dr^a. Vanusa Alves de Sousa

Bauru

2011

Campanha, Paulo Sérgio.

UMA ADAPTAÇÃO DO MÉTODO BARREIRA PENALIDADE QUASI-
NEWTON AO PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO /
Paulo Sérgio Campanha, 2011

117 folhas

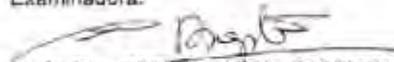
Orientadora: Prof^a. Dr^a. Edméa Cássia Baptista
Coorientadora: Prof^a. Dr^a. Vanusa Alves de Souza

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual
Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2011

1. função penalidade. 2. função barreira. 3.
métodos quasi-Newton. 4. fluxo de potência ótimo. I.
Universidade Estadual Paulista. Faculdade de
Engenharia. II. Título.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE Mestrado de PAULO SÉRGIO CAMPANHA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, DO(A) FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU.

Aos 17 dias do mês de agosto do ano de 2011, às 14:00 horas, no(a) ANFITEATRO DA SEÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO DA FACULDADE DE ENGENHARIA, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Profa. Dra. EDMEA CASSIA BAPTISTA do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru, Prof. Dr. GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA do(a) Departamento de Engenharia Elétrica / Escola de Engenharia de São Carlos-Usp, Prof. Dr. ANTONIO ROBERTO BALBO do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE Mestrado de PAULO SÉRGIO CAMPANHA, intitulado "UMA ADAPTAÇÃO DO MÉTODO BARREIRA PENALIDADE QUASE-NEWTON AO PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO". Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que, após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.


Profa. Dra. EDMEA CASSIA BAPTISTA


Prof. Dr. GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA


Prof. Dr. ANTONIO ROBERTO BALBO

PROPOSTA DE ALTERAÇÃO DO TÍTULO

A BANCA EXAMINADORA PROPÕE A ALTERAÇÃO DO TÍTULO DO ALUNO: **PAULO SÉRGIO CAMPANHA**

DE: "UMA ADAPTAÇÃO DO MÉTODO BARREIRA PENALIDADE QUASE-NEWTON AO PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO"

PARA:

ALTERAÇÃO DA PALAVRA "QUASE" PARA
QUASI

Bauri, 17 de agosto de 2011.


Prof.ª Dr.ª Edmea Cassia Baptista
Orientador

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Antonia e Rubens “in memoriam”,
pela herança da vocação do saber.

A esposa e filha, Heloisa e Paula, pela tolerância,
paciência e envolvimento.

AGRADECIMENTOS

A DEUS por ter permitido.

A orientadora, Prof. Dra. Edméa Cássia Baptista pela dedicação, talento, competência e incalculável conhecimento.

A coorientadora, Prof. Dra. Vanusa Alves de Sousa pela disposição e contribuição técnica.

Aos docentes e coordenadores pelos ensinamentos de alto nível e incentivo, em especial ao Prof. Dr. Antonio Roberto Balbo pelo inestimável apoio e encorajamento.

Aos colegas de curso pela troca de idéias e experiências, nas aulas, bem como em trabalhos conjuntos, notadamente a Maria Cláudia Savio Masiero pelo incentivo e entusiasmo contagiante.

A todos os funcionários, da seção de pós-graduação, dos departamentos de engenharia elétrica e matemática, pelos bons serviços prestados.

A todos que de forma direta ou indireta contribuíram para que este trabalho fosse uma realidade, meus mais sinceros agradecimentos.

SUMÁRIO

LISTA DE ABREVEATURAS E SIGLAS.....	1
LISTA DE SÍMBOLOS.....	3
LISTA DE FIGURAS E TABELAS.....	6
RESUMO.....	7
ABSTRACT.....	8
CAPÍTULO 1	
INTRODUÇÃO.....	9
CAPÍTULO 2	
HISTÓRICO DO PROBLEMA DO FPO.....	12
CAPÍTULO 3	
REVISÃO DE MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO.....	24
3.1 Apresentação do problema.....	24
3.2 O método dual-lagrangiano.....	24
3.2.1 Algoritmo.....	25
3.2.2 Interpretação geométrica.....	26
3.2.3 Dificuldades computacionais.....	29
3.3 O método de penalidade.....	29
3.3.1 Algoritmo.....	30
3.3.2 Interpretação geométrica.....	31
3.3.3 Dificuldades computacionais.....	34
3.4 O método de barreira.....	34
3.4.1 Algoritmo.....	35
3.4.2 Interpretação geométrica.....	36
3.4.3 Dificuldades computacionais.....	38
3.5 O Método quasi-Newton.....	38
3.5.1 Construção da Inversa.....	38
3.5.2 Método de Broyden (correção posto 1).....	40
3.5.3 Método de Davidon-Fletcher-Powell (DFP).....	42
3.5.4 Família Broyden.....	44

CAPÍTULO 4

O MÉTODO BARREIRA PENALIDADE QUASI-NEWTON	47
4.1 Apresentação do método.....	47
4.2 O problema de barreira penalidade.....	48
4.3 Estratégia para aplicação das condições de otimalidade.....	48
4.3.1 Equivalência entre as condições de otimalidade.....	49
4.4 O método de barreira penalidade quasi-Newton.....	50
4.5 Atualização da matriz M do método quasi-Newton.....	51
4.6 Atualização das variáveis primais e duais.....	51
4.7 Função mérito.....	52
4.8 Atualização do parâmetros de penalidade σ	52
4.9 Atualização do parâmetro de barreira μ	52
4.10 Algoritmo.....	53

CAPÍTULO 5

O MÉTODO FUNÇÃO LAGRANGIANA BARREIRA PENALIDADE ADAPTADA (FLBPA)	54
5.1 Apresentação do problema.....	54
5.2 A função lagrangiana barreira penalidade adaptada.....	54
5.3 Método da função lagrangiana barreira penalidade adaptada.....	55
5.4 Algoritmo.....	58

CAPÍTULO 6

O PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO	59
6.1 Introdução.....	59
6.2 Formulação do problema de FPO.....	60
6.3 A FLBPA associada ao problema de FPO.....	63
6.4 O método da FLBPA aplicado ao problema de FPO.....	65
6.5 Implementação computacional.....	69

CAPÍTULO 7

RESULTADOS	73
7.1 Problema numérico teste.....	73
7.2 Problemas de FPO.	75

7.2.1 Sistema elétrico teste de 3 barras.....	75
7.2.2 Sistema IEEE 14 barras.....	80
7.2.3 Sistema IEEE 30 Barras.....	81
7.2.4 Sistema IEEE 162 Barras.....	83

CAPÍTULO 8

CONCLUSÕES.....	85
------------------------	-----------

APÊNDICE A

BANCO DE DADOS DOS SISTEMAS ELÉTRICOS.....	87
---	-----------

APÊNDICE B

TENSÕES E TAPS NA ÚLTIMA ITERAÇÃO DOS SISTEMAS.....	98
--	-----------

BIBLIOGRAFIA.....	102
--------------------------	------------

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FPO	- fluxo de potência ótimo;
PL	- programação linear;
PNL	- programação não-linear;
SUMT	- Sequential Unconstrained Minimization Technique;
BFGS	- método de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno;
BFG	- método de Broyden-Fletcher-Goldfarb;
FP	- fluxo de potência;
DE	- despacho econômico;
SEP	- sistema elétrico de potência;
KKT-	- Karush-Kuhn-Tucker;
TRALM	- método da função Lagrangiana aumentada baseada na região de confiança;
SCIPM	- método de ponto interior primal-dual passo controlado;
CCV	- custo variável restrito (FPOR) de uma maneira coordenada;
AVR	- reguladores automáticos de voltagem
PCMBA	- método da barreira modificada preditor-corretor;
FPOR	- fluxo de Potência Ótimo Reativo;
APP	- princípio de problema auxiliar;
MPID	- método de pontos interiores coordenação decomposição;
DFP	- método de Davidon-Fletcher-Powell;
FLBPA	- função lagrangiana barreira penalidade adaptada;
NPSOL	- Nonlinear Programming of Systems Optimization Laboratory (Haward);
EESOR	- Engineering Economic Systems and Operations Research;
PBM	- método dos multiplicadores barreira/penalidade;
PCA	- método de penalidade e conjunto ativo;
PD	- método primal-dual;
BLPD	- método da função barreira logarítmica primal-dual;
MVA	- Mega Volts Ampere;
MW	- Mega Watts;
AEP	- American Electrical Power;
IEEE	- Institute of Electrical and Electronics Engineers;

LOSE	- Laboratório de Otimização de Sistemas Elétricos;
EESC	- Escola de Engenharia de São Carlos;
USP	- Universidade de São Paulo;
CHESF	- Companhia Energética do São Francisco;
CESP	- Companhia Energética de São Paulo;
NB	- número de barras da rede elétrica;
NBC	- número de barras de carga;
NBCR	- número de barras de controle reativo;
NT	- número de transformadores;
p.u.	- por unidade;
SL	- barra de geração (<i>slack</i>);
CR	- barra de controle reativo;
CG	- barra de carga;
It.	- iteração;
It. Ext.	- iteração externa;
F. Ob.	- função objetivo;
Ang_k	- ângulo da barra k;
Pot.	- potência;
P	- potência ativa;
Q	- potência reativa;
MW	- mega watts;
MVAr	- mega Volt Ampère Reativo;
PD	- primal dual;
BLPD	- barreira logaritmica primal dual

LISTA DE SÍMBOLOS

- $f(x)$ - função objetivo;
- $g(x)$ - vetor das restrições de igualdade;
- $h(x)$ - vetor das restrições de desigualdade do tipo “menor ou igual”;
- x - vetor das variáveis primais;
- R - conjunto dos números reais;
- L - função Lagrangiana;
- V – magnitude de tensão elétrica;
- t - *tap* do transformador;
- θ - ângulo de fase de tensão;
- $P(x)$ - função penalidade associada ao problema primal;
- $\Theta(y)$ - função penalidade associada às restrições de igualdade;
- $\Lambda(y)$ - função penalidade associada às restrições de desigualdade;
- $V(\epsilon)$ - problema primal de minimização com restrições de igualdade e perturbado;
- S_x - conjunto representado em um plano oyz ;
- $B(x)$ - função barreira associada ao problema primal;
- J - matriz Jacobiana;
- S - matriz aproximação do inverso da hessiana;
- M - matriz aproximação da hessiana;
- μ - parâmetro de barreira;
- σ - parâmetro de penalidade;
- c - fator de barreira;
- s - vetor das variáveis de folga;
- s_a - variável auxiliar de relaxação
- λ, π - vetor dos multiplicadores de Lagrange associados às igualdades;
- μ_ϵ - parâmetro de perturbação;
- d - direção de busca;
- α - passo;
- $H, Hess, W$ - matriz hessiana;
- $\Psi(x)$ - função mérito;
- \in - pertence a;

- La - função Lagrangiana aumentada;
- ∇_x - vetor gradiente com relação à x;
- γ - parâmetro escalar entre 0 e 1;
- i, j, k, l - número inteiro;
- m, n, r - número inteiro;
- ∂ - operador derivada;
- Φ - parâmetro que pode assumir qualquer valor real;
- B(x) - função barreira;
- P(x) - função penalidade;
- Λ - matriz dos multiplicadores de lagrange;
- Σ - vetor dos parâmetros de penalidade;
- ξ - limite de convergência;
- \mathfrak{S} - limite para o passo;
- z, si, s - vetores de variáveis auxiliares;
- P_k - potência ativa na barra k;
- Q_k - potência reativa líquida injetada na barra k;
- V_k - magnitude da tensão na barra k;
- θ_k - ângulo de fase da tensão na barra k;
- θ_V - barra de referência;
- PV - barra de tensão controlada;
- PQ - barra de carga;
- ΔP_k - variação da potência ativa na barra k;
- ΔQ_k - variação da potência reativa na barra k;
- P_k^{esp} - potência ativa especificada na barra k;
- Q_k^{esp} - potência reativa especificada na barra k;
- P_k^G - potência ativa gerada na barra k;
- P_k^C - potência ativa consumida na barra k;
- Q_k^G - potência reativa gerada na barra k;
- P_k^C - potência reativa consumida na barra k;
- $\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$ - ângulo da tensão nas barras k e m, respectivamente;
- $Y_{km} = G_{km} + jB_{km}$ - admitância da linha entre as barras k e m;

Ω_k - conjunto de todas as barras vizinhas a barra k, mais a própria barra k;

\underline{V}_k - limite inferior da tensão na barra k;

\bar{V}_k - limite superior da tensão na barra k;

\underline{Q}_k - limite inferior da potência reativa na barra k;

\bar{Q}_k - limite superior da potência reativa na barra k;

λ_{P_i} - multiplicador de Lagrange associado à equação ΔP_i ;

λ_{Q_j} - multiplicador de Lagrange associado à equação ΔQ_j e

I - matriz identidade

LISTA DE FIGURAS E TABELAS

Figura 3.1- Representação geométrica da função lagrangiana	28
Figura 3.2 - Representação geométrica da função lagrangiana para o caso não convexo	28
Figura 3.3 - Representação geométrica da função penalidade	32
Figura 3.4 - Representação geométrica da atualização dos fatores de penalidade	33
Figura 3.5 - Representação geométrica da função penalidade para o caso não convexo	33
Figura 3.6 - Comportamento da função barreira	37
Figura 3.7 - Resolução através da função barreira	37
Figura 6.1 - Modelo utilizado para a variável <i>tap</i> do transformador	63
Figura 6.2 - Fluxograma do programa de FPO.....	70
Figura 7.1 – Sistema elétrico de 3 barras	76
Figura 7.2 – Sistema IEEE 14 barras	80
Figura 7.3 – Sistema IEEE 30 barras.....	82
Tabela 7.1 - Processo de convergência do problema numérico teste	75
Tabela 7.2 – Limites para as tensões e reativos do sistema teste de 3 barras.....	78
Tabela 7.3 - Convergência do sistema teste de 3 barras para o método da FLBPA...78	
Tabela 7.4 - Multiplicadores de Lagrange	79
Tabela 7.5 - Variáveis de folga.....	79
Tabela 7.6 - Variáveis auxiliares.....	79
Tabela 7.7 - Processo de otimização do sistema IEEE 14 barras para o método da FLBPA.....	81
Tabela 7.8 - Processo de otimização do sistema IEEE 30 barras para o método da FLBPA.....	83
Tabela 7.9 - Processo de otimização do sistema IEEE 162 barras para o método da FLBPA.....	84

RESUMO

CAMPANHA, P. S. (2011). *Uma adaptação do método barreira penalidade quasi-Newton ao problema de fluxo de potência ótimo*. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia de Bauru, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru, 2011.

Resumo: Nesse trabalho propõe-se uma adaptação do método barreira penalidade quasi-Newton apresentado por P. Armand em 2003, para a resolução do problema do Fluxo de Potência Ótimo (FPO). Este método é denominado de método da função lagrangiana barreira penalidade adaptada. Neste método as restrições de desigualdade são transformadas em igualdade pelo uso de variáveis de folga positivas. Estas variáveis são relaxadas, utilizando-se variáveis auxiliares positivas, as quais, são incorporadas na função objetivo através de um termo de penalização. O novo problema restrito é então transformado em irrestrito associando a uma função lagrangiana às restrições de igualdade e uma função barreira penalidade às restrições de desigualdade. O algoritmo é composto por um ciclo interno e um externo. No ciclo interno é utilizado um método quasi-Newton para o cálculo das direções de busca e é determinado o tamanho do passo. No ciclo externo os parâmetros de barreira e penalidade são atualizados através de regras pré-definidas até que as condições de KKT sejam satisfeitas. Testes computacionais foram realizados utilizando problemas matemáticos e o problema de FPO, os quais demonstram a eficiência da adaptação proposta.

Palavras Chaves: função penalidade, função barreira, métodos quasi-Newton, fluxo de potência ótimo.

ABSTRACT

CAMPANHA, P.S. (2011). An adaptation of the quasi-Newton penalty barrier method on optimal power flow problem. Dissertation (Master's degree) – Faculdade de Engenharia de Bauru, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru, 2011.

Abstract: This work proposes an adaptation of the quasi-Newton penalty barrier method presented by P. Armand in 2003, for the solution of the Optimal Power Flow (OPF) problem. This method is called method adapted penalty barrier lagrangian function. In this method the inequalities constraint are transformed in equality by adding non-negative slack variable. These variables are relaxed by positive auxiliary variables which are incorporated in the objective function through a penalty term. The new constraint problem is transformed in unconstraint by associating an lagrangian function for handling the equality constraint and an penalty barrier function for treating the inequality constraints. The algorithm is composed by an internal and external cycle. In the internal cycle is used the quasi-Newton method to determine the search directions and the step size is calculated. In the external cycle the barrier and penalty parameters are updated through predefined rules until the KKT conditions are satisfied. Computational tests were accomplished using mathematical problems and the OPF problem which demonstrate the efficiency of the propose adaptation.

Keywords: penalty function, barrier function, quasi-Newton methods, Optimal Power Flow.

CAPITULO 1

INTRODUÇÃO

As aplicações da otimização estendem-se a problemas de previsão e planejamento, programação de produção de estoque, automação, otimização de processos, entre outros. Antes de 1940, relativamente, muito pouco tinha sido desenvolvido sobre métodos para otimização numérica de funções de muitas variáveis. Vários métodos de otimização foram desenvolvidos após o surgimento do computador. Em programação linear (PL) destacamos o método simplex, desenvolvido na década de 40, por Dantzig, com o objetivo de alocar recursos durante a segunda grande guerra mundial. Em programação não-linear (PNL), os primeiros métodos eram bastante restritos. Tornaram-se significativos no final da década de 50 com a introdução dos métodos de métrica variável, por Davidon, capazes de solucionar problemas de muitas variáveis.

A PNL não possui um método geral de resolução dos seus problemas. Suas técnicas, para resolver um problema restrito podem ser classificadas, basicamente, pelo tipo de problema que será abordado. Dentre os métodos utilizados para programação não linear destacamos neste trabalho os de penalidade, os de barreira e os quasi-Newton.

Os métodos de penalidade são utilizados na resolução de problemas restritos. Eles transformam o problema restrito em irrestrito, ou uma sequência destes, através de uma função auxiliar que penaliza a não satisfação das restrições. Os métodos de penalidade foram utilizados pela primeira vez por Courant (1943). Em seu trabalho, foi apresentada uma função penalidade para resolver problemas restritos de igualdade; essa função penalizava a soma dos quadrados das restrições violadas, com o uso de um fator penalidade. No entanto, o método popularizou-se pelo trabalho clássico de Fiacco & McCormick (1968) – publicado com o título de *Sequential Unconstrained Minimization Technique (SUMT)*- que era voltado para a resolução de problemas práticos por meio da utilização de funções penalidades. Podemos também citar Zangwill (1967), Himenblau (1972), Bazaraa *et al.* (1993), Fletcher (1985) e Luenberger (1984), para um estudo mais detalhado de tal função. O método de penalidade apresenta alguns problemas de mal condicionamento da matriz hessiana em razão do crescimento excessivo do fator penalidade.

Da mesma forma que os métodos de penalidade, os métodos de barreira transformam o problema restrito em um problema irrestrito, ou uma sequência deles. Eles introduzem as restrições na função objetivo através de um fator de barreira, que penaliza a aproximação de um ponto factível à fronteira da região factível. É utilizado para a resolução de problemas com restrições de desigualdade, cujo interior é não vazio. Pode ser visto como um caso particular do método de penalidade, mas diferencia-se deste por exigir uma penalização interna, ou seja, por trabalhar no interior da região factível, utilizando uma função auxiliar que cresce indefinidamente próxima à fronteira e uma sequência decrescente de fatores de barreira.

A função barreira logarítmica, foi estudada por Frisch (1955) para problemas de programação convexa. Outra função barreira, denominada função barreira inversa foi proposta por Carrol (1961), sob o nome de *Created Response Surface Technique*. O método de barreira foi realmente popularizado por Fiacco & McCormick (1968), que realizaram um estudo teórico mais detalhado do método e desenvolveram um novo; “misturando” a função barreira e a função penalidade em uma mesma função auxiliar. Uma versão revisada desse trabalho pode ser encontrada em Fiacco & McCormick (1990).

O método de quasi-Newton é utilizado na otimização irrestrita. É intermediário entre a simplicidade do método gradiente e a rapidez do método de Newton. Este método, ao invés de calcular a inversa da matriz hessiana, aproxima esta inversa em um processo iterativo finito, utilizando apenas derivadas de primeira ordem. É analiticamente o método mais sofisticado para problemas irrestritos.

Um dos primeiros métodos de minimização de uma função não linear usando a abordagem quasi-Newton, é a de Davidon(1959) que foi simplificada e reformulada por Fletcher e Powel(1963) e é chamado como método métrico variável. Uma generalização útil do método de Davidon-Fletcher-Powel foi proposta por Broyden(1970). Essencialmente Broyden introduziu o grau de liberdade atualizando a matriz . Uma escolha particular desse grau de liberdade foi em seguida proposta por Broyden (1970), Fletcher(1970), Goldfarb(1970), e Shanno(1970), levando-se a conhecida técnica de atualização BFGS (inicial dos nomes dos idealizadores). Gill, Murray, e Pitfield(1972), entre muitos outros, demonstraram a eficiência maior dessa modificação com relação ao método original, para a maioria dos problemas.

Neste trabalho propõe-se uma abordagem que utiliza os métodos de penalidade, barreira e quasi-Newton. Ela é uma adaptação do método de Armand (2003). Nessa

abordagem as restrições de desigualdades são transformadas em igualdades utilizando variáveis de folga positivas.

Estas variáveis são relaxadas através de variáveis auxiliares positivas, as quais são incorporadas à função objetivo através de um termo de penalização.

O novo problema restrito é então transformado em irrestrito associando uma função lagrangiana as restrições de igualdade e uma função barreira penalidade às restrições de desigualdade.

Para testar o desempenho da nova abordagem escolhemos o problema de FPO, estudado na área de Sistemas Elétricos de Potência (SEP), na engenharia elétrica

A solução do problema de fluxo de potência é uma prática comum nos estudos de sistemas elétricos de potência. O ajuste das variáveis de controle, por exemplo, *taps* dos transformadores, depende da experiência dos operadores. O FPO aparece neste contexto como uma ferramenta de apoio aos engenheiros das empresas de energia elétrica, pois determina o ponto de operação ótimo de um sistema de energia elétrica, isto é, as variáveis de controle ótimas, otimizando uma função objetivo e satisfazendo as restrições de operação. O problema de FPO foi proposto por Carpentier (1962), no início da década de 60, a partir do problema de despacho econômico (DE). Varias técnicas foram utilizadas para resolver o FPO, entre elas citamos: técnicas do gradiente, penalidade, barreira, lagrangiana aumentada, métodos de pontos interiores entre outros. Nos últimos anos, praticamente quase todas as pesquisas envolvendo o problema de FPO são baseadas nas variantes dos métodos de pontos interiores Wu e Debs (2001); Nejdawie Clements (2000), Souza(2004).

O modelo de FPO considerado neste trabalho, é o despacho ótimo de potência reativa, na qual os controles ativos são fixados, e as variáveis de controle relacionadas com a potência reativa são otimizados em relação à função objetivo. A função objetivo utilizada é a de perdas de potência ativa na transmissão, e o conjunto de restrições é formado por: equação de balanço e fluxo de potência e limites de tensão, *tap* de transformadores e de geração de potência reativa .

O trabalho encontra-se dividido como segue: no capítulo 2, apresenta-se o histórico do FPO; no capítulo 3 apresenta-se a revisão matemática dos métodos utilizados neste trabalho; no capítulo 4 o método barreira penalidade quasi-Newton; no capítulo 5 o método função lagrangiana barreira penalidade adaptada; no capítulo 6 a aplicação do método desenvolvido ao problema do FPO; no capítulo 7 os resultados são apresentados e finalmente no capítulo 8 as conclusões.

CAPITULO 2

HISTÓRICO DO PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO

Neste capítulo apresentamos uma breve exposição do desenvolvimento histórico do FPO. Este desenvolvimento histórico foi em parte baseado em Baptista (2001) e Souza (2006).

Historicamente o FPO foi originado por uma nova formulação para o problema de Despacho Econômico (DE). O DE tem sido utilizado em concessionárias de eletricidade, para determinar o quanto cada unidade geradora deve produzir de potência para atender à demanda total do sistema ao menor custo. Um sistema elétrico de potência (SEP) deve ser planejado para fornecer energia elétrica, respeitando os padrões de qualidade para esse fornecimento e garantindo a continuidade do serviço.

O problema de FPO pode ser representado matematicamente através de um problema geral de otimização com restrições de igualdade e desigualdade como:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a.: } g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p \\ h_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \\ \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \end{aligned}$$

em que :

$x^T = (V, \theta, t) \in R^n$: vetor das variáveis de estado e controle;

V : Tensão elétrica;

θ : ângulo de defasagem;

t : tap dos transformadores;

$f(x)$: função objetivo que representa o desempenho do sistema;

$g(x) = 0$: vetor que corresponde às equações do fluxo de potência;

$h(x) \leq 0$: vetor que corresponde as inequações funcionais do fluxo de potência;

\underline{x} e \bar{x} : limites inferiores e superiores das variáveis, respectivamente.

O vetor das variáveis x representa a magnitude de tensão (V), ângulos (θ) e tap dos transformadores (t). A função objetivo, $f(x)$, representa neste trabalho, as perdas de potência ativa na transmissão. Essa função é não separável e não permite

simplificações. As restrições de igualdade $g_i(x)$, $i = 1, \dots, p$, são as equações do fluxo de potência as quais são obtidas impondo-se o princípio da conservação de potência ativa e reativa em cada barra da rede. As restrições de desigualdade $h_j(x)$, $j = 1, \dots, m$, representam as restrições funcionais como: os limites de potência reativa nas barras de geração e controle de tensão e os limites de fluxos ativos e reativos nas linhas de transmissão.

No início da década de 60, surgiram os primeiros trabalhos sobre FPO. Nesse período, destacamos Carpentier (1962), o qual propôs um modelo geral para o problema de FPO, por meio da incorporação das equações de fluxo de potência ao problema de DE, e utilizou o teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para resolvê-lo. Seu modelo é um problema de otimização restrita, não-linear, não convexo e de grande porte, cujo desenvolvimento acompanha os avanços das técnicas de otimização. Tem por objetivo determinar o ponto ótimo de operação de um sistema elétrico de potência. Pode ser caracterizado como um problema de otimizar uma função objetivo, a qual representa um desempenho do sistema, sujeito a restrições de igualdade, que representam as equações do fluxo de potência, e de desigualdade, que representam as restrições funcionais e as variáveis de estado. Sua formulação matemática é dada pelo problema (2.1).

Carpentier resolveu (2.1) transformando-o em um problema irrestrito por meio da função lagrangiana clássica. O mínimo desse problema é alcançado aplicando-se as condições de otimalidade, o que resulta em um sistema não-linear. Esse sistema é resolvido pelo método de Gauss-Seidel, obtendo-se, assim, a solução do problema.

Após a formulação matemática do FPO por Carpentier, inúmeros trabalhos com novas técnicas de otimização e/ou com mudanças na modelagem do problema aplicados ao FPO foram publicados na literatura especializada. Essas técnicas de otimização diferem entre si basicamente pela trajetória do processo de otimização e as variações na modelagem do problema, incluem o uso de outros tipos de funções objetivo e de outras restrições. A seguir será apresentado um histórico com as propostas de resolução do problema de FPO nas últimas décadas.

As primeiras propostas para resolver o problema de FPO, utilizavam técnicas do gradiente, conhecidos como métodos de primeira ordem. Um dos primeiros trabalhos nesta linha foi o de Dommel e Tinney (1968), no qual os autores propuseram uma abordagem que utilizava o método do gradiente reduzido para resolver o problema de FPO. Esse trabalho tornou-se um clássico na área. O método proposto baseia-se na

procura de uma solução ótima através de um algoritmo de passo descendente. É um método no qual após mudanças nas variáveis de controle, as equações do Fluxo de Potência são resolvidas pelo método de Newton. Neste, as restrições funcionais de desigualdade são tratadas por parâmetros de penalidade e multiplicadores de Lagrange são usados para associar as equações do fluxo de potência à função objetivo. Utiliza-se a técnica de projeção do gradiente para as variáveis de controle que atingem um de seus limites. Para atualização das variáveis de controle utiliza-se um passo, determinado por uma busca unidimensional. O método tem uma eficiência de primeira ordem para a minimização da função objetivo. Apesar do seu rigor matemático, essa abordagem apresenta convergência lenta, “zigzagueando” próxima à solução ótima. Existem, ainda, limitações na determinação do tamanho do passo das variáveis de controle e sensibilidade quanto ao tamanho do passo do gradiente – elementos capazes de comprometer o processo de convergência.

Sasson (1969), apresentou uma abordagem para solução do problema de FPO, na qual utiliza dois métodos: o método de Powell, usado na resolução de problemas de otimização com restrição, e o método Fletcher-Powell, que é uma técnica de minimização irrestrita. O problema de FPO é escrito de acordo com o método de Powell, o qual torna-o um problema irrestrito. Esse método acrescenta novas variáveis ao problema, as quais são reduzidas durante o processo iterativo. Aplica-se, então o método Fletcher-Powell, que calcula o gradiente da função gerada pelo método de Powell. As restrições de igualdade são consideradas durante todo o processo iterativo, enquanto que, somente as restrições de desigualdade violadas fazem parte do processo. Essa técnica verifica a convergência em cada estágio do processo de otimização. Embora o método funcione muito bem para sistemas pequenos, apresentou problemas de convergência com sistemas de grande porte e técnicas de decomposição devem ser usadas. Além disso, é limitado por ser incapaz de lidar com mais que duas restrições por nó.

Sasson *et al.* (1973) aplicaram o método de penalidade ao problema de FPO. Esta técnica tem o objetivo de tornar o problema restrito em irrestrito, penalizando todas as restrições de igualdade e desigualdade que são violadas. É uma técnica quadrática onde as variáveis são todas atualizadas simultaneamente, usando a matriz hessiana da função objetivo penalizada. A cada iteração do método os valores das penalidades são aumentados, e a matriz hessiana da função penalidade é calculada. O processo é repetido até que todas as restrições sejam satisfeitas. Técnicas de esparsidade são

aplicadas à matriz hessiana da função penalidade. À medida que, os fatores de penalidade crescem, a matriz hessiana da função penalidade pode se tornar mal condicionada, comprometendo a convergência do processo de otimização. Este foi o primeiro trabalho a utilizar a matriz hessiana da função lagrangiana na resolução do FPO.

Com o objetivo de corrigir as deficiências do método proposto por Dommel e Tinney (1968), Rashed e Kelly (1974) introduziram uma abordagem de segunda-ordem para atualização das variáveis de controle do problema. Nesse trabalho, o método do gradiente utilizado para resolver o subsistema formado pelas derivadas da função lagrangiana em relação as variáveis de controle foi substituído pela matriz hessiana da função lagrangiana. As restrições de igualdade representadas pelas equações do Fluxo de Potência, são incorporadas à função lagrangiana por meio dos multiplicadores de Lagrange enquanto que, as restrições de desigualdade são incorporadas por meio de parâmetros de penalidade. A eficiência da abordagem proposta foi examinada resolvendo um sistema de 5 barras.

Sun *et al.* (1984) apresentaram uma nova abordagem na qual utilizaram uma formulação do método de Newton e o desacoplamento do problema em dois subproblemas, denominados subproblema de potência ativa e subproblema de potência reativa. As restrições de igualdade são incorporadas à função objetivo por meio da utilização dos multiplicadores de Lagrange, e as restrições de desigualdade por meio de multiplicadores de Lagrange e fatores de penalidade, originando uma função auxiliar. As restrições são divididas em dois grupos: o grupo das restrições penalizadas e o grupo das restrições consideradas ativas na solução. As restrições ativas são incorporadas à função objetivo por meio de multiplicadores de Lagrange. O método do conjunto ativo foi utilizado para identificar as restrições ativas na solução. O ponto ótimo do problema ocorre quando as condições de otimalidade de KKT estiverem satisfeitas, e as equações do fluxo de potência tradicional estiverem dentro de uma determinada tolerância. O método de Sun *et al.* apresenta a convergência de segunda ordem e tem como desafio no desenvolvimento do algoritmo a identificação do conjunto de restrições de desigualdade ativas na solução.

Santos *et al.* (1988) aplicaram o método da função lagrangiana aumentada para resolver problemas de FPO. Este método está baseado nas técnicas de programação não-linear e combina aproximações duais e penalidades. A cada iteração a função lagrangiana aumentada é minimizada em relação as variáveis primais utilizando o

método de Newton. Os multiplicadores de Lagrange são aplicados as restrições de igualdade e desigualdade, sendo atualizados visando a maximização da função dual lagrangiana aumentada associada ao problema original. Como este método controla o aumento do parâmetro de penalidade, o problema de mal condicionamento da matriz hessiana da função lagrangiana é evitado. Logo, esse método pode ser considerado um aperfeiçoamento do método proposto por Sun *et al.* (1984). Tem como vantagem o fato de não precisar identificar as restrições de desigualdade que são ativas na solução. A solução é obtida quando todas as restrições de igualdade e desigualdade são satisfeitas dentro de uma tolerância especificada.

Costa *et al.* (1990) apresentaram uma nova abordagem resultante da associação dos métodos propostos por Sun *et al.* (1984) e Santos *et al.* (1988). Os autores trabalharam com o método de Newton e com uma abordagem da função lagrangiana aumentada, em que as restrições de igualdade não são penalizadas. Nesse método não há necessidade de identificar as restrições de desigualdade ativas na solução, eliminando-se, assim, o desafio do algoritmo de Sun *et al.* (1984). As restrições de igualdade são tratadas pelo método de Newton.

Em Huneault e Galiana (1991) encontramos um amplo estudo das metodologias aplicadas na resolução do FPO desde sua formulação por Carpentier.

Monticelli e Liu (1992) propuseram uma nova abordagem do método de Newton para resolver problemas de FPO. Os autores combinaram os métodos dos multiplicadores de Lagrange e da função penalidade. A principal diferença deste método e do proposto por Sun *et al.* (1984), está na utilização de um movimento adaptativo da penalidade, o qual assegura que a matriz hessiana da função lagrangiana seja definida positiva durante o processo de solução do problema, sem que isso afete a convergência do método.

Granville (1994), utilizou pela primeira vez, um método de pontos interiores denominado método primal-dual barreira logarítmica. Esse método utiliza multiplicadores de Lagrange para as restrições de igualdade e transforma as desigualdades em igualdades utilizando variáveis de folga. Essas variáveis são incorporadas à função objetivo por meio da função barreira logarítmica e penalizadas com um fator de barreira, o qual tenderá a zero. Este algoritmo apresenta muita sensibilidade quanto à escolha do fator de barreira, podendo até mesmo divergir, em alguns casos. A solução é encontrada quando todas as restrições do problema original forem satisfeitas.

Nos estudos na área de pontos interiores, destacam-se, ainda, Wu *et al.* (1994), os quais sugerem uma extensão do método primal-dual. O algoritmo é denominado método preditor-corretor, diferenciando-se do método primal-dual pela introdução de termos não-lineares nas condições de otimalidade.

Quintana *et al.* (1995) trabalharam com o método primal-dual barreira logarítmica e apresentaram um algoritmo que resolve diretamente a minimização de perdas na transmissão (funções não-lineares).

Torres *et al.* (1998) propuseram a resolução do problema de FPO na forma retangular e não polar; dessa forma, justificaram que, tanto a função objetivo quanto as restrições são quadráticas. Aplicaram o método visto em Granville (1994) e apresentaram técnicas para a escolha do passo, para a redução do fator de barreira e para o uso de um método preditor-corretor.

Momoh *et al.* (1999a,b) apresentaram uma ampla revisão sobre técnicas para resolução do problema de FPO. Dividiram as técnicas em seis categorias: programação não-linear, em que citam as técnicas de minimização seqüencial irrestritas, o método de Lagrange e o método da lagrangiana aumentada; programação quadrática, referindo-se aos métodos quasi-Newton e de sensibilidade; solução das condições de otimalidade baseadas em Newton, em que são obtidas as condições de KKT; programação linear, onde comentam sobre a utilização do método simplex e do método simplex revisado; versão híbrida de programação inteira, em que apresentaram uma mistura de técnicas de programação linear e inteira; e, finalmente, os métodos de pontos interiores, no qual encontra-se a aplicação das técnicas que surgiram após a introdução do método de Karmarkar.

Em Nejdawi *et al.* (2000) é proposto um algoritmo de programação quadrática seqüencial para resolver o problema de FPO. O algoritmo é formado por um ciclo de linearização externo e um ciclo de otimização interno. O ciclo interno resolve um problema de programação quadrática reduzido e relaxado. Como a relaxação das restrições mantém o problema com uma dimensão pequena, o algoritmo é considerado, pelos autores, muito eficiente. As iterações do ciclo externo podem ser comparadas ao FPO de Newton, e as do ciclo interno, como eficientes iterações de pontos interiores. São apresentados testes computacionais para os sistemas IEEE de 30, 57, 118 e 300 barras. Os autores observaram que o número de iterações internas e externas não sofreu grandes alterações para as diferentes dimensões dos problemas.

Costa *et al.*(2000) apresentaram uma comparação entre três abordagens de otimização para resolver o problema de FPO: penalidade e conjunto ativo (PCA), primal-dual (PD) e barreira logarítmica primal-dual (BLPD). As três abordagens são baseadas no método de Newton. O desempenho dos métodos foi comparado considerando: as perdas ativa na transmissão, a geração de potência reativa, o número total de iterações para convergência e o tempo de processamento. Os resultados obtidos mostram que cada método tem vantagens e desvantagens e os autores recomendam uma mistura deles, explorando as qualidades de cada um. Os autores apresentaram testes computacionais para os sistemas IEEE 30, 57 e 118 barras.

Costa e Costa (2000) desenvolveram uma nova abordagem com o objetivo de melhorar o desempenho do método de Newton para o problema de FPO. Nela, os multiplicadores de Lagrange são calculados diretamente do sistema linearizado, e a fatoração ocorre por elementos e não na forma da estrutura em blocos. Essa abordagem apresenta como vantagens: a diminuição do tempo de processamento e a economia de memória. Os autores apresentaram uma comparação entre o novo método e o método tradicional de Newton, proposto por Sun *et al.* (1984), e resultados computacionais para os sistemas elétricos: IEEE de 14, 30 e 118 barras e BRASIL 810 barras.

Costa (2002) apresentou uma nova abordagem para o problema de despacho ótimo de reativos, baseado em uma função lagrangiana aumentada do problema original. As condições necessárias de primeira ordem de KKT são resolvidas pelo método de Newton modificado. Neste método, a informação de segunda ordem do sistema original de equações é aproximada e a informação de primeira ordem é mantida intacta. O método de Newton modificado utiliza uma aproximação da matriz hessiana considerando somente os termos da diagonal principal. Segundo o autor, o método proposto requer menos memória computacional que outros algoritmos atualmente disponíveis. A eficiência da abordagem proposta foi examinada resolvendo os sistemas IEEE 30 barras e o equivalente brasileiro sul-sudeste.

Adibi *et al.* (2003) aplicaram o método da lagrangiana aumentada barreira modificada para a seleção ótima da posição do *tap* de transformadores e no conjunto de pontos da tensão dos geradores com seus limites de operação sobre e sub-excitado, uma variação do problema de FPO. A abordagem da lagrangiana aumentada barreira modificada é uma combinação do método da lagrangiana aumentada para restrições de igualdade de Hestenes (1969) e Powell (1969) e do método da função barreira modificada de Polyak (1992). Nessa abordagem, as restrições de desigualdade são

tratadas com um termo de barreira modificada e as de igualdade com um termo de lagrangiana aumentada. Segundo os autores a principal dificuldade do método está relacionada com as primeiras atualizações dos multiplicadores de Lagrange. Os autores afirmam que a necessidade de encontrar uma estimativa para o mínimo irrestrito a cada passo sem um critério de parada bem fundamentado pode tornar a fase inicial do processo computacional lenta e difícil. A viabilidade do método é demonstrada usando um sistema teste de 160 barras em operação numa indústria.

Sousa *et al.* (2003) apresentaram uma nova abordagem para solução do problema de despacho ótimo de reativos, a qual melhora o desempenho do método de Newton. O método divide as restrições de desigualdade em dois grupos: restrições tratadas por penalidade e as tratadas pelo método BLPD. As restrições de desigualdade como as magnitudes das tensões e os *tap* dos transformadores que violam seus limites são penalizadas e associadas à função objetivo por meio de termos de penalidade. Enquanto que as do segundo grupo, as injeções de potência reativa são tratadas pelo método BLPD. A função lagrangiana é construída e multiplicadores de Lagrange são associados às restrições de igualdade do problema. As condições de necessárias de primeira ordem são aplicadas à função lagrangiana, gerando um sistema de equações não-lineares, o qual é resolvido pelo método de Newton e pela atualização dos termos de penalidade e de barreira. Testes foram realizados nos sistemas CESP 53 e IEEE 118 barras, nos quais se verificou a eficiência do método.

Baptista *et al.* (2006) apresentaram uma nova abordagem para minimização das perdas em sistemas elétricos de potência. Esta abordagem considera a aplicação do método primal-dual barreira logarítmica para a magnitude de tensão e para os *taps* variáveis dos transformadores e as demais restrições são tratadas através do método da lagrangiana aumentada. A função lagrangiana agrega todas as restrições. As condições necessárias de primeira-ordem são obtidas pelo método de Newton, e pela atualização das variáveis duais e fatores de penalidade. Os resultados dos testes numéricos com os sistemas 162 barras e o brasileiro sul-sudeste mostram o bom desempenho do algoritmo.

Sousa e Costa (2007) propuseram uma nova abordagem para resolver o problema de despacho ótimo de reativos, com base na abordagem de Newton e o método BLPD. Uma função lagrangiana é associada ao problema modificado. As condições de otimalidade necessárias de primeira ordem são satisfeitas pelo método de Newton e pela atualização dos termos de penalidade e barreira. A abordagem proposta não exige que o conjunto de ligação de restrições seja identificado e pode ser utilizada a partir de um

ponto de partida infactível. A eficácia da abordagem proposta foi analisada pela resolução dos sistemas Brasil 53 e 662 barras.

Wang *et al.* (2007) afirmaram que o mercado da eletricidade desregulamentado solicita para o FPO ferramentas que podem proporcionar a) uma convergência determinista; b) cálculo preciso dos preços; c) suporte de custo de uma variedade de recursos e serviços, tais como: energia real, energia reativa, suporte de tensão, etc; d) a modelagem do Fluxo de Potência ativo e reativo dos sistemas de grande porte. A maioria das pesquisas anteriores sobre FPO tem-se centrado em questões de desempenho no contexto dos sistemas regulados, sem dar muita ênfase às exigências a)-c). Os autores discutiram, neste trabalho, os desafios computacionais criados pela desregulamentação e tentaram resolvê-los através da introdução de novas formulações de FPO e algoritmos. O método da função lagrangiana aumentada baseada na região de confiança (TRALM), o método de ponto interior primal-dual passo controlado (SCIPM) e custo variável restrito (CCV) foram métodos propostos para a nova formulação do FPO. As novas formulações e algoritmos, juntamente com vários outros existentes, são testadas e comparadas com modelos de sistemas de energia de grande porte.

Belati e Costa (2008) apresentaram uma nova abordagem para o problema de alocação de perdas na transmissão em um sistema desregulado. Esta abordagem pertence ao conjunto de métodos incrementais. Estes métodos tratam todas as restrições da rede elétrica, ou seja, controle, estado e restrições funcionais. A abordagem foi baseada no teorema ótimo de perturbação. A partir de um determinado ponto de operação ótimo, obtido pelo FPO, as cargas são perturbadas e um novo ponto de operação ótimo que satisfaça as restrições é determinada pela análise de sensibilidade. Esta solução é utilizada para obter a alocação dos coeficientes de perdas para os geradores e cargas da rede elétrica. Os resultados numéricos comparam a abordagem proposta com outros métodos obtidos aplicados à rede de transmissão conhecida, IEEE 14 barras. Outros testes enfatizaram a importância de se considerar as restrições de operação da rede elétrica. O método foi aplicado a um sistema equivalente ao sistema Brasil, composto de 787 barras, e o método foi comparado com a técnica utilizada em 2008, pelo Centro de Controle Brasileiro.

Belati *et al.* (2008) propuseram uma abordagem de sensibilidade ótima aplicada no circuito terciário de controle de geração automática. A abordagem é baseada no teorema de perturbação não-linear. De um ponto de operação ótimo obtido pelo FPO, o novo ponto de operação ótimo é determinado diretamente, após uma perturbação, ou

seja, sem a necessidade de um processo iterativo. Este novo ponto de operação ótimo satisfaz as restrições do problema para pequenas perturbações nas cargas. Os fatores de participação e do ponto de ajuste da tensão dos reguladores automáticos de voltagem (AVR) dos geradores são determinados pela técnica de sensibilidade ótima, considerando os efeitos da minimização de perdas de potência ativa e as restrições da rede elétrica. Os fatores de participação e de ponto de ajuste da tensão dos geradores são fornecidas diretamente para um programa computacional de simulação dinâmica do controle de geração automática, nomeado por modo de sensibilidade de potência. Os resultados dos testes foram apresentados para mostrar o bom desempenho desta abordagem.

Sousa *et al.* (2009) apresentaram uma nova abordagem, barreira modificada preditor-corretor (PCMBA), para minimizar as perdas de potência ativa em estudos de planejamento de sistemas elétricos. No PCMBA, as restrições de desigualdade são transformadas em igualdades através da introdução de variáveis auxiliares positivas, que são relaxadas pelo parâmetro de barreira, e tratadas pelo método de barreira modificada. As condições necessárias de primeira ordem da função lagrangiana são resolvidas pelo método de Newton preditor-corretor. A perturbação das variáveis auxiliares resulta em uma expansão da região factível do problema original, atingindo os limites das restrições de desigualdade. A viabilidade da abordagem proposta foi demonstrada utilizando vários sistemas teste do IEEE e um sistema de potência real de 2.256 barras correspondente ao sistema interligado sul-sudeste brasileiro. Os resultados mostraram que a utilização do método preditor-corretor com a abordagem barreira modificada acelera a convergência do problema em termos de número de iterações e tempo computacional.

Belati *et al.* (2010) mostraram uma abordagem para a alocação de perdas na transmissão ativa entre os agentes do sistema elétrico. A abordagem utiliza informações das variáveis primais e duais do FPO na estratégia de alocação das perdas. Os coeficientes de alocação são determinados através de multiplicadores de Lagrange. Este trabalho enfatizou a necessidade de considerar as restrições de operação e parâmetros dos sistemas na solução do problema. Como exemplo, foi apresentado em detalhes um sistema de 3 barras, bem como um teste comparativo com os principais métodos de alocação. O estudo do sistema IEEE 14 barras foi realizado para verificar a influência das restrições e dos parâmetros de alocação de perdas no sistema.

Echeverri *et al.* (2010) aplicaram dois métodos de decomposição matemática para executar o Fluxo de Potência Ótimo Reativo (FPOR) de uma maneira coordenada e descentralizada no contexto de um sistema de energia interligado multi-área. O primeiro método é baseado em uma abordagem lagrangiana aumentada usando o princípio de problema auxiliar (APP). O segundo método usa as técnicas de decomposição baseadas nas condições de otimalidade de primeira ordem de KKT. A viabilidade de cada método que foi utilizado na decomposição de multi-área FPOR foi estudada e os correspondentes modelos matemáticos são apresentados. Os sistemas IEEE RTS-96, o IEEE 118 barras e um sistema didático 9 barras foram usados para demonstrar o funcionamento e a eficácia dos métodos de decomposição.

Souza *et al.* (2010) apresentaram estudos de caso em sistemas de potência pela Análise de Sensibilidade (AS), orientados pelo problema de FPO em diferentes cenários de operação. Os estudos de casos começam a partir de uma solução ótima obtida pelo FPO. Esta solução ótima é chamada caso-base, e a partir desta solução, novos pontos de operação podem ser avaliados pela AS quando ocorrer perturbações no sistema. A AS é baseada no teorema de Fiacco e tem a vantagem de não ser um processo iterativo. Com a finalidade de mostrar o bom desempenho dos estudos técnicos propostos, foram realizados testes nos sistemas padrão IEEE 14, 118 e 300 barras.

Finalmente, Yan *et al.* (2011) mostraram o método de pontos interiores coordenação-decomposição (MPID) aplicado ao problema de FPOR. Neste método, a zona distribuída do problema de FPOR é primeiramente formada introduzindo variáveis de fronteira duplicada. Em seguida, o método não-linear primal-dual de pontos interiores é diretamente aplicado no problema de FPOR no qual um sistema de Newton com (matrizes bloco diagonal) é formulado. O problema é resolvido nas iterações de decomposição com sistema de Newton desacoplado. A proposta do MPID herda o bom desempenho do tradicional método de pontos interiores com um recurso apropriado para cálculos distribuídos entre várias áreas. Isto pode ser facilmente estendido para outros problemas de otimização de sistemas de energia. Foram apresentados resultados numéricos de cinco sistemas teste do IEEE e foram feitas comparações com os resultados obtidos usando o tradicional método do problema de principio auxiliar (APP) citados em Echeverri *et al.* (2010). Os resultados mostraram que o MPID para a multi-área do problema de FPOR requer menos iterações e menor tempo de CPU, tem melhor estabilidade na convergência e atinge melhor otimalidade em relação ao método APP.

No próximo capítulo apresenta-se uma revisão dos métodos de otimização os quais fornecem a sustentação teórica para a abordagem proposta.

CAPÍTULO 3

REVISÃO DE MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO

Neste capítulo apresentamos uma revisão de métodos de otimização restrita e irrestrita os quais fornecem suporte teórico para a apresentação da adaptação do método de Armand (2003). Serão vistos: o método dual-lagrangiano, o método de penalidade, o método de barreira, para a otimização restrita (conforme Bazaraa *et al* – 1993) e o método quasi-Newton para otimização irrestrita (conforme Luenberger e Ye – 2008).

3.1 Apresentação do problema

Todos os métodos apresentados a seguir têm por objetivo resolver problemas de programação não-linear restritos da forma:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a.: } g_i(x) = 0, i = 1, \dots, p \\ h_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.1)$$

em que: $x \in R^n, g(x) \in R^p, h(x) \in R^m$, e as funções são de classe C_2 .

3.2 O método dual-lagrangiano

O método dual-lagrangiano foi desenvolvido para resolver problemas convexos. Sua estratégia é a de associar ao problema (3.1) uma função auxiliar, que incorpora uma combinação das restrições à função objetivo. A função auxiliar é denominada função lagrangiana e é apresentada da seguinte forma:

$$L_{(x,\lambda,\mu)} = f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x) \quad (3.2)$$

onde λ é vetor dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade, e μ é vetor dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade.

Se o problema (3.1) é convexo, existem multiplicadores λ^* e μ^* que, aplicados ao problema irrestrito,

$$\min_x L(x, \lambda^*, \mu^*) \quad (3.3)$$

fazem com que a solução de (3.3) coincida com a solução de (3.1). A solução ótima é encontrada quando as condições de KKT forem satisfeitas. O problema (3.3) é denominado problema Lagrangiano.

3.2.1 Algoritmo

Passo inicial

Dado o problema (3.1), construa a função lagrangiana (3.2).

Faça $k = 0$.

Escolha um ponto inicial $x^0 \in E_n$, um vetor multiplicador de Lagrange λ^0 associado às restrições de igualdade e um vetor multiplicador de Lagrange μ^0 , às restrições de desigualdade.

Passo iterativo

PI1) Resolva o seguinte problema lagrangiano utilizando um método de otimização restrita para λ^k e μ^k , fixos:

$$\min_x f(x) + (\lambda^k)^T g(x) + (\mu^k)^T h(x)$$

Admita x^{k+1} como uma solução e vá para **PI2**);

PI2) Se x^{k+1} satisfaz KKT, **PARE**. Caso contrário, atualize os multiplicadores utilizando uma heurística, determinando $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \Delta\lambda^k$, $\mu^{k+1} = \mu^k + \Delta\mu^k$, e volte para **PI1**).

Observamos que, para gerar os multiplicadores, podemos utilizar vários algoritmos. Uma escolha é o algoritmo do gradiente, que gera uma subsequência de multiplicadores atualizando-os em cada passo pela expressão:

$$\begin{bmatrix} \lambda^{k+1} \\ \mu^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^k \\ \mu^k \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} g(x) \\ s \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

onde $s_j = \begin{cases} h_j(x), & \text{se } \mu_j^k > 0 \\ \max\{0, h_j(x)\}, & \text{se } \mu_j^k = 0 \end{cases}$, e α é estimado para garantir a busca da variável dual, podendo-se fazer uma busca unidimensional.

3.2.2 Interpretação geométrica

Seja o seguinte problema perturbado, somente com uma restrição de desigualdade, denominado problema primal:

$$\mu(\varepsilon) = \min\{f(x) : h(x) \leq \varepsilon, x \in E_n\}. \quad (3.5)$$

Definimos um conjunto S , tal que:

$$S = \{(y, z) / y = h(x), z = f(x), x \in E_n\}, \quad (3.6)$$

representado em um plano Oyz. O problema primal tem por objetivo determinar um ponto em S , que é um mínimo, com $y \leq 0$. Seja, então, (y^*, z^*) a solução ótima do problema primal, a qual pode ser vista na Figura 3.1.

Para $\mu \geq 0$, temos o seguinte problema lagrangiano:

$$\begin{aligned} \theta(\mu) &= \min L(x, \mu) \\ \text{s.a. } &x \in X \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde $L(x, \mu) = f(x) + \mu h(x)$.

Determinar $\theta(\mu)$ significa minimizar $z + \mu y$ sobre S . Assim, temos as retas:

$$z + \mu y = a_i, i = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.8)$$

onde $-\mu$ é a inclinação (coeficiente angular) da reta, e a_i é a intersecção desta com o eixo z (coeficiente linear).

Para minimizarmos a função lagrangiana do problema (3.7), movemos as retas dadas em (3.8) sobre S , a partir de um a_i pertencente à região factível, na direção contrária ao gradiente destas, através de retas paralelas, até que elas tangenciem a fronteira de S , como o visto na Figura 3.1. Observamos que $\theta(\mu)$ é o valor no qual a reta corta o eixo z , determinando o hiperplano suporte.

Para que a solução do problema irrestrito aproxime-se da solução do problema (3.1), redefinimos o novo multiplicador, fazendo:

$$\mu^{k+1} = \mu^k + \Delta\mu^k, \quad (3.9)$$

e determinamos novamente $\theta(\mu)$. Isso corresponde a uma nova família de retas, onde será realizado o mesmo processo anterior. À medida que o multiplicador de Lagrange aproxima-se do valor ótimo μ^* , as soluções de $\theta(\mu)$ aproximam-se da solução de (3.1), como pode ser visto na Figura 3.1.

A solução ótima dual é μ^* , o valor objetivo ótimo é z^* , e a solução ótima primal é x^* .

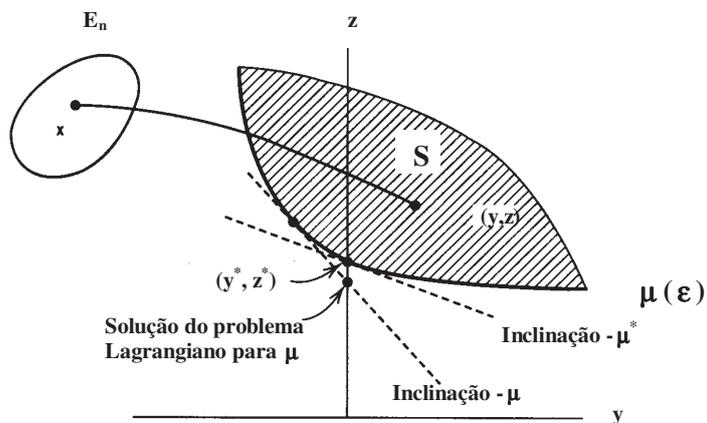


Figura 3.1 - Representação geométrica da função lagrangiana (Fonte: Bazaraa)

No caso de problemas não convexos em torno da solução, o método dual-lagrangiano pode falhar no encontro da solução ótima do problema (2.1) em razão da presença do *gap* de dualidade (ver Figura 3.2).

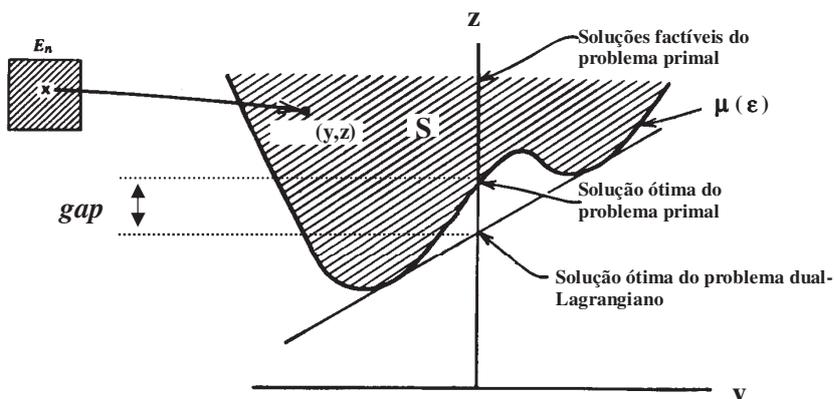


Figura 3.2 - Representação geométrica da função lagrangiana para o caso não convexo (Fonte: Bazaraa)

3.2.3 Dificuldades computacionais

Como pôde ser visto na interpretação geométrica, representada pela Figura 3.2, para problemas não convexos em torno da solução, pode ocorrer a existência do *gap* de dualidade e , portanto, o método dual-lagrangiano não obtém a solução ótima do problema. Uma outra desvantagem do método é o aumento do número de variáveis do problema.

3.3 O método de penalidade

Seguindo a “idéia” de associar ao problema (3.1) uma seqüência de problemas irrestritos, a estratégia do método da função penalidade é a utilização de uma função auxiliar onde as restrições são introduzidas na função objetivo através de um fator de penalidade, o qual penaliza alguma violação destas. Esse método gera uma seqüência de pontos infactíveis, cujo limite é a solução ótima do problema original.

A função auxiliar tem a forma $f(x) + c P(x)$, sendo c denominado fator de penalidade, e $P(x)$, função penalidade associada a (3.1), dada por:

$$P(x) = \sum_{i=1}^p \Theta(g_i(x)) + \sum_{j=1}^m \Lambda(h_j(x)) \quad (3.10)$$

onde Θ e Λ são funções contínuas de uma variável y , tais que:

$$\Theta(y) = 0, \text{ se } y = 0 \quad \text{e} \quad \Theta(y) > 0, \text{ se } y \neq 0 \quad (3.11)$$

$$\Lambda(y) = 0, \text{ se } y \leq 0 \quad \text{e} \quad \Lambda(y) > 0, \text{ se } y > 0 \quad (3.12)$$

As funções (3.11) e (3.12) podem assumir as seguintes formas:

$$\Theta(y) = |y|^p \quad (3.13)$$

$$\Lambda(y) = [\max\{0, y\}]^p \quad (3.14)$$

onde p é um inteiro positivo. Para $p = 2$, em (3.13) e (3.14) a função $P(x)$ é denominada função penalidade quadrática.

O problema penalizado consiste em:

$$\min_x f(x) + cP(x) \quad (3.15)$$

para $c > 0$. Temos que, à medida que $c \rightarrow \infty$ e $P(x) \rightarrow 0$, a solução do problema penalizado converge para a solução do problema original.

3.3.1 Algoritmo

Passo inicial

Dado o problema (3.1), construa a função penalidade $P(x)$ dada em (3.10).

Faça $k = 0$.

Escolha uma solução inicial $x^0 \in E_n$, um fator de penalidade $c^0 > 0$, um parâmetro de penalidade $\beta > 1$ e uma tolerância de convergência $\xi > 0$.

Passo iterativo:

PI1) Resolva o seguinte problema, utilizando um método de minimização irrestrita, para c^k fixo:

$$\min_x f(x) + c^k P(x)$$

Admita x^{k+1} como uma solução e vá para **PI2**).

PI2) Se $c^k P(x^{k+1}) < \xi$, **PARE**. Caso contrário, atualize $c^{k+1} = \beta c^k$, faça $k=k+1$ e volte a **PI1**)

3.3.2 Interpretação geométrica

Seja o seguinte problema perturbado, somente com uma restrição de igualdade:

$$V(\varepsilon) = \min\{f(x) : g(x) = \varepsilon, x \in E_n\} \quad (3.16)$$

Definimos um conjunto S representado em um plano Oyz , tal que:

$$Sx = \{(y, z) / y = g(x), z = f(x), x \in E_n\} \quad (3.17)$$

Tomamos $V(\varepsilon)$ como o contorno inferior deste conjunto, como pode ser visto na Figura 3.3.

Para $c > 0$ fixo, temos o seguinte problema penalizado:

$$\min_x f(x) + cg^2(x) \quad (3.18)$$

Determinar o mínimo de (3.18) significa minimizar $z + cy^2$ sobre S . Assim, temos as parábolas:

$$z + cy^2 = a_i, i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.19)$$

onde $a_i \in R$ é a intersecção da parábola com o eixo z (ver Figura 3.3).

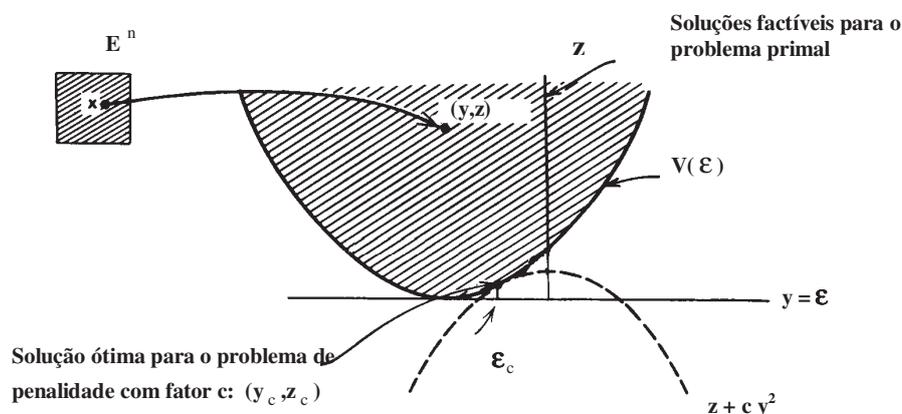


Figura 3.3 - Representação geométrica da função penalidade (Fonte: Bazaraa)

No processo de minimização de (3.19), começamos com um valor a_i pertencente ao interior da região factível. A determinação da solução ótima de (3.18) consiste em mover as curvas de nível, isto é, as parábolas, na direção contrária à do gradiente, até o ponto onde a curva tangencia o conjunto S , como vemos na Figura 3.3. Observamos que a solução para o problema penalizado não é a mesma do problema original, pois $g \neq 0$ nesse ponto de tangência.

Na Figura 3.4 pode ser visto que, para aproximar tal solução, aumenta-se o fator de penalidade $c' = \beta c$, diminuindo-se a abertura da parábola, representada por (3.19); assim o ponto de tangência dessas parábolas torna-se mais próximo da solução ótima do problema original. À medida que $c \rightarrow \infty$, o ponto de tangência aproxima-se do ótimo, ou seja, da solução do problema (3.1).

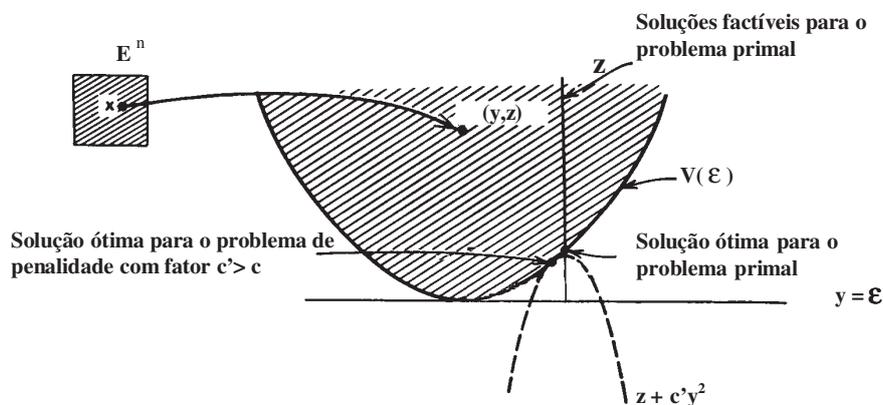


Figura 3.4 - Representação geométrica da atualização dos fatores de penalidade (Fonte: Bazaraa)

No caso não convexo em torno da solução, como mostra a Figura 3.5, podemos atingir a solução contrariamente ao método dual-lagrangiano.

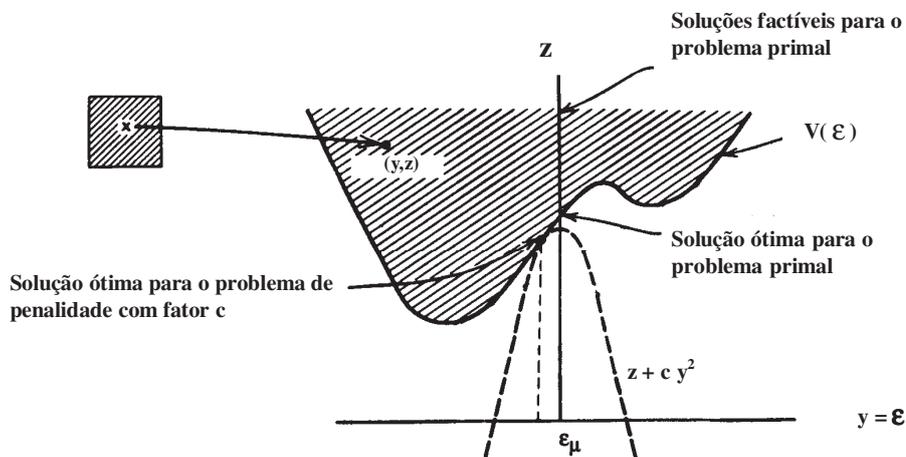


Figura 3.5 - Representação geométrica da função penalidade para o caso não convexo (Fonte: Bazaraa)

3.3.3 Dificuldades computacionais

Escolhendo-se c suficientemente grande, a solução do problema penalizado será próxima à solução do problema (3.1); porém, para valores muito grandes do fator de penalidade, teremos problemas de mal condicionamento. Para valores grandes de c , há uma maior ênfase sobre a factibilidade; e a maioria dos métodos de otimização irrestrita move-se rapidamente na direção de um ponto factível. Esse ponto pode estar longe do ótimo, causando um término prematuro do método. Um outro problema é o mal condicionamento da matriz hessiana devido à sua dependência de c . Assim, a análise de convergência do método pode ficar prejudicada. Ressaltamos que a escolha inicial do fator de penalidade e do parâmetro de penalidade afeta a convergência do método.

3.4 O método de barreira

Da mesma forma que os métodos de penalidade, os métodos de barreira transformam o problema restrito em um problema irrestrito. Eles introduzem as restrições na função objetivo através de um fator de barreira, que penaliza a aproximação de um ponto factível à fronteira da região factível. Trabalhando no interior dessa região, tais fatores geram barreiras que impedem os pontos de sair dela. Logo, parte-se de um ponto factível e geram-se novos pontos factíveis. Uma das vantagens desse método é a obtenção de, pelo menos, uma solução factível, caso ocorra uma parada prematura dele. Ele trabalha somente com problemas de desigualdade cujo interior é não-vazio. Assim, assume-se o problema (3.1) obedecendo a essa condição.

Com o objetivo de garantir a permanência no interior da região factível, podemos gerar o seguinte problema de barreira:

$$\min_x \left[f(x) + \delta B(x) : h(x) < 0 \right] \quad (3.20)$$

onde $\delta \geq 0$ é denominado fator de barreira, e $B(x)$ é uma função barreira não-negativa e contínua no interior da região factível $\{x; h(x) < 0\}$ e tende ao infinito à medida que a solução se aproxima da fronteira, a partir do interior. Definimos, então:

$$B(x) = \sum_{j=1}^m \varphi[h_j(x)] \quad (3.21)$$

onde ϕ é uma função de uma variável y , contínua sobre $\{y; y < 0\}$, e satisfaz

$$\phi(y) \geq 0 \text{ se } y < 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} \phi(y) = \infty \quad (3.22)$$

A função $f(x) + \delta B(x)$ é denominada função auxiliar; a função barreira pode assumir várias formas, como:

$$B(x) = \sum_{j=1}^m -\frac{1}{h_j(x)} \quad (3.23)$$

$$B(x) = -\sum_{j=1}^m \ln[-h_j(x)] \quad (3.24)$$

A função (3.23) é denominada barreira clássica ou inversa e foi estudada por Carrol (1961); (3.24) é denominada função barreira logarítmica e foi estudada por Frisch (1955).

Quando $\delta \rightarrow 0$ e $B(x) \rightarrow \infty$, temos que $\delta B(x)$ se aproxima da função barreira ideal, descrita anteriormente em (3.20), e a solução do problema de barreira converge para a solução do problema (3.1).

Observamos que (3.20) é um problema restrito e pode ser tão complexo quanto (3.1). Como exigimos uma solução inicial interior à região factível e o método trabalha com pontos interiores a essa região, ao penalizar os pontos que se aproximam da fronteira impedimos que eles saiam da região e a restrição pode ser ignorada. Teremos, realmente, um problema irrestrito, para o qual poderá ser utilizada uma técnica de otimização irrestrita.

3.4.1 Algoritmo

Passo inicial

Dado o problema (3.1), somente com restrições de desigualdade, construa a função (3.21).

Faça $k = 0$.

Escolha uma solução inicial factível $x^0 \in E_n$, um fator de barreira $\delta^0 > 0$, um parâmetro de barreira ρ , tal que $0 < \rho < 1$ e uma tolerância de convergência $\xi > 0$.

Passo iterativo:

PI1) Resolva o seguinte problema utilizando um método de minimização irrestrita, para δ^k fixo:

$$\min_x \{f(x) + \delta^k B(x); h(x) < 0\}.$$

Admita x^{k+1} como uma solução e vá para **PI2)** ;

PI2) Se $\delta^k B(x^{k+1}) < \xi$, **PARE**. Caso contrário, faça $\delta^{k+1} = \rho \delta^k$, $k=k+1$ e vá para **PI1**.

=====

3.4.2 Interpretação geométrica

Seja o problema de barreira visto em (3.20) tal que as funções barreiras são definidas em (3.23).

Analisemos, primeiramente, o comportamento da função barreira. A Figura 3.6 mostra $\delta B(x)$ para valores decrescentes de δ .

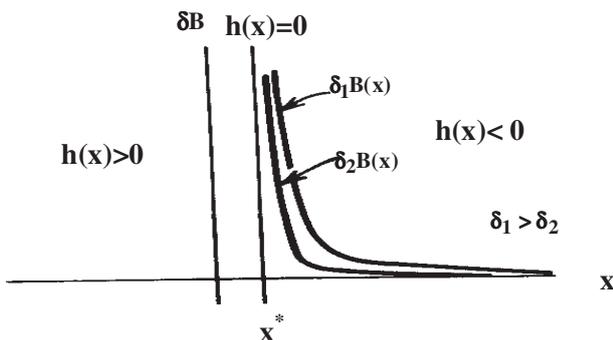


Figura 3.6 - Comportamento da função barreira (Fonte: Bazaraa)

Note que, à medida que δ decresce, $\delta B(x)$ se aproxima de uma função que tem valor zero para $h(x) < 0$ e infinito para $h(x) = 0$.

Ao resolvermos o problema (3.20) utilizando a função (3.23), iniciamos o processo de solução com um ponto interior à região factível. Para cada valor de δ , temos uma solução que será o ponto inicial para o processo iterativo. À medida que δ decresce, aproximamo-nos da solução do problema original, ou seja, $\delta \rightarrow 0, x^k \rightarrow x^*$ e $f(x^k) + \delta B(x^k) \rightarrow f(x^*)$, como pode ser visto na Figura 3.7.

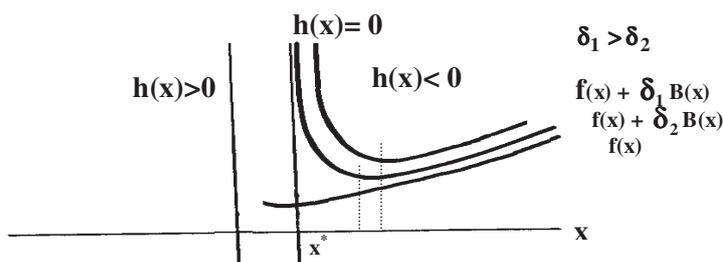


Figura 3.7 - Resolução através da função barreira (Fonte: Bazaraa)

3.4.3 Dificuldades computacionais

Uma das dificuldades encontradas no método de barreira é a seleção de um ponto inicial factível. Em muitos problemas, isso pode ser trabalhoso. Vários métodos podem ser utilizados para a determinação de um ponto inicial factível, quando este não é conhecido. Também, em virtude da estrutura da função barreira, para valores pequenos de δ , muitas técnicas têm sérios problemas de mal condicionamento e erros de arredondamento, quando o ótimo se aproxima. As escolhas do fator de barreira e do parâmetro de barreira podem comprometer o processo de otimização.

3.5 O Método quasi-Newton

Os métodos quasi-Newton são utilizados para resolver problemas irrestritos da forma:

$$\min_{x \in R^n} f(x) \quad (3.25)$$

Eles são intermediários entre a simplicidade do método do gradiente e a rapidez do método de Newton.

Estes métodos, ao invés de calcularem a inversa da matriz hessiana, como o método de Newton, aproximam esta inversa em um processo iterativo finito, utilizando apenas derivadas de primeira ordem. São analiticamente os métodos mais sofisticados para os problemas irrestritos.

3.5.1 Construção da Inversa

Nos métodos quasi-Newton atualizamos x da seguinte maneira:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k S_k \nabla f(x^k) \quad (3.26)$$

em que: α_k é o passo dado na direção $d^k = -S_k \nabla f(x^k)$ e S_k é simétrica. Observamos que se em (3.26) S_k é a inversa da matriz hessiana obtemos o método de Newton e se S_k é a matriz identidade obtemos o método do gradiente.

O problema consiste em calcular a matriz S_k , que é a aproximação da inversa da matriz hessiana. Para a construção da matriz S_k , teremos que construir aproximações cada vez mais corretas da inversa da hessiana usando informações obtidas durante o processo iterativo de otimização.

Logo, avaliando a função $f(x)$ apresentada em (3.25) em série de Taylor, em torno de x^k até segunda ordem, obtemos:

$$f(x) \cong f(x^k) + \nabla^T f(x^k)(x - x^k) + \frac{1}{2}(x - x^k)^T \nabla^2 f(x^k)(x - x^k) \quad (3.27)$$

Derivando (3.27) em relação a x e fazendo $x = x^{k+1}$, temos:

$$\nabla f(x^{k+1}) = \nabla f(x^k) + \nabla^2 f(x^k)(x^{k+1} - x^k) \quad (3.28)$$

daí:

$$\nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k) = \nabla^2 f(x^k)(x^{k+1} - x^k) \quad (3.29)$$

Denotando,

$$\begin{aligned} \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k) &= q^k \\ \nabla^2 f(x^k) &= F \\ (x^{k+1} - x^k) &= p^k \end{aligned}$$

podemos reescrever (3.29) como segue:

$$q^k = F p^k$$

ou então:

$$F^{-1} q^k = p^k \quad (3.30)$$

sendo $F^{-1} = S_{k+1}$.

Logo substituindo em (3.30) F^{-1} por S_{k+1} determinamos:

$$S_{k+1} q^k = p^k \quad (3.31)$$

A seguir apresentamos dois métodos para a determinação da aproximação da inversa da matriz hessiana em (3.31):

3.5.2 Método de Broyden (correção posto 1)

Como a matriz hessiana é uma matriz simétrica, sua inversa também será. Logo, uma condição que podemos impor sobre a aproximação de S_k é que ela também seja simétrica. Através da recorrência:

$$S_{k+1} = S_k + \delta^k z^k (z^k)^T \quad (3.32)$$

em que δ^k é uma constante, z^k é um vetor coluna e $(z^k)^T$ é um vetor linha, e a matriz $z^k (z^k)^T$ tem posto 1.

Conforme Luenberger e Ye (2008) em (3.32) prova-se que:

$$\delta^k z^k (z^k)^T = \frac{(p^k - S^k q^k)(p^k - S^k (q^k)^T)}{(p^k - S^k q^k)^T q^k} \quad (3.33)$$

Substituindo (3.33) em (3.32) Portanto a aproximação da matriz inversa da hessiana é dada por:

$$S_{k+1} = S_k + \frac{(p^k - S_k q^k)(p^k - S_k (q^k)^T)}{(p^k - S_k q^k)^T q^k} \quad (3.34)$$

Observa-se que quando uma matriz S_{k+1} definida negativa é gerada a partir de uma S_k definida positiva, utiliza-se a matriz S_k como a nova aproximação da inversa da hessiana.

Ao gerarmos as matrizes de aproximação em (3.34), se uma matriz S_k for definida positiva, não há garantias que a matriz S_{k+1} a ser gerada também seja definida positiva.

Observamos que a positividade de S_{k+1} só é garantida em (3.34) se $(p^k - S^k q^k)^T q^k > 0$.

Algoritmo:**Passo inicial**

Dado $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável, ε a precisão desejada

Escolha $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e S_0 uma matriz simétrica definida positiva

Faça $k = 0$

Passo iterativo

PI1- Se $\|\nabla f(x^k)\| \geq \varepsilon$ faça

$$d^k = -S_k \nabla f(x^k)$$

Execute uma busca unidimensional, a partir de x^k na direção d^k determinando α_k .

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k.$$

PI2- Enquanto $\|\nabla f(x^k)\| \geq \varepsilon$ faça

Início

$$\text{Se} \left[(\nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k))^T ((x^{k+1}) - (x^k)) - S^k (\nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k)) \right] \leq 0$$

então

$$S_{k+1} = S_k$$

$$k = k + 1$$

senão

$$S_{k+1} = S_k + \frac{(p^k - S_k q^k)(p^k - S_k q^k)^T}{(q^k)^T (p^k - S_k q^k)}$$

$$k = k + 1$$

$$d^k = -S_k \nabla f(x^k)$$

Execute uma busca unidimensional, a partir de x^k na direção d^k determinando α_k .

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k.$$

Fim

Escreva (O ponto de mínimo é x^k)

3.5.3 Método de Davidon-Fletcher-Powell (DFP)

O mais antigo e, certamente, um dos métodos mais inteligentes para construir a inversa da hessiana, foi originalmente proposto por Davidon e mais tarde desenvolvido por Fletcher e Powell. O método tem a seguinte propriedade, para uma função objetivo quadrática: gera simultaneamente as direções do método do gradiente conjugado, enquanto constrói a inversa da hessiana. Em cada etapa a inversa da hessiana é atualizada pela soma de duas matrizes simétricas de posto igual a 1, e esse esquema é denominado como um procedimento correção de posto igual a 2. O método é também muitas vezes referido como o método da métrica variável, o nome originalmente sugerido por Davidon.

As direções de pesquisa para este método são como as direções do método de Broyden. A recorrência é obtida pela soma de duas matrizes simétricas de posto igual a 1. Logo pode ser provado que

$$S_{k+1} = S_k + \frac{p^k (p^k)^T}{p^k q^k} - \frac{S_k p^k (p^k)^T S_k}{(q^k)^T S_k q^k} \quad (3.35)$$

conforme Luenberger e Ye (2008):

em que:

$$\begin{aligned} q^k &= \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k) \\ p^k &= x^{k+1} - x^k \\ d^k &= -S_k \nabla f(x^k) \end{aligned}$$

Observamos que este procedimento se inicia com uma matriz S_k simétrica e definida positiva.

Neste método conseguimos garantir que se S_k é definida positiva, então S_{k+1} também será e a convergência do método é finita.

Algoritmo:**Passo inicial**

Dado $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável, ε a precisão desejada

Escolha $x^0 \in \mathbb{R}^n$

Escolha S_0 uma matriz simétrica definida positiva. $k = 0$.

Passo iterativo

PI1 - Se $\|\nabla f(x^k)\| \geq \varepsilon$ faça

$$d^k \leftarrow -S_k \nabla f(x^k)$$

Execute uma busca unidimensional, a partir de x^k na direção d^k determinando α_k

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$$

PI2 – Enquanto $\|\nabla f(x^k)\| \geq \varepsilon$ faça

Início

Calcule $\nabla f(x^{k+1})$

$$p^k \leftarrow (x^{k+1} - x^k)$$

$$q^k \leftarrow \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k)$$

$$S_{k+1} = S_k + \frac{p^k (p^k)^T}{p^k q^k} - \frac{S_k p^k (p^k)^T S_k}{(q^k)^T S_k q^k}$$

$$k \leftarrow k + 1$$

$$d^k \leftarrow -S_k \nabla f(x^k)$$

Execute uma busca unidimensional, a partir de x^k na direção d^k determinando α_k

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$$

Fim

Escreva (O ponto de mínimo é x^k)

3.5.4 Família Broyden

As fórmulas de atualização da inversa da hessiana (3.34) e (3.35) satisfazem:

$$S_{k+1}q^k = p^k \quad (3.36)$$

que é derivada da relação:

$$Fp^k = q^k \quad (3.37)$$

a qual satisfaz o caso puramente quadrático. Também é possível determinar atualizações para aproximações da hessiana F . Assim, denotando a k -ésima aproximação F por M_k , em (3.37) teremos:

$$M_{k+1}p^k = q^k \quad (3.38)$$

A equação (3.38) tem exatamente a mesma forma (3.36), exceto que os vetores q e p são trocados e S é substituído por M . Deve ficar claro que isto implica que qualquer fórmula de atualização para S que satisfaça (3.36), pode ser transformada em uma fórmula de atualização correspondente para M . Especificamente, dado qualquer fórmula de atualização para S , a fórmula complementar é encontrada trocando o S , q e p . Da mesma forma, qualquer fórmula de atualização para M que satisfaça (3.38), pode ser convertida pelo mesmo processo para uma fórmula complementar para a atualização de S . Para ilustrar as fórmulas complementares, considere a atualização de posto igual a um (3.34):

$$S_{k+1} = S_k + \frac{(p^k - S_k q^k)(p^k - S_k (q^k)^T)}{(p^k - S_k q^k)^T q^k}$$

A Fórmula complementar correspondente é:

$$M_{k+1} = M_k + \frac{(q^k - M_k p^k)(q^k - M_k p^k)^T}{(q^k - M_k p^k)^T p^k} \quad (3.39)$$

Da mesma forma, para o método de Davidon-Fletcher-Powell (ou simplesmente DFP) a fórmula (3.35) é:

$$S_{k+1} = S_k - \frac{S_k q^k (q^k)^T S_k}{(q^k)^T S_k q^k} + \frac{p^k (p^k)^T}{(p^k)^T q^k}$$

e sua complementar por:

$$M_{k+1} = M_k - \frac{M_k p^k (p^k)^T M_k}{(p^k)^T M_k p^k} + \frac{q^k (q^k)^T}{(q^k)^T p^k} \quad (3.40)$$

A atualização (3.40) é conhecida como atualização de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) e é usada nos capítulos 4 e 5 deste trabalho.

Outra forma para converter uma fórmula de atualização de S para M ou vice-versa é tomando a inversa. Claramente, se:

$$S_{k+1} q^k = p^k$$

então:

$$q^k = S_{k+1}^{-1} p^k \quad (3.41)$$

o que implica que S_{k+1}^{-1} satisfaz (3.38), o critério para uma atualização de M_{k+1} . Além disso, o mais importante, é que o posto é o mesmo para as duas fórmulas. A fórmula pode ser encontrada explicitamente por duas aplicações da fórmula de Sherman-Morrison.

$$\left[A + ab^T \right]^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} ab^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1} a} \quad (3.42)$$

onde $A \in R^{n \times n}$, $a \in R^n$ e $b \in R^n$ que é válido desde que exista a inversa. (Isso é facilmente verificado multiplicando o lado esquerdo de (3.42) diretamente por $A + ab^T$). O resultado da atualização de BFGS para M , correspondente a uma aproximação do inverso da S é dado por:

$$S_{k+1} = S_k + \left(\frac{I + (q^k)^T S_k q^k}{(q^k)^T q^k} \right) \frac{p^k (p^k)^T}{(p^k)^T q^k} - \frac{p^k (q^k)^T S_k + S_k q^k (q^k)^T}{(q^k)^T p^k} \quad (3.43)$$

Temos que (3.43) é uma importante fórmula de atualização que pode ser usada exatamente como a fórmula DFP. Experimentos numéricos têm confirmado que o desempenho de (3.43) é superior ao da fórmula DFP (3.35), e por esta razão, é geralmente preferida. Pode-se notar que tanto (3.35) como (3.43) tem simetria nas atualizações, posto igual a dois e são construídos a partir da p_k vetores e $S_k q_k$. Esta observação conduz naturalmente a consideração de uma coleção de atualizações, conhecido como a família Broyden, e é definida por:

$$S^\Phi = (I - \Phi)S^{DFP} + \Phi S^{BFGS}$$

em que ϕ é um parâmetro que pode assumir qualquer valor real. Claramente $\phi = 0$ e $\phi = 1$, resultam nas atualizações de (3.35) e (3.43), respectivamente.

No próximo capítulo apresenta-se o método de barreira penalidade quasi-Newton.

CAPÍTULO 4

O MÉTODO BARREIRA PENALIDADE QUASI-NEWTON

Neste capítulo descrevemos o método de barreira penalidade quasi-Newton apresentado por Armand (2003) o qual será utilizado no capítulo 5 de maneira adaptada. Este método utiliza para a solução do sistema gerado pelas condições de otimalidade o método quasi-Newton Broyden-Fletcher-Goldfard-Shano (BFGS) apresentado no capítulo 3.

4.1 Apresentação do método

Considere o seguinte problema de programação não-linear:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a. : } h_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{4.1}$$

em que $x \in R^n$, $f(x) \in R$, $h(x) \in R^m$ e $f(x)$ e as funções $h_j(x)$, $j = 1, \dots, m$, são convexas e diferenciáveis.

Em Armand (2003) o problema (4.1) é resolvido pelo método de ponto interior quasi-Newton baseado no algoritmo introduzido por Armand *et al.*(2000) e desenvolvido por Armand *et al.*(2002). Este método pode começar de um ponto inicial infactível, mas difere do algoritmo proposto em Armand *et al.*(2002), em relação ao controle da factibilidade das soluções nas iterações em que estas ocorrem. Nas iterações em que ocorrem pontos infactíveis, o autor adotou a estratégia de relaxar a fronteira da região factível, tal que os pontos permaneçam dentro da região factível e uma penalização exata é usada para retornar a fronteira à posição original.

Em seu trabalho Armand (2003) introduziu a relaxação e penalização de um modo diferente propondo o controle explícito do parâmetro de penalidade e o principal resultado do artigo é a demonstração que a sequência dos parâmetros de penalidade gerados pelo algoritmo permanece limitada. Sua idéia se resume em relaxar o problema, penalizar essa relaxação, utilizar um algoritmo de pontos interiores para manter a factibilidade a cada iteração, realizando um controle das penalidades para obter uma sequência convergente para a solução de (4.1).

Na próxima seção apresenta-se o novo problema relaxado.

4.2 O problema de barreira penalidade

Dado o problema (4.1), acrescentam-se variáveis auxiliares não negativas as quais são penalizadas na função objetivo, resultando no problema:

$$\begin{aligned} \min f(x) + \sigma^T s \\ \text{s.a. : } h_j(x) \leq s_j, \quad j = 1, \dots, m \\ s \geq 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

em que $s \in R^m$ é o vetor das variáveis auxiliares e $\sigma \in R^m$ é o vetor dos parâmetros de penalidade. Para determinar a solução de (4.2) iterativamente, escolhem-se regras de atualização para o parâmetro σ de modo que o vetor s se anule e desta forma consegue-se gerar uma sequência de soluções que convergem para a solução de (4.1).

Em seguida, associa-se ao problema (4.2) o seguinte problema de barreira penalidade:

$$\min \varphi_{\sigma, \mu}(x, s) = f(x) + \sigma^T s - \mu \sum_{j=1}^m \log((s_j - h_j(x))s_j), \quad (4.3)$$

sendo: $s - h(x) > 0$, $s > 0$ e $\mu > 0$ é o parâmetro de barreira

O problema (4.3) é irrestrito, a restrição de positividade está implícita, um ponto inicial factível é facilmente determinado e $\varphi_{\sigma, \mu}$ é uma função barreira parametrizada por $\mu > 0$ e $\sigma \in R^m$.

4.3 Estratégia para aplicação das condições de otimalidade

Para a determinação da solução do problema (4.1) o autor não utilizou as condições de otimalidade aplicadas diretamente ao problema (4.3). Ele construiu a função Lagrangiana associada ao problema (4.2), como segue:

$$\begin{aligned} L_{(x, \lambda)} &= f(x) + \sigma^T s - \lambda^T (s - h(x)) - \lambda^T s \\ L_{(x, \lambda)} &= f(x) + (\sigma^T - \lambda^T) s - \lambda^T (s - h(x)) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Aplicou as condições de otimalidade à (4.4) resultando no seguinte sistema não linear:

$$\begin{aligned}
 \nabla f(x) + J_1^T(x)\lambda &= 0 \\
 (S - H(x))\lambda &= 0 \\
 S(\sigma - \lambda) &= 0 \\
 s - h(x) &\geq 0 \\
 s &\geq 0 \\
 \lambda &\geq 0 \\
 \sigma - \lambda &\geq 0
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

em que $J_1^T(x) = (\nabla_x h_1(x), \dots, \nabla_x h_m(x))$ é denominada matriz Jacobiana, S é uma matriz diagonal com os elementos s_j , $j = 1, \dots, m$, na diagonal, $H(x)$ é uma matriz diagonal com os elementos $h_j(x)$, $j = 1, \dots, m$, na diagonal e λ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange.

Em seu artigo Armand (2003) introduziu a estratégia de pontos interiores e perturbou as condições de complementaridade de (4.5) por um parâmetro $\mu > 0$, resultando no seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
 \nabla f(x) + J_1^T(x)\lambda &= 0 \\
 (S - H(x))\lambda &= \mu e \\
 S(\sigma - \lambda) &= \mu e \\
 s - h(x) &\geq 0 \\
 s &\geq 0 \\
 \lambda &\geq 0 \\
 \sigma - \lambda &\geq 0
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

em que $e = (1, 1, \dots, 1)^T$.

4.3.1 Equivalência entre as condições de otimalidade

Neste artigo encontramos a prova do resultado: para algum vetor penalidade $\sigma > 0$ e parâmetro de barreira $\mu > 0$, se (x^*, s^*) resolvem (4.3), então existe um $\lambda^* \in R^m$ tal que (x^*, s^*, λ^*) é solução de (4.2). Ou seja, resolver o sistema de equações

não lineares (4.6) gerado pela aplicação das condições de otimalidade do problema (4.2), equivale a resolver as condições de otimalidade do problema (4.3).

Desta forma mostra-se a equivalência.

Isola-se $\lambda = (S - H(x))^{-1} \mu e$ na segunda equação de (4.6) e substitui-se na primeira e terceira equações de (4.6) obtendo-se o sistema:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + J_1^T(x)(S - H(x))^{-1}(\mu e) &= 0 \\ S(\sigma - (S - H(x))^{-1} \mu e) &= \mu e \end{aligned} \quad (4.7)$$

e simplificando, vem:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + \mu J_1^T(x)(S - H(x))^{-1} e &= 0 \\ \sigma - \mu(S - H(x))^{-1} e - \mu S^{-1} e &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

O sistema (4.8) representa as condições de otimalidade aplicadas ao problema (4.3). Desta forma demonstra-se a equivalência da solução.

4.4 O método de barreira penalidade quasi-Newton

Seja o sistema de equações não lineares formado pelas três primeiras equações de (4.6), aqui transcrito por:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + J_1^T(x)\lambda &= 0 \\ (S - H(x))\lambda - \mu e &= 0 \\ S(\sigma - \lambda) - \mu e &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

A aplicação do método quasi-Newton ao sistema (4.9) gera as direções de busca $(d^x, d^s, d^\lambda)^T$, as quais são utilizadas na atualização das variáveis do sistema, e resulta em um sistema matricial, que, pode ser representado de forma simplificada como:

$$Hess_{(x,s,\lambda)} d = -\nabla L,$$

ou seja:

$$\begin{pmatrix} M & 0 & J_1^T(x) \\ -AJ_1(x) & A & S-H \\ 0 & \Sigma-A & -S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^x \\ d^s \\ d^\lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x L \\ (S-H)\lambda - \mu e \\ S(\sigma - \lambda) - \mu e \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

$$\text{em que: } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} \text{ e } \nabla_x L = \nabla f(x) + J_1^T(x)\lambda.$$

4.5 Atualização da matriz M do método quasi-Newton

A matriz M é uma aproximação definida positiva da matriz hessiana da função lagrangiana (4.4) em relação a x , a qual é atualizada pela fórmula do método BFGS apresentada no capítulo 3 e dada por:

$$M_{k+1} = M_k - \frac{M_k \delta^k (\delta^k)^T M_k}{(\delta^k)^T M_k \delta^k} + \frac{\gamma^k (\gamma^k)^T}{(\gamma^k)^T \delta^k} \quad (4.11)$$

em que:

$$\delta^k = x^{k+1} - x^k; \quad \gamma^k = \nabla_x L(x^{k+1}, \lambda^{k+1}) - \nabla_x L(x^k, \lambda^{k+1})$$

4.6 Atualização das variáveis primais e duais

Os vetores x, s e λ são atualizados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \alpha d^x \\ s^{k+1} &= s^k + \alpha d^s \\ \lambda^{k+1} &= \lambda^k + \alpha d^\lambda, \end{aligned} \quad (4.12)$$

em que α é o tamanho do passo utilizado.

O tamanho do passo α é definido de maneira que a nova solução pertença ao domínio:

$$z_\sigma = \{z = (x, s, \lambda) \in R_x^m R_s^m R_\lambda^n : s - h(x) > 0, s > 0, \lambda > 0, \sigma - \lambda > 0\} \quad (4.13)$$

e a condição de Armijo, seja satisfeita (ver Bazaraa *et al.*(2003)), utilizando uma função mérito.

4.7 Função mérito

Para a verificação da convergência, utiliza-se a seguinte função mérito:

$$\psi_{\sigma,\mu}(z) = \varphi_{\sigma,\mu}(x, s) + \tau v_{\sigma,\mu}(z), \quad (4.14)$$

apresentada em Armand (2003), em que $\tau > 0$, $\tau \in R$ e

$$v_{\sigma,\mu}(z) = \lambda^T (s - h(x)) - \mu \sum_{i=1}^m \log(\lambda_i (s_i - h_i(x))) + s^T (\sigma - \lambda) - \mu \sum_{i=1}^m \log(s_i (\sigma_i - \lambda_i)).$$

é um termo de centralização.

4.8 Atualização do parâmetros de penalidade σ

O autor apresenta uma regra de atualização do parâmetro de penalidade σ , que utiliza a estimativa dos multiplicadores de Lagrange disponíveis ao resolver (4.12), força a convergência de s para zero e gera uma sequência estacionária e limitada, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Se } \sigma^j \geq \lambda^j + \underline{\sigma}^j \text{ então } \sigma^{j+1} &= \sigma^j \\ \text{Senão } \sigma^{j+1} &= \max(1, l\sigma^j, \lambda^j + \underline{\sigma}^j) \end{aligned} \quad (4.15)$$

em que $\underline{\sigma}^j$ é um valor pequeno e positivo

4.9 Atualização do parâmetro de barreira μ

O parâmetro de barreira μ é atualizado por uma regra estabelecida por:

$$\mu^{k+1} = \frac{\mu^k}{c}, \text{ em que } c > 1. \quad (4.16)$$

4.10 Algoritmo

Iteração Externa

Dado: $z^{ik} = (x^{ik}, s^{ik}, \lambda^{ik})$

Iteração Interna

A. Calcule $d = (d^x, d^s, d^\lambda)$, Através de (4.10)

Se $d = 0$, parar; então z é solução

B. Calcule o tamanho do passo: $\alpha > 0$

B.1. Faça $\alpha = 1$

B.2. Enquanto $z_1 + \alpha \cdot d \notin z_\sigma$, escolha-se novo tamanho de passo

$\alpha \in [\tau\alpha, \tau'\alpha], 0 < \tau < \tau' < 1$.

C. Enquanto a condição de Armijo:

$\psi_{\sigma,\mu}(z + \alpha \cdot d) \leq \psi_{\sigma,\mu}(z) + \omega\alpha \nabla \psi_{\sigma,\mu}(z)^T d$, não é satisfeita, escolha-se novo

$\alpha \in [\tau\alpha, \tau'\alpha], 0 < \tau < \tau' < 1$.

D. Atualização da Matriz pelo método BFGS é dada por (4.10).

E. Se $z_k \in z_{\sigma_k}$ e

$$\|\nabla f(x^k) + \nabla h(x^k)\lambda^k\| \leq \epsilon_{i_k},$$

$$\|(S_k - H(x^k))\lambda^k - \mu^k e\| \leq \epsilon_{c_k}^j,$$

$$\|S_k(\sigma^k - \lambda^k) - \mu^k e\| \leq \epsilon_{s_k}$$

Vá para o passo **F**, senão volte ao passo **A**.

Fim iteração interna

F. Atualizar o vetor penalidade de acordo com (4.15).

G. Atualizar o parâmetro de barreira de acordo com (4.16) e a precisão

$$\text{por: } \epsilon^{k+1} = \frac{\epsilon^k}{c}, c > 1.$$

H. Nova M definida positiva, é escolhida: Voltar para o passo **A**.

Fim iteração externa

No próximo capítulo apresenta-se o método da função lagrangiana barreira penalidade adaptada.

CAPITULO 5

O MÉTODO FUNÇÃO LAGRANGIANA BARREIRA PENALIDADE ADAPTADA (FLBPA)

Neste capítulo apresentamos o método da função lagrangiana barreira penalidade adaptada. Nesta adaptação as igualdades serão tratadas através da função lagrangiana e as desigualdade através da função barreira penalidade apresentada por Armand (2003).

Um método quasi-Newton é utilizado para a solução do sistema gerado pela aplicação das condições necessárias de primeira ordem e fornece os fatores de correção para a atualização das variáveis. O fator de barreira é atualizado por um parâmetro pré-estabelecido e o de penalidade usando-se uma heurística definida por Armand (2003).

5.1 Apresentação do problema

Considere o problema:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a.: } g_i(x) = 0, & \quad i = 1, \dots, p \\ h_j(x) \leq 0, & \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{5.1}$$

sendo $x \in R^n$.

O problema (5.1) pode ser resolvido por vários métodos de otimização não linear restritos, tais como: métodos lagrangianos, métodos de penalidade, métodos variantes da função barreira, entre outros.

Neste trabalho opta-se por utilizar um método misto que utiliza a função lagrangiana, a função barreira penalidade e um método quasi-Newton, com o objetivo de aproveitar as melhores características de cada método.

5.2 A função lagrangiana barreira penalidade adaptada

Dado o problema (5.1), acrescentam-se variáveis de folga não negativas às desigualdades transformando-as em igualdades, como segue:

$$\begin{aligned}
 & \min f(x) \\
 & \text{s.a. : } g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p \\
 & \quad h_j(x) + s_j = 0, \quad j = 1, \dots, m \\
 & \quad s_j \geq 0
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

em que $s_j \in R, j = 1, \dots, m$

As variáveis de folga de (5.2) são relaxadas, utilizando variáveis auxiliares positivas, as quais são incorporadas na função objetivo através de um termo de penalização conforme Armand (2003), originando o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
 & \min f(x) + \sigma \sum_{j=1}^m sa_j \\
 & \text{s.a. : } g_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, p \\
 & \quad h_j(x) + s_j = 0 \quad j = 1, \dots, m, \\
 & \quad -s_j \leq sa_j \\
 & \quad sa_j \geq 0
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

$sa_j \in R, j = 1, \dots, m$, são denominadas variáveis auxiliares e $\sigma \in R$ é o parâmetro de penalidade.

Associa-se ao problema (5.3) a função lagrangiana barreira penalidade adaptada.

$$FLBPA = f(x) + \sigma \sum_{j=1}^m sa_j - \mu \left(\sum_{j=1}^m \log((sa_j + s_j) sa_j) \right) - \sum_{j=1}^m \pi_j (h_j(x) + s_j) - \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(x) \tag{5.4}$$

em que: $\mu \in R$ é o parâmetro de barreira tal que $\mu > 0$, e $\lambda \in R^p$ $\pi \in R^m$ são os vetores dos multiplicadores de Lagrange.

5.3 Método da função lagrangiana barreira penalidade adaptada

Apresenta-se nesta seção o método da função lagrangiana barreira penalidade adaptada para solução de (5.1), utilizando (5.4). Resolve-se desta forma uma seqüência de problemas irrestritos.

Aplicando-se as condições necessárias de primeira ordem a (5.4) geramos o seguinte sistema de equações não-lineares:

$$\nabla_{(x,s,sa,\pi,\lambda)} FLBPA = 0, \quad (5.5)$$

em que,

$$\nabla_{(x,s,sa,\pi,\lambda)} FLBPA = \begin{pmatrix} \nabla_x f^T(x) - \pi^T J_1(x) - \lambda^T J_2(x) \\ \frac{-\mu}{(sa_j + s_j)} - \pi_j, & j = 1, \dots, m \\ \sigma - \frac{\mu(2sa_j + s_j)}{(sa_j + s_j)sa_j}, & j = 1, \dots, m \\ -h_j(x) + s_j, & j = 1, \dots, m \\ -g_i(x), & i = 1, \dots, p \end{pmatrix}, \text{ é o vetor gradiente de (5.4),}$$

em que:

$$\begin{aligned} J_1^T(x) &= (\nabla_x h_1(x), \dots, \nabla_x h_m(x)) \\ J_2^T(x) &= (\nabla_x g_1(x), \dots, \nabla_x g_p(x)) \end{aligned}, \text{ são denominadas matrizes Jacobianas.}$$

O sistema de equações não lineares (5.5) é resolvido por um método quasi-Newton. A aplicação do método quasi-Newton gera o vetor de busca $d^T = (d^x, d^s, d^{sa}, d^\pi, d^\lambda)$ o qual é utilizado para a atualização das variáveis do sistema, e resulta num sistema matricial que, pode ser representado de forma simplificada, como:

$$Hess_1 d = -\nabla_{(x,s,sa,\pi,\lambda)} FLBPA \quad (5.6)$$

em que:

$$Hess_1 = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & -J_1^T(x) & -J_2^T(x) \\ 0 & \mu S_1 & \mu S_1 & -1 & 0 \\ 0 & \mu S_2 & \mu S_3 & 0 & 0 \\ -J_1(x) & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -J_2(x) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

é a matriz hessiana associada a função FLBPA, com

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{I}{(sa_1 + s_1)^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{I}{(sa_m + s_m)^2} \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} \frac{sa_1^2}{((sa_1 + s_1)sa_1)^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{sa_m^2}{((sa_m + s_m)sa_m)^2} \end{pmatrix},$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} \frac{2sa_1^2 + 2s_1sa_1 - s_1^2}{((sa_1 + s_1)sa_1)^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{2sa_m^2 + 2s_msa_m - s_m^2}{((sa_m + s_m)sa_m)^2} \end{pmatrix}$$

M é uma aproximação para a hessiana em relação à x e $d^T = (d^x, d^s, d^{sa}, d^\pi, d^\lambda)$

Os vetores das variáveis x, s, sa, π e λ são atualizados por:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \alpha_p d_k^x \\ s_{k+1} &= s_k + \alpha_p d_k^s \\ sa_{k+1} &= sa_k + \alpha_p d_k^{sa} \\ \pi_{k+1} &= \pi_k + \alpha_d d_k^\pi \\ \lambda_{k+1} &= \lambda_k + \alpha_d d_k^\lambda \end{aligned} \tag{5.7}$$

Em (5.7) α representa o tamanho do passo que é calculado segundo a estratégia de Granville (1994) e Quintana (1995), entre outros. O objetivo do passo primal (α_p) é manter as variáveis primais dentro de seus limites. O passo dual (α_d) é calculado de forma que cada componente do vetor dual, permaneça com seus respectivos sinais. Isto se traduz por:

$$\alpha_p^{max} = \min \left\{ \frac{-s_{lj}}{\Delta s_{lj}} : \Delta s_{lj} < 0, j = 1, \dots, p, \frac{-s_{2j}}{\Delta s_{2j}} : \Delta s_{2j} < 0, j = 1, \dots, p, \frac{-s_{3r}}{\Delta s_{3r}} : \Delta s_{3r} < 0, r = 1, \dots, n, \frac{-s_{4r}}{\Delta s_{4r}} : \Delta s_{4r} < 0, r = 1, \dots, n \right\} \tag{5.8}$$

$$\alpha_p = \min\{\tau\alpha_p^{max}, I\}$$

$$\alpha_d^{max} = \min\left\{ \min_{\Delta v_j < 0 \text{ e } v_j > 0} \frac{\pi_j}{|\Delta\pi_j|}, j = 1, \dots, m \right\}$$

$$\alpha_d = \min\{\tau\alpha_d^{max}, I\}$$
(5.9)

em que o escalar $\tau \in (0, I)$ é um valor determinado empiricamente e dado por $\tau = 0,9995$.

De acordo com WRIGHT (1995), pode ser derivado da fórmula $1 - 1/9\sqrt{z}$ onde z é o número de restrições do problema.

Neste método a matriz M inicial pode ser adotada como a matriz identidade e sua atualização é feita através da formula do método BGFS, conforme (4.11). O parâmetro de penalidade é atualizado por (4.15) e o de barreira por (4.16).

5.4 Algoritmo

=====

Iteração externa

Dado o problema (5.1), construa a função lagrangiana (5.4);

Faça $k = 0$;

Escolha uma solução inicial para as variáveis do problema: x^0, s^0, sa^0, π^0 e λ^0 .

Iteração interna

A. Determine o sistema (5.5) e resolva-o;

B. Atualize as variáveis x, s e λ utilizando(5.7);

C. Atualize a matriz M através de (4.11)

D. Caso não seja satisfeito o critério de parada escolhido para o método de Newton, volte ao passo, **A**, senão vá para **E**.

Fim da iteração interna

E. Se as variáveis referentes à (5.4) satisfazem KKT, **PARE**; caso contrário, vá ao passo **F**;

F. Atualize os parâmetros de penalidade e barreira, usando as fórmulas (4.15) e (4.16), respectivamente, escolha uma nova matriz M , faça $k = k + 1$ e volte a **A**.

Fim da iteração externa

=====

No próximo capítulo apresentam-se os resultados numéricos.

CAPÍTULO 6

O PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO

Neste capítulo apresenta-se o modelo do problema de FPO, aplica-se o método da FLBPA ao problema de FPO e discute-se a sua implementação computacional.

6.1 Introdução

O problema de FPO tem por finalidade encontrar um ponto de operação otimizado para o sistema elétrico, o qual satisfaz todas as restrições físicas e operacionais e ainda, minimiza uma função objetivo. Essa função pode ser de perdas ativa no sistema de transmissão, de custo na geração de energia, de alocação de reativos, entre outras. As restrições são formadas pelas equações de balanço, pelos limites operativos dos equipamentos que compõem a rede elétrica e outras restrições inerentes à operação de um sistema elétrico. O problema de FPO não é simples, pois a solução encontrada deve respeitar todas essas restrições, limites e satisfazer a função objetivo.

O FPO tem aplicação em vários problemas de planejamento da expansão e operação e de operação em tempo-real, tais como:

- Despacho econômico e seguro (operação em tempo-real, simulação do despacho em estudos de planejamento da operação e expansão);
- Redespacho preventivo e corretivo (operação em tempo-real);
- Minimização de perdas;
- Alocação de fontes de potência reativa (planejamento da expansão do suporte de reativos);
- Avaliação da confiabilidade composta de sistemas geração e transmissão;
- Planejamento da expansão de sistemas de transmissão;
- Tarifação de serviços de transmissão;
- Determinação de preços nodais de energia.

O FPO é um termo genérico que envolve uma classe de problemas, em que se destaca as perdas de potência ativa na transmissão, o qual é um problema de FPO utilizado neste trabalho e será apresentado na próxima seção.

6.2 Formulação do problema de FPO

O FPO é um problema de otimização restrita, não-linear, não convexo e de grande porte; determina o melhor ponto de operação do sistema através da otimização de uma função objetivo que representa um dado desempenho do sistema, satisfazendo as restrições de operação.

Sua formulação pode ser apresentada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 & \min f(x) \\
 & \text{s.a. : } g_i(x) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & \quad \underline{h}_j \leq h_j(x) \leq \bar{h}_j \quad j = 1, 2, \dots, p \\
 & \quad \underline{x} \leq x \leq \bar{x}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

em que :

$x = (V, \theta, t) \in \mathbb{R}^n$: vetor das variáveis de controle e de estado;

$f(x)$: função objetivo que representa o desempenho do sistema (função escalar);

$g(x)$: conjunto das restrições de igualdade formado pelas equações de fluxo de potência;

$h(x)$: restrições funcionais de desigualdade;

$\underline{h}_j, \underline{x}, \bar{h}_j, \bar{x}$: limites inferiores e superiores, de $h_j(x)$ e x , respectivamente;

O vetor das variáveis de controle e de estado, x , representa a magnitude de tensão (V), o ângulo da tensão (θ) e o *tap* dos transformadores (t). A função objetivo, $f(x)$ pode ser as perdas de potência ativa na transmissão, o custo na geração, entre outras. As restrições de igualdade $g(x)$ são as equações do fluxo de potência obtidas impondo-se as Leis de *Kirchoff* em cada barra da rede. As restrições de desigualdade $h(x)$ representam as restrições funcionais como: a potência reativa nas barras de controle de reativos, potência ativa na barra *slack*, os fluxos ativos e reativos nas linhas de transmissão, entre outras.

As variáveis do problema de FPO podem ser caracterizadas como:

• Variáveis dependentes:

- tensão nas barras de carga do sistema;
- ângulo em todas as barras do sistema menos a de referência angular;
- potência reativa nas barras com controle de reativo e referência;
- potência ativa na barra de referência.

• Variáveis de controle:

- tensão nas barras de controle de reativos do sistema;
- *tap* dos transformadores;
- potência ativa gerada nas barras de geração.

Ao reescrever (6.1) utilizando as equações do fluxo de potência, a função objetivo e as demais restrições, conforme Monticelli (1983), tem-se o seguinte problema de FPO:

$$\begin{aligned}
 \min f(t, V, \theta) &= \sum_{(k,m) \in NL} f_{km}(t, V, \theta) \\
 \text{s.a. : } \Delta P_i(t, V, \theta) &= 0 & i = 1, \dots, \text{NBCR} \\
 \Delta Q_j(t, V, \theta) &= 0 & j = 1, \dots, \text{NBC} \\
 \underline{Q}_m \leq Q_m(t, V, \theta) &\leq \bar{Q}_m & m = 1, \dots, \text{NBCR} \\
 \underline{t}_o \leq t_o \leq \bar{t}_o & & o = 1, \dots, \text{NT} \\
 \underline{V}_k \leq V_k \leq \bar{V}_k & & k = 1, \dots, \text{NB}
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

em que:

- V e θ são os vetores da magnitude e fase da tensão respectivamente;
- t é o *tap* do transformador;
- $f_{km}(t, V, \theta)$ é a função de perdas de potência ativa na transmissão na linha km, dada por:

$$f_{km}(t, V, \theta) = \sum_{(k,m) \in NL} g_{km} (V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos \theta_{km}) \tag{6.3}$$

- as equações de balanço do sistema elétrico são dadas por:

a) Potência ativa para as barras de carga e de controle de reativo:

$$\begin{aligned} \Delta P_k(t, V, \theta) &= P_k^G - P_k^C - \sum_{m \in \Omega} P_{km}(t, V, \theta) = 0; \\ P_{km}(t, V, \theta) &= (tV_k)^2 g_{km} - (tV_k)V_m (g_{km} \cos\theta_{km} + b_{km} \sin\theta_{km}) \end{aligned} \quad (6.4)$$

b) Potência reativa para as barras de carga:

$$\begin{aligned} \Delta Q_k(t, V, \theta) &= Q_k^G - Q_k^C - \sum_{m \in \Omega} Q_{km}(t, V, \theta) = 0; \\ Q_{km}(t, V, \theta) &= -(tV_k)^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) + (tV_k)V_m (b_{km} \cos\theta_{km} - g_{km} \sin\theta_{km}) \end{aligned} \quad (6.5)$$

• Limite na geração de potência reativa para as barras de controle de reativo:

$$Q_k(t, V, \theta) = \sum_{m \in \Omega} -(tV_k)^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) + (tV_k)V_m (b_{km} \cos\theta_{km} - g_{km} \sin\theta_{km}) \quad (6.6)$$

- g_{km}, b_{km} e b_{km}^{sh} são a condutância, a susceptância e a susceptância *shunt* da linha, respectivamente;
- P_k^G e P_k^C são as potências ativas, geradas e consumidas, respectivamente;
- Q_k^G e Q_k^C são as potências reativas, geradas e consumidas, respectivamente;
- \underline{Q}_m e \bar{Q}_m são os limites mínimos e máximos de geração de potência reativa;
- \underline{V}_k e \bar{V}_k são os limites mínimos e máximos das magnitudes das tensões;
- \underline{t}_o e \bar{t}_o são os limites mínimos e máximos dos *taps* variáveis dos transformadores;
- Ω é o conjunto de todas as barras vizinhas à barra k , incluindo ela mesma;
- NL é o número total de linhas de transmissão;
- NB é o número de barras do sistema elétrico;
- NBC é o número de barras de carga;
- $NBCR$ é o número de barras de controle de reativo;
- $NBCCR$ é o número de barras de carga e de controle de reativos;

- NT é o número de transformadores com tap variável.

A variável de controle tap de transformador foi considerada de forma contínua, como as demais restrições. O modelo utilizado para essa variável está representado na Figura 1. Neste modelo o tap está ligado à tensão da barra inicial da linha.

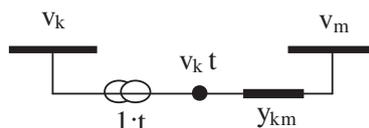


Figura 6.1 - Modelo utilizado para a variável tap do transformador

O problema de FPO apresentado é conhecido como despacho ótimo de reativo, ou simplesmente, FPO reativo. O aspecto reativo em um sistema de energia está relacionado principalmente ao controle da tensão nas barras. No FPO reativo, as variáveis associadas com a potência ativa estão todas fixas e as variáveis de controle estão associadas com a potência reativa. A função objetivo em (6.2) são as perdas ativa nas linhas de transmissão, essa função é não separável e não permite simplificações. Esse fato dificulta a solução do problema de FPO, segundo Monticelli e Liu (1992).

Existem muitas técnicas de otimização para solução do problema (6.1). A técnica de solução utilizando pontos interiores é considerada como uma interessante alternativa para solução de problemas de otimização de sistemas de potência. Entre as variantes do método de pontos interiores, o método primal-dual barreira logarítmica tem sido amplamente aplicado para solução de (6.1). Entre as variantes do método de barreira modificada aplicadas ao problema de FPO pode-se citar Adibi et al. (2003) e Sousa et al. (2004). Nas próximas seções, apresenta-se o método da FLBPA aplicado ao problema de FPO. Este método é uma adaptação do método barreira penalidade quasi-Newton de Armand (2003).

6.3 A FLBPA associada ao problema de FPO

Apresenta-se, nesta seção, a FLBPA aplicada ao problema de FPO. Dado o problema (6.2), transformam-se todas as desigualdades em igualdade utilizando variáveis de folga positivas. Relaxam-se as variáveis de folga utilizando variáveis auxiliares positivas, as quais são incorporadas na função objetivo através de um termo

de penalização. Desta forma, obtém-se um problema equivalente a (6.2) e, seguindo o desenvolvimento matemático apresentado no capítulo 5, tem-se a seguinte função FLBPA associada:

$$\begin{aligned}
 FLBPA_{(t,V,s,sa,\pi,\lambda)} = & f_{(t,V,\theta)} + \sigma \left(\sum_{m=1}^{NBCR} sa_{1m} + \sum_{m=1}^{NBCR} sa_{2m} + \sum_{k=1}^{NB} sa_{3k} + \sum_{k=1}^{NB} sa_{4k} + \sum_{o=1}^{NT} sa_{5o} + \sum_{o=1}^{NT} sa_{6o} \right) \\
 & - \mu \left(\sum_{m=1}^{NBCR} \log((sa_{1m} + s_{1m})sa_{1m}) + \sum_{m=1}^{NBCR} \log((sa_{2m} + s_{2m})sa_{2m}) + \sum_{k=1}^{NB} \log((sa_{3k} + s_{3k})sa_{3k}) \right) \\
 & - \mu \left(\sum_{k=1}^{NB} \log((sa_{4k} + s_{4k})sa_{4k}) + \sum_{o=1}^{NT} \log((sa_{5o} + s_{5o})sa_{5o}) + \sum_{o=1}^{NT} \log((sa_{6o} + s_{6o})sa_{6o}) \right) \\
 & - \sum_{m=1}^{NBCR} \pi \underline{Q}_m (-Q_m + \underline{Q}_m + s_{1m}) - \sum_{m=1}^{NBCR} \pi \bar{Q}_m (Q_m - \bar{Q}_m + s_{2m}) - \sum_{k=1}^{NB} \pi \bar{V}_k (V_k - \bar{V}_k + s_{3k}) \\
 & - \sum_{k=1}^{NB} \pi \underline{V}_k (-V_k + \underline{V}_k + s_{4k}) - \sum_{t=1}^{NT} \pi \bar{t}_o (t_o - \bar{t}_o + s_{5o}) - \sum_{t=1}^{NT} \pi \underline{t}_o (-t_o + \underline{t}_o + s_{6o}) \\
 & - \sum_{i=1}^{NB-l} \lambda P_i \Delta P_{i(t,V,\theta)} - \sum_{j=1}^{NB-l} \lambda Q_j \Delta Q_{j(t,V,\theta)} \tag{6.7}
 \end{aligned}$$

em que:

σ : parâmetro de penalidade;

μ : parâmetro de barreira;

s : varável de folga;

s_a : relaxação da varável de folga;

$\pi \underline{V}_k$: multiplicador de Lagrange associado à equação inferior de V_k ;

$\pi \bar{V}_k$: multiplicador de Lagrange associado à equação superior de V_k ;

$\pi \underline{t}_o$: multiplicador de Lagrange associado à equação inferior de t_i ;

$\pi \bar{t}_o$: multiplicador de Lagrange associado à equação superior de t_i ;

$\pi \underline{Q}_m$: multiplicador de Lagrange associado à equação inferior de Q_m ;

$\pi \bar{Q}_m$: multiplicador de Lagrange associado à equação superior de Q_m ;

λP_i : multiplicador de Lagrange associado à equação ΔP_i ;

λQ_j : multiplicador de Lagrange associado à equação ΔQ_j ;

6.4 O método da FLBPA aplicado ao problema de FPO

Nesta seção apresenta-se o método da função FLBPA, para a resolução do problema de FPO, utilizando a função (6.7).

Aplicando as condições de otimalidade à FLBPA (6.7), em relação a:

$$t, V, \theta, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, sa_1, sa_2, sa_3, sa_4, sa_5, sa_6, \pi_Q, \pi_V, \pi_t, \pi_Q, \pi_V, \pi_t, \lambda_P, \lambda_Q,$$

obtém-se o seguinte sistema de equações não-lineares:

$$\nabla f_{(t,V,\theta)}^T - \lambda P^T J_P - \lambda Q^T J_Q - \pi \bar{Q}^T J_{Q_m} + \pi \underline{Q}^T J_{Q_m} - \pi \bar{V} + \pi \underline{V} - \pi \bar{t} + \pi \underline{t} = 0 \quad (6.8a)$$

$$-\frac{\mu}{sa_{1j} + s_{1j}} - \pi \underline{Q}_m = 0, \quad j = 1, \dots, NBCR \quad (6.8b)$$

$$-\frac{\mu}{sa_{2j} + s_{2j}} - \pi \bar{Q}_m = 0, \quad j = 1, \dots, NBCR \quad (6.8c)$$

$$-\frac{\mu}{sa_{3j} + s_{3j}} - \pi \bar{V}_k = 0, \quad j = 1, \dots, NBCR \quad (6.8d)$$

$$-\frac{\mu}{sa_{4j} + s_{4j}} - \pi \underline{V}_k = 0, \quad j = 1, \dots, NBCR \quad (6.8e)$$

$$-\frac{\mu}{sa_{5j} + s_{5j}} - \pi \bar{t}_o = 0, \quad j = 1, \dots, NBCR \quad (6.8f)$$

$$-\frac{\mu}{sa_{6j} + s_{6j}} - \pi \underline{t}_o = 0, \quad j = 1, \dots, NBCR \quad (6.8g)$$

$$\sigma - \mu \left(\frac{2sa_{1j} + s_{1j}}{(sa_{1j} + s_{1j})sa_{1j}} \right) = 0, \quad j = 1, \dots, NBCR \quad (6.8h)$$

$$\sigma - \mu \left(\frac{2sa_{2j} + s_{2j}}{(sa_{2j} + s_{2j})sa_{2j}} \right) = 0, \quad j = 1, \dots, NBCR \quad (6.8i)$$

$$\sigma - \mu \left(\frac{2sa_{3j} + s_{3j}}{(sa_{3j} + s_{3j})sa_{3j}} \right) = 0, \quad j = 1, \dots, NBCR \quad (6.8j)$$

$$\sigma - \mu \left(\frac{2sa_{4j} + s_{4j}}{(sa_{4j} + s_{4j})sa_{4j}} \right) = 0, \quad j = 1, \dots, NBCR \quad (6.8k)$$

$$\sigma - \mu \left(\frac{2sa_{5j} + s_{5j}}{(sa_{5j} + s_{5j})sa_{5j}} \right) = 0, \quad j = 1, \dots, NBCR \quad (6.8l)$$

$$\sigma - \mu \left(\frac{2sa_{6j} + s_{6j}}{(sa_{6j} + s_{6j})sa_{6j}} \right) = 0, \quad j = 1, \dots, NBCR \quad (6.8m)$$

$$-(Q_m + \underline{Q}_m + s_{1m}) = 0, m = 1, \dots, NBCR \quad (6.8n)$$

$$-(V_k + \underline{V}_k + s_{4k}) = 0, k = 1, \dots, NB \quad (6.8o)$$

$$-(t_o + \underline{t}_o + s_{6o}) = 0, o = 1, \dots, NT \quad (6.8p)$$

$$-(Q_m - \bar{Q}_m + s_{2m}) = 0, m = 1, \dots, NBCR \quad (6.8q)$$

$$-(V_k - \bar{V}_k + s_{3k}) = 0, k = 1, \dots, NB \quad (6.8r)$$

$$-(t_o - \bar{t}_o + s_{5o}) = 0, o = 1, \dots, NT \quad (6.8s)$$

$$-\Delta P_i = 0, i = 1, \dots, NB - 1 \quad (6.8t)$$

$$-\Delta Q_j = 0, j = 1, \dots, NB - 1 \quad (6.8u)$$

em que:

$$J_p^T = (\nabla \Delta P_1, \dots, \Delta P_{NB-1}),$$

$$J_Q^T = (\nabla \Delta Q_1, \dots, \Delta Q_{NBC}),$$

$$J_{Q_m}^T = (\nabla Q_1, \dots, \nabla Q_{NBCR})e$$

$$\pi \underline{Q} \geq 0, \pi \bar{Q} \geq 0, \pi \underline{V} \geq 0, \pi \bar{V} \geq 0, \pi \underline{t} \geq 0, \pi \bar{t} \geq 0.$$

A aplicação do método quasi-Newton ao sistema (6.8) resulta no sistema matricial, o qual, em sua forma simplificada, é representado por:

$$W \Delta d = -\nabla FLBPA \quad (6.9)$$

em que:

$$W = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & JI^T & -JI^T & -J_p^T & -J_Q^T \\ 0 & \mu S_I & \mu S_I & -DI & -DI & 0 & 0 \\ 0 & \mu S_{II} & \mu S_{III} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ JI & DI & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -JI & DI & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

em que:

$$JI^T = (J_{Q_m}^T, I_V, I_t), \quad DI = \begin{pmatrix} I_{Q_m} & 0 & 0 \\ 0 & I_V & 0 \\ 0 & 0 & I_t \end{pmatrix}, \quad \text{sendo: } I_{Q_m}, I_V, I_t \text{ matrizes identidade, e}$$

$$S_I = \begin{pmatrix} S_{I1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_{I6} \end{pmatrix} \text{ com, } S_{I1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(sa_{11} + s_{11})^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{(sa_{1NBCR} + s_{1NBCR})^2} \end{pmatrix}$$

$$S_{II} = \begin{pmatrix} S_{II1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_{II6} \end{pmatrix} \text{ com, } S_{II1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{((sa_{11} + s_{11}) sa_{11})^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{((sa_{1NBCR} + s_{1NBCR}) sa_{1NBCR})^2} \end{pmatrix}$$

$$S_{III} = \begin{pmatrix} S_{III1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_{III6} \end{pmatrix} \text{ com, } S_{III1} = \begin{pmatrix} \frac{2sa_{11}^2 + 2s_{11}sa_{11} - s_{11}^2}{((sa_{11} + s_{11}) sa_{11})^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{2sa_{1NBCR}^2 + 2s_{1NBCR}sa_{1NBCR} - s_{1NBCR}^2}{((sa_{1NBCR} + s_{1NBCR}) sa_{1NBCR})^2} \end{pmatrix}$$

em que $l = 1, \dots, 6$,

$$\Delta d = \Delta(t, V, \theta, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, sa_1, sa_2, sa_3, sa_4, sa_5, sa_6, \pi_{\underline{Q}}, \pi_{\underline{V}}, \pi_{\underline{t}}, \pi_{\bar{Q}}, \pi_{\bar{V}}, \pi_{\bar{t}}, \lambda P, \lambda Q),$$

com: $\Delta d \in \mathbb{R}^{6NB+14NBCR+3NT-2}$ e

$$\nabla F_{(i,v,\theta)}^T = \left(\begin{array}{l}
 \lambda P^T J_p - \lambda Q^T J_Q - \pi \bar{Q}^T J_Q + \pi \underline{Q}^T J_Q - \pi \bar{V} + \pi \underline{V} - \pi \bar{t} + \pi \underline{t} \\
 - \frac{\mu}{sa_{1j} + s_{1j}} - \pi \underline{Q}_m, \quad j = 1, \dots, NBCR \\
 - \frac{\mu}{sa_{2j} + s_{2j}} - \pi \bar{Q}_m, \quad j = 1, \dots, NBCR \\
 - \frac{\mu}{sa_{3j} + s_{3j}} - \pi \bar{V}_k, \quad j = 1, \dots, NBCR \\
 - \frac{\mu}{sa_{4j} + s_{4j}} - \pi \underline{V}_k, \quad j = 1, \dots, NBCR \\
 - \frac{\mu}{sa_{5j} + s_{5j}} - \pi \bar{t}_o, \quad j = 1, \dots, NBCR \\
 - \frac{\mu}{sa_{6j} + s_{6j}} - \pi \underline{t}_o, \quad j = 1, \dots, NBCR \\
 \sigma - \mu \left(\frac{2sa_{1j} + s_{1j}}{(sa_{1j} + s_{1j}) sa_{1j}} \right), \quad j = 1, \dots, NBCR \\
 \sigma - \mu \left(\frac{2sa_{2j} + s_{2j}}{(sa_{2j} + s_{2j}) sa_{2j}} \right), \quad j = 1, \dots, NBCR \\
 \sigma - \mu \left(\frac{2sa_{3j} + s_{3j}}{(sa_{3j} + s_{1j}) sa_{3j}} \right), \quad j = 1, \dots, NBCR \\
 \sigma - \mu \left(\frac{2sa_{4j} + s_{4j}}{(sa_{4j} + s_{4j}) sa_{4j}} \right), \quad j = 1, \dots, NBCR \\
 \sigma - \mu \left(\frac{2sa_{5j} + s_{5j}}{(sa_{5j} + s_{5j}) sa_{5j}} \right), \quad j = 1, \dots, NBCR \\
 \sigma - \mu \left(\frac{2sa_{6j} + s_{6j}}{(sa_{6j} + s_{6j}) sa_{6j}} \right), \quad j = 1, \dots, NBCR \\
 - (Q_m + \underline{Q}_m + s_{1m}), \quad m = 1, \dots, NBCR \\
 - (V_k + \underline{V}_k + s_{4k}), \quad k = 1, \dots, NB \\
 - (t_o + \underline{t}_o + s_{6o}), \quad o = 1, \dots, NT \\
 - (Q_m - \bar{Q}_m + s_{2m}), \quad m = 1, \dots, NBCR \\
 - (V_k - \bar{V}_k + s_{3k}), \quad k = 1, \dots, NB \\
 - (t_o - \bar{t}_o + s_{5o}), \quad o = 1, \dots, NT \\
 \Delta P_i, \quad i = 1, \dots, NB - 1 \\
 \Delta Q_j, \quad j = 1, \dots, NB - 1
 \end{array} \right)$$

com:

$$\nabla F_{LBP}^T \in \mathbb{R}^{6NB+14NBCR+3NT-2}$$

Definidos o vetor gradiente, $\nabla FLBPA$, e a matriz hessiana da função Lagrangiana, W , o sistema (6.9) é resolvido, e determina-se o vetor de direções de busca, Δd . As variáveis são atualizadas utilizando o vetor de direções de busca juntamente com os passos primais e duais definidos em (5.8) e (5.9) respectivamente; e o parâmetro de barreira e penalidade através de seus respectivos fatores de correção.

6.5 Implementação computacional

A implementação computacional do método da FLBPA, apresentado neste trabalho, e aplicada a um exemplo matemático, foi realizada utilizando o software Matlab R2010a (<http://www.mathworks.com>) em um microcomputador com processador Intel i5 M430 de 2.27GHz, 4 Gb de memória RAM e sistema operacional Windows 7 de 64 bits do Laboratório de Otimização e Estudos Econômicos de Sistemas de Potência (LOESP), da Faculdade de Engenharia, da Unesp de Bauru.

A implementação computacional do método, aplicado ao problema de FPO, foi realizada em linguagem de programação FORTRAN. O programa foi desenvolvido inicialmente por Sousa (2006) e adaptado para o nosso problema, em um microcomputador com processador Intel Core 2 Duo de 2.2 GHz e 3,7 GB de memória RAM. Na implementação utilizou-se dupla precisão aritmética.

Para uma melhor visualização e entendimento da estrutura do programa de FPO, segue o fluxograma mostrado na Figura 6.2.

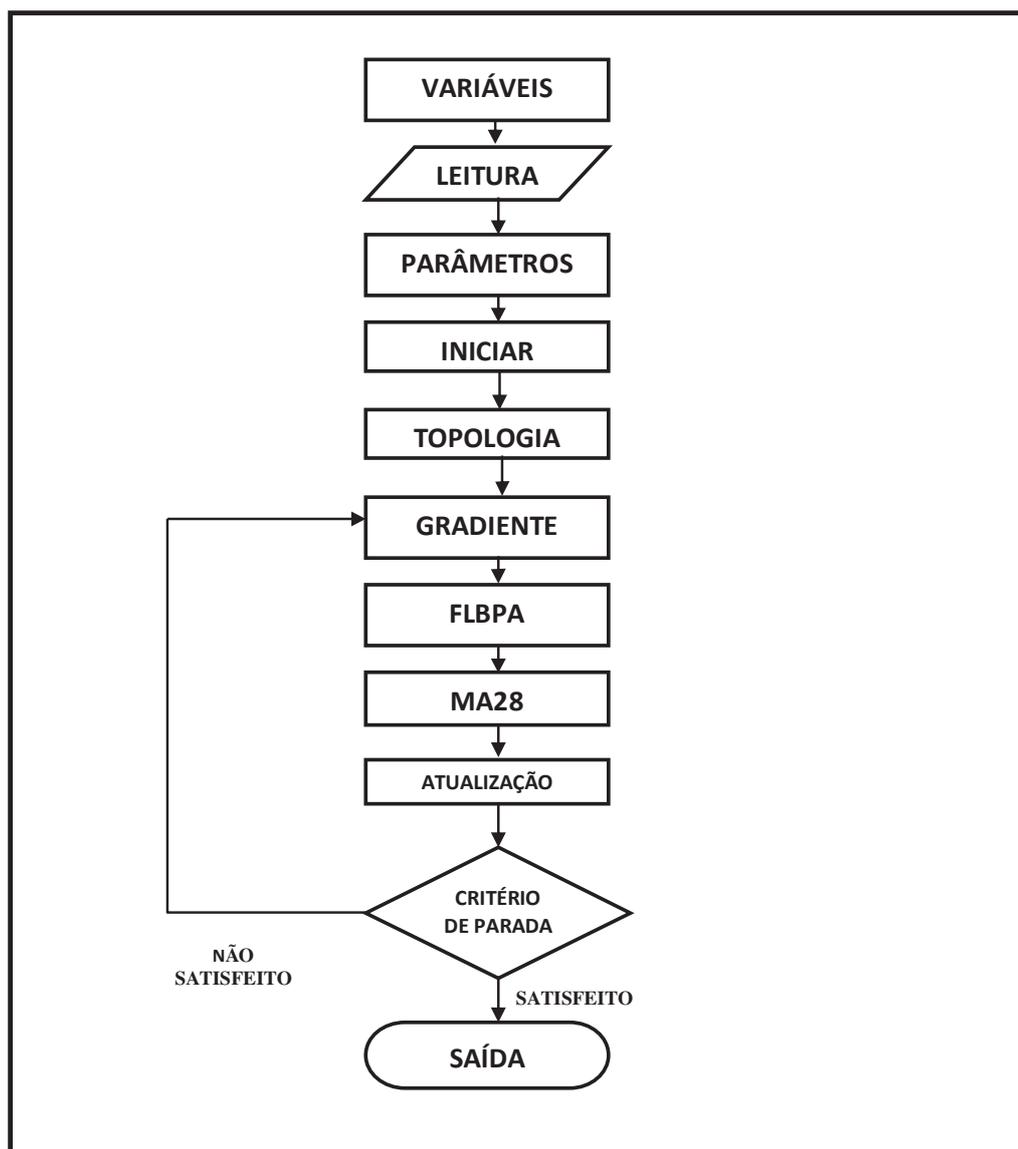


Figura 6.2 - Fluxograma do programa de FPO

A seguir tem-se uma breve descrição das sub-rotinas implementadas, que formam o programa de FPO:

Variáveis - faz a declaração das variáveis utilizadas no programa (variáveis globais).

Leitura - rotinas responsáveis pela leitura dos dados de barras, das linhas de transmissão e dos limites de tensão. Estas informações estão contidas em bancos de dados que fornecem os dados iniciais da rede elétrica.

Parâmetros - faz a leitura dos parâmetros de barreira μ , bem como de seus fatores de correções β . O valor inicial dos parâmetros deve ser fornecido pelo usuário para cada sistema a ser resolvido.

Iniciar - rotinas responsáveis pelo cálculo dos valores iniciais das variáveis de folga e dos multiplicadores de Lagrange.

Topologia - fornece a topologia da rede, ou seja, descreve as ligações existentes entre as barras do sistema. É de fundamental importância para a criação do vetor gradiente e da matriz Lagrangiana.

Gradiente - constrói o vetor gradiente da função FLBPA

FLBPA - rotinas responsáveis pela construção da matriz hessiana da função FLBPA, construída em um formato vetorial.

MA28ad - rotina responsável pela fatoração LU. Na chamada desta rotina, fornece-se como informação a matriz hessiana da função FLBPA no formato vetorial.

MA28cd - rotina responsável pela solução do sistema de equações resultante da aplicação do método quasi-Newton. Na chamada desta rotina, é fornecido como informação a matriz hessiana da função FLBPA e o vetor gradiente.

Atualização - rotinas responsáveis pela atualização das variáveis do problema de fluxo de potência ótimo e do parâmetro de barreira.

Saída - gera o arquivo de saída que contém os resultados obtidos pelo programa, ou seja, os valores das magnitudes de tensão, ângulos, *taps* e reativos.

O critério de parada do programa de FPO é satisfazer as equações do fluxo de potência dentro de uma tolerância e as condições de KKT, minimizando a função objetivo.

Observa-se, no sistema (6.9), que a matriz hessiana (W) da função FLBPA tem uma estrutura esparsa. Verifica-se que, em sistemas reais, o “grau de esparsidade” dessa matriz, cresce com o aumento das dimensões da rede elétrica. Em virtude da sua esparsidade, o armazenamento de (W) foi realizado de forma compacta, isto é, somente os elementos diferentes de zero foram armazenados - com o auxílio do módulo Topologia. Aplica-se a técnica de esparsidade fornecida pela rotina MA28.f, desenvolvida pelo Grupo de Algoritmos Numéricos do Laboratório de *Harwell*, do *United Kingdom Atomic Energy Authority*. Essa rotina determina a solução de sistemas lineares esparsos, utilizando uma variante da eliminação de Gauss para esses sistemas,

conforme Duff & Reid (1979). Os principais parâmetros utilizados na sub-rotina MA28 são:

n: ordem da matriz hessiana (W) da função FLBPA;

nz: número de elementos diferentes de zero da matriz W ;

a: vetor contendo os elementos diferentes de zero da matriz W ;

irn: vetor contendo a posição da linha dos elementos diferentes de zero da matriz W ;

lirn: dimensão do vetor irn, $lirn \geq nz$

icn: vetor contendo a posição da coluna dos elementos diferentes zero da matriz W ;

licn: dimensão do vetor a e do icn, $licn \geq 2nz$;

x: vetor contendo os elementos do vetor gradiente; após a solução do sistema linear o vetor x retorna da rotina MA28.f com os elementos do vetor direção de busca Δd do sistema (6.9): $W\nabla d = -\nabla FLBPA$.

A rotina MA28.f faz a fatoração LU de uma matriz simétrica de posição. Essa rotina realiza todo o processo numérico para a solução do sistema com duas matrizes: uma triangular superior e outra inferior. A matriz hessiana da FLBPA gerada no processo de solução do problema de FPO é simétrica de valor e de posição, portanto não existe a necessidade de trabalhar com essa matriz completa. Pode-se usar apenas uma matriz triangular superior ou inferior, com isso, economiza-se em memória e tempo de processamento, uma vez que o número de elementos é bem menor. Logo, a rotina MA28.f não é a ideal para o problema, porém era a melhor rotina que estava à disposição durante a execução do trabalho de Sousa (2006).

No próximo capítulo apresenta-se os resultados numéricos parciais obtidos da aplicação do método da função FLBPA ao problema de FPO, discutindo seu desempenho.

CAPITULO 7

RESULTADOS

Neste capítulo apresentam-se os resultados numéricos correspondentes a aplicação do método da FLBPA a um problema numérico teste e aos problemas de FPO referente ao sistema elétrico de 3 barras, apresentado por Dommel e Tynney (1968) e aos sistemas elétricos do IEEE de 14, 30 e 162 barras.

7.1 Problema numérico teste

Seja o seguinte problema de otimização, encontrado em Bazaraa *et al.* (1993):

$$\begin{aligned} \min & (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 \\ \text{s.a. : } & x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ & x_1^2 - x_2 \leq 0 \end{aligned} \quad (7.1)$$

A FLBPA associada ao problema (6.1) é dada por:

$$FLBPA = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 + \sigma s a_1 - \mu \left(\log \left((s a_1 + s_1) s a_1 \right) \right) - \pi \left((x_1^2 - x_2) + s_1 \right) - \lambda (x_1 + x_2 - 3) \quad (7.2)$$

As condições necessárias de primeira-ordem são aplicadas a (7.2), gerando um sistema de equações não-lineares, como segue:

$$\nabla FLBPA = 0, \quad (7.3)$$

sendo:

$$\nabla FLBPA = \begin{pmatrix} 4(x_1 - 2)^3 + 2(x_1 - 2x_2) - 2\pi x_1 - \lambda \\ -4(x_1 - 2x_2) + \pi - \lambda \\ \frac{-\mu}{s a_1 + s} - \pi \\ \sigma \frac{\mu(2s a_1 + s_1)}{(s a_1 + s_1) s a_1} \\ -((x_1^2 - x_2) + s_1) \\ -(x_1 + x_2 - 3) \end{pmatrix}$$

Um método quasi-Newton é aplicado ao sistema de equações não-lineares (7.3) para determinar as direções de busca das variáveis; $x, s_1, sa_1, \pi, \lambda$, o que resulta em:

$$Hess_1 d = -\nabla FLBPA \quad (7.4)$$

em que:

$$Hess_1 = \begin{pmatrix} 12(x_1 - 2)^2 + 2 - 2\pi & -4 & 0 & 0 & -2x_2 & -1 \\ -4 & 8 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{(sa_1 + s_1)^2} & \frac{\mu}{(sa_1 + s_1)^2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu sa_1^2}{((sa_1 + s_1) sa_1)^2} & \frac{\mu(2sa_1^2 + 2s_1 sa_1 - s_1^2)}{((sa_1 + s_1) sa_1)^2} & 0 & 0 \\ -2x_1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sendo:

$$M = \begin{pmatrix} 12(x_1 - 2)^2 + 2 - 2\pi & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix},$$

a matriz hessiana que é calculada de maneira aproximada pelo método BFGS, $d^T = (d^x, d^s, d^{sa}, d^\pi, d^\lambda)$ e $\nabla FLBPA$ é apresentado em (7.3).

O algoritmo foi implementado utilizando o software Matlab (<http://www.mathworks.com>) em um microcomputador com processador Intel i5 M430 de 2.27GHz, 4 Gb de memória RAM e sistema operacional Windows 7 de 64 bits.

O vetor das variáveis $d^T = (d^x, d^s, d^{sa}, d^\pi, d^\lambda)$ é atualizado usando (5.6). O parâmetro de penalidade σ , e o parâmetro de barreira μ por (4.15) e (4.16), respectivamente. Os valores iniciais são: parâmetro de barreira $\mu = 0,50$, parâmetro de penalidade $\sigma = 4$ e fator de barreira $c = 2$. Foi adotada uma tolerância de 10^{-2} .

A Tabela 7.1 apresenta o processo de convergência do método da FLBPA aplicado ao problema (7.1).

I	x1	x2	s	sa	∇_{x1}	∇_{x2}	f(x)
10	0	1	2	1	27	8	20
1	1.47861	0.5928	0.00028	0.00074	4.6	-0.43	0.1597
2	1.30251	1.69748	0.0010	0.0028	-0.56	-0.0059	4.615
3	1.30261	1.69738	0.0005	0.0087	-0.0000002	0.0000008	4.612

Tabela 7.1 - Processo de convergência do problema numérico teste

Observa-se que o processo convergiu em 3 iterações.

7.2 Problemas de FPO

7.2.1 Sistema elétrico teste de 3 barras

Este exemplo foi proposto por Dommel e Tinney (1968) e tem como finalidade exemplificar a aplicação do método da FLBPA. O sistema de 3 barras, da Figura 7.1, tem as seguintes características:

- 1 barra de referência (*Slack* - SL) – barra 1;
- 1 barra de controle de reativo (CR) – barra 2;
- 1 barra de carga (CG) – barra 3;
- 2 linhas de transmissão.

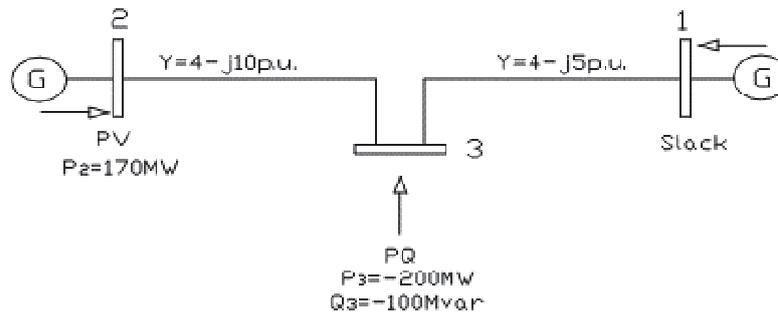


Figura 7.1 - Sistema elétrico de 3 barras

Na formulação do problema de FPO associado ao sistema da figura (7.1), tem-se para a barra de controle de reativo, uma equação de balanço da rede (ΔP_2). Para a barra de carga têm-se duas equações de balanço da rede (ΔP_3 e ΔQ_3). Para a barra de controle de reativo, tem-se a restrição canalizada de geração de potência reativa ($Q_2(V, \theta)$). Todas as tensões são canalizadas, possuindo limites mínimos e máximos.,

$$\begin{aligned}
 & \min f(V, \theta) \\
 & \text{s.a. : } \Delta P_2 = 0 \\
 & \quad \Delta P_3 = 0 \\
 & \quad \Delta Q_3 = 0 \\
 & \quad \underline{Q}_2 \leq Q_2(V, \theta) \leq \bar{Q}_2 \\
 & \quad \underline{V}_1 \leq V_1 \leq \bar{V}_1 \\
 & \quad \underline{V}_2 \leq V_2 \leq \bar{V}_2 \\
 & \quad \underline{V}_3 \leq V_3 \leq \bar{V}_3
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

sendo:

$$f(V, \theta) = g_{23}(V_2^2 + V_3^2 - 2V_2V_3\cos\theta_{23}) + g_{31}(V_3^2 + V_1^2 - 2V_3V_1\cos\theta_{31})$$

$$\Delta P_2 = P_2^G - P_2^C - V_2 \sum_{i=1}^3 V_i (G_{2i}\cos\theta_{2i} + B_{2i}\sin\theta_{2i})$$

$$\Delta P_3 = P_3^G - P_3^C - V_3 \sum_{i=1}^3 V_i (G_{3i}\cos\theta_{3i} + B_{3i}\sin\theta_{3i})$$

$$\Delta Q_3 = Q_3^G - Q_3^C - V_3 \sum_{i=1}^3 V_i (G_{3i}\sin\theta_{3i} - B_{3i}\cos\theta_{3i})$$

$$Q_2(V, \theta) = V_2 \sum_{i=1}^3 V_i (G_{2i}\sin\theta_{2i} - B_{2i}\cos\theta_{2i})$$

A resolução do problema (7.4) pelo método da FLBPA exige que as variáveis canalizadas sejam transformadas em desigualdades do tipo “menor ou igual”. A cada desigualdade é associada uma folga s_j , $j = 1, \dots, 8$.

$$\begin{aligned} \min \quad & F(V, \theta) \\ \text{s.a.:} \quad & \Delta P_2 = 0 \\ & \Delta P_3 = 0 \\ & \Delta Q_3 = 0 \\ & Q_2(V, \theta) - \bar{Q}_2 + s_1 = 0 \\ & -Q_2(V, \theta) + \underline{Q}_2 + s_2 = 0 \\ & V_1 - \bar{V}_1 + s_3 = 0 \\ & -V_1 + \underline{V}_1 + s_4 = 0 \\ & V_2 - \bar{V}_2 + s_5 = 0 \\ & -V_2 + \underline{V}_2 + s_6 = 0 \\ & V_3 - \bar{V}_3 + s_7 = 0 \\ & -V_3 + \underline{V}_3 + s_8 = 0 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Essas variáveis de folga são relaxadas por uma variável auxiliar sa_j , $j = 1, \dots, 8$ as quais são penalizadas na função objetivo. As igualdades são tratadas através da função Lagrangiana e as desigualdades por uma FBP. Desta forma associa-se a (7.5) a função FLBPA (6.7).

As condições necessárias de primeira ordem são aplicadas a (6.7) gerando um sistema de equações não lineares, o qual é resolvido por um método quasi-Newton obtendo-se as direções de busca para a atualização das variáveis do sistema. O parâmetro de penalidade σ e o parâmetro barreira μ são atualizados por (4.15) e (4.16) respectivamente.

Os valores iniciais: do parâmetro de barreira foi de $\mu = 1$, parâmetro de penalidade $\sigma = 1$ e fator de correção de barreira $c = 1,2$. Os limites utilizados para o nível de tensão e geração de reativos são mostrados na Tabela 7.2.

Barra K	Tipo	\underline{V}_k	\bar{V}_k	P_K^g	P_K^c	Q_K^g	Q_K^c	\underline{Q}_k	\bar{Q}_k
1	SL	0,95	1,10	-	-		-	-99,99	99,99
2	CR	0,95	1,20	1,70	0,00	-	-	-99,99	99,99
3	CG	0,99	1,02	0,00	2,00	0,00	1,00	-	-

Tabela 7.2 - Limites para as tensões e reativos do sistema teste de 3 barras

A Tabela 7.3 apresenta o processo de convergência do método para o sistema elétrico de 3 barras, onde I0 representa os valores atribuídos inicialmente e P as perdas, em MW, de Potência Ativa do sistema.

I	V_1	V_2	V_3	θ_2 (°)	θ_3 (°)	Q_2	ΔQ_3	ΔP_3	ΔP_2	P
I0	1	1	1	-2,00	-5,00	0,99	-1,174	1,065	1,589	4,11
1	1,07	1,11	0,99	7,30	0,30	0,79	0,006	0,004	0,118	13,75
2	1,05	1,13	0,99	3,70	-1,80	1,12	0,000	0,001	-0,000	13,09
3	1,06	1,13	1,00	3,50	-2,00	1,14	0,000	0,000	0,000	13,19

Tabela 7.3 - Convergência do sistema teste de 3 barras para o método da FLBPA

Os valores dos multiplicadores de Lagrange, os valores das variáveis de folga e os valores das variáveis auxiliares são apresentados nas Tabelas 7.4, 7.5 e 7.6, respectivamente. Em todas as tabelas os valores foram considerados em p.u..

I	λ_1	λ_2	λ_3	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_7	π_8
I0	0	0	0	0,00	0,00	0,91	0,95	0,83	0,95	1,00	1,00
1	0,10	0,18	0,11	0,00	0,00	1,35	0,58	0,63	0,00	4,01	6,58
2	0,06	0,05	0,05	0,00	0,00	0,48	0,53	0,72	0,31	2,23	2,20
3	0,00	0,14	0,07	0,00	0,00	0,68	0,30	0,44	0,17	1,30	1,51

Tabela 7.4 - Multiplicadores de Lagrange

I	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄	s ₅	s ₆	s ₇	s ₈
I0	100,19	99,79	0,10	0,05	0,20	0,05	0,00	0,00
1	99,31	100,66	0,03	0,12	0,10	0,15	0,03	0,00
2	98,88	101,01	0,05	0,10	0,05	0,18	0,03	0,00
3	98,85	101,13	0,05	0,11	0,07	0,18	0,03	0,01

Tabela 7.5 - Variáveis de folga

I	sa ₁	sa ₂	sa ₃	sa ₄	sa ₅	sa ₆	sa ₇	sa ₈
I0	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020
1	0,0000	0,0000	0,0002	0,0003	0,0001	0,0002	0,0012	0,0015
2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0014
3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0010

Tabela 7.6 - Variáveis auxiliares

O sistema convergiu em 3 iterações. O ponto de operação obtido atingiu a mesma solução do método proposto por Dommel & Tinney (1968), com uma precisão de 10^{-4} p.u. Na solução do problema, as restrições de igualdade e desigualdade e as condições

de KKT estão satisfeitas.

7.2.2 Sistema IEEE 14 barras

A Figura 7.2 apresenta o sistema elétrico IEEE 14 barras, que possui as seguintes características:

- 1 barra de geração (*slack*);
- 4 barras de controle reativo;
- 9 barras de carga;
- 17 linhas de transmissão;
- 3 transformadores com *tap* variável.

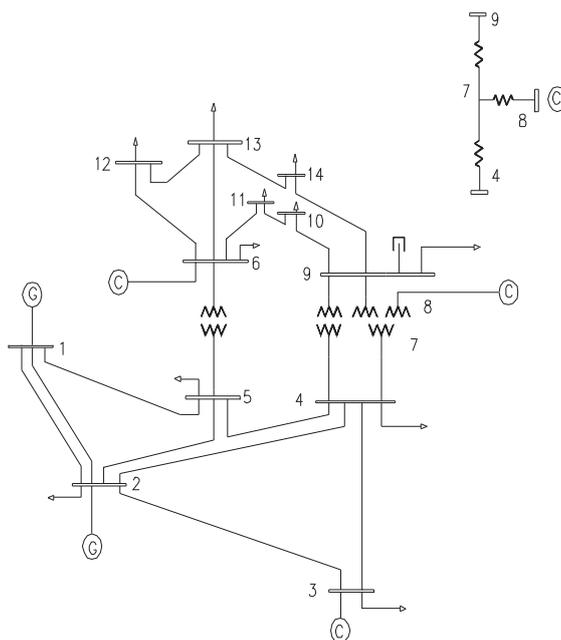


Figura 7.2 – Sistema IEEE 14 barras

Os parâmetros iniciais para o sistema IEEE 14 barras foram $\mu = 0,001$, $\sigma = 1,0$ e $c = 1,1$. O processo convergiu em 3 iterações com um total de geração de potência

reativa de 76,49 MVAR e um total de perdas de potência ativa de 12,55 MW. O processo de otimização está resumido na Tabela 7.7. O tempo de processamento foi de 0,05 segundos.

I	P (MW)	ΔP (MW)	ΔQ (MVAR)
I0	13,45	23,52	5,64
1	12,51	11,87	3,03
2	12,48	0,18	0,12
3	12,55	0,00	0,00
4	12,45	0,00	0,00

**Tabela 7.7 - Processo de otimização do sistema
IEEE 14 barras para o método da FLBPA**

No estado final do sistema IEEE 14 barras, todas as tensões e potências reativas permaneceram dentro dos seus limites; a solução final obedeceu a todas as restrições do sistema, satisfazendo as condições de KKT com uma precisão de 10^{-4} p.u. No apêndice B encontramos o estado final das tensões

7.2.3 Sistema IEEE 30 Barras

O sistema IEEE 30 barras é mostrado na Figura 7.3 e tem as seguintes características:

- 1 barra de geração (*slack*);
- 5 barras de controle de reativo;
- 24 barras de carga;
- 41 linhas de transmissão;
- 4 transformadores com o *tap* variável.

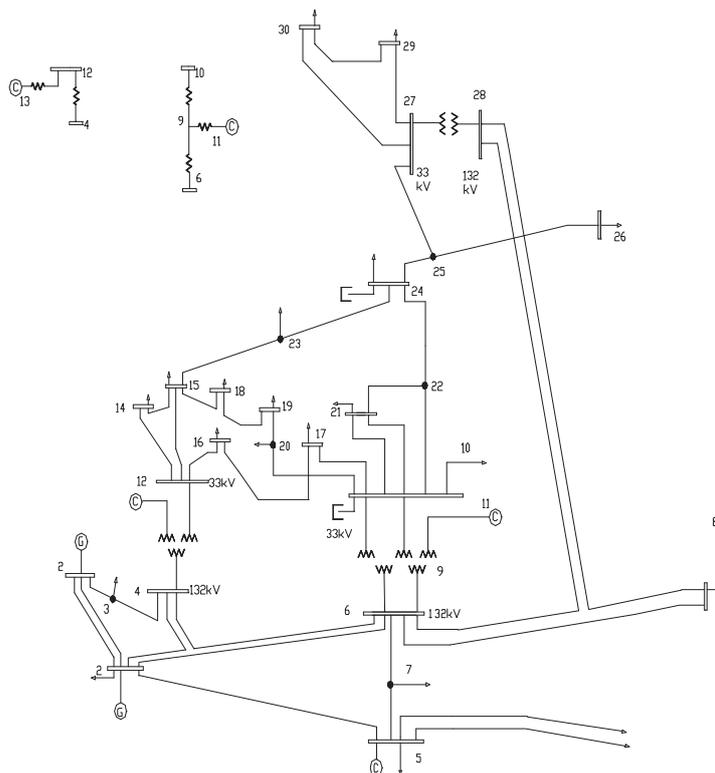


Figura 7.3 – Sistema IEEE 30 barras

Os parâmetros iniciais para o sistema IEEE 30 barras foram $\mu = 0,01$, $\sigma = 1,0$ e $c = 1,1$. O processo de otimização convergiu em 3 iterações com um total de geração de potência reativa de 149,11 MVar e um total de perdas de potência ativa de 16,45 MW. O tempo de processamento foi de 0,06 segundos. O processo de otimização está resumido na Tabela 7.8.

I	P (MW)	ΔP (MW)	ΔQ (MVAR)
I0	17,84	47,40	75,20
1	16,97	5,46	7,26
2	16,52	1,61	1,59
3	16,45	0,00	0,00

Tabela 7.8 - Processo de otimização do sistema IEEE 30 barras para o método da FLBPA

No estado final do sistema IEEE 30 barras, todas as tensões e potências reativas permaneceram dentro dos seus limites; a solução final obedeceu a todas as restrições do sistema, satisfazendo as condições de KKT com uma precisão de 10^{-3} p.u.. No apêndice B encontramos o estado final das tensões

7.2.4 Sistema IEEE 162 Barras

O sistema elétrico IEEE 162 barras possui as seguintes características:

- 1 barra de geração (*slack*);
- 11 barras de controle de reativo;
- 150 barras de carga;
- 280 linhas de transmissão;
- 43 transformadores com o *tap* variável.

Os parâmetros iniciais para o sistema IEEE 162 barras foram $\mu = 0,01$, $\sigma = 1,0$ e $c = 1,3$. O processo convergiu em 5 iterações com um total de geração de potência reativa de 658,89 MVAR e um total de perdas de potência ativa de 150,85 MW. O processo de otimização está resumido na Tabela 7.9 e o tempo de processamento foi de 0,47 segundos.

I	P (MW)	ΔP (MW)	ΔQ (MVAR)
I0	166,89	526,01	124,98
1	155,71	30,17	10,16
2	152,82	1,09	0,73
3	152,06	0,13	0,56
4	151,46	0,12	0,53
5	150,85	0,02	0,04

Tabela 7.9 - Processo de otimização do sistema IEEE 162 barras para o método da FLBPA

No estado final do sistema IEEE 162 barras, todas as tensões e potências reativas permaneceram dentro dos seus limites; a solução final obedeceu a todas as restrições do sistema, satisfazendo as condições de KKT com uma precisão de 10^{-3} p.u. No apêndice B encontramos o estado final das tensões

Nos exemplos apresentados, o método FLBPA convergiu de modo efetivo e obteve o ponto de operação dos sistemas testados com um número de iterações e com um tempo de processamento aceitáveis. Assim, pode-se afirmar que o método da FLBPA é eficiente e robusto para a solução do problema de FPO reativo.

O algoritmo foi implementado em linguagem de programação FORTRAN, utilizando um microcomputador com processador Intel Core 2 Duo de 2.2 GHz, 3,7 GB de memória RAM.

No próximo capítulo apresentam-se as conclusões do trabalho e as perspectivas de continuidade deste.

CAPITULO 8

CONCLUSÕES

Neste trabalho propõe-se uma adaptação do método barreira penalidade quasi-Newton apresentado por Armand em 2003, para a resolução do problema de Fluxo de Potência Ótimo. Armand em seu método relaxa as restrições de desigualdades por um fator positivo que passa a ser penalizado na função objetivo. O novo problema restrito é então transformado em irrestrito usando uma função barreira penalidade e um método quasi-Newton é utilizado para resolver o problema. Na adaptação proposta as restrições de desigualdade são transformadas em igualdades através de variáveis de folga positivas. Estas variáveis de folga são relaxadas utilizando-se variáveis auxiliares positivas as quais são incorporadas a função objetivo através de um termo de penalização. Desta forma as restrições de igualdade são tratadas através da função lagrangiana e as de desigualdade utilizando uma função barreira penalidade.

O Algoritmo é composto por um ciclo interno e um externo. No ciclo interno é utilizada uma técnica quasi-Newton para o cálculo das direções e é determinado o tamanho do passo. No ciclo externo os parâmetros de barreira e penalidade são atualizados através de regras pré-definidas até que os critérios de factibilidade sejam satisfeitos.

A principal diferença entre a nossa adaptação e o método apresentado por Armand (2003) é o fato que resolvemos o sistema gerado pelas condições de otimalidade aplicado a função FLBPA diretamente e a não utilização de técnicas de centralização.

O método da FLBPA foi aplicado na resolução do problema de FPO. Para a resolução do mesmo utilizou-se o programa computacional desenvolvido em Sousa (2006) e realizou-se adaptações para o nosso método. Para o tratamento da esparsidade da matriz hessiana houve também o aproveitamento das técnicas utilizadas na implementação computacional.

Testes computacionais foram realizados, com sucesso, utilizando problemas matemáticos e os problema de FPO referentes aos sistemas de 3,14,30 e 162 barras.

A contribuição do trabalho está focada na adaptação de uma metodologia e na resolução do problema de FPO por essa metodologia.

Como trabalhos futuros podemos citar:

- comparação com outros métodos existentes;
- implementação computacional em C++ e utilizando pacotes computacionais já prontos como o GAMS (*General Algebraic Modeling Systems*);
- determinação de regras especiais para o cálculo do tamanho do passo;
- testes com novas atualizações dos parâmetros de penalidade e barreira.

APÊNDICE A

BANCO DE DADOS DOS SISTEMAS ELÉTRICOS

Banco de dados do sistema TESTE

1	1	barra1	1000	0.	0.0	0.0-9999	9999	0.0	0.0
2	-1	barra2	1000	-2.	170	0.0-9999	9999	0.0	0.0
3	0	barra3	1000	-5.	0.0	0.0		200.	100.
9999									
2		3	3.44838.	6206					
3		1	9.756112.	195					
9999									
1	0.95	1.10							
2	0.95	1.20							
3	1.00	1.00							
9999									
		900							
9999									

Sistema Elétrico IEEE 14 barras

1	1	barra1	1060	0.	0.0	0.0-9999	9999	0.0	0.0
2	-1	barra2	1045	-5.	0.0	0.0	-40 50	-18.3	12.7
3	-1	barra3	1010-13.	0.0	0.0	0	40	94.2	19.0
4	0	barra4	1019-10.	0.0	0.0			47.8	-3.9
5	0	barra5	1020-8.8	0.0	0.0			7.6	1.6
6	-1	barra6	1070-14.	0.0	0.0	-6	24	11.2	7.5
7	0	barra7	1062-13.	0.0	0.0			0.0	0.0
8	-1	barra8	1090-13.	0.0	0.0	-6	24	0.0	0.0
9	0	barra9	1056-15.	0.0	0.0			29.5	16.6
10	0	barra10	1051-15.	0.0	0.0			9.0	5.8
11	0	barra11	1057-15.	0.0	0.0			3.5	1.8
12	0	barra12	1055-15.	0.0	0.0			6.1	1.6
13	0	barra13	1050-15.	0.0	0.0			13.5	5.8
14	0	barra14	1036-16.	0.0	0.0			14.9	5.0

19

9999					
1	2	1.938	5.917	5.28	900
1	5	5.40322	3.304	4.92	900
2	3	4.69919	7.797	4.38	900
2	4	5.81117	6.632	3.74	900
2	5	5.69517	7.388	3.40	900
3	4	6.70117	7.103	3.46	900
4	5	1.335	4.211	1.28	900
4	7		20.912	0.9780.9501.050	900
4	9		55.618	0.9690.9501.050	900
5	6		25.202	0.9320.9501.050	900
6	11	9.49819	8.890		900
6	12	12.29125	5.581		900
6	13	6.61513	0.027		900
7	8	0.00117	7.615		900
7	9		11.001		900
9	10	3.181	8.450		900
9	14	12.71127	0.038		900
10	11	8.20519	2.207		900
12	13	22.09219	9.988		900
13	14	17.09334	4.802		900
9999					
	0.95	1.10			
9999					
		100			
9999					

Sistema Eléctrico IEEE 30 barras

1	1	BARRA1	SLACK	1053	.0	-9999	9999	0.	0.	
2	-1	BARRA2	GERA.	1032	-.09	-40.	50.	-18.3	12.7	
3	0	BARRA3	CARG.	1018	-.14			2.4	1.2	
4	0	BARRA4	CARG.	1010	-.17			7.6	1.6	
5	-1	BARRA5	C.RE.	1010	-.25	-40.	40.	94.2	19.0	
6	0	BARRA6	CARG.	1004	-.20			.0	.0	
7	0	BARRA7	CARG.	998	-.23			22.8	10.9	
8	-1	BARRA8	C.RE.	1010	-.21	-10.	40.	30.0	30.0	
9	0	BARRA9	CARG.	1017	-.26			.0	.0	
10	0	BARRA10	CARG	1015	-.29			5.8	2.0	19.
11	-1	BARRA11	C.RE	1072	-.26	-6.	24.	.0	.0	
12	0	BARRA12	CARG	1019	-.27			11.2	7.5	
13	-1	BARRA13	C.RE	1057	-.27	-6.	24.	.0	.0	
14	0	BARRA14	CARG	1005	-.29			6.2	1.6	
15	0	BARRA15	CARG	1001	-.29			8.2	2.5	
16	0	BARRA16	CARG	1010	-.29			3.5	1.8	
17	0	BARRA17	CARG	1008	-.29			9.0	5.8	
18	0	BARRA18	CARG	994	-.30			3.2	0.9	
19	0	BARRA19	CARG	992	-.31			9.5	3.4	
20	0	BARRA20	CARG	997	-.30			2.2	0.7	
21	0	BARRA21	CARG	1003	-.30			17.5	11.2	
22	0	BARRA22	CARG	1004	-.29			.0	.0	

APÉNDICE A

23	0	BARRA23	CARG	994-	.30				3.2	1.6	
24	0	BARRA24	CARG	994-	.30				8.7	6.7	4.3
25	0	BARRA25	CARG	1001-	.29				.0	.0	
26	0	BARRA26	CARG	983-	.30				3.5	2.3	
27	0	BARRA27	CARG	1013-	.28				.0	.0	
28	0	BARRA28	CARG	997-	.21				.0	.0	
29	0	BARRA29	CARG	993-	.31				2.4	0.9	
30	0	BARRA30	CARG	982-	.32				10.6	1.9	
9999											
1	2			1.92	5.75	2.64					9000
1	3			4.52	18.52	2.04					9000
2	4			5.70	17.37	1.84					9000
3	4			1.32	3.79	0.42					9000
2	5			4.72	19.83	2.09					9000
2	6			5.81	17.63	1.87					9000
4	6			1.19	4.14	0.45					9000
5	7			4.60	11.60	1.02					9000
6	7			2.67	8.20	0.85					9000
6	8			1.20	4.20	0.45					9000
6	9			.0	20.80		1.0380.9501.05				9000
6	10			.0	55.60		0.9560.9501.05				9000
9	11			.001	20.80						9000
9	10			.001	11.00						9000
4	12			.0	25.60		1.0150.9501.05				9000
12	13			.0	14.00						9000
12	14			12.31	25.59						9000
12	15			6.62	13.04						9000
12	16			9.45	19.87						9000
14	15			22.10	19.97						9000
16	17			8.24	19.23						9000
15	18			10.70	21.85						9000
18	19			6.39	12.92						9000
19	20			3.40	6.80						9000
10	20			9.36	20.90						9000
10	17			3.24	8.45						9000
10	21			3.48	7.49						9000
10	22			7.27	14.99						9000
21	22			1.16	2.36						9000
15	23			10.00	20.20						9000
22	24			11.50	17.90						9000
23	24			13.20	27.00						9000
24	25			18.85	32.92						9000
25	26			25.44	38.00						9000
25	27			10.93	20.87						9000
28	27			0.0	39.60		.9580.9501.05				9000
27	29			21.98	41.53						9000
27	30			32.02	60.27						9000
29	30			23.99	45.33						9000
8	28			6.36	20.00	2.14					9000
6	28			1.69	5.99	0.65					9000
9999											
9999	0.95			1.1							
9999				100.							
9999											

58	0	4	2	1008-29.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
59	0	4	2	984-33.	0.	0.	0.	0.	84.	27.	0.
60	0	7	1	992-34.-244.	-26.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
61	0	4	2	983-31.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
62	0	4	2	1023-18.	866.	71.	0.	0.	0.	0.	0.
63	0	4	2	988-30.	-59.	3.	0.	0.	0.	0.	0.
64	0	3	3	1015-29.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
65	0	3	3	996-25.	26.	-116.	0.	0.	0.	0.	0.
66	0	3	3	1000-31.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	-50.
67	0	5	1	999-42.	0.	0.	0.	0.	23.	7.	6.
68	0	5	1	1013-40.	0.	0.	0.	0.	40.	13.	12.
69	0	5	1	1020-39.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
70	0	5	1	1026-24.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
71	0	5	1	992-32.	0.	0.	0.	0.	30.	12.	12.
72	0	5	1	1016-31.-427.	-110.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
73	1	G		1000-18.	447.	86.	-72.	267.	0.	0.	0.
74	0	3	3	1011-34.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
75	0	3	3	1029-25.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	-50.
76	1	G		1000-16.	1055.	136.	-170.	605.	0.	0.	0.
77	0	5	1	1011-40.	0.	0.	0.	0.	26.	9.	5.
78	0	5	1	1022-38.	0.	0.	0.	0.	79.	0.	0.
79	0	5	1	1031-36.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
80	0	5	1	1009-38.	0.	0.	0.	0.	16.	5.	3.
81	0	8		1000-46.	0.	0.	0.	0.	51.	17.	22.
82	0	5	1	998-42.	0.	0.	0.	0.	62.	20.	10.
83	0	T	1	1003-41.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
84	0	5	1	1009-38.	0.	0.	0.	0.	38.	9.	3.
85	0	5	1	970-41.	0.	0.	0.	0.	41.	11.	12.
86	0	5	1	969-45.	0.	0.	0.	0.	51.	13.	12.
87	0	7	1	979-44.	0.	0.	0.	0.	17.	4.	0.
88	0	8		988-45.	0.	0.	0.	0.	61.	4.	0.
89	0	7	1	990-46.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
90	0	7	1	961-49.	0.	0.	0.	0.	50.	17.	10.
91	0	5	1	1012-37.	0.	0.	0.	0.	51.	13.	0.
92	0	5	1	1002-38.	0.	0.	0.	0.	36.	9.	0.
93	0	5	1	1029-33.	0.	0.	0.	0.	104.	35.	0.
94	0	5	1	1026-37.	0.	0.	0.	0.	164.	6.	0.
95	0	7	1	1029-37.	0.	0.	0.	0.	117.	39.	0.
96	0	7	1	1001-45.	0.	0.	0.	0.	119.	0.	0.
97	0	7	1	1026-37.	0.	0.	0.	0.	23.	6.	0.
98	0	7	1	1044-35.	0.	30.	0.	0.	151.	50.	0.
99	1	G		1000-31.	131.	5.	-61.	76.	0.	0.	0.
100	0	7	1	987-46.	0.	0.	0.	0.	23.	7.	3.
101	1	G		1000-40.	82.	30.	-24.	39.	0.	0.	0.
102	0	5	1	1003-37.	0.	0.	0.	0.	17.	4.	0.
103	0	5	1	1014-35.-322.	46.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
104	0	7	1	992-45.	0.	0.	0.	0.	32.	10.	6.
105	0	7	1	1033-39.	0.	0.	0.	0.	25.	6.	2.
106	0	5	1	994-43.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
107	0	5	1	990-44.	0.	0.	0.	0.	35.	5.	0.
109	0	3	3	1013-33.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
110	0	5	1	1027-30.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
111	0	5	1	1005-34.	0.	0.	0.	0.	65.	17.	0.
112	0	3	3	1027-27.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	-50.
113	0	5	1	1025-31.	-33.	95.	0.	0.	0.	0.	0.
114	1	G		1000-24.	131.	22.	-25.	33.	0.	0.	0.
115	0	5	1	1017-36.	0.	0.	0.	0.	17.	3.	0.
116	0	5	1	1024-37.	0.	0.	0.	0.	56.	11.	0.
117	0	5	1	1014-38.	0.	0.	0.	0.	102.	20.	0.
118	1	G		1000-34.	173.	60.	-44.	100.	0.	0.	0.
119	0	3	3	1009-35.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.

APÉNDICE A

120	0	3	3	1023-27.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
121	1	G		1000-20.	620.	151.-120.	250.		0.	0.	0.
122	0	5	1	988-46.	0.	0.	0.	0.	47.	9.	0.
123	0	5	1	999-46.-165.	55.	0.	0.		0.	0.	0.
124	0	3	3	1008-31.2571.	0.	0.	0.		2000.	91.	0.
125	1	0	3	1019-29.2388.	-23.-10999900.				2000.	0.	0.
126	0	3	3	1010-27.2467.	64.	0.	0.		2000.	0.	0.
127	0	3	3	984-30.	53.	-65.	0.	0.		0.	0.
128	0	3	3	1023-27.	0.	0.	0.	0.		0.	0.
129	0	3	3	1024-27.	0.	0.	0.	0.		0.	0.
130	1	G		1029-19.	455.	123.-144.	288.		0.	0.	0.
131	1	G		1018-20.	575.	95.-265.	320.		0.	0.	0.
132	0	5	1	1019-30.-159.	-36.	0.	0.		0.	0.	0.
133	0	8		1035-32.	0.	0.	0.	0.	30.	6.	0.
134	0	5	1	1023-31.	0.	0.	0.	0.	17.	3.	0.
135	0	8		1031-32.	0.	0.	0.	0.	20.	4.	0.
136	0	8		1025-32.	0.	0.	0.	0.	20.	4.	0.
137	0	8		1029-32.	0.	0.	0.	0.	20.	4.	0.
138	0	8		1031-31.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
139	0	8		1026-32.	0.	0.	0.	0.	10.	2.	0.
140	0	8		1028-32.	0.	0.	0.	0.	14.	3.	0.
141	0	5	1	1002-34.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
142	0	8		1027-41.	0.	0.	0.	0.	27.	5.	0.
143	0	8		1005-39.	0.	0.	0.	0.	21.	4.	0.
144	0	8		1021-36.	0.	0.	0.	0.	12.	2.	0.
145	0	8		1018-34.	0.	0.	0.	0.	11.	2.	0.
146	0	8		1009-40.	0.	0.	0.	0.	21.	4.	0.
147	0	5	1	1010-39.	0.	0.	0.	0.	216.	43.	0.
148	0	8		1013-40.	0.	0.	0.	0.	120.	24.	0.
149	0	5	1	1025-24.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
150	0	5	1	1023-24.	0.	0.	0.	0.	5.	2.	0.
151	0	5	1	1009-27.	0.	0.	0.	0.	24.	8.	0.
152	0	5	1	1023-27.	-6.	3.	0.	0.	0.	0.	0.
153	0	8		1017-26.	0.	0.	0.	0.	4.	2.	0.
154	0	8		974-32.	0.	0.	0.	0.	28.	10.	6.
155	0	8		985-30.	0.	0.	0.	0.	12.	4.	0.
156	0	8		978-32.	0.	0.	0.	0.	8.	2.	0.
157	0	8		980-33.	0.	0.	0.	0.	32.	10.	0.
158	0	8		968-33.	0.	0.	0.	0.	16.	6.	3.
159	0	8		968-33.	0.	0.	0.	0.	8.	2.	0.
160	0	8		971-33.	0.	0.	0.	0.	14.	5.	3.
161	0	5	1	1003-28.	0.	0.	0.	0.	32.	10.	0.
162	0	5	1	1000-29.	0.	0.	0.	0.	20.	6.	0.
9999											
1	2			0.35	3.2154.3800.0000.0000.0000					0.	
1	3			0.34	3.2672.2400.0000.0000.0000					0.	
1	4			0.64	6.2198.7000.0000.0000.0000					0.	
1	5			0.11	1.1920.1200.0000.0000.0000					0.	
1	6			0.00	1.33 0.0001.0510.9001.100					0.	
2	7			0.14	1.2521.2200.0000.0000.0000					0.	
2	13			0.46	4.1770.5800.0000.0000.0000					0.	
3	14			23.61101.22	0.0000.0000.0000.0000					0.	
3	50			3.89	16.99 0.0000.0000.0000.0000					0.	
3	103			10.74180.23	0.0000.0000.0000.0000					0.	
3	123			28.83167.19	0.0000.0000.0000.0000					0.	
3	124			1.40	64.83 0.0000.0000.0000.0000					0.	
3	125			0.84	11.39 0.0000.0000.0000.0000					0.	
4	112			0.59	5.6892.5000.0000.0000.0000					0.	
4	115			0.00	1.85 0.0001.0000.9001.100					0.	
4	119			0.14	1.1920.5000.0000.0000.0000					0.	
5	120			0.22	2.2437.9200.0000.0000.0000					0.	

5	129	0.22	2.68	46.12	0000.0000.000	0.
5	131	0.00	1.27	0.00	01.0240.9001.100	0.
7	8	0.04	1.89	0.00	00.9750.9001.100	0.
7	9	0.17	1.69	28.72	0000.0000.000	0.
8	10	45.91	107.03	0.00	0000.0000.000	0.
8	12	1.06	5.74	0.00	0000.0000.000	0.
8	13	12.74	47.84	0.00	0000.0000.000	0.
8	14	4.73	39.56	0.00	0000.0000.000	0.
8	15	50.35	174.33	0.00	0000.0000.000	0.
8	132	2.52	28.80	0.00	0000.0000.000	0.
9	75	0.13	1.50	26.82	0000.0000.000	0.
10	11	0.51	3.70	7.16	0000.0000.000	0.
10	13	12.99	62.20	0.00	0000.0000.000	0.
10	15	12.75	70.33	0.00	0000.0000.000	0.
10	60	25.25	122.42	0.00	0000.0000.000	0.
11	15	2.85	17.93	34.84	0000.0000.000	0.
11	46	1.42	12.25	18.76	0000.0000.000	0.
11	58	1.70	10.70	20.74	0000.0000.000	0.
11	59	0.71	4.71	8.52	0000.0000.000	0.
12	2	0.08	3.77	0.00	01.0250.9001.100	0.
12	13	10.38	31.37	0.00	0000.0000.000	0.
12	14	15.98	64.15	0.00	0000.0000.000	0.
12	132	44.86	157.73	0.00	0000.0000.000	0.
13	15	4.40	32.27	0.00	0000.0000.000	0.
13	62	0.98	12.21	0.00	0000.0000.000	0.
14	72	1.07	8.28	0.00	0000.0000.000	0.
14	113	0.63	3.82	0.00	0000.0000.000	0.
14	132	0.57	3.74	0.00	0000.0000.000	0.
15	58	1.15	7.32	14.20	0000.0000.000	0.
15	60	39.07	167.53	0.00	0000.0000.000	0.
15	62	0.84	5.88	0.00	0000.0000.000	0.
15	63	17.04	145.55	0.00	0000.0000.000	0.
16	17	60.17	143.73	0.00	0000.0000.000	0.
16	18	2.97	10.70	5.46	0000.0000.000	0.
16	27	15.74	88.71	0.00	0000.0000.000	0.
16	126	10.53	51.32	0.00	0000.0000.000	0.
16	127	9.58	52.76	0.00	0000.0000.000	0.
17	18	2.13	10.13	6.42	0000.0000.000	0.
17	19	23.14	76.78	0.00	0000.0000.000	0.
17	21	4.71	26.65	0.00	0000.0000.000	0.
17	127	2.87	26.37	0.00	0000.0000.000	0.
18	30	2.07	10.88	5.20	0000.0000.000	0.
18	32	2.34	12.20	5.82	0000.0000.000	0.
18	37	0.00	4.56	0.00	01.0990.9001.100	0.
19	21	38.67	190.05	0.00	0000.0000.000	0.
19	38	2.39	12.50	5.96	0000.0000.000	0.
19	43	6.03	25.72	0.00	0000.0000.000	0.
19	127	10.74	68.09	0.00	0000.0000.000	0.
20	53	0.00	11.40	0.00	01.0000.9001.100	0.
20	157	1.13	2.79	0.04	00.0000.0000.000	0.
21	22	3.12	16.29	7.78	00.0000.0000.000	0.
21	127	1.05	64.14	0.00	0000.0000.000	0.
22	38	1.40	5.40	2.50	00.0000.0000.000	0.
22	39	0.00	4.93	0.00	01.0980.9001.100	0.
22	40	1.88	7.17	3.28	00.0000.0000.000	0.
22	41	1.72	8.50	4.04	00.0000.0000.000	0.
23	24	1.74	5.11	2.30	00.0000.0000.000	0.
23	60	6.60	30.93	0.00	0000.0000.000	0.
24	25	0.00	3.40	0.00	01.0210.9001.100	0.
24	28	2.49	7.25	2.02	00.0000.0000.000	0.
24	45	1.37	7.25	3.40	00.0000.0000.000	0.

25	26	0.59	5.8393	0.0200	.0000	.0000	.000	0.
25	27	0.44	4.1083	0.8400	.0000	.0000	.000	0.
26	74	0.63	6.0793	0.0000	.0000	.0000	.000	0.
26	75	0.30	3.2250	0.3800	.0000	.0000	.000	0.
26	76	0.00	0.82	0.0001	.0400	.9001	.100	0.
27	31	1.01	12.73	0.0000	.0000	.0000	.000	0.
27	62	1.73	58.10	0.0000	.0000	.0000	.000	0.
27	65	1.05	27.64	0.0000	.0000	.0000	.000	0.
27	125	3.50168	45	0.0000	.0000	.0000	.000	0.
27	126	0.22	2.25	0.0000	.0000	.0000	.000	0.
27	127	15.06143	55	0.0000	.0000	.0000	.000	0.
28	29	2.40	9.65	4.4400	.0000	.0000	.000	0.
29	30	3.80	15.00	6.9600	.0000	.0000	.000	0.
29	31	2.06	8.33	3.8400	.0000	.0000	.000	0.
30	32	2.49	10.05	4.5800	.0000	.0000	.000	0.
32	33	1.14	4.48	2.0800	.0000	.0000	.000	0.
33	34	2.80	11.40	5.2000	.0000	.0000	.000	0.
33	35	2.16	10.70	5.1000	.0000	.0000	.000	0.
33	36	1.02	5.36	2.5400	.0000	.0000	.000	0.
34	40	3.97	15.17	6.9000	.0000	.0000	.000	0.
34	77	2.35	8.96	4.0800	.0000	.0000	.000	0.
35	40	2.71	13.41	6.3800	.0000	.0000	.000	0.
36	67	1.76	9.24	4.4000	.0000	.0000	.000	0.
37	39	0.39	3.7967	0.0000	.0000	.0000	.000	0.
37	126	0.40	3.8167	0.0000	.0000	.0000	.000	0.
37	127	0.40	4.0368	0.3200	.0000	.0000	.000	0.
39	42	0.20	1.8632	0.0000	.0000	.0000	.000	0.
40	81	3.00	34.50	0.3800	.0000	.0000	.000	0.
40	82	0.40	1.90	1.0800	.0000	.0000	.000	0.
41	81	3.70	37.20	0.5800	.0000	.0000	.000	0.
41	83	0.52	2.56	1.2400	.0000	.0000	.000	0.
41	84	0.57	5.80	2.9200	.0000	.0000	.000	0.
42	109	0.19	1.9633	0.3000	.0000	.0000	.000	0.
43	44	1.88	7.51	3.4800	.0000	.0000	.000	0.
43	103	3.24	17.02	0.0000	.0000	.0000	.000	0.
43	124	2.93	17.66	0.0000	.0000	.0000	.000	0.
43	125	14.49	65.09	0.0000	.0000	.0000	.000	0.
44	102	1.30	5.00	2.3600	.0000	.0000	.000	0.
44	103	1.27	5.10	2.4400	.0000	.0000	.000	0.
45	54	1.08	5.70	2.7200	.0000	.0000	.000	0.
46	47	3.10	13.78	6.2200	.0000	.0000	.000	0.
47	48	2.51	11.14	5.0200	.0000	.0000	.000	0.
47	49	0.30	1.20	0.5400	.0000	.0000	.000	0.
48	50	3.36	16.60	7.8000	.0000	.0000	.000	0.
48	51	4.20	13.00	5.7000	.0000	.0000	.000	0.
48	52	5.40	16.80	7.4000	.0000	.0000	.000	0.
49	87	1.40	6.80	2.6600	.0000	.0000	.000	0.
50	51	3.00	9.00	4.1000	.0000	.0000	.000	0.
50	123	40.71185	43	0.0000	.0000	.0000	.000	0.
50	125	13.37	60.31	0.0000	.0000	.0000	.000	0.
51	141	3.23	10.00	4.4200	.0000	.0000	.000	0.
52	79	6.23	21.26	9.4000	.0000	.0000	.000	0.
52	106	2.31	7.17	3.1400	.0000	.0000	.000	0.
52	116	0.60	4.87	2.5600	.0000	.0000	.000	0.
52	117	1.17	4.93	2.3000	.0000	.0000	.000	0.
52	118	0.00	5.20	0.0001	.0420	.9001	.100	0.
53	11	0.05	2.00	0.0001	.0000	.9001	.100	0.
53	54	2.75	19.61	9.5600	.0000	.0000	.000	0.
53	55	0.05	0.26	0.2200	.0000	.0000	.000	0.
54	56	1.74	9.10	4.3000	.0000	.0000	.000	0.
54	57	2.50	12.37	5.8800	.0000	.0000	.000	0.

55	57	4.62	17.63	8.0200.0000.0000.000	0.
55	149	1.53	6.71	3.1200.0000.0000.000	0.
55	162	0.40	1.89	0.9800.0000.0000.000	0.
56	67	1.70	8.94	4.2400.0000.0000.000	0.
57	80	2.72	10.37	4.7200.0000.0000.000	0.
58	61	1.33	10.1818.4200.0000.0000.000	0.	
59	61	1.06	7.0612.1000.0000.0000.000	0.	
60	61	0.27	6.53-0.2201.0250.9001.100	0.	
60	61	0.20	3.93	0.0001.0250.9001.100	0.
60	62	36.74	96.40	0.0000.0000.0000.000	0.
60	65	10.41	41.44	0.0000.0000.0000.000	0.
60	126	53.67182.95	0.0000.0000.0000.000	0.	
61	62	2.96	22.7539.9600.0000.0000.000	0.	
61	63	0.43	4.22	7.6400.0000.0000.000	0.
62	63	1.58	17.02	0.0000.0000.0000.000	0.
62	65	0.40	7.40	0.0000.0000.0000.000	0.
62	126	0.44	29.69	0.0000.0000.0000.000	0.
63	65	24.09196.00	0.0000.0000.0000.000	0.	
64	65	0.50	5.7190.9800.0000.0000.000	0.	
64	66	0.33	3.8160.6600.0000.0000.000	0.	
65	126	0.31	15.36	0.0000.0000.0000.000	0.
66	11	0.00	1.18	0.0001.0000.9001.100	0.
67	68	1.93	10.13	4.8200.0000.0000.000	0.
68	69	0.68	3.53	1.6800.0000.0000.000	0.
69	77	0.98	3.74	1.7000.0000.0000.000	0.
69	78	1.14	4.34	1.9600.0000.0000.000	0.
69	79	0.52	4.33	2.2000.0000.0000.000	0.
70	73	0.00	1.97	0.0001.0390.9001.100	0.
70	149	0.02	0.18	0.1000.0000.0000.000	0.
70	149	0.02	0.18	0.1000.0000.0000.000	0.
71	85	3.04	15.06	7.1600.0000.0000.000	0.
71	150	1.96	9.70	4.6200.0000.0000.000	0.
72	113	0.22	1.30	0.0000.0000.0000.000	0.
72	132	0.28	1.68	0.0000.0000.0000.000	0.
72	152	3.85	18.00	0.0000.0000.0000.000	0.
74	119	0.31	3.1048.2200.0000.0000.000	0.	
75	128	0.08	0.8716.6000.0000.0000.000	0.	
75	130	0.04	2.42	0.0001.0240.9001.100	0.
78	79	0.51	3.36	1.8200.0000.0000.000	0.
78	80	2.44	9.30	4.2200.0000.0000.000	0.
79	74	0.00	1.80	0.0001.0240.9001.100	0.
82	83	0.53	2.49	1.3000.0000.0000.000	0.
84	93	1.25	8.26	4.1400.0000.0000.000	0.
85	86	2.11	10.46	4.9800.0000.0000.000	0.
86	87	2.80	11.20	5.3800.0000.0000.000	0.
86	88	4.40	22.8010.9000.0000.0000.000	0.	
88	96	7.40	25.00	1.4200.0000.0000.000	0.
88	106	0.79	4.68	2.3200.0000.0000.000	0.
89	86	0.00	5.70	0.0001.0250.9001.100	0.
89	90	6.90	13.40	1.4000.0000.0000.000	0.
90	96	18.37	35.90	3.7000.0000.0000.000	0.
91	92	1.56	8.19	3.7600.0000.0000.000	0.
91	93	1.43	8.95	4.5000.0000.0000.000	0.
91	94	1.45	9.57	4.8000.0000.0000.000	0.
92	102	1.50	6.10	2.9200.0000.0000.000	0.
93	42	0.00	2.60	0.0001.0240.9001.100	0.
93	108	0.00	1.54	0.0001.0500.9001.100	0.
94	103	2.27	13.33	6.6000.0000.0000.000	0.
94	107	6.13	18.91	8.3600.0000.0000.000	0.
94	109	0.00	3.50	0.0001.0240.9001.100	0.
95	91	0.54	4.58-0.3601.0200.9001.100	0.	

95	96	8.70	21.20	8.6000.0000.0000.000	0.
95	97	12.89	28.09	3.3400.0000.0000.000	0.
95	98	0.71	4.30	2.2400.0000.0000.000	0.
95	99	0.00	6.85	0.0001.0290.9001.100	0.
96	100	6.90	16.10	1.8600.0000.0000.000	0.
96	101	0.00	10.31	0.0001.0290.9001.100	0.
97	44	0.51	10.07	-0.2501.0250.9001.100	0.
98	93	0.06	2.14	-3.4101.0250.9001.100	0.
98	105	14.85	29.30	3.1000.0000.0000.000	0.
100	104	6.20	14.50	1.6600.0000.0000.000	0.
103	123	18.20	75.10	0.0000.0000.0000.000	0.
103	124	0.02	1.67	0.0000.0000.0000.000	0.
103	125	2.79	19.72	0.0000.0000.0000.000	0.
104	34	0.80	6.37	-0.3301.0000.9001.100	0.
105	38	0.00	11.60	0.0001.0250.9001.100	0.
106	107	1.96	6.11	2.6800.0000.0000.000	0.
107	122	1.30	6.21	2.9600.0000.0000.000	0.
109	119	0.60	5.77	92.9000.0000.0000.000	0.
109	124	0.20	2.22	37.8200.0000.0000.000	0.
109	125	0.70	6.20	100.000.0000.0000.000	0.
110	111	2.30	9.90	4.6000.0000.0000.000	0.
110	112	0.00	1.85	0.0001.0000.9001.100	0.
110	114	0.00	7.68	0.0001.0390.9001.100	0.
110	134	0.32	2.56	1.3400.0000.0000.000	0.
110	141	2.10	6.49	2.8800.0000.0000.000	0.
111	115	5.27	22.15	10.3000.0000.0000.000	0.
112	120	0.05	0.44	7.2000.0000.0000.000	0.
112	121	0.00	1.90	0.0001.0490.9001.100	0.
113	132	4.59	29.11	0.0000.0000.0000.000	0.
113	134	0.08	0.72	0.3800.0000.0000.000	0.
115	117	0.19	1.54	3.3000.0000.0000.000	0.
116	117	0.48	3.91	2.1400.0000.0000.000	0.
116	119	0.00	0.90	0.0001.0240.9001.100	0.
116	147	0.35	2.86	1.5600.0000.0000.000	0.
117	147	0.22	1.75	1.0000.0000.0000.000	0.
120	14	0.03	1.88	0.0000.9750.9001.100	0.
120	128	0.04	0.51	10.0000.0000.0000.000	0.
120	129	0.03	0.38	6.5200.0000.0000.000	0.
122	123	1.75	8.35	3.9800.0000.0000.000	0.
123	125	4.23	24.41	0.0000.0000.0000.000	0.
124	125	1.13	15.85	0.0000.0000.0000.000	0.
124	126	5.77	82.56	0.0000.0000.0000.000	0.
125	126	2.01	59.15	0.0000.0000.0000.000	0.
126	127	8.77	70.49	0.0000.0000.0000.000	0.
128	72	0.04	1.80	0.0001.0000.9001.100	0.
129	132	0.04	1.98	0.0001.0000.9001.100	0.
133	134	0.00	4.10	0.0001.0240.9001.100	0.
133	135	1.09	2.59	0.0400.0000.0000.000	0.
133	136	3.90	9.90	0.1600.0000.0000.000	0.
133	137	1.34	5.04	0.1000.0000.0000.000	0.
135	138	4.66	11.82	0.2000.0000.0000.000	0.
136	139	2.60	6.50	0.1000.0000.0000.000	0.
137	140	0.41	1.56	0.0400.0000.0000.000	0.
138	110	0.00	4.10	0.0001.0000.9001.100	0.
138	139	2.60	6.50	0.1000.0000.0000.000	0.
138	140	2.51	9.41	0.1800.0000.0000.000	0.
138	145	9.23	23.38	0.3800.0000.0000.000	0.
142	51	0.00	17.28	0.0001.0700.9001.100	0.
142	143	15.82	39.19	0.6800.0000.0000.000	0.
142	146	16.18	38.61	0.7000.0000.0000.000	0.
143	144	9.27	23.22	0.2000.0000.0000.000	0.

APÉNDICE A

144	141	0.00	8.20	0.0001.0240.9001.100	0.
144	145	8.90	22.10	0.3200.0000.0000.000	0.
144	146	6.80	29.06	0.5800.0000.0000.000	0.
148	116	0.00	4.10	0.0001.0000.9001.100	0.
149	26	0.00	3.86	0.0001.0000.9001.100	0.
149	26	0.00	3.86	0.0001.0000.9001.100	0.
149	150	0.10	0.85	0.2000.0000.0000.000	0.
149	151	0.39	2.62	1.3800.0000.0000.000	0.
149	152	2.53	11.68	5.4400.0000.0000.000	0.
151	161	0.21	1.38	0.7400.0000.0000.000	0.
153	70	0.00	9.16	0.0001.0000.9001.100	0.
153	70	0.00	9.16	0.0001.0000.9001.100	0.
153	154	7.10	28.41	0.5400.0000.0000.000	0.
153	155	4.30	18.56	0.3800.0000.0000.000	0.
154	156	1.55	3.79	0.0800.0000.0000.000	0.
154	160	1.02	4.29	0.1000.0000.0000.000	0.
155	156	1.76	8.22	0.1400.0000.0000.000	0.
156	157	5.30	12.73	0.2200.0000.0000.000	0.
157	55	0.00	8.27	0.0001.0000.9001.100	0.
157	158	4.89	14.04	0.2800.0000.0000.000	0.
158	159	3.39	6.64	0.1200.0000.0000.000	0.
159	160	1.90	8.11	1.2000.0000.0000.000	0.
161	162	0.22	1.03	0.5400.0000.0000.000	0.
9999					
	0.95	1.1			
9999					
		900			

APÊNDICE B**TENSÕES E TAPS NA ÚLTIMA ITERAÇÃO DOS SISTEMAS ELÉTRICOS****Sistema Elétrico IEEE de 14 barras**

NB	V
1	1.097
2	1.073
3	1.044
4	1.047
5	1.050
6	1.059
7	1.046
8	1.067
9	1.041
10	1.036
11	1.044
12	1.044
13	1.038
14	1.022

NI	NF	TAP
4	7	0.988
4	9	0.996
5	6	1.037

Sistema Elétrico IEEE de 30 barras

NB	V
1	1.100
2	1.074
3	1.054
4	1.044
5	1.036
6	1.036
7	1.028
8	1.034
9	1.037
10	1.032
11	1.065
12	1.033
13	1.056
14	1.019
15	1.016
16	1.025
17	1.025
18	1.010
19	1.009
20	1.014
21	1.020
22	1.020
23	1.009
24	1.008
25	1.010
26	0.993
27	1.020
28	1.031
29	1.000
30	0.989

NI	NF	TAP
6	9	0.986
6	10	1.023
4	12	0.988
28	27	1.011

Sistema Elétrico IEEE de 162 barras

NB	V	NB	V	NB	V	NB	V
1	1.053	42	1.017	82	1.011	122	1.026
2	1.052	43	1.061	83	1.008	123	1.042
3	1.050	44	1.055	84	1.013	124	1.058
4	1.029	45	1.050	85	1.026	125	1.073
5	1.049	46	1.033	86	1.015	126	1.074
6	1.050	47	1.045	87	1.010	127	1.049
7	1.053	48	1.030	88	1.020	128	1.042
8	1.047	49	1.032	89	1.015	129	1.041
9	1.034	50	1.028	90	1.008	130	1.057
10	1.050	51	1.029	91	0.976	131	1.043
11	1.039	52	1.023	92	1.042	132	1.027
12	1.047	53	1.036	93	1.038	133	1.032
13	1.043	54	1.045	94	1.052	134	1.035
14	1.048	55	1.027	95	1.060	135	1.031
15	1.026	56	1.045	96	1.039	136	1.028
16	1.069	57	1.023	97	1.005	137	1.030
17	1.038	58	1.036	98	1.043	138	1.040
18	1.026	59	1.062	99	1.049	139	1.032
19	1.038	60	1.037	100	1.040	140	1.030
20	1.026	61	1.034	101	0.997	141	1.023
21	1.031	62	1.042	102	1.011	142	1.004
22	1.026	63	1.077	103	1.043	143	0.994
23	1.036	64	1.047	104	1.062	144	1.017
24	1.026	65	1.076	105	1.008	145	1.021
25	1.045	66	1.057	106	1.027	146	0.997
26	1.053	67	1.060	107	1.022	147	1.034
27	1.068	68	1.025	108	1.024	148	1.040
28	1.056	69	1.036	109	1.066	149	1.068
29	1.025	70	1.042	110	1.042	150	1.066
30	1.024	71	1.069	111	1.023	151	1.055
31	1.014	72	1.038	112	1.042	152	1.053
32	1.035	73	1.026	113	1.034	153	1.065
33	1.018	74	1.071	114	1.039	154	1.027
34	1.013	75	1.050	115	1.041	155	1.036
35	1.013	76	1.050	116	1.048	156	1.030
36	1.002	77	1.059	117	1.037	157	1.032
37	1.015	78	1.031	118	1.045	158	1.021
38	1.064	79	1.046	119	1.045	159	1.022
39	1.030	80	1.053	120	1.041	160	1.024
40	1.059	81	1.041	121	1.043	161	1.051
41	1.008	82	1.011	122	1.026	162	1.048

NI	NF	TAP	NI	NF	TAP
2	7	0.991	96	100	0.998
5	115	0.993	97	102	0.999
6	131	0.990	98	45	0.999
8	9	0.994	99	94	0.994
13	3	0.997	105	35	0.998
19	38	0.996	106	39	0.999
21	54	0.999	110	112	0.994
23	40	0.997	110	114	0.998
25	26	0.996	112	121	0.994
27	77	0.985	116	119	0.987
53	118	0.998	120	15	0.994
54	12	0.994	128	73	0.993
61	62	0.995	129	132	0.994
67	12	0.989	133	134	0.997
71	74	0.993	138	110	0.997
76	130	0.995	142	52	0.999
80	75	0.993	144	141	0.999
90	87	0.998	148	116	0.997
94	43	0.995	149	27	0.993
94	1	0.992	153	71	0.997
95	109	0.996	157	56	0.999
96	92	0.997			

BIBLIOGRAFIA

- ADIBI, A.M.; POLYAK, R.A.; GRIVA, I.A.; MILI, L.; AMMARI, S. (2003). Optimal transformer tap selection using modified barrier-augmented lagrangian method. *IEEE transactions on power systems*, v. 18, p. 251-257.
- ARMAND, P.; GILBERT, J. C.; JAN-JEGOU, S. (2000). A feasible BFGS interior point algorithm for solving strongly convex minimization problems. *SIAM Journal on Optimization*, 11:199-222.
- ARMAND, P.; GILBERT, J. C.; JAN-JEGOU, S. (2002). A BFGS-IP algorithm for solving strongly convex optimization problems with feasibility enforced by an exact penalty approach. *Mathematical Programming*, 92:393-424.
- ARMAND (2003). A Quasi-Newton Penalty Barrier Method for Convex Minimization Problems – *Computacional Optimization and Applications*, 26,5-34.
- BAPTISTA, E. C. (2001). *Método da função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica para a solução do problema de Fluxo de Potência Ótimo*. São Carlos. 175p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- BAPTISTA, E.C.; BELATI, E.A.; COSTA, G.R.M. (2005). Logarithmic barrier-augmented Lagrangian function to the optimal power flow problem. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, v. 27, p. 528-532.
- BAPTISTA, E. C.; BELATI, E.; SOUZA V.; COSTA, G.R.M (2006). Primal-dual logarithmic barrier and augmented lagrangian function to the loss minimization in power systems. *Electric Power Components and Systems*, USA, v.34, n.7, p.775-784.

- BAPTISTA, E.C.; BELATI, E.; SOUZA, V.; COSTA, G.R.M. (2009). Loss minimization by the predictor corrector modified barrier approach. *Electric Power Systems Research (Print)*, v. 79, p. 803-808.
- BAZARAA, M.S.; SHERALI, H.D.; SHETTY, C.M. (1993). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. 2.ed. New York, John Wiley.
- BELATI, E.A.; ALVES, D.A.; COSTA, G.R.M. (2008). Na approach of optimal sensitivity applied in the tertiary loop of the automatic generation control. *Electric Power Systems Research*, v. 78, p. 1553-1560.
- BELATI, E.A.; COSTA, G.R.M. (2008). Transmission loss allocation based on optimal power flow and sensitivity analysis. *International Journal of Eletrical Power & Energy Systems*, Volume 30, Issue 4, May 2008, pp. 291-295.
- BELATI, E. A.; DE SOUZA, A. M.; COSTA, G.R.M. (2010). Influence of the operational constraints in the active transmission losses allocation via Lagrange multipliers. *Revista IEEE América Latina*, V. 8, p. 58-64.
- BROYDEN (1970). “ The Convergence of a Class of Double Rank Minimization Algorithms 2. The New Algorithm,” *J. Institute of Matematics and Its Applications*, 6, pp. 222-231.
- CARPENTIER, J. L. (1962). Contribution a L’etude du Dispatching Economique. *Bull-Soc. Fr Elec.*, Ser. B3, p. 431 – 447.
- CARROL, C.W. (1961). The Created Response Surface Technique for Optimizing Nonlinear Restrained Systems. *Operations Research*, v. 9, p. 169-184.

- COURANT, R. (1943). Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration. *Bull. Amer. Math. Soc.*, v. 49, p. 1-23.
- COSTA, G.R.M. (1990). *O Método Dual-Newton Aplicado ao Fluxo de Carga Ótimo*, Campinas. 235 p. Tese (Doutorado) – FEE/DSCE, Unicamp.
- COSTA, G.R.M.; COSTA, C.E.U. (2000). Improved Newton Method for Optima Power Flow Problem. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Inglaterra, v. 22, n. 7, p. 459-462.
- COSTA, G.R.M; COSTA, C.E.U; SOUZA, A.M. (2000). Comparative Studies of Otimization Methods for the Optimal Power Flow. *Electric Power Systems Research*, Netherlands, v. 56, n. 3, p. 249-254.
- COSTA, G.R.M. (2002). Modified Newton Method for Reactive Dispatching. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Inglaterra, v. 24, n. 10, p. 815-819.
- DAVIDON, W.C. (1959). Variable Metric Method for Minimization. Research and Development, Report ANL – 5990 (Ref.) U.S. *Atomic Energy Commission, Argonne National Laboratories*.
- DOMMEL, H.W. and TINNEY, W.F. (1968). Optimal Power Flows Solutions. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*. v. 87, n. 10, p. 1866- 1876.
- ECHEVERRI, M.G.; FLORES, M.J.R.; MANTOVANI, J.R.S. (2010). Two Decomposition Approaches Applied to the Multi-Area Optimal Reactive Power Flow Problem. *Dyna-Colombia*, v. 66, p. 303-312.
- FIACCO, A.V. and McCORMICK, G.P. (1968). *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. New York, John Wiley & Sons

FIACCO, A.V. and McCORMICK, G.P. (1990). *Nonlinear Programming - Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. Philadelphia. SIAM. (Classics in Applied Mathematics, v. 4).

FLETCHER and POWELL (1963). "A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization." *Computer Journal*, 6 pp. 163-168,.

FLETCHER, R., (1970a). "A New Approach to Variable Metric Algorithms," *Computer Journal*, 13, pp. 317-322.

FLETCHER, R. (1985). *Practical Methods of Optimization.2.ed.* New York, John Wiley & Sons. v. 2.

FRISCH, K. R. (1955). The Logarithmic Potential Method of Convex Programming.*University Institute of Economics (manuscript)*. Oslo, Norway.

GILL and MURRAY (1972). Quasi-Newton Methods for Unconstrained Optimization, "Institute of Mathematics and Its Applications", 9, pp. 91-108.

GOLDFARB (1970). A Family of Variable Metric Methods Derived by Variational Means, "Mathematics of Computation," 24, pp. 23-26.

GRANVILLE, S. (1994). Optimal Reactive Dispatch Through Interior Point Methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 9, p. 136-146.

HESTENES, M.R. (1969). SURVEY PAPER – Multiplier and Gradient Methods. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 4, n.5, p.303-320.

- HIMENBLAU, D.M. (1972). *Applied Nonlinear Programming*. New York, *McGraw-Hill*.
- HUNEALT, M.; GALIANA, F.D. (1991). A Survey of the Optimal Power Flow Literature. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 6, p. 762-770.
- LUENBERGER, D.G. (1984). *Linear and Nonlinear Programming*. 2.ed.. California, Addison-Wesley.
- LUENBERGER, D.G. (2008). *Linear and Nonlinear Programming*. 3.ed.. Stanford, CA, USA.
- MOMOH, J.A; EL-HAWARY, M.E.; ADAPA, R. (1999.a). A review of Selected Optimal Power Flow Literature to 1993 – Part I: NonLinear and Quadratic Programming Approaches. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 14, n.1, p.96-104.
- MOMOH, J.A; EL-HAWARY, M.E.; ADAPA, R. (1999.b). A review of Selected Optimal Power Flow Literature to 1993 – Part II: Newton, Linear Programming and Interior Point Methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 14, n.1, p.105-111.
- MONTICELLI, A. (1983). *Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica*. São Paulo, Edgard Blucher Ltda. Cap. 5, p. 75-100.
- MONTICELLI, A. and LUI, W.H.E. (1992). Adaptive Movement Penalty Method for Newton Optimal Power Flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, v.7, n.1, p.334-341.
- NEJDAWI, I.M.; CLEMENTS, K.A.; DAVIS, P.W. (2000). Na Efficient Interior Point Method for Sequential Quadratic Programming Based Optimal Power Flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 15, n. 4, p. 1179-1183.

- POLYAK, R. (1992). Modified barrier functions. *Mathematical Programming*, v. 54, n. 2, p. 177-222.
- POWELL, M.J.D. (1969). A Method for Nonlinear Constraints in Minimization Problems. In: FLETCHER, R. *Optimization*, New York, Academic Press, p.283-298.
- QUINTANA, V.H.; GOMEZ, A.; MARTINEZ, J.L. (1995). Nonlinear Optimal Power Flows by Logarithmic-Barrier Primal-Dual Algorithm. *IEEE NAPS Meeting*.
- RASHED, A.M.H. and KELLY, D.H. (1974). Optimal Load Flow Solution Using Lagrangian Multipliers and the Hessian Matrix. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v.93, n. 5, p. 1292-1297.
- SANTOS, A.; DECKMAN, S.; SOARES, S. (1988). A Dual Lagrangian Approach for Optimal Power Flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 3, p. 1020-1025.
- SASSON, A.M. (1969). Combined Use of the Powell and Fletcher-Powell Nonlinear Programming Methods for Optimal Load Flow. *IEEE Trans. on PAS*, v. 88, p. 1530-1537.
- SASSON, A.M.; VILORIA, F.; ABOYTES, F. (1973). Optimal Load Flow Solutions Using the Hessian Matrix. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. 92, p. 31-41.
- SHANNO, D.F. (1970). "Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization," *Mathematics of Computation*, 24, pp. 641-656.

- SOUSA, V.A.; NUNES, L.C.T.; BELATI, E.A., COSTA, G.R.M. (2003). A New Approach Type- Newton for Optimal Reactive Dispatch Problem. *IEEE Power Engineering Society General Meeting*, ISBN 0-77803-7990-x. Toronto, Canadá.
- SOUSA, V.A.; BAPTISTA, E.C. and COSTA, G.R.M. (2004). Modified Barrier Method for Optimal Power Flow Problem. *IEEE Power Engineering Society General Meeting*. CD Rom ISBN 0-7803-8466-0. Denver - CO, USA.
- SOUSA, V. A. (2006). *Resolução do problema de Fluxo de Potência Ótimo reativo via método da Função Lagrangiana Barreira Modificada*. São Carlos. 141p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SOUSA and COSTA (2007). Optimal reactive dispatch problem via improved Newton approach. *Electric Power Components and systems*, Estados Unidos, v.35, n. 3, p. 319-336.
- SOUSA, V.A.; BAPTISTA, E.C.; COSTA, G.R.M. (2009). Loss minimization by the predictor-corrector modified barrier approach. *Electric Power Systems Research*, v. 79, p. 803-808.
- SOUZA, A. M.; SOUSA, V. A.; COSTA, G. R. M. (2010). Studies of cases in power systems by Sensitivity Analysis oriented by OPF. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, v. 32, 969-974.
- SUN, D.I.; ASHLEY, B.; HUGUES,A.; TINNEY, W.F. (1984). Optimal Power Flow by Newton Approach. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. pas 103, n. 10, p. 2864-2875.
- TORRES, G. L.; QUINTANA, V.H.; TORRES, G.L. (1998). Optimal Power Flow in

Rectangular Form via an Interior Point Method. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 13, n. 4, p. 1211-1218.

WANG, H.Y.; MURILLO-SANCHEZ, C.E.; ZIMMERMAN, R.D.; THOMAS, R.J. (2007). On computational issues of market-based optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 22, p. 1185-1193.

WRIGHT, M. H. (1995). Why a pure primal Newton barrier step may be infeasible. *SIAM Journal on Optimization*, v. 5, n. 1, p. 1-12.

WU, Y.; DEBS, A.S.; MARSTEN, R.E. (1994). A Direct Nonlinear Predictor Corrector Primal-Dual Interior Point Algorithm for Optimal Power Flows. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 9, p. 876-883.

YAN, W.; WEN, L.; LI, W.; CHUNG, C. Y.; WONG, K. P. (2011). Decomposition-coordination interior point method and its application to multi-area optimal reactive power flow. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, v. 33, p. 55-60.

ZANGWILL, W.I. (1967). Nonlinear Programming Via Penalty Functions. *Management Science*, v. 13, p. 344-358.