

IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.010/00

OK

Soluções Sólitons e Aspectos não Perturbativos de Teorias de Campo

Harold S. Blas Achic

Orientador

Prof. Dr. L. A. Ferreira



Outubro de 2000

Dedicado a mis padres y hermanos a la distancia, por su permanente aliento y apoyo.



Agradecimentos

O presente trabalho foi desenvolvido com a ajuda de muitas pessoas. Os meus agradecimentos a todos eles, em primeiro lugar ao Prof. L.A. Ferreira pela proposta do tema do projeto e pela colaboração em diversas etapas do desenvolvimento do mesmo, e ao Professor B. M. Pimentel pela colaboração no tema da quantização simplética. Também aos Professores J.F. Gomes, M.A.C. Kneipp, D.I. Olive, J. Sánchez Guillén, G.M. Sotkov, A.H. Zimerman pelas valiosas informações concernente às referências pertinentes ao tema, pelas discussões e valiosas sugestões. Também ao Professor C. Wotzasek, pelo convite para dar um seminário na UFRJ e pelas discussões, e aos Professores M.B. Halpern, L. Chao, A. Armoni pelas suas correspondências dando a conhecer novas referências concernentes ao tema, e pelas suas valiosas observações . Aos meus amigos C. Tello, R. Bentin e L. C. Torres, pelas discussões e ajuda em diversas etapas da redação da presente tese. Também a todos os funcionarios do IFT e ao povo brasileiro que através da FAPESP fizeram possível este trabalho.

Resumo

Neste trabalho consideramos o modelo de Toda conforme afim acoplado à matéria (CATM) no caso $sl(2)$. Esta é uma teoria de campos conforme em duas dimensões e possui dois espinores de Dirac e tres campos escalares. A sua propriedade de integrabilidade é baseada na álgebra de Kac-Moody afim $sl(2)$ e é um dos mais simples exemplos de uma classe ampla de modelos chamados em geral CATM. Nesta tese mostramos, usando técnicas de bosonização, que a equivalência entre as correntes de Noether $U(1)$ e topológica é mantida ao nível quântico, portanto fornece um mecanismo do tipo “bag model” para o confinamento dos graus de liberdade de “cor” da teoria dentro dos sólitons. Através da bosonização dos espinores mostramos que a teoria desacopla-se numa teoria de sine-Gordon mais campos escalares livres. Construímos as soluções 2-sóliton e mostramos que as suas interações têm os mesmos tempos de demora dos sólitons do modelo de sine-Gordon. O modelo torna-se um bom laboratório para se testar ideais de dualidade soliton/partícula no contexto da equivalência dos modelos de sine-Gordon e Thirring massivo.

Este modelo vinculado também é estudado no contexto dos seguintes métodos simpléticos de quantização : o método de Faddeev-Jackiw e o método simplético (vinculado) de Barcelos-Neto, Montani e Wotzasek. Primeiramente fixamos a simetria conforme e definimos uma teoria fora do ponto crítico, o modelo de Toda acoplado a matéria (ATM). Impondo a equivalência entre as correntes de Noether e topológica como um vínculo obtemos a teoria de sine-Gordon ou o modelo massivo de Thirring, através duma redução hamiltoniana e fixando as simetrias de calibre de duas formas diferentes.

Palavras Chaves: Sólitons; Confinamento; Integrabilidade, Métodos Não Perturbativos; Quantização Simplética; Teorema de Darboux.

Áreas do Conhecimento:Física das Partículas Elementares e Campos; Métodos Matemáticos em Física; Fenômenos Não Lineares.

Abstract

We consider a two-dimensional integrable and conformally invariant field theory possessing two Dirac spinors and three scalar fields, the so-called conformal affine Toda model coupled to matter fields (CATM). The interaction couples bilinear terms in the spinors to exponentials of the scalars. Its integrability properties are based on the $sl(2)$ affine Kac-Moody algebra, and it is a simple example of the so-called conformal affine Toda theories coupled to matter fields. We show in this paper, using bosonization techniques, that the classical equivalence between a $U(1)$ Noether current and the topological current holds true at the quantum level, and then leads to a bag model like mechanism for the confinement of the spinor fields inside the solitons. By bosonizing the spinors we show that the theory decouples into a Sine-Gordon model and free scalars. We construct the two-soliton solutions and show that their interactions lead to the same time delays as those for the Sine-Gordon solitons. The model provides a good laboratory to test duality ideas in the context of the equivalence between the Sine-Gordon and Thirring theories.

The CATM model is treated as a constrained system in the context of Faddeev-Jackiw and the (constrained) symplectic schemes (Barcelos-Neto, Montani, Wotzasek). Firstly we define the off-critical affine Toda model coupled to the matter (ATM) by fixing the conformal symmetry setting a connection to zero. We recover from this theory either, the sine-Gordon or the massive Thirring model, through a process of Hamiltonian reduction, considering the equivalence of the Noether and topological currents as a constraint and fixing the gauge symmetries in two different ways.

Keywords: Solitons; Confinement; Integrability; Non-perturbative Methods; Symplectic Quantization; Darboux's Theorem.

Research Areas: Elementary Particle Physics; Field Theory, Mathematical Methods in Physics; Non-Linear Phenomena.

Índice

1	Introdução	1
2	Confinamento, sólitons e a equivalência entre os modelos de sine-Gordon e Thirring massivo	7
2.1	O modelo	7
2.2	A teoria quântica	11
2.3	Soluções Sóliton	15
2.3.1	As soluções 1-sóliton	21
2.3.2	As soluções 2-sóliton	22
2.3.3	As condições de realidade	24
2.3.4	As cargas topológicas	24
2.3.5	As soluções “breather”	26
2.3.6	Os tempos de demora	28
3	Os formalismos de Faddeev-Jackiw e Simplético (vinculado) e o modelo de Toda $sl(2)$ conforme afim acoplado a matéria	32
3.1	O formalismo de Faddeev-Jackiw	32
3.1.1	O formalismo simplético vinculado	34
3.2	O modelo	35
3.3	O formalismo de FJ e o modelo de Thirring massivo	38
3.4	O método simplético aplicado ao modelo	39
3.4.1	O modelo de Thirring massivo	39
3.4.2	O modelo de sine-Gordon	43
4	Discussões	47
A	Notações e Convenções	50
A.1	Coordenadas de cone de luz e os espinores de Dirac	50
A.2	A álgebra de Lie afim $sl(2)^{(1)}$ e uma base especial	50
A.3	A representação de curvatura nula	52

B As Álgebras de Kac-Moody e as suas Representações Integráveis de Peso Mais Alto	53
C A Construção dos Operadores de Vértice Homogêneos	58
D Cálculos Usando Operadores de Vértice Homogêneos	61
E As Regras de Bosonização	65
F O Teorema de Darboux	69
Referências	71

Capítulo 1

Introdução

Os modelos integráveis não lineares em $1 + 1$ dimensões, tornaram-se uma ferramenta importante no entendimento de aspectos não perturbativos de teorias físicas. Alguns destes modelos constituem um laboratório para se testar ideias sobre confinamento de quarks, geração dinâmica de massa, liberdade assintótica, teoria quântica de sólitons, dualidade partícula-sóliton, termodinâmica de buracos negros, etc. É bem conhecida a importância das soluções clássicas localizadas das equações não-lineares para a correspondente teoria quântica. Em particular, as soluções do tipo sóliton podem ser associadas com estados do tipo partículas-estendidas quânticas [1]. Por esta razão, as ondas do tipo sóliton são importantes para o estudo do regime não-perturbativo da teoria quântica e são fundamentais para o nosso conhecimento da dinâmica quântica além das pequenas perturbações do vácuo. Quando estas ondas não-lineares existirem numa teoria, o espectro quântico da teoria divide-se em dois setores, correspondendo às excitações em torno do vácuo ou em torno da onda não-linear. Além do mais, a própria onda não-linear adquire uma categoria de partícula e é estável devido à existência de leis de conservação topológicas; estas leis estão associadas às condições de contorno impostas às ondas não-lineares.

Acreditasse que os sólitons têm um papel importante em muitos aspectos não-perturbativos de uma classe ampla de teorias quânticas de campo, assim como em fenômenos de matéria condensada. O interesse é maior nas teorias invariantes de Lorentz que apresentam sólitons topológicos, desde que em muitos casos há uma evidência forte que tais sólitons correspondam às excitações de partícula no espectro da teoria quântica. A relevância dos solitons aos fenômenos não perturbativos vem, em general, do fato que suas interações são inversamente proporcionais às constantes de acoplamento que governam a dinâmica dos campos fundamentais que aparecem no Lagrangeano. Conseqüentemente, os sólitons são acoplados fracamente no regime forte da teoria, e aquele é o fato básico subjacente nas diversas idéias de dualidade. A razão é que pode-se descrever a teoria no regime forte do acoplamento substituindo

o lagrangeano fundamental por um outro onde as excitações dos campos correspondem aos estados solitônicos. A dualidade eletromagnética de Montonen-Olive [2], envolvendo monopolos magnéticos e partículas de calibre, é um dos melhores exemplos de tal comportamento, e encontrou em teorias supersimétricas de calibre o melhor habitat para sua implementação [3, 4, 5]. Dualidades similares ocorrem em modelos estatísticos e em muitas teorias de campo em dimensões mais baixas. O exemplo que é compreendido melhor em tal contexto é a equivalência quântica entre os modelos de sine-Gordon e de Thirring massivo [6, 7], que fornecem um laboratório excelente para se testar as idéias sobre o papel dos sólitons em teorias quânticas de campo.

Nesta tese consideramos uma teoria de campos integrável e invariante conforme bidimensional que envolve espinores e campos escalares, e apresenta soluções do tipo sólitons topológicos. A teoria é um dos exemplos mais simples dos assim chamados modelos de Toda conforme afim acoplados a matéria proposto em [8]. Tem dois espinores de Dirac acoplados a um campo escalar que tem o papel de uma partícula de “gauge” $U(1)$. O sistema torna-se invariante conforme pela introdução de outros dois campos escalares que constituem o que é chamado em general na literatura um sistema beta-gama, com termo cinético definido não positivo. A integrabilidade da teoria é estabelecida usando uma formulação de curvatura zero de suas equações de movimento baseadas na álgebra de Lie afim $\widehat{sl}(2)$. A solução geral assim como as soluções explícitas de um-sóliton foram obtidas na Ref. [8]. Além das simetrias conforme e chiral locais, o modelo apresenta as simetrias vetorial e axial globais e algumas simetrias discretas. Entretanto, uma de suas propriedades principais é aquela que para um subconjunto grande de soluções existe uma equivalência entre a corrente $U(1)$ de calibre (de Noether), envolvendo os spinors somente, e a corrente topológica associada à partícula de “gauge escalar”. Este fato foi estabelecido em [8] no nível clássico, e tem consequências profundas nas propriedades da teoria. Implica que a densidade de carga $U(1)$ tem que estar concentrada nas regiões onde o campo escalar tem a derivada espacial não nula, isto é, apresenta um momento grande. O um-sóliton da teoria é do tipo de sine-Gordon, e conseqüentemente a densidade da carga é concentrada dentro do soliton. Desde que os portadores da carga são os espinores, significa que se procurarmos excitações da teoria em torno do estado solitônico, se esperaria os spinors estarem confinados.

Um dos principais objetivos desta tese é estudar a equivalência das correntes de Noether e topológica ao nível clássico e quântico, e suas consequências para o mecanismo de confinamento. A primeira propriedade a ser estabelecida é se tal equivalência não é deteriorada por anomalias quânticas que as correntes podem apresentar. Felizmente, aquele assunto pode ser estabelecido exatamente usando, ao

invés, de aproximações perturbativas, técnicas de bosonização seguindo o tratamento de [9]. Através da bosonização do campo espinorial mostramos que o setor da teoria formado pelo espinor e a “partícula de gauge” é equivalente a uma teoria de um escalar livre não massivo e um campo de sine-Gordon. Além do mais, a condição para a equivalência das correntes de Noether e topológica é simplesmente que o escalar livre não massivo deve ser constante. Então, fazemos uma redução quântica onde as excitações do escalar livre são eliminados, obtemos um submodelo onde a equivalência dessas correntes têm lugar exatamente ao nível quântico, deste modo provando que não há nenhuma anomalia. Portanto, isto implica que em tal teoria reduzida o confinamento dos graus de liberdade de “cor” associada à teoria realmente ocorre.

Uma propriedade importante do modelo considerado é que ele possui outro tipo de partícula espinorial. Isso é obtido através da re-fermionização do campo de sine-Gordon usando a equivalência bem conhecida entre os modelos de sine-Gordon e Thirring massivo [6, 7]. Naquele contexto os sólitons do modelo de sine-Gordon são interpretados como as partículas espinoriais da teoria de Thirring. Assim, isto conduz a uma analogia interessante com o que se espera que aconteça em QCD. As partículas espinoriais originais de nosso modelo que ficam confinados dentro dos sólitons tem o papel dos quarks, e a segunda partícula espinorial (Thirring), que são os sólitons, fazem o papel dos hadrons. A carga de Noether $U(1)$ também é confinada e é análoga a cor em QCD*. Neste sentido, nosso modelo constitui um laboratório excelente para testar idéias sobre confinamento, o papel dos sólitons em teoria quântica de campos, e dualidades que trocam o papel de sólitons e partículas fundamentais.

Também construímos soluções um-sóliton e dois-sóliton para nossa teoria usando duas técnicas: as transformações “dressing” e o método de Hirota. Usamos a representação de curvatura nula das equações de movimento com potenciais que toman valores na álgebra afim de Kaç-Moody $\widehat{sl}(2)$ (veja apêndice). Então a idéia básica é procurar configurações de vácuo onde os potenciais pertencem a subálgebras abelianas (até termos centrais) de $\widehat{sl}(2)$. Isso constitui na realidade uma álgebra de osciladores. O sólitons são obtidos realizando as transformações “dressing” a partir das configurações de vácuo com elementos de grupo que são exponenciais dos autovetores dos osciladores [11, 12, 13]. Tal procedimento conduz em forma natural à definição das funções tau [11], e então o método de Hirota pode ser também facilmente implementado. Discutimos as condições para as soluções serem reais, e

*No entanto para a identificação precisa dos graus de liberdade de cor do modelo ATM veja [10] (artigo 5 abaixo)

avaliamos as cargas topológicas. As interações dos sólitons são estudadas calculando os tempos de demora ou defasagens. Encontramos que na realidade os tempos de demora são iguais aos dos sólitons de sine-Gordon.

Um aspecto interessante das soluções é que quando os dois espinores de Dirac da teoria estão relacionados por *uma condição de realidade particular*, então o soliton ou o anti-soliton desaparece do espectro [†].

O problema seguinte que estudamos é a estrutura simplética do modelo. O método de Dirac [15] tem sido, por muito tempo, o método usual para se estudar sistemas vinculados. Usando seu método pode-se obter os colchetes de Dirac os quais são as pontes aos comutadores da mecânica quântica. Há alguns anos, Faddeev e Jackiw (FJ)[16, 17] propuseram o método da quantização simplética de sistemas vinculados definidos por Lagrangeanos de primeira ordem, o qual tornou-se um método alternativo ao método tradicional e bem sucedido de Dirac. No método de FJ, a classificação dos vínculos como sendo de primeira ou de segunda classe não é necessário.

O método segue, a grosso modo, resolvendo os vínculos e reduzindo o espaço de fase do sistema aos graus de liberdade independentes. Em [18] um procedimento construtivo para se obter as variáveis canônicas foi proposto. Uma variante dentro do método de FJ, conhecido como “quantização simplética”, foi desenvolvido pelos autores Wotzasek, Montani and Barcelos-Neto [19, 20, 21, 22]. Seguindo o espírito do trabalho de Dirac, esta proposta baseia-se na imposição da estabilidade dos vínculos sob a evolução temporal. Assim, os vínculos não são resolvidos mas sim imersos num espaço de fase estendido. Este é um método mais conveniente para se preservar algumas simetrias [19].

A tese é organizada como segue. Na seção 1 mostramos, usando técnicas de bosonização, que a equivalência clássica entre as correntes de Noether e topológica sobrevive ao processo de quantização, desta forma verificamos que um setor do campo de Dirac fica confinado dentro do sóliton (férmions) da teoria. Por tanto estabelecemos o mecanismo do tipo “bag model” descrito pelo modelo. Através da bosonização estabelecemos que a teoria desacopla-se num setor descrito pela teoria de sine-Gordon e escalares livres. Mediante o processo de re-fermionização podemos ver que o modelo massivo de Thirring também pode ser usado para descrever a dinâmica dos férmions. Desta forma o modelo constitui um laboratório para se testar ideias de dualidade soliton/partícula. Além do mais construímos as solu-

[†]Na verdade impondo condições de realidade aos campos de tal maneira que o Hamiltoniano fique limitado por baixo pode-se mostrar que o espectro do sub-modelo (ATM) contém o sóliton e o anti-sóliton no espectro, e interpretamos como indicativo da existência de uma dualidade envolvendo os sólitons e as partículas de spinor [14] (artigo 4 abaixo)

ções clássicas do tipo 1 e 2-sóliton do modelo e verificamos que estas satisfazem a equivalência das correntes e os seus tempos de demora após colisão mútua é igual ao do modelo de sine-Gordon. Na seção 3 estudamos o modelo como um sistema vinculado, no contexto dos formalismos de Faddeev-Jackiw e (vinculado) simplético (Wotzasek, Montani e Barcelos-Neto). Obtemos o modelo de sine-Gordon ou o modelo de Thirring massivo através do processo de redução Hamiltoniana, considerando a equivalência das correntes de Noether e topológica como um vínculo e após a fixação de calibre da teoria conforme.

Apresentamos vários apêndices concernentes à teoria das álgebras de Kac-Moody, representação de curvatura nula para o modelo CATM, representações de peso mais alto, operadores de vértice, bosonização e teorema de Darboux.

RELAÇÕES ENTRE OS MODELOS

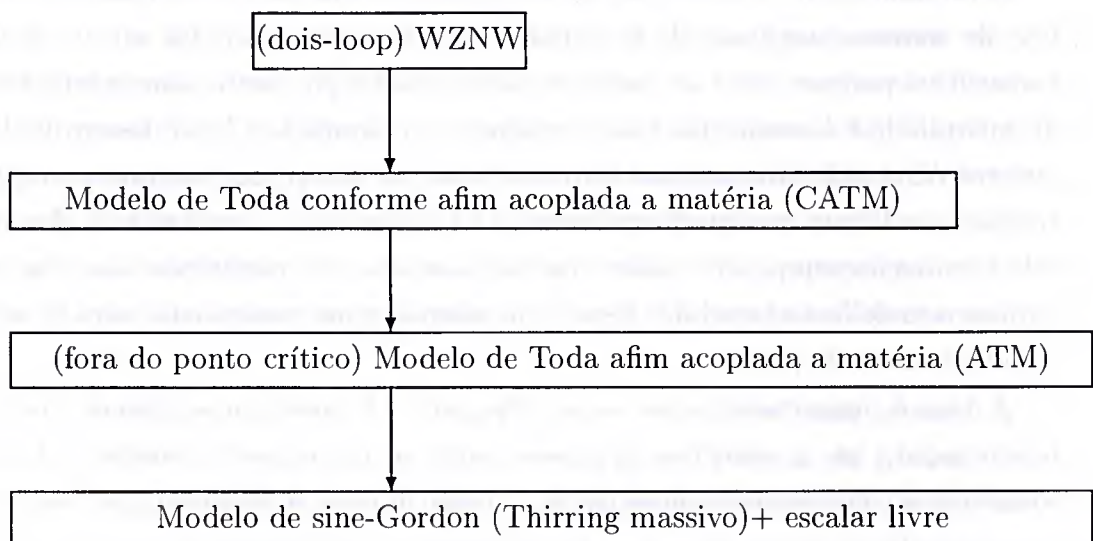


Fig. 1. A teoria (massiva e integrável) de Toda afim acoplada a matéria (ATM) e as teorias de campo associadas. *Redução Hamiltoniana*: (dois-loop) WZNW $\rightarrow$ CATM. *Quebra espontânea da simetria conforme*: CATM $\rightarrow$ ATM. *Redução simplética clássica*: ATM $\rightarrow$ sine-Gordon (Thirring massivo). *Bosonização*: ATM $\rightarrow$ sine-Gordon (Thirring massivo)+ escalar livre.

ALGUMAS EXTENSÕES

O material da presente tese já foi publicado. Os resultados principais apresentados aqui estão contidos nos seguintes artigos [23, 24]:

1. H.S. Blas and L.A. Ferreira, *Nucl. Phys.* **B571** (2000) 607.
2. H.S. Blas and B.M. Pimentel, *Ann. of Phys.* **282** (2000) 67.

Além do mais, estamos estudando atualmente outros aspectos do modelo, desta forma extendendo os resultados apresentados nesta tese, tais como: soluções 2-sóliton para campos de Toda reais (Lagrangeano real e o respectivo Hamiltoniano limitado por baixo), quebra da simetria conforme (CATM $\rightarrow$ ATM) através da teoria de perturbações (artigo 3); a correspondência clássica sóliton/partícula, quebra espontânea da simetria conforme através da quantização BRST e o mecanismo de quartetos de Kugo-Ojima (artigos 4 e 7); o espectro quântico do modelo ATM, o cálculo semiclássico do potencial confinante no modelo ATM e a conexão com QCD₂ (com 1 sabor e duas cores) na região de baixas energias e acoplamento forte (artigos 5 e 7); o modelo ATM como uma teoria de gauge para se implementar o mecanismo chamado “cheshire cat” em QCD (artigo 6). As respectivas extensões estão contidos nos seguintes artigos:

3. H.S. Blas, “The $\hat{sl}(2)$ affine Toda model coupled to the matter: solitons and confinement”, To appear in the *Proceedings of Hadron Physics 2000 Workshop*, Caraguatatuba, SP, Brazil, 10-15 Apr, 2000; hep-th/0005037.
4. H.S. Blas, “Affine $sl(2)^{(1)}$ Toda system coupled to matter I: Noether and topological currents equivalence and soliton/particle correspondence”, IFT-P.068/2000.
5. H.S. Blas, “Affine $sl(2)^{(1)}$ Toda system coupled to matter II: A QCD₂ motivated integrable field theory”, IFT-P.069/2000.
6. H.S. Blas, “The Affine Toda Model Coupled to the Matter and the ‘Cheshire Cat’ Mechanism”, (em andamento).

Os artigos 4 e 5 acima são extensões da 1a e 2a partes, respectivamente, do artigo [25]:

7. H.S. Blas, “Reduction of affine two-loop WZNW model, the Toda system coupled to the matter and topological confinement”, hep-th/0005130.

O método “dressing” usado na presente tese foi aplicado primeiramente às hierarquias AKNS com o intuito de ganhar intuição e experiência na obtenção de soluções sóliton [26]:

8. H.S. Blas, “Vector NLS hierarchy solitons revisited: dressing transformation and tau function approach”, solv-int/9912015.

Capítulo 2

Confinamento, sólitons e a equivalência entre os modelos de sine-Gordon e Thirring massivo

2.1 O modelo

Considere a teoria de campos em duas dimensões definido pelo Lagrangeano [8]

$$\frac{1}{k} \mathcal{L} = -\frac{1}{4} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} \partial_\mu \nu \partial^\mu \eta - \frac{1}{8} m_\psi^2 e^{2\eta} + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m_\psi \bar{\psi} e^{\eta+2i\varphi \gamma_5} \psi \quad (2.1)$$

onde φ , η e ν são campos escalares, e ψ é um espinor de Dirac. Note que, $\bar{\psi} \equiv \tilde{\psi}^T \gamma_0$, com $\tilde{\psi}$ sendo um segundo espinor de Dirac. No entanto, em muitas aplicações nesta tese tomaremos $\tilde{\psi}$ satisfazendo a condição de realidade

$$\tilde{\psi} = e_\psi \psi^* \quad (2.2)$$

onde e_ψ é uma constante real adimensional.

Como mostraremos, o sinal de e_ψ terá um papel importante na determinação do espectro e o tipo das soluções sóliton. As equações de movimento correspondentes são

$$\partial^2 \varphi = i4m_\psi \bar{\psi} \gamma_5 e^{\eta+2i\varphi \gamma_5} \psi, \quad (2.3)$$

$$\partial^2 \nu = -2m_\psi \bar{\psi} e^{\eta+2i\varphi \gamma_5} \psi - \frac{1}{2} m_\psi^2 e^{2\eta}, \quad (2.4)$$

$$\partial^2 \eta = 0, \quad (2.5)$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = m_\psi e^{\eta+2i\varphi \gamma_5} \psi, \quad (2.6)$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\psi} = m_\psi e^{\eta-2i\varphi \gamma_5} \tilde{\psi}, \quad (2.7)$$

A teoria (2.1) foi proposta em [8] como um exemplo de uma ampla classe de teorias integráveis chamada sistemas de Toda afim acoplados a campos de matéria

*. A representação de curvatura nula, a construção das soluções gerais, incluindo as do tipo solitônicas e muitas outras propriedades foi discutida em [8]. No apêndice A resumimos alguns desses resultados. Nesta seção discutiremos algumas características especiais daquela teoria ao nível quântico como também as soluções do tipo dois-sóliton. Começamos revisando as simetrias de (2.1).

Simetria conforme. O modelo (2.1) é invariante sob as transformações conformes

$$x_+ \rightarrow \hat{x}_+ = f(x_+), \quad x_- \rightarrow \hat{x}_- = g(x_-), \quad (2.8)$$

com f e g sendo funções analíticas; e com os campos transformando-se como

$$\begin{aligned} \varphi(x_+, x_-) &\rightarrow \hat{\varphi}(\hat{x}_+, \hat{x}_-) = \varphi(x_+, x_-), \\ e^{-\nu(x_+, x_-)} &\rightarrow e^{-\hat{\nu}(\hat{x}_+, \hat{x}_-)} = (f')^\delta (g')^\delta e^{-\nu(x_+, x_-)}, \\ e^{-\eta(x_+, x_-)} &\rightarrow e^{-\hat{\eta}(\hat{x}_+, \hat{x}_-)} = (f')^{\frac{1}{2}} (g')^{\frac{1}{2}} e^{-\eta(x_+, x_-)}, \\ \psi(x_+, x_-) &\rightarrow \hat{\psi}(\hat{x}_+, \hat{x}_-) = e^{\frac{1}{2}(1+\gamma_5) \log(f')^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(1-\gamma_5) \log(g')^{-\frac{1}{2}}} \psi(x_+, x_-), \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde o peso conforme δ , associado a $e^{-\nu}$, é arbitrário, e $\tilde{\psi}$ transforma-se da mesma forma como ψ .

Simetrias locais esquerda-direita. O Lagrangeano (2.1) é invariante sob a transformação local $U(1)_L \otimes U(1)_R$

$$\varphi \rightarrow \varphi + \xi_+(x_+) + \xi_-(x_-); \quad \nu \rightarrow \nu; \quad \eta \rightarrow \eta \quad (2.10)$$

e

$$\psi \rightarrow e^{-i(1+\gamma_5)\xi_+(x_+) + i(1-\gamma_5)\xi_-(x_-)} \psi; \quad \tilde{\psi} \rightarrow e^{i(1+\gamma_5)\xi_+(x_+) - i(1-\gamma_5)\xi_-(x_-)} \tilde{\psi} \quad (2.11)$$

Simetria global $U(1)$. Note-se que, tomando $\xi_+(x_+) = -\xi_-(x_-) = -\frac{1}{2}\theta$, com $\theta = \text{const.}$, obtemos uma transformação global $U(1)$

$$\varphi \rightarrow \varphi; \quad \nu \rightarrow \nu; \quad \eta \rightarrow \eta; \quad \psi \rightarrow e^{i\theta} \psi; \quad \tilde{\psi} \rightarrow e^{-i\theta} \tilde{\psi} \quad (2.12)$$

A correspondente corrente de Noether é

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad \partial_\mu J^\mu = 0. \quad (2.13)$$

Simetria chiral. Além do mais, se tomarmos $\xi_+(x_+) = \xi_-(x_-) = -\frac{1}{2}\alpha$, com $\alpha = \text{const.}$, obtemos a simetria axial global

$$\psi \rightarrow e^{i\gamma_5 \alpha} \psi; \quad \tilde{\psi} \rightarrow e^{-i\gamma_5 \alpha} \tilde{\psi}; \quad \varphi \rightarrow \varphi - \alpha; \quad \nu \rightarrow \nu; \quad \eta \rightarrow \eta \quad (2.14)$$

*O Lagrangeano (2.1) é obtido de (10.18) de [8] pelas substituições $\varphi \rightarrow i\varphi$ e $\tilde{\nu} \rightarrow \nu - \frac{1}{2}\varphi$.

com a correspondente corrente de Noether

$$J_5^\mu = \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi + \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi; \quad \partial_\mu J_5^\mu = 0 \quad (2.15)$$

Carga topológica.

Pode-se transformar o campo φ como $\varphi \rightarrow \varphi + n\pi$, mantendo todos os outros campos inalterados, que o Lagrangeano fica invariante. Isso significa que a teoria possui um número infinito de vácuos, e a carga topológica

$$Q_{\text{topol.}} \equiv \int dx j^0, \quad j^\mu = \frac{1}{\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi \quad (2.16)$$

pode assumir valores não triviais.

Simetria do tipo CP. Finalmente o Lagrangeano (2.1) é invariante sob a transformação

$$x_+ \leftrightarrow x_-; \quad \psi \leftrightarrow i\epsilon\gamma_0\tilde{\psi}; \quad \tilde{\psi} \leftrightarrow -i\epsilon\gamma_0\psi; \quad \varphi \leftrightarrow \varphi; \quad \eta \leftrightarrow \eta; \quad \nu \leftrightarrow \nu \quad (2.17)$$

onde $\epsilon = \pm 1$. Note que impondo a condição de realidade (2.2) quebra-se tal simetria de CP, para qualquer valor real do e_ψ [†].

Agora vem uma propriedade muito interessante deste modelo. A conservação da corrente vetorial $U(1)$ (2.13) e da corrente chiral (2.15) pode ser usado para se mostrar que existem duas cargas dadas por

$$\mathcal{J} = -\tilde{\psi}^T (1 + \gamma_5) \psi + \partial_+ \varphi, \quad \bar{\mathcal{J}} = \tilde{\psi}^T (1 - \gamma_5) \psi + \partial_- \varphi \quad (2.18)$$

satisfazendo

$$\partial_- \mathcal{J} = 0; \quad \partial_+ \bar{\mathcal{J}} = 0 \quad (2.19)$$

Note-se, de (2.9), que as correntes $\mathcal{J}$ e $\bar{\mathcal{J}}$ têm pesos conformes (1,0) e (0,1) respectivamente. Pode-se agora realizar uma redução (Hamiltoniana) do modelo impondo os vínculos

$$\mathcal{J} = 0; \quad \bar{\mathcal{J}} = 0 \quad (2.20)$$

O grau de liberdade eliminado por tal redução não corresponde às excitações de quaisquer dos campos que aparecem no Lagrangeano (2.1). Como mostramos abaixo, corresponde às excitações de um campo livre que é uma combinação não-linear daqueles em (2.1).

Pode-se conferir facilmente que os vínculos (2.20) são equivalentes a

$$\frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi = \frac{1}{\pi} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (2.21)$$

[†]Note-se que a simetria de CP é preservada se tomarmos $e_\psi = \pm i$.

Então , no modelo reduzido, a corrente de Noether (2.13) é proporcional à corrente topológica (2.16).

Aquele fato tem consequências profundas nas propriedades de tal teoria. Por exemplo, isto implica (tomando $\tilde{\psi}$ sendo o complexo conjugado de ψ) que a densidade de carga $\psi^\dagger \psi$ é proporcional à derivada espacial de φ . Por conseguinte, o campo de Dirac é confinado em regiões onde o campo φ não é constante. O melhor exemplo disso é a solução 1-sóliton de (2.1) que foi calculado em [8] e é dada por

$$\begin{aligned}\varphi &= 2 \arctan \left(\exp \left(2m_\psi (x - x_0 - vt) / \sqrt{1 - v^2} \right) \right) \\ \psi &= e^{i\theta} \sqrt{m_\psi} e^{m_\psi (x - x_0 - vt) / \sqrt{1 - v^2}} \begin{pmatrix} \left(\frac{1-v}{1+v} \right)^{1/4} \frac{1}{1 + i e^{2m_\psi (x - x_0 - vt) / \sqrt{1 - v^2}}} \\ - \left(\frac{1+v}{1-v} \right)^{1/4} \frac{1}{1 - i e^{2m_\psi (x - x_0 - vt) / \sqrt{1 - v^2}}} \end{pmatrix} \\ \nu &= -\frac{1}{2} \log \left(1 + \exp \left(4m_\psi (x - x_0 - vt) / \sqrt{1 - v^2} \right) \right) - \frac{1}{8} m_\psi^2 x + x_- \\ \eta &= 0\end{aligned}\tag{2.22}$$

e a solução para $\tilde{\psi}$ é o complexo conjugado de ψ . Note que, de (2.16), na verdade temos $Q_{\text{topol.}} = 1$ para a solução (2.22)[†].

Note-se que a solução para φ é exatamente o sóliton de sine-Gordon, e então $\partial_x \varphi$ é não nulo em uma região da ordem de m_ψ^{-1} . Além do mais, a solução para ψ satisfaz as equações de movimento do modelo massivo de Thirring [27]. Pode-se verificar que (2.22) satisfaz (2.21), e assim é uma solução do modelo reduzido. Então , o Campo de Dirac deve estar confinado dentro do sóliton. Pode-se verificar que (2.22) realmente confirma aquele fato.

Mostramos que a condição (2.21) junto com as equações de movimento para os espinores de Dirac (2.6)-(2.7) implicam a equação de movimento para φ , isto é (2.3). Então no modelo reduzido, definido pelos vínculos (2.20), pode-se substituir uma equação diferencial de segunda ordem, i.e. (2.3), pelas duas equações de primeira ordem, i.e. (2.21).

Poderia-se pensar em igualar a corrente chiral (2.15) à corrente topológica associada a um campo escalar. Porém, as equações de movimento implicam que tal escalar tem que ser um campo livre. Então , poderia-se considerar um sub-modelo de (2.1) definido pelos vínculos

$$\lambda \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \eta = \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi + \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi\tag{2.23}$$

onde λ é um parâmetro. Pode-se verificar que tais vínculos são compatíveis com as equações de movimento. Porém, não usaremos aquela observação no que se segue.

[†]Note-se que definimos a carga topológica em (2.16) como sendo duas vezes aquela da referência [8] para fazer isto um número inteiro.

2.2 A teoria quântica

Os resultados discutidos acima são verdadeiros ao nível clássico. A questão que enfocamos agora é se eles permanecem verdadeiros ao nível quântico, e o confinamento do espinor de Dirac acontece. A resposta é afirmativa, e pode ser obtido elegantemente usando métodos de bosonização [6, 7]. Witten considerou um modelo semelhante em [9], originalmente proposto por Kogut e Sinclair [28], e nós usaremos os métodos dele. O modelo deles difere de (2.1) em três pontos: *i*) não contém o par de campos (η, ν) , e então não é invariante conforme; *ii*) o sinal do termo cinético do campo φ em (2.1) é oposto com respeito ao termo correspondente ao deles; *iii*) o modelo deles possui um só espinor de Dirac.

Nas considerações sobre a teoria quântica, a ser feita nesta seção, imporemos a condição de realidade (2.2) e por conseguinte o Lagrangeano (2.1) dependerá da constante real e_ψ . Então nesta seção temos $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$.

Introduzimos um campo bosônico novo c por meio da bosonização do espinor de Dirac ψ como [9, 29]

$$i : \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi : = \frac{\alpha^2}{2\pi} : (\partial_\mu c)^2 : \quad (2.24)$$

$$: \bar{\psi} (1 \pm \gamma_5) \psi : = -\frac{\mu}{2\pi} : e^{(\pm i 2\alpha c)} : \quad (2.25)$$

$$: \bar{\psi} \gamma^\mu \psi : = -\frac{\alpha}{\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu c \quad (2.26)$$

onde α é um parâmetro real, e μ é um parâmetro de massa usado como um regulador infravermelho.

Re-escrevendo o último termo de (2.1) como

$$\bar{\psi} e^{\eta + 2i\varphi \gamma_5} \psi = e^\eta \left(\bar{\psi} \frac{(1 + \gamma_5)}{2} \psi e^{2i\varphi} + \bar{\psi} \frac{(1 - \gamma_5)}{2} \psi e^{-2i\varphi} \right) \quad (2.27)$$

obtemos que o Lagrangeano (2.1) é

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \nu \partial^\mu \eta - \frac{m_\psi^2}{8} e^{2\eta} \\ & + e_\psi \left(\frac{\alpha^2}{2\pi} (\partial_\mu c)^2 + \frac{\mu m_\psi}{4\pi} e^\eta \left(e^{2i(\alpha c + \varphi)} + e^{-2i(\alpha c + \varphi)} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Introduzimos as combinações lineares

$$\phi \equiv 2 \frac{(\alpha c + \varphi)}{\sqrt{|4\pi - 8e_\psi|}}, \quad \rho \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(2e_\psi \alpha c + \pi \varphi)}{\sqrt{|4\pi - 8e_\psi|}} \quad (2.29)$$

Após re-escalar os campos

$$\rho \rightarrow \frac{\rho}{\sqrt{k}} \quad \nu \rightarrow \frac{\nu}{k} \quad \phi \rightarrow \frac{\phi}{\sqrt{k}} \quad (2.30)$$

escrevemos o Lagrangeano

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \epsilon(e_\psi) (\partial_\mu \rho)^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \nu \partial^\mu \eta - \frac{k}{8} m_\psi^2 e^{2\eta} + \\ & e_\psi \left(\frac{1}{2} \epsilon(e_\psi) (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{m^2}{2} e^\eta \cos(\phi) \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde introduzimos

$$\beta \equiv \sqrt{\frac{|4\pi - 8e_\psi|}{k}}; \quad m^2 \equiv \frac{\mu}{2\pi} |4\pi - 8e_\psi| m_\psi; \quad \epsilon(e_\psi) \equiv \text{sinal}(4\pi - 8e_\psi) \quad (2.32)$$

Então ρ é um campo escalar livre e ϕ é um campo de sine-Gordon acoplado a η . No entanto, para se ter os termos cinético e potencial associados a ϕ definindo a teoria unitária de sine-Gordon imporemos

$$\epsilon(e_\psi) = 1; \quad e_\psi < \frac{\pi}{2} \quad (2.33)$$

Claramente, no limite $e_\psi \rightarrow \pi/2$, ϕ torna-se um campo não massivo livre.

Agora discutimos a versão quântica da redução (2.20). Como $\tilde{\psi}^T (1 \pm \gamma_5) \psi = e_\psi \bar{\psi} (\gamma_0 \pm \gamma_1) \psi$ (veja (2.2)), segue de (2.18), (2.26) e (2.29) que ($\epsilon^{01} = 1$)

$$\mathcal{J} = \frac{\sqrt{|4\pi - 8e_\psi|}}{\sqrt{2\pi}} \partial_+ \rho; \quad \bar{\mathcal{J}} = \frac{\sqrt{|4\pi - 8e_\psi|}}{\sqrt{2\pi}} \partial_- \rho \quad (2.34)$$

Então os vínculos (2.20) são equivalentes a $\rho = \text{const.}$, e por conseguinte o grau de liberdade eliminado por eles correspondem ao campo ρ .

A redução ao nível quântico pode ser realizada como segue. Desde que o campo escalar ρ é desacoplado dos outros campos da teoria (2.31), podemos denotar o espaço de estados como $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\rho \otimes \mathcal{H}_0$, onde $\mathcal{H}_\rho$ é o espaço de Fock do escalar não massivo livre ρ , e $\mathcal{H}_0$ representa os estados do resto da teoria. Denotamos $\rho = \rho^{(+)} + \rho^{(-)}$, onde $\rho^{(+)}(\rho^{(-)})$ corresponde à parte que contém os operadores de aniquilação (criação) na sua expansão em ondas planas. A redução corresponde à restrição da teoria aos estados satisfazendo

$$\partial_\pm \rho^{(+)} | \Psi \rangle = 0 \quad (2.35)$$

Tomando o complexo conjugado temos

$$\langle \Psi | \partial_\pm \rho^{(-)} = 0 \quad (2.36)$$

e conseqüentemente o valor de expectação de $\partial_{\pm}\rho$ anula-se em aqueles estados. Na verdade, se $|\Psi\rangle$ e $|\Psi'\rangle$ são dois estados satisfazendo (2.35), então

$$\langle\Psi'|\partial_{\pm}\rho|\Psi\rangle=\langle\Psi'|\partial_{\pm}\rho^{(-)}+\partial_{\pm}\rho^{(+)}|\Psi\rangle=0 \quad (2.37)$$

Isto proporciona a correspondência aos vínculos clássicos (2.20). Então o espaço de Hilbert da teoria reduzida é $\mathcal{H}_c=|\Psi\rangle\otimes\mathcal{H}_0$.

Para a teoria descrita por $\mathcal{H}_c$, a equivalência entre as correntes de Noether e topológica, dado por (2.21), mantém-se ao nível quântico, já que como mostramos antes, (2.21) é equivalente as correntes $\mathcal{J}$ e $\bar{\mathcal{J}}$ sendo iguais a zero. Note que tal equivalência quântica é exata, já que não usamos métodos semi-clássicos ou perturbativos.

Uma das conseqüências daquela equivalência quântica é que nos estados de $\mathcal{H}_c$, como o um-sóliton (2.22), onde a derivada espacial de φ é localizada [§], tem-se que o espinor ψ é confinado, já que de (2.21), $\langle\partial_x\varphi\rangle\sim\langle\psi^\dagger\psi\rangle$. Então, mostramos que o confinamento de ψ tem lugar na teoria quântica.

Note que a redução quântica (2.35) não viola a simetria conforme do Lagrangeano (2.31), porque não estamos restringindo para uma constante não nula, o valor de esperado de qualquer quantidade de peso conforme não nulo.

A teoria descrita por (2.31) é certamente não-unitária porque os termos cinéticos têm em geral sinais diferentes, e assim a energia é ilimitada por baixo ¶. A redução (2.35) elimina parte do problema, desde a que energia cinética associada ao campo ρ anula-se em $\mathcal{H}_c$. Ainda resta a não unitariedade associada com o sistema (η, ν) . Podemos executar uma redução adicional restringindo àqueles estados de $\mathcal{H}_0$ satisfazendo

$$\partial_{\pm}\eta^{(+)}|\Psi_0\rangle=0 \quad (2.38)$$

onde denotamos o campo livre η como $\eta=\eta^{(+)}+\eta^{(-)}$, com $\eta^{(+)}(\eta^{(-)})$ correspondente a parte que contém os operadores de aniquilação (criação) na expansão em termos de ondas planas. Por conseguinte, usando argumentos semelhantes aos usados anteriormente, o valor de esperado de $\partial_{\pm}\eta$ anula-se em tais estados,

$$\langle\Psi_0|\partial_{\pm}\eta|\Psi_0\rangle=0 \quad (2.39)$$

Além do mais, segue que

$$\langle\Psi_0|e^\eta|\Psi_0\rangle=\text{const.} \quad (2.40)$$

[§]Note-se que para os estados de $\mathcal{H}_c$, onde (2.37) é verdadeiro, tem-se de (2.29) que $\langle\partial_{\pm}\phi\rangle\sim\langle\partial_{\pm}\varphi\rangle$.

¶Para a escolha $e_\psi<0$, os termos cinéticos para ρ e ϕ têm o mesmo sinal.

Note que o operador e^η tem pesos conformes $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, e desde que está presente no Lagrangeano (2.31), segue que tal redução quebra a simetria conforme. Tal rompimento de simetria se assemelha ao mecanismo de Higgs desde que gera massa para o campo ϕ , e este é proporcional ao valor esperado de e^η [30].

Depois das reduções (2.35) e (2.38), o campo ν desacopla-se do resto e ficamos com uma teoria unitária que é a teoria de sine-Gordon do campo ϕ . Na realidade, como mostrou Coleman [6], a teoria de sine-Gordon é ilimitada por baixo se $\beta^2 > 8\pi$. Então, de (2.32) temos que ter

$$\beta^2 < 8\pi \quad \rightarrow \quad k > \frac{|\pi - 2e_\psi|}{2\pi} \quad (2.41)$$

Uma propriedade importante do modelo em consideração é que este apresenta outro campo de espinor que não é confinado. Realmente, usando as regras de bosonização novamente, podemos introduzir um espinor χ como

$$i : \bar{\chi} \gamma^\mu \partial_\mu \chi : = \frac{\beta^2}{8\pi} : (\partial\phi)^2 : \quad (2.42)$$

$$: \bar{\chi} \chi : = -\frac{\bar{\mu}}{2\pi} : \cos(\beta\phi) : \quad (2.43)$$

$$: \bar{\chi} \gamma^\mu \chi : = -\frac{\beta}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \quad (2.44)$$

O Lagrangeano (2.31) torna-se (assumindo (2.33))

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu \rho)^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \nu \partial^\mu \eta - \frac{k}{8} m_\psi^2 e^{2\eta} + e_\psi \left(i \bar{\chi} \gamma^\mu \partial_\mu \chi - m_\chi e^\eta \bar{\chi} \chi - \frac{g}{2} (\bar{\chi} \gamma^\mu \chi)^2 \right) \quad (2.45)$$

com

$$\frac{4\pi}{\beta^2} = 1 + \frac{g}{\pi} \quad m_\chi = \frac{\mu}{\bar{\mu}} k m_\psi \quad (2.46)$$

Então conseguimos um modelo massivo de Thirring acoplado a η mais o campo escalar livre ρ . Depois das reduções (2.35) e (2.38) a teoria torna-se puramente o modelo massivo de Thirring. Note que χ torna-se um espinor massivo livre [6] para $\beta^2 = 4\pi$ ou $k = |\pi - 2e_\psi| / \pi$.

As propriedades da teoria (2.1) ao nível quântico são bastante notáveis. No regime de acoplamento fraco, i.e. k pequeno, as excitações ao redor do vacuo correspondem ao espinor ψ e a partícula de “calibre” φ . A simetria $U(1)$ (2.12) não é quebrada e os estados carregados correspondem às partículas ψ . Considere agora esses estados satisfazendo (2.35) e observe as flutuações ao redor dos estados correspondentes, por exemplo, à solução um-sóliton (2.22). As partículas ψ desaparecem

do espectro desde que eles estão confinados dentro do sólito. As partículas ψ só podem viver fora do sólito somente nos estados com carga $U(1)$ nula. Porém, a teoria apresenta outra partícula espinorial que corresponde às excitações do campo de Thirring χ , que tem carga $U(1)$ zero. Porém, de acordo com a interpretação de Coleman sobre a equivalência sine-Gordon/Thirring massivo, tais excitações correspondem aos mesmos sólitos. Então, podemos fazer uma analogia com o que é esperado que aconteça em QCD. As partículas ψ e χ fazem o papel dos quarks e hádrons respectivamente. A carga $U(1)$ é análoga a cor em QCD, uma vez que também é confinada.

Outro ponto importante, observado pela primeira vez em [9], é que embora a teoria (2.1) apresenta a simetria quiral (2.14), esta apresenta estados espinoriais massivos. A razão é bastante simples e elegante. Usando a regra de bosonização (2.26) e as redefinições de campos (2.29), temos que a corrente quiral (2.15) pode ser escrita na forma

$$J_5^\mu = \sqrt{\frac{|\pi - 2e_\psi|}{2\pi}} \partial^\mu \rho \quad (2.47)$$

Então, o espinor χ não contribui a tal corrente e assim tem quiralidade zero. Portanto, o fato que este adquire massa não é incompatível com a simetria quiral. O espinor com quiralidade não nula é ψ e desaparece do espectro no setor confinado da teoria. A possibilidade de se ter simetria quiral e férmions massivos é outra propriedade notável da teoria (2.1).

Por estas razões o modelo (2.1) constitui um laboratório excelente para se testar idéias sobre confinamento, o papel dos sólitos em teorias de campo quânticas, e transformações de dualidade que trocam o papel de sólitos e partículas fundamentais. Com esta motivação agora estudaremos as soluções dois-sólito e as suas interações.

2.3 Soluções Sólito

É bem conhecida a relevância das soluções clássicas localizadas das equações de campo relativísticas não lineares para as correspondentes teorias quânticas. Em particular, os sólitos podem ser associados a estados quânticos de partículas estendidas. Então, examinaremos as soluções clássicas do tipo sólito para adquirir intuição com respeito ao espectro quântico do modelo, do mesmo modo que já é conhecido no modelo notável de sine-Gordon. Mostramos que, ao nível clássico, as soluções para os campos φ e ψ compartilham algumas características dos modelos de sine-Gordon e de Thirring massivo, respectivamente. Vimos na seção prévia,

usando métodos de bosonização que ao nível quântico a teoria (2.1) é equivalente à (2.31). Porém, os espaços de soluções clássicas das duas teorias não são os mesmos. Não podem ser usadas (2.24) -(2.26), ao nível clássico, como mudança de variáveis para se relacionar soluções clássicas de uma teoria a outra. As regras de bosonização (2.24)-(2.26) são relações puramente quânticas.

As soluções 1-sóliton de (2.1) foram calculados em [8] usando o método das transformações “dressing”. Aqui, construímos as soluções 2-sóliton usando os mesmos métodos. Começamos com a representação de curvatura zero das equações de movimento da teoria

$$[\partial_+ + A_+ \partial_- + A_-] = 0 \quad (2.48)$$

onde os índices $\pm$ representam as variáveis de cone de luz $x_{\pm} = t \pm x$. Para a teoria (2.1) as conexões $A_{\pm}$ pertencem à álgebra de Kaç-Moody $\hat{\mathcal{G}} \equiv \hat{sl}(2)$, e são dados no apêndice A (veja (A.14)). Desde que (2.48) implica que as conexões devam ser planas, pode-se escrever como $A_{\mu} = -\partial_{\mu} T T^{-1}$, com T sendo um elemento de grupo obtido pela exponenciação de $\hat{\mathcal{G}}$. Além do mais, usando uma gradação integral de $\hat{\mathcal{G}}$, i.e. $\hat{\mathcal{G}} = \oplus_n \hat{\mathcal{G}}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, pode-se fazer uma decomposição de Gauss generalizada do elemento $T \rho T^{-1}$, com ρ sendo um determinado elemento constante do grupo. Denotamos por $\hat{\mathcal{G}}_{<0}$, $\hat{\mathcal{G}}_0$ e $\hat{\mathcal{G}}_{>0}$ as subálgebras geradas pelos elementos de grau negativo, zero e positivo respectivamente. Então

$$T \rho T^{-1} = (T \rho T^{-1})_{<0} (T \rho T^{-1})_0 (T \rho T^{-1})_{>0} \quad (2.49)$$

onde $(T \rho T^{-1})_{<0}$, $(T \rho T^{-1})_0$ e $(T \rho T^{-1})_{>0}$ são elementos pertencentes aos subgrupos cujas álgebras são $\hat{\mathcal{G}}_{<0}$, $\hat{\mathcal{G}}_0$ e $\hat{\mathcal{G}}_{>0}$ respectivamente. Introduzimos

$$T^{\rho} \equiv (T \rho T^{-1})_{>0} T = (T \rho T^{-1})_0^{-1} (T \rho T^{-1})_{<0}^{-1} T \rho \quad (2.50)$$

Tal relação define uma transformação nas conexões

$$A_{\mu} = -\partial_{\mu} T T^{-1} \quad \rightarrow \quad A_{\mu}^{\rho} = -\partial_{\mu} T^{\rho} T^{\rho-1} \quad (2.51)$$

que preservam as suas estruturas de gradação. Então, conhecendo uma solução T para a curvatura zero pode-se obter uma nova solução T^{ρ} , determinada pelo elemento de grupo constante ρ . Ressaltamos que o fato de o elemento transformado T^{ρ} pode ser escrito de dois modos diferentes como em (2.50) tem um papel crucial no método “dressing”. Garante que a conexão transformada está no mesmo calibre que o original, e então permite que a transformação “dressing” (2.51) seja uma transformação dos campos físicos que definem a teoria.

Um procedimento bastante geral para construir soluções sóliton em teorias integráveis, usando tais transformações “dressing”, é descrito em [11]. Constitui uma generalização da denominada “especialização solitónica” no contexto da solução de Leznov-Saveliev para os modelos do tipo Toda [12, 13, 31]. Começa-se procurando uma “solução de vácuo” tal que as conexões $A_{\pm}$, quando avaliadas nelas, pertençam a uma álgebra de osciladores, i.e. uma subálgebra abeliana (a menos de termos centrais) de Kac-Moody. Procura-se então os autovetores V_i , em $\hat{\mathcal{G}}$, de tais osciladores. Os sólitons pertencem às órbitas das soluções obtidas pela transformação “dressing” feitas por elementos da forma $\rho = e^{V_{i_1}} e^{V_{i_2}} \dots e^{V_{i_n}}$.

Para a teoria (2.1) fazemos a transformação “dressing” começando da solução de vácuo

$$\varphi = \psi = \tilde{\psi} = \eta = 0, \quad \nu = -\frac{1}{8}m_{\psi}^2 x_+ x_- \equiv \nu_0 \quad (2.52)$$

A conexão avaliada naquela solução é dada por (veja (A.14))

$$A_+^{\text{vac}} = -E_2 \quad A_-^{\text{vac}} = E_{-2} + \frac{1}{8}m_{\psi}^2 x_+ C \quad (2.53)$$

Além do mais, temos

$$A_{\pm}^{\text{vac}} = -\partial_{\pm} T_{\text{vac}} T_{\text{vac}}^{-1} \quad \text{com} \quad T_{\text{vac}} = e^{x_+ E_2} e^{-x_- E_{-2}} \quad (2.54)$$

Como $E_{\pm 2} = \frac{1}{4}m_{\psi}H^{\pm 1}$ (veja (A.15)) os osciladores correspondentes são $H^{\pm n}$ e sua álgebra é dado por (A.4). Os autovetores dos osciladores são dados por

$$V_{\pm}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n} E_{\pm}^n \quad (2.55)$$

e

$$\begin{aligned} [E_2, V_{\pm}(z)] &= \pm \frac{1}{2}m_{\psi}z V_{\pm}(z), \\ [E_{-2}, V_{\pm}(z)] &= \pm \frac{1}{2}\frac{m_{\psi}}{z} V_{\pm}(z) \end{aligned} \quad (2.56)$$

Note-se que $V_+(z)$ e $V_-(-z)$ têm os mesmos autovalores, e tal degenerescência é relacionada à simetria global $U(1)$ (2.12) discutida em [8].

As soluções na órbita do vácuo (2.52), sob as transformações “dressing”, são dados por [8]

$$e^{-i\varphi} = \frac{\tau_1}{\tau_0}, \quad e^{-(\nu - \nu_0 - \frac{i}{2}\varphi)} = \tau_0 \quad (2.57)$$

e

$$\psi = \sqrt{\frac{m_{\psi}}{4i}} \begin{pmatrix} \tau_R/\tau_0 \\ -\tau_L/\tau_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\psi} = -\sqrt{\frac{m_{\psi}}{4i}} \begin{pmatrix} \tilde{\tau}_R/\tau_1 \\ \tilde{\tau}_L/\tau_0 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

onde foram introduzidas as funções tau

$$\begin{aligned}\tau_0 &\equiv \langle \hat{\lambda}_0 | G | \hat{\lambda}_0 \rangle, & \tau_1 &\equiv \langle \hat{\lambda}_1 | G | \hat{\lambda}_1 \rangle \\ \tau_R &\equiv \langle \hat{\lambda}_0 | E_-^1 G | \hat{\lambda}_0 \rangle, & \tilde{\tau}_R &\equiv \langle \hat{\lambda}_1 | E_+^0 G | \hat{\lambda}_1 \rangle \\ \tau_L &\equiv \langle \hat{\lambda}_1 | G E_-^0 | \hat{\lambda}_1 \rangle, & \tilde{\tau}_L &\equiv \langle \hat{\lambda}_0 | G E_+^{-1} | \hat{\lambda}_0 \rangle\end{aligned}\quad (2.59)$$

e onde

$$G \equiv T_{\text{vac}} \rho T_{\text{vac}}^{-1} = e^{x+E_2} e^{-x-E_{-2}} \rho e^{x-E_{-2}} e^{-x+E_2} \quad (2.60)$$

Denotamos $|\hat{\lambda}_0\rangle$ e $|\hat{\lambda}_1\rangle$ os estados de peso mais alto das duas representações fundamentais da álgebra de Kac-Moody afim $\hat{sl}(2)$, respectivamente a representação escalar e espinorial. Estes satisfazem

$$H^0 | \hat{\lambda}_0 \rangle = 0, \quad H^0 | \hat{\lambda}_1 \rangle = |\hat{\lambda}_1 \rangle, \quad C | \hat{\lambda}_j \rangle = |\hat{\lambda}_j \rangle \quad (2.61)$$

com $j = 0, 1$, e além do mais

$$E_+^0 | \hat{\lambda}_j \rangle = H^n | \hat{\lambda}_j \rangle = E_{\pm}^n | \hat{\lambda}_j \rangle = 0, \quad \text{para } n > 0 \quad (2.62)$$

Note-se que fazendo a mudança $\rho \rightarrow h \rho h^{-1}$, com $h = e^{i\theta H^0/2}$, obtemos $G \rightarrow h G h^{-1}$, já que h comuta com $E_{\pm 2}$. Então, as funções tau transformam-se como

$$\tau_0 \rightarrow \tau_0, \quad \tau_1 \rightarrow \tau_1, \quad \tau_R \rightarrow e^{i\theta} \tau_R, \quad \tau_L \rightarrow e^{i\theta} \tau_L, \quad \tilde{\tau}_L \rightarrow e^{-i\theta} \tilde{\tau}_L, \quad \tilde{\tau}_R \rightarrow e^{-i\theta} \tilde{\tau}_R \quad (2.63)$$

o qual corresponde à transformação global $U(1)$ (2.12).

Estaremos interessados nas soluções clássicas satisfazendo as relações (2.21). Em termos das funções tau definidas acima aquelas relações podem ser escritas como

$$\begin{aligned}\tau_0 \partial_+ \tau_1 - \tau_1 \partial_+ \tau_0 &= \frac{1}{2} m_\psi \tau_R \tilde{\tau}_R \\ \tau_0 \partial_- \tau_1 - \tau_1 \partial_- \tau_0 &= \frac{1}{2} m_\psi \tau_L \tilde{\tau}_L\end{aligned}\quad (2.64)$$

Usando (2.59)-(2.60) podemos escrever (2.64) como as relações algébricas

$$\langle G \rangle_0 \langle H^1 G \rangle_1 - \langle G \rangle_1 \langle H^1 G \rangle_0 = 2 \langle E_-^1 G \rangle_0 \langle E_+^0 G \rangle_1 \quad (2.65)$$

$$\langle G \rangle_0 \langle G H^{-1} \rangle_1 - \langle G \rangle_1 \langle G H^{-1} \rangle_0 = 2 \langle G E_+^{-1} \rangle_0 \langle G E_-^0 \rangle_1$$

onde denotamos $\langle \hat{\lambda}_a | X | \hat{\lambda}_a \rangle \equiv \langle X \rangle_a$.

Estas relações determinam o elemento de group ρ que fornece as soluções satisfazendo as relações (2.21).

Pode-se usar (2.57)-(2.58) para escrever as equações de movimento da teoria (2.1) em termos das funções tau. As equações de movimento (2.3)-(2.4) para φ e ν implicam (para $\eta = 0$)

$$\tau_0 \partial_+ \partial_- \tau_0 - \partial_+ \tau_0 \partial_- \tau_0 = \frac{1}{4} m_\psi^2 \tau_L \tilde{\tau}_R \quad (2.66)$$

$$\tau_1 \partial_+ \partial_- \tau_1 - \partial_+ \tau_1 \partial_- \tau_1 = \frac{1}{4} m_\psi^2 \tau_R \tilde{\tau}_L \quad (2.67)$$

As equações de movimento (2.6)-(2.7) para os espinores de Dirac implicam (para $\eta = 0$)

$$\tau_0 \partial_- \tau_R - \tau_R \partial_- \tau_0 = -\frac{1}{2} m_\psi \tau_1 \tau_L \quad (2.68)$$

$$\tau_1 \partial_+ \tau_L - \tau_L \partial_+ \tau_1 = \frac{1}{2} m_\psi \tau_0 \tau_R \quad (2.69)$$

$$\tau_1 \partial_- \tilde{\tau}_R - \tilde{\tau}_R \partial_- \tau_1 = \frac{1}{2} m_\psi \tau_0 \tilde{\tau}_L \quad (2.70)$$

$$\tau_0 \partial_+ \tilde{\tau}_L - \tilde{\tau}_L \partial_+ \tau_0 = -\frac{1}{2} m_\psi \tau_1 \tilde{\tau}_R \quad (2.71)$$

As relações (2.66)-(2.71) são as equações bilineares de Hirota [32] para o modelo (2.1). Note que as equações de primeira ordem (2.64) e (2.68)-(2.71) implicam que a diferença de (2.66) e (2.67) deve ser satisfeita, mas não cada uma separadamente.

As soluções N -sóliton são construídas considerando o elemento de grupo constante ρ da transformação “dressing” como um produto de exponenciais dos autovetores de $E_{\pm 2}$ (veja (2.56)). Desde que $V_+(z)$ e $V_-(-z)$ têm o mesmo autovalor, consideramos o exponencial de uma combinação linear deles, i.e.

$$\rho_{N\text{-sol}} \equiv \prod_{l=1}^N e^{V(a_{\pm}^{(l)}, z_l)} \quad \text{com} \quad V(a_{\pm}^{(l)}, z_l) \equiv \sqrt{i} \left(a_+^{(l)} V_+(z_l) + a_-^{(l)} V_-(-z_l) \right); \quad (2.72)$$

Na realidade, se para um determinado l (ou mais que um) o parâmetro $a_+^{(l)}$ ou $a_-^{(l)}$ anula-se não é possível obter soluções N -sóliton. Por exemplo, no caso do 1-sóliton obtem-se uma solução nula para φ [8]. O fato que as soluções N -sóliton precisam de dois autovalores degenerados, i.e. $V_+(z)$ e $V_-(-z)$, é o que faz com que eles transportem, além da carga topológica, a carga “elétrica” $U(1)$ (2.13).

O correspondente elemento de grupo (2.60) torna-se

$$G_{N\text{-sol}} = \prod_{l=1}^N \exp \left(e^{\Gamma(z_l)} V(a_{\pm}^{(l)}, z_l) \right) \quad (2.73)$$

com

$$\Gamma(z_l) = \frac{1}{2} m_\psi \left(z_l x_+ - \frac{1}{z_l} x_- \right) \equiv \gamma_l (x - v_l t) \quad (2.74)$$

e assim

$$\gamma_l = \frac{1}{2} m_\psi \left(z_l + \frac{1}{z_l} \right) = (\text{sinal } z_l) \frac{m_\psi}{\sqrt{1 - v_l^2}} \quad v_l = \frac{1 - z_l^2}{1 + z_l^2} \quad (2.75)$$

Note que precisamos que z_l seja real para que as velocidades dos sólitons sejam menores que a velocidade da luz, i.e. $|v_l| \leq 1$. Na verdade, as quantidades z_l são relacionadas à rapidez θ_l dos sólitons através de

$$z_l \equiv \epsilon_l e^{\theta_l} \quad (2.76)$$

com $\epsilon_l = \pm 1$, e assim de (2.74)

$$\Gamma(\theta_l) = \epsilon_l m_\psi (x \cosh \theta_l + t \sinh \theta_l) \quad (2.77)$$

Um ponto importante nos cálculos envolvidos na construção das soluções sóliton é o fato que é muito mais fácil trabalhar com os operadores de vértice homogêneos (ou Fubini-Veneziano) para $V_\pm(z)$. Certamente, em tal construção temos que^{||}

$$V_+(z) V_+(\zeta) \rightarrow 0, \quad V_-(z) V_-(\zeta) \rightarrow 0, \quad \text{para } z \rightarrow \zeta \quad (2.78)$$

e então as exponenciais envolvendo $V_\pm(z)$ truncam.

Estamos interessados nas soluções onde o campo φ é real. Usando (2.57) obtemos (já que $-i\varphi = \log \left| \frac{\tau_1}{\tau_0} \right| + i \arg \frac{\tau_1}{\tau_0}$)

$$\varphi^* = \varphi \quad \text{implica} \quad |\tau_0| = |\tau_1| \quad (2.79)$$

e conseqüentemente

$$\varphi = \arctan \left(i \frac{\tau_0^* \tau_1 - \tau_0 \tau_1^*}{\tau_0^* \tau_1 + \tau_0 \tau_1^*} \right), \quad \text{ou} \quad \varphi = \zeta_0 - \zeta_1 + n\pi \quad (2.80)$$

onde n é qualquer inteiro, e onde denotamos $\tau_a = |\tau_a| e^{i\zeta_a}$, $a = 0, 1$.

Usando (2.58) observamos que as condições de realidade (2.2) implicam que as funções tau devem satisfazer

$$\frac{\tilde{\tau}_R}{\tau_1} = -ie_\psi \frac{\tau_R^*}{\tau_0^*}, \quad \frac{\tilde{\tau}_L}{\tau_0} = ie_\psi \frac{\tau_L^*}{\tau_1^*} \quad (2.81)$$

^{||}Veja Eq. (14.8.14) na página 309 da Ref. [33], ou Eq. (6.2.6) da Ref. [34] para mais detalhes.

2.3.1 As soluções 1-sóliton

A solução 1-sóliton pode ser calculada facilmente avaliando os elementos de matriz (2.59) com $\rho = e^{V(a_{\pm}, z)}$, ou alternativamente aplicando o método de Hirota às equações (2.66)-(2.71). O resultado é

$$\begin{aligned}\tau_0 &= 1 - \frac{i}{4} a_- a_+ e^{2\Gamma(z)} ; & \tau_1 &= 1 + \frac{i}{4} a_- a_+ e^{2\Gamma(z)} \\ \tau_R &= \sqrt{i} a_+ z e^{\Gamma(z)} ; & \tilde{\tau}_R &= \sqrt{i} a_- e^{\Gamma(z)} \\ \tau_L &= \sqrt{i} a_+ e^{\Gamma(z)} ; & \tilde{\tau}_L &= -\sqrt{i} \frac{a_-}{z} e^{\Gamma(z)}\end{aligned}\quad (2.82)$$

Pode ser conferido que tais soluções satisfazem também (2.64) sem qualquer restrição. Então, a solução 1-sóliton satisfaz a condição (2.21) para a equivalência entre as correntes de Noether e topológica.

Se exigimos que φ seja real, então obtemos de (2.79) e (2.82) que $(a_- a_+)$ deve ser real. Tal condição é suficiente para fazer $\tau_1 = \tau_0^*$. Então, usando (2.16) e (2.80), obtemos a carga topológica do sóliton

$$\begin{aligned}Q_{\text{topol.}} &= -\text{sinal}(a_- a_+) & \text{para } z > 0 \\ Q_{\text{topol.}} &= \text{sinal}(a_- a_+) & \text{para } z < 0\end{aligned}\quad (2.83)$$

No entanto, se impusermos ainda, a condição de realidade (2.2) sobre os espinores, obtemos de (2.82) que os parâmetros devem satisfazer

$$a_- = -e_{\psi} a_+^* z \quad (2.84)$$

A carga topológica em tal caso é

$$Q_{\text{topol.}} = \text{sinal}(e_{\psi}) \quad \text{para qualquer real } z \quad (2.85)$$

Note que em geral as soluções 1-sóliton são transformadas em 1-antisólitons por transformações de paridade. Porém, a teoria (2.1) não é invariante sob paridade espacial, e a simetria do tipo CP (2.17) é quebrado quando a condição de realidade (2.2) é imposta. Para se ter um vácuo degenerado e sólitos topológicos precisamos do fator i no exponencial do termo potencial em (2.1). Isso faz o Lagrangeano complexo e assim é muito improvável que (2.1) tenha uma simetria CPT. A falta das simetrias P, CP e CPT é o que reafirma a existência só da solução sóliton ou do anti-sóliton para uma determinada escolha de e_{ψ} em (2.2).

Assim chegamos a uma conclusão interessante: sem a condição de realidade (2.2) a teoria (2.1) tem dois espinores de Dirac e tem as soluções sóliton e anti-sóliton,

uma vez que de acordo com (2.83) ambos os sinais da carga são admissíveis. Porém, se impormos a condição de realidade (2.2) a teoria (2.1) perde um espinor de Dirac e também uma solução sólton, uma vez que para uma determinada escolha de e_ψ observamos de (2.85) que só uma carga topológica (correspondente a 1-sólton ou anti-sólton) é permitida. Isso é indicativo da existência de algum tipo de dualidade entre sólitons e partículas de spinor.

A solução particular 1-sólton (2.22) satisfaz (2.84) com $e_\psi = 1$, $z > 0$, θ sendo a fase de a_+ , i.e. $a_+ = |a_+| e^{i\theta}$, e $|a_+| \sqrt{z}/2 = \exp(-m_\psi x_0 / \sqrt{1-v^2})$.

A massa destas soluções 1-sólton foi calculada em [8] e é dado por

$$M = 2 k m_\psi \quad (2.86)$$

onde k é a constante de acoplamento da teoria (2.1).

2.3.2 As soluções 2-sólton

As soluções 2-sólton são calculadas através do método das transformações “dress-ing” tomando (veja (2.72))

$$\rho_{2-\text{sol}} \equiv e^{V(a_\pm^{(1)}, z_1)} e^{V(a_\pm^{(2)}, z_2)} \quad \text{assim} \quad G_{2-\text{sol}} = e^{(e^{\Gamma(z_1)} V(a_\pm^{(1)}, z_1))} e^{(e^{\Gamma(z_2)} V(a_\pm^{(2)}, z_2))} \quad (2.87)$$

A solução explícita é calculada avaliando os elementos de matriz (2.59). Alternativamente, pode-se aplicar o método da expansão de Hirota [32] para a equação de Hirota (2.66)-(2.71). Os resultados obtidos são

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 1 - \frac{i}{4} a_-^{(1)} a_+^{(1)} e^{2\Gamma(z_1)} - \frac{i}{4} a_-^{(2)} a_+^{(2)} e^{2\Gamma(z_2)} \\ &- i \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} \left(a_+^{(1)} a_-^{(2)} + a_-^{(1)} a_+^{(2)} \right) e^{\Gamma(z_1) + \Gamma(z_2)} \\ &- \frac{1}{16} \frac{(z_1 - z_2)^4}{(z_1 + z_2)^4} a_-^{(1)} a_+^{(1)} a_-^{(2)} a_+^{(2)} e^{2(\Gamma(z_1) + \Gamma(z_2))} \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 1 + \frac{i}{4} a_-^{(1)} a_+^{(1)} e^{2\Gamma(z_1)} + \frac{i}{4} a_-^{(2)} a_+^{(2)} e^{2\Gamma(z_2)} \\ &+ \frac{i}{(z_1 + z_2)^2} \left(a_+^{(1)} a_-^{(2)} z_1^2 + a_-^{(1)} a_+^{(2)} z_2^2 \right) e^{\Gamma(z_1) + \Gamma(z_2)} \\ &- \frac{1}{16} \frac{(z_1 - z_2)^4}{(z_1 + z_2)^4} a_-^{(1)} a_+^{(1)} a_-^{(2)} a_+^{(2)} e^{2(\Gamma(z_1) + \Gamma(z_2))} \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_R}{\sqrt{i}} &= a_+^{(1)} z_1 e^{\Gamma(z_1)} + a_+^{(2)} z_2 e^{\Gamma(z_2)} - \frac{i}{4} \frac{z_2 (z_1 - z_2)^2}{(z_1 + z_2)^2} a_-^{(1)} a_+^{(1)} a_+^{(2)} e^{2\Gamma(z_1) + \Gamma(z_2)} \\ &- \frac{i}{4} \frac{z_1 (z_1 - z_2)^2}{(z_1 + z_2)^2} a_+^{(1)} a_-^{(2)} a_+^{(2)} e^{\Gamma(z_1) + 2\Gamma(z_2)} \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned}\frac{\tau_L}{\sqrt{i}} &= a_+^{(1)} e^{\Gamma(z_1)} + a_+^{(2)} e^{\Gamma(z_2)} + \frac{i}{4} \frac{(z_1 - z_2)^2}{(z_1 + z_2)^2} a_+^{(1)} a_-^{(2)} a_+^{(2)} e^{\Gamma(z_1) + 2\Gamma(z_2)} \\ &+ \frac{i}{4} \frac{(z_1 - z_2)^2}{(z_1 + z_2)^2} a_-^{(1)} a_+^{(1)} a_+^{(2)} e^{2\Gamma(z_1) + \Gamma(z_2)}\end{aligned}\quad (2.91)$$

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{\tau}_R}{\sqrt{i}} &= a_-^{(1)} e^{\Gamma(z_1)} + a_-^{(2)} e^{\Gamma(z_2)} + \frac{i}{4} \frac{(z_1 - z_2)^2}{(z_1 + z_2)^2} a_-^{(1)} a_+^{(1)} a_-^{(2)} e^{2\Gamma(z_1) + \Gamma(z_2)} \\ &+ \frac{i}{4} \frac{(z_1 - z_2)^2}{(z_1 + z_2)^2} a_-^{(1)} a_-^{(2)} a_+^{(2)} e^{\Gamma(z_1) + 2\Gamma(z_2)}\end{aligned}\quad (2.92)$$

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{\tau}_L}{\sqrt{i}} &= -\frac{a_-^{(1)}}{z_1} e^{\Gamma(z_1)} - \frac{a_-^{(2)}}{z_2} e^{\Gamma(z_2)} + \frac{i}{4} \frac{(z_1 - z_2)^2}{z_1 (z_1 + z_2)^2} a_-^{(1)} a_-^{(2)} a_+^{(2)} e^{\Gamma(z_1) + 2\Gamma(z_2)} \\ &+ \frac{i}{4} \frac{(z_1 - z_2)^2}{z_2 (z_1 + z_2)^2} a_-^{(1)} a_+^{(1)} a_-^{(2)} e^{2\Gamma(z_1) + \Gamma(z_2)}\end{aligned}\quad (2.93)$$

Estas funções tau satisfazem as equações de Hirota (2.66)-(2.71) para qualquer valor das constantes $a_{\pm}^{(1)}$, $a_{\pm}^{(2)}$, z_1 e z_2 que podem ser até mesmo complexas. É interessante notar que estas funções tau também satisfazem a equivalência entre as correntes de Noether e topológica (2.64) (ou equivalentemente (2.21)) sem qualquer restrição adicional.

Como dissemos as transformações de Lorentz em $2d$ são $x_{\pm} \rightarrow \hat{x}_{\pm} \equiv \lambda^{\pm 1} x_{\pm}$. As correspondentes transformações dos campos podem ser obtidos de (2.8)-(2.9) considerando $f(x_+) = \lambda x_+$ e $g(x_-) = \lambda^{-1} x_-$. Então, escolhendo o peso conforme δ do campo ν igual a zero, concluímos de (2.57)-(2.58) que, sob as transformações de Lorentz, as funções tau transformam-se como

$$\tau_a(x) \rightarrow \tau_a(\hat{x}) = \tau_a(x) \quad \text{para } a = 0, 1 \quad (2.94)$$

e

$$\tau_R(x) \rightarrow \tau_R(\hat{x}) = \lambda^{-\frac{1}{2}} \tau_R(x) \quad \tau_L(x) \rightarrow \tau_L(\hat{x}) = \lambda^{\frac{1}{2}} \tau_L(x) \quad (2.95)$$

e de maneira similar para $\tilde{\tau}_{R/L}$. Observamos então que tais transformações podem ser implementadas no espaço das soluções transformando os parâmetros das soluções (2.88)-(2.93) como

$$z_i \rightarrow \lambda z_i \quad a_{\pm}^{(i)} \rightarrow \lambda^{\mp \frac{1}{2}} a_{\pm}^{(i)} \quad i = 1, 2 \quad (2.96)$$

Alem do mais, a transformação global $U(1)$ (2.12) (veja (2.63)) corresponde no espaço dos parâmetros a

$$z_i \rightarrow z_i \quad a_{\pm}^{(i)} \rightarrow e^{\pm i\theta} a_{\pm}^{(i)} \quad i = 1, 2 \quad (2.97)$$

2.3.3 As condições de realidade

Queremos z_1 e z_2 real para que as velocidades dos sólitons sejam menores que a velocidade da luz ($c = 1$, veja (2.75)). Então, pode-se facilmente conferir que para que as soluções (2.88) - (2.89) satisfaçam (2.79) tem que se ter $a_+^{(1)} a_-^{(1)}$ e $a_+^{(2)} a_-^{(2)}$ real, e assim

$$a_+^{(i)} = |a_+^{(i)}| e^{i\xi_i}, \quad a_-^{(i)} = \bar{\epsilon}_i |a_-^{(i)}| e^{-i\xi_i}, \quad i = 1, 2 \quad (2.98)$$

com ξ_i sendo fases reais, e $\bar{\epsilon}_i = \pm 1$ sendo o sinal de $a_+^{(i)} a_-^{(i)}$. Além do mais, precisamos

$$\bar{\epsilon}_1 z_1 |a_+^{(1)}| |a_-^{(2)}| = \bar{\epsilon}_2 z_2 |a_-^{(1)}| |a_+^{(2)}| \quad (2.99)$$

Usando (2.76) observamos que (2.99) implica

$$\bar{\epsilon}_1 \bar{\epsilon}_2 \epsilon_1 \epsilon_2 = 1 \quad (2.100)$$

$$e^{\theta_1 - \theta_2} |a_+^{(1)}| |a_-^{(2)}| = |a_-^{(1)}| |a_+^{(2)}| \quad (2.101)$$

As relações (2.98) e (2.99) são condições necessárias e suficientes para que (2.79) seja satisfeita. Porém, eles são suficientes para fazer que τ_1 seja o complexo conjugado de τ_0 . Então,

$$\varphi^* = \varphi \quad \rightarrow \quad \tau_1 = \tau_0^* \quad \rightarrow \quad \varphi = 2\zeta_0 + n\pi \quad (2.102)$$

Consequentemente, as condições (2.81) tornam-se

$$\tilde{\tau}_R = -ie_\psi \tau_R^*, \quad \tilde{\tau}_L = ie_\psi \tau_L^* \quad (2.103)$$

Pode-se conferir facilmente que as soluções (2.88) - (2.93) satisfazem as condições $\tau_1 = \tau_0^*$ (e assim φ é real) e (2.103) se os parâmetros satisfazem (z_1, z_2 sendo reais)

$$a_-^{(i)} = -e_\psi a_+^{(i)*} z_i \quad i = 1, 2 \quad (2.104)$$

Então segue que os sinais z_i e $a_+^{(i)} a_-^{(i)}$ estão relacionados por

$$\bar{\epsilon}_i = -\epsilon_i \text{ sinal}(e_\psi) \quad i = 1, 2 \quad (2.105)$$

os quais certamente satisfazem (2.100).

2.3.4 As cargas topológicas

Para as soluções satisfazendo as condições (2.98) e (2.99) denotaremos

$$|a_+^{(i)}| |a_-^{(i)}| \equiv e^{-2\gamma_i x_0^{(i)}} \quad i = 1, 2 \quad (2.106)$$

com γ_i definido em (2.75). Então definimos

$$\hat{\Gamma}(z_i) \equiv \Gamma(z_i) - \gamma_i x_0^{(i)} \quad (2.107)$$

com $\Gamma(z_i)$ sendo definido em (2.74).

Para calcular as cargas topológicas escrevemos a solução no referencial de centro de massa, o qual corresponde a (veja (2.75) e (2.76))

$$z_1 = \epsilon_1 e^\theta; \quad z_2 = \epsilon_2 e^{-\theta}, \quad \rightarrow \quad v_1 = -v_2 \quad \text{and} \quad \gamma_2 = \epsilon_1 \epsilon_2 \gamma_1 \quad (2.108)$$

Então, usando (2.98), (2.101), (2.108), e (2.96), a função tau τ_0 dada em (2.88) torna-se

$$\begin{aligned} \tau_0 = 1 - & \epsilon_1 \epsilon_2 \frac{(\bar{\epsilon}_1 e^\theta - \bar{\epsilon}_2 e^{-\theta})}{(e^\theta + \epsilon_1 \epsilon_2 e^{-\theta})^2} \sin(\xi_1 - \xi_2) e^{\hat{\Gamma}(z_1) + \hat{\Gamma}(z_2)} - \frac{\bar{\epsilon}_1 \bar{\epsilon}_2 (e^\theta - \epsilon_1 \epsilon_2 e^{-\theta})^4}{16 (e^\theta + \epsilon_1 \epsilon_2 e^{-\theta})^4} e^{2(\hat{\Gamma}(z_1) + \hat{\Gamma}(z_2))} \\ & - i \left(\frac{\bar{\epsilon}_1}{4} e^{2\hat{\Gamma}(z_1)} + \frac{\bar{\epsilon}_2}{4} e^{2\hat{\Gamma}(z_2)} + \epsilon_1 \epsilon_2 \frac{(\bar{\epsilon}_1 e^\theta + \bar{\epsilon}_2 e^{-\theta})}{(e^\theta + \epsilon_1 \epsilon_2 e^{-\theta})^2} \cos(\xi_1 - \xi_2) e^{\hat{\Gamma}(z_1) + \hat{\Gamma}(z_2)} \right) \end{aligned} \quad (2.109)$$

Além do mais, temos $\tau_1 = \tau_0^*$, quando (2.100) também é reforçado. Então, de acordo com (2.16) e (2.102), a carga topológica é $Q_{\text{topol.}} = \frac{2}{\pi} (\arg \tau_0(\infty) - \arg \tau_0(-\infty))$. Usaremos a prescrição que $\arg \tau_0$ toma valores entre $-\pi$ e π . Ao calcular a carga tomaremos em conta que, no referencial de centro de massa, $\hat{\Gamma}(z_1) + \hat{\Gamma}(z_2)$ não depende de x se ϵ_1 e ϵ_2 têm sinais opostos. Além do mais, para $\epsilon_1 \epsilon_2 = \bar{\epsilon}_1 \bar{\epsilon}_2 = 1$ deve-se prestar atenção no sinal da parte imaginária de τ_0 quando esta tende a zero, para determinar se $\arg \tau_0$ tende a $-\pi$ ou π . Em tal caso, pode-se escrever

$$\text{Im} \tau_0 \rightarrow -\frac{1}{2} \bar{\epsilon}_1 \left(1 + \frac{\cos(\xi_1 - \xi_2)}{\cosh \theta} \right) e^{2m_\psi \epsilon_1 x \cosh \theta + \dots} \quad \text{quando } x \rightarrow \epsilon_1 \infty \quad (2.110)$$

para $\epsilon_1 \epsilon_2 = \bar{\epsilon}_1 \bar{\epsilon}_2 = 1$. Desde que $\frac{\cos(\xi_1 - \xi_2)}{\cosh \theta} \geq -1$, o limite é independente de ξ_i . Na verdade, a carga topológica, para φ real, não depende das fases ξ_i . Os resultados obtidos são

$$\begin{aligned} Q_{\text{topol.}} &= 2\bar{\epsilon}_1 \quad \text{para } (\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1, \bar{\epsilon}_1 \bar{\epsilon}_2 = 1) \text{ ou } (\epsilon_1 = -\epsilon_2 = -1, \bar{\epsilon}_1 \bar{\epsilon}_2 = -1) \\ Q_{\text{topol.}} &= -2\bar{\epsilon}_1 \quad \text{para } (\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1, \bar{\epsilon}_1 \bar{\epsilon}_2 = 1) \text{ ou } (\epsilon_1 = -\epsilon_2 = 1, \bar{\epsilon}_1 \bar{\epsilon}_2 = -1) \end{aligned} \quad (2.111)$$

Se agora impomos as condições de realidade (2.2) sobre os espinores, ou equivalentemente (2.103)-(2.105), obtem-se

$$Q_{\text{topol.}} = 2 \sin \alpha e_\psi \quad (2.112)$$

para qualquer ϵ_i e $\bar{\epsilon}_i$ satisfazendo (2.105).

Assim temos uma situação similar ao caso das soluções 1-sóliton, desde que naquele caso a imposição da condição (2.2) faz o sóliton ou o anti-sóliton desaparecer do espectro. Aqui a mesma coisa acontece, desde que (2.2) escolhe o sinal de e_ψ e então ou a solução de carga 2 ou -2 desaparece. Porém, uma característica nova emerge. Vimos que poderíamos ter soluções (sem (2.2)) sóliton e anti-sóliton com φ real. Nós não achamos aqui uma solução com carga topológica zero correspondente ao espalhamento de 1-sóliton e 1-antisóliton para φ real. Tal solução existe porém, para φ complexo mas assintoticamente real como nós mostraremos a seguir.

Soluções assintoticamente reais

Pode-se verificar facilmente que para as soluções (2.88)-(2.93) o campo φ sempre é assintoticamente real, i.e. $|\tau_0| \rightarrow |\tau_1|$ para $x \rightarrow \pm\infty$. Além do mais, também temos que $\psi, \tilde{\psi} \rightarrow 0$ para $x \rightarrow \pm\infty$. Então, a carga topológica sempre é real para essas soluções.

Consideremos agora uma solução do tipo (2.88)-(2.93) satisfazendo as condições (2.98) e (2.101) mas não (2.100) (e também certamente não (2.2)). No referencial de centro de massa (veja (2.108)) τ_0 é dado por (2.109) e τ_1 por

$$\begin{aligned} \tau_1 = & 1 - \bar{\epsilon}_1 \bar{\epsilon}_2 \frac{(\bar{\epsilon}_1 e^\theta - \bar{\epsilon}_2 e^{-\theta})}{(e^\theta + \epsilon_1 \epsilon_2 e^{-\theta})^2} \sin(\xi_1 - \xi_2) e^{\hat{\Gamma}(z_1) + \hat{\Gamma}(z_2)} - \frac{\bar{\epsilon}_1 \bar{\epsilon}_2}{16} \frac{(e^\theta - \epsilon_1 \epsilon_2 e^{-\theta})^4}{(e^\theta + \epsilon_1 \epsilon_2 e^{-\theta})^4} e^{2(\hat{\Gamma}(z_1) + \hat{\Gamma}(z_2))} \\ & + i \left(\frac{\bar{\epsilon}_1}{4} e^{2\hat{\Gamma}(z_1)} + \frac{\bar{\epsilon}_2}{4} e^{2\hat{\Gamma}(z_2)} + \bar{\epsilon}_1 \bar{\epsilon}_2 \frac{(\bar{\epsilon}_1 e^\theta + \bar{\epsilon}_2 e^{-\theta})}{(e^\theta + \epsilon_1 \epsilon_2 e^{-\theta})^2} \cos(\xi_1 - \xi_2) e^{\hat{\Gamma}(z_1) + \hat{\Gamma}(z_2)} \right) \quad (2.113) \end{aligned}$$

Desde que $|\tau_0| = |\tau_1|$ é válido assintoticamente, a carga topológica é dada por $Q_{\text{topol.}} = \frac{1}{\pi} ((\arg \tau_0 - \arg \tau_1)(\infty) - (\arg \tau_0 - \arg \tau_1)(-\infty))$.

De novo, usando a prescrição que o argumento de τ_i varia de $-\pi$ até π , obtemos

$$Q_{\text{topol.}} = 0 \quad \text{para } (\epsilon_1 \epsilon_2 = 1, \bar{\epsilon}_1 \bar{\epsilon}_2 = -1) \text{ ou } (\epsilon_1 \epsilon_2 = -1, \bar{\epsilon}_1 \bar{\epsilon}_2 = 1) \quad (2.114)$$

Portanto, tal solução corresponde ao espalhamento de 1-sóliton e 1-antisóliton.

2.3.5 As soluções “breather”

A dependência do espaço-tempo das soluções (2.88)-(2.93) são dados pelos exponenciais $\exp(\gamma_l(x - v_l t))$, $l = 1, 2$. Então, para se ter soluções periódicas no tempo precisamos que $\gamma_l v_l$ seja imaginário puro. Escrevendo $z_l = |z_l| e^{i\theta_l}$, observamos de (2.75) que para isso acontecer precisamos $|z_l| = 1$, e assim $\gamma_l v_l = -im_\psi \sin \theta_l$. Para que a solução apresente somente uma frequência precisamos ter $\sin \theta_2 = \pm \sin \theta_1$.

Não queremos $z_1 = z_2$ porque (2.88)-(2.93) torna-se uma solução 1-sóliton. Além do mais, não queremos $z_1 = -z_2$ porque a solução (2.88)-(2.93) apresentaria singularidades. Então, as únicas possibilidades para se ter soluções periódicas no tempo é ter

$$z_1 = e^{i\theta}; \quad z_2 = \epsilon e^{-i\theta}; \quad \epsilon = \pm 1 \quad (2.115)$$

Então obtemos de (2.74) e (2.75) que

$$\Gamma(z_1) = \gamma x + i\omega t \quad \Gamma(z_2) = \epsilon(\gamma x - i\omega t) \quad (2.116)$$

com

$$\gamma \equiv m_\psi \cos \theta \quad \omega \equiv m_\psi \sin \theta \quad (2.117)$$

O caso $\epsilon = 1$

Estamos interessados nos casos onde o campo φ é real, e assim de (2.57) precisamos $|\tau_0| = |\tau_1|$. Impondo as condições (2.115)-(2.117) em (2.88)-(2.89) observamos que para se ter φ real precisamos

$$a_+^{(2)} a_-^{(2)} = \left(a_+^{(1)} a_-^{(1)} \right)^* \quad (2.118)$$

e

$$\theta + \xi_+^{(1)} + \xi_-^{(2)} = n\pi \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.119)$$

onde denotamos

$$a_\pm^{(i)} \equiv |a_\pm^{(i)}| e^{i\xi_\pm^{(i)}} \quad i = 1, 2 \quad (2.120)$$

Segue que as condições (2.118) e (2.119) são suficientes para fazer $\tau_1 = \tau_0^*$, e de (2.88) obtemos

$$\begin{aligned} \tau_0 = & 1 + (-1)^{n+1} S \left(R - \frac{1}{R} \right) \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} e^{2xm_\psi \cos \theta} - S^2 \tan^4 \theta e^{4xm_\psi \cos \theta} \\ & + i S \left(\frac{(-1)^{n+1}}{\cos \theta} \left(R + \frac{1}{R} \right) - 2 \cos \left(2\omega t + \xi_+^{(1)} + \xi_-^{(1)} \right) \right) e^{2xm_\psi \cos \theta} \end{aligned} \quad (2.121)$$

onde o inteiro n é o mesmo que em (2.119), e introduzimos

$$S \equiv \frac{1}{4} |a_+^{(1)}| |a_-^{(1)}|; \quad R \equiv \frac{|a_+^{(1)}|}{|a_+^{(2)}|} \quad (2.122)$$

Portanto, usando (2.16) e (2.57) obtemos que a carga topológica desta solução “breather” é

$$Q_{\text{topol.}} = 2(-1)^{n+1} \quad (2.123)$$

com n dado por (2.119).

Agora, se além da realidade de φ , impomos a condição (2.2) sobre os espiniores, vemos que os parâmetros devem satisfazer

$$a_{-}^{(1)} = -e_{\psi} a_{+}^{(2)*} e^{i\theta} ; \quad a_{-}^{(2)} = -e_{\psi} a_{+}^{(1)*} e^{-i\theta} \quad (2.124)$$

que para ser compatível com (2.118) e (2.119), precisamos $\exp \left(i \left(\theta + \xi_{+}^{(1)} + \xi_{-}^{(2)} \right) \right) = -\text{senal } e_{\psi}$. Então , a carga topológica torna-se

$$Q_{\text{topol.}} = 2 \text{ sinal } e_{\psi} \quad (2.125)$$

Conseqüentemente, temos para as soluções do tipo “breather” um efeito semelhante que acontece no caso das soluções 2-sóliton (veja discussões abaixo (2.85) e (2.112)). Para φ real temos “breathers” com carga topológica ± 2 . Porém, se impomos a condição de realidade (2.2) sobre os espiniores, só uma carga é permitida.

O caso $\epsilon = -1$

Pode-se verificar que para a escolha $\epsilon = -1$ em (2.115) não podem ser achadas soluções não triviais tal que φ seja real **. Porém, temos que φ é assintoticamente real. É bastante fácil verificar que a carga topológica anula-se para qualquer escolha dos parâmetros $a_{\pm}^{(i)}$. Assim,

$$Q_{\text{topol.}} = 0 ; \quad \text{para } \epsilon = -1, \text{ e qualquer } a_{\pm}^{(i)}, i = 1, 2 \quad (2.126)$$

2.3.6 Os tempos de demora

Os sólitos são soluções clássicas que viajam com velocidade constante sem dispersão e mantém as suas formas logo após o espalhamento entre eles, o efeito disto é só uma mudança das fases ou um deslocamento em suas posições . Mostramos agora que os sólitos com que temos trabalhado são sólitos verdadeiros e realmente cumprem as exigências acima. Calcularemos os assim chamados tempos de demora no espalhamento de dois sólitos, usando os procedimentos de [36].

Consideramos dois sólitos que no passado distante estão bem separados, colidem no tempo $t = 0$ e logo separam-se novamente no futuro distante. Portanto, excluindo a região onde o espalhando acontece, os sólitos são livres e assim viajam com velocidade constante. Denotando as trajetórias de um dos sólitos antes e depois da colisão como (desde que a velocidade é a mesma)

$$x = vt + x(I) \quad \text{e} \quad x = vt + x(F) \quad (2.127)$$

**Na verdade não foi achada uma solução “brether” para φ estritamente real e satisfazendo a condição de realidade dos fermions, veja o trabalho mais recente [35]

O deslocamento lateral para tempo fixo é medido por

$$\Delta(x) \equiv x(F) - x(I) \quad (2.128)$$

O tempo de demora é definido por

$$\Delta(t) \equiv t(F) - t(I) = -\frac{\Delta(x)}{v} \quad (2.129)$$

com as interseções das trajetórias com o eixo do tempo determinados por $t(F) = -x(F)/v$ e $t(I) = -x(I)/v$. O deslocamento lateral e o tempo de demora não são invariantes de Lorentz, e assim consideramos o invariante

$$E\Delta(x) = -p\Delta(t) \quad (2.130)$$

com E e $p = vE$ sendo a energia e impulso do sóliton respectivamente. Como E é positivo segue que $\Delta(x)$ tem o mesmo sinal em qualquer sistema de referência, sendo que somente a sua intensidade é dependente do sistema. O tempo de demora por outro lado pode mudar de sinal sob transformações de Lorentz. Podemos mostrar que os deslocamentos laterais e tempos de demora para os dois sólitons que participam da colisão têm que satisfazer [36]

$$E_1\Delta_1(x) + E_2\Delta_2(x) = 0 ; \quad p_1\Delta_1(t) + p_2\Delta_2(t) = 0 \quad (2.131)$$

com os sub-índices i denotando as quantidades associadas às partículas i . Conseqüentemente observe que, desde que as energias são positivas, os deslocamentos laterais têm sinais opostos. Claramente, no referencial do centro de momentos (comf), onde $p_1 + p_2 = 0$, os tempos de demora são iguais, isto é, $\Delta_1^{(\text{comf})}(t) = \Delta_2^{(\text{comf})}(t)$. Conseqüentemente, de (2.130) temos que $E_1^{(\text{comf})}\Delta_1^{(\text{comf})}(x)/p_1 = -E_2^{(\text{comf})}\Delta_2^{(\text{comf})}(x)/p_1 = -\Delta_1^{(\text{comf})}(t) = -\Delta_2^{(\text{comf})}(t)$. Portanto, como $\Delta(x)$ tem o mesmo sinal em qualquer sistema de referência, segue que, se a partícula 1 move-se para a direita mais rápido que a partícula 2 (tal que p_1 é positivo no comf), então $(-\Delta_1(x))$, $\Delta_2(x)$, $\Delta_1^{(\text{comf})}(t)$ e $\Delta_2^{(\text{comf})}(t)$ todos têm o mesmo sinal. A interpretação física desse sinal é relacionada ao caráter (atrativo ou repulsivo) das forças de interação. Certamente, se a força é atrativa então a partícula 1 acelera-se quando esta próxima da partícula 2 e então desacelera-se. Isso significa que $\Delta_1(x)$ é positivo e assim o sinal comum negativo. Conseqüentemente, as forças atrativas conduzem a um tempo de demora negativo no referencial do centro dos momentos, e claramente as forças repulsivas a um tempo de demora positivo. Estas considerações supõem que as duas partículas passam através de cada uma, e não há nenhuma reflexão. Entretanto, quando as massas das duas partículas são iguais há a possibilidade de ocorrer uma reflexão.

Agora calculamos os tempos de demora para as soluções 2-sóliton dadas em (2.88)-(2.93). Escolhemos a partícula 1 viajando à direita mais rapidamente do que a partícula 2, isto é, $v_1 > v_2$, com $v_1 > 0$, e conseqüentemente de (2.75) e (2.76) $|z_1| < |z_2|$ ou $\theta_1 < \theta_2$. Então seguimos o sólton 1 no tempo [36], isto é, mantemos $x - v_1 t$ fixo no tempo. Então temos $x - v_2 t = \text{const.} + (v_1 - v_2)t$, com $\text{const.} = x - v_1 t$. Temos que, se $\epsilon_2 = 1$, $e^{\Gamma_2(z_2)} \rightarrow 0$ para $t \rightarrow -\infty$, e $e^{\Gamma_2(z_2)} \rightarrow \infty$ para $t \rightarrow \infty$. Para o caso $\epsilon_2 = -1$ os limites são intercambiados.

Portanto, tomando $\epsilon_2 = 1$, pode-se verificar que a solução (2.88)-(2.93) torna-se, no limite $t \rightarrow -\infty$, a solução 1-sóliton (2.82) com as identificações $a_{\pm}^{(1)} \equiv a_{\pm}$ e $z_1 \equiv z$. Agora, no limite $t \rightarrow \infty$, podemos verificar que as relações τ_0/τ_1 , τ_R/τ_0 , τ_L/τ_1 , $\tilde{\tau}_R/\tau_1$ e $\tilde{\tau}_L/\tau_0$ para as soluções (2.88)-(2.93) tendem às correspondentes relações para a solução 1-sóliton (2.82) com as mesmas identificações dos paraâmetros, e com a mudança

$$e^{\Gamma_1(z_1)} \rightarrow \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \right)^2 e^{\Gamma_1(z_1)} \quad (2.132)$$

Sendo a única diferença o fato que a relação τ_0/τ_1 toma sinal relativo negativo, significando que o campo φ fica deslocado por π (veja (2.57)) durante o processo de espalhamento. Então observamos de (2.57)-(2.58) que o efeito correspondente do espalhamento sobre as soluções para os campos φ , ψ e $\tilde{\psi}$ é um deslocamento lateral do sólton 1 dado por

$$\gamma_1(x - v_1 t) \rightarrow \gamma_1 \left(x - v_1 t + \frac{1}{\gamma_1} \ln \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \right)^2 \right) \quad (2.133)$$

Se, de outro lado, tomarmos $\epsilon_2 = -1$, observamos que o sentido da seta em (2.133) inverte. Conseqüentemente, usando (2.128), (2.75) e (2.76) observa-se que o deslocamento lateral para o sólton 1 está dado por

$$\Delta_1(x) = -\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{m_\psi \cosh \theta_1} \ln \left(\frac{e^{(\theta_1 - \theta_2)/2} - \epsilon_1 \epsilon_2 e^{-(\theta_1 - \theta_2)/2}}{e^{(\theta_1 - \theta_2)/2} + \epsilon_1 \epsilon_2 e^{-(\theta_1 - \theta_2)/2}} \right)^2 \quad (2.134)$$

Como $\epsilon_1 \epsilon_2 = \pm 1$, observamos que $\Delta_1(x)$ é de fato independente de tais sinais, e assim

$$\Delta_1(x) = -\frac{1}{m_\psi \cosh \theta_1} \ln \left(\tanh \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \right)^2 \quad (2.135)$$

Observe que as soluções (2.88)-(2.93) são simétricas sob o intercâmbio dos índices 1 e 2 dos parâmetros $a_{\pm}^{(i)}$ e z_i . Portanto, se seguirmos o sólton 2, isto é, mantenha $x - v_2 t$ fixo enquanto o tempo varia, mas sob as mesmas condições cinemáticas, isto é, $v_1 > v_2$, com $v_1 > 0$, então obtemos que

$$\Delta_2(x) = \frac{1}{m_\psi \cosh \theta_2} \ln \left(\tanh \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \right)^2 \quad (2.136)$$

Se invertermos as condições cinemáticas, isto é, tomando $v_2 > v_1$, com $v_2 > 0$, então os sinais de ambos $\Delta_i(x)$, $i = 1, 2$, invertem. A massa das soluções 1-sóliton é dada em (2.86), e conseqüentemente as energias dos sóltons são $E_i = 2 k m_\psi \cosh \theta_i$, $i = 1, 2$. Conseqüentemente, vemos que os $\Delta_i(x)$'s certamente satisfazem (2.131), isto é,

$$E_1 \Delta_1(x) = -E_2 \Delta_2(x) = -\text{sinal}(v_1 - v_2) 2 k \ln \left(\tanh \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \right)^2 \quad (2.137)$$

além do mais, usando (2.129), (2.135) e (2.136) obtemos que os tempos de demora são dados por (assumindo $v_1 > v_2$, com $v_1 > 0$)

$$\Delta_1(t) = -\frac{1}{m_\psi \sinh \theta_1} \ln \left(\tanh \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \right)^2, \quad (2.138)$$

$$\Delta_2(t) = \frac{1}{m_\psi \sinh \theta_2} \ln \left(\tanh \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \right)^2 \quad (2.139)$$

Observe que o tangente hiperbólico varia de -1 a 1 e portanto o logarítmo de seu quadrado é sempre negativo, e assim de (2.135) vemos que $\Delta_1(x)$ para $v_1 > v_2$, com $v_1 > 0$, é positivo. Conseqüentemente, das considerações feitas acima podemos concluir que a força entre os sóltons é atrativa. Além do mais, é independente de suas cargas topológicas. Certamente, os tempos de demora obtidos coincidem com aqueles da teoria de sine-Gordon se identificarmos k com uma constante positiva multiplicada pelo inverso do quadrado da constante de acoplamento do modelo de sine-Gordon.

Capítulo 3

Os formalismos de Faddeev-Jackiw e Simplético (vinculado) e o modelo de Toda $sl(2)$ conforme afim acoplado a matéria

3.1 O formalismo de Faddeev-Jackiw

O formalismo de Faddeev-Jackiw (FJ) [16, 17] evita a separação dos vínculos em primeira e segunda classe e fornece-nos um meio direto para tratar os sistemas vinculados. Um breve resumo do método é apresentado no que se segue. Nesta seção usamos um sistema com um número finito de graus de liberdade. A extensão ao caso de infinitos graus de liberdade é direto. Começamos com um Lagrangeano de primeira ordem na derivada temporal o qual pode surgir a partir de um de segunda ordem logo após a introdução de variáveis auxiliares. A forma geral de um Lagrangeano de primeira ordem é

$$L = a_i(\xi)\dot{\xi}^i - V(\xi). \quad (3.1)$$

Onde as coordenadas ξ_i , com $i = 1, \dots, N$, denotam as coordenadas generalizadas. Note-se que quando um Hamiltoniano é definido pela transformação usual de Legendre, V pode ser identificado com o Hamiltoniano H .

Este sistema de primeira ordem é caracterizado por uma 2-forma fechada. Se a 2-forma não é degenerada, este define uma estrutura simplética sobre o espaço de fase M , descrito pelas coordenadas ξ_i . Por outro lado, se a 2-forma é singular, com posto constante em M , este é chamado de forma pre-simplética [37]. Assim, em termos das componentes, a forma (pre)-simplectica é definida por

$$f_{ij}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi^i} a_j(\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi^j} a_i(\xi) \quad (3.2)$$

com o vetor potencial $a_i(\xi)$ sendo uma função arbitrária de ξ^i . As equações de

Euler-Lagrange são dados por

$$f_{ij}\dot{\xi}^j = \frac{\partial}{\partial \xi^i} V(\xi). \quad (3.3)$$

No caso não singular e não vinculado a matriz antisimétrica f_{ij} de ordem $N \times N$ possui a matriz inversa f^{ij} , então $N = 2n$, e (3.3) implica

$$\dot{\xi}^i = f^{ij} \frac{\partial}{\partial \xi^j} V(\xi) \quad (3.4)$$

e o colchete será definido por

$$\{\xi^i, \xi^j\} = f^{ij} \quad (3.5)$$

No caso em que o Lagrangeano (3.1) descreve um sistema vinculado, a matriz f^{ij} é singular o que significa a existência de um conjunto de relações entre as velocidades reduzindo o número de graus de liberdade do sistema. Vamos supor que o posto de f é $2n$, então existem $N - 2n = N'$ modos zero $\mathbf{v}^\alpha$, $\alpha \equiv 1, \dots, N'$. Então o sistema é vinculado pelas N' equações nas quais não aparecem derivadas temporais. Então teremos vínculos que reduzirão o número de graus de liberdade da teoria. Multiplicando (3.3) por (esquerda) modos zero $\mathbf{v}_i^\alpha$ de f_{ij} temos

$$\mathbf{v}_i^\alpha f_{ij} \dot{\xi}^j \equiv \mathbf{v}_i^\alpha \frac{\partial V(\xi)}{\partial \xi^i} \equiv 0. \quad (3.6)$$

Estes (simpléticos) vínculos aparecem como relações algébricas

$$\Omega_\alpha \equiv \mathbf{v}_i^\alpha \frac{\partial V(\xi)}{\partial \xi^i} = 0. \quad (3.7)$$

Usando o teorema Darboux [17, 37] podemos mostrar que um potencial vetor arbitrário, a_i , cujo campo tensorial associado f_{ij} é não singular, pode ser mapeado por uma transformação de coordenadas sobre um potencial da forma $a_i(\xi) \equiv \frac{1}{2} \xi^j w_{ji}$, sendo w_{ji} uma matriz contante e não singular. Então, a construção de Darboux pode ser desenvolvida para a projeção não singular de f_{ij} dado em (3.2). Então o Lagrangeano torna-se

$$L = \frac{1}{2} \xi^i w_{ij} \dot{\xi}^j - V(\xi, z) \quad (3.8)$$

onde z denotam as $N - 2n$ coordenadas que são deixadas fixas. algumas das z 's podem aparecer em forma não-linear e outros linearmente em (3.8). Então usando as equações Euler-Lagrange para estas coordenadas podemos resolver para tantos z 's como sejam possíveis em termos dos ξ ' e os outros z 's e substituir de novo em

$V(\xi, z)$ assim finalmente ficamos somente com os $z's$ que aparecem linearmente. Assim, podemos escrever o Lagrangeano na forma

$$L = \frac{1}{2} \xi^i w_{ij} \dot{\xi}^j - V(\xi) - \lambda_k \Phi^k(\xi), \quad (3.9)$$

onde denotamos os $z's$ que aparecem linearmente de λ_k . Vemos que estes λ_k vem a ser os multiplicadores de Lagrange e $\Phi^k(\xi)$ são os vínculos. Para incorporar os vínculos resolvemos as equações

$$\Phi^k(\xi) = 0, \quad (3.10)$$

e substituímos de novo em (3.9). Este procedimento diminui o número de ξ' e ficamos com um Lagrangeano que possui a estrutura dada em (3.1). Então todo o procedimento pode ser repetido outra vez até que todos os vínculos são eliminados e ficamos com um sistema reduzido, não vinculado e canônico.

3.1.1 O formalismo simplético vinculado

Podem-se apresentar dificuldades técnicas em todos os passos do formalismo de FJ: a resolução dos vínculos podem ser difíceis de se obter, a construção das transformações de Darboux podem não ser possíveis. Uma análise do ponto de vista da chamada redução simplética foi proposta pelos autores [19, 20, 21, 22], evitando a difícil transformação de Darboux usada no formalismo inicial de FJ, a análise estende em cada estágio do algoritmo, o número de variáveis do espaço de fase. A ideia central deste método modificado é a inclusão dos vínculos no Lagrangeano por meio de multiplicadores de Lagrange que são velocidades, os quais devem ser acrescentados ao conjunto das variáveis dinâmicas ampliando a configuração de fase.

Uma vez que os vínculos (3.7) foram identificados, e introduzidos como relações fortes no potencial simplético $V(\xi)$, podemos re-escrever o Lagrangeano (3.1) na forma

$$L' \equiv a_i(q) \dot{q}_i + \Omega^\alpha \dot{\lambda}_\alpha - V(q), \quad (3.11)$$

onde $i = 1, \dots, n$ e $\alpha = 1, \dots, m$. As coordenadas q_i descrevem o setor não singular de L , de tal forma que a matriz $f_{ij}(q_i) \equiv \frac{\partial}{\partial q_i} a_j(q_i) - \frac{\partial}{\partial q_j} a_i(q_i)$ é inversível. Então n deve ser par.

A nova estrutura canônica é obtida construindo-se a matriz f'_{AB} , ($A, B = 1, \dots, n, n+1, \dots, n+m$) associada ao Lagrangeano L' . Se a matriz resultante é não singular, os colchetes generalizados são definidos pela sua inversa. No outro caso, todo o procedimento deve ser repetido de novo até que a última matriz f seja regular. Para teorias invariantes de calibre, o algoritmo não é capaz de fornecer uma matriz não

singular. Para se obter a estrutura de colchetes deve-se impor uma condição de fixação de calibre no potencial simplético como um termo que quebra a simetria.

A equivalência do método de FJ e o método de Dirac é discutida em [38, 20, 39]. Algumas aplicações do método original de FJ e do método da “quantização simplética” podem ser achados em [40] e a extensão ao caso fermiônico para estruturas simpléticas constantes é desenvolvido em [38].

3.2 O modelo

Estudamos um sub-modelo da teoria de Toda conforme afim acoplado a matéria (Dirac) (CATM) associado à álgebra de Kac-Moody $sl(2)$ definido pela teoria de campos de duas dimensões

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} \partial_\mu \nu \partial^\mu \eta + \frac{1}{8} m_\psi^2 e^{2\eta} + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m_\psi \bar{\psi} e^{\eta + 2i\varphi \gamma_5} \psi, \quad (3.12)$$

onde $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_0$ e φ , η e ν são campos reais. Para as notações adicionais veja Apêndice A.

O Lagrangeano (3.12) se diferencia do Lagrangeano apresentado na seção 2, Eq. (2.1) em três pontos:

i) o modelo (2.1) contém dois espinores de Dirac $\tilde{\psi}$ e ψ , e o campo complexo φ , assim como, os campos reais ν e η .

ii) impusemos as condições de realidade, $\tilde{\psi} = -\psi^*$ (a estrela denota a conjugação complexa) e φ imaginário puro, para fazer com que o Lagrangeano seja real. As implicações destas condições de realidade nas soluções do tipo sóliton são apresentadas na seção 2.

iii) um sinal $(-)$ global, desde que estamos considerando um Hamiltoniano limitado por baixo.

O ponto ii) merece uma atenção maior. A teoria clássica (2.1) é bem definida matematicamente, ainda que para uma solução geral complexa dos campos do modelo (Lagrangeano complexo). Aqui segue-se a prescrição de restringir o modelo a um sub-espço de soluções clássicas bem comportadas. Por exemplo, as soluções de um e dois sólitons satisfazem a condição de realidade acima. Então tomando-se em conta o sinal menos global $(-)$ e a condição de realidade acima permite-nos definir um Lagrangeano fisicamente aceitável. Este tipo de assuntos no caso das teorias de Toda afim são discutidas nas referências [41].

No que se segue, discutimos as implicações das simetrias do modelo descritas na seção 2. Devemos salientar que a imposição das condições de realidade acima não afetam de forma essencial a forma destas transformações, exceto a simetria do tipo

CP que é quebrada, veja a discussão após Eq. (2.17). Associadas à simetria conforme (2.9) há duas correntes

$$\mathcal{J}_{cft} = -i\psi^\dagger (1 + \gamma_5) \psi + i\partial_+ \varphi + \partial_+ \eta, \quad \bar{\mathcal{J}}_{cft} = i\psi^\dagger (1 - \gamma_5) \psi + i\partial_- \varphi + \partial_- \eta \quad (3.13)$$

satisfazendo

$$\partial_- \mathcal{J}_{cft} = 0; \quad \partial_+ \bar{\mathcal{J}}_{cft} = 0. \quad (3.14)$$

Observamos, de (2.9), que as correntes $\mathcal{J}$ e $\bar{\mathcal{J}}$ têm os pesos conformes $(1, 0)$ e $(0, 1)$ respectivamente. Sob as transformações (2.9), as correntes se transformam como

$$\mathcal{J}_{cft}(x_+) \longrightarrow [\ln f'(x_+)]^{-1} (\mathcal{J}_{cft}(x_+) - [\ln f'(x_+)]'), \quad (3.15)$$

$$\bar{\mathcal{J}}_{cft}(x_-) \longrightarrow [\ln g'(x_-)]^{-1} (\bar{\mathcal{J}}_{cft}(x_-) - [\ln g'(x_-)]') \quad (3.16)$$

Então, dada uma solução do modelo, pode-se mapeá-lo, sob uma transformação conforme, a uma solução onde

$$\mathcal{J}_{cft} = 0; \quad \bar{\mathcal{J}}_{cft} = 0. \quad (3.17)$$

Tal procedimento equivale a fazer uma fixação de calibre eliminando o campo livre η . Ou seja as relações (3.17) são vínculos que executam uma redução hamiltoniana. Isto assemelha-se a relação entre os modelos de Toda afim (AT) e conforme afim (CAT) desenvolvidos em [42, 30] através de uma fixação de calibre da simetria conforme. A versão quântica da redução $\text{CAT} \rightarrow \text{AT}$ foi executada em [43] no caso $sl(2)$.

Agora, desenvolvemos o procedimento de fixação de calibre. Observe-se de (2.9) que φ é um escalar sob transformações conformes e se ajustamos δ a zero, e^ν também é escalar. De outro lado e^η é um campo primário de pesos $(1/2, 1/2)$. Fazendo uma transformação conforme (2.9) com

$$f'(x_+) = e^{2\eta_+(x_+)}, \quad g'(x_-) = e^{2\eta_-(x_-)} \quad (3.18)$$

onde $\eta_\pm(x_\pm)$ são soluções da forma $\eta = \text{campo livre}$ ($\eta(x_+, x_-) = \eta_+(x_+) + \eta_-(x_-)$, onde $\eta_\pm(x_\pm)$ são funções arbitrárias), obtemos [42]

$$\hat{\varphi}(\hat{x}_+, \hat{x}_-) \rightarrow \varphi(x_+, x_-), \quad e^{-\hat{\eta}_+(\hat{x}_+, \hat{x}_-)} \rightarrow 1, \quad e^{-\hat{\nu}_+(\hat{x}_+, \hat{x}_-)} \rightarrow e^{-\nu_+(x_+, x_-)}. \quad (3.19)$$

Conseqüentemente, estamos escolhendo uma solução em cada órbita do grupo conforme. Então, para cada solução regular do campo η o sub-modelo de CATM (3.12) definida em um espaço-tempo (x_+, x_-) corresponde a um modelo fora do ponto crítico que chamamos de modelo de Toda afim acoplado a matéria (ATM)

com o campo extra ν definido num espaço-tempo $(\hat{x}_+, \hat{x}_-)$. Para a solução particular $\eta = 0$ o sub-modelo CATM e o ATM são definidos no mesmo espaço-tempo. Assim ajustando o campo η a zero nas equações do movimento do modelo de CATM e reconstruindo o Lagrangeano para o conjunto das equações de movimento do campo de Toda e de Dirac podemos obter

$$\frac{1}{k}\mathcal{L}(\varphi, \psi, \bar{\psi}) = \frac{1}{4}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m_\psi\bar{\psi}e^{2i\varphi\gamma_5}\psi. \quad (3.20)$$

Este lagrangeano não é invariante conforme e **define** o modelo ATM. Agora, está claro o papel dos campos ν e η . Na construção da seção 2 estes campos correspondem à extensão da álgebra de loop $sl(2)$ e são responsáveis para fazer o sistema (3.12) invariante conforme [44]. O campo η é um campo de conexão de “gauge” conforme e escolhendo uma solução constante particular ($\eta = \text{const.}$ é uma solução das equações do movimento) a simetria conforme é quebrada, assim obtém-se uma teoria massiva. Por outro lado, as soluções soliton são obtidas na órbita da solução $\eta = 0$ e suas massas correspondentes são determinadas unicamente pelo comportamento em $x = \pm\infty$ da derivada espacial do campo auxiliar ν [8].

Pode-se verificar facilmente que os vínculos (3.17), uma vez que ajustamos $\eta = 0$, são equivalentes a

$$\frac{1}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi = \frac{1}{\pi}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (3.21)$$

Assim, no modelo com a simetria de calibre fixada, a corrente de Noether (2.13) é proporcional à corrente topológica (2.16). Por exemplo, isto implica que a densidade de carga $\psi^\dagger\psi$ é proporcional à derivada espacial de φ ; conseqüentemente, o campo de matéria é confinado dentro dos sólitons. Este fato pode ser visto no caso de soluções um-soliton e dois-soliton de (3.12) os quais foram verificados na seção 2. A solução $\eta = 0$ do vácuo foi usada para executar a transformação “dressing” a fim de se obter as soluções soliton, que estão na órbita de uma solução de vácuo. Pode-se também observar que estas transformações não excitam o campo η e as soluções sóliton são soluções do modelo com fixação de calibre da simetria conforme. A solução um-soliton para φ é exatamente um soliton do tipo de sine-Gordon, e a solução correspondente de ψ é do modelo de Thirring massivo [27]. Além do mais, se pode verificar que estas soluções satisfazem (3.21), e assim que é uma solução do modelo com simetria conforme fixada, implicando que o campo de Dirac deve ser confinado dentro dos solitons.

3.3 O formalismo de FJ e o modelo de Thirring massivo

Consideraremos o seguinte Lagrangeano do sistema ATM

$$\frac{1}{k}\mathcal{L}(\varphi, \psi, \bar{\psi}, \lambda_\mu) = \frac{1}{4}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m_\psi\bar{\psi}e^{2i\varphi\gamma_5}\psi + \lambda_\mu(2\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi), \quad (3.22)$$

onde incorporamos a equivalência das correntes topológica e de Noether (3.21) adicionando ao Lagrangeano o termo $\lambda_\mu(2\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi)$, onde λ_μ são multiplicadores de Lagrange. O mesmo procedimento foi usado, por exemplo, para incorporar a condição chiral (movimento à esquerda) para o boson no estudo de bosons chirais em duas dimensões na Ref. [45]. Observe que os termos de λ_μ em (3.22) quebram as simetrias locais esquerda-direita (2.10)-(2.11) do (3.20) do modelo ATM o qual sobreviveu a fixação de calibre da simetria conforme. A fim de escrever (3.22) na forma de primeira ordem (3.1), definimos os momentos conjugados

$$\pi_\varphi = \frac{1}{2}\dot{\varphi} + \lambda_1, \quad \pi_{\lambda_\mu} = 0, \quad \pi_{\psi_R} = -i\psi_R, \quad \pi_{\psi_L} = -i\psi_L. \quad (3.23)$$

Estamos supondo que os campos de Dirac são variáveis de Grassmann anticomutantes e as suas variáveis dos momentos definidos através de derivadas **esquerda**. Então, como é usual, o Hamiltoniano é definido por

$$\mathcal{H}_c = \pi_\varphi\dot{\varphi} + \pi_{\psi_R}\dot{\psi}_R + \pi_{\psi_L}\dot{\psi}_L - \mathcal{L}. \quad (3.24)$$

Explicitamente a densidade Hamiltoniana é

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c = & \pi_\varphi^2 + \lambda_1^2 + \frac{1}{4}\varphi'^2 + \pi_{\psi_R}\psi'_R - \pi_{\psi_L}\psi'_L - 2\lambda_1j^1 - 2\lambda_1\pi_\varphi - \lambda_0(2j^0 - \varphi') \\ & + im_\psi(e^{-2i\varphi}\psi_R^*\psi_L - e^{2i\varphi}\psi_L^*\psi_R). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Agora, a mesma transformação de Legendre (3.24) é usada para escrever o Lagrangeano de primeira ordem

$$\mathcal{L} = \pi_\varphi\dot{\varphi} + \pi_{\psi_R}\dot{\psi}_R + \pi_{\psi_L}\dot{\psi}_L - \mathcal{H}_c. \quad (3.26)$$

Nosso ponto de partida para a análise de FJ será este Lagrangeano de primeira ordem. O Lagrangeano (3.26) está já na forma (3.1), e as equações de Euler-Lagrange para os multiplicadores de Lagrange permitem-nos resolver para um deles

$$\lambda_1 = j^1 + \pi_\varphi, \quad (3.27)$$

e a outra equação resulta num vínculo

$$\Omega_1 \equiv 2j^0 - \varphi' = 0. \quad (3.28)$$

Então , o multiplicador de Lagrange λ_1 deve ser substituído no Lagrangeano (3.26) e o vínculo (3.28) resolvido. Primeiramente, substituímos o multiplicador λ_1 em $\mathcal{H}_c$, então obtemos

$$\mathcal{H}'_c = -(j^1)^2 + \frac{1}{4}\varphi'^2 + \pi_{\psi_R}\psi'_R - \pi_{\psi_L}\psi'_L - 2\pi_\varphi j^1 - \lambda_0\Omega_1 + im_\psi e^{-2i\varphi}\psi_R^*\psi_L - e^{2i\varphi}\psi_L^*\psi_R). \quad (3.29)$$

Então , o novo Lagrangeano é

$$\mathcal{L}' = \pi_\varphi\dot{\varphi} + \pi_{\psi_R}\dot{\psi}_R + \pi_{\psi_L}\dot{\psi}_L - \mathcal{H}'_c. \quad (3.30)$$

Pode-se implementar o vínculo substituindo neste Lagrangeano o campo φ nos termos da integral espacial da componente de corrente j^0 . Note-se que nos termos de interação aparecem expressões não -loais complicadas. Assim, obtemos o seguinte lagrangeano

$$\mathcal{L}'' = \pi_\varphi\partial_t\int^x 2j^0 + \pi_{\psi_R}\dot{\psi}_R + \pi_{\psi_L}\dot{\psi}_L + i\psi_R^*\psi'_R - i\psi_L^*\psi'_L - im_\psi(e^{-4\int^x j^0}\psi_R^*\psi_L - e^{4\int^x j^0}\psi_L^*\psi_R) - j^\mu j_\mu + 2\pi_\varphi j^1. \quad (3.31)$$

Note o aparecimento do termo de interação corrente-corrente.

As seguintes transformações de Darboux

$$\pi_\varphi \rightarrow \pi'_\varphi, \quad \psi_R \rightarrow e^{-2\int^x j^0}\psi_R, \quad \psi_L \rightarrow e^{2\int^x j^0}\psi_L, \quad (3.32)$$

com o momento π'_φ convenientemente escolhido, é usado para diagonalizar a uma forma canônica. Assim, após definir $k \equiv 2/g$, e re-escalando o campo $\psi \rightarrow 1/\sqrt{k}\psi$, ficamos com o Lagrangeano

$$\mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}] = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m_\psi\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2}gj_\mu j^\mu \quad (3.33)$$

que é precisamente o modelo massivo de Thirring. Os pares canônicos são $(-i\psi_R^*, \psi_R)$ e $(-i\psi_L^*, \psi_L)$.

3.4 O método simplético aplicado ao modelo

3.4.1 O modelo de Thirring massivo

Agora estudamos o nosso modelo no formalism da estrutura simplética. Os números dos índices superiores serão escritos de acordo ao caráter iterativo do formalism

simplético vinculado. Assim, $\mathcal{L}'$ é considerado como o Lagrangeano zero iterado $\mathcal{L}^{(0)}$. A fim de desenvolver esta análise começaremos do Lagrangeano de primeira ordem (3.30), escrita como

$$\mathcal{L}^{(1)} = \pi_\varphi \dot{\varphi} + \pi_{\psi_R} \dot{\psi}_R + \pi_{\psi_L} \dot{\psi}_L + \dot{\eta}^1 \Omega_1 - \mathcal{V}^{(1)}, \quad (3.34)$$

onde o potencial simplético uma vez iterado é

$$\mathcal{V}^{(1)} = \mathcal{H}'_c|_{\Omega_1=0}, \quad (3.35)$$

ou explicitamente

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{(1)} = & [- (j^1)^2 - 2\pi_\varphi j^1 + \frac{1}{4} \varphi'^2 - i\psi_R^* \psi'_R + i\psi_L^* \psi'_L + \\ & im_\psi (e^{-2i\varphi} \psi_R^* \psi_L - e^{2i\varphi} \psi_L^* \psi_R)]|_{\Omega_1=0} \end{aligned} \quad (3.36)$$

e a condição de estabilidade do vínculo simplético Ω_1 sob a evolução temporal foi implementada fazendo $\lambda_0 \rightarrow \dot{\eta}^1$. Considere o conjunto das variáveis simpléticas da primeira iteração na seguinte ordem

$$\xi_A^{(1)} = (\eta^1, \varphi, \psi_R, \psi_L, \pi_\varphi, \pi_{\psi_R}, \pi_{\psi_L}) \quad (3.37)$$

e as componentes de uma forma canônica

$$a_A^{(1)} = (\Omega_1, \pi_\varphi, \pi_{\psi_R}, \pi_{\psi_L}, 0, 0, 0). \quad (3.38)$$

Logo obtemos a seguinte 2-forma simplética singular

$$f_{AB}^{(1)}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_x & -2i\psi_R^* & -2i\psi_L^* & 0 & -2\psi_R & -2\psi_L \\ -\partial_x & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2i\psi_R^* & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2i\psi_L^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\psi_R & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\psi_L & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(x - y). \quad (3.39)$$

Esta matriz tem o modo zero

$$\mathbf{v}^{(1)T}(x) = (u, 0, -2u\psi_R, -2u\psi_L, -u', -2iu\psi_R^*, -2iu\psi_L^*), \quad (3.40)$$

onde u é uma função arbitrária. A condição de modo zero, Eq. (3.7) fornece

$$\int dx \mathbf{v}^{(1)T}(x) \frac{\delta}{\delta \Phi(x)} \int dy \mathcal{V}^{(1)} \equiv 0. \quad (3.41)$$

Então o gradiente do potencial simplético é ortogonal ao modo zero $\mathbf{v}^{(1)}$. As equações do movimento são satisfeitas automaticamente, e nenhum vínculo simplético aparece. Isto acontece devido à presença da seguinte simetria da ação

$$\begin{aligned}\delta\eta^1 &= u, \delta\varphi = 0, \delta\pi_\varphi = -u', \delta\psi_R = -2u\psi_R, \delta\psi_L = -2u\psi_L, \\ \delta\pi_{\psi_R} &= -2iu\psi_R^*, \delta\pi_{\psi_L} = -2iu\psi_L^*.\end{aligned}\quad (3.42)$$

Assim, a fim de se deformar a matriz simplética em uma inversível, temos que adicionar um termo de fixação de simetria de calibre ao potencial simplético. Pode-se escolher qualquer condição de “gauge” consistente [20]. Neste caso em que temos um gerador de simetria associado ao parâmetro u , devemos ter uma condição de fixação de simetria de calibre. Escolhemos o calibre

$$\Omega_2 \equiv \varphi = 0. \quad (3.43)$$

Fazendo isto nós estamos eliminando o campo φ , e assim somente as variáveis restantes descreverão a dinâmica do sistema. Outras condições de calibre, que eliminam o campo ψ serão impostas na subseção seguinte. Uma discussão curta a respeito da possibilidade de ambigüidades de Gribov relacionadas a estas fixações de “gauge” será apresentada no fim da subseção seguinte.

Implementando a condição de consistência por meio do multiplicador de Lagrange η^2 (que amplía ainda mais o espaço da configuração) obtemos o Lagrangeano duas vezes iterado

$$\mathcal{L}^{(2)} = \pi_\varphi \dot{\varphi} + \pi_{\psi_R} \dot{\psi}_R + \pi_{\psi_L} \dot{\psi}_L + \dot{\eta}^1 \Omega_1 + \dot{\eta}^2 \Omega_2 - \mathcal{V}^{(2)}, \quad (3.44)$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^{(2)} &= \mathcal{V}^{(1)}|_{\Omega_2=0} \\ &= -2j^1\pi_\varphi - i\psi_R^*\psi_R' + i\psi_L^*\psi_L' + m_\psi e^{\eta_0}\bar{\psi}\psi + j^\mu j_\mu\end{aligned}\quad (3.45)$$

ou explicitamente

$$\mathcal{V}^{(2)} = j^\mu j_\mu - 2j^1\pi_\varphi - i\psi_R^*\psi_R' + i\psi_L^*\psi_L' + m_\psi\bar{\psi}\psi. \quad (3.46)$$

Assumindo que o novo conjunto das variáveis simpléticas é dado na seguinte ordem

$$\xi_A^{(2)} = (\eta^1, \eta^2, \varphi, \psi_R, \psi_L, \pi_\varphi, \pi_{\psi_R}, \pi_{\psi_L}) \quad (3.47)$$

e as componentes não nulas de uma forma canônica

$$a_A^{(1)} = (\Omega_1, \Omega_2, \pi_\varphi, \pi_{\psi_R}, \pi_{\psi_L}, 0, 0, 0), \quad (3.48)$$

podemos obter a segunda iteração da matriz simplética singular

$$f_{AB}^{(2)}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\partial_x & -2i\psi_R^* & -2i\psi_L^* & 0 & -2\psi_R & -2\psi_L \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\partial_x & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2i\psi_R^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2i\psi_L^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\psi_R & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\psi_L & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(x - y). \quad (3.49)$$

O correspondente modo zero é

$$\mathbf{v}^{(2)T}(x) = (u, 0, 0, -2u\psi_R, -2u\psi_L, 0, -2iu\psi_R^*, -2iu\psi_L^*) \quad (3.50)$$

e a seguinte simetria da ação

$$\begin{aligned} \delta\eta^1 &= u, \delta\eta^2 = 0, \delta\varphi = 0, \delta\pi_\varphi = 0, \delta\psi_R = -2u\psi_R, \\ \delta\psi_L &= -2u\psi_L, \delta\pi_{\psi_R} = -2iu\psi_R^*, \delta\pi_{\psi_L} = -2iu\psi_L^*. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Desta vez escolhemos o calibre

$$\Omega_3 \equiv \pi_\varphi = 0, \quad (3.52)$$

e usando a condição de consistência por meio de um novo multiplicador de Lagrange η^3 obtemos o terceiro Lagrangeano iterado

$$\mathcal{L}^{(3)} = \pi_\varphi \dot{\varphi} + \pi_{\psi_R} \dot{\psi}_R + \pi_{\psi_L} \dot{\psi}_L + \dot{\eta}^1 \Omega_1 + \dot{\eta}^2 \Omega_2 + \dot{\eta}^3 \Omega_3 - \mathcal{V}^{(3)}, \quad (3.53)$$

onde

$$\mathcal{V}^{(3)} = \mathcal{V}^{(2)}|_{\Omega_3=0}. \quad (3.54)$$

ou explicitamente

$$\mathcal{V}^{(3)} = j^\mu j_\mu - i\tilde{\psi}_R \psi'_R + i\psi_L^* \psi'_L + m_\psi \psi^* \psi. \quad (3.55)$$

Desde que a 2-forma simplética para este Lagrangeano é uma matriz não singular nosso algoritmo terminou.

Agora é fácil ver que re-escrevendo a parte canônica e o potencial simplético $\mathcal{V}^{(3)}$ terminamos com o seguinte lagrangeano do modelo massivo de Thirring

$$\mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}] = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m_\psi \bar{\psi}\psi - \frac{1}{2} g j_\mu j^\mu + \mu j^0. \quad (3.56)$$

Fizemos a mesma escolha, $k = 2/g$, como na sub-seção precedente, e no campo o re-escalamento $\psi \rightarrow 1/\sqrt{k}\psi$. Isto está de acordo com nosso resultado em (3.33), onde foi obtido resolvendo-se o vínculo e diagonalizando-se a parte canônica por meio de uma transformação de Darboux do campo de Dirac (3.32). Como um bônus, no método simplético obtemos um termo associado ao potencial químico μ ($2\dot{\eta}^1 \rightarrow \mu$) vezes a densidade de carga do férmion. Este potencial químico é o multiplicador de Lagrange associado à conservação do número dos férmions menos o número dos anti-férmions $Q_F = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx j^0(t, x)$, e este termo torna-se evidente no formalismo simplético porque fizemos a fixação de calibre (3.43) o qual vira Ω_1 em $2j^0$; entretanto, no método de Faddeev-Jackiw resolvemos o vínculo $\Omega_1 = 0$, (3.28), e substituído em Eqs. (3.29)-(3.30) assim o termo $2\lambda_0 j^0$ falta nas Eqs. (3.31) e (3.33). Isto é relacionado essencialmente à natureza do método simplético em que os vínculos são incluídos no Lagrangeano por meio dos multiplicadores de Lagrange que são velocidades, como nas Eqs. (3.11) e (3.34); deste modo ampliando o espaço das configurações e permitindo a aparecimento deste tipo de termos no Lagrangeano final.

3.4.2 O modelo de sine-Gordon

Como foi antecipado acima, pode-se escolher um outro calibre em vez de (3.43), para construir o Lagrangian duas vezes iterado. Fazendo a escolha

$$\Omega_2 \equiv j^0 = 0, \quad (3.57)$$

que satisfaz a condição de não invariança de calibre como pode ser verificado facilmente calculando o colchete $\{\Omega_1, j^0\} = 0$. O Lagrangeano duas vezes iterado é obtido restabelecendo este vínculo na parte canônica de $\mathcal{L}^{(1)}$, então

$$\mathcal{L}^{(2)} = \pi_\varphi \dot{\varphi} + \pi_{\psi_R} \dot{\psi}_R + \pi_{\psi_L} \dot{\psi}_L + \dot{\eta}^1 \Omega_1 + \dot{\eta}^2 \Omega_2 - \mathcal{V}^{(2)}, \quad (3.58)$$

onde o potencial simplético duas vezes iterado é

$$\mathcal{V}^{(2)} = \mathcal{V}^{(1)}|_{\Omega^2=0}. \quad (3.59)$$

Considere o conjunto das variáveis simpléticas na seguinte ordem

$$\xi_A^{(2)} = (\eta^1, \eta^2, \varphi, \psi_R, \psi_L, \pi_\varphi, \pi_{\psi_R}, \pi_{\psi_L}) \quad (3.60)$$

e as componentes de uma forma canônica

$$a_A^{(2)} = (\Omega_1, \Omega_2, \pi_\varphi, \pi_{\psi_R}, \pi_{\psi_L}, 0, 0, 0) \quad (3.61)$$

a matriz (degenerada) simplética torna-se

$$f_{AB}^{(2)}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\partial_x & -2i\psi_R^* & -2i\psi_L^* & 0 & -2\psi_R^* & -2\psi_L^* \\ 0 & 0 & 0 & -\psi_R & -\psi_L & 0 & i\psi_R & i\psi_L \\ -\partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2i\psi_R^* & -\psi_R^* & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2i\psi_L^* & -\psi_L^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\psi_R & i\psi_R & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\psi_L & i\psi_L & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \delta(x - y) \quad (3.62)$$

O modo zero é facilmente achado

$$\mathbf{v}^{(2)T}(x) = (u, v, 0, (iv-2u)\psi_R, (iv-2u)\psi_L, -u', (-v-2iu)\psi_R^*, (-v-2iu)\psi_L^*), \quad (3.63)$$

onde u e v são funções arbitrárias. A condição de modo zero, Eq. (3.7) fornece o vínculo

$$\int dx \mathbf{v}^{(2)T}(x) \frac{\delta}{\delta \Phi(x)} \int dy \mathcal{V}^{(2)} = \int dx j^1 \partial_x v \equiv 0. \quad (3.64)$$

Desde que a função $\partial_x v$ é arbitrária ficamos com o vínculo

$$\Omega_3 \equiv j^1 = 0. \quad (3.65)$$

Note que resolvendo os vínculos $\Omega_2 = 0$ e $\Omega_3 = 0$, obtemos

$$\psi_R^* = \psi_R, \quad \psi_L^* = \psi_L. \quad (3.66)$$

Este é precisamente a condição de realidade para os campos de Fermi. Assim, ficamos na teoria com um férmion de Majorana, o escalar φ , e os campos auxiliares. Com a condição de consistência implementada com a introdução de um terceiro multiplicador de Lagrange em $\mathcal{L}^{(2)}$ obtemos

$$\mathcal{L}^{(3)} = \pi_\varphi \dot{\varphi} + \pi_{\psi_R} \dot{\psi}_R + \pi_{\psi_L} \dot{\psi}_L + \dot{\eta}^1 \Omega_1 + \dot{\eta}^2 \Omega_2 + \dot{\eta}^3 \Omega_3 - \mathcal{V}^{(3)}, \quad (3.67)$$

onde

$$\mathcal{V}^{(3)} = \mathcal{V}^{(2)}|_{\Omega_3=0} \quad (3.68)$$

ou

$$\mathcal{V}^{(3)} = \frac{1}{4} \varphi'^2 - i\psi_R \psi_R' + \psi_L \psi_L' + im_\psi \psi_R \psi_L (e^{-2i\varphi} + e^{2i\varphi}). \quad (3.69)$$

O novo conjunto das variáveis simpléticas é tomado na seguinte ordem

$$\xi_A^{(3)} = (\eta^1, \eta^2, \eta^3, \varphi, \psi_R, \psi_L, \pi_\varphi, \pi_{\psi_R}, \pi_{\psi_L}). \quad (3.70)$$

Encontramos os seguintes componentes de uma forma canônica

$$a_A^{(3)} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \pi_\varphi, \pi_{\psi_R}, \pi_{\psi_L}, 0, 0, 0). \quad (3.71)$$

Depois de algumas manipulações algébricas obtemos a seguinte 2-forma simplética trez vezes iterado

$$f_{AB}^{(3)}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\partial_x & -2i\psi_R^* & -2i\psi_L^* & 0 & -2\psi_R & -2\psi_L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\psi_R^* & -\psi_L^* & 0 & i\psi_R & i\psi_L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\psi_R^* & \psi_L^* & 0 & i\psi_R & -i\psi_L \\ -\partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2i\psi_R^* & -\psi_R^* & -\psi_R^* & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2i\psi_L^* & -\psi_L^* & \psi_L^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\psi_R & i\psi_R & i\psi_R & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\psi_L & i\psi_L & -i\psi_L & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \delta(x - y) \quad (3.72)$$

Pode-se verificar que esta matriz possui um único modo zero

$$\mathbf{v}^{(3)}(x) = (u, -2iu, 0, 0, 0, 0, -u', 0, 0), \quad (3.73)$$

onde a função u é totalmente arbitrário. A condição de modo zero (3.7) fornece

$$\int dx \mathbf{v}(x)^T \frac{\delta}{\delta \Phi(x)} \int dy \mathcal{V}^{(3)} \equiv 0. \quad (3.74)$$

Então a ação possui a simetria

$$\begin{aligned} \delta\eta^1 &= u, \quad \delta\eta^2 = -2iu, \quad \delta\eta^3 = 0, \quad \delta\varphi = 0, \quad \delta\pi_\varphi = -u', \quad \delta\psi_R = 0, \quad \delta\psi_L = 0 \\ \delta\pi_{\psi_R} &= 0, \quad \delta\pi_{\psi_L} = 0. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Esta simetria permite a fixação $i\psi_R\psi_L = \text{constante}$. Tomando $\psi_R = -iM\bar{\theta}$ e $\psi_L = \theta$, com M um número real, obtemos que $i\psi_R\psi_L$ na verdade é uma constante. Note-se que θ e $\bar{\theta}$ são variáveis Grassmannianas, entretanto $\bar{\theta}\theta$ é um número ordinário.

A fim de obter um Lagrangeano final manifestamente invariante de Lorentz fazemos a seguinte observação. A dois forma $f_{AB}^{(3)}(x, y)$, Eq. (3.72), no subespaço (φ, π_φ) define uma estrutura simplética canônica modulo transformações canônicas. As coordenadas φ e π_φ não são únicas. Considere uma transformação canônica de (φ, π_φ) a $(\hat{\varphi}, \hat{\pi}_\varphi)$ tais que $\varphi = \frac{\partial F}{\partial \pi_\varphi}$ e $\hat{\varphi} = \frac{\partial F}{\partial \hat{\pi}_\varphi}$, onde F é conhecido em mecânica

clássica como a função geratriz da transformação canônica. Então, em particular se $\varphi = \hat{\varphi}$, pode-se, em princípio, resolver para a função F tal que um termo cinético manifestamente covariante apareça no Lagrangeano novo. Entretanto, este ponto merece um tratamento mais cuidadoso, desde que os métodos usados acima não são manifestamente covariantes porque tem que escolher-se explicitamente um “tempo” para se definir um Lagrangeano de primeira ordem requerido para aplicar os formalismos. Acreditamos que uma caracterização covariante do espaço de fase clássico no formalismo simplético (vinculado) deva resolver o problema, por exemplo, no espírito da descrição simplética covariante de Crnkovic-Witten-Zuckerman (veja [46] e demais referências citadas).

Então escolhendo $k = 2/g$ como a constante de acoplamento global e re-escalando os campos, $\varphi \rightarrow \sqrt{g}\varphi$, ficamos com

$$\mathcal{L}'' = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{2}{g}m_\psi M \cos 2\sqrt{g}\varphi + \mu\varphi'. \quad (3.76)$$

Isto é justamente o Lagrangeano do modelo de sine-Gordon. Além do mais, obtemos um termo multiplicado por um potencial químico μ ($\eta^1 \rightarrow \mu$). Este é um termo topológico, no sentido que depende somente do valor do campo φ na fronteira espacial ($x = \pm\infty$) que é justamente a densidade da carga topológica. Este termo é relacionado à conservação do número das torções menos as anti-torções $Q_{\text{topol.}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi'$ e sua presença é uma consequência do método simplético como enfatizado na última subseção.

Nos procedimentos acima de fixação de calibre a possibilidade de ambigüidades do tipo Gribov merece uma análise mais cuidadosa. Para evitar as ambigüidades no procedimento de fixação de calibre, foi proposto recentemente alguns métodos alternativos de abstrair o espaço reduzido (físico) sem fixar o calibre [47, 48]. A ambigüidade de Gribov manifesta-se pela não unicidade nas transformações canônicas que conectam o hamiltonian no calibre afrito com aquele obtido independentemente do calibre [48]. Desta maneira a redução feita na seção 3.3 que usa o método de FJ assemelha-se aos métodos alternativos de se obter o espaço reduzido de fase usando uma análise independente do calibre. Então no setor de Thirring massivo do nosso modelo, o calibre da subseção 3.4.1, Eqs. (3.43) e (3.52), parece não estar afrito por tal ambigüidade, desde que aparte do termo μj^0 , os hamiltonianos correspondentes aos Lagrangeanos (3.33) e (3.56), podem ser relacionados por uma transformação canônica identidade. Não obstante, no setor de sine-Gordon de nosso modelo, o calibre (3.57) e aquele que fixa a simetria (3.75) merecem uma análise mais cuidadosa, que não será empreendida nesta tese.

Capítulo 4

Discussões

Na seção 2 consideramos alguns aspectos da teoria quântica e clássica do modelo de Toda não abeliano acoplado à matéria no caso $\hat{sl}(2)$. Descrevemos as simetrias clássicas do sistema, isto é, a simetria conforme; as simetrias quirais locais, que no caso global estão associadas às correntes de Noether e topológica; e a simetria do tipo CP . O aspecto quântico é estudado usando o método de bosonização. Deste modo, usando as regras de bosonização (2.24)-(2.26) podemos reescrever o Lagrangeano na forma (2.31). Assim, ρ é um campo escalar livre com métrica indefinida e ϕ é o campo de sine-Gordon acoplado a η . A validade quântica da relação (3.21) ou (3.17), envolvendo a corrente de Noether e a corrente topológica, é estabelecida uma vez que a redução $\mathcal{J} = -\tilde{\psi}^T (1 + \gamma_5) \psi + \partial_+ \varphi \equiv 0$ e $\bar{\mathcal{J}} = \tilde{\psi}^T (1 - \gamma_5) \psi + \partial_- \varphi \equiv 0$ é imposta. Estas correntes em termos do novo campo ρ escrevem-se

$$\mathcal{J} = \frac{\sqrt{4\pi - 8}}{\sqrt{2\pi}} \partial_+ \rho; \quad \bar{\mathcal{J}} = \frac{\sqrt{4\pi - 8}}{\sqrt{2\pi}} \partial_- \rho \quad (4.1)$$

Portanto, os vínculos acima são equivalentes a $\langle \rho \rangle = \text{const.}$; conseqüentemente o grau de liberdade eliminado com esta redução corresponde ao campo quântico ρ .

Notamos que a invariancia conforme associada ao lagrangeano inicial (2.1) é quebrada pelo processo de quantização. Deste modo temos uma teoria com escala de massa dado pelo valor de esperado

$$\langle \Psi_0 | e^\eta | \Psi_0 \rangle = \text{const.} \quad (4.2)$$

Assim, isto é semelhante ao mecanismo de Higgs, já que esta quebra de simetria gera a massa do campo ϕ . Desta forma, concluímos que após a redução e a quebra espontânea de simetria conforme, ficamos com uma teoria unitária que é o bem conhecido modelo de sine-Gordon associado ao campo ϕ ou equivalentemente o modelo de Thirring massivo. Desta forma mostramos que na teoria, após a redução e a quebra espontânea de simetria conforme, o campo ψ fica confinado. Por exemplo no estado de 1-soliton onde a equação (3.21) implica $\langle \partial_x \varphi \rangle = \langle \psi^\dagger \psi \rangle$; isto é,

a relação de equivalência das correntes, satisfeita clássicamente é mantida a nível quântico.

Concluimos também o exame do papel das soluções clássicas do tipo sólon no nível quântico do modelo.

Na construção das soluções clássicas usamos o método das transformações 'dressing', deste modo obtemos soluções do tipo N -sólon. No caso 1-sólon o modelo contém os sólons (antisólon) de sine-Gordon para o campo φ . A imposição da condição de realidade ao espinor

$$\tilde{\psi} = e_{\psi}\psi^*, \quad (4.3)$$

onde e_{ψ} é um parâmetro real, implica que somente as soluções de um tipo de carga topológica (solitons ou antisolons, dependendo do sinal de e_{ψ}) mantem-se, isto é

$$Q_{\text{topol}} = \text{signe}_{\psi}, \quad (4.4)$$

sendo que a solução correspondente ao campo de Dirac ψ satisfaz a equação de Thirring massivo.

Examinando o caso 2-sólon verificamos o mesmo comportamento após a imposição da condição de realidade do espinor; assim uma das soluções, 2-soliton ou 2-antisoliton, desaparecerá do espectro. Aqui encontramos uma nova característica do modelo, não foi possível obter uma solução de carga topológica zero (soliton-antisoliton) para φ real. No entanto, tais soluções são possíveis para φ complexo mas reais nos limites $x \rightarrow \pm\infty$. Além do mais, calculamos os tempos de retardamento ("time delays") dos solitons após uma colisão mútua. Desde que os sinais destes tempos, no referencial do centro dos momentos, são negativos, concluimos que a força entre os sólons é atrativo. Observamos também que após a identificação $k = 2/\beta^2$ da constante de acoplamento, estes tempos coincidem com os tempos do modelo de sine-Gordon.

Na seção 3 estudamos a estrutura simplética do modelo mediante os métodos de Faddeev-Jackiw e simplético (vinculado) (Barcelos-Neto, Montani e Wotzasek). A invariância conforme do sub- modelo (com Lagrangeano real) de Toda afim sl_2 acoplado à matéria (CATM) é fixado ajustando $\eta = 0$, e temos definido então o modelo fora do ponto crítico que chamamos de Toda afim acoplado a matéria (ATM). A redução é executada impondo um vínculo que seja precisamente a relação de equivalência entre as correntes de Noether e topológicas. Incorporamos este vínculo adicionando à ação o termo $\lambda_{\mu}(2j^{\mu} - \epsilon_{\mu\nu}\partial_{\nu}\varphi)$ onde os λ_{μ} são multiplicadores de Lagrange. Escrevemos a densidade Lagrangeana como uma expressão de primeira ordem nas derivativas do tempo das variáveis dinâmicas, e observamos que λ_1 aparece

em forma não linear enquanto que λ_0 em forma linear. As equações de Euler-Lagrange para os λ 's permitem resolver para o λ_1 nos termos das outras variáveis, e deixamos para uma análise posterior o λ_0 linear que é relacionado a um vínculo verdadeiro $\Omega_1 \equiv 2j^0 - \varphi'$. Então seguindo o método inicial de FJ resolvemos o vínculo para o campo φ , que é a maneira mais fácil de se fazer, substituindo na densidade Lagrangeana e desenvolvendo uma transformação de Darboux, ficamos com uma expressão canônica para os campos de Dirac, que misturados ao potencial simplético é precisamente o modelo de Thirring massivo.

O segundo ponto importante que devemos destacar é o uso do formalismo simplético vinculado, que é muito útil para superar a tarefa difícil de resolver o vínculo para o campo de Dirac nos termos do campo φ como requeridos no método inicial de FJ. Trazendo os vínculos iterativamente na parte canônica do Lagrangeano, considerando as condições de modo zero e depois impondo os novos vínculos e fixando os calibres nós pudemos chegar finalmente ao modelo de sine-Gordon ou ao modelo de Thirring massivo, dependendo da fixação específica de calibre.

Uma observação interessante é que o método permitiu que obtivéssemos a estrutura canônica somente nos termos do férmion ou no grau de liberdade do boson, escolhendo convenientemente o vínculo inicial no Lagrangeano o qual não é nada mais do que a condição de equivalência das correntes de Noether e topológica incorporada empregando multiplicadores de Lagrange, e a escolha conveniente dos calibres Eqs. (3.43) e (3.52) para obter o modelo de Thirring massivo, e o calibre Eq. (3.57) e o vínculo Eq.(3.65) para obter o modelo de sine-Gordon. Assim, Eq. (3.20) define o assim chamado Lagrangeano parente [49] do qual ambos os modelos são deriváveis. Dos Lagrangeanos (3.33) e (3.76), fica também claro a transformação de dualidade dos regimes do acoplamento: $g \rightarrow 1/g$. Além disso, acreditamos que este método esclarece o papel jogado por tais Lagrangeanos parentes. Por exemplo na Ref. [50], os autores mostraram recentemente a equivalência exata ao nível quântico entre os modelos de sine-Gordon e de Thirring massivo usando uma teoria mais ampla (Lagrangeano parente) e fixando os calibres em duas maneiras diferentes.

Apêndice A

Notações e Convenções

A.1 Coordenadas de cone de luz e os espinores de Dirac

Usamos as seguintes convenções em duas dimensões . A métrica é $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$ e o tensor antisimétrico $\epsilon_{\mu\nu}$ é definido tal que $\epsilon_{01} = -\epsilon^{01} = -1$. $\partial_{\pm}$ são derivadas com respeito às coordenadas de cone de luz $x_{\pm} = t \pm x$. As matrizes gamma estão na seguinte representação

$$\gamma_0 = -i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

satisfazendo relações de anticomutação

$$\{\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\} = 2g_{\mu\nu} \mathbf{1}, \quad (\text{A.2})$$

assim os espinores ψ e $\bar{\psi}$ são da forma

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}, \quad \tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_R \\ \tilde{\psi}_L \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_R & \tilde{\psi}_L \end{pmatrix} \gamma_0. \quad (\text{A.3})$$

A.2 A álgebra de Lie afim $sl(2)^{(1)}$ e uma base especial

Consideremos os geradores na base de Chevalley $H^n, E_{\pm}^n, D$ e C de $sl(2)^{(1)}$. As relações de comutação são

$$\begin{aligned} [H^m, H^n] &= 2mC\delta_{m+n,0}, \\ [H^m, E_{\pm}^n] &= \pm 2E_{\pm}^{m+n}, \\ [E_+^m, E_-^n] &= H^{m+n} + mC\delta_{m+n,0}, \\ [D, T^n] &= nT^n, \quad T^n \equiv H^m, E_{\pm}^n; \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

as outras relações de comutação são triviais. O operador da graduação principal definido pelo vetor $\mathbf{s} = (1, 1)$ é [33]

$$Q_{\mathbf{s}} \equiv H^0 + N_{\mathbf{s}}D - \frac{1}{2N_{\mathbf{s}}}Tr(H_{\mathbf{s}}^2)C \quad (N_{\mathbf{s}} \equiv \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 = 2). \quad (\text{A.5})$$

Então , os correspondentes auto subespaços são

$$\hat{\mathcal{G}}_0 = \{H^0, C, Q_{\mathbf{s}}\}; \quad (\text{A.6})$$

$$\hat{\mathcal{G}}_{2n+1} = \{E_+^n, E_-^{n+1}\} \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (\text{A.7})$$

$$\hat{\mathcal{G}}_{2n} = \{H^n\}, \quad n \in \{\mathbb{Z} - 0\}. \quad (\text{A.8})$$

Sob a graduação acima a decomposição da álgebra afim é dada por

$$\hat{\mathcal{G}} = \bigoplus_s \hat{\mathcal{G}}_s \quad (\text{A.9})$$

com

$$[\hat{\mathcal{G}}_s, \hat{\mathcal{G}}_s] \subset \hat{\mathcal{G}}_{s+r}. \quad (\text{A.10})$$

Os graus s toman os valores zero, positivo e negativo, i.e.,

$$\hat{\mathcal{G}} = \hat{\mathcal{G}}_+ \oplus \hat{\mathcal{G}}_0 \oplus \hat{\mathcal{G}}_- \quad (\text{A.11})$$

com

$$\hat{\mathcal{G}}_+ \equiv \bigoplus_{s>0} \hat{\mathcal{G}}_s, \quad \hat{\mathcal{G}}_- \equiv \bigoplus_{s<0} \hat{\mathcal{G}}_s \quad (\text{A.12})$$

Além do mais, usaremos uma base especial para os geradores de $\hat{\mathcal{G}}_0$ tal que todos eles sejam ortogonais a $Q_{\mathbf{s}}$ e C . Assim, mudando os elementos de Cartan como $\widetilde{H}^0 = H^0 - \frac{1}{2}C$, obtem-se

$$\begin{aligned} Tr(C^2) &= Tr(C\widetilde{H}^0) = Tr(Q_{\mathbf{s}}^2) = Tr(Q_{\mathbf{s}}\widetilde{H}^0) = 0, \\ Tr(Q_{\mathbf{s}}C) &= 2, Tr(\widetilde{H}^0\widetilde{H}^0) = Tr(H^0H^0) = 2. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Aqui usamos $Tr(CD) = 1$, e a normalização para a raíz, $\alpha^2 = 2$. Para maiores detalhes sobre esta base especial veja o apêndice C da Ref.[52].

A.3 A representação de curvatura nula

As equações de movimento da teoria (2.1) podem ser representados como uma condição de curvatura nula (2.48) com as conexões dadas por [8]

$$A_+ = -B \left(E_2 + F_1^+ \right) B^{-1}, \quad A_- = -\partial_- B B^{-1} + E_{-2} + F_1^-. \quad (\text{A.14})$$

onde

$$B = e^{i\varphi H^0} e^{(\nu - \frac{i}{2}\varphi)C} e^{\eta Q} \quad E_{\pm 2} \equiv \frac{1}{4} m_\psi H^{\pm 1} \quad (\text{A.15})$$

e

$$F_1^+ = \sqrt{i m_\psi} \left(\psi_R E_+^0 + \tilde{\psi}_R E_-^1 \right), \quad F_1^- = \sqrt{i m_\psi} \left(\psi_L E_+^{-1} - \tilde{\psi}_L E_-^0 \right), \quad (\text{A.16})$$

Os espinores de Dirac foram definidas em (A.3).

Apêndice B

As Álgebras de Kac-Moody e as suas Representações Integráveis de Peso Mais Alto

Neste apêndice apresentamos alguns dos formalismos das álgebras de Lie afim $\hat{g}$, mas, somente o mínimo necessário usado na construção dos modelos integráveis estudados por nós, tal como a teoria das representações fundamentais de peso mais alto. Uma revisão mais completa pode ser achada nas seguintes referências [33, 54]. As notações apresentadas, na parte que corresponde à base de Chevalley, são tomadas do apêndice de [52].

Uma álgebra de Lie $\hat{g}$ "untwisted" afim à álgebra finita g (para uma introdução às álgebras de Lie semisimples veja Refs. [58]) pode-se realizar como uma extensão da "álgebra de loop" de uma álgebra de Lie finita

$$\hat{g} = (g \otimes \mathbb{C} [z, z^{-1}]) \oplus \mathbb{C}C \oplus \mathbb{C}D, \quad (\text{B.1})$$

onde $\mathbb{C} [z, z^{-1}]$ é a álgebra dos polinômios de Laurent em z e $\mathbb{C} x$ ($x = C, D$) é um subespaço de dimensão 1. Se escrevermos um elemento de $\hat{g}$ como sendo $a_n \equiv (a \otimes z^n)$, onde $a \in g$ e $n \in \mathbb{Z}$, então a álgebra pode-se escrever como

$$[a_n, b_m] = [a, b]_{n+m} + \delta_{m+n,0} (a, b) mC, \quad [D, a_n] = na_n \quad (\text{B.2})$$

$$[D, D] = [C, D] = [C, C] = [C, a_n] = 0, \quad (\text{B.3})$$

onde (a, b) é a forma de Killing de g e $[a, b]$ é o parênteses de Lie em g . C é o elemento central de $\hat{g}$, e D é a derivação que induz naturalmente uma "gradação inteira" de $\hat{g}$.

$$\hat{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \hat{g}_i,$$

onde $[D, \hat{g}_i] = i\hat{g}_i$. O operador D define a chamada "gradação homogênea".

Neste ponto, pode-se salientar a existência de uma subálgebra de Heisenberg natural de $\hat{g}$. Introduzindo a decomposição triangular da álgebra finita $g = n_- \oplus h \oplus n_+$, pode-se definir a álgebra de Heisenberg homogênea como a álgebra composta dos elementos $\{h \otimes z^n, C\}$ tal que

$$[a_n, b_m] = \delta_{m+n,0} (a, b) mC.$$

Na base de Cartan-Weyl as relações de comutação serão dadas por

$$[H_i^m, H_j^n] = mC\delta_{ij}\delta_{m,-n}, \quad (\text{B.4})$$

$$[H_i^m, E_\alpha^n] = \alpha_i E_\alpha^{m+n}, \quad (\text{B.5})$$

$$[E_\alpha^m, E_\beta^n] = \begin{cases} \varepsilon(\alpha, \beta) E_{\alpha+\beta}^{m+n} & , \text{ se } \alpha + \beta \text{ é uma raiz} \\ \frac{2}{\alpha^2} \alpha \cdot H^{m+n} + Cm\delta_{m+n,0}, & \text{ se } \alpha + \beta = 0 \\ 0 & , \text{ demais casos} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

$$[C, E_\alpha^m] = [C, H_\alpha^m] = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$[D, E_\alpha^n] = nE_\alpha^n, \quad [D, H_i^n] = nH_i^n. \quad (\text{B.8})$$

Neste caso, a subálgebra de cartan é formada pelos geradores $\{H_i^{(0)}, C, D\}$ e os operadores step são:

$-E_\alpha^n$ associados às raízes $a = (\alpha, 0, n)$, onde α pertence ao conjunto de raízes de g e n são inteiros, e

H_i^n associados às raízes $n\delta = (0, 0, n)$ com $n \neq 0$.

As raízes positivas são $(\alpha, 0, n)$ para $n > 0$ ou $n = 0$ e $\alpha > 0$ sendo que as simples destas são $a_i = (\alpha_i, 0, 0)$, $i = 1, \dots, r$ e $\alpha_o = (-\psi, 0, 1)$, com ψ sendo a raiz maximal de g .

A razão pela qual introduzimos a álgebra de Kac-Moody na base de Cartan-Weyl é que a construção de uma representação em termos de operadores de vértice é usualmente efetuada nesta base [53]. De outro lado, a construção da chamada *representação integrável de peso mais alto* [33, 54] da álgebra de Lie "untwisted" afim é efetuada usando a base de Chevalley.

Na base de Chevalley, as relações de comutação para uma álgebra de Kac-Moody "untwisted" afim $\hat{g}$ são (as notações seguem aquelas usadas no apêndice de [52]) .

$$[H_a^m, H_b^n] = mC\eta_{ab}\delta_{m+n,0} \quad (\text{B.9})$$

$$[H_a^m, E_\alpha^n] = \sum_{b=1}^r m_b^\alpha K_{ba} E_\alpha^{m+n} \quad (\text{B.10})$$

$$[E_\alpha^m, E_{-\alpha}^n] = \sum_{a=1}^r l_a^\alpha H_a^{m+n} + \frac{2}{\alpha^2} mC\delta_{m+n,0} \quad (\text{B.11})$$

$$[E_\alpha^m, E_\beta^n] = (q+1)\varepsilon(\alpha, \beta)E_{\alpha+\beta}^{m+n}; \quad \text{se } \alpha + \beta \text{ é uma raiz} \quad (\text{B.12})$$

$$[C, E_\alpha^m] = [C, H_\alpha^n] = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$[D, E_\alpha^n] = nE_\alpha^n, \quad [D, H_a^m] = nH_a^m. \quad (\text{B.14})$$

onde $K_{ab} = 2\alpha_a \cdot \alpha_b / \alpha_b^2$ é a matriz de Cartan da álgebra de Lie finita simples g associada a $\hat{g}$ e gerada por $\{H_a^0, E_\alpha^0\}$. $\eta_{ab} = \frac{2}{\alpha_a^2} K_{ab} = \eta_{ba}$, q é o maior inteiro positivo tal que $\beta - q\alpha$ é uma raiz, $\varepsilon(\alpha, \beta)$ são sinais determinadas pela identidade de Jacobi, l_a^α e m_a^α são os inteiros na expansão $\alpha/\alpha^2 = \sum_{a=1}^r l_a^\alpha \alpha_a / \alpha_a^2$ e $\alpha = \sum_{a=1}^r m_a^\alpha \alpha_a$, onde $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ são as raízes simples de g ($r \equiv \text{posto de } g$). $\hat{g}$ têm uma forma bilinear simétrica, que pode ser normalizada como

$$\text{Tr}(H_a^n H_b^m) = \eta_{ab} \delta_{m+n,0}$$

$$\text{Tr}(E_\alpha^m E_\beta^n) = \frac{2}{\alpha^2} \delta_{\alpha+\beta,0} \delta_{m+n,0}$$

$$\text{Tr}(CD) = 1.$$

A gradação inteira de $\hat{g}$

$$\hat{g} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}_n$$

tem sido apresentada em [33]. O perador de gradação Q_s satisfazendo

$$[Q_s, \hat{g}_n] = n\hat{g}_n; \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (\text{B.15})$$

é definido por

$$Q_s = H_s + N_s D + \sigma C, \quad H_s = \sum_{a=1}^r s_a \lambda_a^v \cdot H^0, \quad H^0 = (H_1^0, \dots, H_r^0) \quad (\text{B.16})$$

onde $(s_0, s_1, \dots, s_r)$ é um vetor de n componentes de números inteiros positivos sendo primos relativos, e $\lambda_a^v \equiv 2\lambda_a / \alpha_a^2$ com λ_a e α_a sendo os pesos fundamentais e as raízes simples de g respectivamente. Além do mais,

$$N_s = \sum_{i=0}^r s_i m_i^\psi, \quad \psi = \sum_{a=1}^r m_a^\psi \alpha_a, \quad m_0^\psi \equiv 1, \quad (\text{B.17})$$

com ψ sendo a raiz maximal de g . O valor de σ é arbitrário. Portanto

$$[Q_s, H_a^n] = nN_s H_a^n$$

$$[Q_s, E_\alpha^n] = \left(\sum_{a=1}^r m_a^\alpha s_a + nN_s \right) E_\alpha^n.$$

Os "operadores step" positivos e negativos de $\hat{g}$ associados às raízes simples são

$$e_a \equiv E_{\alpha_a}^0, \quad e_o \equiv E_{-\psi}^1, \quad f_a \equiv E_{-\alpha_a}^o \quad \text{e} \quad f_o \equiv E_\psi^{-1}, \quad (\text{B.18})$$

e a sua subálgebra de Cartan gerada por

$$h_a \equiv H_a^0, \quad h_0 \equiv - \sum_{a=1}^r l_a^\psi H_a^0 + \frac{2}{\psi^2} C \quad \text{e} \quad D, \quad (\text{B.19})$$

com l_a^ψ dado acima; então eles satisfazem

$$[Q_s, h_i] = [Q_s, D] = 0; \quad [Q_s, e_i] = s_i e_i; \quad [Q_s, f_i] = -s_i f_i; \quad i = 0, 1, \dots, r. \quad (\text{B.20})$$

Uma classe importante das representações das álgebras de Kac-Moody são as chamadas "representações integráveis de peso mais alto", $L(\mathbf{s})$, [33] onde os geradores de Chevalley são localmente nilpotentes. Eles são definidos em termos de um estado de peso mais alto $|\lambda_s\rangle$ rotulado pela gradação $\mathbf{s}$ de $\hat{g}$. Pode ser mostrado que $L(\mathbf{s})$ é irredutível e que $|\lambda_s\rangle$ é o único vetor de peso mais alto de $L(\mathbf{s})$. Esse estado é aniquilado pelos geradores de grau positivo

$$\hat{g}_+ |\lambda_s\rangle = 0, \quad (\text{B.21})$$

e é um autoestado dos geradores da subálgebra $\hat{g}_o$

$$h_i |\lambda_s\rangle = s_i |\lambda_s\rangle \quad (\text{B.22})$$

$$f_i |\lambda_s\rangle = 0; \quad \text{para qualquer } i \text{ com } s_i = 0 \quad (\text{B.23})$$

$$Q_s |\lambda_s\rangle = \eta_s |\lambda_s\rangle \quad (\text{B.24})$$

$$C |\lambda_s\rangle = \frac{\psi^2}{2} \left(\sum_{i=0}^r l_i^\psi s_i \right) |\lambda_s\rangle, \quad (\text{B.25})$$

onde l_i^ψ é dado por

$$\frac{\psi}{\psi^2} = \sum_{a=1}^r l_a^\psi \frac{\alpha_a}{\alpha_a^2}; \quad l_0^\psi = 1. \quad (\text{B.26})$$

Notamos que o autovalor de d_s é arbitrário, e d_s pode ser diagonalizado agindo sobre $L(\mathbf{s})$. O autovalor do elemento central $2c/\psi^2$ na representação $|\lambda_s\rangle$, é conhecido como o nível da representação

$$c = \frac{\psi^2}{2} \left(\sum_{i=0}^r l_i^\psi s_i \right), \quad (\text{B.27})$$

em particular, as “representações integráveis de peso mais alto” com $c = 1$ são chamadas como as “representações básicas”.

Os estados de peso mais alto $|\lambda_s\rangle$ podem ser realizadas como

$$|\lambda_s\rangle \equiv \bigotimes_{i=0}^r |\hat{\lambda}_i\rangle^{\otimes s_i}, \quad (\text{B.28})$$

onde $|\hat{\lambda}_i\rangle$ são os estados mais altos das representações fundamentais de $\hat{g}$, e $\hat{\lambda}_i$ são os pesos fundamentais de $\hat{g}$. Estes estão dados por [53]

$$\hat{\lambda}_0 = \left(0, \frac{\psi^2}{2}, 0 \right) \quad (\text{B.29})$$

$$\hat{\lambda}_a = \left(\lambda_a, \frac{l_a^\psi \psi^2}{2}, 0 \right), \quad (\text{B.30})$$

onde λ_a , $a = 1, 2, \dots, r$ são os pesos fundamentais da álgebra de Lie finita g associada a $\hat{g}$, os números l_a^ψ foram definidos após as relações de comutação (B.9)-(B.14), e as componentes de são os autovalores de H_a^0 , C e D respectivamente, assim

$$H_a^0 |\hat{\lambda}_0\rangle = 0; \quad C |\hat{\lambda}_0\rangle = \frac{\psi^2}{2} |\hat{\lambda}_0\rangle \quad (\text{B.31})$$

$$H_b^0 |\hat{\lambda}_a\rangle = \delta_{a,b} |\hat{\lambda}_a\rangle; \quad C |\hat{\lambda}_a\rangle = \frac{\psi^2}{2} l_a^\psi |\hat{\lambda}_a\rangle \quad (\text{B.32})$$

e

$$D |\hat{\lambda}_i\rangle = 0. \quad (\text{B.33})$$

Note-se que, em cada uma das $r+1$ representações fundamentais de $\hat{g}$, os (únicos) estados de peso mais alto satisfazem

$$h_j |\hat{\lambda}_i\rangle = \delta_{ij} |\hat{\lambda}_i\rangle \quad (\text{B.34})$$

$$e_j |\hat{\lambda}_i\rangle = 0, \quad \forall j \quad (\text{B.35})$$

$$f_j |\hat{\lambda}_i\rangle = 0, \quad \text{for } j \neq i \quad (\text{B.36})$$

$$f_j^2 |\hat{\lambda}_i\rangle = 0. \quad (\text{B.37})$$

Assim, os geradores e_i e f_i são nilpotentes ao atuarem sobre $|\lambda_s\rangle$, e estas representações são na verdade integráveis.

Apêndice C

A Construção dos Operadores de Vértice Homogêneos

As representações das álgebras de Kac-Moody do tipo “operadores de vértice” são apresentadas, por exemplo em [33, 55]. A construção dos operadores de vértice homogêneos é baseada considerando a sub-álgebra de Heisenberg homogênea. No que segue abordamos o tratamento apresentado em [33].

Consideremos

$$g = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathbb{C} E_{\alpha} \right), \quad (\text{C.1})$$

sendo g uma álgebra de Lie finita simples do tipo A_l, D_l ou E_l , cujas relações de comutação são dadas por

$$[h, h'] = 0, \quad \text{para } h, h' \in \mathfrak{h} \quad (\text{C.2})$$

$$[h, E_{\alpha}] = (h | \alpha) E_{\alpha}, \quad \text{para } h \in \mathfrak{h}, \quad \alpha \in \Delta \quad (\text{C.3})$$

$$[E_{\alpha}, E_{-\alpha}] = -\alpha(h), \quad \text{para } \alpha \in \Delta \quad (\text{C.4})$$

$$[E_{\alpha}, E_{\beta}] = 0, \quad \text{para } \alpha, \beta \in \Delta, \quad \alpha + \beta \notin \Delta \cup \{0\} \quad (\text{C.5})$$

$$[E_{\alpha}, E_{\beta}] = \varepsilon(\alpha, \beta) E_{\alpha+\beta}, \quad \text{para } \alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta, \quad (\text{C.6})$$

onde $\Delta = \{\alpha \in Q / (\alpha | \alpha) = 2\}$ e Q é a rede das raízes; $(\cdot | \cdot)$ é a forma simétrica invariante de g , normalizada como segue

$$(h | E_{\alpha}) = 0, \text{ if } h \in \mathfrak{h}, \quad \alpha \in \Delta; \quad (E_{\alpha}, E_{\beta}) = -\delta_{\alpha, -\beta}, \text{ if } \alpha, \beta \in \Delta. \quad (\text{C.7})$$

Seja

$$\hat{g} = \mathbb{C} [t, t^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} g + \mathbb{C} C + \mathbb{C} D, \quad (\text{C.8})$$

a álgebra afim do tipo $A_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$ ou $E_n^{(1)}$, respectivamente.

Consideremos a álgebra associativa comutativa (complexa)

$$V = S \left(\bigoplus_{j < 0} (t^j \otimes \mathbf{h}) \right) \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[Q], \quad (\text{C.9})$$

onde S representa a álgebra simétrica e $\mathbf{C}[Q]$ a álgebra de grupo da rede formada pelas raízes $Q \subset \mathbf{h}$ de g . Considere $\alpha \rightarrow e^\alpha$ denotando a inclusão de $Q \subset \mathbf{C}[Q]$ (a base do espaço vetorial $\mathbf{C}[Q]$ é formado pelos elementos e^α , $\alpha \in Q$, e, define-se o seguinte produto da álgebra de grupo "twisted" $e^\alpha e^\beta = \varepsilon(\alpha, \beta) e^{\alpha+\beta}$ [56]); $u^{(n)}$ representa $t^n \otimes u$ ($n \in \mathbb{Z}$, $u \in g$). Para $n > 0$ e $u \in \mathbf{h}$, denotemos por $u(-n)$ o operador de multiplicação por $u^{(-n)}$ sobre V . Para $n \geq 0$ e $u \in \mathbf{h}$, denotemos por $u(n)$ a derivação da álgebra V definida pela fórmula

$$u(n) (v^{(-m)} \otimes e^\alpha) = n \delta_{n,-m} (u | v) \otimes e^\alpha + \delta_{n,0} (\alpha | u) v^{(-m)} \otimes e^\alpha \quad (\text{C.10})$$

Escolhendo como base dual u_i e u^i de $\mathbf{h}$, definimos o operador D_o sobre V pela fórmula

$$D_o = \sum_{i=1}^l \left(\frac{1}{2} u_i(0) u^i(0) + \sum_{n \geq 1} u_i(-n) u^i(n) \right). \quad (\text{C.11})$$

Além disso, para $\alpha \in Q$, definimos o operador sinal c_α

$$c_\alpha (f \otimes e^\beta) = \varepsilon(\alpha, \beta) f \otimes e^\beta. \quad (\text{C.12})$$

Finalmente, para $\alpha \in \Delta \subset Q$ introduzimos o **operador de vértice**

$$\Gamma_\alpha(z) = \exp \left(\sum_{j \geq 1} \frac{z^j}{j} \alpha(-j) \right) \exp \left(- \sum_{j \geq 1} \frac{z^{-j}}{j} \alpha(j) \right) e^\alpha z^{\alpha(0)} c_\alpha, \quad (\text{C.13})$$

onde z é visto como um parâmetro. Expandindo em potências de z

$$\Gamma_\alpha(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Gamma_\alpha^{(j)} z^{-j-1}, \quad (\text{C.14})$$

obtemos uma seqüência de operadores $\Gamma_\alpha^{(j)}$ sobre V . Agora podemos enunciar o resultado.

Teorema: O mapeamento $\sigma : \hat{g} \rightarrow \text{End}(V)$ definido por

$$\begin{aligned} C &\longrightarrow 1, \\ u^{(n)} &\longrightarrow u(n), \quad \text{for } u \in \mathbf{h}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}, \\ E_\alpha^{(n)} &\longrightarrow \Gamma_\alpha^{(n)}, \quad \text{for } \alpha \in \Delta, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}, \\ D &\longrightarrow -D_o, \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

define a representação básica da álgebra afim $\widehat{g}$ sobre V ; onde $End(V)$ denota o espaço de mapeamentos lineares de um espaço vetorial V sobre si próprio. A prova deste teorema é apresentada em [33].

Apêndice D

Cálculos Usando Operadores de Vértice Homogêneos

Definindo

$$\Gamma_{\alpha}^{\pm}(z) = \exp \sum_{j \geq 1} \frac{\alpha(\pm j)}{\mp j} z^{\mp j}, \quad \Gamma_{\alpha}^0(z) = e^{\alpha} z^{\alpha(0)} c_{\alpha}, \quad (\text{D.1})$$

as seguintes relações podem ser obtidas

$$\Gamma_{\alpha}^{-}(z_1) \Gamma_{\beta}^{+}(z_2) = \Gamma_{\beta}^{+}(z_2) \Gamma_{\alpha}^{-}(z_1) \left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right)^{(\alpha|\beta)} \quad (\text{D.2})$$

e

$$\Gamma_{\alpha}^0(z_1) \Gamma_{\beta}^0(z_2) = e^{\alpha+\beta} z_1^{\alpha(0)} z_2^{\beta(0)} z_1^{(\alpha|\beta)} c_{\alpha} c_{\beta} \varepsilon(\alpha, \beta), \quad (\text{D.3})$$

onde $\left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right)^m$, $m \in \mathbb{Z}$, com $|\frac{z_2}{z_1}| \leq 1$.

De (D.2) e (D.3) podemos obter

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha}(z_1) \Gamma_{\beta}(z_2) &= \left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right)^{(\alpha|\beta)} z_1^{(\alpha|\beta)} \varepsilon(\alpha, \beta) \exp \left[\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} \left(z_1^j \alpha(-j) + z_2^j \beta(-j) \right) \right] \\ &\quad \exp \left[- \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} \left(z_1^{-j} \alpha(j) + z_2^{-j} \beta(j) \right) \right] e^{\alpha+\beta} z_1^{\alpha(0)} z_2^{\beta(0)} c_{\alpha} c_{\beta}. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Se $z \equiv z_1 = z_2$ e $\alpha = \beta$, de (D.4) podemos obter

$$\Gamma_{\alpha}(z) \Gamma_{\alpha}(z) = 0,$$

ou

$$[\Gamma_{\alpha}(z)]^n = 0, \quad \text{para } n \geq 2. \quad (\text{D.5})$$

Uma fórmula útil

$$\Gamma_{\alpha_N}(z_N) \Gamma_{\alpha_{N-1}}(z_{N-1}) \dots \Gamma_{\alpha_1}(z_1) (1 \otimes 1) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \varepsilon(\alpha_i, \alpha_j) (z_i - z_j)^{(\alpha_i|\alpha_j)}.$$

$$\left(\prod_{i=1}^N \exp \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{z_i^j}{j} \alpha_i(-j) \right) \otimes \exp \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right) \quad (\text{D.6})$$

Prova: Provaremos por indução

Para $N = 1$

$$\Gamma_\alpha(z_1) (1 \otimes 1) = \exp \sum_{j \geq 1} \frac{z_1^j}{j} \alpha(-j) \exp - \sum_{j \geq 1} \frac{z_1^{-j}}{j} \alpha(j) e^\alpha z_1^{\alpha(0)} c_\alpha \quad ; \quad (\text{D.7})$$

temos as seguintes relações

$$\begin{aligned} c_\alpha (1 \otimes 1) &= \varepsilon(\alpha, 0) 1 \otimes 1, & \text{consideramos a convenção } \varepsilon(\alpha, 0) \equiv 1 \\ &= 1 \otimes 1 \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

$$\begin{aligned} z_1^{\alpha(0)} (1 \otimes 1) &= 1 \otimes \left(e^{\ln z_1 \alpha(0)} \right) 1 \\ &= 1 \otimes 1. \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

onde usamos

$$e^\alpha (1 \otimes 1) \equiv e^\alpha (1 \otimes e^\alpha) = 1 \otimes e^\alpha \quad (\text{D.10})$$

De (C.10) temos

$$u(n) \left(v^{(0)} \otimes e^\alpha \right) \equiv u(n) (1 \otimes e^\alpha) = n \delta_{n,0} (u \mid v) \otimes e^\alpha + \delta_{n,0} (\alpha \mid u) v^{(0)} \otimes e^\alpha$$

então para $(n > 0)$

$$u(n) (1 \otimes 1) = 0. \quad (\text{D.11})$$

portanto

$$\begin{aligned} \exp - \sum_{j \geq 1} \frac{z_1^{-j}}{j} \alpha(j) (1 \otimes e^\alpha) &= \left[\left(1 - \sum_{j \geq 1} \frac{z_1^{-j}}{j} \alpha(j) + \dots \right) 1 \right] \otimes e^\alpha \\ &= 1 \otimes e^\alpha. \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

De outro lado podemos escrever

$$\exp \sum_{j \geq 1} \frac{z_1^j}{j} \alpha(-j) (1 \otimes e^\alpha) = \sum_{j \geq 1} \frac{z_1^j}{j} \alpha(-j) \otimes e^\alpha,$$

assim

$$\Gamma_{\alpha_1}(z_1) (1 \otimes 1) = \left(\exp \sum_{j \geq 1} \frac{z_1^j}{j} \alpha_1(-j) \right) \otimes e^{\alpha_1}, \quad (\text{D.13})$$

que é igual à relação (D.6) para $N = 1$.

Agora, assumimos que (D.6) é verdadeiro para um dado N , e escrevemos (D.6) como

$$\Gamma_{\alpha_N}(z_N)\Gamma_{\alpha_{N-1}}(z_{N-1})\dots\Gamma_{\alpha_1}(z_1)(1 \otimes 1) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \varepsilon(\alpha_i, \alpha_j)(z_i - z_j)^{(\alpha_i|\alpha_j)} \cdot \left(\prod_{i=1}^N \exp \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{z_i^j}{j} \alpha_i(-j) \right) \exp \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right) (1 \otimes 1). \quad (\text{D.14})$$

Multiplicando (D.14) por $\Gamma_{\alpha_{N+1}}(z_{N+1})$ e usando as relações (D.2), (D.3) e (D.7)-(D.12) repetidamente, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha_{N+1}}(z_{N+1})\Gamma_{\alpha_N}(z_N)\dots\Gamma_{\alpha_1}(z_1)(1 \otimes 1) &= \prod_{1 \leq i < j \leq N} \varepsilon(\alpha_i, \alpha_j)(z_i - z_j)^{(\alpha_i|\alpha_j)} \cdot \\ &\prod_{1 \leq k < N+1} \varepsilon(\alpha_k, \alpha_{N+1})(z_k - z_{N+1})^{(\alpha_k|\alpha_{N+1})} \cdot \left(\exp \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{z_{N+1}^j}{j} \alpha_{N+1}(-j) \right) e^{\alpha_{N+1}} \cdot \\ &\left(\prod_{i=1}^N \exp \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{z_i^j}{j} \alpha_i(-j) \right) \exp \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right) (1 \otimes 1) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq N+1} \varepsilon(\alpha_i, \alpha_j)(z_i - z_j)^{(\alpha_i|\alpha_j)} \left(\prod_{i=1}^{N+1} \exp \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{z_i^j}{j} \alpha_i(-j) \right) \cdot \\ &\exp \left(\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i \right) (1 \otimes 1) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq N+1} \varepsilon(\alpha_i, \alpha_j)(z_i - z_j)^{(\alpha_i|\alpha_j)} \left(\prod_{i=1}^{N+1} \exp \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{z_i^j}{j} \alpha_i(-j) \right) \otimes \exp \left(\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i \right), \end{aligned}$$

que é exatamente a expressão (D.6) escrita para $N + 1$. Deste modo a equação (D.6) foi provada.

Além do mais, fazendo a correspondência

$$|\lambda_o\rangle \longleftrightarrow 1 \otimes 1,$$

onde $|\lambda_o\rangle$ denota o estado de peso mais alto da representação, podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle \lambda_o | \Gamma_{\alpha_N}(z_N)\Gamma_{\alpha_{N-1}}(z_{N-1})\dots\Gamma_{\alpha_1}(z_1) | \lambda_o \rangle &= \\ \begin{cases} 0, & \text{if } \sum_{i=1}^N \alpha_i \neq 0 \\ \prod_{1 \leq i < j \leq N} \varepsilon(\alpha_i, \alpha_j)(z_i - z_j)^{(\alpha_i|\alpha_j)} & \text{if } \sum_{i=1}^N \alpha_i = 0 \end{cases} \quad (\text{D.15}) \end{aligned}$$

onde usamos o fato que

$$\begin{aligned}\langle \lambda_o | \exp \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{z_i^j}{j} \alpha_i(-j) &= \langle \lambda_o | \left(1 + \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{z_i^j}{j} \alpha_i(-j) + \dots \right) \\ &= \langle \lambda_o |,\end{aligned}$$

e

$$\langle \lambda_o | \exp \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right) = \begin{cases} 0, & \text{para } \sum_{i=1}^N \alpha_i \neq 0 \\ \langle \lambda_o |, & \text{para } \sum_{i=1}^N \alpha_i = 0 \end{cases} \quad (\text{D.16})$$

Apêndice E

As Regras de Bosonização

Campos de Fermi livres

Num espaço Euclideano de duas dimensões o operador de Dirac torna-se* (para maiores detalhes e referências no tema sobre bosonização veja Ref. [59])

$$D = \gamma_1 \partial_x + \gamma_2 \partial_y = \begin{bmatrix} 0 & 2\partial_z \\ 2\partial_{\bar{z}} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

Campos espinoriais satisfazendo $D\psi = 0$ têm duas componentes: uma componente holomórfica $\psi_R(z)$, i.e., $\partial_{\bar{z}}\psi_R = 0$, e a outra componente anti-holomórfica $\psi_L(\bar{z})$, i.e., $\partial_z\psi_L = 0$.

Desde que o propagador é a função de Green da equação de movimento, pode-se determinar o propagador livre

$$\langle \psi_R(z_1) \bar{\psi}_L(z_2) \rangle = \frac{1}{2\pi(z_1 - z_2)} \quad (\text{E.2})$$

Funções de correlação de muitos campos podem ser escritas usando o teorema de Wick, isto é,

$$\langle \psi_R(z_1) \dots \psi_R(z_N) \bar{\psi}_L(\zeta_1) \dots \bar{\psi}_L(\zeta_N) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^N} \det \left| \frac{1}{z_i - \zeta_j} \right| \quad (\text{E.3})$$

Funções de correlação onde aparecem ambas as componentes $\psi_R(z)$ e $\psi_L(\bar{z})$ fatorizam em uma parte holomórfica e outra antiholomórfica

$$\langle \psi_R(z_1) \psi_R(\bar{z}_2) \bar{\psi}_L(\zeta_1) \bar{\psi}_L(\bar{\zeta}_2) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{z_1 - \zeta_1} \frac{1}{\bar{z}_2 - \bar{\zeta}_2} \quad (\text{E.4})$$

*Definimos as variáveis complexas sendo $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Derivadas com respeito de z e $\bar{z}$ são definidas como $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$, $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$

Campos bosonicos livres

A função de Green de um campo bosonico em duas dimensões deve satisfazer $-\nabla^2 G(\mathbf{r}) = \delta^2(\nabla)$. Introduzindo um regulador infravermelho μ o propagador pode ser representado como

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi} \ln \mu |\mathbf{r}| + \text{const} + O(\mu |\mathbf{r}|) \quad (\text{E.5})$$

A constante pode ser absorvida na condição de renormalização, e assim podemos usar a expressão simples $G(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi} \ln \mu |\mathbf{r}|$. Todas as quantidades devem ser finitas no infravermelho, isto é, devemos tomar o limite $\mu \rightarrow 0$ no final dos cálculos. Então a função geratriz das funções de correlação no vácuo é

$$\mathcal{Z} = \int d[\varphi] e^{-\int d^2\mathbf{r} \{ \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + iJ(\mathbf{r})\varphi \}} = \det^{-1/2}(\nabla^2) e^{-\frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r} d^2\mathbf{r}' J(\mathbf{r})J(\mathbf{r}')} \quad (\text{E.6})$$

Fazendo $J(\mathbf{r}) = \alpha \delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) - \alpha \delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)$ temos

$$\langle e^{i\alpha\varphi(\mathbf{r}_1)} e^{-i\alpha\varphi(\mathbf{r}_2)} \rangle_{\alpha} e^{-\alpha^2 \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^{\alpha^2/2\pi}} \quad (\text{E.7})$$

A fórmula anterior merece alguns comentários. Na verdade, a função de correlação (E.7) foi calculada para exponenciais definidas dentro de um “ordenamento normal”, isto é, $: e^{i\alpha\varphi(\mathbf{r})} :$

Assim, a função de correlação de exponenciais da forma $: e^{i\alpha_i\varphi(\mathbf{r}_i)} :$ tem um fator na frente da forma

$$C = \mu^{(\sum \alpha_i)^2/4\pi}, \quad (\text{E.8})$$

Se assumirmos que a “carga total”, $\sum \alpha_i$ é zero, não há dependência em μ de qualquer função de correlação envolvendo as exponenciais. De outro lado, este tende a zero quando $\mu \rightarrow 0$, deste modo as funções de correlação de “carga” não nula anulam-se.

Assumindo $\alpha = 2\sqrt{\pi}$ em (E.7) temos

$$\langle e^{i2\sqrt{\pi}\varphi(\mathbf{r}_1)} e^{-i2\sqrt{\pi}\varphi(\mathbf{r}_2)} \rangle = \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} = \frac{1}{z_1 - z_2} \frac{1}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} \quad (\text{E.9})$$

Escrevendo $\varphi(z, \bar{z}) = \varphi_R(z) + \varphi_L(\bar{z})$ é possível fatorizar o lado esquerdo de (E.9) e escrever

$$\langle e^{i2\sqrt{\pi}\varphi_R(z_1)} e^{-i2\sqrt{\pi}\varphi_R(z_2)} \rangle = \frac{1}{z_1 - z_2} \quad (\text{E.10})$$

No formalismo hamiltoniano é fácil ver esta decomposição , já que o campo quântico satisfaz a equação $\partial_z \partial_{\bar{z}} \varphi(z, \bar{z}) = 0$. No formalismo das integrais de caminho é mais conveniente usar a projeção esquerda-direita, assim definimos

$$\varphi_R(z) = \int_{-\infty}^z \partial_z \varphi(z, \bar{z}) dz \quad (\text{E.11})$$

ou

$$e^{i2\sqrt{\pi}\varphi_R(z)} = \exp\{i\sqrt{\pi}\varphi - \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^x \partial_y \varphi(x', y) dx'\} \quad (\text{E.12})$$

e uma equação correspondente para $\varphi_L(\bar{z})$. A equação (E.12) é a versão euclideana do operador “Kink” de Mandelstam para campos sem interação . A função de correlação para um produto geral torna-se

$$\begin{aligned} < e^{i2\sqrt{\pi}\varphi_R(z_1)} e^{i2\sqrt{\pi}\varphi_R(z_2)} \dots e^{i2\sqrt{\pi}\varphi_R(z_N)} e^{-i2\sqrt{\pi}\varphi_R(\zeta_1)} e^{-i2\sqrt{\pi}\varphi_R(\zeta_2)} \dots e^{-i2\sqrt{\pi}\varphi_R(\zeta_N)} > \\ &= \frac{\prod_{i < j} (z_i - z_j)(\zeta_i - \zeta_j)}{\prod_{i,j} (z_i - \zeta_j)} \quad (\text{E.13}) \end{aligned}$$

Uma expressão , devido a Cauchy, para a determinante

$$\frac{\prod_{i < j} (z_i - z_j)(\zeta_i - \zeta_j)}{\prod_{i,j} (z_i - \zeta_j)} = \det \left| \frac{1}{z_i - \zeta_j} \right| \quad (\text{E.14})$$

permite a identificação de (E.13) com a função de correlação para fermions (E.3).

As regras de bosonização

Usando as correspondências básicas

$$\psi_R(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} : e^{i2\sqrt{\pi}\varphi_R(z)} : \quad (\text{E.15})$$

e

$$\psi_L(\bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} : e^{-i2\sqrt{\pi}\varphi_L(\bar{z})} : \quad (\text{E.16})$$

podem ser estabelecidas as relações

$$\psi_L^\dagger(\bar{z})\psi_R(z) = \bar{\psi} \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi = \frac{1}{2\pi} : e^{i2\sqrt{\pi}\varphi(\mathbf{r})} : \quad (\text{E.17})$$

e

$$\psi_R^\dagger(z)\psi_L(\bar{z}) = \bar{\psi} \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi = \frac{1}{2\pi} : e^{-i2\sqrt{\pi}\varphi(\mathbf{r})} : \quad (\text{E.18})$$

ou equivalentemente

$$\bar{\psi}\psi = \frac{1}{\pi} : \cos 2\sqrt{\pi}\varphi : \quad (\text{E.19})$$

e

$$\bar{\psi}\sigma_3\psi = \frac{i}{\pi} : \sin 2\sqrt{\pi}\varphi : \quad (\text{E.20})$$

Para encontrar os equivalentes bosonicos das correntes fermiônicas é necessário introduzir a definição do produto de dois exponenciais ordenados normalmente

$$: e^{i\alpha\varphi_R(z)} :: e^{i\beta\varphi_R(z')} : = (z - z')^{\alpha\beta/4\pi} : e^{i\alpha\varphi_R(z) + i\beta\varphi_R(z')} : \quad (\text{E.21})$$

Com esta regra pode-se considerar a corrente definida (“point-split”) da forma

$$\psi_R^\dagger(z)\psi_R(z') = \frac{1}{2\pi}(z - z')^{-1} : e^{2i\sqrt{\pi}(-\varphi_R(z) + \varphi_R(z'))} : \quad (\text{E.22})$$

$$= \frac{1}{2\pi(z - z')} - \frac{1}{2\pi} 2i\sqrt{\pi}\partial_z\varphi_R(z) + 0(z - z'). \quad (\text{E.23})$$

Descartando o termo infinto da última expressão (é equivalente a fazer um ordenamento normal da corrente) e considerando o outro termo da corrente j^1 temos

$$j^1 = : \bar{\psi}\gamma_1\psi := -\frac{i}{\sqrt{\pi}}(\partial_z\varphi_R(z) - \partial_{\bar{z}}\varphi_L(\bar{z})) \quad (\text{E.24})$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_y\varphi(x, y) \quad (\text{E.25})$$

e semelhantemente

$$j^2 = : \bar{\psi}\gamma_2\psi := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_x\varphi(x, y) \quad (\text{E.26})$$

Das relações (E.24)-(E.26) pode-se verificar que a corrente vetorial é conservada, $\partial_1 j^1 + \partial_2 j^2 = 0$, mas a conservação da corrente chiral precisa da equação de movimento para o campo φ .

Apêndice F

O Teorema de Darboux

Fornecemos uma derivação construtiva do Teorema de Darboux devida a B. Zwiebach [17]. Mostramos que qualquer vetor potencial $a_i(\xi)$ pode ser expressado, além de uma transformação de calibre, como

$$a_i(\xi) = \frac{1}{2} Q^m(\xi) w_{mn} \frac{\partial Q^n(\xi)}{\partial \xi^i} \quad (\text{F.1})$$

e correspondentemente a dois-forma $f_{ij}(\xi)$ como

$$f_{ij}(\xi) = \frac{\partial Q^m(\xi)}{\partial \xi^i} w_{mn} \frac{\partial Q^n(\xi)}{\partial \xi^j} \quad (\text{F.2})$$

com w_{mn} constante e antisimétrica. A prova também fornece um meio para se obter $Q^m(\xi)$. É evidente que uma transformação de coordenadas de Q a ξ torna f_{ij} constante e uma rotação adicional da base fornece uma dois-forma canônica

$$f_{ij} \rightarrow w_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}_{mn}. \quad (\text{F.3})$$

Consideremos uma transformação contínua $Q^m(\xi, \tau)$, com as propriedades

$$Q^m(\xi; 0) = \xi^m \quad (\text{F.4})$$

e

$$Q^m(\xi; 1) = Q^m(\xi). \quad (\text{F.5})$$

$Q^m(\xi, \tau)$ é gerado por $v^m(\xi, \tau)$, isto é

$$\frac{\partial}{\partial \tau} Q^m(\xi, \tau) = v^m(Q(\xi, \tau); \tau). \quad (\text{F.6})$$

Note que, v^m depende explicitamente de τ . Precisamos definir as transformações das quantidades relacionadas a $Q^m(\xi, \tau)$: potencial, curvatura, etc. Assim, o operador da transformação atua na forma usual

$$T_Q a_i(\xi) = a_m(Q) \frac{\partial Q^m(\xi)}{\partial \xi^i}, \quad (\text{F.7})$$

$$T_Q f_{ij}(\xi) = f_{mn}(Q) \frac{\partial Q^m(\xi)}{\partial \xi^i} \frac{\partial Q^n(\xi)}{\partial \xi^j}. \quad (\text{F.8})$$

Para implementar a construção , consideramos que o potencial $a_i(\xi)$ está imerso numa família uniparamétrica $a_i(\xi; \tau)$, tal que para $\tau = 0$ temos $a_i(\xi)$ e para $\tau = 1$ temos $\frac{1}{2}\xi^m w_{mi}$, onde w_{mi} é antisimétrica e constante.

$$a_i(\xi; 0) = a_i(\xi), \quad (\text{F.9})$$

$$a_i(\xi; 1) = \frac{1}{2}\xi^m w_{mi}. \quad (\text{F.10})$$

Pode-se escrever a seguinte relação

$$\frac{d}{d\tau}(T_Q a_i(\xi; \tau)) = T_Q \left(L_v a_i(\xi; \tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} a_i(\xi; \tau) \right) \quad (\text{F.11})$$

onde L_v é a derivada de Lie, com respeito ao vetor v^m que gera a transformação , (F.6). A relação (F.11) é facilmente verificada derivando com respeito a τ , tomando em conta que a transformação e a_i são ambas dependentes de τ . Assim

$$\begin{aligned} T_{Q+\delta Q} (a_i(\xi) + \delta a_i) - T_Q (a_i(\xi)) &= (T_{Q+\delta Q} - T_Q) a_i(\xi) + T_{Q+\delta Q} \delta a_i \\ &= a_m(Q + \delta Q) \frac{\partial}{\partial \xi^i} (Q^m + \delta Q^m) - a_m(Q) \frac{\partial Q^m(\xi)}{\partial \xi^i}, \end{aligned}$$

expandindo até a primeira ordem e tomando o limite temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} T_Q a_i(\xi; \tau) &= \partial_l a_m \frac{\partial}{\partial \tau} Q^l(\xi; \tau) \frac{Q^m}{\partial \xi^i} + a_m(Q) \frac{v^m}{\partial \xi^i} + T_Q \frac{\partial a_i(\xi; \tau)}{\partial \tau} \\ &= T_Q \left(L_v a_i(\xi; \tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} a_i(\xi; \tau) \right) \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

onde foi usada a seguinte identidade [60]

$$L_v a_i = v^n f_{ni} + \partial_i(v^n a_n) \quad (\text{F.13})$$

Assumindo que f_{ni} possui inversa podemos supor que

$$v^n(\xi; \tau) = -f^{ni}(\xi; \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} a_i(\xi; \tau) \quad (\text{F.14})$$

então (F.11) fornece

$$\frac{d}{d\tau}(T_Q a_i) = T_Q (\partial_i(v^n a_n)) \quad (\text{F.15})$$

Desta forma $\frac{d}{d\tau}(T_Q a_i)$ é uma transformação de gauge, assim $T_Q a_i$ em $\tau = 0$, isto é, $a_i(\xi)$, é diferente do seu valor em $\tau = 1$, isto é, $\frac{1}{2}Q^m(\xi)w_{mn}\frac{\partial Q^n(\xi)}{\partial \xi^i}$, por uma transformação de gauge. Este é o resultado desejado, e além do mais $Q^m(\xi; \tau)$ e $Q^m(\xi) \equiv Q^m(\xi; 1)$ são explicitamente construídas da definição algébrica (F.14) para v^n (uma vez que o interpolante $a_i(\xi; \tau)$ é escolhido) e a integração de (F.6) (este último não é fácil de se realizar em geral).

Referências

- [1] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons* (North Holland, Amsterdam, 1982)
- [2] C. Montonen and D.I. Olive, *Phys. Lett.* **72B** (1977) 117.
- [3] C. Vafa and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B431** (1994) 3, hep-th/9408074.
- [4] N. Seiberg and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B431** (1994) 484-550, hep-th/9408099; *Nucl. Phys.* **B426** (1994) 19; hep-th/9407087.
- [5] A. Sen, *Phys. Lett.* **329B** (1994) 217-221; *Int. J. Mod. Phys.* **A9** (1994) 3707, hep-th/9402002.
- [6] S. Coleman, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 2088.
- [7] S. Mandelstam, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 3026.
- [8] L.A. Ferreira, J-L. Gervais, J.Sánchez Guillen and M.V.Saveliev, *Nucl. Phys.* **B470** (1996) 236-288; hep-th/9512105.
- [9] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B145** (1978) 110-118.
- [10] H.S. Blas, “Affine $sl(2)^{(1)}$ Toda system coupled to matter II: A QCD₂ motivated integrable field theory”, IFT-P.069/2000.
- [11] L.A. Ferreira, J. Luis Miramontes and J. Sanchez Guillen, *J. Math. Phys.* **38** (1997) 882.
- [12] D.I. Olive, N. Turok and J.W.R. Underwood; *Nucl. Phys.* **B401** (1993) 663, *Nucl. Phys.* **B409** (1993) 509.
- [13] D.I. Olive, J.W.R. Underwood and M.V. Saveliev, hep-th/9212123, *Phys. Lett.* **311B** (1993) 117.
- [14] H.S. Blas, “Affine $sl(2)^{(1)}$ Toda system coupled to matter I: Noether and topological currents equivalence and soliton/particle correspondence”, IFT-P.068/2000.

- [15] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva Univ. Press, New York, 1964.
- [16] L. Faddeev and R. Jackiw, *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 1692.
- [17] R. Jackiw, *Diverse Topics in Theoretical Physics*, World Scientific (1995).
- [18] C. Cronström and M. Noga, *Nucl. Phys.* **B428** (1994) 449.
- [19] C. Wotzasek, *Ann. of Phys.* **243** (1995) 76.
- [20] H. Montani, *Int. J. Mod. Phys.* **A8** (1993) 4319.
- [21] H. Montani and C. Wotzasek, *Mod. Phys. Lett.* **A8** (1993) 3387.
- [22] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek, *Mod. Phys. Lett.* **A7** (1992) 1737; *Int. J. Mod. Phys.* **A7** (1992) 4981.
- [23] H.S. Blas Achic and L.A. Ferreira, *Nucl. Phys.* **B571** (2000) 607.
- [24] H.S. Blas and B.M. Pimentel, *Ann. of Phys.* **282** (2000) 67.
- [25] H.S. Blas, “Reduction of affine two-loop WZNW model, the Toda system coupled to the matter and topological confinement”, hep-th/0005130.
- [26] H.S. Blas, “Vector NLS hierarchy solitons revisited: dressing transformation and tau function approach”, solv-int/9912015.
- [27] S.J. Orfanidis and R. Wang, *Phys. Lett.* **57B** (1975) 281; S.J. Orfanidis, *Phys. Rev.* **D14** (1976) 472.
- [28] J. Kogut and D. Sinclair, *Phys. Rev.* **D12** (1975) 1742-1753.
- [29] E. Abdalla, M.C.B. Abdalla and K.D. Rothe, *Non-perturbative methods in two-dimensional quantum field theory*, World Scientific, Singapore, 1991.
- [30] H. Aratyn, C.P. Constantinidis, L.A. Ferreira, J.F. Gomes e A.H. Zimerman; hep-th/9212086, *Nuclear Physics* **B406**, 727 (1993).
- [31] A.N. Leznov and M.V. Saveliev; *Group-Theoretical Methods for Integration of Non-Linear Dynamical Systems*, Progr. in Phys. Ser. Vol. 15 (Birkhäuser, Basel, 1992).
- [32] R. Hirota, *Direct methods in soliton theory*, in “Solitons” (R.K. Bullough and P.S. Caudrey, eds.), Topics in Current Physics, p. 157, Springer-Verlag (1980); *J. Phys. Soc. Japan* **33** (1972) 1459.

- [33] V.G. Kac, Infinite dimensional Lie algebras, 3rd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [34] P. Goddard and D. Olive, *Int. J. Mod. Phys. A***1** (1986) 303-414.
- [35] H.S. Blas, "The $\hat{sl}(2)$ affine Toda model coupled to the matter: solitons and confinement", To appear in the *Proceedings of Hadron Physics 2000 Workshop*, Caraguatatuba, SP, Brazil, 10-15 Apr, 2000; hep-th/0005037.
- [36] A. Fring, P.R. Johnson, M.A.C. Kneipp and D. I. Olive; hep-th/9405034, *Nucl. Phys. B***1994** [FS430] (597-614) .
- [37] V.I. Arnold, *Mathematical Methods in Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [38] J. Govaerts, *Int. J. Mod. Phys. A***5** (1990) 3625.
- [39] J.A. García and J. M. Pons, *Int. J. Mod. Phys. A***12** (1997) 451.
- [40] M. Alvarez, hep-th/9702040; H. Lee, Y.-W. Kim and Y.-J. Park, hep-th/9711186; J.E. Paschalis and P.I. Porfyriadis, *Phys. Lett.* **390B** (1997) 197, hep-th/9504009.
- [41] G. Takacs and G. Watts, *Nucl. Phys. B***547** (1999) 538; S.P. Khastgir and R. Sasaki, *Prog. Theor. Phys.* **95** (1996) 485.
- [42] C.P. Constantinidis, L.A. Ferreira, J.F. Gomes and A.H. Zimerman, *Phys. Lett.* **298B** (1993) 88.
- [43] O. Babelon and L. Bonora, *Phys. Lett.* **267B** (1991) 71; L. Bonora, *Int. J. Mod. Phys. B***6** (1992) 2015.
- [44] O. Babelon and L. Bonora, *Phys. Lett.* **244B** (1990) 220; H. Aratyn, L.A. Ferreira, J.F. Gomes and A.H. Zimerman, *Phys. Lett.* **254B** (1991) 372
- [45] W. Siegel, *Nucl. Phys. B***238** (1984) 307; M. Henneaux, *Quantization of Systems with Constraints* in *Proceedings of the Summer School in High-Energy Physics and Cosmology* (ICTP-Trieste, 1988).
- [46] M. -X. Shao and Z. -Y. Zhu, math-physics/9808015.
- [47] J. Govaerts and J.R. Klauder, *Ann. of Phys.* **274** (1999) 251; J. Govaerts, *J. Physics A***30** (1997) ,603

- [48] R. Banerjee, hep-th/9607199, hep-th/9610240.
- [49] S.E. Hjeltnel and U. Lindström, hep-th/9705122 V2.
- [50] A. Bogojević, B. Sazdović and O. Misković, hep-th/9810120; hep-th/9811001.
- [51] H.S. Blas, "The Affine Toda Model Coupled to the Matter and the 'Cheshire Cat' Mechanism", em andamento.
- [52] L.A. Ferreira, J.L. Miramontes and J. Sanchez Guillen, *Nucl. Phys.* **B449** (1995) 631.
- [53] P. Goddard and D. Olive, *Int. J. Mod. Phys.* **A1** (1986) 303.
- [54] Wan Zhe-xian, *Introduction to KAC-MOODY ALGEBRA*, World Scientific, 1991. V.G. Kac and A.K. Raina, *Bombay Lectures on Highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras*, World Scientific (1987).
- [55] J. Lepowsky and R.L. Wilson, *Commun. Math. Phys.* **62** (1978) 43;
V. G. Kac, D.A. Kazhdan, J. Lepowsky and R.L. Wilson, *Advances in Math.* **42** (1981) 83;
F. ten Kroode and J. van de Leur, *Commun. Math. Phys.* **137** (1991) 67;
I.B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, in "Mathematical Aspects of String Theory ", Adv. Series in Math. Phys. Vol.1. S.T. Yau (Ed.), World Scientific, 1987;
A.J. Feingold, in "Vertex Operators in Math. and Phys.", J. Lepowsky, S. Mandelstam and I.M. Singer (Eds.) Math. Sciences Research Inst. Publications. Springer-Verlag, 1983.
- [56] V.G. Kac and J.W. van de Leur, in "Important Developments in Soliton Theory ", A.S. Fokas and V.E. Zakharov (Eds.) Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1993) p. 302.
- [57] I.B. Frenkel and V.G. Kac, *Invent. Math.* **62** (1980) 28.
- [58] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Springer, Heidelberg, (1972); R.N. Cahn, *Semi-Simple Lie Algebras and Their Representations*, Benjamin Cumming Pub. Comp. Inc (1984).
- [59] M. Stone, *Bosonization*, 1st edition (World Scientific, Singapore, 1994).
- [60] R. Aldrovandi and J.G. Pereira, *An Introduction to Geometrical Physics*, Singapore, World Scientific (1995).

