UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE ENGENHARIA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA

DAIANE SAMPAIO FERNANDES

PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS CHAVEADOS COM CUSTO GARANTIDO UTILIZANDO REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA PARA SISTEMAS NÃO LINEARES

Ilha Solteira
2022

DAIANE SAMPAIO FERNANDES

PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS CHAVEADOS COM CUSTO GARANTIDO UTILIZANDO REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA PARA SISTEMAS NÃO LINEARES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia - UNESP - Campus de Ilha Solteira, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.
Especialidade: Automação.

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Orientador

Ilha Solteira
2022

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

F363p

Fernandes, Daiane Sampaio.
Projeto de controladores robustos chaveados com custo garantido utilizando realimentação de saída para sistemas não lineares / Daiane Sampaio Fernandes .-- Ilha Solteira: [s.n.], 2022
72 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Controle e Automação, 2022

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Inclui bibliografia

1. Projeto de controladores robustos chaveados. 2. Sistemas não lineares. 3. Realimentação de saída.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS CHAVEADOS COM CUSTO GARANTIDO UTILIZANDO REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA PARA SISTEMAS NÃO LINEARES

AUTORA: DAIANE SAMPAIO FERNANDES
ORIENTADOR: MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestra em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA (Participaçao Virtual)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. GUSTAVO LUIZ CHAGAS MANHAES DE ABREU (Participaçao Virtual)
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. LEONARDO ATAIDE CARNIATO (Participaçao Virtual)
Departamento de Indústria / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), Câmpus Presidente Epitácio.

Ilha Solteira, 27 de janeiro de 2022

À minha mãe Irene,

que fez o impossível para eu chegar aqui.

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos a todos os familiares, amigos, professores e funcionários da FEIS-UNESP, que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial, dedico meus agradecimentos:

- À Deus, pela vida, saúde e cuidado;
- À minha mãe Irene, pelo apoio, exemplo e força. Obrigada por me mostrar na sua história que eu poderia ser quem eu quisesse;
- Ao meu pai Josias, que do céu possa se orgulhar de mim;
- À minha irmã Delaine e ao meu irmão Diego, que cuidam e acreditam em mim desde que eu nem sabia quem eu era. Também aos meus cunhados Gabriel e Gabrielle, por cuidarem dos meus irmãos;
- Aos meus sobrinhos Yasmin e Pedro, que em cada palavra inocente me dão forças;
- Ao meu noivo Guilherme por entender minhas ausências e momentos difíceis e por me lembrar todos os dias que sou capaz de fazer mais;
- Ao Laboratório de Pesquisa em Controle da UNESP de Ilha Solteira, e em especial aos meus companheiros Igor e Adalberto, pela paciência em me ensinar sempre que tinha dificuldades;
- Ao professor Dr. Marcelo pela confiança e oportunidade;
- Ao professor Dr. Gustavo por me mostrar que a pós graduação era uma possibilidade;
- O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“estou de pé
sobre o sacrifício
de milhões de mulheres antes de mim
pensando
no que eu posso fazer
para deixar esta montanha ainda mais alta
para que as mulheres que venham depois de mim
possam ver mais longe”

legado - Rupi Kaur

RESUMO

Nesta dissertação, são propostos projetos de controladores robustos chaveados usando realimentação de saída para sistemas não lineares com parâmetros incertos. Inicialmente, são apresentados os conceitos necessários para a modelagem do sistema através da teoria de modelos fuzzy Takagi-Sugeno (TS), segundo a qual um sistema não linear incerto pode ser exatamente descrito como uma combinação convexa de modelos locais lineares combinados com as funções de pertinências. A análise da estabilização desses sistemas pode ser realizada através de uma função de energia quadrática baseada na teoria de Aleksandr Lyapunov, de modo que o problema de controle pode ser descrito por meio de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs), possibilitando a resolução computacional. Por se tratar de um sistema incerto e não linear, as funções de pertinência podem depender de termos desconhecidos e/ou incertos, impedindo que sejam utilizadas na formulação do controlador. Dessa forma, técnicas baseadas na Compensação Distribuída Paralela (CDP) não podem ser utilizadas diretamente, tornando o controle chaveado uma alternativa, pois este não exige o conhecimento das funções de pertinência para a composição do sinal de controle. Para o projeto dos controladores chaveados, basta o conhecimento dos modelos locais lineares do sistema. Em aplicações práticas, muitas vezes não é possível mensurar todas as variáveis de estado. Para contornar esse problema, é utilizada a técnica de realimentação de saída, e, mais uma vez, o controlador chaveado se torna um aliado, uma vez que as funções de pertinências podem depender de variáveis de estado que não podem ser mensuradas. Também visando aproximar o comportamento do sistema controlado com a realidade, são consideradas a saturação dos atuadores e a presença de distúrbios persistentes. Com o intuito de melhorar o desempenho do controlador, optou-se pelo índice de performance na forma de um custo garantido. Com isso, três teoremas para o projeto de controladores chaveados foram propostos e dois corolários de controle de ganho único, sendo todos simulados numericamente e implementados. Adicionalmente, foram formulados dois teoremas que provam que se as condições impostas pelo controlador de ganho único são satisfeitas para um sistema, então as condições para o controle chaveado também serão satisfeitas para o mesmo sistema. A partir dos resultados analisados, pode-se comprovar a eficiência das metodologias propostas, uma vez que os controladores chaveados apresentam desempenho igual ou superior aos controladores de ganho único em todos os casos.

Palavras-chave: controlador chaveado. modelos fuzzy Takagi-Sugeno. sistemas não lineares incertos. realimentação de saída. distúrbios persistentes.

ABSTRACT

In this dissertation, switched robust controllers using output feedback are proposed for nonlinear systems with uncertain parameters. Firstly, necessary concepts for modeling the system through fuzzy Takagi-Sugeno (TS) models theory were presented, according to which a nonlinear uncertain system can be exactly described as a convex combination of linear local models using membership functions. Systems stability analysis can, then, be made through a quadratic energy function, based on Aleksandr Lyapunov theory, so that the control problem can be described through Linear Matrix Inequalities (LMIs), enabling computational resolution. Because it is an uncertain and/or nonlinear system, the membership functions can depend on unknown terms. Thus, the controller formulation called Parallel Distributed Compensation (CDP) techniques can not be used. Then, the switched controller becomes an alternative, since it does not require membership functions knowledge for the control signal composition. For the switched controllers project, just knowing the local linear TS fuzzy models of the system is enough. In practical applications, often it is not possible to measure all system state variables. To work around this problem, output feedback technique can be used, and, one more time, the switched controllers become advantageous, since the membership functions can depend on state variables that can not be measured. Also aiming to bring the behavior of the controlled system closer to reality, the actuators saturation and the persistent disturbances presence are inserted. In order to improve the controller performance, we opted for the performance index in the form of a guaranteed cost. With that, three theorems for switched controllers project were proposed and two one gain control corollaries, which were numerically simulated and implemented. Additionally, two theorems were formulated which prove that if the one gain controller imposed conditions hold, then the switched controller imposed conditions also hold for the same system. From the analyzed results, it is possible to prove the efficiency of the proposed methodologies, once the switched controllers present the same or even better performance than single gain controllers in all cases.

Keywords: switched controller. Takagi-Sugeno fuzzy models. uncertain nonlinear systems. output feedback. persistent disturbances.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}^n$	Conjunto dos vetores $n \times 1$ com elementos reais.
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto das matrizes $n \times m$ com elementos reais.
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{K}_r$	Conjuntos dos números $\{1, 2, \ldots, r\}$.
M^T	Transposta da matriz real M.
$M > (\geq) 0$	M é uma matriz simétrica e definida (semidefinida) positiva.
$M < (\leq) 0$	M é uma matriz simétrica e definida (semidefinida) negativa.
I	Matriz identidade.
$\lvert z \rvert$	Valor absoluto de um número real z.
$\arg \min\limits_{i \in \mathbb{K}_r}{}^{*} \{h_i\}$	Menor índice $j \in \mathbb{K}_r$ tal que, para o conjunto $\{h_1, h_2, \ldots, h_r\}$, $h_j = \min\limits_{i \in \mathbb{K}_r} \{h_i\}$; por exemplo, dado um conjunto $H = \{h_1 = 3, h_2 = 1, h_3 = 6, h_4 = 3, h_5 = 1\}$, sendo $r = 5$, então $\arg \min\limits_{i \in \mathbb{K}_r}{}^{*} \{h_i\} = \min\{2, 5\} = 2$.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Sistemas dinâmicos naturais são, em sua maioria, não lineares e incertos (SLOTINE; LI et al., 1991), de forma que o controle destes se torna um grande desafio na área de controle. Em busca de uma solução para o desenvolvimento de controladores para esses sistemas, pesquisadores na área de controle buscaram diversas maneiras de tratá-los (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998; TEIXEIRA; ZAK, 1999; SANTIM et al., 2012; ALVES et al., 2016b).

A modelagem fuzzy Takagi-Sugeno (TS) (TAKAGI; SUGENO, 1985) surge como uma ferramenta para auxiliar no projeto de controladores de sistemas não lineares, uma vez que permite modelá-los como uma combinação convexa entre modelos locais lineares e funções de pertinência. Em Taniguchi et al. (2001), um resultado importante obtido mostra que um sistema não linear pode ser exatamente representado por modelos fuzzy TS em uma determinada região de operação no espaço de estados. Dessa forma, técnicas que utilizam a Compensação Distribuída Paralela (CDP) podem ser utilizadas no controle do sistema, usando as funções de pertinência do modelo fuzzy na construção da lei de controle (WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1995, 1996; TANAKA; IKEDA; WANG, 1998; TEIXEIRA; ZAK, 1999; TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003; FANG et al., 2006; SANTIM et al., 2012).

Para uma classe de sistemas não lineares incertos, os modelos fuzzy TS podem, ainda, constituir uma representação exata através de modelos locais lineares (SANTIM et al., 2012). No entanto não é possível utilizar as técnicas de controle elaboradas a partir da CDP, já que as funções de pertinência podem depender de parâmetros incertos e, dessa forma, serem desconhecidas. Assim, como alternativa, podem ser utilizadas a lei de controle de único ganho ou uma lei de controle chaveada (SOUZA et al., 2014b, 2014a), já que ambas não necessitam do conhecimento das funções de pertinência. Quando o sistema é incerto e linear, pode-se também utilizar leis de controle chaveada, desde que as incertezas sejam politópicas (SOUZA et al., 2013).

Os controladores chaveados se baseiam em uma lei de chaveamento que seleciona um ganho pertencente a um conjunto de ganhos pré-projetados (SOUZA et al., 2014b, 2014a), sendo selecionado um ganho a cada instante de tempo de acordo com o vetor de estado ou de saída do sistema (CARNIATO et al., 2020). A decisão de qual ganho deve ser utilizado é feita com base na lei de chaveamento, que seleciona um ganho apropriado para cada instante de tempo (ALVES et al., 2016b; CARNIATO et al., 2020; SILVA, 2020).

Em Alves (2017), é apresentado um exemplo comparando o desempenho de um sistema linear incerto invariante no tempo quando controlado por uma lei de ganho único e por uma lei com ganhos chaveados. O resultado demonstra que o controle chaveado é menos conservador e apresenta melhores índices de desempenho quando comparado ao único ganho. Já o trabalho de Carniato et al. (2020) apresenta uma comparação entre controladores chaveados e controladores de ganho único sujeitos à minimização da norma H_∞ em sistemas chaveados. Os resultados descritos em Carniato et al. (2020) mostram que o projeto do controlador chaveado apresenta maior região de factibilidade e menores custos da norma H_∞ do que os obtidos com o controlador de ganho único, sendo portanto, menos conservativo.

Os modelos fuzzy TS são formulados de acordo com os limites físicos do sistema. Para assegurar que durante o transitório o sistema permaneça na região exatamente descrita pela combinação de modelos locais lineares combinadas com as funções de pertinência, pode ser considerada a condição de que um conjunto elipsoidal positivamente invariante esteja contida na região de operação do sistema. Com isso, será garantido que o único ponto de equilíbrio do sistema seja assintoticamente estável com os índices de desempenho projetados para qualquer condição inicial pertencente a um conjunto positivamente invariante. Dessa forma, é necessário assegurar que uma região convexa de condições iniciais de operação do sistema estejam contidas em um conjunto elipsoidal (ALVES et al., 2016b).

Uma grande preocupação no projeto de controladores é garantir a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio de interesse, porém não há ainda uma forma universal de analisar a estabilidade de sistemas não lineares. Para esse tipo de sistema, uma ferramenta importante foi introduzida pelo matemático Alexandr Lyapunov, na qual a análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio é realizada através da análise do comportamento, ao longo do tempo, de uma função de "energia" fictícia. A análise da função de energia exclui a necessidade de resolver as equações diferenciais que descrevem o sistema (SLOTINE; LI et al., 1991). Pensando na resolução do sistema através de LMIs, as candidatas à função de Lyapunov na forma quadrática ou composta são as mais usadas para modelos fuzzy TS.

Assim, a utilização de modelos fuzzy TS para representar o sistema não linear e o uso de uma candidata à função quadrática de Lyapunov para análise da estabilidade do sistema permitem que o problema seja descrito a partir de LMIs, fazendo com que o problema de controle seja resolvido computacionalmente de maneira eficiente (GAHINET et al., 1994; STURM, 1999; LOFBERG, 2004).

Além da estabilidade, busca-se melhorar o transitório dos sistemas controlados, além de aproximá-los a problemas de projetos reais. Para isso, outros parâmetros podem ser inseridos no projeto, como taxa de decaimento (BOYD et al., 1994), saturação nos atuadores (ALVES et al., 2016b; TARBOURIECH et al., 2011), atenuação de distúrbios através da minimização da norma H_∞ (OLIVEIRA et al., 2018) e custo garantido (OGATA, 2011; RAMOS et al.,).

Neste trabalho, como um dos exemplos para o desenvolvimento teórico e prático, será considerado um sistema de supensão ativa manufaturado pela Quanser®. A modelagem utilizada é encontrada em Oliveira et al. (2018), sendo não linear e incerta. Para o projeto do controlador, considera-se que nem todas as variáveis de estados são disponíveis para medição, que o sistema está sujeito à saturação nos atuadores, presença ou não de uma classe de distúrbios persistentes e uso ou não de um custo garantido.

Um sistema de suspensão veicular possui duas principais funções: garantir a estabilidade do veículo e o conforto dos passageiros. Um veículo possui estabilidade e é seguro quando os pneus estão em contato com o solo, pois o piloto é capaz de controlá-lo através do volante. Já a medida de conforto é subjetiva. Segundo Crivellaro (2008), a maior fonte de desconforto em passageiros é a variação de aceleração, já que deslocamento, velocidade e acelerações constantes não são desconfortáveis. Dessa forma, o controle de vibrações em suspensões veiculares pode diminuir essas variações causadas pelo contato com a pista. Além de melhorar o conforto, pensando em veículos de resgate, como ambulâncias, a redução dos efeitos da pista pode facilitar a realização de procedimentos médicos urgentes durante a locomoção.

A minimização do custo garantido acontece através de um índice de desempenho na forma de um regulador linear quadrático, que prevê, no caso de sistemas lineares, uma boa relação entre desempenho e alocação dos autovalores (CAUN et al., 2018; DEAECTO; GEROMEL; DAAFOUZ, 2011). A função custo garantido pode estar relacionada com a energia dissipada na saída do sistema. Por exemplo, em Deaecto et al. (2010), ela corresponde à energia dissipada na forma de calor dissipado por um conversor CC-CC. Assim, a redução da energia na saída do sistema auxilia na obtenção de melhores resultados na resposta do sistema controlado (RAMOS et al., ; SILVA, 2020). Avalia-se o desempenho do sistema sem considerar o custo e posteriormente com a sua inserção, de modo que seus efeitos possam ser melhores visualizados.

Com o objetivo de aproximar o comportamento do sistema dinâmico teórico com a realidade, considera-se a presença de uma classe de distúrbios persistentes limitados por norma (ALVES et al., 2016a). Sendo que, novamente, os controladores são projetados na presença e ausência dos distúrbios. Assim as implicações em cada caso podem ser melhores avaliadas.

Quando o projeto do controlador visa um sistema que possui aplicações práticas, é importante inserir restrições relacionadas à saturação dos equipamentos. Segundo Xu, Wen e Huang (2020), negligenciar a saturação dos atuadores pode ser uma fonte de deterioração da performance ou, ainda, o colapso da estabilidade do sistema. Por isso, é uma consideração presente nesse trabalho em todos os teoremas propostos.

Ainda pensando em aplicações práticas, muitas vezes o modelo dinâmico do sistema requer variáveis de estado que são dificilmente mensuráveis na prática, acarretando em obstáculos no desenvolvimento de controladores. Para contornar isso, algumas estratégias podem ser tomadas, como o projeto de observadores de estado (DU et al., 2013), ou uso de realimentação de saída (CHEN et al., 2005; KAU et al., 2007; CHADLI; GUERRA, 2012; DONG; YANG, 2013; NGUYEN et al., 2017; CARNIATO et al., 2020). Segundo Chen et al. (2005), quando observadores de estado são inseridos, o projeto do controlador se torna complicado, especialmente em sistemas complexos, como é o caso em que há não linearidades, incertezas e saturação. Assim, Chen et al. (2005) afirma que a inserção de realimentação de saída no projeto e na implementação dos controladores possui uma facilidade maior se comparada ao uso de observadores de estado. No entanto o projeto de controladores com realimentação de saída consistem num dos maiores desafios em tópicos de controle, isso porque possui características não convexas (SYRMOS et al., 1997; SADABADI; PEAUCELLE, 2016; NGUYEN et al., 2017).

Devido a isso, segundo Nguyen et al. (2017), há dois caminhos a serem seguidos: o desenvolvimento de algoritmos numéricos para a solução de condições de projeto não convexas, ou a obtenção de novas condições convexas suficientes de forma que seja o menos conservador possível para a solução do sistemas nos algoritmos numéricos já existentes. Seguindo o último caminho, Crusius e Trofino (1999) apresentam condições suficientes para controladores com realimentação de saída estática usando Igualdades Matriciais Lineares (do inglês *Linear Matrices Equalities*, LMEs) e LMIs, impondo que o posto das matrizes de saída do sistema sejam completos. Com o intuito de criar condições iguais ou menos conservadoras que em Crusius e Trofino (1999), Dong e Yang (2013) propõem condições em que a matriz de saída do sistema não precisa ter posto completo.

Nesse trabalho, optou-se pelo uso de realimentação de saída, considerando a complexidade do sistema e a necessidade de se aliar todos os requisitos citados acima. Foi adotado o segundo caminho no projeto dos controladores, em que são obtidas restrições para os algoritmos numéricos já existentes (NGUYEN et al., 2017). Para formular os teoremas em função somente de LMIs, e contornar as características não convexas da realimentação de saída, utilizou-se o trabalho de Chang, Park e Zhou (2015).

Conciliando algumas das restrições dadas, em Dong e Yang (2013), há o desenvolvimento de controladores com realimentação de saída para sistemas contínuos no tempo com incertezas politópicas. Já em Yang, Feng e Zhang (2013), foi apresentado o desenvolvimento de modelos fuzzy TS com a presença de distúrbio persistente. Em Alves et al. (2016a), são descritos resultados importantes envolvendo controle chaveado, modelos fuzzy TS, saturação nos atuadores e presença de distúrbios persistentes. Já o trabalho de Vafamand, Asemani e Khayatian (2017) considera modelos fuzzy TS com a presença de distúrbios persistentes e observadores de estado. Em Nguyen et al. (2017), há resultados importantes de realimentação de saída e restrições dos estados em sistemas representados com modelos fuzzy TS. O trabalho de Carniato et al. (2020) apresenta resultados em controladores chaveados com realimentação de saída e minimização da norma H_∞ para sistemas chaveados. E, por fim, em Xu, Wen e Huang (2020), temos sistemas formulados a partir de modelos fuzzy TS com saturação nos atuadores e presença de distúrbio persistente.

Assim sendo, a maior contribuição desse trabalho é o desenvolvimento do projeto de controladores chaveados (ou de ganho único), com realimentação de saída, custo garantido, saturação nos atuadores e presença de distúrbio persistente para sistemas não lineares com incertezas politópicas. Dessa forma foram construídos três teoremas de controle chaveado e dois corolários com controladores de ganho único. Adicionalmente, são propostos dois teoremas que provam que se as condições impostas pelo controlador de ganho único são satisfeitas para um sistema, então as condições para controle chaveado também serão satisfeitas para o mesmo sistema.

A organização do trabalho é feita da seguinte forma:

- Capítulo 2: apresenta a teoria de modelos fuzzy Takagi-Sugeno e a obtenção dos modelos locais para o sistema de suspensão ativa não linear e incerta, e para o sistema de controle de posição de perna de um paraplégico. Os dois serão utilizados nas simulações e aplicações dos teoremas desenvolvidos nos capítulos seguintes;

- Capítulo 3: apresenta as técnicas de controle de realimentação de saída, considerando saturação nos atuadores, taxa de decaimento e custo garantido para sistemas não lineares. A partir dessas técnicas, são desenvolvidos três teoremas de controle chaveado e um corolário de ganho único. As metodologias de projeto de controladores são aplicadas em três exemplos, dois cujos modelos locais foram obtidos no Capítulo 2, e um outro cujos modelos locais são apresentados nesse capítulo. Os resultados de simulações e aplicações são apresentados e comparações são feitas com a literatura;

- Capítulo 4: acrescenta a teoria de distúrbios persistentes. Combinando essa teoria com as técnicas apresentadas no Capítulo 3 são apresentados dois teoremas de controle chaveado e um corolário de ganho único. São feitas simulações e aplicações para o teorema e o corolário com a suspensão ativa, sendo que os resultados são apresentados e comparados;

- Capítulo 5: a partir de tudo o que foi exposto anteriormente, são feitas as conclusões do trabalho.

2 MODELOS FUZZY TAKAGI SUGENO PARA SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS

Neste capítulo será apresentado o procedimento para representação de um sistema não linear incerto através de modelos fuzzy Takagi-Sugeno (TS). Conforme o Capítulo 1, esse tipo de sistema pode ser exatamente representado em uma região de operação, no entanto, por possuir incertezas, as funções de pertinências podem depender de parâmetros incertos ou difíceis de serem obtidos, de forma que não podem ser utilizadas na construção da lei de controle. Serão apresentados os procedimentos propostos por Takagi e Sugeno (1985) e por Taniguchi et al. (2001), em seguida, dois exemplos serão construídos a partir dos sistemas de suspensão ativa de $1/4$ de veículo fabricada pela Quanser® e do modelo matemático da posição da perna de um paraplégico usando eletroestimulação (FERRARIN; PEDOTTI, 2000; GAINO et al., 2020). O primeiro será utilizado nas simulações e implementações dos teoremas propostos nos capítulos seguintes, e o segundo apenas nas simulações dos teoremas propostos no Capítulo 3.

2.1 MODELOS FUZZY TAKAGI SUGENO

Modelos fuzzy TS são construídos por regras SE-ENTÃO que representam as relações lineares locais entre a entrada e a saída do sistema. A i-ésima regra é expressa na seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
&\text{Regra i}: \\
&\qquad \text{SE } \upsilon_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ e } \dots \text{ e } \upsilon_{n_r}(t) \text{ é } M_{n_r}^i, \\
&\qquad \text{ENTÃO} \begin{cases} \dot{x} = A_i x + B_i u, \\ y = C_{1i} x, \\ z = C_{2i} x, \end{cases}
\end{aligned} \tag{1}
$$

sendo $i = 1, 2, ..., n_r$, n_r é o número de regras fuzzy, e υ_j são as variáveis de premissa, M_j^i é o j-ésimo conjunto fuzzy na regra i e $j = 1, 2, ..., n_r$, $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor de entrada, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o vetor de saída medida, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída controlável, $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, e $B_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ são as matrizes que descrevem o sistema, $C_{1i} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ está relacionada às variáveis de estado que podem ser mensuradas e $C_{2i} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$ com as variáveis de estado a serem otimizadas.

De acordo com o trabalho de Taniguchi et al. (2001), o vetor final de saída fuzzy pode ser inferido da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_r} \mu_i(\upsilon(t))(A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^{n_r} \mu_i(\upsilon(t))}, \\ y(t) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_r} \mu_i(\upsilon(t)) C_{1i} x(t)}{\sum_{i=1}^{n_r} \mu_i(\upsilon(t))}, \\ z(t) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_r} \mu_i(\upsilon(t)) C_{2i} x(t)}{\sum_{i=1}^{n_r} \mu_i(\upsilon(t))}, \end{cases} \tag{2}$$

sendo que

$$\upsilon(t) = \begin{bmatrix} \upsilon_1(t) & \upsilon_2(t) & \dots & \upsilon_p(t) \end{bmatrix}, \quad \mu_i(\upsilon(t)) = \prod_{j=1}^{p} M_j^i(\upsilon_j(t)) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n_r} \mu_i(\upsilon(t)) > 0, \tag{3}$$

para todo $i \in \mathbb{K}_{n_r}$. Chamamos $M_j^i(\upsilon_j(t))$ de “peso” do conjunto fuzzy M_j^i associado à variável de premissa $\upsilon_j(t)$.

Para cada regra fuzzy, há uma função de pertinência associada, cuja definição é

$$\alpha_i(\upsilon(t)) = \frac{\mu_i(\upsilon(t))}{\sum_{i=1}^{n_r} \mu_i(\upsilon(t))}. \tag{4}$$

De (3) e (4), tem-se

$$\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(\upsilon(t)) = 1, \quad \alpha_i(\upsilon(t)) > 0, \tag{5}$$

para todo $i \in \mathbb{K}_{n_r}$. A equação (2) pode ser reescrita, a partir de (2)-(5), como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(\upsilon(t))(A_i x(t)) + B_i u(t)) = A(\alpha(\upsilon(t)))x(t) + B(\alpha(\upsilon(t)))u(t), \\ y(t) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(\upsilon(t)) C_{1i} x(t) = C_1(\alpha(\upsilon(t)))x(t), \\ z(t) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(\upsilon(t)) C_{2i} x(t) = C_2(\alpha(\upsilon(t)))x(t), \end{cases} \tag{6}$$

para todo $i \in \mathbb{K}_{n_r}$.

Utilizando a técnica de Compensação Distribuída Paralela (CDP) (WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1995) para a construção do controlador, tem-se que a sua regra é dada por

$$\begin{aligned} &\text{Regra do Controlador i :} \\ &\qquad \text{SE } \upsilon_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ e } \dots \text{ e } \upsilon_{n_r}(t) \text{ é } M_{n_r}^i, \\ &\qquad \text{ENTÃO } \left\{ u(t) = -K_i x(t), \quad i = 1, 2, \dots, n_r. \right. \end{aligned} \tag{7}$$

Seguindo o mesmo procedimento utilizado para a obtenção de (6), obtém-se

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(\upsilon(t))K_i x(t) = -K(\alpha(\upsilon(t)))x(t). \tag{8}$$

O sistema em malha fechada é obtida pela substituição de (8) em (6), sendo dado por

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(\upsilon(t)) \left[A_i x(t) - B_i \left(\sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j(\upsilon(t)) K_j x(t) \right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(\upsilon(t)) \left[A_i x(t) - \sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j(\upsilon(t)) B_i K_j x(t) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_r} \alpha_i(\upsilon(t)) \alpha_j(\upsilon(t)) \left[A_i - B_i K_j \right] x(t).
\end{aligned} \tag{9}$$

Considere que o sistema (9) possui termos incertos nas matrizes A_i e B_i, sendo que todos os seus termos, incertos ou não, podem ser representados por a_{ij} e b_{lk}. A seguir, será dado o procedimento para o cálculo das funções de pertinência α_i.

Para a manipulação dos elementos a_{ij} e b_{lk} que não são conhecidos, considera-se um vetor de incertezas $v \in \vartheta \subset \mathbb{R}^v$, sendo ϑ um conjunto compacto. Considera-se também que o sistema deva permanecer numa região de operação descrita por um conjunto compacto no espaço de estados $x(t) \in \mathscr{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$. O conjunto compacto considerado como região de operação (KLUG et al., 2015; KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2015) será

$$\mathscr{X} \triangleq \left\{ x \in \mathbb{R}^{n_x} : |N_h x| \leq \phi_h, h \in \mathbb{K}_{n_h} \right\}, \tag{10}$$

sendo $N = \begin{bmatrix} N_{(1)}^T & N_{(2)}^T & \dots & N_{(n_h)}^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_h \times n_x}$ e $\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_{n_h} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n_h}$ conhecidos.

Então, define-se um conjunto $\mathscr{S} = \vartheta \times \mathscr{X}$. Para os elementos que não são constantes conhecidas de a_{ij} e b_{lk}, tem-se (SANTIM et al., 2012)

$$\begin{aligned}
a_{ij}^1 = \min\nolimits_{z(t)\in\mathscr{S}} a_{ij}(z(t)) \leq a_{ij}(z(t)) \leq \max\nolimits_{z(t)\in\mathscr{S}} a_{ij}(z(t)) = a_{ij}^2, \\
b_{lk}^1 = \min\nolimits_{z(t)\in\mathscr{S}} b_{lk}(z(t)) \leq b_{lk}(z(t)) \leq \max\nolimits_{z(t)\in\mathscr{S}} b_{lk}(z(t)) = b_{lk}^2.
\end{aligned} \tag{11}$$

Pode-se escrever

$$\begin{aligned}
\xi_{ij}^1 = \frac{a_{ij}^2 - a_{ij}}{a_{ij}^2 - a_{ij}^1}, \quad \xi_{ij}^2 = \frac{a_{ij} - a_{ij}^1}{a_{ij}^2 - a_{ij}^1}, \\
\zeta_{lk}^1 = \frac{b_{lk}^2 - b_{lk}}{b_{lk}^2 - b_{lk}^1}, \quad \zeta_{lk}^1 = \frac{b_{lk} - b_{lk}^1}{b_{lk}^2 - b_{lk}^1}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Assim, tem-se que o número de regras fuzzy é $n_r = 2^n$, sendo que n é a soma do número de não linearidades e de incertezas distintas do sistema, quando as incertezas são politópicas. Tem-se que n_r é também a quantidade de funções de pertinência e de modelos locais. Cada função de pertinência é obtida como uma combinação entre os máximos e mínimos de ξ_{ij} e ζ_{lk}, associados às matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$, respectivamente. Assim, se um sistema possui 1 incerteza na matriz $A(\alpha)$ e 1 não linearidade na matriz $B(\alpha)$, ele terá $2^2 = 4$ funções de pertinência e modelos locais.

Nesse caso, as 4 funções de pertinência podem ser obtidas como

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \xi_{ij}^1 \zeta_{lk}^1, \quad \alpha_2 = \xi_{ij}^1 \zeta_{lk}^2, \\ \alpha_3 = \xi_{ij}^2 \zeta_{lk}^1, \quad \alpha_4 = \xi_{ij}^2 \zeta_{lk}^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Caso o número de funções de pertinência seja maior, o procedimento será o mesmo. Cada modelo local A_i e B_i consiste na soma de duas matrizes, conforme (14), sendo A_0 e B_0 matrizes com os termos constantes de A_i e B_i, e ΔA_i e ΔB_i, as matrizes formadas pelos termos incertos ou não lineares de A_i e B_i, respectivamente

$$A_i = A_0 + \Delta A_i, \quad B_i = B_0 + \Delta B_i. \tag{14}$$

A construção dos modelos locais é independente da variação temporal dos termos incertos ou não lineares, sendo necessário somente o conhecimento dos seus valores de máximo e mínimo no tempo. Da mesma forma que ocorre nas funções de pertinência, os valores de máximos e mínimos devem ser combinados para obtenção dos modelos locais.

Considere um exemplo simples a seguir, em que há a incerteza a na matriz A_i, e há a incerteza b na matriz B_i, de modo que os valores de máximos e mínimos no tempo dessas variáveis são conhecidos. A construção dos modelos locais é dada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &A_i = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}, \\ &A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta A_i = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{15}$$

combinando os valores de máximo e mínimo de a e b, tem-se 4 modelos locais a seguir

$$\begin{aligned} A_1 = \begin{bmatrix} 1 & a_{max} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ b_{max} \end{bmatrix}, \\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & a_{max} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ b_{min} \end{bmatrix}, \\ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & a_{min} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ b_{max} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{16}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & a_{min} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ b_{min} \end{bmatrix}.$$

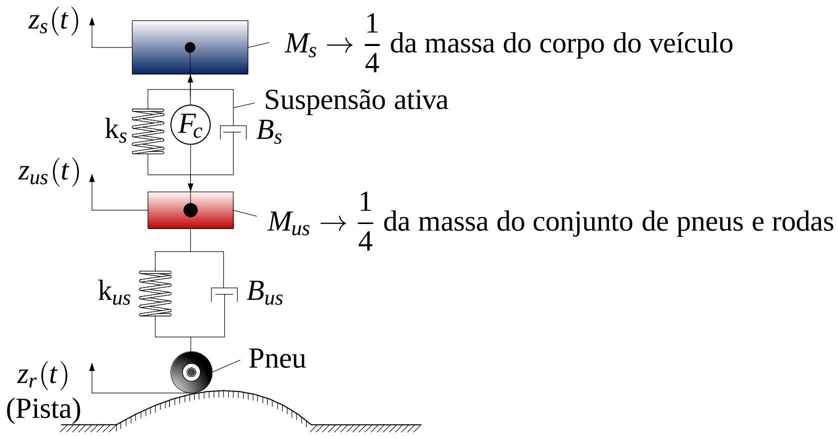
A seguir, são apresentados dois exemplos: um utilizando a suspensão ativa e outro apresentando o modelo de posição da perna de paraplégicos (FERRARIN; PEDOTTI, 2000).

2.2 EXEMPLO

2.2.1 SUSPENSÃO ATIVA

O modelo de suspensão ativa de $1/4$ de veículo fabricada pela Quanser® é representado na Figura 1.

Figura 1 - Esquema de suspensão ativa (OLIVEIRA et al., 2018).



A dinâmica do sistema não linear é dada a seguir (OLIVEIRA et al., 2018; SILVA et al., 2020)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{-k_s}{M_s} & \frac{-B_s}{M_s} & 0 & \frac{B_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M_{us}} & \frac{B_s}{M_{us}} & f_{43} & \frac{-(B_s+B_{us})}{M_{us}} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_{fault}}{M_s} \\ 0 \\ \frac{-k_{fault}}{M_{us}} \end{bmatrix} u, \tag{17}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \qquad z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \tag{18}$$

sendo

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_s(t) - z_{us}(t) \\ \dot{z_s}(t) \\ z_{us}(t) - z_r(t) \\ \dot{z_{us}}(t) \end{bmatrix}, \quad f_{43} = \frac{-k_{us0}(1 + \Delta k_{us}|z_{us} - z_r|)}{M_{us}}. \tag{19}$$

Considera-se uma falha no atuador em (19), que resulta em perda de potência. Quando não há falha, $k_{fault} = 1$, e, para falha máxima, foi considerada uma perda de potência de 50%, ou seja, $k_{fault} = 0,5$. Na massa suspensa M_s, há uma incerteza de valor, estando entre $1,455 \leq M_s \leq 2,45$ kg. A rigidez da mola possui um comportamento não linear perto do seu fim. Para essa não linearidade, um modelo matemático é adotado e dado por (OLIVEIRA et al., 2018)

$$k_{us}(z_{us} - z_r, \Delta k_{us}) = k_{us0}(1 + \Delta k_{us0}|z_{us} - z_r|), \tag{20}$$

em que $-0,02 \leq z_{us} - z_r \leq 0,02$, $0 \leq \Delta k_{us} \leq 5,71$ e $0,5 \leq k_{fault} \leq 1$.

Os demais parâmetros do sistema são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 - Parâmetros do sistema de suspensão ativa (QUANSER, 2009; OLIVEIRA et al., 2018).

Parâmetro [Unidade]	Símbolo	Valor
1/4 da massa do corpo do veículo [kg]	M_s	$1,455$ a $2,45$
1/4 da massa do conjunto de pneus e rodas [kg]	M_{us}	1
Constante de amortecimento [N.s/m]	B_s	$7,5$
Constante de amortecimento [N.s/m]	B_{us}	5
Constante de rigidez da mola [N/m]	k_s	900
Constante de rigidez da mola [N/m]	k_{us0}	2500
Parâmetro da mola [m^{-1}]	Δk_{us0}	$5,71$

Fonte: Elaborado pela própria autora.

Assim, tem-se 3 incertezas ou não linearidades, uma relacionada à massa suspensa, outra à falha no atuador, e uma última à não linearidade da mola. Consequentemente há 8 funções de pertinência e 8 modelos locais.

As matrizes constantes A_{0i} e B_{0i} são dadas a seguir

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & 0 & -12,5 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

E as matrizes variáveis ΔA_i e ΔB_i com os valores de máximos e mínimos são

$$\Delta A_1 = \Delta A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -367,35 & -3,06 & 0 & 3,06 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2927,5 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A_2 = \Delta A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -367,35 & -3,06 & 0 & 3,06 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2500 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A_5 = \Delta A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -618,55 & -5,15 & 0 & 5,15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2927,5 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A_6 = \Delta A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -618,55 & -5,15 & 0 & 5,15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2500 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\Delta B_1 | \Delta B_3 | \Delta B_5 | \Delta B_7] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2041 & 0,4082 & 0,3436 & 0,6873 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & -1 & -0,5 & -1 \end{array}\right],$$

$$\Delta B_2 = \Delta B_1, \quad \Delta B_4 = \Delta B_3, \quad \Delta B_6 = \Delta B_5, \quad \Delta B_8 = \Delta B_7. \tag{22}$$

De (14), (21) e (22), tem-se finalmente os modelos locais

$$A_1 = A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367,35 & -3,06 & 0 & 3,06 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2927,5 & -12,5 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367,35 & -3,06 & 0 & 3,06 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -618,55 & -5,15 & 0 & 5,15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2927,5 & -12,5 \end{bmatrix},$$

$$A_6 = A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -618,55 & -5,15 & 0 & 5,15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix},$$

$$[B_1|B_3|B_5|B_7] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2041 & 0,4082 & 0,3436 & 0,6873 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & -1 & -0,5 & -1 \end{array}\right],$$

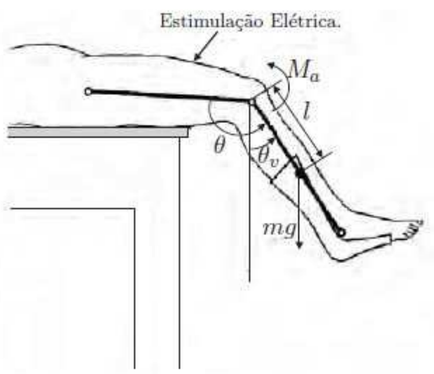
$$B_2 = B_1, \quad B_4 = B_3, \quad B_6 = B_5, \quad B_8 = B_7. \tag{23}$$

As funções de pertinência estão associadas a termos incertos e não lineares e não podem ser calculadas.

2.2.2 MODELO MATEMÁTICO DA POSIÇÃO DA PERNA DE UM PARAPLÉGICO USANDO ELETROESTIMULAÇÃO

O modelo de controle de posição de perna de paraplégico é proposto por Ferrarin e Pedotti (2000). Em sua modelagem, Ferrarin e Pedotti (2000) considera o membro inferior como uma cadeia cinemática aberta, composta por coxa e o complexo canela-pé, representados na Figura 2.

Figura 2 - Complexo canela-pé (GAINO et al., 2020).



Em espaço de estados, tem-se as equações obtidas por Gaino et al. (2020) com a inserção de uma falha no atuador, representadas a seguir

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tilde{f_{21}}(x_1(t)) & \dfrac{-b}{J} & \dfrac{1}{J} \\ 0 & 0 & \dfrac{-1}{\tau} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{k_{falha}G}{\tau} \end{bmatrix} P_N,$$

Tabela 2 - Parâmetros do sistema de perna paraplégica.

Parâmetro [unidade]	Símbolo	Valor
Momento inercial do complexo canela-pé [Kg m^2]	J	$0,362$
Massa do complexo canela-pé [Kg]	m	$4,37$
Distância joelho-complexo canela-pé [m]	l	$0,238$
Coeficiente de atrito viscoso [Nms/rad]	b	$0,27$
Coeficiente do termo exponencial [Nm/rad]	λ	$41,208$
Coeficiente do termo exponencial [1/rad]	E	$2,024$
Ângulo elástico de repouso do joelho [rad]	f	$2,918$
Constante positiva relacionada com o torque [s]	τ	$0,951$
Constante positiva relacionada com o torque [Nm/s]	G	42500

Fonte: Elaborado pela própria autora.

$$x = \begin{bmatrix} \theta_v - \theta_{v0} \\ \dot{\theta}_v \\ \Delta M_a \end{bmatrix}, \quad \Delta M_a = M_a - M_{a0}, \quad P_N = P - \frac{M_{a0}}{G}, \tag{24}$$

em que θ_{v0}, θ_v, $\dot{\theta}_v$ e ΔM_a representam: posição desejada $[rad]$, deslocamento angular no instante de tempo t $[rad]$, velocidade angular $[rad/s]$ e torque $[Nm]$, respectivamente. M_a é o torque no instante de tempo t e M_{a0} é o torque necessário para manter a posição θ_v na posição θ_{v0} dado em (26), P representa a largura de pulso em cada instante de tempo t $[s]$, $\frac{M_{a0}}{G}$ representa a largura de pulso P necessária para manter a posição θ_v na posição θ_{v0} e $\tilde{f_{21}}(x_1(t))$ é uma não linearidade do sistema, sendo $x_1 = \theta_v - \theta_{v0}$ definida como

$$\tilde{f_{21}}(x_1(t)) = \frac{1}{Jx_1}\left[-mglsen(x_1+\theta_{v0}) - \lambda e^{-E(x_1+\theta_{v0}+\frac{\pi}{2})}\left(x_1+\theta_{v0}+\frac{\pi}{2}-f\right) + M_{a0}\right], \tag{25}$$

e

$$M_{a0} = mglsen(\theta_{v0}) + \lambda e^{-E(\theta_{v0}+\frac{\pi}{2})}\left(\theta_{v0}+\frac{\pi}{2}-f\right). \tag{26}$$

Os valores do parâmetro do sistema são dados na Tabela 2 (FERRARIN; PEDOTTI, 2000).

Pode-se observar que em (25), quando $x_1 = 0$, não é possível determinar diretamente $\tilde{f_{21}}(x_1(t))$, pois o denominador se torna nulo. Isso dificulta a obtenção dos modelos fuzzy TS para descrição da planta. Como solução, Gaino et al. (2020) expandiu (25) em série de Taylor, de forma que x_1 no denominador possa ser cancelado e o problema solucionado.

A série de Taylor até a quinta ordem apresentada por (GAINO et al., 2020) é dada a seguir

$$\tilde{f_{21}}(x_1(t)) = \frac{1}{Jx_1}\Bigg\{ -mgl\left[(x_1+\theta_{v0}) - \frac{1}{6}(x_1+\theta_{v0})^3 + \frac{1}{120}(x_1+\theta_{v0})^5\right]$$

$$
-\lambda e^{-E\frac{\pi}{2}}\left[1-E(x_1+\theta_{v0})+\frac{1}{2}(E(x_1+\theta_{v0}))^2-\frac{1}{6}(E(x_1+\theta_{v0}))^3+\frac{1}{24}(E(x_1+\theta_{v0}))^4\right.
$$
$$
\left.-\frac{1}{120}(E(x_1+\theta_{v0}))^5\right]+\lambda e^{-E\frac{\pi}{2}}\left[1-E\theta_{v0}+\frac{1}{2}E^2\theta_{v0}^2-\frac{1}{6}E^3\theta_{v0}^3+\frac{1}{24}E^4\theta_{v0}^4-\frac{1}{120}E^5\theta_{v0}^5\right]
$$
$$
\times\left[\theta_{v0}+\frac{\pi}{2}-f\right]\bigg\}. \tag{27}
$$

Desenvolvendo (27) e cancelando x_1, tem-se

$$
\tilde{f_{21}}(x_1(t))=\frac{1}{Jx_1}\bigg\{-mgl\left[1-\frac{1}{6}x_1^2-\frac{1}{2}\theta_{v0}x_1-\frac{1}{2}\theta_{v0}^2+\frac{1}{120}x_1^4+\frac{1}{24}\theta_{v0}x_1^3+\frac{1}{12}\theta_{v0}^2x_1^2+\frac{1}{12}\theta_{v0}^3x_1\right.
$$
$$
\left.+\frac{1}{24}\theta_{v0}^4\right]-\lambda e^{-E\frac{\pi}{2}}\left[1-Ex_1-E(\theta_{v0}+\frac{\pi}{2}-f)-E\theta_{v0}+\frac{1}{2}E^2x_1^2+\frac{1}{2}E^2x_1(\theta_{v0}+\frac{\pi}{2}-f)\right.
$$
$$
+E^2\theta_{v0}x_1+E^2\theta_{v0}(\theta_{v0}+\frac{\pi}{2}-f)+\frac{1}{2}E^2\theta_{v0}^2-\frac{1}{6}E^3x_1^3-\frac{1}{6}E^3x_1^2(\theta_{v0}+\frac{\pi}{2}-f)-\frac{1}{2}E^3x_1^2\theta_{v0}
$$
$$
-\frac{1}{2}E^3x_1\theta_{v0}(\theta_{v0}+\frac{\pi}{2}-f)-\frac{1}{2}E^3x_1\theta_{v0}^2-\frac{1}{2}E^3\theta_{v0}^2(\theta_{v0}+\frac{\pi}{2}-f)-\frac{1}{6}E^3\theta_{v0}^3+\frac{1}{24}E^4x_1^4
$$
$$
+\frac{1}{24}E^4x_1^3(\theta_{v0}+\frac{\pi}{2}-f)+\frac{1}{6}E^4x_1^3\theta_{v0}++\frac{1}{6}E^4x_1^2\theta_{v0}(\theta_{v0}+\frac{\pi}{2}-f)+\frac{1}{4}E^4x_1^2\theta_{v0}^2
$$
$$
+\frac{1}{4}E^4x_1\theta_{v0}^2(\theta_{v0}+\frac{\pi}{2}-f)+\frac{1}{6}E^4x_1\theta_{v0}^3+\frac{1}{6}E^4\theta_{v0}^3(\theta_{v0}+\frac{\pi}{2}-f)+\frac{1}{24}E^4\theta_{v0}^4-\frac{1}{120}E^5x_1^5
$$
$$
-\frac{1}{120}E^5x_1^4(\theta_{v0}+\frac{\pi}{2}-f)-\frac{1}{24}E^5x_1^4\theta_{v0}-\frac{1}{24}E^5x_1^3\theta_{v0}(\theta_{v0}+\frac{\pi}{2}-f)-\frac{1}{12}E^5x_1^3\theta_{v0}^2
$$
$$
-\frac{1}{12}E^5x_1^2\theta_{v0}^2(\theta_{v0}+\frac{\pi}{2}-f)-\frac{1}{12}E^5x_1^2\theta_{v0}^2-\frac{1}{12}E^5x_1\theta_{v0}^3(\theta_{v0}+\frac{\pi}{2}-f)-\frac{1}{24}E^5x_1\theta_{v0}^4
$$
$$
\left.-\frac{1}{24}E^5\theta_{v0}^4(\theta_{v0}+\frac{\pi}{2}-f)-\frac{1}{120}E^5\theta_{v0}^5\right]\bigg\}. \tag{28}
$$

Para esse modelo, considerou-se o ponto de operação como $\theta_{v0}=\dfrac{\pi}{6}$ e uma falha de 3% nos atuadores, que pode resultar na perda de potência dos atuadores em 3%. De (24), tem-se uma não linearidade, dada por (25), e uma incerteza, dada pela falha dos atuadores, logo tem-se $2^2=4$ funções de pertinência e modelos locais.

De (23), tem-se que as matrizes constantes A_{0i} e B_{0i} são

$$
A_0=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -0,7458 & 2,7624\\ 0 & 0 & -1,0515\end{bmatrix},\quad B_0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}. \tag{29}
$$

E as matrizes variáveis ΔA_i e ΔB_i com os valores de máximos e mínimos são

$$
\Delta A_1=\Delta A_3\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -22,2012 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \Delta A_2=\Delta A_4\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -36,5066 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},
$$

$$\Delta B_1 = \Delta B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 43349,1062 \end{bmatrix}, \quad \Delta B_3 = \Delta B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 44689,8002 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

De (23), (29) e (30), tem-se finalmente os modelos locais

$$A_1 = A_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -22,2012 & -0,7458 & 2,7624 \\ 0 & 0 & -1,0515 \end{bmatrix}, \quad A_2 = A_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -36,5066 & -0,7458 & 2,7624 \\ 0 & 0 & -1,0515 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 43349,1062 \end{bmatrix}, \quad B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 44689,8002 \end{bmatrix}. \tag{31}$$

As funções de pertinência estão associadas à falha no atuador, sendo esta uma incerteza variante no tempo, logo não podem ser calculadas, pois são incertas.

3 CONTROLE CHAVEADO COM REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA SUJEITO À SATURAÇÃO NOS ATUADORES E CUSTO GARANTIDO PARA SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS

Neste capítulo será apresentada uma extensão dos trabalhos de Souza et al. (2014a, 2014b), Alves (2017), Bocca et al. (2021). Inicialmente, serão descritos conceitos de realimentação de saída, politopo de condições iniciais, região de operação, taxa de decaimento, custo garantido e a descrição da saturação dos atuadores como uma combinação convexa. Em seguida, são apresentados três teoremas usando controle chaveado e um corolário utilizando ganho único. O corolário apresenta a metodologia para obtenção do controlador de único ganho, considerando realimentação de saída, saturação nos aturadores e custo garantido. Já os três teoremas se dividem em: um com realimentação de saída, saturação nos atuadores e taxa de decaimento; outro com realimentação de saída, saturação nos aturadores e custo garantido; e o último é um teorema teórico que garante que se as condições propostas para controladores de ganho único, ou seja, para o corolário, são satisfeitas para um sistema, então as condições para controle chaveado do segundo teorema também serão satisfeitas. Posteriormente, as condições dos dois primeiros teoremas e do corolário são aplicadas aos dois sistemas cujos modelos locais são apresentados no Capítulo 2 e a um terceiro sistema que será apresentado nesse capítulo, sendo realizadas simulações numéricas e implementações práticas.

3.1 CONTROLE CHAVEADO COM REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA SUJEITO À SATURAÇÃO NOS ATUADORES E CUSTO GARANTIDO

Considere um sistema não linear incerto com saturação no sinal de controle exatamente descrito através de modelos fuzzy TS, conforme o Capítulo 2

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)sat(u(t)), \\ y(t) &= C_1(\alpha)x(t), \\ z(t) &= C_2(\alpha)x(t), \end{aligned} \tag{32}$$

sendo que $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estado do sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada de controle, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída medida, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída que se deseja controlar e $sat(u)$ representa a saturação na entrada de controle $u(t)$, conforme a equação (33).

$$sat(u) = \begin{bmatrix} sat(u)_1 \\ \vdots \\ sat(u)_{n_u} \end{bmatrix}, sat(u)_l = \begin{cases} -\varsigma_l, \text{ if } u_l < -\varsigma_l, \\ u_l, \text{ if } |u_l| \leq \varsigma_l, \\ \varsigma_l, \text{ if } u_l > \varsigma_l, \end{cases} \tag{33}$$

em que $sat(u) \in \mathbb{R}^{n_u}$, $l \in \mathbb{R}_{n_u}$ e ς_l é uma constante positiva definida.

As matrizes $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $C_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ e $C_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$ em (32) pertencem ao politopo de incertezas

$$\vartheta = \left\{ \Big[A(\alpha), B(\alpha), C_1(\alpha), C_2(\alpha)\Big] = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i \Big[A_i, B_i, C_{1i}, C_{2i}\Big],\ \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0 \right\}, \tag{34}$$

sendo que n_r é o número de modelos locais e α_i são as funções de pertinência associadas aos modelos fuzzy TS.

Em aplicações práticas, muitas vezes as variáveis de estado do sistema não estão totalmente disponíveis para realimentação de estados. Nesses casos, a realimentação de saída surge como uma estratégia para o projeto do controlador. Para isso, a lei de controle do sistema deixa de ser como em (8) e passa a ter a participação do vetor de saída medida $y(t)$, assumindo a seguinte forma para casos em que o controlador possui ganho único de realimentação

$$u(t) = -Ky(t), \tag{35}$$

em que $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ representa a matriz de ganhos do controlador.

No entanto, como dito no Capítulo 1, quando o sistema é não linear e incerto, ele pode ser modelado através de modelos fuzzy TS, mas suas funções de pertinência podem depender de termos não lineares, incertos ou mesmo de variáveis de estado que não podem ser mensuradas, de forma que essas funções de pertinência nem sempre estão disponíveis e, por isso, não podem ser utilizadas na lei de controle. Para contornar esse problema, pode-se projetar controladores chaveados (SOUZA et al., 2014a, 2014b), nos quais a lei de controle com realimentação de saída é dada na forma a seguir

$$u = -K_\sigma y = -K_\sigma C_1(\alpha)x, \quad \sigma = \text{arg*min}_{s \in \mathbb{K}_{n_r}} (y^T Z_s y), \tag{36}$$

em que $\text{arg*min}_{s \in \mathbb{K}_{n_r}} (y^T Z_s y)$ representa o menor índice $\sigma \in \mathbb{K}_{n_r}$, tal que $y^T Z_\sigma y = \text{argmin}_{s \in \mathbb{K}_{n_r}}$ $(y^T Z_s y)$, $K_\sigma \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ é um ganho escolhido dentro de um conjunto de ganhos $\{K_1, K_2, \ldots, K_{n_r}\}$ que é obtido pelo projeto de controladores em conjunto com as matrizes de decisão $Z_s \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$.

Substituindo a lei de controle chaveado (36) nas equações do sistema (32), tem-se o sistema em malha fechada dado por

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x + B(\alpha)sat(-K_\sigma C_1(\alpha)x). \tag{37}$$

Em muitos casos, para garantir que o transitório da saída do controlador de um sistema qualquer seja rápido e com poucas oscilações, é interessante definir um politopo de condições iniciais, descrito a seguir (SILVA, 2020)

$$x(0) = \sum_{m=1}^{n_{x_0}} \lambda_m x_m, \sum_{m=1}^{n_{x_0}} \lambda_m = 1, \lambda_m \geq 0, \forall m \in \mathbb{K}_{n_{x_0}}, \tag{38}$$

sendo os vetores x_m, $m = 1, 2, ..., n_{x_0}$, conhecidos.

Além disso, é também conveniente utilizar a definição uma região de operação, conforme (10), para o sistema, na qual o sistema deve funcionar e as condições impostas pelo controlador serão garantidas.

Outros dois conjuntos $\mathscr{L}$ e ε devem ser definidos, sendo o primeiro relacionado aos limites de saturação e o segundo, aos limitantes da candidata à função de Lyapunov. Esses conjuntos são definidos de acordo com Hu, Lin e Chen (2002), Cao e Lin (2003), sendo as matrizes $H_k = \begin{bmatrix} H_{k(1)}^T & H_{k(2)}^T & \dots & H_{k(n_u)}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, $k \in \mathbb{K}_{n_r}$, uma matriz definida positiva $P = P^T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, um vetor conhecido $\varsigma = \begin{bmatrix} \varsigma_1 & \varsigma_2 & \dots & \varsigma_{n_u} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n_u}$, $\varsigma_l > 0$, $l \in \mathbb{K}_{n_u}$ e um escalar $\beta > 0$, sendo que

$$\mathscr{L}(H_k) \triangleq \{x(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : |H_{k(l)} x(t)| \leq \varsigma_l, \quad l \in \mathbb{K}_{n_u}, k \in \mathbb{K}_{n_r}\}, \tag{39}$$

$$\varepsilon(P, \beta) \triangleq \left\{x \in \mathbb{R}^{n_x} : x^T P x \leq \beta\right\}. \tag{40}$$

Define-se, também, o conjunto $\mathscr{D}$ (HU; LIN; CHEN, 2002; CAO; LIN, 2003)

$$\mathscr{D} \triangleq \{D_q \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u} : d_{ii} = 0 \text{ ou } 1 \text{ e } d_{ij} = 0, \forall i \neq j\}, \tag{41}$$

sendo os elementos da matriz $\mathscr{D}$, d_{ij} , $\forall (i, j) \in \mathbb{K}_{n_u} \times \mathbb{K}_{n_u}$. O conjunto $\mathscr{D}$, dado em (41), possui 2^{n_u} matrizes, denominadas D_q, $q \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$.

Desse modo, para garantir que o conjunto positivamente invariante $\varepsilon(P, \beta)$ (40) está contido no conjunto relacionado à saturação $\mathscr{L}(H_k)$ (39), ou seja, $\varepsilon(P, \beta) \subset \mathscr{L}(H_k)$, o seguinte lema é adaptado de Alves et al. (2016b).

Lema 1. *(ALVES et al., 2016b) Dados os conjuntos* $\varepsilon(P, \beta)$ (40) *e* $\mathscr{L}(H_k)$ (39)*. A condição* $\varepsilon(P, \beta) \subset \mathscr{L}(H_k)$ *é satisfeita se*

$$\begin{bmatrix} \varsigma_l^2 \omega & * \\ G_{k_{(l)}}^T & X \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{42}$$

for satisfeita para todo $k \in \mathbb{K}_{n_r}$, $l \in \mathbb{K}_{n_u}$, *sendo* $\omega = \beta^{-1}$, $X = P^{-1}$ *e* $G_{k_{(l)}} = H_{k_{(l)}} X$.

Demonstração. Pré e pós multiplicando (42) por $diag\{1, P\}$, com $P = X^{-1}$, e aplicando o Complemento de Schur, tem-se

$$P - H_{k_{(l)}}^T \varsigma_l^{-2} \omega^{-1} H_{k_{(l)}} \succeq 0,$$

$$P \succeq H_{k_{(l)}}^T \varsigma_l^{-2} \omega^{-1} H_{k_{(l)}}. \tag{43}$$

Pré e pós multiplicando (43) por x^T e x, respectivamente

$$x^T P x \succeq x^T H_{k_{(l)}}^T \varsigma_l^{-2} \omega^{-1} H_{k_{(l)}} x. \tag{44}$$

Considerando $x(t) \in \varepsilon(P, \beta)$, tem-se $x^T P x \leq \beta = \omega^{-1}$, de (44)

$$\begin{aligned} \beta &\succeq x^T P x \succeq \varsigma_l^{-2} \beta x^T H_{k_{(l)}}^T H_{k_{(l)}} x, \\ \varsigma_l^2 &\succeq x^T H_{k_{(l)}}^T H_{k_{(l)}} x. \end{aligned} \tag{45}$$

Portanto $x(t) \in \mathscr{L}(H_k)$ e, consequentemente, $\varepsilon(P, \beta) \subset \mathscr{L}(H_k)$. □

Com o objetivo de garantir que o conjunto positivamente invariante $\varepsilon(P, \beta)$ (40) está contido na região de operação $\mathscr{X}$ (10), ou seja, $\varepsilon(P, \beta) \subset \mathscr{X}$, um novo lema é proposto a seguir.

Lema 2. *Dados os conjuntos $\varepsilon(P, \beta)$ descrito em* (40) *e $\mathscr{X}$ em* (10). *A condição $\varepsilon(P, \beta) \subset \mathscr{X}$ é satisfeita se*

$$\begin{bmatrix} \phi_h^2 \omega & * \\ X N_h^T & X \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{46}$$

para todo $h \in \mathbb{K}_{n_h}$, sendo $\omega = \beta^{-1}$ e $X = P^{-1}$.

Demonstração. Pré e pós multiplicando (46) por $diag\{1, P\}$, com $P = X^{-1}$, e aplicando o Complemento de Schur, tem-se

$$\begin{aligned} P - N_h^T \phi_h^{-2} \omega^{-1} N_h &\succeq 0, \\ P &\succeq N_h^T \phi_h^{-2} \omega^{-1} N_h. \end{aligned} \tag{47}$$

Pré e pós multiplicando (47) por x^T e x, respectivamente

$$x^T P x \succeq x^T N_h^T \phi_h^{-2} \omega^{-1} N_h x. \tag{48}$$

Se $x(t) \in \varepsilon(P, \beta)$, então $x^T P x \leq \beta = \omega^{-1}$. De (48)

$$\omega^{-1} \succeq x^T P x \succeq x^T N_h^T \phi_h^{-2} \omega^{-1} N_h x. \tag{49}$$

Pode-se reescrever (49) como

$$\phi_h^2 \succeq x^T N_h^T N_h x. \tag{50}$$

Assim, $x \in \mathscr{X}$ e, consequentemente, $\varepsilon(P,\beta) \subset \mathscr{X}$. $\square$

Desse modo, para o conjunto positivamente invariante $\varepsilon(P,\beta)$, as condições do Lema 2 garantem que toda trajetória iniciada em $x(0) \in \varepsilon(P,\beta)$ permaneça em $\mathscr{X}$ para todo $t > 0$ (KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2015).

Propõe-se outro lema para garantir que as condições iniciais pertencentes ao conjunto convexo (38) estão contidas no conjunto positivamente invariante $\varepsilon(P,\beta)$.

Lema 3. *Dados os conjuntos $\varepsilon(P,\beta)$ (40) e o politopo de condições iniciais (38), tem-se que o politopo (38) está contido em $\varepsilon(P,\beta)$ definido em (40) se*

$$\begin{bmatrix} \omega & * \\ \omega x_m(0) & X \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{51}$$

para todo $x_m(0)$ conhecido contido em $x(0)$, representado em (38), sendo $\omega = \beta^{-1}$ e $X = P^{-1}$.

Demonstração. Aplicando o Complemento de Schur em (51), obtém-se

$$\omega - \omega^2 x_m(0)^T X^{-1} x_m(0) \geq 0. \tag{52}$$

Substituindo $P = X^{-1}$, $\omega = \beta^{-1}$ e multiplicando os dois lados por β^2, tem-se

$$\beta \geq x_m^T(0) P x_m(0). \tag{53}$$

Multiplicando (53) por λ_m, $\sum_{m=1}^{n_{x_0}} \lambda_m = 1$ e somando de $m = 1$ até n_{x_0} e de (38)

$$\beta \geq x^T(0) P x(0). \tag{54}$$

Considerando a candidata à função de Lyapunov $V(x) = x^T P x$ e as condições iniciais pertencentes ao politopo (38), tem-se

$$V(x(0)) = x^T(0) P x(0). \tag{55}$$

Dessa forma, de (54) e (55), $\beta \geq x^T(0)Px(0)$, e, portanto, β é o limitante superior da candidata à função de Lyapunov $V(x)$ para toda condição inicial $x(0)$ pertencente ao politopo (38). $\square$

Como dito no Capítulo 1, problemas com realimentação de saída tem características não convexas. Assim, para construir o problema em função somente de LMIs, o lema a seguir será amplamente utilizado.

Lema 4. *(CHANG; PARK; ZHOU, 2015) Para matrizes $\mathscr{T}$, $\mathscr{P}$, $\mathscr{U}$ e $\mathscr{A}$ com dimensões apropriadas e um escalar $\eta > 0$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

$$(i)\begin{bmatrix} \mathscr{T} & * \\ \eta\mathscr{P}^T + \mathscr{U}\mathscr{A} & -\eta\mathscr{U} - \eta\mathscr{U}^T \end{bmatrix} \prec 0, \tag{56}$$

$$(ii)\, \mathscr{T} \prec 0, \quad \mathscr{T} + \mathscr{A}^T\mathscr{P}^T + \mathscr{P}\mathscr{A} \prec 0. \tag{57}$$

Demonstração. A prova do lema pode ser encontrada em Chang, Park e Zhou (2015). □

Na subseção a seguir, uma descrição da saturação é apresentada e será utilizada no desenvolvimento desse trabalho.

3.1.1 DESCRIÇÃO DA SATURAÇÃO DOS ATUADORES COMO UMA COMBINAÇÃO CONVEXA

Para a descrição da saturação dos atuadores como uma combinação convexa, as definições dos conjuntos $\mathscr{D}$ em (41) e $\mathscr{L}(H_k)$ em (39) serão utilizadas. Essa descrição pode ser encontrada em Hu, Lin e Chen (2002), Cao e Lin (2003), Alves (2017).

Considere um sinal de controle $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$. A saturação desse sinal é dada como

$$sat(u(t)) = \begin{bmatrix} sat_1(u_1(t)) & \dots & sat_{n_u}(u_{n_u}(t)) \end{bmatrix}^T, \tag{58}$$

$$sat_l(u_l(t)) = \text{sgn}(u_l(t))\min\{\varsigma_l, |u_l(t)|\}, \tag{59}$$

sendo $\varsigma_l > 0$, $\forall l \in \mathbb{K}_{n_u}$, conhecido. Uma componente $sat_l(u_l(t))$ da saturação (59) pode ser escrita como

$$sat_l(u_l(t)) \leq u_l(t), \quad \text{se } u_l(t) \geq 0, \quad \text{e } sat_l(u_l(t)) \geq u_l(t), \quad \text{se } u_l(t) < 0. \tag{60}$$

Se as condições do Lema 1 são satisfeitas, então a descrição da saturação como uma combinação convexa pode ser utilizada (HU; LIN; CHEN, 2002; CAO; LIN, 2003; ALVES, 2017). Considerando o conjunto $\mathscr{D}$ em (41) e fazendo $\bar{D}_q = I_{n_u} - D_q$, $q \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$, para $u = -Kx(t)$, finalmente, tem-se

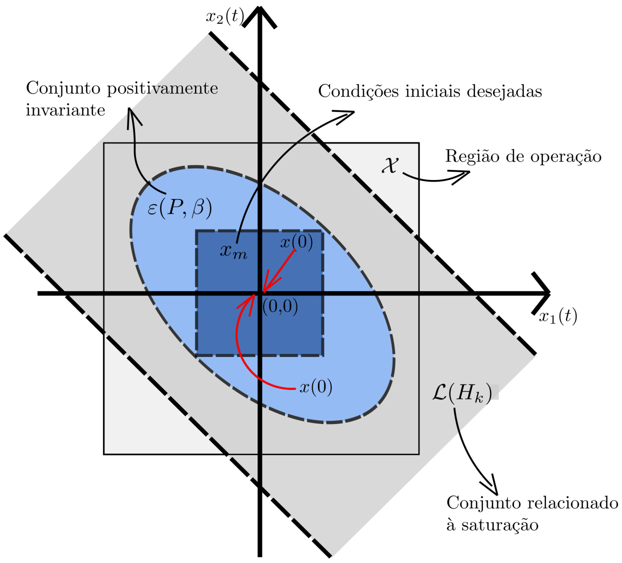
$$sat(u(t)) = sat(-Kx(t)) = \sum_{q=1}^{2^{n_u}} \lambda_q[D_q u(t) + \bar{D}_q Hx(t)] = \sum_{q=1}^{2^{n_u}} \lambda_q[-D_q Kx(t) + \bar{D}_q Hx(t)], \tag{61}$$

em que $\lambda_q \geq 0$ e $\sum_{q=1}^{2^{n_u}} \lambda_q = 1$ que é a equação para descrição da saturação do sinal de controle apresentada em Hu, Lin e Chen (2002), Cao e Lin (2003), Alves (2017). No entanto, para o caso em que há realimentação de saída e chaveamento do sinal de controle, a lei de controle é diferente, sendo dada por (36), de forma que a descrição (61) deve ser adaptada, assumindo a seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
sat(u(t)) &= sat(-K_\sigma y(t)) = sat(-K_\sigma C_1(\alpha)x(t)) \\
&= \sum_{q=1}^{2^{n_u}} \lambda_q[-D_q K_\sigma C_1(\alpha)x(t) + \bar{D}_q H_\sigma x(t)].
\end{aligned} \tag{62}
$$

A Figura 3 representa a região dos conjuntos $\mathscr{X}$ (10), $\mathscr{L}(H_k)$ (39), $\varepsilon(P,\beta)$ (40) e politopo de condições inicias em (38) no plano $x_1 \times x_2$ de acordo com as condições dos Lemas 1, 4, 3 e 2. Dessa forma, pode-se observar que o politopo de condições inicias está contido na região positivamente invariante $\varepsilon(P,\beta)$ que está contida na região de operação do sistema $\mathscr{X}$. Assim, para toda trajetória iniciada no politopo de condições inicias ou na região que relaciona $\varepsilon(P,\beta)$ e o politopo de condições inicias, tem-se que a trajetória é assintoticamente estável, conforme setas em vermelho. A descrição da saturação como uma combinação convexa é também garantida em toda região $\mathscr{L}(H_k)$.

Figura 3 - Representação de possíveis trajetórias de estado e das regiões $\mathscr{X}$ (10), $\mathscr{L}(H_k)$ (39), $\varepsilon(P,\beta)$ (40) e politopo de condições inicias em (38) no plano $x_1(t) \times x_2(t)$



O teorema a seguir apresenta as condições necessárias para que o sistema (32), com a lei de controle (36) seja assintoticamente estável no ponto de equilíbrio $x = 0$ com uma taxa de decaimento maior ou igual a γ.

Optou-se pelo uso da taxa de decaimento como índice de performance nesse teorema para diminuir o tempo de transitório do sistema.

Teorema 1. *Considere o sistema não linear incerto descrito em* (32)*, com a lei de controle* (36)*. Suponha a existência de matrizes simétricas* $X \succ 0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $Z_s \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, $Q_s \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, *matrizes* $U_s \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, $V_s \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$, $G_s \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, *e escalares* $\eta > 0$, $\varsigma > 0$, $\gamma > 0$ *conhecidos, tais que as seguintes inequações matriciais:*

$$\begin{bmatrix} 1 & * \\ x_m(0) & X \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{63}$$

$$\begin{bmatrix} \varsigma_l^2 & * \\ G_{k_{(l)}}^T & X \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} \phi_h^2 & * \\ XN_h^T & X \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{64}$$

$$\Omega_{iiqs} \prec 0, \tag{65}$$

$$\Omega_{ijqs} + \Omega_{jiqs} \prec 0, i < j, \tag{66}$$

$$\Theta_{iii} \prec 0, \tag{67}$$

$$\Theta_{iij} + \Theta_{iji} + \Theta_{jii} \prec 0, i \neq j \tag{68}$$

$$\Theta_{ijl} + \Theta_{ilj} + \Theta_{jil} + \Theta_{jli} + \Theta_{lij} + \Theta_{lji} \prec 0, i < j, j < l, \tag{69}$$

para todo i, j, l, s e k $\in \mathbb{K}_{n_r}$ *e* $q = 1, \ldots, 2^{n_u}$*, em que*

$$\Omega_{ijqs} = \begin{bmatrix} W_{ijqs} & * \\ Y_{ijqs} & -\eta U_s - \eta U_s^T \end{bmatrix}, \tag{70}$$

$$\Theta_{ijl} = Q_i + C_{1i}^T Z_j C_{1l}, \tag{71}$$

$$W_{ijqs} = He(A_i X - B_i D_q V_s \mathscr{F} C_{1j} + B_i \bar{D}_q G_s) - Q_i - C_{1i} Z_s C_{1j} + 2\gamma X,$$

$$Y_{ijqs} = -C_{1i} X + \eta V_s^T D_q^T B_i^T + U_s \mathscr{F} C_{1i},$$

$$\mathscr{F} = \begin{cases} I_{n_y \times n_y}, & C_{1i}, i = 1, 2, \ldots, \mathbb{K}_{n_r} \text{ é posto não completo,} \\ (C_{1i_0} C_{1i_0}^T)^{-1}, & \exists \text{ algum } i_0 \in \{1, 2, \ldots, \mathbb{K}_{n_r}\} \text{ tal que } C_{1i_0} \text{ possui posto completo.} \end{cases} \tag{72}$$

são satisfeitas. Então, a lei de controle chaveada (36)*, com* $K_s = V_s U_s^{-1}$ *torna o ponto de equilíbrio* $x = 0$ *do sistema não linear incerto* (32) *assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a* γ*.*

Demonstração. Primeiramente, multiplique (70) por α_i e $\alpha_j \geq 0$, tal que $\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j = 1$, e some de $i = 1$ até n_r e $j = 1$ até n_r. Então, considere $s = \sigma$ em (65) e (66), de forma que se segue

$$\sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_r} \alpha_i \alpha_j \Omega_{ijq\sigma} = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i^2 \Omega_{iiq\sigma} + \sum_{i=1}^{n_r-1} \sum_{j>i}^{n_r} \alpha_i \alpha_j (\Omega_{ijq\sigma} + \Omega_{jiq\sigma})$$

$$= \begin{bmatrix} W_{\alpha\alpha q\sigma} & * \\ Y_{\alpha\alpha q\sigma} & -\eta U_\sigma - \eta U_\sigma^T \end{bmatrix} \prec 0, \tag{73}$$

$$W_{\alpha\alpha q\sigma} = He(A(\alpha)X - B(\alpha)D_q V_\sigma \mathscr{F} C_1(\alpha) + B(\alpha)\bar{D}_q G_\sigma) - Q(\alpha) - C_1(\alpha)Z_\sigma C_1(\alpha) + 2\gamma X,$$
$$Y_{\alpha\alpha q\sigma} = -C_1(\alpha)X + \eta V_\sigma^T D_q^T B(\alpha)^T + U_\sigma \mathscr{F} C_1(\alpha),$$

em que $\mathscr{F}$, definido em (72), é um artifício matemático para tornar convexo o problema de realimentação de saída.

Note que, em (73), U_σ é não singular e invertível. Pré e pós multiplicando (73) por $\begin{bmatrix} x^T & x^T B(\alpha)D_q K_\sigma \end{bmatrix}$ e seu transposto, respectivamente, para $x \neq 0$, tem-se

$$\begin{aligned} x^T \Big(& A(\alpha)X + XA(\alpha)^T - Q(\alpha) - C_1(\alpha)^T Z_\sigma C_1(\alpha) + 2\gamma X + B(\alpha)\bar{D}_q G_\sigma + G_\sigma^T \bar{D}_q^T B(\alpha)^T \\ & - B(\alpha)D_q V_\sigma \mathscr{F} C_1(\alpha) - C_1(\alpha)^T \mathscr{F}^T V_\sigma^T D_q^T B(\alpha)^T - B(\alpha)D_q K_\sigma C_1(\alpha)X \\ & + \eta B(\alpha)D_q K_\sigma V_\sigma^T D_q^T B(\alpha)^T + B(\alpha)D_q V_\sigma \mathscr{F} C_1(\alpha) - XC_1(\alpha)^T K_\sigma^T D_q^T B(\alpha)^T \\ & + \eta B(\alpha)D_q V_\sigma K_\sigma^T D_q^T B(\alpha)^T + C_1(\alpha)^T \mathscr{F}^T V_\sigma^T D_q^T B(\alpha)^T - \eta B(\alpha)D_q V_\sigma K_\sigma^T D_q^T B(\alpha)^T \\ & - \eta B(\alpha)D_q K_\sigma V_\sigma^T D_q^T B(\alpha)^T \Big) < 0, \end{aligned} \tag{74}$$

em que $K_\sigma = V_\sigma U_\sigma^{-1}$. Então, (74) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} x^T \Big(& A(\alpha)X + XA(\alpha)^T - B(\alpha)D_q K_\sigma C_1(\alpha)X - XC_1(\alpha)^T K_\sigma^T D_q^T B(\alpha)^T + B(\alpha)\bar{D}_q G_\sigma \\ & + G_\sigma^T \bar{D}_q^T B(\alpha)^T + 2\gamma X \Big) < x^T Q(\alpha)x + y^T Z_\sigma y. \end{aligned} \tag{75}$$

Por outro lado, de (67), (68) e (69),

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_r}\sum_{j=1}^{n_r}\sum_{l=1}^{n_r} \alpha_i\alpha_j\alpha_l\Theta_{ijl} = & \sum_{i=1}^{n_r}\alpha_i^3\Theta_{iii} + \sum_{i=1}^{n_r}\sum_{i\neq j}^{n_r}\alpha_i^2\alpha_j(\Theta_{iij}+\Theta_{iji}+\Theta_{jii}) \\ + \sum_{i=1}^{n_r}\sum_{i<j}^{n_r}\sum_{j<l}^{n_r} & \alpha_i\alpha_j\alpha_l(\Theta_{ijl}+\Theta_{ilj}+\Theta_{jil}+\Theta_{jli}+\Theta_{lij}+\Theta_{lji}) = Q(\alpha) + C_1(\alpha)^T Z(\alpha)C_1(\alpha) \prec 0. \end{aligned} \tag{76}$$

Pré e pós multiplicando (76) por x^T e x, respectivamente, e, sabendo que $y^T Z_\alpha y = x^T C_1(\alpha)^T Z(\alpha)C_1(\alpha)x$, tem-se, para todo $x \neq 0$

$$x^T Q(\alpha)x + y^T Z(\alpha)y < 0. \tag{77}$$

O valor mínimo em um conjunto de números reais é menor ou igual que qualquer combinação convexa desses números. Assim, de (77), e levando em conta que $y^T Z_\sigma y = \min\limits_{s\in\mathbb{K}_{n_r}} (y^T Z_s y)$, tem-se, de (75), que

$$x^T Q(\alpha)x + min_{s\in\mathbb{K}_{n_r}}(y^T Z_s y) = x^T Q(\alpha)x + y^T Z_\sigma y \leq x^T Q(\alpha)x + y^T Z(\alpha)y < 0. \tag{78}$$

Portanto, de (75) a (78),

$$A(\alpha)X + XA(\alpha)^T - B(\alpha)D_qK_\sigma C_1(\alpha)X - XC_1(\alpha)^T K_\sigma^T D_q^T B(\alpha)^T + B(\alpha)\bar{D}_q G_\sigma + G_\sigma^T \bar{D}_q^T B(\alpha)^T + 2\gamma X < 0. \tag{79}$$

Pré e pós multiplicando (79) por $x^T P$ e Px, respectivamente, sendo $P = X^{-1}$ e $G_\sigma = H_\sigma X$, e considerando o sistema em malha fechada (37) e também as condições para que a taxa de decaimento seja maior ou igual a γ, ou seja, $\dot{V}(x(t)) \leq -2\gamma x^T Px = -2\gamma V(x)$, sendo $V(x(t)) = x^T Px$ a candidata à função de Lyapunov, obtém-se

$$x^T \Big(PA(\alpha) + A(\alpha)^T P - PB(\alpha)D_qK_\sigma C_1(\alpha) - C_1(\alpha)^T K_\sigma^T D_q^T B(\alpha)^T P + PB(\alpha)\bar{D}_q H_\sigma + H_\sigma^T \bar{D}_q^T B(\alpha)^T P + 2\gamma P \Big) x = \dot{x}^T Px + x^T P\dot{x} - 2\gamma V(x) = \dot{V}(x(t)) - 2\gamma V(x) < 0. \tag{80}$$

As LMIs e definições de (65) a (72) garantem que $\varepsilon(P,\beta)$ com $\beta = 1$ é um conjunto positivamente invariante (BLANCHINI, 1999), para o sistema (32) com a lei de controle (36). Assim, do Lema 3, a LMI (63) garante que todas as condições inciais pertencentes ao conjunto convexo (38) estão contidas no conjunto positivamente invariante $\varepsilon(P,1)$.

Observando o Lema 1, a primeira desigualdade de (64) assegura que $\varepsilon(P,1) \subset \mathscr{L}(H_k)$, então para todo $x(0) \in \varepsilon(P,1)$, tem-se $x(0) \in \mathscr{L}(H_k)$ e a descrição da saturação como combinação convexa (61) pode ser utilizada.

A segunda desigualdade de (64), do Lema 2, garante que $\varepsilon(P,1) \subset \mathscr{X}$. Então, tem-se que toda trajetória iniciada com $x(0) \in \varepsilon(P,1)$ permanece em $\mathscr{X}$ para todo $t > 0$ (KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2015), pois durante toda a trajetória do sistema $V(x) \leq 1$ para todo $t > 0$. Isso completa a prova do teorema. □

3.1.2 CUSTO GARANTIDO

No projeto de controladores, já não se busca apenas a estabilidade do sistema, mas também melhorias em seu transitório. Com esse objetivo, optou-se pelo uso de um índice de performance que minimize a energia na saída do sistema dado por

$$J = \int_0^\infty z^T Rz dt = \int_0^\infty x^T C_2(\alpha)^T RC_2(\alpha)x dt, \tag{81}$$

em que a matriz definida positiva $R = R^T \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ é a matriz de ponderação entre o custo e a saída controlável do sistema.

Dessa forma, minimizar o custo (81) significa que, durante o transiente, a saída controlável z deve convergir rapidamente para zero e apresentar poucas oscilações. A otimização desse custo será obtida pela minimização de um limitante superior, chamado custo garantido, para as condições inicias descritas em (38), obtendo-se

$$J = \int_0^\infty z^T R z dt = \int_0^\infty x^T C_2(\alpha)^T R C_2(\alpha) x dt \leq V(x(0)). \tag{82}$$

Considerando a teoria abordada anteriormente, propõe-se o Teorema 2 que apresenta as LMIs necessárias para garantir a estabilidade do sistema (32), com a lei de controle (36), em que o índice de performance (81) é garantido para qualquer condição inicial pertencente ao politopo de condições iniciais (38).

Teorema 2. *Considere um sistema não linear incerto descrito por* (32)*, a lei de controle em* (36)*, o índice de performance J dado em* (81) *e as condições iniciais descritas em* (38)*. Suponha a existência de matrizes simétricas* $X \succ 0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $Z_s \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, $Q_s \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, *matrizes* $U_s \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, $V_s \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$, $G_s \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, *e escalares* $\rho > 0$, $\eta > 0$, $\omega > 0$ *e* $\varsigma > 0$*, tais que o seguinte problema de otimização é resolvido:*

$$\max_{X, U_s, V_s} \quad \omega$$

$$sujeito \quad a$$

$$\begin{bmatrix} \omega & * \\ \omega x_m(0) & X \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{83}$$

$$\begin{bmatrix} \varsigma_l^2 \omega & * \\ G_{k_{(l)}}^T & X \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} \phi_h^2 \omega & * \\ X N_h^T & X \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{84}$$

$$\Omega_{iiqs} \prec 0, \tag{85}$$

$$\Omega_{ijqs} + \Omega_{jiqs} \prec 0, \tag{86}$$

$$\Theta_{iii} \prec 0, \tag{87}$$

$$\Theta_{iij} + \Theta_{iji} + \Theta_{jii} \prec 0, i \neq j \tag{88}$$

$$\Theta_{ijl} + \Theta_{ilj} + \Theta_{jil} + \Theta_{jli} + \Theta_{lij} + \Theta_{lji} \prec 0, i < j, j < l, \tag{89}$$

para todo i, j, l, $k \in \mathbb{K}_{n_r}$, $m \in \mathbb{K}_{n_{x0}}$ *e* $q = 1, \ldots, 2^{n_u}$*, em que*

$$\Omega_{ijqs} = \begin{bmatrix} W_{ijqs} & * & * \\ Y_{ijqs} & -R^{-1} & * \\ S_{ijqs} & -\rho U_s \mathscr{F}_{n_y \times n_z} & -\eta U_s - \eta U_s^T \end{bmatrix}, \tag{90}$$

$$W_{ijqs} = He(A_i X + B_i \bar{D}_q G_s - B_i D_q V_s \mathscr{F}_{n_y \times n_x}) - Q_i - C_{1i}^T Z_s C_{1j},$$

$$Y_{ijqs} = C_{2i} X - \rho \mathscr{F}_{n_y \times n_z}^T V_s^T D_q^T B_i^T,$$

$$S_{ijqs} = -\eta V_s^T D_q^T B_i^T + C_{1i} X - U_s \mathscr{F}_{n_y \times n_x},$$

$$\Theta_{ijl} = Q_i + C_{1i}^T Z_j C_{1l},$$

sendo

$$\mathscr{F}_{n_y\times n_z}=\begin{cases} I_{n_y\times n_y}, & se\ n_y=n_z,\\ \begin{bmatrix} I_{n_y\times n_y} & 0_{n_y\times(n_z-n_y)}\end{bmatrix}, & se\ n_y<n_z,\\ \begin{bmatrix} I_{n_z\times n_z}\\ 0_{(n_y-n_z)\times n_z}\end{bmatrix}, & se\ n_y>n_z,\end{cases} \tag{91}$$

$$\mathscr{F}_{n_y\times n_x}=\begin{cases} I_{n_y\times n_y}, & se\ n_y=n_x,\\ \begin{bmatrix} I_{n_y\times n_y} & 0_{n_y\times(n_x-n_y)}\end{bmatrix}, & se\ n_y<n_x.\end{cases} \tag{92}$$

Então a lei de controle chaveada (36)*, sendo* $K_s=V_sU_s^{-1}$*, torna o ponto de equilíbrio* $x=0$ *do sistema não linear incerto definido em* (32) *assintoticamente estável e o índice de performance* $J<\omega^{-1}=\beta$ *para todo* $x(0)$ *definido em* (38)*.*

Demonstração. Inicialmente, multiplique (90) por α_i e $\alpha_j\geq 0$, tal que $\sum_{i=1}^{n_r}\alpha_i=\sum_{j=1}^{n_r}\alpha_j=1$, e some de $i=1$ até n_r e $j=1$ até n_r. Então, considerando (85), para $s=\sigma$ e $q=1,\ldots,2^{n_u}$, tem-se que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n_r}\sum_{j=1}^{n_r}\alpha_i\alpha_j\Omega_{ijq\sigma}=\sum_{i=1}^{n_r}\alpha_i^2\Omega_{iiq\sigma}+\sum_{i=1}^{n_r-1}\sum_{j>i}^{n_r}\alpha_i\alpha_j(\Omega_{ijq\sigma}+\Omega_{jiq\sigma})\\
&=\begin{bmatrix} W_{\alpha\alpha\sigma q} & * & *\\ Y_{\alpha\alpha\sigma q} & -R^{-1} & *\\ S_{\alpha\alpha\sigma q} & -\rho U_\sigma\mathscr{F}_{n_y\times n_z} & -\eta U_\sigma-\eta U_\sigma^T\end{bmatrix}, \qquad (93)\\
&W_{\alpha\alpha\sigma q}=He(A(\alpha)X+B(\alpha)\bar{D}_qG(\alpha)-B(\alpha)D_qV_\sigma\mathscr{F}_{n_y\times n_x})-Q(\alpha)-C_1(\alpha)^TZ_\sigma C_1(\alpha),\\
&Y_{\alpha\alpha\sigma q}=C_2(\alpha)X-\rho\mathscr{F}_{n_y\times n_z}^TV_\sigma^TD_q^TB(\alpha)^T,\\
&S_{\alpha\alpha\sigma q}=-\eta V_\sigma^TD_q^TB(\alpha)^T+C_1(\alpha)X-U_\sigma\mathscr{F}_{n_y\times n_x}.
\end{aligned}$$

De (93), U_σ é não singular e também invertível, podendo ser reescrita como

$$\begin{aligned}
&\mathscr{T}=\begin{bmatrix} W_{\alpha\alpha\sigma q} & *\\ Y_{\alpha\alpha\sigma q} & -R^{-1}\end{bmatrix},\mathscr{P}=\begin{bmatrix} -B(\alpha)D_qV_\sigma\\ 0\end{bmatrix},\mathscr{U}=U_\sigma,\\
&\mathscr{A}=U_\sigma^{-1}\begin{bmatrix} C_1(\alpha)X-U_\sigma\mathscr{F}_{n_y\times n_x} & -\rho U_\sigma\mathscr{F}_{n_y\times n_z}\end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{94}$$

Aplicando o Lema 4, tem-se

$$\begin{bmatrix} W_{\alpha\alpha\sigma q} & * \\ Y_{\alpha\alpha\sigma q} & -R^{-1} \end{bmatrix} + He\left(\begin{bmatrix} -B(\alpha)D_q V_\sigma \\ 0 \end{bmatrix} U_\sigma^{-1} \begin{bmatrix} C_1(\alpha)X - U_\sigma \mathscr{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U_\sigma \mathscr{F}_{n_y \times n_z} \end{bmatrix} \right) \prec 0. \tag{95}$$

Reescrevendo (95), obtém-se

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \Psi & * \\ C_2(\alpha)X & -R^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} He(-B(\alpha)D_q V_\sigma \mathscr{F}_{n_y \times n_x}) & 0 \\ -\rho F_{n_y \times n_z}^T V_\sigma^T D_q^T B(\alpha)^T & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + He\left(\begin{bmatrix} -B(\alpha)D_q V_\sigma \\ 0 \end{bmatrix} U_\sigma^{-1} \begin{bmatrix} C_1(\alpha)X - U_\sigma \mathscr{F}_{n_y \times n_x} & -\rho U_\sigma \mathscr{F}_{n_y \times n_z} \end{bmatrix} \right) \prec 0, \\ &\Psi = He(A(\alpha)X + B(\alpha)\bar{D}_q G(\alpha)) - Q(\alpha) - C_1(\alpha)^T Z_\sigma C_1(\alpha), \end{aligned} \tag{96}$$

sendo reescrito como

$$\begin{bmatrix} \Psi & * \\ C_2(\alpha)X & -R^{-1} \end{bmatrix} + He\left(\begin{bmatrix} -B(\alpha)D_q V_\sigma \\ 0 \end{bmatrix} U_\sigma^{-1} \begin{bmatrix} C_1(\alpha)X & 0 \end{bmatrix} \right) \prec 0. \tag{97}$$

Fazendo $K_\sigma = V_\sigma U_\sigma^{-1}$ e $G(\alpha) = H(\alpha)X$, obtém-se

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} T_{\alpha\sigma q} - Q(\alpha) - C_1(\alpha)^T Z_\sigma C_1(\alpha) & * \\ C_2(\alpha)X & -R^{-1} \end{bmatrix} \prec 0, \\ &T_{\alpha\sigma q} = He(A(\alpha)X - B(\alpha)D_q K_\sigma C_1(\alpha)X + B(\alpha)\bar{D}_q H_\sigma X). \end{aligned} \tag{98}$$

Sendo $R = R^T \succ 0$, tem-se que $R^{-1} \succ 0$, e, consequentemente, $-R^{-1} \prec 0$. Então, é possível aplicar o Complemento de Schur em (98), resultando em

$$T_{\alpha\sigma q} + XC_2(\alpha)^T RC_2(\alpha)X - Q(\alpha) - C_1(\alpha)^T Z_\sigma C_1(\alpha) \prec 0. \tag{99}$$

Pré e pós multiplicando (99) por x^T e x, respectivamente, e sendo $x^T C_1(\alpha)^T Z_\sigma C_1(\alpha)x = y^T Z_\sigma y$, de (37), tem-se

$$\begin{aligned} x^T(A(\alpha)X + XA(\alpha)^T - B(\alpha)D_q K_\sigma C_1(\alpha) - XC_1(\alpha)^T K_\sigma^T D_q^T B(\alpha)^T + B(\alpha)\bar{D}_q H_\sigma X \\ + XH_\sigma^T \bar{D}_q^T B(\alpha)^T + XC_2(\alpha)^T RC_2(\alpha)X)x < x^T Q(\alpha)x + y^T Z_\sigma y. \end{aligned} \tag{100}$$

Por outro lado, de (87), (88) e (89),

$$\sum_{i=1}^{n_r}\sum_{j=1}^{n_r}\sum_{l=1}^{n_r} \alpha_i\alpha_j\alpha_l\Theta_{ijl} = \sum_{i=1}^{n_r}\alpha_i^3\Theta_{iii} + \sum_{i=1}^{n_r}\sum_{i\neq j}^{n_r}\alpha_i^2\alpha_j(\Theta_{iij} + \Theta_{iji} + \Theta_{jii})$$

$$+\sum_{i=1}^{n_r}\sum_{i<j}^{n_r}\sum_{j<l}^{n_r}\alpha_i\alpha_j\alpha_l(\Theta_{ijl}+\Theta_{ilj}+\Theta_{jil}+\Theta_{jli}+\Theta_{lij}+\Theta_{lji}) = Q(\alpha)+C_1(\alpha)^T Z(\alpha)C_1(\alpha) \prec 0. \tag{101}$$

Pré e pós multiplicando (101) por x^T e x, respectivamente, para $x \neq 0$, obtém-se

$$x^T Q(\alpha)x + y^T Z(\alpha)y < 0. \tag{102}$$

Sabendo que o mínimo em um conjunto de números reais é menor ou igual a qualquer combinação convexa arbitrária desses números. Assim, de (102) e levando em consideração que $y^T Z_\sigma y = \min\limits_{s\in\mathbb{K}_{n_r}} (y^T Z_s y)$, segue que

$$x^T Q(\alpha)x + \min_{s\in\mathbb{K}_{n_r}}(y^T Z_s y) = x^T Q(\alpha)x + y^T Z_\sigma y \leq x^T Q(\alpha)x + y^T Z(\alpha)y < 0. \tag{103}$$

Portanto, de (100) e (103),

$$\begin{aligned} A(\alpha)X + XA(\alpha)^T - B(\alpha)D_q K_\sigma C_1(\alpha)X - XC_1(\alpha)^T K_\sigma^T D_q^T B(\alpha)^T + B(\alpha)\bar{D}_q H_\sigma X \\ + XH_\sigma^T \bar{D}_q^T B(\alpha)^T + XC_2(\alpha)^T R C_2(\alpha)X \prec 0. \end{aligned} \tag{104}$$

Pré e pós multiplicando (104) por $P = X^{-1}$, tem-se

$$\begin{aligned} PA(\alpha) + A(\alpha)^T P - PB(\alpha)D_q K_\sigma C_1(\alpha) - C_1(\alpha)^T K_\sigma^T D_q^T B(\alpha)^T P + PB(\alpha)\bar{D}_q H_\sigma \\ + H_\sigma^T \bar{D}_q^T B(\alpha)^T P + C_2(\alpha)^T R C_2(\alpha) \prec 0. \end{aligned} \tag{105}$$

Além disso, pré e pós multiplicando (105) por x^T e x, respectivamente, tem-se, para $x \neq 0$

$$\begin{aligned} x^T (PA(\alpha) + A(\alpha)^T P - PB(\alpha)D_q K_\sigma C_1(\alpha) - C_1(\alpha)^T K_\sigma^T D_q^T B(\alpha)^T P + PB(\alpha)\bar{D}_q H_\sigma \\ + H_\sigma^T \bar{D}_q^T B(\alpha)^T P)x < -x^T C_2(\alpha) R C_2(\alpha)x. \end{aligned} \tag{106}$$

Considere o sistema em malha fechada dado em (37) e a candidata à função de Lyapunov $V(x) = x^T P x > 0$, para todo $x \neq 0$. Então

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (PA(\alpha) + A(\alpha)^T P - PB(\alpha)D_q K_\sigma C_1(\alpha) - C_1(\alpha)^T K_\sigma^T D_q^T B(\alpha)^T P \\ + PB(\alpha)\bar{D}_q H_\sigma + H_\sigma^T \bar{D}_q^T B(\alpha)^T P)x < 0. \end{aligned} \tag{107}$$

Desde que $-R \prec 0$, então $-C_2(\alpha)RC_2(\alpha) \preceq 0$. Dessa forma, de (107) e (106), segue que $\dot{V}(x) < -x^T C_2(\alpha) R C_2(\alpha)x \leq 0$ para todo $x \neq 0$, e o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema em malha fechada é assintoticamente estável.

Então, integrando os dois lados de (106) de 0 a ∞, de (81), tem-se

$$\int_0^\infty \dot{V}(x)\,dt < \int_0^\infty -x^T C_2^T(\alpha) R C_2(\alpha) x\,dt = -J, \tag{108}$$

e de (108)

$$V(x(t\to\infty)) - V(x(0)) < -J. \tag{109}$$

Considerando que o sistema em malha fechada é assintoticamente estável, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ e consequentemente $V(x(t\to\infty)) = 0$, de (82) e (109)

$$J < V(x(0)) = x^T(0)Px(0). \tag{110}$$

Por isso, de (110) e da equação (54) pertencente ao Lema 3, sendo $V(0)$ a candidata à função de Lyapunov para as condições inciais (38), tem-se $\beta \geq x(0)^T Px(0) > J$ e, portanto, $\beta > J$ para toda condição inicial descrita por (38).

Assim, do Lema 3, a LMI (83) garante o custo garantido e também que todas as condições inciais pertencentes ao conjunto convexo (38) estão contidas no conjunto positivamente invariante $\varepsilon(P,\beta)$ (BLANCHINI, 1999), a existência desse elipsoide positivamente invariante é garantida pelas LMIs de (85) a (92), para o sistema (32) com a lei de controle (36).

Observando o Lema 1, a primeira desigualdade de (84) assegura que $\varepsilon(P,\beta) \subset \mathscr{L}(H_k)$, então para todo $x(0) \in \varepsilon(P,\beta)$, tem-se $x(0) \in \mathscr{L}(H_k)$ e a descrição da saturação como combinação convexa (61) pode ser utilizada.

A segunda desigualdade de (84), do Lema 2, garante que $\varepsilon(P,\beta) \subset \mathscr{X}$. Então, tem-se que toda trajetória iniciada com $x(0) \in \varepsilon(P,\beta)$ permanece em $\mathscr{X}$ para todo $t > 0$ (KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2015), pois durante toda a trajetória do sistema $V(x) \leq 1$ para todo $t > 0$.

Dessa forma, o custo garantido (81) é assegurado em todas as condições impostas. Isso completa a prova do teorema. $\square$

Quando o sistema não usa lei de controle chaveado (36), ou seja, quando o sistema usa lei de controle baseada em ganho único, como em (35), as condições impostas pelo Teorema 2 podem ser simplificadas, obtendo-se o seguinte corolário.

Corolário 1. *Considere o sistema não linear incerto dado por* (32)*, com a lei de controle* $u = -Ky$*, em que* $y = C_1(\alpha)x$*. Nesse caso, a primeira LMI de* (84) *e a definição dada em* (90) *podem ser substituídas por*

$$\begin{bmatrix} \varsigma_l^2\omega & * \\ G^T & X \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{111}$$

$$\Omega_{iq} = \begin{bmatrix} He\left(A_iX + B_i\bar{D}_qG - B_iD_qV\mathscr{F}_{n_y\times n_x}\right) & * & * \\ C_{2i}X - \rho\mathscr{F}^T_{n_y\times n_z}V^TD_q^TB_i^T & -R^{-1} & * \\ -\eta V^TD_q^TB_i^T + C_{1i}X - U\mathscr{F}_{n_y\times n_x} & -\rho U\mathscr{F}_{n_y\times n_z} & -\eta U - \eta U^T \end{bmatrix}, \tag{112}$$

para todo $i,l \in \mathbb{K}_{n_r}$ e $q = 1,\ldots,2^{n_u}$. Sendo que as LMIs (87), (88) *e* (89) *do Teorema 2 não são mais necessárias.*

Se as condições são satisfeitas, então o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema não linear incerto definido em (32) *é assintoticamente estável e o índice de performance $J < \omega^{-1}$ para todo $x(0)$ dado em* (38).

Observação 1. *De acordo com Chang, Park e Zhou (2015), os parâmetros η e ρ podem ser variáveis, nesse caso as restrições de projeto propostas no Teorema 2 e no Corolário 1 apresentam uma região não convexa de solução, pois serão BMIs. Para contornar esse fato, uma solução é a utilização de métodos heurísticos para encontrar o valores ótimos de ρ e η que minimizam β, de forma que o problema pode ser resolvido através de LMIs.*

Teorema 3. *Se as condições do Corolário 1 são satisfeitas, então as condições do Teorema 2 também são satisfeitas.*

Demonstração. Para as condições do Teorema 2, considere um caso particular em que os ganhos do controlador são iguais $K_s = K$, $G_s = G$, $V_s = V$, $U_s = U$, $Z_s = 0$, $\Omega_{iqs} = \Omega_{iq} = \varpi_{iq} + \psi_i$ e $\Theta_{ijl} = \Theta_i$ para todo *i, s, l* $\in \mathbb{K}_{n_r}$ e $q = 1,\ldots,2^{n_u}$. Então é possível reescrever (90) como

$$\begin{aligned} &\Omega_{iq} = \varpi_{iq} + \psi_i \\ &\varpi_{iq} = \begin{bmatrix} W_{iq} & * & * \\ Y_{iq} & -R^{-1} & * \\ S_{iq} & -\rho U\mathscr{F}_{n_y\times n_z} & -\eta U - \eta U^T \end{bmatrix}, \quad \psi_i = \begin{bmatrix} Q_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ &W_{iq} = He(A_iX + B_i\bar{D}_qG - B_iD_qV\mathscr{F}_{n_y\times n_x}), \\ &Y_{iq} = C_{2i}X - \rho\mathscr{F}^T_{n_y\times n_z}V^TD_q^TB_i^T, \\ &S_{iq} = -\eta V^TD_q^TB_i^T + C_{1i}X - U\mathscr{F}_{n_y\times n_x}, \end{aligned} \tag{113}$$

e (89) se torna

$$\Theta_i = Q_i. \tag{114}$$

Percebe-se que, para esse caso em particular, o termo ϖ_{iq} de (113) se torna igual a (112). Considerando que as condições do Corolário 1 são válidas, então, de (112), $\varpi_{iq} < 0$ e $\varpi_{iq} + \varpi_{jq} < 0$. Dessa forma, existem parâmetros $\varepsilon > 0$ e $\tau > 0$ pequenos o suficiente tal que $\varpi_{iq} + \varepsilon I <$

0 e $\varpi_{iq}+\varpi_{jq}+\tau I<0$. Portanto, de (113), para o caso particular em que $Q_i=-\varepsilon I$, considerando que (112) é válida, então (85) é válida. Por isso (87), (88) e (89) também são válidas, porque $\Theta_{ijl}=\Theta_i$ e, de (114), $Q_i=-\varepsilon I$, então $\Theta_i=-\varepsilon I<0$. Isso completa a prova do teorema. $\square$

3.2 EXEMPLOS

Para avaliar os efeitos do Teorema 1 utilizou-se o modelo de controle de uma perna paraplégica e a bancada de suspensão ativa da Quanser®. Já para as condições do Teorema 2 e do Corolário 1, utilizou-se, além da suspensão ativa, um exemplo teórico de um sistema não linear incerto.

A configuração da suspensão ativa é representada na Figura 1, com sua dinâmica expressa nas equações (17), (18) e (19). Já a dinâmica de uma perna paraplégica é apresentada em (24). A representação exata dos sistemas foram apresentadas na seção 2.2.

Para a resolução das LMIs presentes nos Teoremas 1 e 2 e no Corolário 1, utilizou-se o MATLAB com a interface “Yalmip” (LOFBERG, 2004), junto com o *solver* “LMI-Lab” (GAHINET et al., 1994).

Para as condições dos Teoremas 1, foram feitas simulações em Simulink considerando o sistema de posição da perna paraplégica.

Para as condições do Teorema 2, foram feitas implementações na bancada de suspensão ativa fabricada pela Quanser® e pertencente ao Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) da FEIS-UNESP.

Posteriormente, os resultados de simulação e implementação da suspensão ativa foram comparados com o teorema de controle chaveado apresentados em Silva et al. (2020).

3.2.1 CONTROLE DA POSIÇÃO DE UMA PERNA PARAPLÉGICA

3.2.1.1 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Os parâmetros utilizados para o projeto são $\eta=0,1$, $\varsigma_1=0,0001$, $\phi=\begin{bmatrix}\frac{\pi}{6} & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ e $\theta_{v0}=\frac{\pi}{6}$. O conjunto convexo de condições iniciais $x(0)$ descrito em (38) é formado considerando uma combinação convexa de $-\frac{\pi}{6}+0,01\leq x_1(0)\leq\frac{\pi}{6}-0,01$, $x_2(0)=0$ e $x_3(0)=0$. Considerou-se o politopo de condições inicias dessa forma para que o politopo fosse o mais próximo possível da região de operação.

Considerou-se, também, a matriz C_1 dada a seguir

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{115}$$

Para as condições do Teorema 1 com $\gamma = 0$, os ganhos do controlador e as matrizes utilizadas na lei de chaveamento são dados em (116)

$$\begin{aligned}
K_1 &= \begin{bmatrix} -0.1252 & 0.0236 \end{bmatrix} \times 10^{-3}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} -0.1412 & 0.0260 \end{bmatrix} \times 10^{-3}, \\
K_3 &= \begin{bmatrix} -0.1249 & 0.0235 \end{bmatrix} \times 10^{-3}, \quad K_4 = \begin{bmatrix} -0.1409 & 0.0260 \end{bmatrix} \times 10^{-3}, \\
Z_1 &= \begin{bmatrix} 12841,94 & -8982,06 \\ -8982,06 & -762,67 \end{bmatrix}, \quad Z_2 = \begin{bmatrix} 12841,89 & -8980,69 \\ -8980,69 & -764,44 \end{bmatrix}, \\
Z_3 &= \begin{bmatrix} 12841,94 & -8982,08 \\ -8982,08 & -763,53 \end{bmatrix}, \quad Z_4 = \begin{bmatrix} 12841,89 & -8980,71 \\ -8980,71 & -764,42 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{116}$$

A Figura 4 mostra os estados do sistema (posição, velocidade angular e torque). Enquanto a Figura 5, a largura de pulso (sinal de controle), o índice de chaveamento ($\sigma(t)$) e a função de Lyapunov do sistema nas condições do Teorema 1.

Figura 4 - Comportamento dinâmico do sistema de posição da perna paraplégica para as condições impostas pelo Teorema 1.

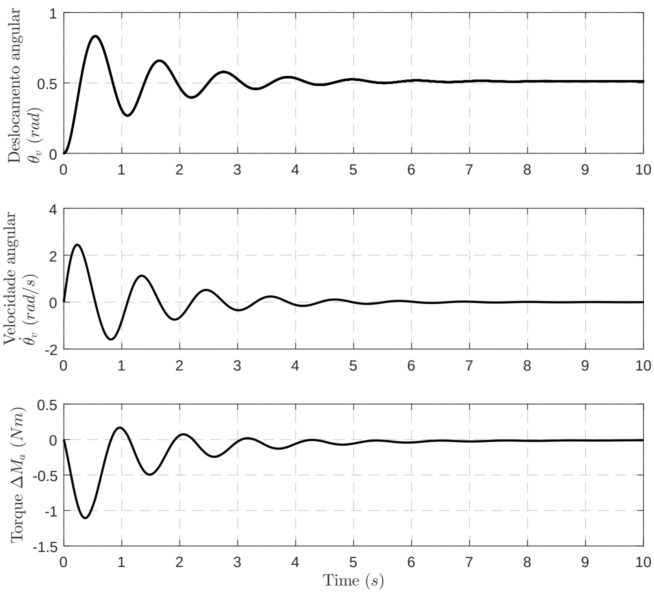
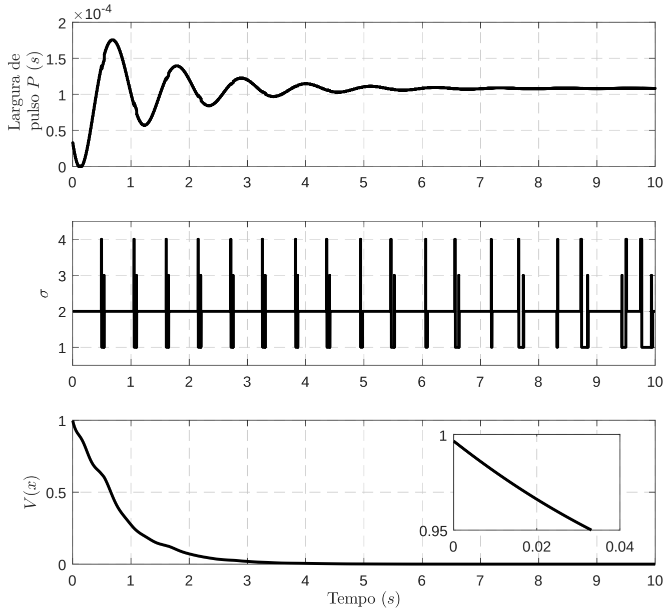


Figura 5 - Sinal de controle, índice de chaveamento e função de Lyapunov para as condições impostas pelo Teorema 1.



Por tudo isso, tem-se que o Teorema 1 é capaz de estabilizar o sistema, conforme as Figuras 4, e suporta, em sua metodologia, uma falha de até 3%.

A Figura 5 mostra o comportamento da candidata à função de Lyapunov $V(x)$. É possível observar que seu maior valor é inferior ao limitante definido no Teorema 1, ou seja, $\beta = 1$. Dessa forma, as condições impostas pelo Teorema são garantidas.

Em Nunes (2019), é ressaltada a dificuldade de mensurar o torque presente no modelo dinâmico de Ferrarin e Pedotti (2000), assim um novo modelo é proposto considerando a aceleração angular como variável de estado ao invés do torque, através de uma nova linearização do sistema. A partir dessa consideração, o trabalho de Nunes (2019) apresenta as condições suficientes para o projeto de um controlador robusto chaveado considerando saturação e falha nos atuadores.

Dessa forma, as vantagens do teorema proposto nesse capítulo consistem no uso de realimentação de saída no projeto. O que exclui a necessidade de um modelo baseado na aceleração angular, reduzindo o número de sensores necessários para mensurar as variáveis de estado. Além da não necessidade dessa nova linearização, fazendo com que o modelo dinâmico do controle de perna paraplégica se mantenha original, proposto por Ferrarin e Pedotti (2000).

3.2.2 SIMULAÇÃO NUMÉRICA CONSIDERANDO O CUSTO GARANTIDO

Considere o sistema não linear descrito por modelos fuzzy Takagi-Sugeno (TS) cujas funções de pertinência são desconhecidas e que pode ser representado através das matrizes dadas a seguir

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1,97 & 34,82 & 192,30 \\ 0,52 & -1,70 & -22,78 \\ 0 & 0 & -60,00 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3,40 & 101,44 & 527,00 \\ 0,44 & -2,83 & -63,98 \\ 0 & 0 & -60,00 \end{bmatrix},$$
$$B_1 = \begin{bmatrix} -195,56 \\ 0 \\ 60,00 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -170,18 \\ 0 \\ 60,00 \end{bmatrix}, \quad C_{11} = C_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_{21} = C_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{117}$$

Os parâmetros utilizados para o projeto são $\phi = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\eta = 0,001$, $\rho = 0,0001$ e $\varsigma_1 = 0,1$. O conjunto convexo de condições iniciais $x(0)$ descrito em (38) é formado considerando uma combinação convexa de $-5 \leq x_1(0) \leq 5$, $x_2(0) = 0$ e $x_3(0) = 0$.

Para as condições do Teorema 2, o limitante superior do custo garantido J, dado em (81), é igual a $\beta = 4,6716$ e os ganhos do controlador e as matrizes utilizadas na lei de chaveamento são dados em (118)

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0,2649 & -2,2762 & 10,0692 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} -0,1694 & -1,5886 & 6,0701 \end{bmatrix},$$
$$Z_1 = \begin{bmatrix} -2828,06 & 153998,63 & 741971,71 \\ 153998,63 & 469014,59 & -1162706,63 \\ 741971,71 & -1162706,63 & -133733,24 \end{bmatrix} \times 10^6,$$
$$Z_2 = \begin{bmatrix} -2802,70 & 153997,08 & 741967,66 \\ 153997,08 & 469014,63 & -1162706,12 \\ 741967,66 & -1162706,12 & -133733,47 \end{bmatrix} \times 10^6. \tag{118}$$

Já para as condições impostas pelo Corolário 1, considerando $R = I_{3\times3}$, o limitante superior do custo garantido J, em (81), obtido foi $\beta = 4,9658$ e a matriz de ganho é dada a seguir

$$K = \begin{bmatrix} -0,2103 & -1,4439 & 8,5819 \end{bmatrix}. \tag{119}$$

Tem-se, portanto, que as condições impostas pelo controle chaveado e dadas através do Teorema 2 proporcionam um limitante superior β do custo garantido J cerca de $5,92\%$ menor que as condições do controlador de único ganho, estabelecidas pelo Corolário 1. A partir desse resultado e do Teorema 3, pode-se comprovar que o controlador chaveado possui condições mais relaxadas quando comparado ao controlador de ganho único e o Teorema 2 possui uma região de factibilidade igual ou maior que o Corolário 1.

3.2.3 SUSPENSÃO ATIVA

3.2.3.1 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Os parâmetros utilizados para o projeto são: $\phi = \begin{bmatrix} 0,035 & 0,035 \end{bmatrix}^T$, $\eta = 0,010$, $\rho = 0,010$ e $\varsigma_1 = 39,2$. O conjunto convexo de condições iniciais $x(0)$ descrito em (38) é formado considerando uma combinação convexa de $-0,02 \leq x_1(0), x_3(0) \leq 0,02$, $x_2(0) = 0$ e $x_4(0) = 0$.

Considerou-se, também, as seguintes matrizes C_1 e C_2

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{120}$$

Para as condições do Teorema 1 com $\gamma = 1$, os ganhos do controlador são dados em (121) e as matrizes utilizadas na lei de chaveamento em (122).

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} 1018,22 & 50,57 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 999,74 & 50,67 \end{bmatrix}, \\ K_3 &= \begin{bmatrix} 933,66 & 49,21 \end{bmatrix}, \quad K_4 = \begin{bmatrix} 1001,83 & 50,73 \end{bmatrix}, \\ K_5 &= \begin{bmatrix} 847,95 & 47,06 \end{bmatrix}, \quad K_6 = \begin{bmatrix} 851,06 & 47,33 \end{bmatrix}, \\ K_7 &= \begin{bmatrix} 830,85 & 46,23 \end{bmatrix}, \quad K_8 = \begin{bmatrix} 828,75 & 45,52 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{121}$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= \begin{bmatrix} -1912,28 & -174562,58 \\ -174562,58 & -7017,62 \end{bmatrix}, \quad Z_2 = \begin{bmatrix} -1912,28 & -174562,56 \\ -174562,56 & -7018,08 \end{bmatrix}, \\ Z_3 &= \begin{bmatrix} -1912,28 & -174562,53 \\ -174562,53 & -7017,09 \end{bmatrix}, \quad Z_4 = \begin{bmatrix} -1912,28 & -174562,56 \\ -174562,56 & -7017,70 \end{bmatrix}, \\ Z_5 &= \begin{bmatrix} -1912,28 & -174562,43 \\ -174562,43 & -7017,56 \end{bmatrix}, \quad Z_6 = \begin{bmatrix} -1912,28 & -174562,43 \\ -174562,43 & -7017,73 \end{bmatrix}, \\ Z_7 &= \begin{bmatrix} -1912,28 & -174562,40 \\ -174562,40 & -7016,66 \end{bmatrix}, \quad Z_8 = \begin{bmatrix} -1912,28 & -174562,41 \\ -174562,41 & -7015,94 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{122}$$

Já para as condições impostas pelo Teorema 2, considerando $R = I_{2\times 2}$, o limitante superior do custo garantido J, dado em (81), obtido foi $\beta = 0,1415$, os ganhos do controlador chaveado são dados em (123) e as matrizes utilizadas na lei de chaveamento em (124).

$$K_1 = \begin{bmatrix} 908,44 & 53,77 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 890,90 & 53,68 \end{bmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
K_3 &= \begin{bmatrix} 820,62 & 50,88 \end{bmatrix}, \quad K_4 = \begin{bmatrix} 872,04 & 53,33 \end{bmatrix}, \\
K_5 &= \begin{bmatrix} 742,28 & 49,66 \end{bmatrix}, \quad K_6 = \begin{bmatrix} 735,36 & 49,45 \end{bmatrix}, \\
K_7 &= \begin{bmatrix} 702,16 & 47,35 \end{bmatrix}, \quad K_8 = \begin{bmatrix} 711,65 & 46,72 \end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{123}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= \begin{bmatrix} -50662,44 & -31746,76 \\ -31746,76 & -1130,16 \end{bmatrix}, \quad Z_2 = \begin{bmatrix} -50662,44 & -31746,67 \\ -31746,67 & -1132,58 \end{bmatrix}, \\
Z_3 &= \begin{bmatrix} -50662,44 & -31746,40 \\ -31746,40 & -1121,02 \end{bmatrix}, \quad Z_4 = \begin{bmatrix} -50662,44 & -31746,62 \\ -31746,62 & -1131,14 \end{bmatrix}, \\
Z_5 &= \begin{bmatrix} -50662,43 & -31745,76 \\ -31745,76 & -7017,56 \end{bmatrix}, \quad Z_6 = \begin{bmatrix} -50662,43 & -31745,76 \\ -31745,76 & -1127,37 \end{bmatrix}, \\
Z_7 &= \begin{bmatrix} -50662,42 & -31745,42 \\ -31745,42 & -1110,99 \end{bmatrix}, \quad Z_8 = \begin{bmatrix} -50662,43 & -31745,58 \\ -31745,58 & -1108,53 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{124}
$$

Para as condições impostas pelo Corolário 1, considerando $R = I_{2\times 2}$, o limitante superior do custo garantido J, em (81), obtido foi $\beta = 0,1410$ e a matriz de ganho é dada a seguir

$$
K = \begin{bmatrix} 788,14 & 51,87 \end{bmatrix}. \tag{125}
$$

As simulações mostram pequenas variações no limitante superior β do custo garantido. As condições do Teorema 2 apresentam um custo $0,35\%$ maior que para o caso do Corolário 1. No entanto, as condições do Teorema 3 mostram que o valor obtido para o caso chaveado deve ser igual ou menor que o obtido com ganho único, uma vez que este é um caso particular daquele. Por se tratar de uma diferença pequena, pode-se atribuir a erros do *solver* do MATLAB.

Foi realizado um teste impondo os resultados encontrados através do Corolário 1 nas condições do Teorema 2 e há factibilidade, o que reforça que o erro pode ter sido causado por falha do *solver* utilizado.

Com o intuito de se comparar os resultados das simulações com outras abordagens propostas na literatura, aplicou-se o Teorema 1 de Silva et al. (2020) ao mesmo modelo dos exemplos acima com os mesmos parâmetros de simulação.

O Teorema 1 proposto no trabalho de Silva et al. (2020) apresenta uma abordagem de controle chaveado com realimentação de estados, saturação nos atuadores e custo garantido. Para esse caso, o limitante superior do custo garantido J, em (81), obtido é igual a $\beta = 0,3328$.

Tem-se, portanto, que o limitante superior β do custo garantido obtido com as condições impostas pelo Teorema 2 é $57,48\%$ menor que o caso do Teorema 1 de (SILVA et al., 2020). Apesar das diferenças nos valores do custo garantido, a principal vantagem dos teoremas propostos nesse capítulo consistem na realimentação de saída mantendo um custo garantido com valores próximos ao obtido com realimentação de estados, pois, em sistemas reais, nem sempre todos os estados podem ser medidos ou exigem sensoriamentos complexos e custosos, de forma que a não necessidade de medição se torna uma grande vantagem.

3.2.3.2 IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA

Para as condições impostas pelos Teoremas 1 e 2, considerou-se os valores extremos da massa suspensa M_s; já para a pista z_r, um sinal de onda quadrada foi usado com amplitude de $0,02$ m, frequência de $1/3$ Hz e 50% de largura de pulso; o tempo de amostragem do sistema foi 1 ms. Além disso, o tempo de implementação considerado foi 15 segundos, dividido da seguinte forma: de 0 a 5 segundos, o sistema está em malha aberta; de 5 a 10 segundos, o sistema está em malha fechada; e, finalmente, de 10 a 15 segundos, o sistema está em malha fechada com falha no atuador de 50%.

Considerando as condições impostas pelo Teorema 1, as Figuras 6 e 7 mostram as posições (pista, passageiro e conjunto de pneu), o sinal de controle ($u_\sigma(t)$), e o índice de chaveamento ($\sigma(t)$) para os valores de massa suspensa $M_s = 1,455$ kg e $M_s = 2,45$ kg, respectivamente.

Figura 6 - Comportamento do sistema de suspensão ativa e sinal de controle baseado no Teorema 1 para $M_s = 1,455$ kg.

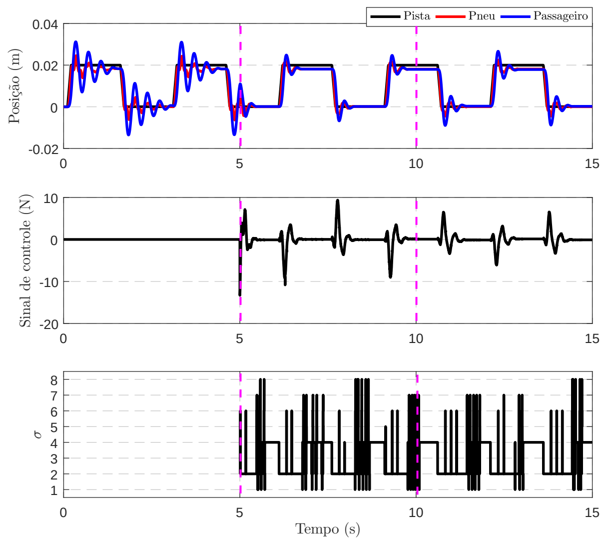
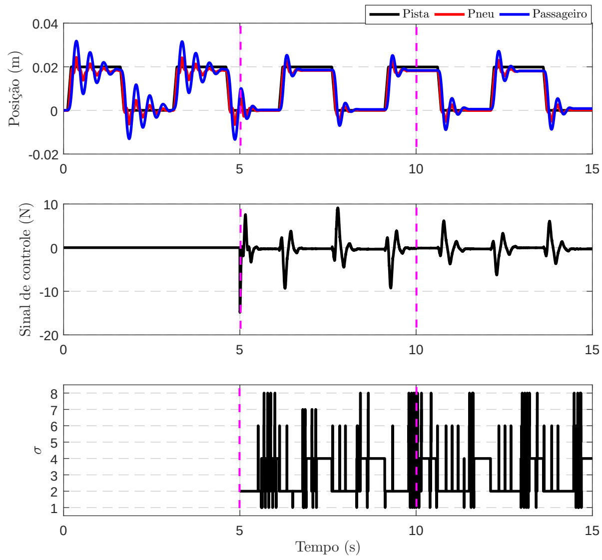


Figura 7 - Comportamento do sistema de suspensão ativa e sinal de controle baseado no Teorema 1 para $M_s = 2,45$ kg.



Já para as condições impostas pelo Teorema 2, as Figuras 8 e 9 mostram as posições (pista, passageiro e conjunto de pneu), o sinal de controle ($u_\sigma(t)$), e o índice de chaveamento ($\sigma(t)$) para os valores de massa suspensa $M_s = 1,455$ kg e $M_s = 2,45$ kg, respectivamente.

Figura 8 - Comportamento do sistema de suspensão ativa e sinal de controle baseado no Teorema 2 para $M_s = 1,455$ kg.

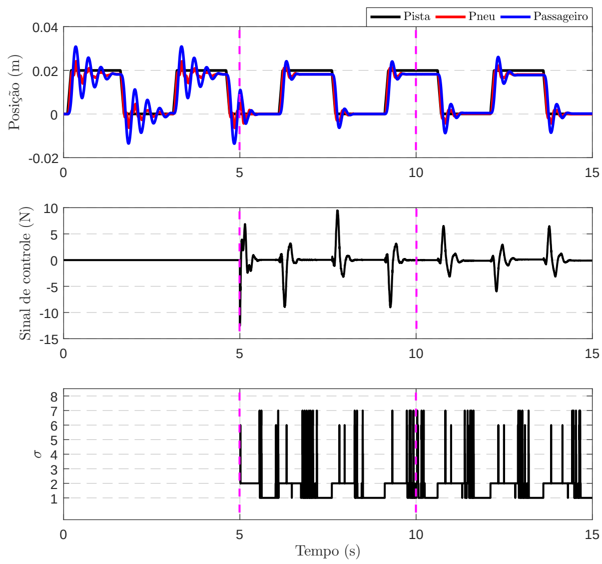
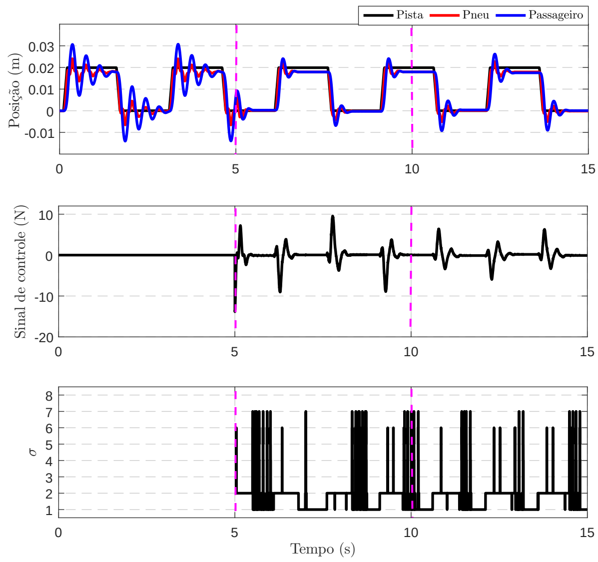


Figura 9 - Comportamento do sistema de suspensão ativa e sinal de controle baseado no Teorema 2 para $M_s = 2,45$ kg.



A análise das Figuras 6 até 9 mostram que o sistema é estável mesmo em malha aberta, mas a inserção dos controladores diminui significativamente os efeitos da pista sobre o passageiro, gerando mais conforto, e sobre os pneus, proporcionando mais segurança. Observa-se também que quando há falha nos atuadores, o sistema permanece estável, mas há um aumento nas amplitudes das posições do sistema. Por tudo isso, os controladores podem ser ditos robustos, pois suportam variações no tempo de massa e falhas nos atuadores preservando a estabilidade e o desempenho do sistema controlado.

3.3 COMENTÁRIOS

Nesse capítulo são apresentadas duas metodologias de projeto de controladores robustos chaveados utilizando realimentação de saída e considerando saturação nos atuadores. A diferença das metodologias consiste no índice de performance escolhido: no primeiro caso utilizou-se a taxa de decaimento, e, no segundo, o custo garantido.

Escolheu-se o uso da realimentação de saída e a saturação nos atuadores com o intuito de aproximar o projeto de controladores da realidade, pois a saturação é muito comum em sistemas de controle e a dificuldade em mensurar algumas variáveis de estado também são.

Nos dois casos, para os exemplos apresentados, as metodologias se mostraram efetivas e eficientes.

4 CONTROLE CHAVEADO COM REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA SUJEITO À SATURAÇÃO NOS ATUADORES E DISTÚRBIOS PERSISTENTES COM E SEM CUSTO GARANTIDO PARA SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS

Neste capítulo, será proposta uma metodologia para o projeto de controladores chaveados com realimentação de saída sujeito à saturação nos atuadores e distúrbios persistentes com e sem custo garantido para sistemas não lineares incertos. Com exceção do distúrbio persistente (ALVES, 2017), os demais conceitos foram descritos anteriormente. Dessa forma, primeiramente será abordada a formulação teórica desse tipo de distúrbio, em seguida serão propostos um teorema e um corolário, nos quais todas as ferramentas são utilizadas. Mais uma vez o teorema apresenta a metodologia para controle chaveado, enquanto o corolário é um caso específico do teorema em que se usa lei de controle com ganho único. As condições dos teorema e corolário serão aplicadas ao sistema de suspensão ativa, cujos modelos locais foram apresentados no Capítulo 2, tanto em simulações numéricas, quanto em implementações práticas. Um outro teorema é apresentado, com o intuito de comprovar que se as condições do primeiro corolário desse capítulo são satisfeitas, então as condições do primeiro teorema também serão.

4.1 DISTÚRBIOS PERSISTENTES

Considera-se um sistema não linear incerto com saturação no atuador e sujeito a distúrbios persistentes, com amplitude limitada $w(t)$, podendo ser considerada, sem perda de generalidade, a condição $w(t)^T w(t) \leq 1$ (ALVES, 2017):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x + B(\alpha)sat(u) + E(\alpha)w, \\ y(t) &= C_1(\alpha)x, \\ z(t) &= C_2(\alpha)x, \end{aligned} \tag{126}$$

em que $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estado, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ é o vetor de distúrbio, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada de controle, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída controlada e $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída medida. As matrizes $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $E(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$, $C_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ e $C_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$ pertencem ao politopo de incertezas ϑ_2:

$$\begin{aligned} \vartheta_2 = \Bigg\{ & \Big[A(\alpha), B(\alpha), E(\alpha), C_1(\alpha), C_2(\alpha)\Big] \qquad (127) \\ & = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i \Big[A_i, B_i, E_i, C_{1i}, C_{2i}\Big],\ \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0 \Bigg\}, \end{aligned}$$

sendo n_r o número de vértices do politpo e α_i são as funções de pertinência associadas aos modelos fuzzy TS.

Considerando a lei de controle chaveada (36) no sistema (126), obtém-se o sistema em malha fechada a seguir

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)sat(-KC_1(\alpha)x(t)) + E(\alpha)w(t). \tag{128}$$

Considerando o custo garantido (81) para o sistema (126), com a lei de controle chaveada (36), obtém-se o Teorema 4, que apresenta as LMIs necessárias para garantir a estabilidade *ultimate bounded* para toda condição inicial pertencente ao politopo (38).

Teorema 4. *Considere um sistema não linear incerto descrito por* (126)*, a lei de controle* (36)*, o índice de performance J em* (81) *e as condições iniciais* (38)*. Suponha a existência de matrizes simétricas* $X \succ 0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$*,* $Z_s \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$*,* $Q_s \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$*, matrizes* $U_s \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$*,* $V_s \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$*,* $G_s \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$*, e escalares* $\omega > 0$*,* $\rho > 0$*,* $\eta > 0$*,* $\varsigma > 0$*,* $\psi > 0$ *e* $\delta_1 \leq \beta$ *conhecidos, tais que*

$$\max_{X, U_\sigma, V_\sigma} \quad \omega$$

$$sujeito \quad a$$

$$\begin{bmatrix} \omega & * \\ \omega x_m(0) & X \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{129}$$

$$\begin{bmatrix} \varsigma_k^2 \omega & * \\ G_{s_{(l)}}^T & X \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} \phi_k^2 \omega & * \\ X N_h^T & X \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{130}$$

$$\Omega_{iiqs} \prec 0, \tag{131}$$

$$\Omega_{ijqs} + \Omega_{jiqs} \prec 0, i < j, \tag{132}$$

$$\Theta_{iii} \prec 0, \tag{133}$$

$$\Theta_{iij} + \Theta_{iji} + \Theta_{jii} \prec 0, i \neq j \tag{134}$$

$$\Theta_{ijl} + \Theta_{ilj} + \Theta_{jil} + \Theta_{jli} + \Theta_{lij} + \Theta_{lji} \prec 0, i < j, j < l, \tag{135}$$

$$\Omega_{iqs} = \begin{bmatrix} W_{ijqs} & * & * & * \\ Y_{ijqs} & -I_n \psi & * & * \\ C_{2i} X & 0 & -R^{-1} & * \\ S_{ijqs} & -\rho U_s \mathscr{F}_{n_y \times n_u} & 0 & -\eta U_s - \eta U_s^T \end{bmatrix} < 0, \tag{136}$$

$$W_{ijqs} = He(A_i X + B_i \bar{D}_q G_s - B_i D_q V_s \mathscr{F}_{n_y \times n_x}) + X \psi \delta_1^{-1} - Q_i - C_{1i}^T Z_s C_{1j},$$

$$Y_{ijqs} = -E_i^T - \rho \mathscr{F}_{n_y \times n_u}^T V_s^T D_q^T B_i^T,$$

$$S_{ijqs} = -\eta B_i^T D_q^T V_s^T + C_{1i} X - U_s \mathscr{F}_{n_y \times n_x},$$

$$\Theta_{ijl} = Q_i + C_{1i}^T Z_j C_{1l},$$

para todo i, j, l, s $\in \mathbb{K}_{n_r}$*,* $k \in \mathbb{K}_{n_u}$*,* $m \in \mathbb{K}_{n_{x0}}$ *e* $q = 1,\ldots,2^{n_u}$*, em que*

$$\mathscr{F}_{n_y\times n_u} = \begin{cases} I_{n_y\times n_y}, & se\ n_y = n_u,\\ \begin{bmatrix} I_{n_y\times n_y} & 0_{n_y\times(n_u-n_y)}\end{bmatrix}, & se\ n_y < n_u,\\ \begin{bmatrix} I_{n_u\times n_u}\\ 0_{(n_y-n_u)\times n_u}\end{bmatrix}, & se\ n_y > n_u,\end{cases} \tag{137}$$

$$\mathscr{F}_{n_y\times n_x} = \begin{cases} I_{n_y\times n_y}, & se\ n_y = n_x,\\ \begin{bmatrix} I_{n_y\times n_y} & 0_{n_y\times(n_x-n_y)}\end{bmatrix}, & se\ n_y < n_x.\end{cases} \tag{138}$$

Então a lei de controle chaveado (36)*, com* $K = V_\sigma U_\sigma^{-1}$*, torna o sistema* (126) *localmente ultimate bounded para todo* $x(0) \in \varepsilon(P,\beta)$ *e com índice de performance* $J < \omega^{-1} = \beta$ *para todo* $x(0) \in \varepsilon(P,\beta)/\varepsilon(P,\delta_1)$*. Além de* $x(t) \in \mathscr{X}$*,* $t \geq 0$*.*

Demonstração. Considere a candidata à função de Lyapunov $V(x) = x^T Px$, $P = P^T \in \mathbb{R}^{x_x\times n_x}$ de forma que sua derivada é dada por $\dot{V}(x) = \dot{x}^T Px + x^T P\dot{x}$, levando em conta a lei de controle (36) e o sistema (126), tem-se

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) = \dot{x}^T Px + x^T P\dot{x} = x^T \Big[He\Big(PA(\alpha) + PB(\alpha)\bar{D}_q H_\sigma - PB(\alpha)D_q K_\sigma C_1(\alpha)\\ + C_2(\alpha)^T RC_2(\alpha)\Big)\Big]x + x^T PE(\alpha)d + d^T E(\alpha)^T Px.\end{aligned} \tag{139}$$

De (139), tem-se, para $x \neq 0$

$$\begin{aligned}x^T(PA(\alpha) + A(\alpha)^T P - PB(\alpha)D_q K_\sigma C_1(\alpha)C_1(\alpha)^T K_\sigma^T D_q^T B(\alpha)^T P + PB(\alpha)\bar{D}_q H_\sigma\\ + H_\sigma^T \bar{D}_q^T B(\alpha)^T P)x + d^T E(\alpha)^T Px + xPE(\alpha)d < -x^T C_2(\alpha)RC_2(\alpha)x.\end{aligned} \tag{140}$$

Desde que $-R \prec 0$, então $-C_2(\alpha)RC_2(\alpha) \preceq 0$. Então, de (139) e (140), segue que $\dot{V}(x) < -x^T C_2(\alpha)RC_2(\alpha)x \leq 0$ para todo $x \neq 0$, e o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema em malha fechada é assintoticamente estável.

Integrando os dois lados de (140) de 0 a ∞, de (81), tem-se

$$\int_0^\infty \dot{V}(x)\,dt < \int_0^\infty -x^T C_2^T(\alpha)RC_2(\alpha)x\,dt = -J, \tag{141}$$

e de (141)

$$V(x(t\to\infty)) - V(x(0)) < -J. \tag{142}$$

Considerando que o sistema em malha fechada é assintoticamente estável, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ e consequentemente $V(x(t\rightarrow\infty))=0$, de (82) e (142)

$$J<V(x(0))=x^T(0)Px(0). \tag{143}$$

Por isso, de (144) e da equação (54) pertencente ao Lema 3, sendo $V(0)$ a candidata à função de Lyapunov para as condições inciais (38), tem-se $\beta \geq x(0)^T Px(0) > J$ e, portanto, $\beta > J$ para toda condição inicial descrita por (38).

Sabendo que $\psi > 0$ e assumindo $d^T d \leq 1$ (PETERSEN, 1987), tem-se

$$\begin{aligned} 2x^T PE(\alpha)d &\leq x^T PE(\alpha)\psi^{-1}E(\alpha)^T Px + \psi d^T d, \\ &\leq x^T PE(\alpha)\psi^{-1}E(\alpha)^T Px + \psi. \end{aligned} \tag{144}$$

Assim, de (139) e (144), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = x^T \big[He\big(PA(\alpha)+PB(\alpha)\bar{D}_q H_\sigma - PB(\alpha)D_q K_\sigma C_1(\alpha)\big) + PE(\alpha)\psi^{-1}E(\alpha)^T P \\ + C_2(\alpha)^T RC_2(\alpha)\big]x + \psi. \end{aligned} \tag{145}$$

Modificando a função de Lyapunov pela substituição de ψ por $x^T\left(\dfrac{\psi}{\delta_1}\right)Px$, define-se a função de Lyapunov modificada $\dot{\hat{V}}(x)$ como

$$\begin{aligned} \dot{\hat{V}}(x) = x^T \big[He\big(PA(\alpha)+PB(\alpha)\bar{D}_q H_\sigma - PB(\alpha)D_q K_\sigma C_1(\alpha)\big) + PE(\alpha)\psi^{-1}E(\alpha)^T P \\ + \psi\delta_1^{-1}P + C_2(\alpha)^T RC_2(\alpha)\big]x. \end{aligned} \tag{146}$$

Então $\dot{\hat{V}}(x) \geq \dot{V}(x) + x^T\psi\delta_1^{-1}Px - \psi$, para $\dot{\hat{V}}(x) < 0$, tem-se $\dot{V}(x) < 0$, quando $x^T\psi\delta_1^{-1}Px > \psi$.

Pré e pós multiplicando (146) por $X = P^{-1}$ e inserindo uma matriz identidade $I_n \in \mathbb{K}_{n\times n}$, obtém-se

$$\begin{aligned} He\big(A(\alpha)X + B(\alpha)\bar{D}_q H_\sigma X - B(\alpha)D_q K_\sigma C_1(\alpha)X\big) + E(\alpha)\psi^{-1}I_n E(\alpha)^T + X\psi\delta_1^{-1} \\ + XC_2(\alpha)^T RC_2(\alpha)X < 0. \end{aligned} \tag{147}$$

Por outro lado, de (133), (134) e (135),

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_r}\sum_{j=1}^{n_r}\sum_{l=1}^{n_r}\alpha_i\alpha_j\alpha_l\Theta_{ijl} = \sum_{i=1}^{n_r}\alpha_i^3\Theta_{iii} + \sum_{i=1}^{n_r}\sum_{i\neq j}^{n_r}\alpha_i^2\alpha_j(\Theta_{iij}+\Theta_{iji}+\Theta_{jii}) \\ + \sum_{i=1}^{n_r}\sum_{i<j}^{n_r}\sum_{j<l}^{n_r}\alpha_i\alpha_j\alpha_l(\Theta_{ijl}+\Theta_{ilj}+\Theta_{jil}+\Theta_{jli}+\Theta_{lij}+\Theta_{lji}) = Q(\alpha)+C_1(\alpha)^T Z(\alpha)C_1(\alpha) \prec 0. \end{aligned} \tag{148}$$

Pré e pós multiplicando (148) por x^T e x, respectivamente, para $x \neq 0$, tem-se

$$x^T Q(\alpha)x + y^T Z_\sigma y < 0. \tag{149}$$

Sabendo que o mínimo valor em um conjunto de números reais é menor ou igual a qualquer combinação convexa arbitrária desses números. Então, de (148) e (149) e levando em conta que $y^T Z_\sigma y = \min\limits_{s\in\mathbb{K}_{nr}} (y^T Z_s y)$, segue que

$$x^T Q(\alpha)x + min_{s\in\mathbb{K}_{nr}}(y^T Z_s y) = x^T Q(\alpha)x + y^T Z_\sigma y \leq x^T Q(\alpha)x + y^T Z(\alpha)y < 0. \tag{150}$$

Então, de (147) e (150), tem-se

$$\begin{aligned} He\big(A(\alpha)X + B(\alpha)\bar{D}_q H_\sigma X - B(\alpha)D_q K_\sigma C_1(\alpha)X\big) + E(\alpha)\psi^{-1} I_n E(\alpha)^T + \psi X\delta_1^{-1} - Q(\alpha) \\ - C_1(\alpha)^T Z_\sigma C_1(\alpha) + XC_2(\alpha)^T RC_2(\alpha)X < 0. \end{aligned} \tag{151}$$

Aplicando o Complemento de Schur em (151), obtém-se

$$\begin{bmatrix} T_{\alpha\sigma q} & * \\ -E(\alpha)^T & -I_n\psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} XC_2(\alpha)^T \\ 0 \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} C_2(\alpha)X & 0 \end{bmatrix} < 0, \tag{152}$$
$$T_{\alpha\sigma q} = He\big(A(\alpha)X + B(\alpha)\bar{D}_q H_\sigma X - B(\alpha)D_q K_\sigma C_1(\alpha)X\big) + \psi X\delta_1^{-1} - Q(\alpha) - C_1(\alpha)^T Z_\sigma C_1(\alpha).$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} T_{\alpha\sigma q} + XC_2(\alpha)^T RC_2(\alpha)X & * \\ -E(\alpha)^T & -I_n\psi \end{bmatrix} < 0. \tag{153}$$

Aplicando, novamente, o Complemento de Schur, agora em (154) e fazendo $K_\sigma = V_\sigma U_\sigma^{-1}$ e $G_\sigma = H_\sigma X$, tem-se

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} T_{\alpha\sigma q} & * & * \\ -E(\alpha)^T & -I_n\psi & * \\ C_2(\alpha)X & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0, \\ &T_{\alpha\sigma q} = He\big(A(\alpha)X + B(\alpha)\bar{D}_q G_\sigma - B(\alpha)D_q V_\sigma U_\sigma^{-1} C_1(\alpha)X\big) + \psi X\delta_1^{-1} - Q(\alpha) \\ &\qquad - C_1(\alpha)^T Z_\sigma C_1(\alpha). \end{aligned} \tag{154}$$

Reorganizando (154), tem-se

$$\begin{bmatrix} \Psi & * & * \\ -E(\alpha)^T & -I_n\psi & * \\ C_2(\alpha)X & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} + He\left(\begin{bmatrix} -B(\alpha)D_q V_\sigma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U_\sigma^{-1} \begin{bmatrix} C_1(\alpha)X & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) < 0. \tag{155}$$

Tem-se que (155) pode ser reescrita como

$$
\begin{bmatrix} \Psi & * & * \\ -E(\alpha)^T & -I_n\psi & * \\ C_2(\alpha)X & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} He\big(-B(\alpha)D_qV_\sigma\mathscr{F}_{n_y\times n_x}\big) & 0 & 0 \\ -\rho\mathscr{F}_{n_y\times n_u}^T V_\sigma^T D_q^T B(\alpha)^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
+He\left(\begin{bmatrix} -B(\alpha)D_qV_\sigma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U_\sigma^{-1} \begin{bmatrix} C_1(\alpha)X - U_\sigma\mathscr{F}_{n_y\times n_x} & -\rho U_\sigma \mathscr{F}_{n_y\times n_u} & 0 \end{bmatrix} \right) < 0, \tag{156}
$$

$$
\Psi = He\big(A(\alpha)X + B(\alpha)\bar{D}_q G_\sigma\big) + \psi X\delta_1^{-1} - Q(\alpha) - C_1(\alpha)^T Z_\sigma C_1(\alpha),
$$

tornando-se

$$
\begin{bmatrix} W_{\alpha\alpha\sigma q} & * & * \\ Y_{\alpha\alpha\sigma q} & -I_n\psi & * \\ C_2(\alpha)X & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} + He\left(\begin{bmatrix} -B(\alpha)D_qV_\sigma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U_\sigma^{-1} \right.
$$

$$
\left. \times \begin{bmatrix} C_1(\alpha)X - U_\sigma\mathscr{F}_{n_y\times n_x} & -\rho U_\sigma\mathscr{F}_{n_y\times n_u} & 0 \end{bmatrix} \right) < 0. \tag{157}
$$

De (157) e aplicando o Lema 4, tem-se

$$
\mathscr{T} = \begin{bmatrix} W_{\alpha\alpha\sigma q} & * & * \\ Y_{\alpha\alpha\sigma q} & -I_n\psi & * \\ C_2(\alpha) & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix}, \quad \mathscr{P} = \begin{bmatrix} -B(\alpha)D_qV_\sigma \\ 0 \end{bmatrix},
$$

$$
\mathscr{U} = U_\sigma, \quad \mathscr{A} = U_\sigma \begin{bmatrix} C_1(\alpha)X - U_\sigma\mathscr{F}_{n_y\times n_x} & -\rho U_\sigma\mathscr{F}_{n_y\times n_u} \end{bmatrix}. \tag{158}
$$

De (158), U_σ é não singular e é invertível, podendo ser reescrita como

$$
\begin{bmatrix} W_{\alpha\alpha\sigma q} & * & * & * \\ Y_{\alpha\alpha\sigma q} & -I_n\psi & * & * \\ C_2(\alpha)X & 0 & -R^{-1} & * \\ S_{\alpha\sigma q} & -\rho U_\sigma\mathscr{F}_{n_y\times n_u} & 0 & -\eta U_\sigma - \eta U_\sigma^T \end{bmatrix} < 0, \tag{159}
$$

$$
W_{\alpha\alpha\sigma q} = He(A(\alpha)X + B(\alpha)\bar{D}_qG_\sigma - B(\alpha)D_qV_\sigma\mathscr{F}_{n_y\times n_x}) + X\psi\delta_1^{-1} - Q(\alpha) - C_1(\alpha)^T Z_\sigma C_1(\alpha),
$$

$$
Y_{\alpha\alpha\sigma q} = -E(\alpha)^T - \rho\mathscr{F}_{n_y\times n_u}^T V_\sigma^T D_q^T B(\alpha)^T,
$$

$$
S_{\alpha\alpha\sigma q} = -\eta B(\alpha)^T D_q^T V_\sigma^T + C_1(\alpha)X - U_\sigma\mathscr{F}_{n_y\times n_x}.
$$

Considerando α_i e $\alpha_j \geq 0$, tal que $\sum_{i=1}^{n_r}\alpha_i = \sum_{j=1}^{n_r}\alpha_j = 1$, e somando de $i = 1$ até n_r e $j = 1$ até n_r e $\sigma = s$ e $q = 1, \ldots, 2^{n_u}$, obtém a LMI (136).

Garantindo-se a negatividade de $\dot{\hat{V}}(x)$, para todo $x(t) \notin \varepsilon(P, \delta_1)$ e $x(t) \in \varepsilon(P, \beta)$, tem-se que $x^T Px > \delta_1$. Consequentemente $\hat{V}(x) \geq J$, o que garante o custo garantido para todo $x(t) \in \varepsilon(P,\beta)/\varepsilon(P,\delta_1)$. Note que $0 < \delta_1 < \beta$ e, por isso, $\varepsilon(P,\delta_1) \subset \varepsilon(P,\beta)$. Observe que, como $V(x) = x^T Px$, $P = P^T > 0$, se $\dot{V}(x) < 0$ para todo $x(t) \in \varepsilon(P,\beta)/\varepsilon(P,\delta_1)$, assim $x(t)$ tende a $\varepsilon(P,\delta_1)$. O sistema (32) com a lei de controle (36) é *ultimate bounded* estável para todo $x(0) \in \varepsilon(P,\beta)$. Finalmente, note que $\varepsilon(P,\beta) \in \mathscr{X}$ é condição suficiente para que o sistema com qualquer condição inicial $x(0) \in \varepsilon(P,\beta)$ esteja contido em $\mathscr{X}$ para todo $t > 0$.

Assim, do Lema 3, a LMI (129) garante o custo garantido e também que todas as condições inciais pertencentes ao conjunto convexo (38) estão contidas no conjunto positivamente invariante $\varepsilon(P,\beta)$ (BLANCHINI, 1999), a existência desse elipsoide positivamente invariante é garantida pelas LMIs de (131) a (135), para o sistema (126) com a lei de controle (36).

Observando o Lema 1, a primeira desigualdade de (130) assegura que $\varepsilon(P,\beta) \subset \mathscr{L}(H_k)$, então para todo $x(0) \in \varepsilon(P,\beta)$, tem-se $x(0) \in \mathscr{L}(H_k)$ e a descrição da saturação como combinação convexa (61) pode ser utilizada.

A segunda desigualdade de (130), a partir do Lema 2, garante que $\varepsilon(P,\beta) \subset \mathscr{X}$. Então, tem-se que toda trajetória iniciada com $x(0) \in \varepsilon(P,\beta)$ permanece em $\mathscr{X}$ para todo $t > 0$ (KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2015), pois durante toda a trajetória do sistema $V(x) \leq \beta$ para todo $t > 0$.

Dessa forma, o custo garantido (81) é assegurado em todas as condições impostas pelas LMIs do teorema. Isso completa a prova do teorema. $\square$

Observação 2. *Nas LMIs apresentadas no Teorema 4, deseja-se que δ_1 assuma o menor valor possível entre $0 < \delta_1 < \beta$, de forma que $x(0) \in \varepsilon(P,\beta)/\varepsilon(P,\delta_1)$ seja quase coincidente com $\varepsilon(P,\beta)$, ou seja, que $\varepsilon(P,\delta_1)$ seja o mais próximo possível da origem $x = 0$.*

Analogamente, se for utilizada a lei de controle baseada em ganho único (35), as condições impostas pelo Teorema 4 para o sistema (126) podem ser adaptadas, obtendo-se o Corolário 2.

Corolário 2. *Considere o sistema não linear incerto descrito por* (126)*, com a lei de controle de ganho único* (35)*. Nesse caso, a primeira LMI de* (130) *e a LMI* (136) *podem ser substituídas, respectivamente, por*

$$\begin{bmatrix} \varsigma_l^2 \omega & * \\ G_{k_l}^T & X \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{160}$$

$$\Omega_{iq} = \begin{bmatrix} W_{iq} & * & * & * \\ Y_{iq} & -I_n \psi & * & * \\ C_{2i} X & 0 & -R^{-1} & * \\ S_{iq} & -\rho U \mathscr{F}_{n_y \times n_u} & 0 & -\eta U - \eta U^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{161}$$

$$W_{iq} = He\big(A_i X + B_i \bar{D}_q G - B_i D_q V \mathscr{F}_{n_y \times n_x} + X \psi \delta_1^{-1},$$

$$Y_{iq} = -E_i^T - \rho \mathscr{F}_{n_y \times n_u}^T V^T D_q^T B_i^T,$$
$$S_{iq} = -\eta V^T D_q^T B_i^T + C_{1i} X - U \mathscr{F}_{n_y \times n_x}.$$

para todo $i,k,l \in \mathbb{K}_{n_r}$ *e* $q = 1, ..., 2^{n_u}$.

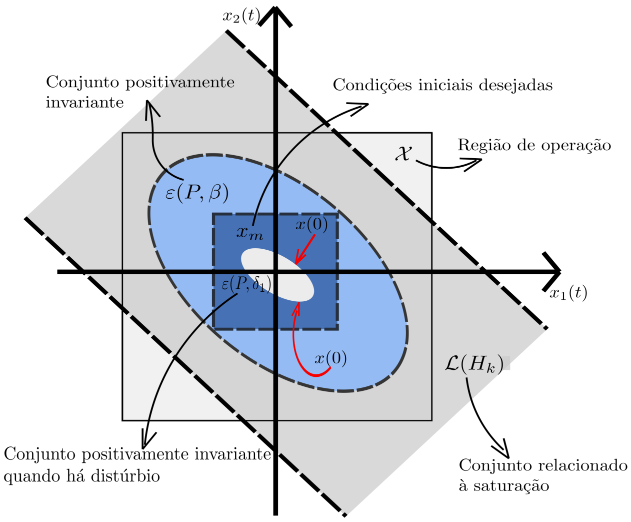
Sendo que as LMIs (133), (134) *e* (135) *do Teorema 4 não são mais necessárias.*

Se as condições são satisfeitas, então o ponto de equilíbrio $x = 0$ *do sistema não linear incerto definido em* (126) *é assintoticamente estável e o índice de performance* $J < \omega^{-1}$ *para todo* $x(0)$ *dado por* (38).

Observação 3. *De acordo com Chang, Park e Zhou (2015) e com a Observação 1, os parâmetros* η*,* ρ *e agora também* ψ *podem ser variáveis, nesse caso as restrições de projeto propostas no Teorema 4 e no Corolário 2 apresentam uma região não convexa de solução, pois serão BMIs. Para contornar esse fato, uma solução é a utilização de métodos heurísticos para encontrar o valores ótimos de* ρ*,* η *e* ψ *que minimizam* β*, de forma que o problema pode ser resolvido através de LMIs.*

Quando um sistema está sujeito à distúrbios, não é possível eliminá-los completamente, dessa forma não é possível garantir a estabilidade assintótica do sistema na origem. Assim, um novo conjunto positivamente invariante $\varepsilon(P, \delta_1)$ deve ser definido conforme as condições da Observação 2, ou seja, sendo o mais próximo possível da origem. A Figura 10 representa a região dos conjuntos $\mathscr{X}$ (10), $\mathscr{L}(H_k)$ (39), $\varepsilon(P, \beta)$, $\varepsilon(P, \delta_1)$ (40) e politopo de condições iniciais em (38) no plano $x_1 \times x_2$ de acordo com as condições dos Lemas 1, 4, 3 e 2. Pode-se observar que o conjunto positivamente invariante $\varepsilon(P, \delta_1)$ está contido no politopo de condições iniciais, que está contido na região positivamente invariante $\varepsilon(P, \beta)$, que está contida na região de operação do sistema $\mathscr{X}$. Assim, para toda trajetória iniciada no politopo de condições iniciais ou na região que relaciona $\varepsilon(P, \beta)$ e o politopo de condições iniciais, tem-se que a trajetória é *ultimate bounded*, tendendo à região definida por $\varepsilon(P, \delta_1)$, conforme setas em vermelho. A descrição da saturação como uma combinação convexa é também garantida em toda região $\mathscr{L}(H_k)$.

Figura 10 - Representação de possíveis trajetórias de estado e das regiões $\mathscr{X}$ (10), $\mathscr{L}(H_k)$ (39), $\varepsilon(P,\beta)$, $\varepsilon(P,\delta_1)$ (40) e politopo de condições iniciais em (38) no plano $x_1(t) \times x_2(t)$



Teorema 5. *Se as condições do Corolário 2 são satisfeitas, então as condições do Teorema 4 também são satisfeitas.*

Demonstração. Para as condições do Teorema 4, considere um caso particular em que os ganhos do controlador são iguais $K_s = K$, $G_s = G$, $V_s = V$, $U_s = U$, $Z_s = 0$, $\Omega_{iqs} = \Omega_{iq} = \varpi_{iq} + \zeta_i$ e $\Theta_{ijl} = \Theta_i$ para todo $i,\ j,\ s,\ l \in \mathbb{K}_{n_r}$ e $q = 1,..,2^{n_u}$. Então é possível reescrever (136) como

$$
\begin{aligned}
&\Omega_{iq} = \varpi_{iq} + \zeta_i \\
&\varpi_{iq} = \begin{bmatrix} W_{iq} & * & * & * & \\ Y_{iq} & -I_n\psi & * & * & \\ C_{2i}X & 0 & -R^{-1} & * & * \\ S_{iq} & -\rho U \mathscr{F}_{n_y \times n_u} & 0 & -\eta U - \eta U^T & \end{bmatrix}, \quad \zeta_i = \begin{bmatrix} Q_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
&W_{iq} = He(A_i X + B_i \bar{D}_q G - B_i D_q V \mathscr{F}_{n_y \times n_x}) + X\psi\delta^{-1}, \\
&Y_{iq} = -E_i^T - \rho \mathscr{F}_{n_y \times n_u}^T V^T D_q^T B_i^T, \\
&S_{iq} = -\eta V^T D_q^T B_i^T + C_{1i}X - U\mathscr{F}_{n_y \times n_x},
\end{aligned} \tag{162}
$$

e (133) a (135) se tornam

$$
\Theta_i = Q_i. \tag{163}
$$

Perceba que, para esse caso em particular, o termo ϖ_{iq} de (162) se torna igual a (160). Considerando que as condições do Corolário 2 são válidas, então, de (160), $\varpi_{iq} < 0$ e $\varpi_{iq} +$

$\varpi_{jq} < 0$. Dessa forma, existem parâmetros $\varepsilon > 0$ e $\tau > 0$ pequenos o suficiente tal que $\varpi_{iq} + \varepsilon I < 0$ e $\varpi_{iq} + \varpi_{jq} + \tau I < 0$. Portanto, de (162), para o caso particular em que $Q_i = -\varepsilon I$, considerando que (160) é válida, então (163) é válida. Por isso as equações (133), (134) e (135) também são válidas, porque $\Theta_{ijl} = \Theta_i$ e, de (163), $Q_i = -\varepsilon I$, então $\Theta_i = -\varepsilon I < 0$. Isso completa a prova do teorema. $\square$

4.2 EXEMPLOS

4.2.1 SUSPENSÃO ATIVA

Para avaliar os efeitos do Teorema 4 e do Corolário 2, utilizou-se, novamente, a bancada de suspensão ativa da Quanser®, sua configuração é representada na Figura 1, com sua dinâmica expressa nas equações (17), (18) e (19). Matricialmente o sistema com a presença de distúrbios persistentes se torna (OLIVEIRA et al., 2018):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{-k_s}{M_s} & \frac{-B_s}{M_s} & 0 & \frac{B_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M_{us}} & \frac{B_s}{M_{us}} & f_{43} & \frac{-(B_s + B_{us})}{M_{us}} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_{fault}}{M_s} \\ 0 \\ \frac{-k_{fault}}{M_{us}} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{b_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix} w. \tag{164}$$

Considerando que w possa ser escrito como $w = Md(t)$, sendo $-1 \leq d(t) \leq 1$ e M o módulo da derivada do distúrbio persistente ao qual o sistema está sujeito. Nesse trabalho, considerou-se o distúrbio persistente como uma senoide na forma $w(t) = 0,005sen(2 \times \pi \times 0,2 \times t)$. A partir disso, tem-se $M = 0,005 \times 2 \times \pi \times 0,2$ e o sistema pode ser reescrito como

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{-k_s}{M_s} & \frac{-B_s}{M_s} & 0 & \frac{B_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M_{us}} & \frac{B_s}{M_{us}} & f_{43} & \frac{-(B_s + B_{us})}{M_{us}} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_{fault}}{M_s} \\ 0 \\ \frac{-k_{fault}}{M_{us}} \end{bmatrix} u + (0,005 \times 2 \times \pi \times 0,2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{b_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix} d. \tag{165}$$

Note que não existem não linearidades ou incertezas na matriz E, de forma que os modelos locais do sistema permanecem os mesmos dados no Capítulo 2. Assim, a matriz E é constante e possui os seguintes valores

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_5 = E_6 = E_7 = E_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,0063 \\ 0,0314 \end{bmatrix}. \tag{166}$$

Assim como no Capítulo 3, foram realizadas simulações em MATLAB e implementações na bancada pertencente ao Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) da FEIS-UNESP.

4.2.1.1 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Da mesma forma que no Capítulo 3, as LMIs do Teorema 4 e do Corolário 2 foram resolvidas com a utilização do MATLAB, com a interface “Yalmip” (LOFBERG, 2004), junto com o *solver* “LMI-Lab” (GAHINET et al., 1994).

Os parâmetros utilizados para o projeto foram $\phi = \begin{bmatrix} 0,035 & 0,035 \end{bmatrix}^T$, $\eta = 0,010$, $\rho = 0,010$ e $\varsigma_1 = 39,2$, $\psi = 0,04$, $\delta_1 = 0,09$ e $R = I_{2\times 2}$. O conjunto convexo de condições iniciais $x(0)$ descrito em (38) é formado considerando uma combinação convexa de $-0,02 \leq x_1(0)$, $x_3(0) \leq 0,02$, $x_2(0) = 0$ e $x_4(0) = 0$.

Considerou-se, também, as seguintes matrizes C_1 e C_2

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{167}$$

Para as condições do Teorema 4, o limitante superior do custo garantido J, dado em (81), é $\beta = 0,1741$ e os ganhos do controlador chaveado são dados em (168) e as matrizes utilizadas na lei de chaveamento em (169).

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} 944,90 & 51,63 \end{bmatrix}, & K_2 &= \begin{bmatrix} 971,34 & 51,17 \end{bmatrix}, \\ K_3 &= \begin{bmatrix} 872,56 & 50,63 \end{bmatrix}, & K_4 &= \begin{bmatrix} 1003,30 & 50,91 \end{bmatrix}, \\ K_5 &= \begin{bmatrix} 696,69 & 46,14 \end{bmatrix}, & K_6 &= \begin{bmatrix} 648,15 & 43,59 \end{bmatrix}, \\ K_7 &= \begin{bmatrix} 648,44 & 43,76 \end{bmatrix}, & K_8 &= \begin{bmatrix} 751,70 & 47,07 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{168}$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= \begin{bmatrix} 1895175,33 & 3459146,48 \\ 3459146,48 & -76334,57 \end{bmatrix}, & Z_2 &= \begin{bmatrix} 1895175,31 & 3459146,84 \\ 3459146,84 & -76340,94 \end{bmatrix}, \\ Z_3 &= \begin{bmatrix} 1895175,30 & 3459147,10 \\ 3459147,10 & -76339,27 \end{bmatrix}, & Z_4 &= \begin{bmatrix} 1895175,30 & 3459146,60 \\ 3459146,60 & -76330,59 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$Z_5 = \begin{bmatrix} 1895175,32 & 3459148,11 \\ 3459148,11 & -76329,17 \end{bmatrix}, \quad Z_6 = \begin{bmatrix} 1895175,33 & 3459148,25 \\ 3459148,25 & -76323,23 \end{bmatrix},$$
$$Z_7 = \begin{bmatrix} 1895175,33 & 3459148,32 \\ 3459148,32 & -76322,54 \end{bmatrix}, \quad Z_8 = \begin{bmatrix} 1895175,31 & 3459147,82 \\ 3459147,82 & -76326,71 \end{bmatrix}. \qquad (169)$$

Já para o Corolário 2, o limitante superior do custo garantido J, em (81), é $\beta = 0,1933$ e a matriz de ganho do controlador é dada a seguir

$$K = \begin{bmatrix} 828,33 & 51,17 \end{bmatrix}. \qquad (170)$$

Assim, tem-se que o limitante superior β do custo garantido J, em (81), para as condições impostas pelo Teorema 4 é $9,93\%$ menor que para as condições impostas pelo Corolário 2. De forma que o controlador chaveado apresenta condições mais relaxadas do que o controlador de ganho único. Assim, através do resultado obtido neste exemplo e do Teorema 5, o controlador chaveado proposto no Teorema 4 possuirá uma região de factibilidade igual ou maior que a do Corolário 2, podendo obter, desta forma, melhores índices de desempenho.

4.2.1.2 Implementação prática

Como o Teorema 4 e o Corolário 2 consideram a presença de distúrbios persistentes, para melhor avaliar seu desempenho, alterou-se as condições de implementações em relação às do Capítulo 3. Agora o sinal da pista consiste na soma de uma onda quadrada e uma onda senoidal. A onda quadrada é a mesma usada nos exemplos do Capítulo 3, cujos parâmetros são amplitude de $0,02$ m, frequência de $1/3$ Hz e 50% de largura de pulso. Já a onda senoidal tem amplitude $0,005$ m e frequência de $0,2$ Hz. O tempo de amostragem do sistema foi 1 ms. O tempo de implementação mais uma vez foi de 15 segundos, dividido da seguinte forma: de 0 a 5 segundos, o sistema está em malha aberta; de 5 a 10 segundos, o sistema está em malha fechada; e, finalmente, de 10 a 15 segundos, o sistema está em malha fechada com falha no atuador de 50%.

Primeiramente, aplicou-se as condições do Teorema 4 e posteriormente dos Teoremas 1 e 2 para que os índices de performance J, em (81), pudessem ser comparados.

As Figuras 11 e 12 mostram as posições (pista, conjunto de pneus e passageiro), o sinal de controle ($u_\sigma(t)$) e o índice de chaveamento ($\sigma(t)$) para os valores de massa suspensa $M_s = 1,455$ kg e $M_s = 2,45$ kg, respectivamente, segundo as condições impostas pelo Teorema 4.

Figura 11 - Comportamento do sistema de suspensão ativa e sinal de controle baseado no Teorema 4 para $M_s = 1,455$ kg.

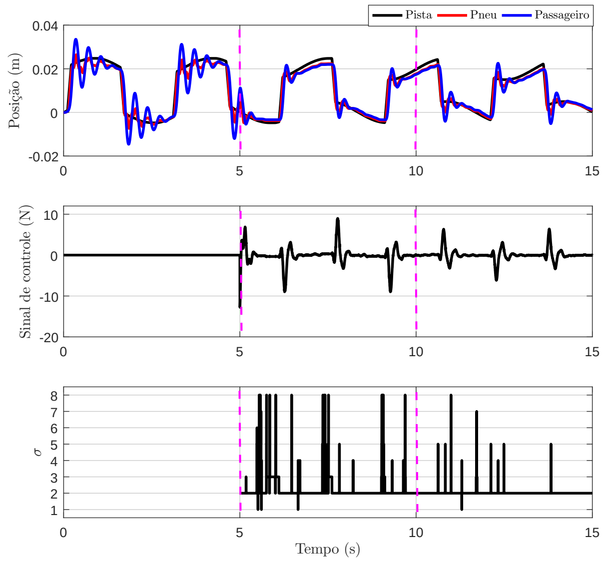
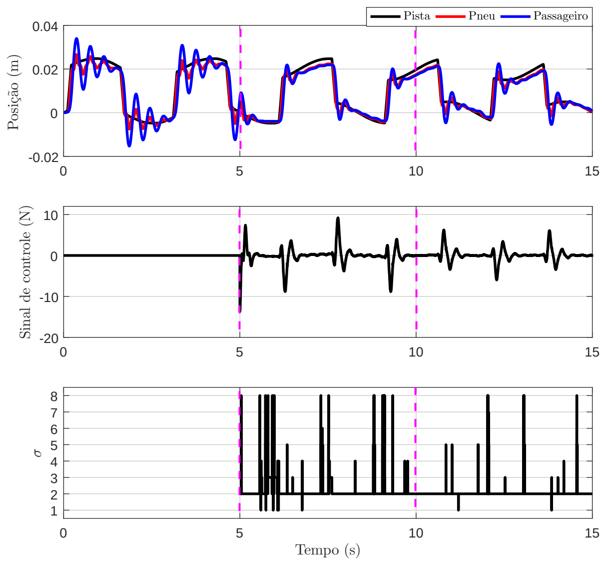
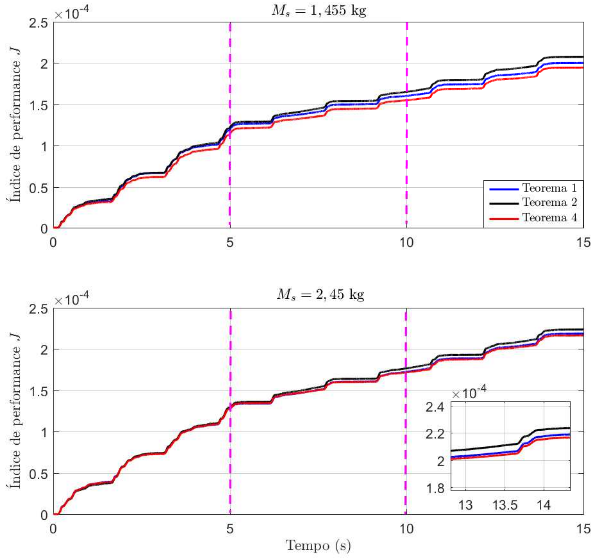


Figura 12 - Comportamento do sistema de suspensão ativa e sinal de controle baseado no Teorema 4 para $M_s = 2,45$ kg.



A Figura 13 mostra a comparação dos índices de performance J, descritos em (81), durante toda a implementação para os Teoremas 1, 2 e 4 considerando os valores extremos da massa M_s.

Figura 13 - Índices J para as condições impostas pelos Teoremas 1, 2 e 4 considerando os dois extremos de massa M_s.



Da Figura 13, tem-se que os menores valores para o índice de performance J são dados pelas condições do Teorema 4. Ao analisar os limitantes superiores β dados através de simulações numéricas, tem-se que o maior valor é apresentado entre os controladores chaveados é aquele dado pelo Teorema 4, no entanto, quando o sistema é implementado e sujeito à presença de distúrbios persistentes, esse teorema apresenta melhor desempenho, pois em sua metodologia prevê a existência destes, assim é o mais adequado para sistemas que estão sujeitos a esse tipo de excitação.

4.3 COMENTÁRIOS

Nesse capítulo é apresentada a metodologia de controladores robustos chaveados utilizando realimentação de saída, sujeitos à saturação nos atuadores e considerando distúrbios persistentes.

A descrição matemática dos distúrbios persistentes foi apresentada e optou-se por seu uso para que o projeto dos controladores pudesse se aproximar um pouco mais da realidade, visto que muitos sistemas reais estão sujeitos à distúrbios em seu funcionamento.

Dos resultados de simulações e implementações, pode-se considerar a metodologia de projeto de controladores eficaz.

5 CONCLUSÕES

O principal objetivo desse trabalho foi propor condições para o projeto de controladores chaveados com realimentação da saída da planta para sistemas não lineares incertos e comparar com controladores de ganho único com as mesmas restrições, com o intuito de verificar a eficácia do primeiro método.

Dessa forma, o primeiro desafio consiste em descrever o sistema, por ser não linear e incerto. Técnicas de modelagem fuzzy Takagi-Sugeno (TS) foram utilizadas, pois a partir delas é possível representar esses sistemas de maneira exata em uma região de operação como uma combinação convexa de modelos lineares locais combinados com funções de pertinência. A metodologia usada para isso foi apresentada e os modelos locais dos sistemas utilizados (suspensão veicular ativa e posição de perna de um paraplégico) foram obtidos no desenvolvimento desse trabalho.

A partir disso, diversas restrições e especificações foram consideradas no projeto dos controladores: realimentação de saída, saturação nos atuadores, taxa de decaimento, custo garantido e distúrbios persistentes. Cada uma foi utilizada por motivos específicos e, com a combinação delas, foram propostos três teoremas de controle chaveado, dois corolários de controle de único ganho e dois teoremas que provam que se as condições do controlador de único ganho são válidas para um determinado sistema, então as condições do controlador chaveado também serão. Optou-se pela construção dessa forma para que os efeitos das técnicas propostas pudessem ser analisados e comparados.

Das simulações feitas para a posição da perna paraplégica, com a Figura 4, pode-se observar a capacidade do controlador em estabilizar o sistema. O comportamento da função de Lyapunov, na Figura 5, mostra que seu maior valor é menor que o limitante anteriormente definido pelo Teorema 1, ou seja, 1. Assim, o teorema proposto apresenta vantagens principalmente relacionadas à utilização da realimentação de saída, uma vez que Nunes et al. (2022) utiliza uma nova linearização do modelo proposto por Ferrarin e Pedotti (2000) pela dificuldade em mensurar o torque. O uso da realimentação de saída contorna essa dificuldade, permitindo o uso do modelo original, além de dispensar a necessidade do uso de novos sensores para a implementação prática.

Um outro exemplo teórico é apresentado na Subseção 3.2.2 utilizando um sistema não linear incerto. As condições do Teorema 2 e do Corolário 1 foram aplicadas a esse sistema e ambos controladores foram capazes de estabilizá-lo. No entanto, quando os limitantes superiores β do custo garantido J, dado em (81), são comparados, observa-se um valor $5,92\%$ menor para o caso chaveado. Comprovando as condições do Teorema 3, de que a região de factibilidade do Teorema 2 deve ser igual ou maior que a do Corolário 1.

Após simulações e implementações da suspensão ativa, pode-se analisar os efeitos dos controladores na dinâmica dos sistemas observando as Figuras de 6 a 12. Dessas figuras, tem-se que todos os controladores são capazes de estabilizar o sistema e, quando em malha fechada, há grande atenuação dos efeitos da pista sobre este. Ainda que o sistema possua falha no atuador, não se observa grande alteração em sua dinâmica, aumentando o conforto dos passageiros, quando comparado à malha aberta. Os controladores podem ser ditos robustos, já que se mantêm estáveis mesmo com a falha do atuador e com as variações de massa, conforme foi requisitado no projeto.

Por outro lado, analisando os limitantes superiores β dos custos garantidos, tem-se que os controladores chaveados apresentam resultados melhores, exceto para o caso do Teorema 2 e do Corolário 1, em que o controlador de ganho único apresenta um custo $0,35\%$ menor que o controlador chaveado. Como foi discutido no decorrer do texto, acredita-se que o resultado pode ser atribuído às falhas de resolução do *solver* utilizado.

Analisou-se também a efetividade do Teorema 4 em relação aos demais ao se alterar a pista de implementação. A alteração mostrou na Figura 13 que, para pistas compostas por sinais diversos, o Teorema 4 apresenta melhores resultados quando comparado com os demais, pois em sua metodologia já prevê a presença de distúrbios persistentes.

Pela dificuldade em encontrar metodologias parecidas na literatura, no Capítulo 3, utilizou-se teoremas propostos por Silva et al. (2020). A comparação entre o Teorema 2 desse trabalho e o Teorema 1 de Silva et al. (2020) mostra que a metodologia proposta nesse trabalho apresenta limitante superior do custo garantido $57,48\%$ menor. No entanto a vantagem das metodologias propostas nesse trabalho é o uso de realimentação de saída, descartando a necessidade de mensurar todas as variáveis de estado, o que pode ser muito complexo na prática.

Por tudo isso, todas as metodologias propostas nesse trabalho podem ser ditas eficazes e possuem importância em aplicações práticas.

REFERÊNCIAS

ALVES, U. N. L. T. **Controle chaveado e chaveado suave de sistemas não lineares incertos via modelos fuzzy TS**. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Ilha Solteira, 2017. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/152448>. Acesso em: 25 fev. 2022.

ALVES, U. N. L. T.; OLIVEIRA, D. R. D.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Smoothing switched control for uncertain TS fuzzy systems with unknown membership functions, actuator saturation and disturbance. In: IEEE. IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE). Vancouver, 2016. p. 2212–2219.

ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A. Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, West Sussex, v. 30, n. 8-10, p. 1408–1433, 2016.

BLANCHINI, F. Set invariance in control. **Automatica**, Elsevier, v. 35, n. 11, p. 1747–1767, 1999.

BOCCA, L. F.; RAMOS, I. T. M.; ALVES, U. N. L. T.; BIZARRO, D. B.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. Robust guaranteed cost switched controller design using static output feedback. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, Springer, v. 33, p. 115–128, 2021.

BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelfia: SIAM, 1994.

CAO, Y.-Y.; LIN, Z. Robust stability analysis and fuzzy-scheduling control for nonlinear systems subject to actuator saturation. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, IEEE, Piscataway, v. 11, n. 1, p. 57–67, 2003.

CARNIATO, L. A.; CARNIATO, A. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; JUNIOR, E. I. M.; ASSUNÇÃO, E. Output control of continuous-time uncertain switched linear systems via switched static output feedback. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 93, n. 5, p. 1127–1146, 2020.

CAUN, R. da P.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CAUN, A. da P. LQR-LMI control applied to convex-bounded domains. **Cogent Engineering**, Abingdon, v. 5, n. 1, p. 1457206, 2018.

CHADLI, M.; GUERRA, T.-M. LMI solution for robust static output feedback control of discrete Takagi–Sugeno fuzzy models. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, IEEE, Piscataway, v. 20, n. 6, p. 1160–1165, 2012.

CHANG, X.-H.; PARK, J. H.; ZHOU, J. Robust static output feedback H_∞ control design for linear systems with polytopic uncertainties. **Systems & Control Letters**, Elsevier, Amsterdam, v. 85, p. 23–32, 2015.

CHEN, S.-S.; CHANG, Y.-C.; SU, S.-F.; CHUNG, S.-L.; LEE, T.-T. Robust static output feedback stabilization for nonlinear discrete-time systems with time delay via fuzzy control approach. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, IEEE, Piscataway, v. 13, n. 2, p. 263–272, 2005.

CRIVELLARO, C. **Controle robusto de suspensão semi-ativa para caminhonetes utilizando amortecedores magneto-reológicos.** Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2008. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3152/tde-09022009-140556/pt-br.php>. Acesso em: 25 fev. 2022.

CRUSIUS, C. A.; TROFINO, A. Sufficient LMI conditions for output feedback control problems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, Piscataway, v. 44, n. 5, p. 1053–1057, 1999.

DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; DAAFOUZ, J. Switched state feedback control for continuous time-varying polytopic systems. **International Journal of Control**, Oxfordshire, v. 84, n. 9, p. 1500–1508, Sep 2011.

DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; GARCIA, F. S.; POMILIO, J. A. Switched affine systems control design with application to DC–DC converters. **IET control theory & applications**, IET, Stevenage, v. 4, n. 7, p. 1201–1210, 2010.

DONG, J.; YANG, G.-H. Robust static output feedback control synthesis for linear continuous systems with polytopic uncertainties. **Automatica**, Elsevier, Oxford, v. 49, n. 6, p. 1821–1829, 2013.

DU, H.; LAM, J.; CHEUNG, K.; LI, W.; ZHANG, N. Direct voltage control of magnetorheological damper for vehicle suspensions. **Smart Materials and Structures**, IOP Publishing, Bristol, v. 22, n. 10, p. 105016, 2013.

FANG, C.-H.; LIU, Y.-S.; KAU, S.-W.; HONG, L.; LEE, C.-H. A new LMI-based approach to relaxed quadratic stabilization of TS fuzzy control systems. **IEEE Transactions on fuzzy systems**, IEEE, Piscataway, v. 14, n. 3, p. 386–397, 2006.

FERRARIN, M.; PEDOTTI, A. The relationship between electrical stimulus and joint torque: A dynamic model. **IEEE transactions on rehabilitation engineering**, IEEE, Piscataway, v. 8, n. 3, p. 342–352, 2000.

GAHINET, P.; NEMIROVSKII, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. The LMI control toolbox. In: IEEE. *Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.], 1994. v. 3, p. 2038–2041.

GAINO, R.; COVACIC, M. R.; CARDIM, R.; SANCHES, M. A. A.; CARVALHO, A. A. D.; BIAZETO, A. R.; TEIXEIRA, M. C. M. Discrete Takagi-Sugeno fuzzy models applied to control the knee joint movement of paraplegic patients. **IEEE Access**, IEEE, v. 8, p. 32714–32726, 2020.

HU, T.; LIN, Z.; CHEN, B. M. Analysis and design for discrete-time linear systems subject to actuator saturation. **Systems & control letters**, Elsevier, Amsterdam, v. 45, n. 2, p. 97–112, 2002.

KAU, S.-W.; LEE, H.-J.; YANG, C.-M.; LEE, C.-H.; HONG, L.; FANG, C.-H. Robust H_∞ fuzzy static output feedback control of TS fuzzy systems with parametric uncertainties. **Fuzzy sets and systems**, Elsevier, Amsterdam, v. 158, n. 2, p. 135–146, 2007.

KLUG, M.; CASTELAN, E. B.; COUTINHO, D. A T–S fuzzy approach to the local stabilization of nonlinear discrete-time systems subject to energy-bounded disturbances. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, Heidelberg, v. 26, n. 3, p. 191–200, 2015.

KLUG, M.; CASTELAN, E. B.; LEITE, V. J.; SILVA, L. F. Fuzzy dynamic output feedback control through nonlinear Takagi–Sugeno models. **Fuzzy Sets and Systems**, Elsevier, Amsterdam, v. 263, p. 92–111, 2015.

LOFBERG, J. Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab. In: IEEE. *2004 IEEE international conference on robotics and automation (IEEE Cat. No. 04CH37508)*. [S.l.], 2004. p. 284–289.

NGUYEN, A.-T.; TANAKA, K.; DEQUIDT, A.; DAMBRINE, M. Static output feedback design for a class of constrained Takagi–Sugeno fuzzy systems. **Journal of the Franklin Institute**, Elsevier, Oxford, v. 354, n. 7, p. 2856–2870, 2017.

NUNES, W. R. B. M. **A new dynamic model applied to electrically stimulated lower limbs and switched control design subject to actuator saturation and non-ideal conditions**. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Ilha Solteira, 2019. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/183168>. Acesso em: 25 fev. 2022.

NUNES, W. R. B. M.; ALVES, U. N. L. T.; SANCHES, M. A. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARVALHO, A. A. de. Electrically stimulated lower limb using a Takagi-Sugeno fuzzy model and robust switched controller subject to actuator saturation and fault under nonideal conditions. **International Journal of Fuzzy Systems**, Springer, Heidelberg, v. 24, p. 57–72, 2022.

OGATA, K. Engenharia de controle moderno. Pearson, p. 824, 2011.

OLIVEIRA, D. R. de; TEIXEIRA, M. C. M.; ALVES, U. N. L. T.; SOUZA, W. A. D.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. On local H_∞ switched controller design for uncertain TS fuzzy systems subject to actuator saturation with unknown membership functions. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 344, n. 1, p. 1–26, 2018.

PETERSEN, I. R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. **Systems & Control Letters**, Elsevier, Amsterdam, v. 8, n. 4, p. 351–357, 1987.

QUANSER. **Active Suspension -** User’s Manual. Ontario, Canada, 2009.

RAMOS, I. T.; ALVES, U. N. L.; TEIXEIRA, M. C.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; LAZARINI, A. Z. On robust switched controller design to minimize the guaranteed cost of polynomial fuzzy systems. In: 2019 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE). [S.l.: s.n.].

SADABADI, M. S.; PEAUCELLE, D. From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey. **Annual reviews in control**, Elsevier, Oxford, v. 42, p. 11–26, 2016.

SANTIM, M.; TEIXEIRA, M. C. M.; SOUZA, W. A. d.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Design of a Takagi-Sugeno fuzzy regulator for a set of operation points. **Mathematical Problems in Engineering**, New Iorque, v. 2012, n. 1, p. 1–17, 2012.

SILVA, H. R. M. *Identificação do sistema aeropêndulo e métodos de controle chaveado aplicados a sistemas incertos descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Ilha Solteira, 2020. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/193574>. Acesso em: 25 fev. 2022.

SILVA, H. R. M.; RAMOS, I. T. M.; ALVES, U. N. L. T.; CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E. Switched control design with guaranteed cost for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. **IFAC-PapersOnLine**, Elsevier, New York, v. 53, n. 2, p. 8025–8030, 2020.

SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. et al. **Applied nonlinear control**. [S.l.]: Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.

SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Robust switched control design for nonlinear systems using fuzzy models. **Mathematical Problems in Engineering**, London, v. 2014, n. 1, p. 1–11, 2014a.

SOUZA, W. A. D.; TEIXEIRA, M.; SANTIM, M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties. **Mathematical Problems in Engineering**, Hindawi, London, v. 2013, 2013.

SOUZA, W. A. D.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇAO, E. On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi–Sugeno fuzzy models. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 22, n. 6, p. 1720–1727, 2014b.

STURM, J. F. Using sedumi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization methods and software*, Taylor & Francis, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999.

SYRMOS, V. L.; ABDALLAH, C. T.; DORATO, P.; GRIGORIADIS, K. Static output feedback survey. **Automatica**, Elsevier, Oxford, v. 33, n. 2, p. 125–137, 1997.

TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. **IEEE transactions on systems, man, and cybernetics**, IEEE, Piscataway, n. 1, p. 116–132, 1985.

TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI–based designs. **IEEE Transactions on fuzzy systems**, IEEE, Piscataway, v. 6, n. 2, p. 250–265, 1998.

TANIGUCHI, T.; TANAKA, K.; OHTAKE, H.; WANG, H. O. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, IEEE, v. 9, n. 4, p. 525–538, 2001.

TARBOURIECH, S.; GARCIA, G.; JR, J. M. G. da S.; QUEINNEC, I. *Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators*. [S.l.]: **Springer Science & Business Media**, 2011.

TEIXEIRA, M. C.; ASSUNÇÃO, E.; AVELLAR, R. G. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 11, n. 5, p. 613–623, Oct 2003.

TEIXEIRA, M. C. M.; ZAK, S. H. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models. **IEEE Transactions on Fuzzy systems**, IEEE, Piscataway, v. 7, n. 2, p. 133–142, 1999.

VAFAMAND, N.; ASEMANI, M. H.; KHAYATIAN, A. Robust L_1 observer-based Non-PDC controller design for persistent bounded disturbed ts fuzzy systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, IEEE, Piscataway, v. 26, n. 3, p. 1401–1413, 2017.

WANG, H. O.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model. In: *IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS*. Yokohama. **Proceedings of** [...]: IEEE, 1995. v. 2, p. 531–538.

WANG, H. O.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. **IEEE transactions on fuzzy systems**, IEEE, v. 4, n. 1, p. 14–23, 1996.

XU, S.; WEN, H.; HUANG, Z. Robust fuzzy sampled-data attitude control of spacecraft with actuator saturation and persistent disturbance. **Aerospace Science and Technology**, Elsevier, Issy les Moulineaux Cedex, v. 101, p. 1–21, 2020.

YANG, W.; FENG, G.; ZHANG, T. Robust model predictive control for discrete-time takagi–sugeno fuzzy systems with structured uncertainties and persistent disturbances. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, IEEE, Piscataway, v. 22, n. 5, p. 1213–1228, 2013.