

ARQUIMEDES: UM PONTO DE APOIO PARA O MÉTODO CIENTÍFICO

Hermes Antônio Pedroso

Professor do Departamento de Matemática - Universidade Estadual Paulista
UNESP/IBILCE – Campus de São José do Rio Preto
hermes@ibilce.unesp.br

Resumo

Arquimedes de Siracusa (287 – 212 a.C.), considerado o maior matemático da Antiguidade, aperfeiçoou o Método de Exaustão atribuído a Eudoxo de Cnido (408 – 355 a.C.). Este método se tornou o modelo grego e do Renascimento nas demonstrações de cálculo de áreas e volumes. Era muito rigoroso, mas tinha a desvantagem de o resultado, para ser provado, precisar ser conhecido antes.

Existem indicações claras de que um outro método também era utilizado. Numa carta a Eratóstenes (276 – 196 a.C.), que não tinha sido descoberta até 1906, Arquimedes faz revelações de como chegara aos resultados utilizando alavancas para o equilíbrio de figuras geométricas. O resumo do artigo em português deve vir aqui. Pede-se uma sequência de frases concisas e objetivas (não uma simples enumeração de tópicos) que não ultrapasse 300 palavras.

Palavras-chaves: Arquimedes, Método de Exaustão, Áreas e Volumes.

ARCHIMEDES: A FULCRUM FOR THE SCIENTIFIC METHOD

Abstract

Archimedes of Syracuse (287 – 212 BC) is regarded as the greatest mathematician in classical antiquity. He improved the method of exhaustion attributed to Eudoxus of Cnidus (408 – 355 BC). This method has become the Greek and Renaissance model in demonstrations of calculus of areas and volumes. Though it was very rigorous, the disadvantage of this method was the fact that the result had to be known before being proved.

There are some clear indications that another method was also used. In a letter to Eratosthenes (276 – 196 BC), which had not been discovered until 1906, Archimedes reveals how he yielded the results using levers to establish the balance of geometric forms.

Keywords: Archimedes, Method of Exhaustion, Areas and Volumes.

1 Arquimedes e seu tempo

Arquimedes nasceu e viveu em Siracusa, uma cidade da Sicília que existe até os dias de hoje. Consta que ele morreu no ano 212 a.C. com a idade de 75 anos e daí se conclui que ele nasceu no ano de 287 a.C.



Siracusa era cidade-estado das muitas que os gregos fundaram, portanto Arquimedes era um matemático grego. Mas nessa época a Grécia já havia sido conquistada por Alexandre da Macedônia, que expandira seu Império pela Ásia e Egito. Alexandre resolvera instalar a capital do Império numa cidade a ser construída no extremo oeste do delta do rio Nilo. Isto foi feito, não por Alexandre, que morreu em 323 a.C., mas por um dos seus generais, Ptolomeu Soter, que ficou com a parte egípcia do Império e iniciou uma dinastia grega no Egito. Assim surgiu Alexandria, que se tornou um centro famoso da cultura chamada “helenística” e que contava até com uma verdadeira universidade – um instituto de altos estudos e uma biblioteca muito famosa, que chegou a ter 750000 volumes. Em Alexandria, a Matemática ocupava um lugar de destaque e nomes como Euclides, Apolônio, Arquimedes, Eratóstenes, Aristarco e Ptolomeu (o astrônomo, sem nenhum parentesco com os reis Ptolomeus) pertenceram à Escola de Alexandria. É verdade que Arquimedes viveu em Siracusa, mas estudou em Alexandria e mantinha correspondência com vários sábios de lá, como Eratóstenes. Este último era bibliotecário, um homem de saber universal, bem conhecido pelo chamado “crivo de Eratóstenes”, mas seu feito mais notável foi calcular o raio e a circunferência da Terra.

Na época em que viveu Arquimedes, Roma já estava em expansão, com muitas guerras de conquistas, dentre as quais são bem conhecidas as chamadas “guerras púnicas” contra Cartago. Esta cidade ficava onde é hoje um subúrbio de Tunis, a capital da Tunísia. Naquele tempo, Cartago controlava uma extensa região que se estendia até a Espanha, constituindo-se numa incômoda rival de Roma. Na segunda das guerras púnicas, Siracusa se aliara a Cartago, daí ter sofrido uma investida fatal de Roma. Há indícios de que Siracusa resistiu bravamente aos ataques do general Marcelo, graças às máquinas de guerra idealizadas por Arquimedes; mas depois de um longo cerco acabou por sucumbir à superioridade das tropas romanas. Há várias versões sobre a morte de Arquimedes; segundo uma delas, durante o saque da cidade, em 212 a.C., ele foi morto por um soldado romano, quando absorto, se ocupava com problemas matemáticos.



Figura 1: A morte de Arquimedes a partir de uma pintura de G.C.E. Courtois

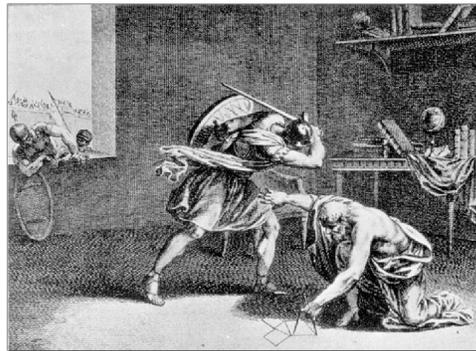


Figura 2: A morte de Arquimedes, Foto The Mansel Collection - Londres

Arquimedes era bem relacionado com rei Hierão de Siracusa e talvez fosse seu parente. Conta-se que Hierão mandou fazer uma coroa de ouro, mas teve razões para desconfiar de que o ouro da coroa houvesse sido misturado com muita prata. Ele comunicou o fato a Arquimedes, para que o sábio encontrasse um meio de dirimir suas dúvidas. Diz a história que Arquimedes descobriu como resolver o problema enquanto tomava banho e refletia sobre o fato de que os corpos imersos na água – como seu próprio corpo – se tornam mais leves, exatamente pelo peso da água que deslocam. Este fato lhe teria permitido idealizar um modo de resolver o problema da coroa, e tão excitado ele teria ficado com a descoberta que saiu nu pelas ruas de Siracusa gritando “Eureka! Eureka”, que significa “Descobri! Descobri!”.



Figura 3: Arquimedes no banho, gravura da obra de Gaultherus Rivius, Nuremberg, 1574

2 Os trabalhos de Arquimedes (em ordem cronológica provável)

- Sobre o equilíbrio de figuras planas, I.
- A quadratura da parábola.
- Sobre o equilíbrio de figuras planas, II.
- Sobre a esfera e o cilindro, I, II.
- Sobre as espirais.
- Sobre os cones e esferóides.
- Sobre os corpos flutuantes I, II.
- A medida do círculo.
- O Contador de grãos de areia.
- A carta a Eratóstenes sobre o Método.

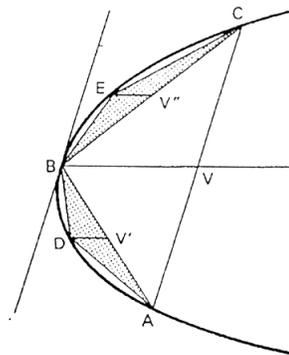
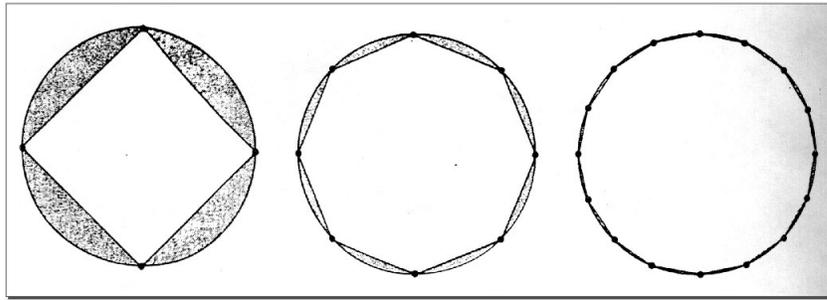
A seguir faremos alguns comentários que consideramos importantes sobre algumas obras de Arquimedes.

3 O método de exaustão

O primeiro método usado no cálculo integral, hoje conhecido como método de exaustão, foi criado pelo matemático grego Eudoxo de Cnido(408-355 a.C.), usado e aperfeiçoado por Euclides(c.300 a.C.) e, principalmente por Arquimedes de Siracusa(287-212 a.C.). O método baseia-se na seguinte proposição:

Se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, chegar-se-á em alguma etapa desse processo a uma grandeza menor que qualquer grandeza da mesma espécie fixada previamente.

(A prova encontra-se na Proposição X-1, de Os Elementos de Euclides)



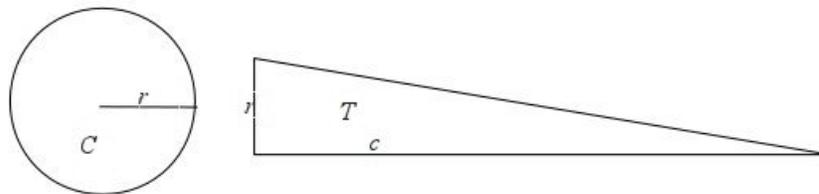
Procuramos ilustrar o Método de Exaustão com as figuras acima, referentes a dois trabalhos importantes que mereceram atenção especial de Arquimedes: A medida do Círculo e A Quadratura da Parábola.

4 A medida do círculo

Neste trabalho, Arquimedes prova três proposições:

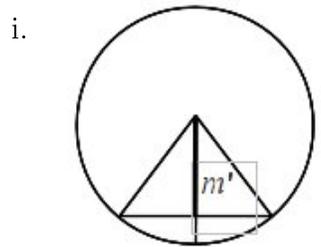
1. Todo círculo é equivalente a um triângulo retângulo em que os catetos são iguais, respectivamente, ao raio e ao comprimento da circunferência do círculo.

Prova:

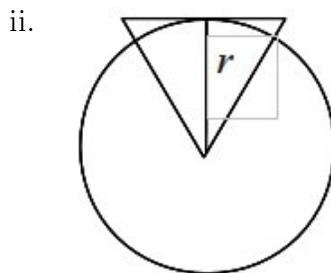


Sejam r o raio do círculo, c o comprimento da circunferência, C a área do círculo e T a área do triângulo retângulo.

Temos que provar $C = T$.



Suponha $C > T$. Seja $A = C - T$, $A > 0$. Considere um polígono regular inscrito de apótema m' , perímetro p' e de área P' , tal que $C - P' < A$. Assim, $C - P' < A = C - T$, ou seja, $P' > T$. Mas $P' = \frac{p'm'}{2}$ e $T' = \frac{c \cdot r}{2}$, logo $p'm' > cr$, o que é um absurdo, pois $p' < c$ e $m' < r$. Então $C \leq T$.



Suponha $C < T$. Seja $A = T - C$ e considere um polígono circunscrito de apótema r , perímetro p e área P com $P - C < A$. Assim, $P - C < A = T - C$, ou seja, $p < T$, ou ainda, $\frac{rp}{2} < \frac{rc}{2}$, isto é, $p < c$, absurdo. Então, $C \geq T$. Portanto, $C = T = \frac{cr}{2}$.

2. Se c é o comprimento da circunferência e d é o diâmetro então

$$\left(3 + \frac{10}{71}\right) d < c < \left(3 + \frac{10}{70}\right) d, \text{ ou seja,}$$

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}.$$

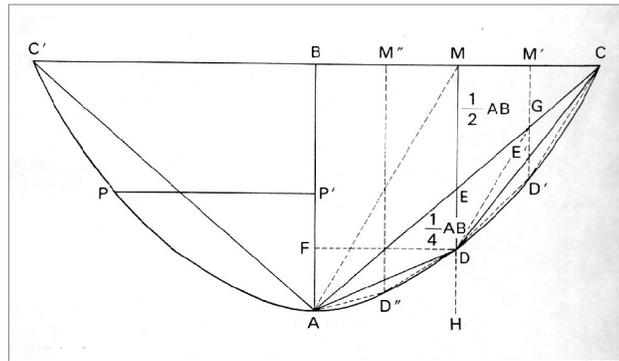
Em decimais temos a seguinte relação:

$$3,14084 < \pi < 3,142858$$

3. O círculo está para o quadrado de seu diâmetro aproximadamente na razão $\frac{11}{14}$.

5 A quadratura da parábola

Vejamos como Arquimedes demonstrou pelo método de exaustão que a área de um segmento parabólico é $\frac{4}{3}$ da área do triângulo inscrito de mesma base e altura.



Suponhamos que a figura acima represente uma porção de parábola determinada pela corda $C'C$, perpendicular ao seu eixo AB . Como definição de parábola consideramos o conjunto dos pontos P tais que AP' seja proporcional a $(P'P)^2$ isto é, em notação moderna, $y = kx^2$.

Arquimedes mostrou que essa porção de parábola é $\frac{4}{3}$ da área do triângulo $C'AC$, o que equivale a dizer que a área limitada por AB , BC , e a parábola é $\frac{4}{3}$ da área de ABC . Para tanto ele “exauriu” a área parabólica somando primeiro o triângulo ADC ao ABC , onde D é o ponto em que uma paralela a AB pelo ponto médio M de BC corta a parábola, e mostrando que $ADC = \frac{1}{4}ABC$. A seguir construiu paralelas a AB por M' e M'' , pontos médios de MC e BM , as quais cortam a parábola em D' e D'' ; então mostrou que $AD''D + DD'C = \frac{1}{4}ADC = \frac{1}{4^2}ABC$. Continuando indefinidamente com este processo, chega-se à conclusão de que a área parabólica é dada aproximadamente por

$$ABC + \frac{1}{4}ABC + \frac{1}{4^2}ABC + \dots + \frac{1}{4^n}ABC, \quad (1)$$

A qual, à medida que n cresce, aproxima-se cada vez mais de $\frac{4}{3}ABC$.

A prova de que $ADC = \frac{1}{4}ABC$ faz-se como se segue, com a notação e os segmentos construídos da figura. Da definição de parábola, $AF = k(FD)^2$ e $AB = k(BC)^2$. Como $FD = BM = \frac{1}{2}BC$, deduz-se que $AF = HD = \frac{1}{4}AB$. Por semelhança de triângulos, $\frac{EM}{AB} = \frac{MC}{BC} = \frac{1}{2}$, de modo que $EM = \frac{1}{2}AB$. Daí

$$DE = AB - HD - EM = AB - \frac{1}{4}AB - \frac{1}{2}AB = \frac{1}{4}AB.$$

Assim, ADE e AEM tem a mesma altura AH e bases $DE = \frac{1}{4}AB$ e $EM = \frac{1}{2}AB$,

respectivamente. Logo, $ADE = \frac{1}{2}AEM$. Analogamente, $DEC = \frac{1}{2}EMC$, de maneira que, por adição, $ADC = \frac{1}{2}ACM$. Além disso, ACM e AMB tem bases iguais (MC e BM) e mesma altura (AB), e assim $ADC = \frac{1}{4}ABC$.

Analogamente, com o uso dos segmentos construídos apresentados na figura, podemos provar que

$$DD'C = \frac{1}{4}DCE \text{ e } AD''D = \frac{1}{4}ADE, \text{ de forma que}$$

$$AD''D + DD'C = \frac{1}{4}ADC = \frac{1}{4^2}ABC,$$

completando assim a segunda etapa da prova.

Como decorrência da Quadratura da Parábola, realizada por Arquimedes, surge provavelmente a primeira série infinita da Matemática, uma P.G. de razão $\frac{1}{4}$.

Mostraremos a seguir o processo utilizado por Arquimedes para encontrar a soma dessa série, evitando fazer $n \rightarrow \infty$.

Problema: Mostrar que $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots = \frac{4}{3}$.

Segundo Arquimedes, $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}$.

Isso segue do seguinte fato: $\frac{1}{4^k} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^k} = \frac{4}{3 \cdot 4^k} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{k-1}}$

Assim,

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \left(\frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} \right) = \\ & = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \left(\frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} \right) = \dots = \\ & = 1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

6 A carta a Eratóstenes sobre o método

Um novo livro de Arquimedes foi descoberto em 1906, em Constantinopla, pelo filólogo dinamarquês J. L. Heiberg (1854 – 1928). Este é conhecido como “*O Método*”, justamente porque nele o geômetra grego descreve um “método mecânico” para investigar questões matemáticas. Arquimedes tinha o costume de enviar suas obras aos sábios de Alexandria, prefaciando-as com cartas a esses sábios. Seu livro, “*O Método*”, contém como prefácio uma carta a Eratóstenes de Alexandria, a qual começava assim:

Arquimedes a Eratóstenes,

Saudações

Enviei-lhe em outra ocasião alguns teoremas descobertos por mim, meramente os enunciados, deixando-lhe a tarefa de descobrir as demonstrações então omitidas... Vendo em você um dedicado estudioso, de considerável iminência em Filosofia e um admirador da pesquisa matemática, julguei conveniente escrever-lhe para explicar as peculiaridades de um certo método pelo qual é possível investigar alguns problemas de Matemática por meios mecânicos... Certas coisas primeiro se tornaram claras para mim pelo método mecânico, embora depois tivessem de ser demonstradas pela Geometria, já que sua investigação pelo referido método não conduziu a provas aceitáveis. Certamente é mais fácil fazer as demonstrações quando temos previamente adquirido, pelo método, algum conhecimento das questões do que sem esse conhecimento... Estou convencido de que será valioso para a Matemática, pois pressinto que outros investigadores da atualidade ou do futuro descobrirão, pelo método aqui descrito, outras proposições que não me ocorreram.

É oportuno notar, a propósito das palavras finais da citação acima, que o chamado “método dos indivisíveis”, inventado no século XVII, e que deu origem ao Cálculo Diferencial e Integral, é muito parecido com o antigo “método mecânico” de Arquimedes. Tanto um quanto outro carecem de uma fundamentação sólida, mas contêm os ingredientes que facilitam as descobertas e que, no século XVII, foram decisivos para grandes avanços da matemática.

7 A quadratura da parábola pelo Método da Alavanca

O método que Arquimedes visualizou corretamente e que habilitaria seus contemporâneos e sucessores a fazer novas descobertas, consistia num esquema para equilibrar entre si os “elementos” de figuras geométricas.

O primeiro teorema que Arquimedes descobriu mediante a operação de equilibrar elementos foi o célebre resultado de que a área de um segmento de parábola é $\frac{4}{3}$ da área do triângulo que tem a mesma base e altura. Ele chegou a isso equilibrando entre si os segmentos que formam o triângulo com os segmentos que formam o segmento parabólico.

Após suas descobertas por “método da alavanca”, ele usava o “método de exaustão” para prová-las, ajustando-se assim aos padrões de rigor da época.

Seja s a região limitada por uma parábola p e uma corda AB de ponto médio M . Seja t a tangente a p em A .

Ele se gabava de poder escrever um número maior do que o número de grãos de areia necessários para encher o universo.

Como quase todos os astrônomos da antiguidade, Arquimedes, concebia o Universo na forma de uma enorme esfera, com centro na Terra (imóvel) e raio igual à distância da Terra ao Sol.

Subestimando o tamanho de um grão de areia, Arquimedes admitiu que 10.000 desses grãos preenchessem o espaço ocupado por uma semente de papoula; e que 40 dessas sementes, justapostas lado a lado, excederiam a largura de um dedo. Daí concluiu (usando a relação $V = \frac{\pi d^3}{6} < d^3$, onde d é o diâmetro e V é o volume de uma esfera) que uma esfera de diâmetro igual à largura de um dedo não contém mais que $40^3 = 64000$ sementes de papoula e, portanto, nela não cabem mais que $10.000 \times 64.000 = 640$ milhões de grãos de areia, seguramente, então, nessa esfera comporta menos de 1 bilhão, isto é, 10^9 de grãos de areia. A seguir Arquimedes introduz em seu raciocínio o estádio (unidade de medida de comprimento equivalente a cerca de $160m$) que estimou em menos de 10^4 larguras de dedos. Como os volumes de duas esferas estão entre si na razão dos cubos de seus diâmetros, o número de grãos de areia necessário para preencher uma esfera de diâmetro igual a um estádio é menor que $10^9 \cdot (10^4)^3 = 10^{21}$.

Por outro lado, usando dados de medidas astronômicas conhecidas em sua época, não lhe foi difícil estabelecer que o diâmetro do universo era inferior a 10^{10} estádios.

Então repetindo a argumentação anterior, concluiu que para preencher totalmente este universo bastaria um número de grãos inferior a $10^{21} \cdot (10^{10})^3 = 10^{51}$.

Contar grãos de areia pode ter sido para Arquimedes apenas um exercício para por em prática um sistema de numeração, que criou, de base 10^8 , para exprimir números muito grandes, já que o sistema alfabético em uso na Grécia era deficiente quanto a este aspecto.

9 Sobre os Corpos Flutuantes (A Coroa do Rei)

Veremos como resolver o problema da coroa utilizando o princípio de Arquimedes e um pouco de proporções. Seja P o peso da coroa, que supomos ter sido feita com um peso x de ouro e um peso y de prata. Logo:

$$P = x + y \quad (1)$$

Suponhamos que uma porção de ouro de peso x tenha peso x' quando pesada dentro d'água, e seja X' o peso, dentro d'água, de uma porção de ouro de peso igual ao peso P da coroa. Ora, o peso do ouro dentro d'água é proporcional ao seu peso fora d'água (porque o volume é proporcional ao peso, devido à homogeneidade do material). Logo,

$$\frac{x'}{x} = \frac{X'}{P} \quad - \quad x' = \frac{xX'}{P} \quad (2)$$

De modo análogo, o peso da prata, quando pesada dentro d'água, é proporcional ao seu peso fora d'água. Se y' designa o peso, dentro d'água, de uma porção de prata de peso y , e

Y' o peso, dentro d'água, de uma porção de prata de peso igual ao peso P da coroa, então teremos, exatamente como no raciocínio que nos levou á equação (2) acima,

$$y' = \frac{yY'}{P} \quad (3)$$

Seja P' o peso da coroa quando pesada dentro d'água. É claro que $P' = x' + y'$, de sorte que, somando (2) e (3) acima, obtemos

$$P' = x' + y' = \frac{xX' + yY'}{P} \quad \therefore \quad PP' = xX' + yY'$$

Daqui e de (1) segue-se que

$$(x + y) P' = xX' + yY' \quad \therefore \quad x(X' - P') = y(P' - Y'),$$

ou ainda,

$$\frac{x}{y} = \frac{P' - Y'}{X' - P'} \quad (4)$$

Não temos dados específicos sobre a coroa verdadeira que o rei Hierão entregou a Arquimedes para ser investigada mas podemos muito bem imaginar uma situação concreta. Digamos que a coroa pesasse $P = 894g$ fora d'água e $834g$ dentro d'água. Suponhamos também, seguindo a notação já introduzida, que $X' = 847,7g$ e $Y' = 809g$. Substituindo estes valores em (4) encontramos

$$\frac{x}{y} = \frac{834 - 809}{847,7 - 834} = \frac{25}{13,7} \cong 1,82$$

Daqui e de (1) obtemos o seguinte sistema de equações para determinar x e y :

$$x + y = 894, \quad x = 1,82y$$

Resolvendo este sistema encontramos $x \cong 577g$ e $y \cong 317g$. portanto, nossa coroa imaginária contém $577g$ de ouro e $317g$ de prata.

Tendo em conta que o peso específico do ouro é $19,3g/cm^3$ e o da prata é $10,5g/cm^3$, podemos prosseguir e calcular as quantidades volumétricas de ouro e prata usados na coroa. Trata-se, novamente, de um cálculo simples usando proporções. Sejam V_0 e V_p , respectivamente, os volumes de ouro e prata empregados para fazer a coroa. Então,

$$\frac{x}{V_0} = \frac{19,3}{1} \quad e \quad \frac{y}{V_p} = \frac{10,5}{1}$$

Substituindo $x = 577$ e $y = 317$ e resolvendo as equações resultantes encontramos

$$V_0 = \frac{577}{19,3} \cong 29,9cm^3 \quad e \quad V_p = \frac{317}{10,5} \cong 30,2cm^3$$

Vemos que o ourives usou praticamente as mesmas quantidades volumétricas de ouro e prata, aproximadamente 30cm^3 de ouro e 30cm^3 de prata. É muita prata para pouco ouro numa coroa real! Oxalá isto não tenha custado a cabeça do ourives...

Referências

- [AABOE-1984] AABOE, A. *Episódios da história antiga da matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.
- [ÁVILA-1987] ÁVILA, G. *Arquimedes, A esfera e o cilindro*. Revista do Professor de Matemática 10, 11-20, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1987.
- [ÁVILA-1986] ——— *Arquimedes, o rigor e o método*. Matemática Universitária 4, 27-45, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1986.
- [BOYER-1996] BOYER, C. B. *História da matemática* (2a Edição). São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- [BOYER-1992] ——— *Cálculo*. São Paulo: Atual, 1992.
- [SOUZA-1986] SOUZA, S. *Arquimedes e a coroa do rei*: Revista do Professor de Matemática 9, 11-15, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1986.