

MARCELA APARECIDA GUERREIRO MACHADO

ESTUDO DAS PROPRIEDADES DOS GRÁFICOS DE CONTROLE
BIVARIADOS COM AMOSTRAGEM DUPLA

Dissertação apresentada à Faculdade
de Engenharia do Campus de
Guaratinguetá, Universidade
Estadual Paulista, para a obtenção
do título de Mestre em Engenharia
Mecânica na área de Projetos e
Materiais.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Fernando Branco Costa

Co-orientador: Prof. Dr. Fernando Augusto Silva Marins

Guaratinguetá
2006

Machado, Marcela Aparecida Guerreiro
M149e Estudo das propriedades dos gráficos de controle bivariados com
amostragem dupla / Marcela Aparecida Guerreiro Machado . –
Guaratinguetá : [s.n.], 2006
129f. : il.

Bibliografia: f. 99-106
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade
de Engenharia de Guaratinguetá, 2006
Orientador: Prof. Dr. Antonio Fernando Branco Costa
Co-Orientador: Fernando Augusto Silva Marins

1. Controle de qualidade – Métodos estatísticos I. Título

CDU 658.56

UNESP  UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá

**ESTUDO DAS PROPRIEDADES DOS GRÁFICOS DE CONTROLE
BIVARIADOS COM AMOSTRAGEM DUPLA**

MARCELA APARECIDA GUERREIRO MACHADO

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE

“MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA”

ESPECIALIDADE: ENGENHARIA MECÂNICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: PROJETOS E MATERIAIS

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-
GRADUAÇÃO

Prof. Dr. João Andrade de Carvalho Júnior
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. ANTONIO FERNANDO BRANCO COSTA
Orientador/UNESP-FEG

Prof. Dr. FERNANDO AUGUSTO SILVA MARINS
Co-Orientador / UNESP-FEG

Prof. Dr. SEBASTIÃO DE AMORIM
IMECC-UNICAMP

Prof. Dr. MESSIAS BORGES SILVA
UNESP-FEG

Agosto de 2006

DADOS CURRICULARES

MARCELA APARECIDA GUERREIRO MACHADO

| | |
|------------|--|
| NASCIMENTO | 14.05.1982 – SÃO PAULO / SP |
| FILIAÇÃO | Marcos de Lélis Brandão Machado Maria Sueli Guerreiro Machado |
| 2000/2004 | Curso de Graduação FEG - UNESP |
| 2005/2006 | Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, nível de Mestrado, na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da UNESP |

DEDICATÓRIA

de modo especial, aos meus pais e irmãs, que sempre me incentivaram em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, fonte de vida e esperança. Agradeço pela minha vida, minha família e meus amigos,

ao meu orientador, *Prof. Dr. Antônio Fernando Branco Costa* que jamais deixou de me incentivar. Sem a sua orientação, dedicação e auxílio, o estudo aqui apresentado seria praticamente impossível.

ao co-orientador deste trabalho, *Prof. Dr. Fernando Augusto Silva Marins* pelos conselhos preciosos durante a elaboração dessa pesquisa.

aos meus pais *Marcos e Maria Sueli*, que apesar das dificuldades enfrentadas, sempre incentivaram meus estudos.

aos professores que participaram da banca examinadora.

a Capes pelo apoio financeiro concedido a mim durante o curso.

MACHADO, M. A. G. **Estudo das propriedades dos gráficos de controle bivariados com amostragem dupla**. 2006. 129f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2006.

RESUMO

Assim como o gráfico de \bar{X} , o gráfico T^2 de Hotelling é lento na detecção de pequenas a moderadas perturbações no processo. Estudos consagrados mostram que o desempenho do gráfico de \bar{X} melhora em muito com o uso da amostragem dupla. Com base nestes resultados, este trabalho se dedica ao estudo das propriedades dos gráficos T^2 com amostragem dupla para processos bivariados. Através de uma rotação dos eixos cartesianos é possível transformar as variáveis originais, que em geral são altamente correlacionadas, em variáveis independentes. Com as novas variáveis e trabalhando com coordenadas polares foi possível obter o número médio de amostras (NMA) que o gráfico proposto necessita para detectar uma alteração no processo. Por meio de comparações dos NMA s foi possível verificar que o gráfico de controle proposto é, na maioria das vezes, mais eficiente que os gráficos adaptativos em que o tamanho das amostras e/ou o intervalo entre retirada de amostras são variáveis.

PALAVRAS-CHAVE: Gráfico T^2 de Hotelling, amostragem dupla, processos bivariados, número médio de amostras

MACHADO, M. A. G. **The properties' study of the bivariate control charts with double sampling.** 2006. 129f. Dissertation (Master Degree in Mechanical Engineering) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2006.

ABSTRACT

Similarly to the \bar{X} chart, the T^2 chart is slow to detect small or even moderate process disturbances. Earlier studies have shown that the use of the double sampling procedure improves substantially the \bar{X} chart performance. Based on that, we propose here to study the performance of the T^2 chart with double sampling applied to control bivariate processes. An appropriate rotation transforms the original bivariate variables, in general presenting high correlation, in independent variables. With these equivalent variables and working with polar coordinates, it was possible to obtain the average run length (*ARL*) that measures the effectiveness of the proposed chart in detecting a process change. By comparisons of the *ARLs* it was possible to verify that the proposed control chart is, frequently, more efficient than the adaptive charts with variable sample size or variable sampling interval.

KEYWORDS: T^2 chart, double sampling, bivariate processes, average run length

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|-----|
| FIGURA 1 – Gráfico de controle | 32 |
| FIGURA 2 – Volume dos saquinhos de leite (processo estável e ajustado) | 33 |
| FIGURA 3 – Gráfico de \bar{X} - ocorrência de um alarme falso | 34 |
| FIGURA 4 – Gráfico de \bar{X} - ocorrência de um alarme verdadeiro | 35 |
| FIGURA 5 – Tempo até o sinal | 37 |
| FIGURA 6 – Gráfico de controle <i>BIDU</i> com os valores de T_{i1}^2 e T_{i2}^2 | 54 |
| FIGURA 7 – Gráfico de controle <i>BITWO</i> com os valores de T_{i1}^2 e T_{i2}^2 | 55 |
| FIGURA 8 – Gráfico de controle <i>SyBIDU</i> com os valores de T_{i1}^2 e T_{i2}^2 | 57 |
| FIGURA 9 – Gráfico de controle <i>SyBITWO</i> com os valores de T_{i1}^2 e T_{i2}^2 | 58 |
| FIGURA 10 – Gráfico de controle T^2 de Hotelling | 59 |
| FIGURA 11 – Gráfico de controle <i>MVSS</i> | 60 |
| FIGURA 12 – Gráfico de controle <i>MVSI</i> | 63 |
| FIGURA 13 – Gráfico de controle <i>MVSSVSI</i> | 66 |
| FIGURA 14 – Curva de probabilidades de não-detecção ($\lambda=0,25$) | 81 |
| FIGURA 15 – Curva de probabilidades de não-detecção ($\lambda=0,50$) | 81 |
| FIGURA 16 – Curva de probabilidades de não-detecção ($\lambda=0,75$) | 82 |
| FIGURA 17 – Curva de probabilidades de não-detecção ($\lambda=1,00$) | 82 |
| FIGURA 18 – Curva de probabilidades de não-detecção ($\lambda=1,25$) | 83 |
| FIGURA 19 – Curva de probabilidades de não-detecção ($\lambda=1,50$) | 83 |
| FIGURA A.1 – Rotação dos eixos $h_1(\bar{x})$ e $h_2(\bar{y})$ | 108 |
| FIGURA B.1 – Espaço amostral de $(g_1(n_1, \mu_0); g_2(n_1, \mu_0))$ | 110 |
| FIGURA B.2 – Espaço amostral de $(g_1(n, \mu_0); g_2(n, \mu_0))$ | 112 |
| FIGURA B.3 – Área A_{ij} | 113 |
| FIGURA B.4 – Δx e Δy | 114 |
| FIGURA B.5 – Espaço amostral de $(g_1(n_1, \mu_1); g_2(n_1, \mu_1))$ | 115 |
| FIGURA C.1 – Seqüência de amostras dentro ou fora dos limites | 119 |
| FIGURA C.2 – Casos em que o gráfico com regra especial de decisão sinaliza ($L=3$) | 119 |

FIGURA C.3 – Diagrama de transição de estados ($L=3$)..... 120

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| TABELA 1 – Parâmetros de entrada: gráficos <i>BIDU</i> e <i>MVSS</i> ($\bar{n}=3$; $\alpha_1=0,001$).... | 76 |
| TABELA 2 – Valores de <i>NMA</i> para os gráficos T^2 , <i>BIDU</i> e <i>MVSS</i> ($\alpha_1=0,001$; $NMA_0=200$; $\bar{n}=3$; $n_1=1$) | 76 |
| TABELA 3 – Valores de <i>NMA</i> para os gráficos T^2 , <i>BIDU</i> e <i>MVSS</i> ($\alpha_1=0,001$; $NMA_0=200$; $\bar{n}=3$; $n_1=2$)..... | 77 |
| TABELA 4 – Parâmetros de entrada: gráficos <i>BIDU</i> e <i>MVSS</i> ($\bar{n}=4$; $\alpha_1=0,001$) | 77 |
| TABELA 5 – Valores de <i>NMA</i> para os gráficos T^2 , <i>BIDU</i> e <i>MVSS</i> ($\alpha_1=0,001$; $NMA_0=200$; $\bar{n}=4$; $n_1=1$) | 77 |
| TABELA 6 – Valores de <i>NMA</i> para os gráficos T^2 , <i>BIDU</i> e <i>MVSS</i> ($\alpha_1=0,001$; $NMA_0=200$; $\bar{n}=4$; $n_1=2$)..... | 78 |
| TABELA 7 – Valores de <i>NMA</i> para os gráficos T^2 , <i>BIDU</i> e <i>MVSS</i> ($\alpha_1=0,001$; $NMA_0=200$; $\bar{n}=4$; $n_1=3$)..... | 78 |
| TABELA 8 – Parâmetros de entrada: gráficos <i>BIDU</i> e <i>MVSS</i> ($\bar{n}=5$; $\alpha_1=0,001$) ... | 79 |
| TABELA 9 – Valores de <i>NMA</i> para os gráficos T^2 , <i>BIDU</i> e <i>MVSS</i> ($\alpha_1=0,001$; $NMA_0=200$; $\bar{n}=5$; $n_1=1$) | 79 |
| TABELA 10 – Valores de <i>NMA</i> para os gráficos T^2 , <i>BIDU</i> e <i>MVSS</i> ($\alpha_1=0,001$; $NMA_0=200$; $\bar{n}=5$; $n_1=2$) | 79 |
| TABELA 11 – Valores de <i>NMA</i> para os gráficos T^2 , <i>BIDU</i> e <i>MVSS</i> ($\alpha_1=0,001$; $NMA_0=200$; $\bar{n}=5$; $n_1=3$) | 80 |
| TABELA 12 – Valores de <i>NMA</i> para os gráficos T^2 , <i>BIDU</i> e <i>MVSS</i> ($\alpha_1=0,001$; $NMA_0=200$; $\bar{n}=5$; $n_1=4$)..... | 80 |
| TABELA 13 – Parâmetros do gráfico <i>MVSI</i> ($\bar{n}=4$ e 5) | 84 |
| TABELA 14 – Valores de <i>TES</i> para os gráficos T^2 , <i>BIDU</i> e <i>MVSI</i> ($\alpha_1=0,001$; $NMA_0=200$; $\bar{n}=4$) | 84 |

| | |
|---|----|
| TABELA 15 – Valores de TES para os gráficos T^2 , $BIDU$ e $MVSI$ ($\alpha_1=0,001$; $NMA_0=200$; $\bar{n}=5$) | 84 |
| TABELA 16 – Parâmetros de entrada: gráfico $BIDU$ ($\bar{n}=4$; $\alpha_1=0$) | 85 |
| TABELA 17 – Valores de NMA para os gráficos T^2 e $BIDU$ ($NMA_0=200$; $\bar{n}=4$; $n_1=1$) | 86 |
| TABELA 18 – Valores de NMA para os gráficos T^2 e $BIDU$ ($NMA_0=200$; $\bar{n}=4$; $n_1=2$) | 86 |
| TABELA 19 – Valores de NMA para os gráficos T^2 e $BIDU$ ($NMA_0=200$; $\bar{n}=4$; $n_1=3$)..... | 86 |
| TABELA 20 – Parâmetros de entrada: gráfico $SyBIDU$ ($\bar{n}=4$; $\alpha_1=0$) | 88 |
| TABELA 21 – Valores de NMA e NMA_{SS} para os gráficos T^2 , $BIDU$ e $SyBIDU$ ($\alpha_1=0$; $NMA_0=200$; $\bar{n}=4$; $n_1=1$; $n_2=8$) | 88 |
| TABELA 22 – Valores de NMA e NMA_{SS} para os gráficos T^2 , $BIDU$ e $SyBIDU$ ($\alpha_1=0$; $NMA_0=200$; $\bar{n}=4$; $n_1=1$; $n_2=16$) | 89 |
| TABELA 23 – Valores de NMA e NMA_{SS} para os gráficos T^2 , $BIDU$ e $SyBIDU$ ($\alpha_1=0$; $NMA_0=200$; $\bar{n}=4$; $n_1=2$; $n_2=8$) | 89 |
| TABELA 24 – Valores de NMA e NMA_{SS} para os gráficos T^2 , $BIDU$ e $SyBIDU$ ($\alpha_1=0$; $NMA_0=200$; $\bar{n}=4$; $n_1=2$; $n_2=16$) | 89 |
| TABELA 25 – Valores de NMA e NMA_{SS} para os gráficos T^2 , $BIDU$ e $SyBIDU$ ($\alpha_1=0$; $NMA_0=200$; $\bar{n}=4$; $n_1=3$; $n_2=8$) | 90 |
| TABELA 26 – Valores de NMA e NMA_{SS} para os gráficos T^2 , $BIDU$ e $SyBIDU$ ($\alpha_1=0$; $NMA_0=200$; $\bar{n}=4$; $n_1=3$; $n_2=16$)..... | 90 |
| TABELA 27 – Parâmetros dos gráficos $BIDU$ e $MVSSVSI$ ($\bar{n}=2$; $\alpha_1=0$; $b=0,1$) ... | 91 |
| TABELA 28 – Parâmetros dos gráficos $BIDU$ e $MVSSVSI$ ($\bar{n}=3$; $\alpha_1=0$; $b=0,1$) ... | 91 |
| TABELA 29 – Parâmetros dos gráficos $BIDU$ e $MVSSVSI$ ($\bar{n}=4$; $\alpha_1=0$; $b=0,1$) ... | 91 |
| TABELA 30 – Parâmetros dos gráficos $BIDU$ e $MVSSVSI$ ($\bar{n}=2$; $\alpha_1=0$; $b=0,2$) ... | 91 |
| TABELA 31 – Parâmetros dos gráficos $BIDU$ e $MVSSVSI$ ($\bar{n}=3$; $\alpha_1=0$; $b=0,2$) ... | 92 |

| | |
|---|-----|
| TABELA 32 – Parâmetros dos gráficos <i>BIDU</i> e <i>MVSSVSI</i> ($\bar{n}=4$; $\alpha_1=0$; $b=0,2$) ... | 92 |
| TABELA 33 – Valores de <i>TES</i> para os gráficos <i>BIDU</i> e <i>MVSSVSI</i> ($\bar{n}=2$; $\alpha_1=0$; $b=0,1$) | 92 |
| TABELA 34 – Valores de <i>TES</i> para os gráficos <i>BIDU</i> e <i>MVSSVSI</i> ($\bar{n}=3$; $\alpha_1=0$; $b=0,1$) | 92 |
| TABELA 35 – Valores de <i>TES</i> para os gráficos <i>BIDU</i> e <i>MVSSVSI</i> ($\bar{n}=4$; $\alpha_1=0$; $b=0,1$) | 92 |
| TABELA 36 – Valores de <i>TES</i> para os gráficos <i>BIDU</i> e <i>MVSSVSI</i> ($\bar{n}=2$; $\alpha_1=0$; $b=0,2$) | 93 |
| TABELA 37 – Valores de <i>TES</i> para os gráficos <i>BIDU</i> e <i>MVSSVSI</i> ($\bar{n}=3$; $\alpha_1=0$; $b=0,2$) | 93 |
| TABELA 38 – Valores de <i>TES</i> para os gráficos <i>BIDU</i> e <i>MVSSVSI</i> ($\bar{n}=4$; $\alpha_1=0$; $b=0,2$) | 93 |
| TABELA 39 – Parâmetros de entrada: gráfico <i>BIDU</i> ($\bar{n}=4$; $\alpha_1=0$) | 94 |
| TABELA 40 – Valores de <i>NMA</i> para o gráfico T^{2*} ($NMA_0=200$; $\bar{n}=4$) | 94 |
| TABELA 41 – Valores de <i>NMA</i> para o gráfico <i>BIDU</i> ($\alpha_1=0$; $NMA_0=200$; $\bar{n}=4$; $n_1=1$; $n_2=8$) | 95 |
| TABELA 42 – Valores de <i>NMA</i> para o gráfico <i>BIDU</i> ($\alpha_1=0$; $NMA_0=200$; $\bar{n}=4$; $n_1=1$; $n_2=16$) | 95 |
| TABELA C.1 – Matriz de transição da cadeia de Markov ($L=3$) | 120 |
| TABELA C.2 – Matriz de probabilidades iniciais da cadeia de Markov ($L=3$)..... | 122 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- BIDU* - Bivariado com Amostragem Dupla
- BITWO* - Bivariado com amostragem em dois estágios
- MVSI* - Multivariado com tempo de espera entre retirada de amostras variável
- MVSS* - Multivariado com tamanho de amostra variável
- MVSSVSI* - Multivariado com tamanho de amostra e tempo de espera entre retiradas de amostra variáveis
- SyBIDU* - Bivariado Synthetic com Amostragem Dupla
- SyBITWO* - Bivariado *Synthetic* com amostragem em dois estágios

LISTA DE SÍMBOLOS

| | | |
|-----------------------------|---|--|
| x | - | Variável de interesse |
| y | - | Variável de interesse |
| μ_x | - | Média da variável x |
| μ_y | - | Média da variável y |
| μ_{0x} | - | Média da variável x em controle |
| μ_{0y} | - | Média da variável y em controle |
| μ_{1x} | - | Média da variável x após a ocorrência da causa especial |
| μ_{1y} | - | Média da variável y após a ocorrência da causa especial |
| σ_x | - | Desvio-padrão da variável x |
| σ_y | - | Desvio padrão da variável y |
| $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ | - | Covariância entre x e y |
| σ_x^2 | - | Variância de x |
| σ_y^2 | - | Variância de y |
| ρ | - | Coefficiente de correlação |
| Σ | - | Matriz de covariâncias |
| \mathcal{E} | - | Matriz de covariância unitária |
| T^2 | - | Estatística de Hotelling com distribuição de Qui-Quadrado |
| T_1^2 | - | Distância estatística entre o vetor de médias de x e y e o vetor de valores alvos ($\mu_{0x}; \mu_{0y}$) no primeiro estágio da amostragem |
| T_2^2 | - | Distância estatística entre o vetor de médias de x e y e o vetor de valores alvos ($\mu_{0x}; \mu_{0y}$) no segundo estágio da amostragem |
| LA | - | Limite de advertência para os gráficos <i>BIDU</i> , <i>BITWO</i> , <i>SyBIDU</i> e <i>SyBITWO</i> |
| LC_1 | - | Limite de controle do primeiro estágio para os gráficos <i>BIDU</i> , <i>BITWO</i> , <i>SyBIDU</i> e <i>SyBITWO</i> |

| | |
|-------------|--|
| LC_2 | - Limite de controle do segundo estágio para os gráficos <i>BIDU</i> , <i>BITWO</i> , <i>SyBIDU</i> e <i>SyBITWO</i> |
| w | - Limite de advertência para os gráficos <i>MVSS</i> , <i>MVSI</i> e <i>MVSSVSI</i> |
| LC | - Limite de controle para os gráficos <i>MVSS</i> , <i>MVSI</i> e <i>MVSSVSI</i> |
| n_0 | - Tamanho de amostra do gráfico T^2 com parâmetros fixos |
| n_1 | - Tamanho da amostra no primeiro estágio para os gráficos <i>BIDU</i> , <i>BITWO</i> , <i>SyBIDU</i> e <i>SyBITWO</i> Tamanho da menor amostra para os gráficos <i>MVSS</i> e <i>MVSSVSI</i> |
| n_2 | - Tamanho da amostra no segundo estágio para os gráficos <i>BIDU</i> , <i>BITWO</i> , <i>SyBIDU</i> e <i>SyBITWO</i> . Tamanho da maior amostra para os gráficos <i>MVSS</i> e <i>MVSSVSI</i> . |
| n | - Tamanho de amostra considerando os dois estágios de amostragem |
| \bar{n} | - Número médio de itens inspecionado por amostragem |
| h | - Intervalo de tempo entre retirada de amostras |
| at_0 | - Intervalo longo de tempo entre amostragens para os gráficos <i>MVSI</i> e <i>MVSSVSI</i> |
| bt_0 | - Intervalo curto de tempo entre amostragens para os gráficos <i>MVSI</i> e <i>MVSSVSI</i> |
| t_0 | - Intervalo de tempo entre amostragens para o gráfico T^2 com parâmetros fixos |
| TES | - Tempo esperado até o sinal |
| $TMAF$ | - Tempo médio até a ocorrência de um alarme falso |
| M | - Intervalo de tempo entre o momento da retirada da última amostra antes da ocorrência da causa especial e a ocorrência da causa especial |
| \bar{x}_1 | - Média amostral da característica de qualidade x da sub-amostra de tamanho n_1 . |
| \bar{y}_1 | - Média amostral da característica de qualidade y da sub-amostra de tamanho n_1 . |

| | |
|-------------|---|
| \bar{x}_2 | - Média amostral da característica de qualidade x da sub-amostra de tamanho n . |
| \bar{y}_2 | - Média amostral da característica de qualidade y da sub-amostra de tamanho n . |
| α_1 | - Probabilidade de alarme falso no primeiro estágio |
| α_2 | - Probabilidade de alarme falso no segundo estágio |
| α | - Probabilidade de alarme falso quando a amostragem dupla está em uso |
| β | - Probabilidade de não-deteção |
| p_1 | - Probabilidade de alarme verdadeiro no primeiro estágio para os gráficos <i>BIDU</i> , <i>BITWO</i> , <i>SyBIDU</i> e <i>SyBITWO</i> . Porcentagem do tempo que o processo permanece no estado 1, quando isento de causas especiais, para os gráficos <i>MVSS</i> , <i>MSVI</i> e <i>MVSSVSI</i> . |
| p_2 | - Probabilidade de verdadeiro no segundo estágio para os gráficos <i>BIDU</i> , <i>BITWO</i> , <i>SyBIDU</i> e <i>SyBITWO</i> . Porcentagem do tempo que o processo permanece no estado 2, quando isento de causas especiais para os gráficos <i>MVSS</i> , <i>MSVI</i> e <i>MVSSVSI</i> . |
| p | - Probabilidade de alarme verdadeiro quando a amostragem dupla está em uso |
| p_0 | - Probabilidade de que a amostragem seja interrompida no primeiro estágio |
| NMA | - Número médio de amostras até o sinal |
| NMA_0 | - Número médio de amostras até o sinal durante o período em controle |
| NMA_{ZS} | - NMA que mede o tempo necessário para se detectar uma causa especial que esteja presente desde o início do monitoramento |
| NMA_{SS} | - NMA que mede o tempo necessário para se detectar uma causa especial que ocorre após um longo e indeterminado período de operação em controle |
| δ_x | - Deslocamento da média da variável x em relação ao seu valor-alvo |
| δ_y | - Deslocamento da média da variável y em relação ao seu valor-alvo |
| δ'_x | - Deslocamento da média da variável x em relação ao seu |

| | | |
|-------------------------|---|--|
| | - | valor-alvo, considerando os eixos x e y rotacionados |
| δ'_y | - | Deslocamento da média da variável y em relação ao seu valor-alvo, considerando os eixos x e y rotacionados |
| d | - | Raiz quadrada da soma dos quadrados dos deslocamentos das médias das variáveis x e y |
| λ | - | Parâmetro de não-centralidade do gráfico de controle T^2 Magnitude da perturbação no processo |
| λ_1 | - | Parâmetro de não-centralidade do gráfico de controle $MVSS$ e $MVSSVSI$ considerando a menor amostra |
| λ_2 | - | Parâmetro de não-centralidade dos gráficos de controle $MVSS$ e $MVSSVSI$ considerando a maior amostra |
| $g_1(n, \mu)$ | - | Variável aleatória e normal |
| $g_2(n, \mu)$ | - | Variável aleatória e normal |
| $g(n, \mu)$ | - | Vetor bi-dimensional (g_1, g_2) , sendo g_1 e g_2 independentes |
| NA | - | Número de amostras conformes entre ocorrências de amostras não-conformes |
| L | - | Número máximo de amostras entre amostras não-conformes para que se tenha um alarme nos gráficos de controle $SyBIDU$ e $SyBITWO$ |
| k | - | Número de variáveis do processo sendo monitoradas Fator de abertura dos limites de controle |
| F | - | Distribuição de Qui-Quadrado central acumulada |
| $f_{N(0, \mathcal{E})}$ | - | Função densidade da distribuição normal bivariada com média zero e matriz de covariância unitária |
| $N(0, \mathcal{E})$ | - | Distribuição normal bivariada com média zero e matriz de covariâncias unitária |
| P | - | Matriz de probabilidades de transição |
| Q | - | Matriz de probabilidades de transição dos estados transitórios |
| B' | - | Vetor de probabilidades iniciais dos gráficos $MVSS$, $MVSI$ e $MVSSVSI$ |
| I | - | Matriz identidade |
| t' | - | Vetor do intervalo de tempo entre retirada de amostras para os gráficos $MVSI$ e $MVSSVSI$ |
| Q' | - | Matriz de probabilidades iniciais |
| S | - | Vetor de probabilidades iniciais |

| | | |
|-----------|---|---|
| I_1 | - | Região do gráfico de controle <i>BIDU</i> abaixo do limite de advertência |
| I_2 | - | Região do gráfico de controle <i>BIDU</i> delimitada pelos limites de advertência e de controle do primeiro estágio |
| I_3 | - | Região do gráfico de controle <i>BIDU</i> acima do limite de controle do primeiro estágio |
| I_4 | - | Região do gráfico de controle <i>BIDU</i> abaixo do limite de controle do segundo estágio |
| I_5 | - | Região do gráfico de controle <i>BIDU</i> acima do limite de controle do segundo estágio |
| I_5^* | - | Região fora do disco $D(C, R)$ |
| R_{max} | - | Raio de um disco D cuja probabilidade de se ter um par (x, y) que não pertence ao disco é praticamente zero |
| m | - | Número de partições das variáveis x e y |
| A | | Probabilidade de se ter uma amostra conforme quando em uso o gráfico de controle com regra especial de decisão |
| B | | Probabilidade de se ter uma amostra não-conforme quando em uso o gráfico de controle com regra especial de decisão |

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

| | | |
|----------|---|----|
| 1 | INTRODUÇÃO | 22 |
| 1.1 | CONSIDERAÇÕES INICIAIS | 22 |
| 1.2 | JUSTIFICATIVA E IMPORTÂNCIA | 26 |
| 1.3 | OBJETIVOS..... | 28 |
| 1.3.1 | Objetivo Geral | 28 |
| 1.3.2 | Objetivos Específicos | 28 |
| 1.4 | MÉTODO DE PESQUISA | 28 |
| 1.5 | VERIFICAÇÃO DOS RESULTADOS..... | 29 |
| 1.6 | LIMITAÇÕES DO TRABALHO..... | 29 |
| 1.7 | CARÁTER INÉDITO..... | 29 |
| 1.8 | ORGANIZAÇÃO DO TEXTO | 30 |
| 2 | GRÁFICOS DE CONTROLE | 32 |
| 2.1 | CONSIDERAÇÕES INICIAIS | 32 |
| 2.2 | ALARMES NO GRÁFICO DE CONTROLE..... | 34 |
| 2.3 | DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE..... | 35 |
| 2.4 | GRÁFICOS DE CONTROLE UNIVARIADOS..... | 39 |
| 2.5 | GRÁFICOS DE CONTROLE MULTIVARIADOS | 42 |
| 2.5.1 | O Vetor de Médias e a Matriz de Covariâncias Amostrais | 43 |
| 2.5.2 | Estimação de Parâmetros: Vetor de médias, Matrizes de Covariâncias e de Correlação Populacionais | 45 |
| 2.5.1 | Distribuição Normal Multivariada | 46 |
| 2.6 | GRÁFICO DE CONTROLE T^2 DE HOTELLING | 47 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3 | DESCRIÇÃO DO GRÁFICO DE CONTROLE BIVARIADO COM AMOSTRAGEM DUPLA E DE ALGUNS ESQUEMAS CONCORRENTES..... | 51 |
| 3.1 | CONSIDERAÇÕES INICIAIS | 51 |
| 3.2 | GRÁFICO DE CONTROLE <i>BIDU</i> | 51 |
| 3.3 | GRÁFICO DE CONTROLE <i>BITWO</i> | 54 |
| 3.4 | GRÁFICO DE CONTROLE <i>SyBIDU</i> | 55 |
| 3.5 | GRÁFICO DE CONTROLE <i>SyBITWO</i> | 57 |
| 3.6 | GRÁFICO DE CONTROLE T^2 DE HOTELLING | 58 |
| 3.7 | GRÁFICO DE CONTROLE <i>MVSS</i> | 60 |
| 3.8 | GRÁFICO DE CONTROLE <i>MVSI</i> | 62 |
| 3.9 | GRÁFICO DE CONTROLE <i>MVSSVSI</i> | 65 |
| 3.10 | OBTENÇÃO DO <i>NMA</i> PARA OS ESQUEMAS CONCORRENTES | 69 |
| 4 | DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO | 70 |
| 4.1 | CONSIDERAÇÕES INICIAIS | 70 |
| 4.2 | PROPRIEDADES DOS GRÁFICOS BIVARIADOS COM AMOSTRAGEM DUPLA | 70 |
| 4.3 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 73 |
| 5 | ANÁLISE DE DESEMPENHO DO GRÁFICO PROPOSTO E DOS ESQUEMAS CONCORRENTES..... | 74 |
| 5.1 | GRÁFICO DE CONTROLE <i>MVSI</i> | 75 |
| 5.2 | DESEMPENHO DO GRÁFICO <i>BIDU</i> | 75 |
| 5.3 | COMPARAÇÃO DOS DESEMPENHOS DOS GRÁFICOS <i>BIDU</i> E <i>MVSI</i> | 83 |
| 5.4 | ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DE α_1 NO DESEMPENHO DO GRÁFICO <i>BIDU</i> | 85 |
| 5.5 | DESEMPENHO DO GRÁFICO <i>SyBIDU</i> | 87 |
| 5.6 | COMPARAÇÃO DOS DESEMPENHOS DOS GRÁFICOS <i>BIDU</i> E <i>MVSSVSI</i> | 90 |
| 5.7 | ESTUDO DO EFEITO DA CORRELAÇÃO NO DESEMPENHO DO GRÁFICO <i>BIDU</i> | 93 |

| | |
|--|-----------|
| 6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS..... | 96 |
| REFERÊNCIAS | 99 |
| APÊNDICE A – Prova do Teorema A1 | 107 |
| APÊNDICE B – Cálculos Secundários | 110 |
| APÊNDICE C – Modelo de Cadeia de Markov para obtenção do <i>NMA</i> do gráfico de controle com regra especial de decisão..... | 118 |
| APÊNDICE D – Código computacional em <i>FORTTRAN</i> | 123 |

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Em geral, produtos que atendem às exigências do cliente advêm de processos estáveis. Mais precisamente, de processos capazes de operar com pequena variabilidade em torno das dimensões-alvo ou nominais do produto. O controle estatístico do processo (CEP) é uma ferramenta de resolução de problemas útil na obtenção da estabilidade do processo e na melhoria da capacidade através da redução da variabilidade (MONTGOMERY, 2004).

O início formal do controle estatístico de processo se deu por volta de 1924, quando Walter A. Shewhart desenvolveu e aplicou os gráficos de controle na Bell Telephone Laboratories. No início, como era de se esperar, poucos acreditaram no potencial desta nova técnica. Pouco a pouco, no entanto, os gráficos de controle ganharam a fama de serem ferramentas poderosas de monitoramento.

A década de 70 pode ser considerada como a década dos gráficos de Shewhart; o lema da época era: *“só se assegura qualidade de processos que estejam sob o monitoramento de gráficos de Shewhart”*. Esta “febre” teve seu lado bom e seu lado ruim. O lado bom foi que o uso intenso dos gráficos de controle facilitou a divulgação de diversas técnicas estatísticas, especialmente desenvolvidas para o monitoramento de processos industriais. O lado ruim foi que, em função da pressão natural gerada pelo modismo da época, os gráficos de Shewhart passaram a ser utilizados de forma indevida, ou pior, em situações desnecessárias, caindo assim no descrédito. Ainda hoje, se sente o efeito deste modismo.

De acordo com os fundamentos estabelecidos por Shewhart, sempre que um ponto é plotado na região de ação do gráfico, o responsável pelo processo deve interrompê-lo imediatamente, visando encontrar causas especiais que afetam a qualidade dos produtos, como por exemplo, um desgaste de ferramenta que altera a dimensão dos eixos que estão sendo manufaturados. Na prática, contudo, poucos são aqueles que seguem a regra estabelecida por Shewhart. A maioria prefere, por

exemplo, esperar o surgimento de um segundo ponto na região de ação e, além disso, só tomam a decisão drástica de parar o processo se este ponto não estiver muito longe do primeiro. Para atender esta exigência do usuário surgiram os gráficos de controle com regra especial de decisão, conhecidos na literatura como *Synthetic Control Chart* (WU; SPEDDING, 2000).

O avanço tecnológico tem, cada vez mais, levado a processos com menor variabilidade. Neste contexto, pequenas alterações no processo podem ser críticas, devendo, portanto, ser eliminadas com rapidez. A idéia original de Shewhart – de controlar o processo apenas através das informações extraídas da última amostra, e de decidir por intervir no processo apenas após a ocorrência de um ponto amostral além dos limites de controle – não pode ser diretamente utilizada no monitoramento de processos com baixa variabilidade, pelas seguintes razões (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005):

- a) os gráficos de controle se tornam lentos na detecção de causas especiais que alteram de forma moderada os parâmetros do processo;
- b) os custos com amostragem tornam-se proibitivos, face a necessidade de se ter que trabalhar com amostras grandes.

Em geral, o desempenho dos gráficos de controle tem sido medido pelo número médio de amostras, *NMA*, que o gráfico de controle precisa para sinalizar uma alteração no processo (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005). Não têm sido poucas as propostas de alterações à idéia original de Shewhart. No caso do monitoramento de processos univariados, as estratégias que vêm sendo adotadas, visando melhorar o desempenho dos gráficos de controle, consistem em se variar os parâmetros de projeto dos gráficos de Shewhart. Esses parâmetros são o tamanho da amostra n , o intervalo de tempo entre retirada de amostras h e o fator de abertura k dos limites de controle. Tais gráficos de controle são conhecidos como Gráficos de Controle Adaptativos (ver Reynolds et al. (1988), Runger e Pignatiello (1991), Reynolds e Arnold (1989) e Runger e Montgomery (1993)). Uma segunda estratégia para melhorar o desempenho dos gráficos de controle consiste em se adotar esquemas alternativos de amostragem, tais como a Amostragem dupla (DAUDIN, 1992) ou a Amostragem em dois estágios (COSTA; RAHIM, 2004). Uma terceira estratégia

consiste em tomadas de decisão diferentes daquelas baseadas em um único ponto na região de ação do gráfico de controle, ver Wu e Spedding (2000).

Quando o gráfico de Shewhart está em uso, amostras de tamanho fixo são retiradas do processo em intervalos regulares. A idéia do esquema adaptativo consiste em se variar os parâmetros de projeto dos gráficos de Shewhart (tamanho da amostra n , intervalo de tempo entre retirada de amostras h e fator de abertura k dos limites de controle), entre um valor mínimo e um máximo, com base nas informações obtidas após a inspeção da última amostra retirada do processo. Os esquemas adaptativos melhoram o desempenho dos gráficos de controle, quanto à sinalização de desajustes no processo (ver Reynolds et al. (1988); Prabhu; Runger e Keats (1993); Costa (1994, 1997, 1998, 1999, 1999a); Costa e De Magalhães (2006); De Magalhães et al. (2001, 2002, 2006); De Magalhães e Moura Neto (2005); Epprecht e Costa (2001); Epprecht; Costa e Mendes (2003, 2005); Michel e Fogliatto (2002)). Os esquemas adaptativos também têm sido utilizados com os gráficos de controle destinados ao monitoramento de processos multivariados, ver Aparisi (1996); Aparisi e Haro (2001, 2003); Chou; Chen e Chen (2006) e Yeh e Lin (2002).

Do mesmo modo que os esquemas adaptativos, a amostragem dupla melhora o desempenho dos gráficos de controle. De acordo com Costa e Rahim (2004, 2006), quando se tem um processo bastante estável, o monitoramento se torna monótono, pois raramente um valor amostral é plotado fora dos limites de controle. A adoção do gráfico de controle tradicional, neste contexto, tem como consequência natural (e negativa) uma tendência do usuário dispensar cada vez menos atenção aos procedimentos necessários à obtenção dos valores das estatísticas utilizadas no monitoramento. A média, a variância e a amplitude amostral são exemplos destas estatísticas.

Ressalta-se que tal falta de atenção pode afetar o desempenho do gráfico de controle no monitoramento do processo. Visando minimizar este problema, Costa e Rahim (2004) propuseram um esquema alternativo de amostragem, isto é, o esquema de amostragem em dois estágios. No primeiro estágio apenas um item da amostra é inspecionado e, sempre que possível, a inspeção é feita por atributos. Se o item é aprovado, a amostragem é interrompida. Caso contrário, a amostragem vai para o

segundo estágio quando então todos os itens da amostra são inspecionados e os valores da característica de qualidade de interesse são medidos e utilizados na obtenção da(s) estatística(s) de monitoramento.

A grande vantagem da amostragem em dois estágios é que, durante o período em que o processo permanece ajustado, a amostragem é, na maioria das vezes, interrompida e o controle acaba sendo feito apenas por atributos, que além de mais simples é menos monótono.

O gráfico de Shewhart sinaliza uma deterioração do processo sempre quando um ponto cai em sua região de ação. Alternativamente, Wu e Spedding (2000) propuseram um gráfico de controle com regra especial de decisão conhecido como *Synthetic Control Chart*. O *Synthetic Control Chart* sinaliza somente quando um segundo ponto cai na região de ação, e sob a condição de que o número de amostras entre os dois pontos que caíram na região de ação, não seja superior a um valor inteiro L . O *Synthetic Control Chart* tem sido objeto recente de pesquisa, ver Wu e Spedding (2000, 2000a), Wu e Yeo (2001), Wu; Yeo e Spedding (2001), Calzada e Scariano (2001), Davis e Woodall (2002), Machado e Costa (2005,2005a) e Costa e Rahim (2006a).

Até agora se discutiu os gráficos de controle univariados. Porém, o aumento da complexidade e dos níveis de automação dos processos industriais e a crescente disponibilidade de suporte computacional, têm aumentado o interesse pelo monitoramento simultâneo de várias características de qualidade, também chamadas de variáveis do processo (LOWRY; MONTGOMERY, 1995). Pouco a pouco as novas estratégias de monitoramento, originalmente propostas para melhorar o desempenho dos gráficos de controle univariados, estão sendo aplicadas ao monitoramento de processos multivariados.

Desde que foi criado, o gráfico de controle T^2 (HOTELLING, 1947) passou a ser o dispositivo estatístico mais utilizado no monitoramento de duas ou mais características de qualidade. Estas características frequentemente são inter-relacionadas e formam um conjunto correlacionado (MASON; YOUNG, 2002). Lowry e Montgomery (1995) fazem uma revisão dos gráficos de controle

multivariados. Mason e Young (2002) discutem exaustivamente as aplicações do gráfico de controle T^2 .

O gráfico de controle T^2 é utilizado no monitoramento simultâneo de k variáveis de interesse. Quando o vetor das médias e a matriz de covariância, respectivamente μ_0 e Σ_0 , de um processo k -variado normalmente distribuído são conhecidos, a estatística T^2 de Hotelling para a i -ésima amostra é dada por:

$$T_i^2 = n(\bar{X}_i - \mu_0)' \Sigma_0^{-1}(\bar{X}_i - \mu_0),$$

onde n é o tamanho da i -ésima amostra e \bar{X}_i é o vetor das médias amostrais dos k parâmetros para a amostra i . Quando o processo está sob controle, T_i^2 segue uma distribuição de Qui-quadrado com k graus de liberdade, desde que o vetor das médias seja normalmente distribuído (MASON; YOUNG, 2002).

O gráfico de controle T^2 de Hotelling é análogo ao gráfico \bar{X} de Shewhart, sendo ambos pouco sensíveis a pequenas alterações no processo. Desta forma, métodos estatísticos tais como o esquema CUSUM e o gráfico de EWMA, ver Costa; Epprecht e Carpinetti (2005), têm sido utilizados para o caso multivariado em que o vetor de médias está sujeito a pequenas alterações (ver Woodall e Ncube (1985); Crosier (1988); Pignatiello e Runger (1990); Lowry et al. (1992); Lowry e Montgomery (1995); Prabhu e Runger (1997); Qiu e Hawkins (2001)). A idéia de se variar os parâmetros dos gráficos de controle multivariados (gráficos adaptativos multivariados), tais como o tamanho da amostra, o intervalo de tempo entre retiradas de amostras, tem sido explorada em artigos recentes (ver Aparisi (1996), Aparisi e Haro (2001), Aparisi e Haro (2003), Chou; Chen e Chen (2006)). A amostragem dupla para processos multivariados também tem sido objeto de estudo ((GRIGORYAN; HE, 2005) e (HE; GRIGORYAN, 2005)).

1.2 JUSTIFICATIVA E IMPORTÂNCIA

Quando Shewhart propôs os gráficos de controle, o seu objetivo principal era de se ter um dispositivo estatístico bastante simples para o monitoramento de processos. Contudo, com o passar do tempo, os processos se tornaram mais sofisticados e passaram a demandar o uso de técnicas estatísticas mais eficientes, no sentido de se

detectar perturbações no processo com maior rapidez. Além disso, a automatização dos processos tem feito surgir a necessidade do monitoramento simultâneo de vários parâmetros de qualidade, tais como dimensão, peso, composição, etc.

Graças ao avanço computacional tem sido possível reprojeter os gráficos de controle e torná-los mais eficientes. Neste contexto, têm se variado os parâmetros dos gráficos de controle, e/ou modificado o esquema de amostragem, e/ou o critério de decisão. Surge assim uma nova geração dos gráficos de Shewhart. Em se tratando de processos univariados, a literatura sobre este tema é bastante rica. Contudo, os trabalhos voltados a processos multivariados são poucos e recentes - ver Bernard (2001), Skinner (2002), Thomas (2002), Konrath (2002), Grigoryan (2003) e Testik (2003) - e, em geral, a complexidade dos modelos tem levado ao uso de técnicas de simulação para a obtenção das propriedades dos gráficos de controle. Por exemplo, Grigoryan (2003) estudou os gráficos multivariados com amostragens múltiplas obtendo o *NMA* por meio de simulação.

Alternativamente, esta dissertação trata da elaboração de modelos matemáticos necessários ao estudo do desempenho dos gráficos de controle. Fundamentados em Teoremas e Corolários da Estatística, foi possível obter para o caso bivariado normal expressões fechadas para o *NMA*. Como Grigoryan (2003) já havia antecipado, não é simples obter tais expressões. Contudo, com base em estudos teóricos, foi possível obtê-las.

Um aspecto importante desta nova geração de gráficos de controle é que estes são ferramentas ágeis na detecção de alterações nos parâmetros dos processos. Tanto a adoção da amostragem dupla quanto a adoção da regra especial de decisão tentam simplificar o monitoramento realizado através dos gráficos de controle.

Estando a amostragem dupla em uso e sendo o tamanho da amostra no primeiro estágio $n_1 = 1$, a frequência que pode conduzir ao segundo estágio da amostragem é baixa. Dessa forma, em grande parte do tempo, o usuário lida com a informação direta dos parâmetros sob monitoramento, ou seja, com os valores de (x, y) . Dispositivos do tipo “calibres” permitem que, no primeiro estágio da amostragem, a inspeção seja por atributos.

Estando em uso a regra especial de decisão o usuário pode esperar o surgimento de um segundo ponto na região de ação e, além disso, só tomar a decisão drástica de parar o processo se este ponto não estiver muito longe do primeiro, o que de fato já ocorria na prática.

Assim, este estudo torna-se importante à medida que se propõe a estudar os gráficos de controle bivariados com amostragem dupla e regra especial de decisão por meio de desenvolvimentos teóricos. O método aqui empregado pode ser utilizado em futuras pesquisas para o caso em que se consideram três ou mais características de qualidade sob monitoramento.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 **Objetivo Geral**

Este trabalho teve como objetivo geral estudar os gráficos de controle bivariados com amostragem dupla e regra especial de decisão.

1.3.2 **Objetivos Específicos**

- a) Revisar a bibliografia existente sobre gráficos de controle multivariados;
- b) Criar modelos matemáticos necessários à obtenção das propriedades dos gráficos de controle bivariados com amostragem dupla com ou sem regra especial de decisão;
- c) Comparar o desempenho dos gráficos de controle propostos com o dos gráficos multivariados tradicionais.
- d) Comparar o desempenho dos gráficos de controle propostos com o dos gráficos multivariados adaptativos.

1.4 MÉTODO DE PESQUISA

Para atender os objetivos propostos adotou-se a pesquisa quantitativa, que segundo Diehl e Tatim (2004) caracteriza-se pelo uso da quantificação no tratamento

das informações por meio de técnicas estatísticas, com o objetivo de garantir resultados confiáveis.

As propriedades dos gráficos de controle bivariados baseadas na estatística T^2 são facilmente obtidas, pois T^2 segue uma distribuição de Qui-Quadrado. Para o esquema de amostragem considerado neste trabalho, isto é, a amostragem dupla, foi preciso redefinir a função de Qui-Quadrado de uma forma apropriada (baseada na idéia de coordenadas polares).

Além disso, fez-se uso de uma estratégia que consistiu na rotação de eixos cartesianos de forma a transformar as variáveis originais correlacionadas, em variáveis independentes, ver Apêndice A.

A pesquisa consistiu basicamente de cinco etapas: revisão da bibliografia sobre gráficos de controle multivariados, desenvolvimento das expressões matemáticas para a obtenção das medidas de desempenho dos gráficos de controle propostos, elaboração de código computacional, comparação do desempenho dos gráficos de controle propostos com o dos esquemas concorrentes e, por fim, análise de todo o trabalho.

1.5 VERIFICAÇÃO DOS RESULTADOS

Os valores do *NMA* foram obtidos pelas expressões matemáticas desenvolvidas neste trabalho e por simulação. Tais simulações foram feitas por bolsistas de Iniciação Científica. As diferenças nos valores obtidos pelas expressões matemáticas e pelas simulações não excederam a 1%.

1.6 LIMITAÇÕES DO TRABALHO

Os resultados obtidos são válidos apenas para o caso bivariado normal.

Embora os métodos empregados se apliquem ao caso mais geral multivariado, a extensão das expressões matemáticas para k variáveis, sendo $k > 2$, não é trivial.

1.7 CARÁTER INÉDITO

Para o caso bivariado não há na literatura trabalhos que tratam da obtenção, por meio de desenvolvimentos teóricos, das propriedades dos gráficos de controle com

amostragem dupla e regra especial de decisão. Quando da revisão bibliográfica dos gráficos de controle multivariados observou-se que a técnica de simulação tem sido a mais utilizada. Optou-se neste trabalho pelo estudo teórico, pois além do caráter inédito, permitiu conhecer com mais precisão as propriedades dos gráficos de controle com amostragem dupla com ou sem regra especial de decisão.

1.8 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

A dissertação está estruturada em seis capítulos. Neste primeiro capítulo foi apresentado um breve histórico sobre os gráficos de controle, as justificativas para a escolha do tema, os objetivos, o método de pesquisa, a validação dos resultados, as limitações do trabalho, seu caráter inédito e a organização do texto.

O Capítulo 2 é dedicado aos gráficos de controle univariados e multivariados, apresentando de forma detalhada as pesquisas realizadas até o momento na área de controle estatístico de processo. Direciona-se em especial aos gráficos de controle com amostragem dupla e regra especial de decisão, que são o foco deste trabalho.

A descrição dos gráficos de controle propostos, bem como a dos esquemas concorrentes está no Capítulo 3.

No Capítulo 4 está o desenvolvimento matemático necessário para a obtenção das propriedades dos gráficos de controle bivariados com amostragem dupla com ou sem regra especial de decisão.

No Capítulo 5 o desempenho dos gráficos de controle propostos é comparado com o dos esquemas concorrentes.

No Capítulo 6 estão as conclusões e sugestões para futuras pesquisas.

No Apêndice A está a prova do Teorema A.1 introduzido no Capítulo 4, o qual mostra como é possível transformar as variáveis originais de monitoramento, consideradas correlacionadas, em variáveis independentes.

O Apêndice B é uma complementação ao Capítulo 4. Neste Apêndice estão os cálculos secundários necessários ao completo desenvolvimento das expressões para obtenção das propriedades dos gráficos de controle propostos.

No Apêndice C está o procedimento utilizado por Davis e Woodall (2002), baseado em um modelo de cadeia de Markov, para obtenção das propriedades dos gráficos de controle com regra especial de decisão.

No Apêndice D está o código computacional desenvolvido em *FORTRAN* que fornece os *NMA*s teóricos, isto é, obtidos com o auxílio das expressões matemáticas do Capítulo 4.

2 GRÁFICOS DE CONTROLE

2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Os gráficos de controle são dispositivos gráficos que servem para monitorar processos que, em geral, iniciam operação em um estado de controle estatístico (processo sob controle) e assim permanecem até o surgimento de uma causa especial que os levam para um segundo estado, onde as condições de controle estatístico deixam de existir (processo fora de controle).

O esquema clássico de Shewhart para cartas de controle de variáveis mensuráveis X , consiste em se retirar, a intervalos de tempos regulares de comprimento h_0 , amostras de tamanho n_0 . Para cada amostra é determinado o valor de uma estatística G adequada. Então estes valores são plotados em cartas onde estão especificados limites de controle (LIC é o limite inferior de controle e LSC é o limite superior de controle), cujo espaçamento em relação a linha central, LC , é estabelecido com base na variabilidade natural das medidas de X de uma característica de qualidade de produtos advindos de um processo sob controle (vide Figura 1).

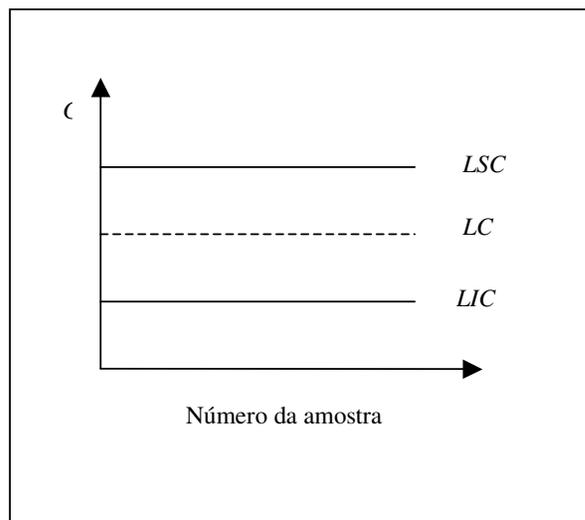


Figura 1: Gráfico de controle

Considerando uma linha de empacotamento de leite, espera-se que a média dos volumes dos saquinhos fique em torno do valor especificado de 1000 ml e que não exista grande variabilidade entre estes volumes, ver Figura 2. O valor especificado de 1000 ml é o valor-alvo da variável aleatória X , quantidade de leite em cada saquinho. A variável X pode ser ainda o diâmetro de um eixo, a concentricidade de um eixo, entre outras grandezas mensuráveis.

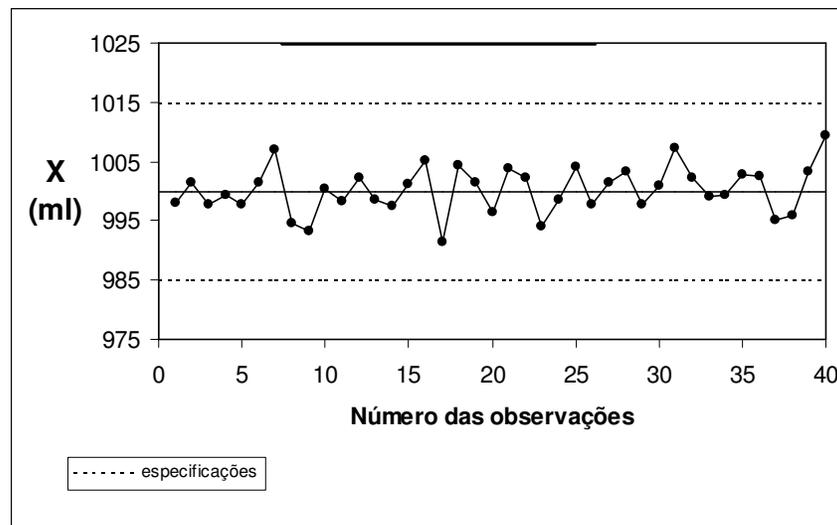


Figura 2: Volume dos saquinhos de leite (processo estável e ajustado)

As causas especiais alteram a distribuição da variável aleatória X , tirando sua média do valor-alvo e/ou aumentando a sua variabilidade (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005). Máquinas ajustadas ou controladas de maneira inadequada, erros do operador, ou matéria-prima defeituosa são exemplos de causas especiais.

As causas especiais fazem com que os valores da estatística G se afastem da linha central do gráfico de controle. Deste modo, a presença de uma causa especial é sinalizada por um valor de G além dos limites de controle.

Neste capítulo serão estudadas as propriedades dos gráficos de controle de Shewhart univariados e multivariados. Em especial serão estudados os gráficos de controle com amostragem dupla e regra especial de decisão. Antes, porém, serão definidos os riscos estatísticos inerentes ao monitoramento de processos por meio de gráficos de controle. As figuras da próxima seção foram adaptadas de Costa; Epprecht e Carpinetti (2005).

2.2 ALARMES NO GRÁFICO DE CONTROLE

Considere o gráfico de controle das médias \bar{X} . Quando o processo está em um estado de controle estatístico, tem-se o risco α de um valor de \bar{X} cair fora dos limites de controle, sinalizando indevidamente uma causa especial (“alarme falso”). A Figura 3 retrata a ocorrência de um alarme falso no gráfico de \bar{X} . Quando o processo está fora de controle, portanto sob a influência de uma causa especial, tem-se o risco β de um valor de \bar{X} cair dentro dos limites de controle, não sinalizando assim a existência da causa especial. A Figura 4 retrata a ocorrência de um alarme verdadeiro no gráfico de \bar{X} .

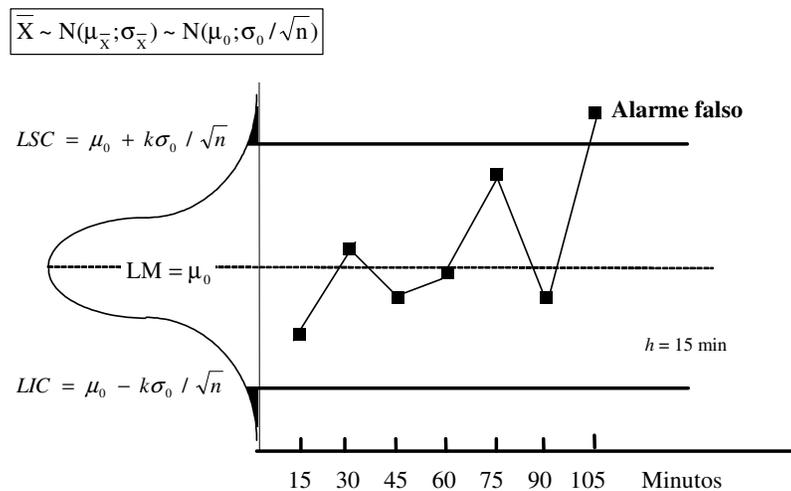


Figura 3: Gráfico de \bar{X} - ocorrência de um alarme falso

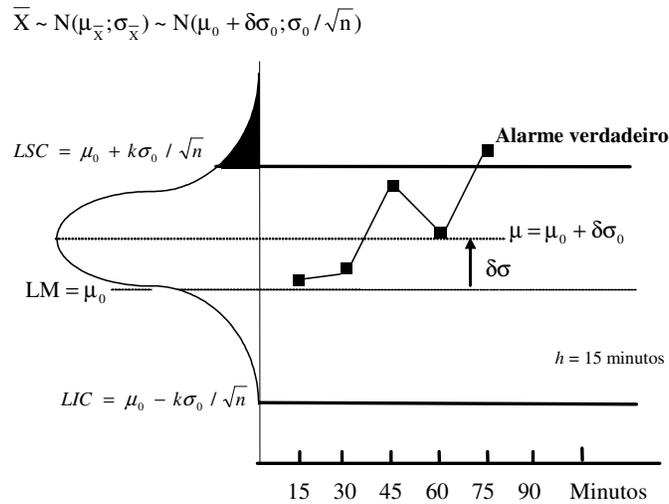


Figura 4: Gráfico de \bar{X} - ocorrência de um alarme verdadeiro

A consequência de ordem prática associada ao erro do tipo I (alarme falso) é intervir no processo na hora errada, quando o mesmo está isento de causas especiais (o que em si já acarreta um custo – de interrupção do processo, de mão de obra – além de um risco de desajustar um processo que estava ajustado); e a consequência de ordem prática associada ao erro do tipo II (“não-deteção”) é não intervir no processo na hora certa, quando o mesmo está sob a influência de causas especiais. Em geral, as causas especiais comprometem a qualidade dos itens produzidos, portanto quanto antes forem descobertas e eliminadas melhor.

2.3 DESEMPENHO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE

Com base na relação entre os custos de operação e eficácia do gráfico de controle pode-se determinar a melhor combinação dos parâmetros dos gráficos de controle, ou seja, o tamanho da amostra n , o intervalo de tempo h entre retirada de amostras e o fator k de abertura dos limites de controle - ver Costa; Epprecht e Carpinetti, (2005).

O desempenho dos gráficos de controle é medido pelo número médio de amostras até o sinal (NMA) ou pelo tempo esperado até o sinal (TES). Estas medidas de desempenho, por sua vez, dependem dos parâmetros de projeto do gráfico de

controle n , h e k . Os parâmetros de projeto influenciam de forma diferente no desempenho dos gráficos de controle, nos riscos α e β e no custo de inspeção (COSTA; MACHADO, 2003, 2003a).

Durante o período em controle o $NMA=1/\alpha$ e é denominado NMA_0 , e durante o período fora de controle $NMA=1/p$, sendo $p = 1 - \beta$. Quando um processo está sob controle é desejável que o número médio de amostras retiradas do processo desde o início do monitoramento até o sinal (NMA_0) seja grande, de modo a garantir poucos alarmes falsos. Quando um processo está fora de controle é desejável que o número médio de amostras retiradas desde a ocorrência de uma causa especial até o sinal (NMA) seja pequeno, de modo a garantir uma rápida detecção da causa especial.

O TES (Tempo esperado até o sinal), isto é, o tempo esperado entre a ocorrência da causa especial e a sua detecção é dado por (ver Figura 5):

$$TES = E(TS) = E(h \times NAS - M) = h \times E(NAS) - E(M)$$

onde TS é o tempo até o sinal, NAS é o número de amostras até o sinal, M é o intervalo de tempo entre o momento da retirada da última amostra antes da ocorrência da causa especial e a ocorrência da causa especial.

A esperança do número de amostras até o sinal, $E(NAS)$, é o NMA , o número médio de amostras até o sinal ($NMA = 1/p$). A causa especial pode ocorrer em qualquer instante dentro de um intervalo h . Para $M \sim$ uniforme $[0, h]$, tem-se $E(M) = h/2$, ver Reynolds et al. (1988). Portanto, substituindo:

$$TES = h \times NMA - h/2 = h/p - h/2$$

Durante o período em controle o $TES = h/\alpha$ e é denominado $TMAF$, tempo médio até a ocorrência de um alarme falso.

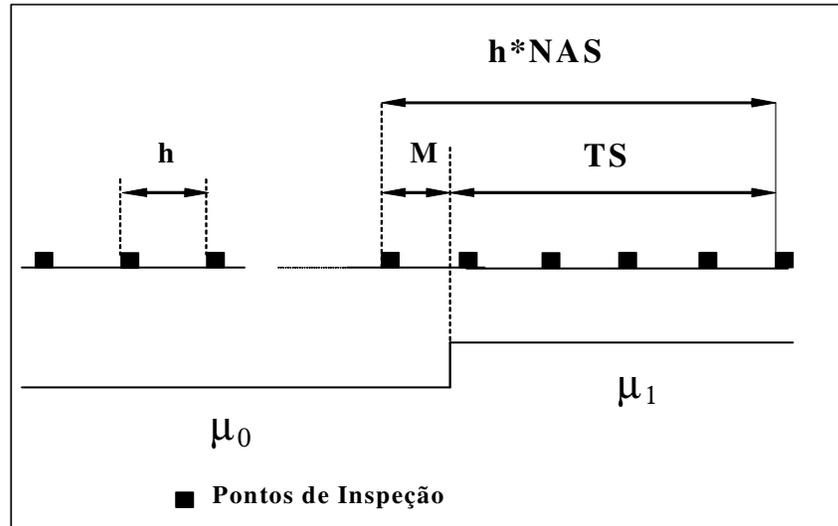


Figura 5: Tempo até o sinal

Por exemplo para $n=2$ e $k=3,00$ são necessárias 17,81 amostras em média para detectar uma causa especial que desloca a média de um desvio padrão ($\delta=1$). No exemplo dos saquinhos de leite se o volume X de cada saquinho tem média μ_0 de 1000 ml e desvio-padrão σ_0 de 10 ml, trata-se então de uma causa especial que desloca a média para 990 ml ou 1010 ml. Se aumentarmos n para 5 o NMA se reduz a 4,47. Se for retirada uma amostra a cada uma hora se gasta 17,31 horas ($17,81 - 0,5 = 17,31$) para $n=2$ e 3,97 horas ($4,47 - 0,5 = 3,97$) para $n=5$ para se detectar a causa especial.

Desta forma, observa-se que o aumento do tamanho da amostra melhora o desempenho do gráfico, ou seja, aumenta o poder em se detectar um desajuste do processo. Conseqüentemente o risco β diminui. Porém, o custo de inspeção se eleva com o aumento do tamanho da amostra. O risco α independe de n .

Já o aumento de k tem um impacto negativo sobre o desempenho dos gráficos, pois diminui o seu poder. Em contrapartida, reduz-se a incidência de alarmes falsos, ou seja, o risco α diminui.

Quanto ao h , deve-se ter sempre em mente o seguinte: valores pequenos de h implicam em custos elevados com amostragens e maior incidência de alarmes falsos.

Antes de se aprofundar, porém, na escolha dos parâmetros de implementação do gráfico de controle de Shewhart é importante investigar se as condições do processo a ser monitorado satisfazem as suposições necessárias para a utilização do gráfico, isto

é, se as observações da característica de qualidade de interesse são independentes e normalmente distribuídas.

A suposição mais importante relativa aos gráficos de controle é a de independência das observações, porque os gráficos de controle convencionais não funcionam bem se a característica da qualidade apresenta níveis, ainda que baixos, de correlação ao longo do tempo. Especificamente, esses gráficos de controle darão resultados enganosos sob a forma de demasiados alarmes falsos se os dados são autocorrelacionados (MONTGOMERY, 2004). Este aspecto tem sido enfatizado por vários autores, incluindo Russo e Camargo (2004), Moreira e Echeveste (2004) e Moreira e Caten (2004).

Infelizmente, a suposição de observações não-correlacionadas ou independentes nem sempre é satisfeita em alguns processos de fabricação. Os exemplos incluem processos químicos em que medidas consecutivas de uma variável do processo ou uma característica do produto se apresentam não raro altamente correlacionadas (MONTGOMERY, 2004).

De fato, Shewhart, ao criar os gráficos de controle, estava considerando indústrias de partes discretas, com nenhum ou quase nenhum grau de automação. Em tais processos, a condição de independência das observações geralmente é satisfeita. Hoje em dia, porém, processos contínuos e por batelada são extremamente freqüentes, principalmente (embora não exclusivamente) na indústria química e na indústria metalúrgica. Tais processos raramente produzem observações independentes, de modo que não podem ser monitorados pelos gráficos convencionais. Este problema não se restringe a processos contínuos e por bateladas: processos discretos altamente automatizados também costumam produzir dados autocorrelacionados (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005).

Portanto, é importante antes de iniciar o monitoramento de um processo, identificar se ele produz observações independentes ou se é autocorrelacionado, pois um gráfico de controle inadequado, que produza alarmes falsos em excesso, acabará sendo descartado, ou pior, mantido apenas para cumprir alguma exigência formal. Os alarmes são simplesmente ignorados pelo pessoal envolvido com o processo.

2.4 GRÁFICOS DE CONTROLE UNIVARIADOS

Os gráficos de controle têm sido a principal ferramenta estatística utilizada no monitoramento de processos, graças a sua simplicidade operacional. De acordo com os fundamentos de Shewhart, sempre que um ponto é plotado na região de ação do gráfico, o responsável pelo processo deve interrompê-lo imediatamente, visando encontrar causas especiais que afetam a qualidade dos produtos, exemplo, um desgaste de ferramenta que altera o diâmetro X dos eixos que estão sendo manufaturados. Entretanto, essa simplicidade torna o gráfico de controle lento, na detecção de pequenas e moderadas alterações nos parâmetros dos processos que estão sendo monitorados, isto é, na média e/ou na variância da variável aleatória X . Diante disso, não têm sido poucas as propostas de alteração à idéia original de Shewhart, como por exemplo, os gráficos de controle adaptativos, a amostragem dupla, a amostragem em dois estágios e as regras especiais de decisão, citados por Wu e Spedding (2000) e Machado e Costa (2005, 2005a).

A idéia de se variar os parâmetros dos gráficos de controle univariados (gráficos adaptativos), tais como o tamanho de amostra, o intervalo de tempo entre retirada de amostras, tem sido bastante explorada. Reynolds et al. (1988), Runger e Pignatiello (1991), Reynolds e Arnold (1989), Runger e Montgomery (1993) e Reynolds e Stoumbos (2001) estudaram o caso em que o intervalo entre retirada de amostras é variável (*VSI – Variable Sampling Interval*).

Quando os gráficos de Shewhart com intervalo de tempo entre retirada de amostras variável estão em uso a ocorrência de uma observação na região central do gráfico não levanta suspeitas de que o processo esteja desajustado, conseqüentemente o monitoramento é relaxado e um intervalo de tempo maior que o usual é adotado para a retirada da próxima amostra. Por outro lado, a ocorrência de uma observação na região de advertência do gráfico de controle, levanta suspeita de que o processo se desajustou, conseqüentemente, a próxima amostra é retirada o mais breve possível visando confirmar ou não tal suspeita. Mantendo a mesma frequência de inspeção durante o período em que o processo permanece ajustado, o gráfico *VSI* precisa, em

média, de menos amostras para sinalizar um desajuste. De forma análoga é possível variar os demais parâmetros dos gráficos de controle.

A idéia do gráfico de Shewhart com tamanho de amostra variável (*VSS – Variable Sample Size*) foi introduzida por Prabhu; Runger e Keats (1993) e Costa (1994). Prabhu; Montgomery e Runger (1994) e Costa (1997, 1999) abordaram também o caso em que tanto o tamanho de amostra como o intervalo entre retiradas de amostras são variáveis (*VSSI – Variable Sampling Size Interval*). Costa (1998,1999a) estendeu o estudo do gráfico de Shewhart *VSSI* e incluiu limites de ação variáveis, sendo este gráfico denominado por gráfico de controle *VP (Variable Parameters)*.

Assim como o esquema adaptativo, o gráfico de controle com amostragem dupla proposto por Daudin (1992), foi criado para atender a necessidade de se ter uma ferramenta estatística ágil na detecção de pequenas alterações nos parâmetros do processo. Quando o gráfico de controle \bar{X} com amostragem dupla está em uso a amostragem é realizada em dois estágios com amostras de tamanho n , sendo $n = n_1 + n_2$. A ocorrência de uma média amostral, considerando a sub-amostra de tamanho n_1 , distante do seu valor-alvo leva ao segundo estágio da amostragem, onde as n_2 unidades restantes são inspecionadas e a média amostral considerando a amostra de tamanho n é calculada e comparada com os limites de controle.

A amostragem em dois estágios é um caso particular da amostragem dupla, onde $n_1 = 1$. Quando se tem um processo bastante estável, isto é, com média e variância que permanecem longos períodos de tempo sem se alterarem, o monitoramento se torna bastante monótono, pois raramente um valor de \bar{X} , ou de R , cai fora dos limites de controle. A consequência natural é de o usuário dar cada vez menos atenção aos passos necessários para a obtenção dos valores de \bar{X} e de R . Esta falta de atenção pode, em alguns casos, levar a sérios enganos.

A amostragem em dois estágios (COSTA; RAHIM, 2004, 2006) torna o monitoramento mais simples e menos monótono. No primeiro estágio, um item da amostra é inspecionado, e seu valor de X é comparado com os limites do gráfico de Shewhart para observações individuais. Deste modo, se o ponto X cair dentro dos limites de controle a amostragem é interrompida, caso contrário, segue-se para o

segundo estágio, quando então toda amostra é inspecionada, e sua média \bar{X} é agora comparada com os limites do gráfico de Shewhart para médias (podendo também ser calculada a sua amplitude R , para então ser comparada com os limites do gráfico de Shewhart para as amplitudes). Quando a amostragem em dois estágios está em uso, no primeiro estágio é possível trabalhar com atributos e, desta forma, reduzir o esforço com inspeção.

O gráfico de Shewhart sinaliza uma deterioração do processo sempre quando um ponto cai em sua região de ação. Alternativamente, Wu e Spedding (2000) propuseram um gráfico de controle com regra especial de decisão conhecido como *Synthetic Control Chart*. O *Synthetic Control Chart* sinaliza somente quando um segundo ponto cai na região de ação, e sob a condição de que o número de amostras entre os dois pontos que caíram na região de ação, não seja superior a um valor inteiro L . O *Synthetic Control Chart* tem sido objeto recente de pesquisa, ver Wu e Spedding (2000, 2000a), Wu e Yeo (2001), Wu; Yeo e Spedding (2001), Calzada e Scariano (2001), Davis e Woodall (2002), Machado e Costa (2005,2005a) e Costa e Rahim (2006a).

Para variáveis de qualidade do tipo mensurável, é comum o uso de dois gráficos de controle, um para o monitoramento da média do processo e outro para o monitoramento da variabilidade, ver Costa; Epprecht e Carpinetti, (2005), Costa (1993), Costa e Rahim (2000, 2001), Rahim e Costa (2000), Gan (1995), Albin; Kang e Sheha (1997), Costa (1998 e 1999) e Costa e Rahim (2004). A principal conclusão que pode ser tirada de todos esses estudos é que nenhum dos gráficos conjuntos são confiáveis na identificação do tipo de causa especial.

Na prática, a velocidade com a qual os gráficos de controle detectam mudanças no processo parece ser mais importante do que a habilidade destes em identificar o tipo de mudança. Deste modo, faz sentido considerar um único gráfico de controle, baseado em uma única estatística, para o monitoramento simultâneo da média e da variância do processo, ver Domangue e Patch (1991), Chen; Cheng e Xie (2001, 2004), Costa e Rahim (2004a, 2006), Costa e De Magalhães (2005), Costa; Epprecht e Carpinetti (2005), Barbosa; Machado e Costa (2005).

A combinação do uso da regra especial de decisão com uma única estatística para o monitoramento da média e da variabilidade do processo tem sido objeto de estudo. Machado e Costa (2005,2005a) têm utilizado com sucesso a estatística R . Sejam x_{ij} , $i = 1,2,3,\dots$, e $j = 1,2,\dots,n$ as observações da variável X organizadas em grupos de tamanho $n > 1$, com i indexando o número do grupo. Seja $\bar{X}_i = (X_{i1} + \dots + X_{in})/n$ a i -ésima média amostral, e seja $e_i = \bar{X}_i - \mu_0$ a diferença entre a i -ésima média amostral e o valor alvo da média do processo. Então para $\xi_i = \begin{cases} d, & \text{se } e_i \geq 0 \\ -d, & \text{se } e_i < 0 \end{cases}$, tem-se que:

$$R_i = \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \mu_0 + \xi_i \sigma_0)^2, \quad i = 1,2,\dots$$

onde d é uma constante positiva. Quando $d=0$, $R_i / (\gamma \sigma_0)^2$ tem distribuição de qui-quadrado não-central com n graus de liberdade e um parâmetro de não-centralidade $\lambda = n\delta^2 / \gamma^2$, ou seja $R_i / (\gamma \sigma_0)^2 \sim \chi_n^2(\lambda)$, ver Chen; Cheng e Xie (2004). O uso da estatística de Qui-quadrado não-central para controlar a média e a variância do processo tem sido também objeto de estudo de Costa e Rahim (2004a, 2006, 2006a, 2006b), Costa e De Magalhães (2005, 2006), Machado e Costa (2005, 2005a) e Barbosa; Machado e Costa (2005).

2.5 GRÁFICOS DE CONTROLE MULTIVARIADOS

Até agora se discutiu os gráficos de controle univariados. Porém, o aumento da complexidade e dos níveis de automação dos processos industriais e a crescente disponibilidade de suporte computacional, têm aumentado o interesse pelo monitoramento simultâneo de várias características de qualidade, também chamadas de variáveis do processo (LOWRY; MONTGOMERY, 1995). Pouco a pouco as novas estratégias de monitoramento de processos univariados estão sendo aplicadas ao monitoramento de processos multivariados.

Antes de discutir, porém, as estratégias de monitoramento multivariadas na seção 2.5.1 estão algumas notações e conceitos sobre vetores aleatórios, matrizes de covariância e de correlação com o intuito de mostrar como esses são utilizados dentro do contexto de estatística multivariada; na seção 2.5.2 estão as equações para

estimação das matrizes de covariâncias e de correlação através de dados amostrais e na seção 2.5.3 apresenta-se a distribuição normal multivariada.

2.5.1 O Vetor de Médias e a Matriz de Covariâncias Amostrais

Seja X um vetor contendo k componentes, onde cada componente é uma variável aleatória, isto é, X_i é uma variável aleatória onde $i = 1, 2, \dots, k$. Então, X é chamado de vetor aleatório e é denotado por:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_k \end{bmatrix}$$

O vetor transposto de vetor aleatório X é denotado por $X' = [X_1 \ X_2 \ X_3 \dots X_k]$.

O vetor $\mu = E(X)$ é chamado de vetor de médias do vetor $X' = [X_1 \ X_2 \ X_3 \dots X_k]$, sendo

$$\mu = E(X) = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_k \end{bmatrix}$$

Onde $\mu_i = E(X_i)$ denota a média, ou esperança, da variável aleatória X_i , $i = 1, 2, \dots, k$.

A variância do i -ésimo componente do vetor X é denotada por $Var(X_i) = \sigma_i^2 = \sigma_{ii}$. O desvio padrão é denotado por σ_i ou $\sqrt{\sigma_{ii}}$ e fornece a informação sobre a disposição dos valores das variáveis X_i em relação a μ_i , isto é, indica se os valores de X_i estão próximos ou distantes da média μ_i . Assim, valores grandes de σ_i indicam uma maior dispersão de valores em relação à média da distribuição.

A covariância entre os valores da i -ésima e j -ésima variáveis do vetor X é definida por:

$$Cov(X_i, X_j) = \sigma_{ij} = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] \quad (2.1)$$

A covariância serve para medir o grau de relacionamento linear entre duas variáveis aleatórias. Basicamente, observando-se a expressão (2.1), percebe-se que quando os valores de X_i acima da média μ_i tendem a estar associados aos valores de X_j acima da média μ_j , a covariância σ_{ij} tende a ser positiva assim como quando os valores de X_i abaixo da média μ_i tenderem a estar associados aos valores de X_j abaixo da média μ_j . Portanto, à medida que a variável X_i cresce (decrece) numericamente, a variável X_j também cresce (decrece) linearmente. Quando os valores de X_i acima da média μ_i tendem a estar associados com valores de X_j abaixo da média μ_j , ou vice-versa, a covariância σ_{ij} tende a ser negativa. Neste caso, à medida que a variável X_i cresce (decrece) numericamente, a variável X_j decresce (cresce) linearmente. Embora a covariância tenha informação sobre o relacionamento linear entre duas variáveis, é difícil julgar se a relação é forte ou não, observando-se apenas os seus valores numéricos uma vez que não se tem um valor de referência mínimo ou máximo para comparação dos valores σ_{ij} . Assim, uma medida mais útil na prática é a correlação. (MINGOTI, 2005).

É prática comum apresentar os valores de σ_{ij} em uma matriz chamada matriz de covariâncias. A matriz de variâncias e covariâncias do vetor aleatório X é denotada por:

$$Cov(X) = \Sigma_{k \times k} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1k} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{k1} & \sigma_{k2} & \cdots & \sigma_{kk} \end{bmatrix}.$$

A título de ilustração, a matriz $\Sigma_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ representa a matriz de covariâncias de um vetor aleatório $X' = [X_1 \ X_2]$, tal que $\sigma_{11} = \sigma_1^2 = 8$; $\sigma_{22} = \sigma_2^2 = 5$; $\sigma_{12} = \sigma_{21} = -2$.

O coeficiente de correlação entre a i -ésima e j -ésima variáveis do vetor X é definido por:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii} \sigma_{jj}}} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

onde $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, k$. A correlação é uma medida mais adequada para avaliar o grau de relacionamento linear entre duas variáveis quantitativas do que a covariância, pois seus valores estão sempre entre -1 e 1. Assim quanto mais próximo de 1, mais indicação se tem de que existe um relacionamento linear positivo entre as variáveis X_i e X_j e quanto mais próximo de -1, mais indicação se tem da existência de um relacionamento linear negativo. Uma correlação próxima de zero é uma indicação numérica de um não-relacionamento linear entre as variáveis em questão. Quando se têm muitas variáveis, o procedimento mais comum é apresentar os valores de ρ_{ij} em uma matriz chamada de matriz de correlação.

2.5.2 Estimação de Parâmetros: Vetor de médias, Matrizes de Covariâncias e de Correlação Populacionais

Na prática, as matrizes de covariâncias e de correlação teóricas precisam ser estimadas através de dados amostrais. Assim, supondo que se dispõe de uma amostra aleatória de tamanho n , onde, para cada elemento da amostra, tenha-se observado os valores de k -variáveis aleatórias de interesse, ou seja, têm-se n vetores aleatórios independentes e identicamente distribuídos da forma:

$$X_1 = \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ \vdots \\ X_{k1} \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \\ \vdots \\ X_{k2} \end{bmatrix}, \dots, X_n = \begin{bmatrix} X_{1n} \\ X_{2n} \\ \vdots \\ X_{kn} \end{bmatrix}$$

sendo que o primeiro índice indica a variável e o segundo o elemento amostral.

O vetor de médias μ será estimado pelo vetor de médias amostrais \bar{X} definido por:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} [X_1 + X_2 + \dots + X_n] = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_k \end{bmatrix}$$

onde \bar{X}_i é a média amostral da i -ésima variável, $i = 1, 2, \dots, k$. A matriz de covariâncias $\Sigma_{k \times k}$ será estimada pela matriz de covariâncias amostrais $S_{k \times k}$ definida por:

$$S_{k \times k} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1k} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{k1} & S_{k2} & \cdots & S_{kk} \end{bmatrix}$$

sendo $S_{ij} = S_{ji}$, $j \neq i$ e S_{ii} definidos respectivamente por:

$$S_{ii} = \frac{\sum_{l=1}^n (X_{il} - \bar{X}_i)^2}{n - 1}$$

que é a variância amostral da i -ésima variável,

$$S_{ij} = \frac{\sum_{l=1}^n (X_{il} - \bar{X}_i)(X_{jl} - \bar{X}_j)}{n - 1}$$

que é a covariância amostral entre a i -ésima e j -ésima variáveis. A matriz de correlação teórica $P_{k \times k}$ será estimada pela matriz de correlação amostral $R_{k \times k}$ definida por:

$$R_{k \times k} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1k} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{k1} & R_{k2} & \cdots & R_{kk} \end{bmatrix}$$

onde $R_{k \times k} = \frac{S_{ij}}{\sqrt{S_{ii}S_{jj}}}$ é o coeficiente de correlação amostral entre as i -ésima e j -ésima variáveis, conhecido como coeficiente de correlação de Pearson (MINGOTI, 2005).

2.5.3 Distribuição Normal Multivariada

A distribuição normal multivariada é uma generalização da normal univariada para o caso no qual se trabalha com duas ou mais variáveis aleatórias simultaneamente. A distribuição normal univariada com média μ e variância σ^2 tem densidade de probabilidades dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}.$$

No caso de um vetor aleatório de dimensão k , ou seja, $X' = [X_1 \ X_2 \ X_3 \dots \ X_k]$ diz-se que este vetor tem uma distribuição normal k -variada, e denota-se $X \sim N(\mu, \Sigma_{k \times k})$, se a função densidade de probabilidade de X for dada por:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} (x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu)\right\}.$$

A quantidade $(x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu)$ é referida como a distância de Mahalanobis do vetor x ao vetor de médias μ . Ela também é denominada de distância padronizada ou distância estatística (MINGOTI, 2005).

Quando $k = 2$, tem-se a distribuição normal bivariada. Nesse caso, a função densidade do vetor $X' = [X_1 \ X_2]$ é dada por:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi) |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} (x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu)\right\},$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

sendo ρ o coeficiente de correlação entre X_1 e X_2 , $-1 < \rho < 1$, $|\Sigma| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)$.

Quando $\rho=0$, a função $f(x_1, x_2)$ é o produto de duas densidades normais univariadas e, logo, as variáveis X_1 e X_2 são independentes, isto é,

$$f(x_1, x_2) = g(x_1)g(x_2)$$

onde,

$$g(x_1) = \frac{1}{(2\pi)\sigma_1} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\}$$

$$g(x_2) = \frac{1}{(2\pi)\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}$$

Portanto, no caso da distribuição normal k -variada, se X_1 e X_2 forem não correlacionadas também serão independentes (MINGOTI, 2005).

2.6 GRÁFICO DE CONTROLE T^2 DE HOTELLING

Desde que foi criado, o gráfico de controle baseado na estatística T^2 para o monitoramento de processos multivariados (HOTELLING, 1947) passou a ser o dispositivo estatístico mais usual no monitoramento de duas ou mais características de qualidade. Lowry e Montgomery (1995) fazem uma revisão dos gráficos de controle

multivariados. Mason e Young (2002) discutem exaustivamente as aplicações do gráfico de controle T^2 .

O gráfico de controle T^2 é utilizado no monitoramento simultâneo de k variáveis de interesse. Quando o vetor das médias e a matriz de covariância, μ_0 e Σ_0 , de um processo k -variado distribuído normalmente são conhecidos, a estatística T^2 de Hotelling para a i -ésima amostra é dada por:

$$T_i^2 = n(\bar{X}_i - \mu_0)' \Sigma_0^{-1}(\bar{X}_i - \mu_0),$$

onde n é o tamanho da i -ésima amostra e \bar{X}_i é o vetor das médias amostrais dos k parâmetros para a amostra i . Quando o processo está sob controle, T_i^2 segue uma distribuição de Qui-quadrado com k graus de liberdade.

Quando o vetor das médias e a matriz de covariância são desconhecidos, costuma-se utilizar os estimadores $\hat{\mu}_0$ e $\hat{\Sigma}_0$ baseados em m amostras:

$$\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i \quad \text{e} \quad \hat{\Sigma}_0 = \bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i,$$

onde \bar{X}_i e S_i são respectivamente o vetor das médias da amostra e a matriz de covariância da i -ésima amostra aleatória e independente de uma distribuição normal k -variada com vetor das médias μ_0 e matriz de covariância Σ_0 . Assim, a estatística utilizada no monitoramento do processo para o caso em que os parâmetros são estimados, é dada por:

$$T_i^2 = n(\bar{X}_i - \hat{\mu}_0)' \hat{\Sigma}_0^{-1}(\bar{X}_i - \hat{\mu}_0),$$

neste caso, T_i^2 segue uma distribuição F não-central.

Recentemente Champ, Jones-Farmer e Rigdon (2005) estudaram as propriedades do gráfico de controle T^2 quando os parâmetros são estimados.

O gráfico de controle T^2 de Hotelling é análogo ao gráfico \bar{X} de Shewhart, sendo ambos pouco sensíveis a deslocamentos pequenos e moderados do vetor das médias. Desta forma, métodos estatísticos univariados tais como, o esquema CUSUM e o gráfico de EWMA, ver Costa; Epprecht e Carpinetti (2005), têm sido utilizados para o caso multivariado (ver Woodall e Ncube (1985); Crosier (1988); Pignatiello e Runger (1990); Lowry et al. (1992); Lowry e Montgomery (1995); Prabhu e Runger

(1997); Qiu e Hawkins (2001)) em que o vetor de médias está sujeito a pequenas alterações. Bernard (2001) estudou o desempenho do gráfico de EWMA multivariado para o monitoramento da variabilidade de um processo.

A idéia de se variar os parâmetros dos gráficos de controle multivariados (gráficos adaptativos multivariados), tais como o tamanho da amostra, o intervalo de tempo entre retiradas de amostras, tem sido explorada em artigos recentes (Aparisi (1996), Aparisi e Haro (2001), Aparisi e Haro (2003), Chou; Chen e Chen (2006)).

A adoção da amostragem dupla para o caso de processos multivariados tem sido estudada por Grigoryan e He (2005) e He e Grigoryan (2005). Grigoryan (2003) estudou o caso dos gráficos multivariados com amostragens múltiplas obtendo o NMA por meio de simulação. Alternativamente, Machado e Costa (2006, 2006a) se dedicaram a obtenção das propriedades dos Gráficos de Controle Bivariados com Amostragem em Dois Estágios e com Regra Especial de Decisão por meio de desenvolvimentos teóricos.

Skinner (2002) estudou esquemas de controle multivariados apropriados para o caso em que as variáveis têm uma distribuição de Poisson.

Uma dificuldade encontrada ao se lidar com qualquer gráfico de controle multivariado é a interpretação prática de um sinal de fora de controle. Especificamente, não se sabe ao certo qual das k variáveis (ou qual subconjunto delas) é responsável pelo sinal. A prática padrão consiste em plotar gráficos \bar{X} univariados para as variáveis $X_1 X_2 X_3 \dots X_k$.

No entanto, essa abordagem pode não ser bem sucedida (MONTGOMERY, 2004). Mason e Young (2002) discutem como o método da decomposição ortogonal pode auxiliar na interpretação de um sinal no gráfico T^2 . Thomas (2002) estende os estudos realizados por Mason et al. (1995) sobre a decomposição da estatística T^2 de Hotelling para identificação das variáveis fora de controle quando em uso um esquema de monitoramento multivariado. Konrath (2002) estuda o gráfico de controle multivariado T^2 de Hotelling, decompondo a estatística T^2 por meio de um algoritmo computacional, também baseado na abordagem proposta por Mason et al. (1995).

Antes de se utilizar um esquema de monitoramento multivariado deve-se investigar se os vetores de observações são independentes, assim como para o caso

univariado. As observações de um processo multivariado são k -dimensional e as componentes são, em geral, correlacionadas. Para o caso univariado, uma abordagem que se tem revelado útil quando se lida com dados autocorrelacionados consiste em modelar diretamente a estrutura correlacional com um modelo apropriado de série temporal, usar esse modelo para remover a autocorrelação dos dados e aplicar gráficos de controle aos resíduos ((MONTGOMERY; MASTRANGELO, 1991) e (LU; REYNOLDS, 1999)).

São poucos, até o momento, os esquemas de monitoramento desenvolvidos para o caso multivariado quando as observações do processo são autocorrelacionadas. Kalgonda e Kulkarni (2004) propõem um esquema para o monitoramento da média de um processo multivariado autocorrelacionado. Eles consideram que as observações do processo seguem um modelo de série temporal vetorial de primeira ordem estacionário, VAR (1), e investigam o desempenho do esquema de monitoramento proposto em diagnosticar o sinal.

3 DESCRIÇÃO DO GRÁFICO DE CONTROLE BIVARIADO COM AMOSTRAGEM DUPLA E DE ALGUNS ESQUEMAS CONCORRENTES

3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Este capítulo se dedica a descrição dos gráficos de controle propostos para o monitoramento de processos bivariados. São eles: gráfico de controle bivariado com amostragem dupla (*Bivariate Control Chart with Double Sampling* ou gráfico *BIDU*), gráfico de controle bivariado com amostragem em dois estágios (*Bivariate Control Chart with Two Stage Sampling* ou gráfico *BITWO*), que é um caso particular do gráfico *BIDU*, e os gráficos *BIDU* e *BITWO* com regra especial de decisão (*Bivariate Synthetic Control Charts* ou, respectivamente, gráficos *SyBIDU* e *SyBITWO*).

Além disso, serão descritos alguns gráficos multivariados existentes na literatura, para o caso particular de duas variáveis, com os quais os gráficos bivariados propostos concorrem. São eles: o gráfico de controle multivariado tradicional (gráfico T^2) introduzido por Hotelling (1947); o gráfico de controle multivariado com tamanho de amostra variável (*Multivariate Control Chart with Variable Sample Size* ou *MVSS chart*) objeto de estudo de Aparisi (1996); o gráfico de controle multivariado com intervalo de tempo entre retirada de amostras variável (*Multivariate Control Chart with Variable Sampling Interval* ou *MVSI chart*) estudado por Aparisi e Haro (2001) e o gráfico multivariado com ambos tamanho de amostra e intervalo de tempo entre retirada de amostras variáveis (*MVSSVSI chart*) estudado por Aparisi e Haro (2003).

3.2 GRÁFICO DE CONTROLE *BIDU*

O gráfico de controle *BIDU* é empregado no monitoramento de duas características de qualidade ($x; y$), descritas por uma distribuição normal bivariada com vetor de médias $\mu' = (\mu_x; \mu_y)$ e uma matriz de covariâncias conhecida

$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$, em que $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \rho\sigma_x\sigma_y$ é a covariância entre x e y . No início do

monitoramento o vetor de médias está centrado nos valores-alvo, $\mu'_0 = (\mu_{0x}; \mu_{0y})$, mas após um certo tempo aleatório uma causa especial altera o vetor de médias de μ_0 para μ_1 , em que $(\mu_1 - \mu_0)' = (\delta_x \sigma_x; \delta_y \sigma_y)$, com $\delta_x \neq 0$ e/ou $\delta_y \neq 0$ sem alterar a matriz de covariâncias. Durante o período em controle $\mu = \mu_0$ e durante o período fora de controle $\mu = \mu_1$. O objetivo do monitoramento é detectar qualquer causa especial que tire μ' do seu valor alvo μ'_0 .

Similarmente ao gráfico de controle de Shewhart, amostras com tamanho $n_1 + n_2$ são retiradas do processo em intervalos de tempos regulares. A amostragem é realizada em dois estágios. No primeiro estágio n_1 unidades são inspecionadas, duas características de qualidade $(x; y)$ são medidas e a distância estatística entre $\bar{X}_1 = (\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ e $\mu'_0 = (\mu_{0x}; \mu_{0y})$, dada por $T_1^2 = n_1(\bar{X}_1 - \mu_0)' \Sigma^{-1}(\bar{X}_1 - \mu_0)$ é calculada, sendo \bar{x}_1 e \bar{y}_1 as médias amostrais das duas características de qualidade $(x; y)$ da sub-amostra de tamanho n_1 .

Se T_1^2 for menor do que o limite de advertência, LA , a amostragem é interrompida. Se T_1^2 for maior do que o limite de controle do primeiro estágio, LC_1 , o gráfico de controle sinaliza um desajuste do processo. Se $LC_1 < T_1^2 < LA$, a amostragem vai para o segundo estágio, onde as n_2 unidades restantes são inspecionadas e a distância estatística entre $\bar{X}_2 = (\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ e $\mu_0 = (\mu_{0x}; \mu_{0y})$, dada por $T_2^2 = n(\bar{X}_2 - \mu_0)' \Sigma^{-1}(\bar{X}_2 - \mu_0)$, é calculada, sendo \bar{x}_2 e \bar{y}_2 as médias amostrais de $(x; y)$ levando em consideração a amostra de tamanho n , sendo $n = n_1 + n_2$. O gráfico também sinaliza um desajuste do processo quando $T_2^2 > LC_2$, sendo LC_2 o limite de controle do segundo estágio.

A região dada por (LA, LC_1) será chamada de região de advertência. A região acima de LC_1 será chamada de região de ação do primeiro estágio e a região acima de LC_2 será chamada de região de ação do segundo estágio.

Se um ponto cai na região de ação antes da média do processo se desajustar, isto é, quando $\mu = \mu_0$, tem-se um alarme falso. Em outras palavras, o gráfico de controle

sinaliza erroneamente a ocorrência de uma causa especial. No primeiro estágio a probabilidade de se ter um alarme falso é dada por α_1 e, no segundo estágio, por α_2 .

Se um ponto cai na região de ação após a ocorrência da causa especial, isto é, quando $\mu \neq \mu_0$, tem-se um alarme verdadeiro. No primeiro estágio a probabilidade de se ter um alarme verdadeiro é dada por p_1 e, no segundo estágio, por p_2 .

Deste modo, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ é a probabilidade de se ter um alarme falso quando a amostragem dupla está em uso e $p = p_1 + p_2$ é o poder de detecção do gráfico de controle *BIDU*.

Durante o período em controle, o número médio de itens inspecionado por amostragem, \bar{n} , é dado por

$$\bar{n} = n_1 + n_2(1 - p_0)$$

onde p_0 é a probabilidade de que a amostragem seja interrompida no primeiro estágio.

A eficiência de um gráfico de controle em detectar uma alteração no processo pode ser medida pelo número médio de amostras até o sinal (*NMA*), ver Costa; Epprecht e Carpinetti (2005). Durante o período em controle o $NMA=1/\alpha$ é denominado NMA_0 , e durante o período fora de controle $NMA=1/p$. Quando um processo está sob controle é desejável que o número médio de amostras retiradas do processo desde o início do monitoramento até o sinal (NMA_0) seja grande, de modo a garantir poucos alarmes falsos. Quando um processo está fora de controle é desejável que o número médio de amostras retiradas desde a ocorrência de uma causa especial até o sinal (*NMA*) seja pequeno, de modo a garantir uma rápida detecção de alterações no processo.

A distância estatística T^2 tem uma distribuição de Qui-Quadrado, $T_i^2 \sim \chi_k^2$, portanto:

$$LA = \chi_{k, 1-p_0+\alpha_1}^2 \quad (3.1)$$

$$LC_1 = \chi_{k, \alpha_1}^2 \quad (3.2)$$

onde $Pr(\chi_k^2 > \chi_{k,x}^2) = x$.

A Figura 6 mostra um gráfico de controle *BIDU* com os valores de T_{i1}^2 e T_{i2}^2 plotados. O gráfico de controle dá um sinal quando $T_{i1}^2 > LC_1$ ou quando $T_{i2}^2 > LC_2$. Os

pontos amostrais T_{i1}^2 , ao cárem na região de advertência, disparam a inspeção de toda a amostra, e, nestes casos, a estatística T_{i2}^2 é calculada e comparada com LC_2 . Para evitar o uso de dois gráficos, um para o primeiro estágio e outro para o segundo estágio, o usuário pode construir o gráfico *BIDU* com duas escalas, uma do lado esquerdo e uma do lado direito, como ilustrado na Figura 6. Os valores T_{i1}^2 correspondem aos pontos pretos que são plotados considerando a escala da esquerda, e os valores T_{i2}^2 correspondem aos pontos brancos que são plotados considerando a escala da direita.

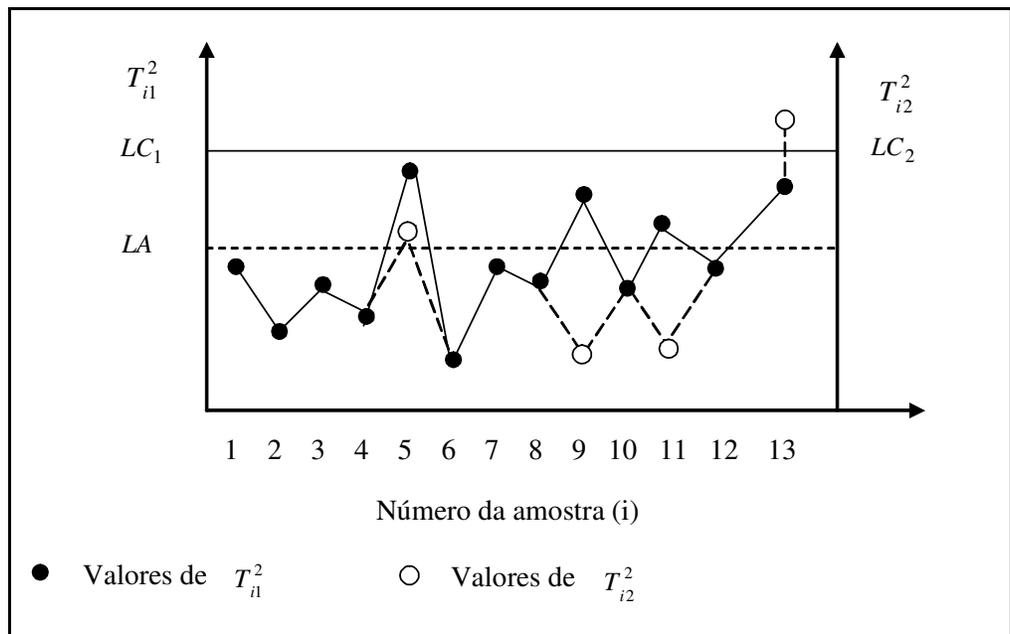


Figura 6 - Gráfico de controle *BIDU* com os valores de T_{i1}^2 e T_{i2}^2

3.3 GRÁFICO DE CONTROLE *BITWO*

O gráfico de controle com amostragem em dois estágios (gráfico *BITWO*) é um caso particular do gráfico *BIDU* onde $n_1=1$ e $LC_1 = \infty$, ou seja, $\alpha_1=0$. O gráfico de controle com amostragem em dois estágios foi objeto de estudo de Costa e Rahim (2004, 2006).

A Figura 7 mostra o gráfico de controle *BITWO* com os valores T_{i1}^2 e T_{i2}^2 plotados. O gráfico de controle dá um sinal quando $T_{i2}^2 > LC_2$. Os pontos amostrais

T_{i1}^2 , ao caírem na região de advertência, que para o caso da amostragem em dois estágios corresponde a região acima de LA , disparam a inspeção de toda a amostra, e, nestes casos, a estatística T_{i2}^2 é calculada e comparada com LC_2 .

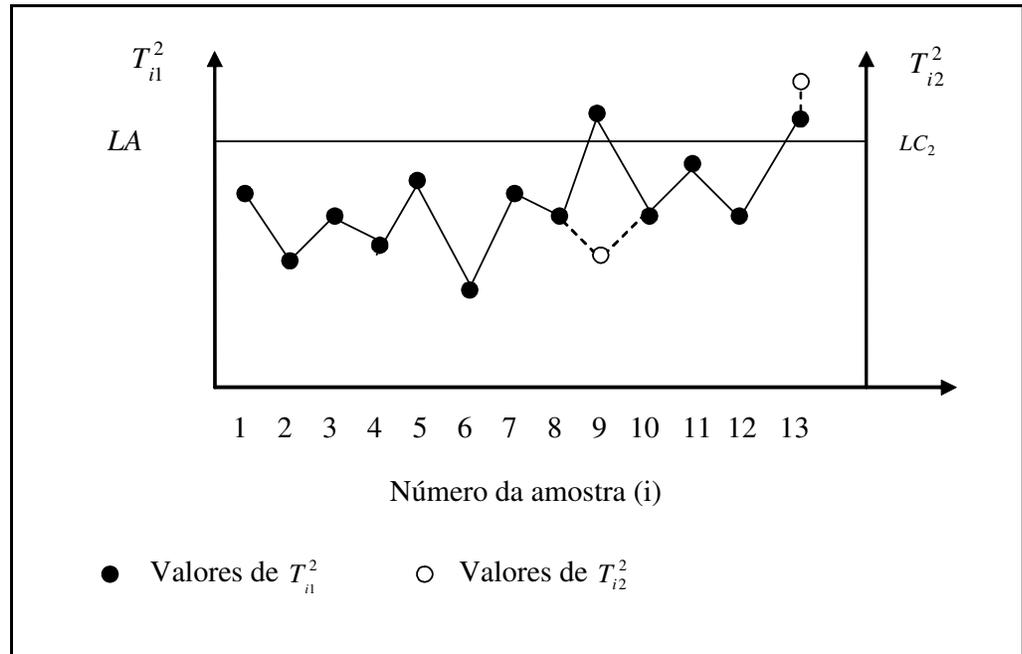


Figura 7 - Gráfico de controle *BITWO* com os valores de T_{i1}^2 e T_{i2}^2

Para o cálculo de LA utiliza-se a equação (3.1) fazendo $\alpha_1 = 0$.

Pela simples observação das Figuras 6 e 7, percebe-se que é mais fácil trabalhar com o gráfico de controle *BITWO*.

3.4 GRÁFICO DE CONTROLE *SyBIDU*

Quando o gráfico de controle com regra especial de decisão está em uso, a decisão sobre o estado do processo é baseada no NA , número de amostras conformes entre ocorrências de amostras não-conformes. Uma amostra será não-conforme quando seu valor amostral gerar um ponto fora dos limites de controle. No início do monitoramento, o primeiro NA corresponde ao número de amostras retiradas do processo antes da ocorrência da primeira amostra não-conforme. Se o NA for menor ou igual a L , onde L é um número inteiro positivo especificado, o processo é considerado fora de controle e um sinal é gerado.

De acordo com Wu e Spedding (2000) tem-se:

$$NMA = \frac{1}{Q} \times \frac{1}{1 - (1 - Q)^L}. \quad (3.3)$$

Durante o período em controle $Q = \alpha$ e o NMA é denominado NMA_0 , e durante o período fora de controle $Q = p$.

Quando o intervalo de amostragem é fixo, o NMA mede o tempo necessário para se detectar uma causa especial que esteja presente desde o início do monitoramento ou desde a ocorrência da causa especial. No primeiro caso o NMA é obtido com o processo em regime transiente (NMA zero-state ou NMA_{ZS}), enquanto que no segundo caso o NMA é obtido após o processo alcançar o regime permanente (NMA steady-state ou NMA_{SS}). Entretanto, é mais provável que a causa especial ocorra após um longo e indeterminado período em operação, deslocando a média do seu valor alvo. Assim, a causa especial ocorre entre duas amostras não-conformes.

O NMA_{SS} mede o tempo que o gráfico de controle com regra especial de decisão leva para sinalizar uma alteração no processo. O NMA_{SS} para o gráfico *SyBIDU* foi obtido utilizando-se o procedimento descrito por Davis e Woodall (2002). Mais detalhes sobre as diferenças entre o NMA_{ZS} ou NMA_{SS} podem ser encontrados no Apêndice C.

A Figura 8 mostra um gráfico de controle *SyBIDU* com os valores de T_{i1}^2 e T_{i2}^2 plotados. Uma amostra é classificada como não conforme sempre que $T_{i1}^2 > LC_1$ ou $T_{i2}^2 > LC_2$ e o gráfico *SyBIDU* dá um sinal quando $NA \leq L$.

Semelhante ao gráfico *BIDU*, os pontos amostrais T_{i1}^2 , ao caírem na região delimitada por LA e LC_1 , disparam a inspeção de toda a amostra, e, nestes casos, a estatística T_{i2}^2 é calculada e comparada com LC_2 . O sinal é baseado no NA . De acordo com a Figura 8, o primeiro ponto amostral na região de ação é o da nona amostra, portanto trata-se de amostra não-conforme. A próxima amostra não-conforme é a 13ª. O NA neste caso é igual a quatro, ou seja, há quatro amostras conformes entre a nona e a 13ª amostras ($13 - 9 = 4$). Como o NA é menor do que $L (= \text{cinco})$, o gráfico *SyBIDU* sinaliza uma alteração no processo.

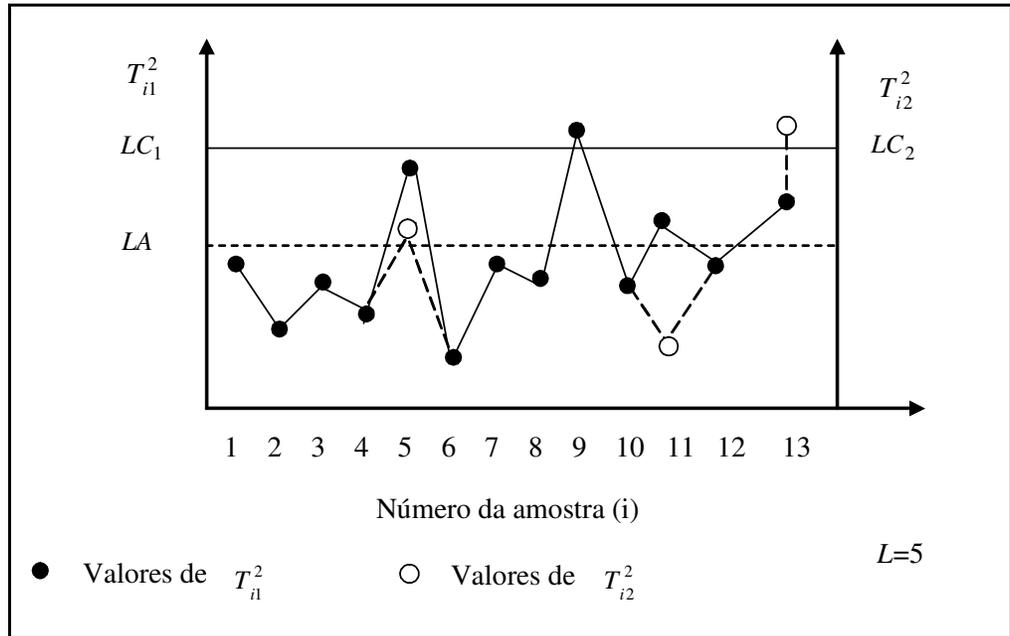


Figura 8- Gráfico de controle *SyBIDU* com os valores de T_{i1}^2 e T_{i2}^2

Observa-se na Figura 8 que a primeira amostra foi classificada como não-conforme após a inspeção dos seus primeiros n_1 itens (gerando um ponto preto acima do LC_1), enquanto que a segunda amostra foi classificada como não-conforme somente após a inspeção de todos os seus n itens (gerando um ponto branco acima do LC_2). Alternativamente a primeira amostra não-conforme poderia corresponder a um ponto branco (acima do LC_2) e/ou a segunda amostra não-conforme poderia corresponder a um ponto preto (acima do LC_1).

3.5 GRÁFICO DE CONTROLE *SyBITWO*

O gráfico de controle *SyBITWO* é um caso particular do gráfico *SyBIDU*, onde $n_1=1$ e $LC_1 = \infty$. Portanto, quando o gráfico de controle *SyBITWO* está em uso, para que uma amostra seja classificada como não-conforme é necessário que a amostragem vá para o segundo estágio, isto é, que a estatística $T_{i1}^2 > LA$, e que a estatística $T_{i2}^2 > LC_2$.

No gráfico da Figura 9 a amostra não-conforme é aquela que gera dois pontos, um preto e um branco, acima da linha de advertência LA , que coincide com a linha de controle LC_2 . As amostras 9 e 13 são não-conformes. O NA neste caso é igual a quatro

(13ª amostra - 9ª amostra = 4). Como o NA é menor do que L (=cinco), o gráfico *SyBITWO* sinaliza uma alteração no processo.

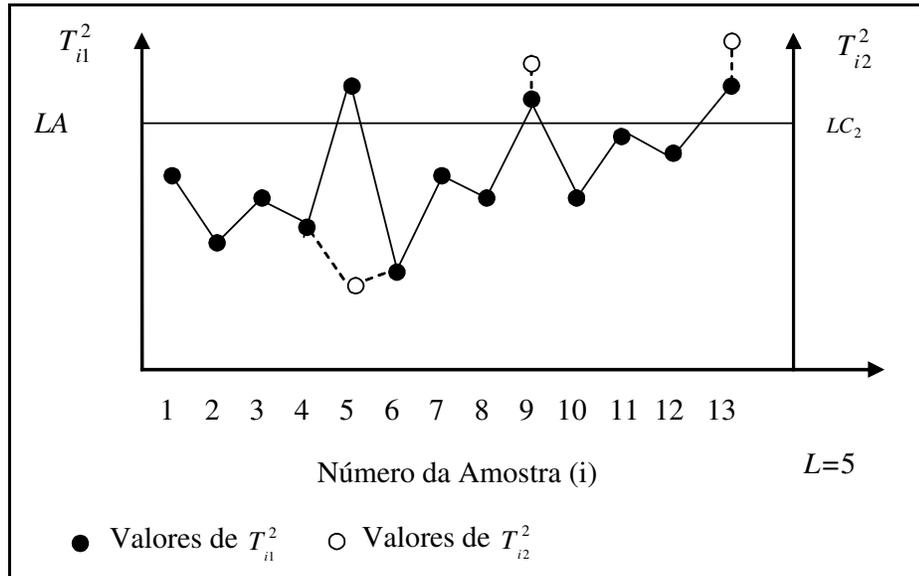


Figura 9- Gráfico de controle *SyBITWO* com os valores de T^2_{i1} e T^2_{i2}

3.6 GRÁFICO DE CONTROLE T^2 DE HOTELLING

O gráfico de controle baseado na estatística T^2 para o monitoramento de processos multivariados foi criado por Hotelling (1947). O gráfico T^2 de Hotelling é análogo ao gráfico \bar{X} de Shewhart, sendo ambos pouco sensíveis a deslocamentos pequenos a moderados dos parâmetros do processo.

A Figura 10 apresenta o gráfico T^2 de Hotelling que sinaliza quando $T_i^2 > LC$.

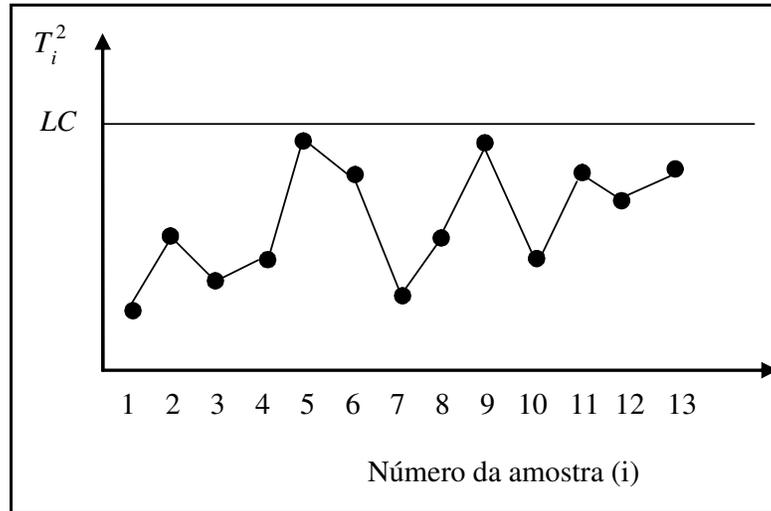


Figura 10 - Gráfico de controle T^2 de Hotelling

Como T^2 tem uma distribuição de Qui-Quadrado, $T_i^2 \sim \chi_k^2$, segue que:

$$LC = \chi_{k,\alpha}^2$$

onde α é a probabilidade de alarme falso e k é o número de variáveis sendo monitoradas. Os estudos que seguem, tanto para o gráfico T^2 tradicional quanto para os gráficos adaptativos, se restringem ao caso bivariado, isto é, $k=2$.

Durante o período em controle o $NMA=1/\alpha$ e é denominado NMA_0 . Durante o período fora de controle, a causa especial gera alterações nos parâmetros do processo de magnitude d , onde $d = \sqrt{(\mu - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\mu - \mu_0)}$ e μ é o vetor de médias das duas características de qualidade após a ocorrência da causa especial. Após a ocorrência da causa especial a estatística $T_i^2 \sim \chi_k^2(\lambda)$, isto é, T_i^2 tem distribuição de Qui-quadrado não-central com parâmetro de não-centralidade $\lambda = nd^2$, sendo n o tamanho da amostra (APARISI, 1996).

O NMA é dado por:

$$NMA = \frac{1}{1 - \beta} \quad (3.4)$$

onde $\beta = Pr(\chi_k^2(\lambda) < LC)$.

3.7 GRÁFICO DE CONTROLE *MVSS*

O gráfico de Shewhart univariado com tamanho de amostra variável foi estudado por Prabhu; Runger e Keats (1993) e Costa (1994). Aparisi (1996) estendeu estes estudos para o gráfico de controle multivariado baseado na estatística T^2 de Hotelling onde dois tamanhos de amostras são utilizados, n_1 e n_2 , sendo $n_2 > n_1$. Neste estudo considerou-se o gráfico de controle T^2 com tamanho de amostras variável para processos bivariados. Define-se um limite de advertência w e um limite de controle LC , onde $0 < w < LC$ (Figura 11).

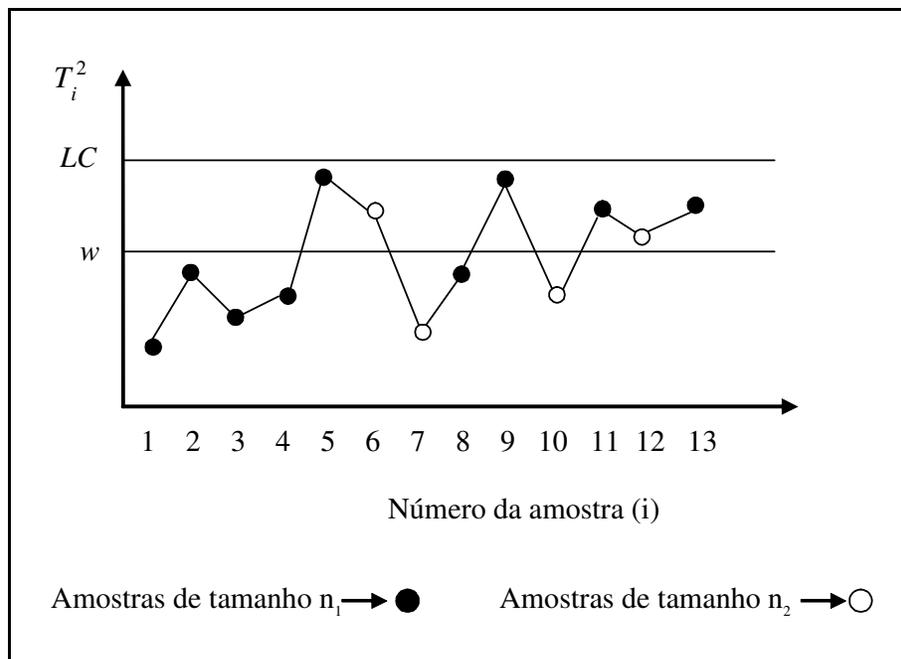


Figura 11 - Gráfico de controle *MVSS*

Quando o gráfico de controle *MVSS* está em uso, n_i , o tamanho da i -ésima amostra dependem do valor de T_{i-1}^2 :

$$n_i = \begin{cases} n_1 & \text{se } T_{i-1}^2 < w \\ n_2 & \text{se } w < T_{i-1}^2 < LC \end{cases}$$

Por meio de um modelo de cadeia de Markov é possível obter medidas de desempenho do gráfico *MVSS*. A cada instante de amostragem um dos três estados da cadeia é alcançado de acordo com a posição de T_{i-1}^2 :

Estado 1: $T_{i-1}^2 \in (0, w)$.

Estado 2: $T_{i-1}^2 \in (w, LC)$.

Estado 3: $T_{i-1}^2 \in (LC, \infty)$, isto é, $T_{i-1}^2 > LC$.

Os estados 1 e 2 são transitórios. O estado 3 é um estado absorvente.

A matriz de probabilidade de transição é dada por:

$$P = \begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quando há uma alteração d no processo, $P_{i,j}$ é a probabilidade de transição do estado i para o estado j , ou seja,

$$P_{1,1} = Pr(T_{i-1}^2 < w \mid T_{i-1}^2 \sim \chi_k^2(\lambda_1))$$

$$P_{1,2} = Pr(w < T_{i-1}^2 < LC \mid T_{i-1}^2 \sim \chi_k^2(\lambda_1))$$

$$P_{1,3} = 1 - (P_{1,1} + P_{1,2})$$

$$P_{2,1} = Pr(T_{i-1}^2 < w \mid T_{i-1}^2 \sim \chi_k^2(\lambda_2))$$

$$P_{2,2} = Pr(w < T_{i-1}^2 < LC \mid T_{i-1}^2 \sim \chi_k^2(\lambda_2))$$

$$P_{2,3} = 1 - (P_{2,1} + P_{2,2})$$

onde $\lambda_1 = n_1 d^2$ e $\lambda_2 = n_2 d^2$.

A velocidade com que o gráfico *MVSS* detecta uma alteração no processo é dada por:

$$NMA = B'(I - Q)^{-1}1 \quad (3.5)$$

onde $B' = (p_1, p_2)$ é o vetor de probabilidade iniciais e $p_1 + p_2 = 1$. Q é a matriz 2x2 de probabilidades de transição onde os elementos associados com o estado absorvente foram eliminados. I é a matriz identidade de ordem 2 e 1 é o vetor unitário, isto é, $1' = (1, 1)$.

Estando em uso o esquema de amostragens com tamanho de amostra variável tem-se que o número médio de itens inspecionados por amostragem é dado por:

$$p_1 n_1 + p_2 n_2 = \bar{n}. \quad (3.6)$$

Para $p_1 = P(\chi_k^2 < w)$ tem-se que (3.5):

$$NMA(k, d, w, n_1, n_2) = \left(P(\chi_k^2 < w), 1 - P(\chi_k^2 < w) \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} P(\chi_k^2(\lambda_1) < w) & P(w < \chi_k^2(\lambda_1) < LC) \\ P(\chi_k^2(\lambda_2) < w) & P(w < \chi_k^2(\lambda_2) < LC) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

onde $\lambda_2 = n_2 d^2$.

O limite de advertência w depende dos valores de n_1 , n_2 e \bar{n} . Da igualdade em (3.6) segue,

$$w = F^{-1} \left[\left(\frac{\bar{n} - n_2}{n_1 - n_2} \right), k \right], \quad (3.8)$$

$$\text{sendo } F(\chi_{k,x}^2, k) = Pr(\chi_k^2 \leq \chi_{k,x}^2) = \frac{1}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} \int_0^{\chi_{k,x}^2} y^{(k/2)-1} e^{-y/2} dy \quad (3.9)$$

a distribuição de Qui-Quadrado central acumulada com k graus de liberdade. Para o caso bivariado, $k=2$.

O limite de controle é $LC = \chi_{k,\alpha}^2$. Aparisi (1996) minimizou os *NMA*s para vários valores de n_1 , n_2 , \bar{n} , k e d .

3.8 GRÁFICO DE CONTROLE *MVSI*

O gráfico de Shewhart univariado com tempo de espera entre retirada de amostras variável foi estudado por Reynolds et al. (1988). Aparisi e Haro (2001) estenderam estes estudos para os gráficos de controle multivariados baseados na estatística T^2 de Hotelling (*MVSI*) onde dois intervalos de tempo entre retirada de amostras, at_0 e bt_0 , são utilizados, sendo $bt_0 < at_0$. Neste estudo consideramos o gráfico de controle T^2 com tempo de espera entre retirada de amostras variável para

processos bivariados. Define-se um limite de advertência w e um limite de controle LC , onde $0 < w < LC$ (Figura 12).

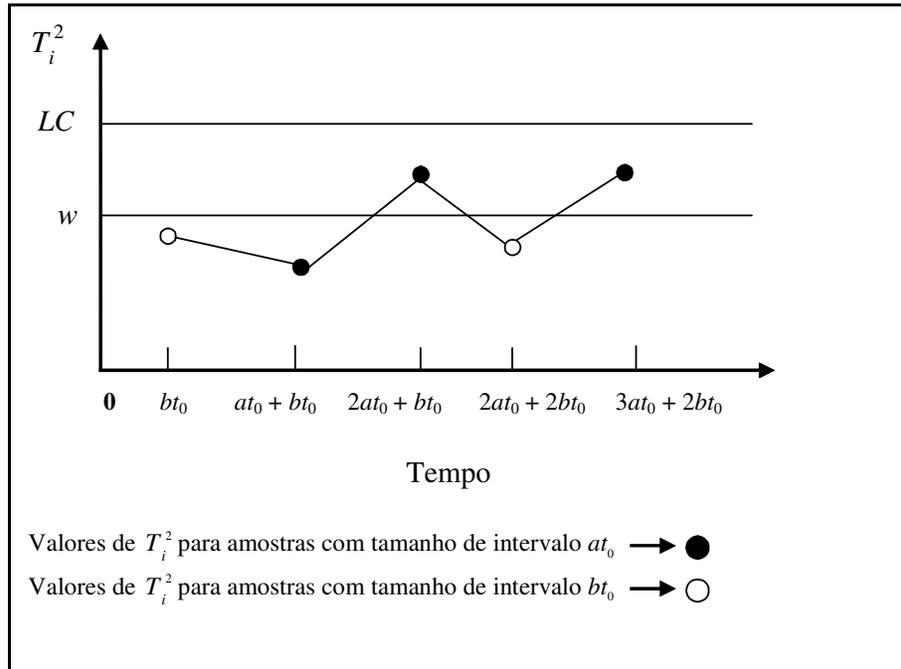


Figura 12 - Gráfico de controle *MVSI*

Quando o gráfico de controle *MVSI* está em uso, h_i , o intervalo de tempo entre a (i-1)-ésima e i-ésima amostragens dependem do valor de T_{i-1}^2 :

$$h_i = \begin{cases} bt_0, & \text{se } w < T_{i-1}^2 < LC \\ at_0, & \text{se } 0 < T_{i-1}^2 \leq w \end{cases}$$

Por meio de um modelo de cadeia de Markov é possível obter medidas de desempenho do gráfico *MVSS*. A cada instante de amostragem um dos três estados da cadeia é alcançado de acordo com a posição de T_{i-1}^2 :

Estado 1: $T_{i-1}^2 \in (0, w)$.

Estado 2: $T_{i-1}^2 \in (w, LC)$.

Estado 3: $T_{i-1}^2 \in (LC, \infty)$, isto é, $T_i^2 > LC$.

Os estados 1 e 2 são transitórios. O estado 3 é um estado absorvente.

A matriz de probabilidade de transição é dada por:

$$P = \begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quando há uma alteração d no processo, $P_{i,j}$ é a probabilidade de transição do estado i para o estado j , ou seja,

$$P_{1,1} = P_{2,1} = Pr(T_{i-1}^2 < w \mid T_{i-1}^2 \sim \chi_k^2(\lambda))$$

$$P_{1,2} = P_{2,2} = Pr(w < T_{i-1}^2 < LC \mid T_{i-1}^2 \sim \chi_k^2(\lambda))$$

$$P_{1,3} = 1 - (P_{1,1} + P_{1,2})$$

$$P_{2,3} = 1 - (P_{2,1} + P_{2,2})$$

onde $\lambda = n d^2$.

A velocidade com que um gráfico de controle detecta mudanças no processo mede a sua eficiência estatística. Quando o intervalo entre amostragens é variável a velocidade é medida pelo *TES* (Tempo esperado até o sinal), isto é, o tempo esperado entre a ocorrência da causa especial e a sua detecção. O *TES* permite comparar a eficiência de diferentes gráficos de controle. Por exemplo, a do gráfico de controle T^2 com parâmetros fixos com a do gráfico T^2 com tamanho de intervalo entre amostragens variável. No entanto, esta comparação só é apropriada se os gráficos a serem comparados produzem a mesma freqüência de alarmes falsos e demandam a mesma freqüência de amostras e de itens a inspecionar. Nas comparações entre o gráfico T^2 tradicional e o gráfico T^2 *MVSI* tais condições são alcançadas quando:

$$at_0p_1 + bt_0p_2 = t_0. \quad (3.10)$$

Os valores de p_1 e p_2 representam a porcentagem do tempo que o processo permanece nos estados 1 e 2 respectivamente, quando isento de causas especiais. Tem-se que $p_1 = P(T_{i-1}^2 < w \mid T_{i-1}^2 < LC; d = 0)$ e $p_1 + p_2 = 1$.

Então a velocidade com que o gráfico de controle *MVSI* detecta uma alteração no processo é dada por:

$$TES = B'(I - Q)^{-1}t' \quad (3.11)$$

onde $B' = (p_1, p_2)$ é o vetor de probabilidade iniciais. I é a matriz identidade de ordem 2. Q é a matriz 2x2 de probabilidades de transição onde os elementos

associados com o estado absorvente foram eliminados e $t' = (at_0, bt_0)$ é o vetor do intervalo de tempo entre retirada de amostras.

A equação (3.11) pode ser reescrita como:

$$TES(k, d, w, b, a) = \left(\frac{P(\chi_k^2 < w)}{P(\chi_k^2 < LC)}, 1 - \frac{P(\chi_k^2 < w)}{P(\chi_k^2 < LC)} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P(\chi_k^2(\lambda) < w) & P(w < \chi_k^2(\lambda) < LC) \\ P(\chi_k^2(\lambda) < w) & P(w < \chi_k^2(\lambda) < LC) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} at_0 \\ bt_0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Para se ter a igualdade em (3.10), o limite de advertência w deve ser dado por:

$$w = F^{-1} \left[\left(\frac{1-b}{a-b} \right) \cdot F(LC, k), k \right], \quad (0 < b < 1 < a) \quad (3.13)$$

sendo F dado pela expressão (3.9).

Dados os valores de w e b tem-se que:

$$a = \frac{(1-b)P(\chi_k^2 < LC) + bP(\chi_k^2 < w)}{P(\chi_k^2 < w)} = \frac{(1-b)F(LC, k) + bF(w, k)}{F(w, k)}. \quad (3.14)$$

O limite de controle é $LC = \chi_{k,\alpha}^2$. Aparisi e Haro (2001) minimizaram os valores de TES para vários valores de at_0, bt_0, \bar{n}, k e d .

3.9 GRÁFICO DE CONTROLE *MVSSVSI*

O gráfico de Shewhart univariado com tamanho de amostra e tempo entre retirada de amostras variáveis foi estudado por Costa (1997, 1999). Aparisi e Haro (2003) estenderam estes estudos para os gráficos de controle multivariados baseados na estatística T^2 de Hotelling (*MVSSSI*) onde dois tamanhos de amostras e dois intervalos de tempo entre retirada de amostras são utilizados, respectivamente, n_1 e n_2 , sendo $n_2 > n_1$ e h_1 e h_2 , sendo $h_2 < h_1$. Neste estudo considerou-se o gráfico de controle T^2 com tamanho de amostra e tempo entre retirada de amostras variáveis para processos bivariados. Define-se um limite de advertência w e um limite de controle LC , onde $0 < w < LC$ (Figura 13).

Apesar de existir a possibilidade de serem usados dois limites de advertência, um para o *MVSS* e outro para o *MVSI*, no estudo realizado por Aparisi e Haro (2003) apenas um limite foi considerado, com o objetivo de manter a simplicidade operacional do gráfico.

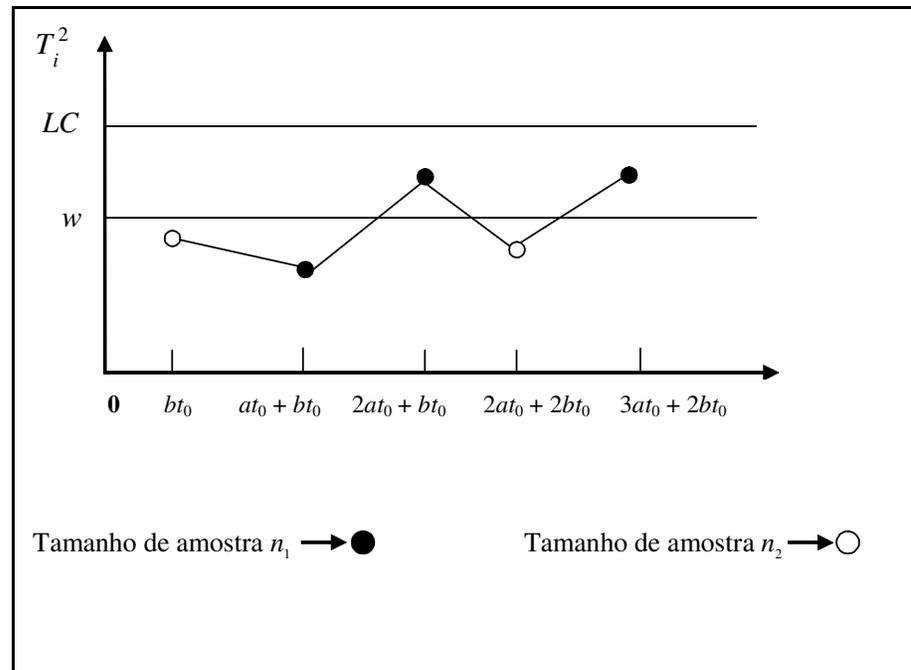


Figura 13 - Gráfico de controle *MVSSVSI*

Quando $w = 0$, $n_1 = n_2$ e $a = b = 1$ o gráfico *MVSSVSI* se reduz ao gráfico de controle T^2 com parâmetros fixos. Quando $a = b = 1$ e $n_1 < \bar{n} < n_2$ reduz-se ao gráfico T^2 *MVSS* (APARISI, 1996). Quando $n_1 = n_2 = \bar{n}$ e $a < b < 1$ e $a > 1$ reduz-se ao gráfico T^2 *MVSI* (APARISI; HARO, 2001).

Quando o gráfico de controle *MVSSVSI* está em uso, n_i , o tamanho da i -ésima amostra e h_i , o intervalo de tempo entre a $(i-1)$ -ésima e i -ésima amostragens dependem do valor de T_{i-1}^2 :

$$(n_i, h_i) = \begin{cases} (n_2, bt_0), & \text{se } w < T_{i-1}^2 < LC \\ (n_1, at_0), & \text{se } 0 < T_{i-1}^2 \leq w \end{cases}$$

Por meio de um modelo de cadeia de Markov é possível obter medidas de desempenho do gráfico *MVSSVSI*. A cada instante de amostragem um dos três estados da cadeia é alcançado de acordo com a posição de T_{i-1}^2 :

Estado 1: $T_{i-1}^2 \in (0, w)$.

Estado 2: $T_{i-1}^2 \in (w, LC)$.

Estado 3: $T_{i-1}^2 \in (LC, \infty)$, isto é, $T_i^2 > LC$.

Os estados 1 e 2 são transitórios. O estado 3 é um estado absorvente.

A matriz de probabilidade de transição é dada por:

$$P = \begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quando há uma alteração d no processo, $P_{i,j}$ é a probabilidade de transição do estado i para o estado j , ou seja,

$$P_{1,1} = Pr(T_{i-1}^2 < w \mid T_{i-1}^2 \sim \chi_k^2(\lambda_1))$$

$$P_{1,2} = Pr(w < T_{i-1}^2 < LC \mid T_{i-1}^2 \sim \chi_k^2(\lambda_1))$$

$$P_{1,3} = 1 - (P_{1,1} + P_{1,2})$$

$$P_{2,1} = Pr(T_{i-1}^2 < w \mid T_{i-1}^2 \sim \chi_k^2(\lambda_2))$$

$$P_{2,2} = Pr(w < T_{i-1}^2 < LC \mid T_{i-1}^2 \sim \chi_k^2(\lambda_2))$$

$$P_{2,3} = 1 - (P_{2,1} + P_{2,2})$$

onde $\lambda_1 = n_1 d^2$ e $\lambda_2 = n_2 d^2$.

A velocidade com que o gráfico de controle *MVSSVSI* detecta mudanças no processo é medida pelo *TES*. O *TES* permite comparar a eficiência do gráfico de controle T^2 com parâmetros fixos com a do gráfico T^2 com tamanho de amostras e intervalo entre amostragens variáveis. No entanto, esta comparação só é apropriada se os gráficos a serem comparados produzem a mesma frequência de alarmes falsos e demandam a mesma frequência de amostras e de itens a inspecionar. Nas comparações entre o gráfico T^2 tradicional e o gráfico T^2 *MVSSVSI* tais condições são alcançadas quando:

$$n_1 p_1 + n_2 p_2 = n_0$$

$$at_0 p_1 + bt_0 p_2 = t_0$$

Os valores de p_1 e p_2 representam a porcentagem do tempo que o processo permanece nos estados 1 e 2 respectivamente, quando isento de causas especiais.

Observa-se que:

$$p_1 = P(T_{i-1}^2 < w \mid T_{i-1}^2 < LC; d = 0) = \frac{P(T_{i-1}^2 < w)}{P(T_{i-1}^2 < LC)} = \frac{P(\chi_p^2 < w)}{P(\chi_p^2 < LC)}$$

$$\text{e } p_1 + p_2 = 1.$$

Então a velocidade com que o gráfico de controle *MVSSVSI* detecta uma alteração no processo é dada por:

$$TES = B'(I - Q)^{-1}t' \quad (3.15)$$

onde $B' = (p_1, p_2)$ é o vetor de probabilidade iniciais, I é a matriz identidade de ordem 2. Q é a matriz 2x2 de probabilidades de transição onde os elementos associados com o estado absorvente foram eliminados e $t' = (at_0, bt_0)$ é o vetor do intervalo de tempo entre retirada de amostras.

A condição $n_1 p_1 + n_2 p_2 = n_0$ determina o limite de advertência w :

$$\begin{aligned} & n_1 \cdot P(T_{i-1}^2 < w \mid T_{i-1}^2 < LC) + n_2 \cdot P(w < T_{i-1}^2 < LC \mid T_{i-1}^2 < LC) \\ &= n_1 \frac{P(T_{i-1}^2 < w)}{P(T_{i-1}^2 < LC)} + n_2 \frac{P(w < T_{i-1}^2 < LC)}{P(T_{i-1}^2 < LC)} = n_0, \text{ sendo } n_1 < n_0 < n_2. \end{aligned}$$

Como $T_{i-1}^2 \sim \chi_k^2$,

$$n_1 \frac{P(T_{i-1}^2 < w)}{P(T_{i-1}^2 < LC)} + n_2 \frac{P(w < T_{i-1}^2 < LC)}{P(T_{i-1}^2 < LC)} = n_0.$$

Portanto:

$$w = F^{-1} \left[\left(\frac{n_2 - n_0}{n_2 - n_1} \right) \cdot F(LC, k), k \right], \quad (3.16)$$

sendo F dado pela expressão (3.9).

O limite de advertência w também pode ser determinado pela segunda condição $at_0 p_1 + bt_0 p_2 = t_0$, onde w é dado por:

$$w = F^{-1}\left[\left(\frac{1-b}{a-b}\right) \cdot F(LC, k), k\right], (0 < b < 1 < a) \quad (3.17)$$

Da igualdade entre as expressões (3.17) e (3.18) obtém-se a expressão para o cálculo de a , que depende de n_0, n_1, n_2 e b :

$$a = \frac{n_2 - n_1 - b(n_0 - n_1)}{n_2 - n_0}.$$

O limite de controle é $LC = \chi_{k,\alpha}^2$.

Aparisi e Haro (2003) minimizaram os valores de TES para vários valores de $at_0, bt_0, \bar{n}, n_1, n_2, k$ e d .

3.10 OBTENÇÃO DO NMA PARA OS ESQUEMAS CONCORRENTES

Para a obtenção das medidas de desempenho dos gráficos $MVSS$ e $MVSI$ fez-se uso de simulações. Estas simulações foram realizadas pela candidata a bolsa de Iniciação Científica PIBIC Bia Keiko Haneda, do curso de graduação em Engenharia de Produção Mecânica da Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá (FEG-UNESP), e detalhes sobre os resultados podem ser encontrados em Haneda; Machado e Costa (2006). Neste estudo observa-se que as diferenças obtidas entre os resultados existentes em Aparisi (1996) e Aparisi e Haro (2001) e os resultados obtidos pelas simulações não excederam 1%. Com o auxílio das simulações o leque de resultados pôde ser ampliado. Para comparar o gráfico $BIDU$ com o gráfico $MVSSVSI$ utilizou-se os valores existentes em Aparisi e Haro (2003).

No próximo capítulo está o desenvolvimento matemático necessário à obtenção das propriedades dos gráficos de controle bivariados com amostragens duplas e regra especial de decisão.

4 DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO

4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Este capítulo se dedica ao desenvolvimento matemático necessário à obtenção das propriedades dos gráficos de controle bivariados com amostragens duplas e regra especial de decisão. Para obtenção de tais propriedades fez-se uso de uma estratégia que consistiu na rotação de eixos cartesianos de forma a transformar as variáveis originais, consideradas correlacionadas, em variáveis independentes. Fundamentado em Teoremas e Corolários da Estatística foi possível obter expressões fechadas para o *NMA*.

Grigoryan (2003) estudou os gráficos multivariados com amostragens múltiplas obtendo o *NMA* por meio de simulação. Alternativamente, este trabalho trata da obtenção de expressões matemáticas para o *NMA*. Como Grigoryan (2003) já havia antecipado não é simples obter tais expressões. Contudo, com base em estudos teóricos, foi possível obtê-las para o caso bivariado.

4.2 PROPRIEDADES DOS GRÁFICOS BIVARIADOS COM AMOSTRAGEM DUPLA

As propriedades dos gráficos de controle bivariados baseadas na estatística T^2 são facilmente obtidas, pois T^2 tem distribuição de Qui-Quadrado,

$$T^2(n, \mu) = \frac{n}{|\Sigma|} \left[\sigma_y^2 (\bar{x} - \mu_x)^2 + \sigma_x^2 (\bar{y} - \mu_y)^2 - 2\sigma_{xy} (\bar{y} - \mu_y)(\bar{x} - \mu_x) \right].$$

Para o caso proposto em que se adota a amostragem dupla foi preciso definir T^2 como

$$T^2 = g_1^2(n, \mu) + g_2^2(n, \mu) \quad (4.1)$$

onde $g_1(n, \mu) = h_1(\bar{x}) \cos \varphi - h_2(\bar{y}) \sin \varphi,$ (4.2)

$$g_2(n, \mu) = -h_1(\bar{x}) \sin \varphi + h_2(\bar{y}) \cos \varphi, \quad (4.3)$$

sendo $\sin 2\varphi = \sigma_{xy} / (\sigma_x \sigma_y),$ $h_1(\bar{x}) = \sqrt{n} \sigma_y (\bar{x} - \mu_x) / \sqrt{|\Sigma|},$ $h_2(\bar{y}) = \sqrt{n} \sigma_x (\bar{y} - \mu_y) / \sqrt{|\Sigma|},$

e $|\Sigma| = \det \Sigma = \sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2 > 0.$

De acordo com o Teorema A1, ver o Apêndice A, o vetor aleatório bi-dimensional $g(n, \mu) = (g_1, g_2)$ tem distribuição normal com média zero e matriz de covariância unitária $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A vantagem de se trabalhar com as variáveis g_1 e g_2 é que elas não são correlacionadas, isto é, $\sigma_{g_1 g_2} = 0$. Portanto,

$$\Pr[T^2 < a^2] = \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f_{N(0, \mathcal{E})}(x, y) dy dx = \int_0^a r \exp(-r^2) dr = 1 - \exp(-a^2 / 2) \quad (4.4)$$

em que $f_{N(0, \mathcal{E})}$ é a função densidade da distribuição normal bivariada com média zero e matriz de covariância unitária,

$$f_{N(0, \mathcal{E})}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp[-(x^2 + y^2) / 2]. \quad (4.5)$$

Para a obtenção da expressão (4.4) fez-se uso da definição de coordenadas polares: se um ponto P tem coordenadas retangulares (x, y) então as coordenadas polares de P são (r, θ) em que

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (4.6)$$

$$\theta = \arctan(y / x), \quad (4.7)$$

portanto, para qualquer disco $D(0, a)$ de raio a e centrado na origem, $(x, y) \in D(0, a)$ se e somente se $r^2 < a^2$.

Para um processo em controle, $p_0 = 1 - \Pr[LA < T_1^2 < LC_1]$ é a probabilidade de que a amostragem dupla seja interrompida no primeiro estágio:

$$p_0 = 1 - [\exp(-LA / 2) - \exp(-LC_1 / 2)]. \quad (4.8)$$

Durante o período em controle, o número médio de itens inspecionado por amostragem, \bar{n} , é dado por

$$\bar{n} = n_1 + n_2(1 - p_0) = n_1 + n_2[\exp(-LA / 2) - \exp(-LC_1 / 2)] \quad (4.9)$$

Quando uma amostra de tamanho n é dividida em duas sub-amostras de tamanho n_1 e n_2 , sendo $n_1 + n_2 = n$, a estatística $g(n, \mu)$ tem a seguinte propriedade:

$$g(n, \mu) = \frac{\sqrt{n_1} g(n_1, \mu) + \sqrt{n_2} g(n_2, \mu)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \quad (4.10)$$

Para o esquema de amostragem dupla os riscos com alarmes falsos estão presentes tanto no primeiro quanto no segundo estágios da amostragem.

No primeiro estágio tem-se que α_1 , a probabilidade de se ter um alarme falso, é dada por $Pr[T^2(n_1, \mu_0) > LC_1 / \mu = \mu_0]$, ou seja, $g(n_1, \mu_0) \notin D(0, \sqrt{LC_1})$:

$$\alpha_1 = \iint_{\notin D(0, \sqrt{LC_1})} f_{N(0, \mathcal{E})}(x, y) dx dy . \quad (4.11)$$

Sem perda de generalidade está se supondo que $\mu'_0 = (0, 0)$.

A probabilidade α_2 , de se ter um alarme falso no segundo estágio, requer que a amostragem não tenha se encerrado no primeiro estágio, portanto $\alpha_2 = Pr[(LA < T^2(n_1, \mu_0) \leq LC_1) \cap (T^2(n_2, \mu_0) > LC_2)]$, ou seja, $g(n_1, \mu_0)$ pertence ao anel de raios \sqrt{LA} e $\sqrt{LC_1}$ e $g(n_2, \mu_0) \notin D(C, R)$:

$$\alpha_2 = \iint_{\in D(\sqrt{LA}, \sqrt{LC_1})} f_{N(0, \mathcal{E})}(x, y) \left[\iint_{\notin D(C, R)} f_{N(0, \mathcal{E})} dudv \right] dx dy \quad (4.12)$$

em que $C(-x\sqrt{n_1/n_2}; -y\sqrt{n_1/n_2})$ e $R = \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_2} LC_2}$.

O poder do gráfico de controle *BIDU* pode ser obtido com auxílio do teorema das coordenadas polares e com base nas expressões (4.4) e (4.5). Após a ocorrência da causa especial o vetor de médias se desloca do seu valor alvo μ'_0 para μ'_1 e o centro do disco D se desloca de $(0;0)$ para $a' = (\sqrt{n_1}\delta'_x; \sqrt{n_1}\delta'_y)$, onde:

$$\sqrt{n} \delta'_x = g_1(n, \mu_1) - g_1(n, \mu_0) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{|\Sigma|}} [-\sigma_y \delta_x \cos \varphi + \sigma_x \delta_y \sin \varphi], \quad (4.13)$$

$$\sqrt{n} \delta'_y = g_2(n, \mu_1) - g_2(n, \mu_0) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{|\Sigma|}} [-\sigma_x \delta_y \cos \varphi + \sigma_y \delta_x \sin \varphi]. \quad (4.14)$$

sendo $\delta_x = \frac{(\mu_{1x} - \mu_{0x})}{\sigma_x}$ e $\delta_y = \frac{(\mu_{1y} - \mu_{0y})}{\sigma_y}$.

A magnitude da perturbação no processo resultante do surgimento da causa especial é expressa por λ , onde $\lambda = \frac{\lambda'}{\sqrt{n}} = \sqrt{(\delta_x'^2 + \delta_y'^2)}$. Para comparar o desempenho dos diferentes gráficos de controle será adotada a condição $\delta_x'^2 = \delta_y'^2$. O poder do gráfico de controle no primeiro estágio é dado por

$$p_1 = \iint_{\mathcal{E}_{D(a', \sqrt{LC_1})}} f_{N(0, \mathcal{E})}(x, y) dx dy. \quad (4.15)$$

E, no segundo estágio, a ocorrência da causa especial desloca o centro do disco D de C para $C'(-x\sqrt{n_1/n_2} + \delta'_x\sqrt{n_2}; -y\sqrt{n_1/n_2} + \delta'_y\sqrt{n_2})$. Conseqüentemente, o poder do gráfico é dado por

$$p_2 = \iint_{\mathcal{E}(\sqrt{LA}, \sqrt{LC_1})} f_{N(0, \mathcal{E})}(x, y) \left[\iint_{\mathcal{E}_{D(C', R)}} f_{N(0, \mathcal{E})} dudv \right] dx dy. \quad (4.16)$$

Deste modo, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ é a probabilidade de se ter um alarme falso quando a amostragem dupla está em uso e $p = p_1 + p_2$ é o poder de detecção. Os desenvolvimentos matemáticos para a obtenção das expressões (4.11), (4.12), (4.15) e (4.16) se encontram no Apêndice B.

4.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As propriedades do gráfico de controle bivariado com amostragem dupla foram obtidas com o auxílio da biblioteca IMSL *FORTRAN* (1995), onde a sub-rotina DT2ODQ está disponível para o cálculo de integrais duplas. Simulações foram realizadas para verificar os resultados. As diferenças no valor do *NMA* obtido por meio das expressões (4.11), (4.12), (4.15) e (4.16) e pelas simulações não excederam 1%.

Os valores de *NMA* estão nas Tabelas do Capítulo 5. Na comparação entre diferentes esquemas de monitoramento considerou-se que as variáveis (x, y) eram não correlacionadas, ou seja, o ângulo φ das expressões (4.13) e (4.14) é igual a zero. O efeito da correlação ($\varphi \neq 0$) no desempenho do gráfico *BIDU* pode ser visto nas Tabelas 41 e 42 do Capítulo 5. Observa-se dessas tabelas que $\delta'_x \neq \delta'_y$.

O gráfico de controle com amostragem em dois estágios (*Two Stage Sampling*), é um caso particular do gráfico *BIDU*, portanto, suas propriedades também podem ser obtidas pelas expressões (4.11), (4.12), (4.15) e (4.16), bastando fazer $n_1=1$ e $LC_1 = \infty$, ou seja, $\alpha_1=0$. O gráfico de controle com amostragem em dois estágios para o monitoramento de processos univariados foi objeto de estudo de Costa e Rahim (2004, 2006).

5 ANÁLISE DE DESEMPENHO DO GRÁFICO PROPOSTO E DOS ESQUEMAS CONCORRENTES

5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo compara-se o desempenho do gráfico *BIDU*, do gráfico *BITWO*, que é um caso particular do gráfico *BIDU*, e dos gráficos *BIDU* e *SyBITWO* com regra especial de decisão com o desempenho dos esquemas concorrentes: o gráfico de controle bivariado tradicional (gráfico T^2); o gráfico bivariado *MVSS*; o gráfico bivariado *MVSI* e o gráfico bivariado *MVSSVSI*. A comparação de desempenho dos esquemas é feita pela *NMA* ou pelo *TES*, sob iguais condições de frequência de inspeção e de alarmes falsos.

Para poder utilizar os resultados obtidos por Aparisi (1996) e Aparisi e Haro (2001, 2003), quando da comparação dos esquemas de monitoramento, adotou-se NMA_0 de 200, ou seja, $\alpha=0,005$. Sem perda de generalidade supõe-se que o vetor de médias iniciais é igual a zero, ou seja, $\mu'_0 = (\mu_{0x}; \mu_{0y}) = (0; 0)$ e os desvios-padrão do processo $\sigma_x = \sigma_y = 1$. Uma alteração no processo é medida por $\lambda = \frac{\lambda'}{\sqrt{n}} = \sqrt{(\delta_x'^2 + \delta_y'^2)}$, com $\delta_x'^2 = \delta_y'^2$. Nas tabelas deste capítulo adota-se para λ os valores 0,25; 0,50; 0,75; 1,00; 1,25 e 1,50.

Os valores de *NMA* para o gráfico de controle bivariado com amostragem dupla para $\alpha_1=0,001$, $\bar{n}=3, 4$ e 5 e diversos valores de n_1 e n_2 estão nas Tabelas 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11 e 12. Nestas tabelas estão também os valores de *NMA* para os gráficos bivariados T^2 e *MVSS*.

Nas Tabelas 14 e 15 estão os valores de *TES* para o gráfico *MVSI* e para o gráfico *BIDU*, considerando o tempo médio entre amostragens $t_0=1$, $\alpha_1=0,001$, $\bar{n}=4$ e 5 , $n_1=2$ e $n_2=8, 10$. Os intervalos de tempo breve e longo, ou seja (bt_0, at_0) , utilizados foram os mesmos adotados por Reynolds et al. (1988): $(0,5;1,5)$, $(0,3;1,7)$, $(0,1;1,9)$, $(0,1;1,1)$, $(0,1;1,3)$, $(0,1;1,5)$, $(0,1;1,4)$.

Nas Tabelas 17, 18 e 19 estão os *NMA*s para o gráfico *BIDU* com $\alpha_1=0,001$ e $\alpha_1=0$, $\bar{n}=4$, $n_1=1, 2$ e 3 e $n_2= 8, 12$ e 16 . Observa-se destas tabelas que o gráfico *BIDU* tem melhor desempenho quando $\alpha_1=0$.

Os *NMA*s para o gráfico *SyBIDU* estão nas Tabelas de 21 até 26. Para o gráfico *SYBIDU* adotou-se $L=1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100 , $\bar{n}=4$, $n_1=1, 2$ e 3 e $n_2= 8$ e 16 . Nas Tabelas de 33 até 38 estão os valores do *TES* para os gráficos *MVSSVSI* e *BIDU*, em que $t_0=1$, $\bar{n}=2, 3$ e 4 . Os valores de n_1, n_2, a e b são os mesmos utilizados por Aparisi e Haro (2003).

Em todos estes casos as variáveis (x, y) são consideradas não correlacionadas. Os *NMA*s para (x, y) correlacionadas estão nas Tabelas 40, 41 e 42. Os valores de ρ e (δ'_x, δ'_y) são os mesmos adotados por Woodall e Ncube (1985), isto é, $\rho=-0,95; -0,75; -0,50; -0,25; 0; 0,25; 0,50; 0,75; 0,95$ e $(\delta'_x, \delta'_y)=(0,25;0), (0,25;0,25), (0,25;-0,25), (0,5;0), (0,5;0,5), (0,5;-0,5), (1;0), (1;1), (1;-1)$.

Para obtenção dos *NMA*s elaborou-se um programa *FORTTRAN*, que se encontra no Apêndice D. Os parâmetros de entrada para o gráfico *BIDU* e *BIDE* quando as variáveis são não correlacionadas são: $n_1, n_2, R_{max}, LA, LC_1, LC_2, m$ e λ . Para obter os valores de *NMA* para o gráfico *SyBIDU* ou *SyBITWO* deve-se entrar também com o valor de L . Quando as variáveis são correlacionadas, deve-se fornecer ao programa o valor de ρ .

5.2 DESEMPENHO DO GRÁFICO *BIDU*

Nas Tabelas 1, 4 e 8 estão os valores dos parâmetros de entrada dos gráficos *BIDU* e *MVSS*. Nas Tabelas 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11 e 12 n_1 é fixo enquanto n_2 assume diferentes valores. Quando n_2 aumenta o gráfico *BIDU* se torna mais ágil na detecção de pequenas alterações; porém se torna lento na detecção de grandes alterações. Por exemplo, da Tabela 2 observa-se que para $\lambda=0,50$, o *NMA* diminui de 28,38 para 18,00 quando n_2 aumenta de 6 para 12. Por outro lado, para $\lambda=1,5$, o *NMA* aumenta de 1,74 para 2,13 quando n_2 aumenta de 6 para 12.

O efeito da escolha de n_1 na velocidade com que o gráfico *BIDU* sinaliza o desajuste pode ser observado comparando os *NMA*s das Tabelas 2 e 3 ou das Tabelas 5, 6 e 7 ou ainda das Tabelas 9, 10, 11 e 12. Em geral, quando n_1 aumenta de 1 para 2 o gráfico *BIDU* se mostra mais ágil. Por exemplo, das Tabelas 5 e 6 observa-se que para $\lambda=0,50$ e $n_2=16$, o *NMA* diminui de 18,00 para 12,08 quando n_1 aumenta e 1 para 2. Porém, das Tabelas 6 e 7, observa-se que o *NMA* aumenta de 12,08 para 12,75 quando n_1 aumenta de 2 para 3. As Tabelas 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11 e 12 apresentam também os *NMA*s para o gráfico bivariado tradicional (gráfico T^2) e gráfico *MVSS*.

Observa-se que o gráfico *BIDU* tem, em geral, um desempenho superior ao dos gráficos T^2 e *MVSS*. Os *NMA*s para os casos em que o gráfico *BIDU* tem desempenho inferior estão em negrito.

Tabela 1 - Parâmetros de entrada: gráficos *BIDU* e *MVSS* ($\bar{n}=3$; $\alpha_1=0,001$)

| | | <i>MVSS</i> * | <i>BIDU</i> | | | | |
|-------|-------|---------------|-------------|-------|--------|--------|-----|
| n_1 | n_2 | w | Rmax | LA | LC_1 | LC_2 | m |
| 1 | 6 | 1,833 | 72 | 2,191 | 13,815 | 9,883 | 400 |
| 1 | 9 | 2,773 | 77 | 3,002 | 13,815 | 9,025 | 400 |
| 1 | 12 | 3,340 | 76 | 3,571 | 13,815 | 8,348 | 400 |
| 2 | 6 | 2,773 | 76 | 3,571 | 13,815 | 9,647 | 400 |
| 2 | 9 | 3,890 | 74 | 4,377 | 13,815 | 8,631 | 400 |
| 2 | 12 | 4,605 | 75 | 4,954 | 13,815 | 7,802 | 400 |

* $LC=10,597$

Tabela 2 – Valores de *NMA* para os gráficos T^2 , *BIDU* e *MVSS*

($\alpha_1=0,001$; $NMA_0=200$; $\bar{n}=3$; $n_1=1$)

| λ | $\delta_x = \delta_y$ | T^{2*} | $n_1=1$ | | $n_1=1$ | | $n_1=1$ | |
|-----------|-----------------------|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | | | <i>BIDU</i> | <i>MVSS</i> | <i>BIDU</i> | <i>MVSS</i> | <i>BIDU</i> | <i>MVSS</i> |
| | | | $n_2=6$ | | $n_2=9$ | | $n_2=12$ | |
| 0,25 | 0,177 | 130,28 | 96,88 | 126,38 | 82,27 | 122,36 | 72,94 | 119,06 |
| 0,50 | 0,354 | 55,33 | 28,38 | 41,97 | 21,36 | 34,26 | 18,00 | 28,48 |
| 0,75 | 0,530 | 23,02 | 9,67 | 12,89 | 7,40 | 9,32 | 6,63 | 7,62 |
| 1,00 | 0,707 | 10,51 | 4,28 | 5,25 | 3,66 | 4,17 | 3,67 | 4,01 |
| 1,25 | 0,884 | 5,42 | 2,46 | 3,00 | 2,40 | 2,83 | 2,64 | 3,04 |
| 1,50 | 1,061 | 3,18 | 1,74 | 2,18 | 1,88 | 2,30 | 2,13 | 2,56 |

* $LC=10,597$

Tabela 3 – Valores de NMA para os gráficos T^2 , $BIDU$ e $MVSS$
 $(\alpha_1=0,001; NMA_0=200; \bar{n}=3; n_1=2)$

| | | $n_1=2$ | | $n_1=2$ | | $n_1=2$ | | |
|-----------|-----------------------|----------|--------|---------|--------|----------|--------|--------|
| | | $n_2=6$ | | $n_2=9$ | | $n_2=12$ | | |
| λ | $\delta_x = \delta_y$ | T^{2*} | $BIDU$ | $MVSS$ | $BIDU$ | $MVSS$ | $BIDU$ | $MVSS$ |
| 0,25 | 0,177 | 130,28 | 88,68 | 128,53 | 77,59 | 126,26 | 70,77 | 124,04 |
| 0,50 | 0,354 | 55,33 | 24,13 | 45,00 | 19,47 | 39,52 | 17,35 | 39,52 |
| 0,75 | 0,530 | 23,02 | 8,01 | 14,25 | 6,71 | 10,85 | 6,46 | 10,85 |
| 1,00 | 0,707 | 10,51 | 3,59 | 5,58 | 3,33 | 4,48 | 3,50 | 4,48 |
| 1,25 | 0,884 | 5,42 | 2,11 | 3,09 | 2,17 | 2,78 | 2,38 | 2,78 |
| 1,50 | 1,061 | 3,18 | 1,53 | 2,15 | 1,65 | 2,13 | 1,81 | 2,13 |

* $LC=10,597$

Tabela 4 - Parâmetros de entrada: gráficos $BIDU$ e $MVSS$ ($\bar{n}=4; \alpha_1=0,001$)

| | | $MVSS^*$ | $BIDU$ | | | | |
|-------|-------|----------|--------|-------|--------|--------|-----|
| n_1 | n_2 | w | Rmax | LA | LC_1 | LC_2 | m |
| 1 | 8 | 1,693 | 74 | 1,956 | 13,815 | 9,871 | 400 |
| 1 | 12 | 2,597 | 76 | 2,765 | 13,815 | 9,018 | 400 |
| 1 | 16 | 3,219 | 75 | 3,343 | 13,815 | 8,359 | 400 |
| 2 | 8 | 2,199 | 76 | 2,765 | 13,815 | 9,840 | 400 |
| 2 | 12 | 3,219 | 76 | 3,571 | 13,815 | 8,935 | 400 |
| 2 | 16 | 3,890 | 75 | 4,143 | 13,815 | 8,203 | 400 |
| 3 | 8 | 3,219 | 74 | 4,143 | 13,815 | 9,440 | 400 |
| 3 | 12 | 4,397 | 75 | 4,954 | 13,815 | 8,325 | 400 |
| 3 | 16 | 5,127 | 75 | 5,529 | 13,815 | 7,437 | 400 |

* $LC=10,597$

Tabela 5 – Valores de NMA para os gráficos T^2 , $BIDU$ e $MVSS$
 $(\alpha_1=0,001; NMA_0=200; \bar{n}=4; n_1=1)$

| | | $n_1=1$ | | $n_1=1$ | | $n_1=1$ | | |
|-----------|-----------------------|----------|-------------|----------|-------------|----------|--------------|--------|
| | | $n_2=8$ | | $n_2=12$ | | $n_2=16$ | | |
| λ | $\delta_x = \delta_y$ | T^{2*} | $BIDU$ | $MVSS$ | $BIDU$ | $MVSS$ | $BIDU$ | $MVSS$ |
| 0,25 | 0,177 | 115,55 | 96,88 | 109,10 | 82,27 | 103,28 | 72,94 | 99,68 |
| 0,50 | 0,354 | 41,92 | 28,38 | 28,38 | 21,36 | 21,56 | 18,00 | 17,60 |
| 0,75 | 0,530 | 15,78 | 9,67 | 7,99 | 7,40 | 5,91 | 6,63 | 5,41 |
| 1,00 | 0,707 | 6,88 | 4,28 | 3,56 | 3,66 | 3,25 | 3,67 | 3,48 |
| 1,25 | 0,884 | 3,55 | 2,46 | 2,33 | 2,40 | 2,49 | 2,64 | 2,82 |
| 1,50 | 1,061 | 2,16 | 1,74 | 1,87 | 1,88 | 2,17 | 2,13 | 2,44 |

* $LC=10,597$

Tabela 6 – Valores de NMA para os gráficos T^2 , $BIDU$ e $MVSS$ $(\alpha_1=0,001; NMA_0=200; \bar{n}=4; n_1=2)$

| λ | $\delta_x = \delta_y$ | T^{2*} | $n_1=2$ | | $n_1=2$ | | $n_1=2$ | |
|-----------|-----------------------|----------|---------|--------|----------|--------|----------|--------|
| | | | $n_2=8$ | $MVSS$ | $n_2=12$ | $MVSS$ | $n_2=16$ | $MVSS$ |
| 0,25 | 0,177 | 115,55 | 75,65 | 110,45 | 63,76 | 106,54 | 56,25 | 103,48 |
| 0,50 | 0,354 | 41,92 | 17,90 | 29,89 | 13,86 | 23,80 | 12,08 | 19,85 |
| 0,75 | 0,530 | 15,78 | 5,72 | 8,38 | 4,73 | 6,23 | 4,59 | 5,60 |
| 1,00 | 0,707 | 6,88 | 2,65 | 3,64 | 2,53 | 3,18 | 2,72 | 3,26 |
| 1,25 | 0,884 | 3,55 | 1,69 | 2,30 | 1,79 | 2,30 | 1,98 | 2,46 |
| 1,50 | 1,061 | 2,16 | 1,33 | 1,79 | 1,45 | 2,04 | 1,58 | 2,08 |

* $LC=10,597$ Tabela 7 – Valores de NMA para os gráficos T^2 , $BIDU$ e $MVSS$ $(\alpha_1=0,001; NMA_0=200; \bar{n}=4; n_1=3)$

| λ | $\delta_x = \delta_y$ | T^{2*} | $n_1=3$ | | $n_1=3$ | | $n_1=3$ | |
|-----------|-----------------------|----------|---------|--------|----------|--------|----------|--------|
| | | | $n_2=8$ | $MVSS$ | $n_2=12$ | $MVSS$ | $n_2=16$ | $MVSS$ |
| 0,25 | 0,177 | 115,55 | 71,41 | 111,69 | 62,15 | 109,38 | 56,92 | 108,72 |
| 0,50 | 0,354 | 41,92 | 16,39 | 32,69 | 13,69 | 27,58 | 12,75 | 24,69 |
| 0,75 | 0,530 | 15,78 | 5,29 | 9,28 | 4,81 | 7,15 | 4,96 | 6,47 |
| 1,00 | 0,707 | 6,88 | 2,51 | 3,82 | 2,57 | 3,29 | 2,82 | 3,32 |
| 1,25 | 0,884 | 3,55 | 1,63 | 2,30 | 1,76 | 2,23 | 1,93 | 2,38 |
| 1,50 | 1,061 | 2,16 | 1,29 | 1,76 | 1,39 | 1,78 | 1,48 | 1,92 |

* $LC=10,597$

Tabela 8 - Parâmetros de entrada: gráficos *BIDU* e *MVSS*
($\bar{n}=5$; $\alpha_1=0,001$)

| | | <i>MVSS</i> * | <i>BIDU</i> | | | | |
|-------|-------|---------------|-------------|-------|--------|--------|-----|
| n_1 | n_2 | w | Rmax | LA | LC_1 | LC_2 | m |
| 1 | 10 | 1,622 | 75 | 1,828 | 13,815 | 9,838 | 400 |
| 1 | 15 | 2,504 | 74,5 | 2,634 | 13,815 | 9,007 | 400 |
| 1 | 20 | 3,116 | 76 | 3,209 | 13,815 | 8,360 | 400 |
| 2 | 10 | 1,962 | 76 | 2,401 | 13,815 | 9,881 | 400 |
| 2 | 15 | 2,932 | 76 | 3,209 | 13,815 | 9,003 | 400 |
| 2 | 20 | 3,584 | 74 | 3,781 | 13,815 | 8,308 | 400 |
| 3 | 10 | 2,504 | 75 | 3,209 | 13,815 | 9,747 | 400 |
| 3 | 15 | 3,584 | 75 | 4,020 | 13,815 | 8,785 | 400 |
| 3 | 20 | 4,275 | 74 | 4,585 | 13,815 | 8,009 | 400 |
| 4 | 10 | 3,584 | 74 | 4,585 | 13,815 | 9,235 | 400 |
| 4 | 15 | 4,794 | 75 | 5,377 | 13,815 | 8,072 | 400 |
| 4 | 20 | 5,561 | 75 | 5,952 | 13,815 | 7,127 | 400 |

* $LC=10,597$

Tabela 9 – Valores de *NMA* para os gráficos T^2 , *BIDU* e *MVSS*
($\alpha_1=0,001$; $NMA_0=200$; $\bar{n}=5$; $n_1=1$)

| | | $n_1=1$ | | $n_1=1$ | | $n_1=1$ | | |
|-----------|-----------------------|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | | $n_2=10$ | | $n_2=15$ | | $n_2=20$ | | |
| λ | $\delta_x = \delta_y$ | T^{2*} | <i>BIDU</i> | <i>MVSS</i> | <i>BIDU</i> | <i>MVSS</i> | <i>BIDU</i> | <i>MVSS</i> |
| 0,25 | 0,177 | 103,34 | 72,37 | 94,07 | 58,00 | 87,74 | 49,35 | 82,19 |
| 0,50 | 0,354 | 32,95 | 16,42 | 20,22 | 12,02 | 14,68 | 10,22 | 12,06 |
| 0,75 | 0,530 | 11,54 | 5,30 | 5,69 | 4,34 | 4,51 | 4,26 | 4,42 |
| 1,00 | 0,707 | 4,93 | 2,59 | 2,85 | 2,57 | 2,86 | 2,90 | 3,22 |
| 1,25 | 0,884 | 2,6 | 1,75 | 2,08 | 1,99 | 2,32 | 2,33 | 2,74 |
| 1,50 | 1,061 | 1,67 | 1,44 | 1,77 | 1,70 | 2,08 | 1,94 | 2,42 |

* $LC=10,597$

Tabela 10 – Valores de *NMA* para os gráficos T^2 , *BIDU* e *MVSS*
($\alpha_1=0,001$; $NMA_0=200$; $\bar{n}=5$; $n_1=2$)

| | | $n_1=2$ | | $n_1=2$ | | $n_1=2$ | | |
|-----------|-----------------------|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | | $n_2=10$ | | $n_2=15$ | | $n_2=20$ | | |
| λ | $\delta_x = \delta_y$ | T^{2*} | <i>BIDU</i> | <i>MVSS</i> | <i>BIDU</i> | <i>MVSS</i> | <i>BIDU</i> | <i>MVSS</i> |
| 0,25 | 0,177 | 103,34 | 66,13 | 94,99 | 53,78 | 90,58 | 46,47 | 85,81 |
| 0,50 | 0,354 | 32,95 | 14,08 | 21,08 | 10,69 | 15,67 | 9,31 | 12,86 |
| 0,75 | 0,530 | 11,54 | 4,45 | 5,79 | 3,78 | 4,51 | 3,78 | 4,29 |
| 1,00 | 0,707 | 4,93 | 2,19 | 2,80 | 2,19 | 2,69 | 2,42 | 2,86 |
| 1,25 | 0,884 | 2,6 | 1,50 | 1,99 | 1,65 | 2,11 | 1,84 | 2,33 |
| 1,50 | 1,061 | 1,67 | 1,25 | 1,67 | 1,38 | 1,85 | 1,49 | 2,00 |

* $LC=10,597$

Tabela 11 – Valores de NMA para os gráficos T^2 , $BIDU$ e $MVSS$
 $(\alpha_1=0,001; NMA_0=200; \bar{n}=5; n_1=3)$

| λ | $\delta_x = \delta_y$ | T^{2*} | $n_1=3$ | | $n_1=3$ | | $n_1=3$ | |
|-----------|-----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-------|
| | | | $n_2=10$ | $n_2=15$ | $n_2=15$ | $n_2=20$ | $n_2=20$ | |
| 0,25 | 0,177 | 103,34 | 61,40 | 97,62 | 51,36 | 93,25 | 45,49 | 90,11 |
| 0,50 | 0,354 | 32,95 | 12,58 | 22,38 | 10,05 | 17,23 | 9,10 | 14,47 |
| 0,75 | 0,530 | 11,54 | 3,99 | 6,05 | 3,58 | 4,73 | 3,65 | 4,43 |
| 1,00 | 0,707 | 4,93 | 2,00 | 2,85 | 2,05 | 2,63 | 2,26 | 2,77 |
| 1,25 | 0,884 | 2,6 | 1,40 | 1,93 | 1,52 | 2,00 | 1,65 | 2,14 |
| 1,50 | 1,061 | 1,67 | 1,18 | 1,60 | 1,26 | 1,66 | 1,33 | 1,79 |

* $LC=10,597$

Tabela 12 – Valores de NMA para os gráficos T^2 , $BIDU$ e $MVSS$
 $(\alpha_1=0,001; NMA_0=200; \bar{n}=5; n_1=4)$

| λ | $\delta_x = \delta_y$ | T^{2*} | $n_1=4$ | | $n_1=4$ | | $n_1=4$ | |
|-----------|-----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-------|
| | | | $n_2=10$ | $n_2=15$ | $n_2=15$ | $n_2=20$ | $n_2=20$ | |
| 0,25 | 0,177 | 103,34 | 59,47 | 100,36 | 51,71 | 97,20 | 47,81 | 96,08 |
| 0,50 | 0,354 | 32,95 | 12,11 | 24,67 | 10,56 | 20,61 | 10,27 | 18,60 |
| 0,75 | 0,530 | 11,54 | 3,94 | 6,68 | 3,84 | 5,39 | 4,13 | 5,16 |
| 1,00 | 0,707 | 4,93 | 2,02 | 2,95 | 2,17 | 2,65 | 2,40 | 2,85 |
| 1,25 | 0,884 | 2,6 | 1,41 | 1,96 | 1,53 | 1,95 | 1,65 | 2,03 |
| 1,50 | 1,061 | 1,67 | 1,17 | 1,52 | 1,24 | 1,55 | 1,29 | 1,66 |

* $LC=10,597$

Nas Figuras de 14 até 19 estão as curvas de probabilidade de não-detecção, ou seja, probabilidade de que com todas as i primeiras amostras após a ocorrência da causa especial não se ter ainda tido um sinal com os gráficos $BIDU$ e T^2 . Em todas elas $\alpha_1=0,001$, $\bar{n}=4$, $n_1=2$ e $n_2=8$ e em cada uma delas λ assume um dos valores 0,25; 0,5; 0,75; 1,00; 1,25 e 1,50.

Estas figuras mostram que, sob as mesmas condições, o gráfico $BIDU$ é sempre mais ágil que o gráfico T^2 . Por exemplo, de acordo com a Figura 18 para uma perturbação do processo da ordem de 1,25, ou seja, $\lambda = 1,25$, o gráfico $BIDU$ terá com certeza detectado tal desajuste até a 6ª amostra (em outras palavras, terá detectado ou na 1ª, ou na 2ª, ou na 3ª, ou na 4ª, ou na 5ª, ou na 6ª amostra); contudo, com o gráfico

T^2 , essa mesma perturbação terá aproximadamente 15% de probabilidade de passar despercebido até a retirada e análise da 6ª amostra (ou seja, há cerca de 15% de chance de que os seis primeiros pontos amostrais caíam todos dentro dos limites de controle).

Das Figuras de 14 a 19 observa-se que quanto maior o valor de λ , maior a probabilidade do gráfico *BIDU* detectar o desajuste logo nas primeiras amostras.

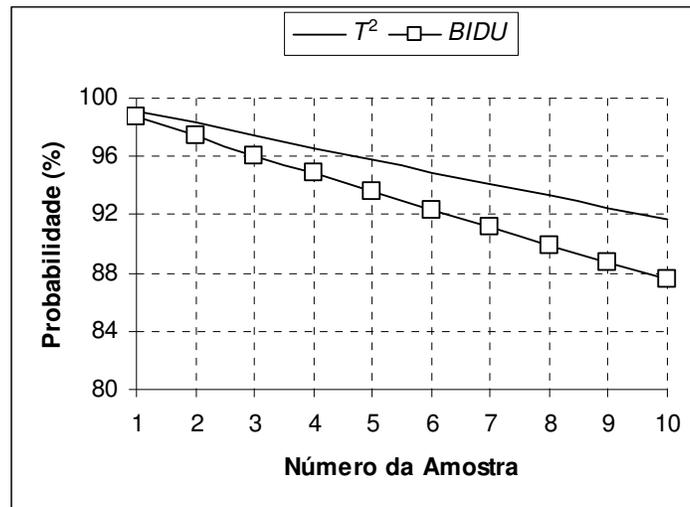


Figura 14 - Curva de probabilidades de não-detecção ($\lambda = 0,25$)

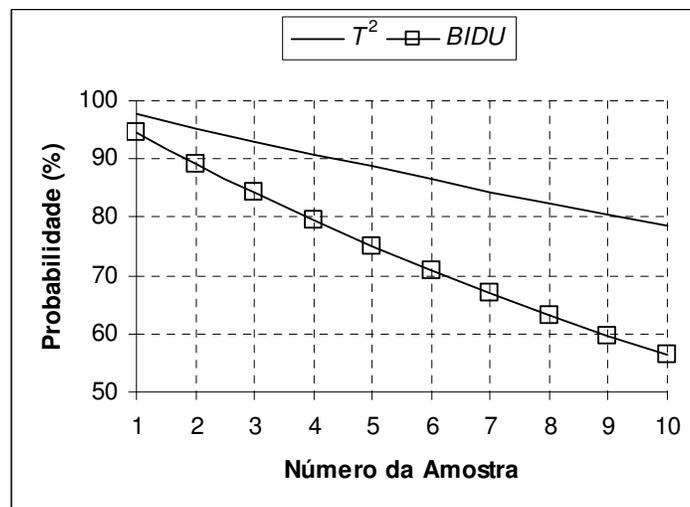


Figura 15 - Curva de probabilidades de não-detecção ($\lambda = 0,50$)

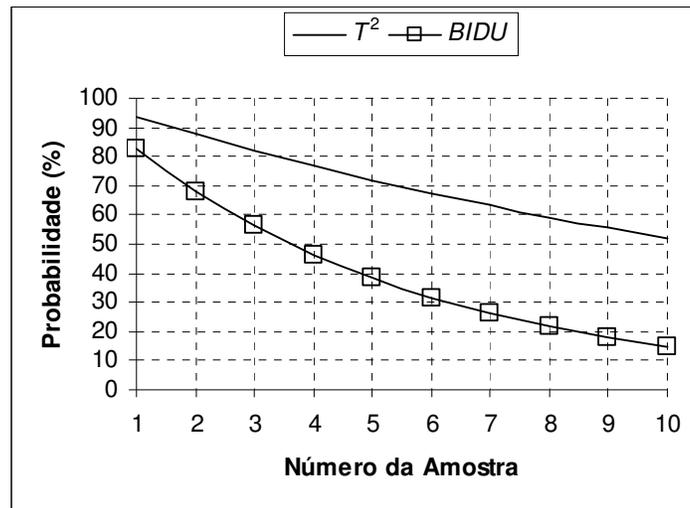


Figura 16 - Curva de probabilidades de não-deteção ($\lambda=0,75$)

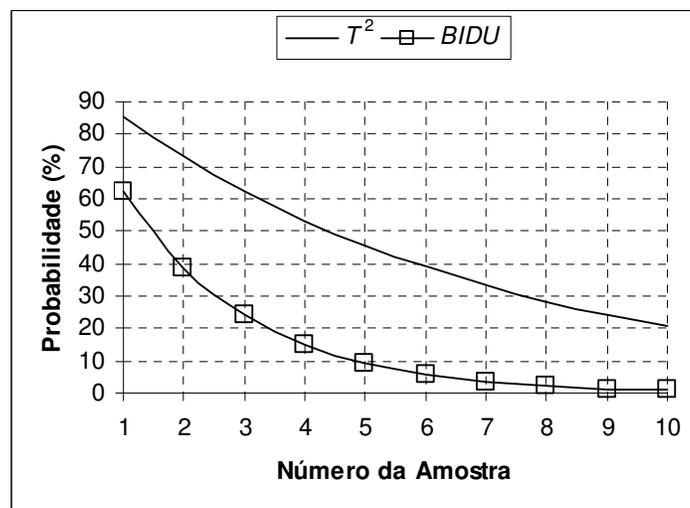


Figura 17 - Curva de probabilidades de não-deteção ($\lambda=1,00$)

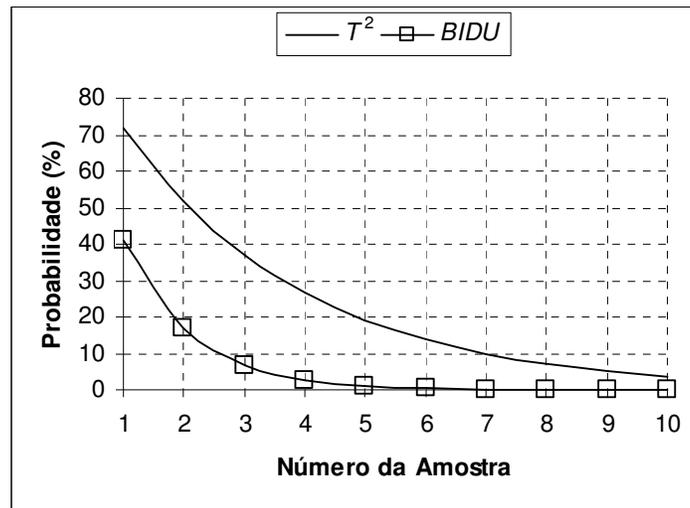


Figura 18 - Curva de probabilidades de não-deteção ($\lambda = 1,25$)

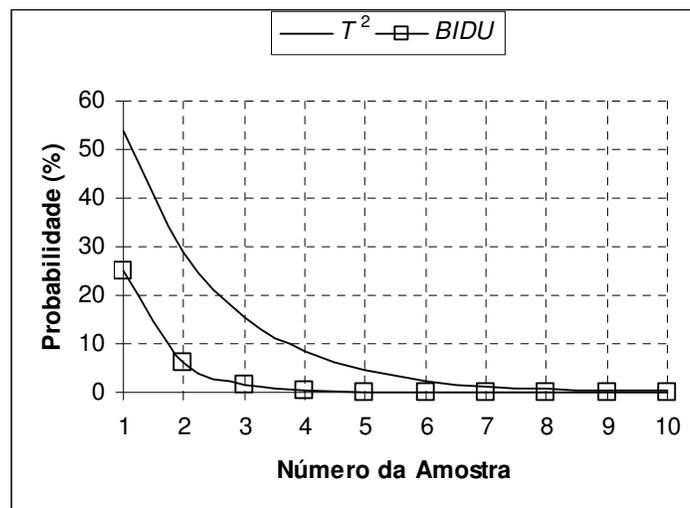


Figura 19 - Curva de probabilidades de não-deteção ($\lambda = 1,50$)

5.3 COMPARAÇÃO DOS DESEMPENHOS DOS GRÁFICOS *BIDU* E *MVSI*

Na Tabela 13 estão os valores dos parâmetros de entrada para o gráfico *MVSI* e nas Tabelas 14 e 15 os valores do *TES* para o gráfico bivariado tradicional (gráfico de T^2), para o gráfico *BIDU* e para o gráfico *MVSI*. Destas tabelas verifica-se que o gráfico *MVSI* tem, para qualquer valor de λ e para qualquer valor de (b, a) , um desempenho superior ao do gráfico T^2 . Por sua vez, o gráfico *BIDU* tem desempenho superior aos dos gráficos de T^2 e *MVSI*. Por exemplo, da Tabela 14 observa-se que

para $\lambda=0,50$, o *TES* para o gráfico *BIDU* é igual a 17,4 e para o gráfico T^2 é igual a 41,42. Considerando o mesmo valor de λ e $(b, a) = (0,3;1,7)$, tem-se para o gráfico *MVSI* um *TES* igual a 33,54.

Tabela 13 - Parâmetros do gráfico *MVSI* ($\bar{n}=4$ e 5)

| <i>b</i> | <i>a</i> | <i>w</i> | <i>LC</i> |
|----------|----------|----------|-----------|
| 0,5 | 1,5 | 1,376 | 10,597 |
| 0,3 | 1,7 | 1,376 | 10,597 |
| 0,1 | 1,9 | 1,376 | 10,597 |
| 0,1 | 1,1 | 4,517 | 10,597 |
| 0,1 | 1,3 | 2,743 | 10,597 |
| 0,1 | 1,5 | 2,041 | 10,597 |
| 0,1 | 4 | 0,522 | 10,597 |

Tabela 14 – Valores de *TES* para os gráficos T^2 , *BIDU* e *MVSI*

($\alpha_1=0,001$; $NMA_0=200$; $\bar{n}=4$)

| λ | $\delta_x = \delta_y$ | T^{2*} | <i>BIDU</i> | <i>MVSI</i> | | | | | | |
|-----------|-----------------------|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-----------|
| | | | | $(0,5;1,5)$ | $(0,3;1,7)$ | $(0,1;1,9)$ | $(0,1;1,1)$ | $(0,1;1,3)$ | $(0,1;1,5)$ | $(0,1;4)$ |
| 0,25 | 0,177 | 115,05 | 75,15 | 110,85 | 109,35 | 107,32 | 112,74 | 109,98 | 108,27 | 105,65 |
| 0,50 | 0,354 | 41,42 | 17,4 | 36,35 | 33,54 | 31,45 | 37,67 | 34,72 | 33,25 | 29,19 |
| 0,75 | 0,530 | 15,28 | 5,22 | 11,92 | 10,39 | 8,86 | 12,46 | 10,60 | 9,71 | 7,76 |
| 1,00 | 0,707 | 6,38 | 2,15 | 4,76 | 3,89 | 3,04 | 4,70 | 3,75 | 3,39 | 2,65 |
| 1,25 | 0,884 | 3,05 | 1,19 | 2,46 | 2,02 | 1,58 | 2,21 | 1,83 | 1,70 | 1,46 |
| 1,50 | 1,061 | 1,66 | 0,83 | 1,12 | 1,54 | 1,03 | 1,05 | 1,39 | 1,03 | 1,02 |

* $LC=10,597$

Tabela 15 – Valores de *TES* para os gráficos T^2 , *BIDU* e *MVSI*

($\alpha_1=0,001$; $NMA_0=200$; $\bar{n}=5$)

| λ | $\delta_x = \delta_y$ | T^{2*} | <i>BIDU</i> | <i>MVSI</i> | | | | | | |
|-----------|-----------------------|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-----------|
| | | | | $(0,5;1,5)$ | $(0,3;1,7)$ | $(0,1;1,9)$ | $(0,1;1,1)$ | $(0,1;1,3)$ | $(0,1;1,5)$ | $(0,1;4)$ |
| 0,25 | 0,177 | 102,84 | 65,63 | 98,79 | 95,70 | 94,58 | 99,95 | 96,94 | 95,82 | 91,77 |
| 0,50 | 0,354 | 32,45 | 13,58 | 27,60 | 25,07 | 23,35 | 28,80 | 26,02 | 24,71 | 21,21 |
| 0,75 | 0,530 | 11,04 | 3,95 | 8,40 | 7,09 | 5,81 | 8,59 | 7,11 | 6,44 | 5,07 |
| 1,00 | 0,707 | 4,43 | 1,69 | 3,36 | 2,75 | 2,11 | 3,19 | 2,55 | 2,33 | 1,87 |
| 1,25 | 0,884 | 2,10 | 1,00 | 1,87 | 1,58 | 1,28 | 1,65 | 1,42 | 1,35 | 1,23 |
| 1,50 | 1,061 | 1,17 | 0,75 | 1,05 | 1,30 | 1,01 | 1,02 | 1,19 | 1,01 | 1,01 |

* $LC=10,597$

5.4 ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DE α_1 NO DESEMPENHO DO GRÁFICO *BIDU*

Na Tabela 16 estão os valores dos parâmetros de entrada do programa *FORTTRAN* (Apêndice D) para o caso em que $\alpha_1 = 0$. O efeito de α_1 na velocidade com que o gráfico *BIDU* sinaliza um desajuste do processo pode ser observado comparando os *NMA*s das Tabelas 17, 18 e 19. Nestas tabelas os *NMA*s para o gráfico *BIDU* considerando $\alpha_1 = 0,001$ e $\alpha_1 = 0$ são colocados lado a lado e obtidos sob as mesmas condições, ou seja, iguais valores de NMA_0 , \bar{n} , n_1 e n_2 .

Em geral o gráfico *BIDU* se mostra mais ágil na detecção de alterações no processo para o caso em que $\alpha_1 = 0$. Por exemplo, da Tabela 17, para $\alpha_1 = 0,001$ e $\alpha_1 = 0$ ($\lambda = 0,50$, $n_1 = 1$ e $n_2 = 8$) os *NMA*s são iguais a 28,38 e 19,19. Os *NMA*s para os casos em que $\alpha_1 = 0$ tem um desempenho inferior estão em negrito. Por exemplo, na Tabela 18 para $\alpha_1 = 0,001$, $\lambda = 1,25$, $n_1 = 2$ e $n_2 = 16$, o *NMA* é igual a 1,98 e o para $\alpha_1 = 0$, o *NMA* é igual a 1,99.

As Tabelas 17, 18 e 19 apresentam também os valores de *NMA* para o gráfico bivariado tradicional (gráfico T^2). Observa-se que o gráfico *BIDU* tem, para qualquer valor de λ e α_1 , um desempenho superior ao do gráfico T^2 .

Os *NMA*s da Tabela 17 para $\alpha_1 = 0$ são do gráfico bivariado com amostragem em dois estágios. O gráfico bivariado com amostragem em dois estágios é um caso particular do gráfico *BIDU*, em que $\alpha_1 = 0$ e $n_1 = 1$.

Tabela 16 - Parâmetros de entrada: gráfico *BIDU* ($\bar{n} = 4$; $\alpha_1 = 0$)

| n_1 | n_2 | Rmax | LA | LC ₁ | LC ₂ | m |
|-------|-------|------|-------|-----------------|-----------------|-----|
| 1 | 8 | 79 | 1,962 | 30 | 9,412 | 400 |
| 1 | 12 | 74 | 2,773 | 30 | 8,557 | 400 |
| 1 | 16 | 74 | 3,353 | 30 | 7,892 | 400 |
| 2 | 8 | 74 | 2,773 | 30 | 9,394 | 400 |
| 2 | 12 | 75 | 3,584 | 30 | 8,467 | 400 |
| 2 | 16 | 75 | 4,159 | 30 | 7,716 | 400 |
| 3 | 8 | 75 | 4,159 | 30 | 8,988 | 400 |
| 3 | 12 | 75 | 4,978 | 30 | 7,848 | 400 |
| 3 | 16 | 75 | 5,561 | 30 | 6,960 | 400 |

Tabela 17 – Valores de NMA para os gráficos T^2 e $BIDU$ $(NMA_0=200; \bar{n}=4; n_1=1)$

| λ | $\delta_x = \delta_y$ | T^{2*} | $n_1=1$ | | $n_1=1$ | | $n_1=1$ | |
|-----------|-----------------------|----------|------------------|--------------|------------------|--------------|------------------|--------------|
| | | | $n_2=8$ | | $n_2=12$ | | $n_2=16$ | |
| | | | $BIDU$ | $BIDU$ | $BIDU$ | $BIDU$ | $BIDU$ | $BIDU$ |
| | | | $\alpha_1=0,001$ | $\alpha_1=0$ | $\alpha_1=0,001$ | $\alpha_1=0$ | $\alpha_1=0,001$ | $\alpha_1=0$ |
| 0,25 | 0,177 | 115,55 | 96,88 | 76,96 | 82,27 | 62,81 | 72,94 | 54,12 |
| 0,50 | 0,354 | 41,92 | 28,38 | 19,19 | 21,36 | 14,31 | 18,00 | 12,14 |
| 0,75 | 0,530 | 15,78 | 9,67 | 6,42 | 7,40 | 5,16 | 6,63 | 4,92 |
| 1,00 | 0,707 | 6,88 | 4,28 | 3,04 | 3,66 | 2,86 | 3,67 | 3,12 |
| 1,25 | 0,884 | 3,55 | 2,46 | 1,94 | 2,40 | 2,11 | 2,64 | 2,43 |
| 1,50 | 1,061 | 2,16 | 1,74 | 1,52 | 1,88 | 1,76 | 2,13 | 2,01 |

* $LC=10,597$ Tabela 18 – Valores de NMA para os gráficos T^2 e $BIDU$ $(NMA_0=200; \bar{n}=4; n_1=2)$

| λ | $\delta_x = \delta_y$ | T^{2*} | $n_1=2$ | | $n_1=2$ | | $n_1=2$ | |
|-----------|-----------------------|----------|------------------|--------------|------------------|--------------|------------------|--------------|
| | | | $n_2=8$ | | $n_2=12$ | | $n_2=16$ | |
| | | | $BIDU$ | $BIDU$ | $BIDU$ | $BIDU$ | $BIDU$ | $BIDU$ |
| | | | $\alpha_1=0,001$ | $\alpha_1=0$ | $\alpha_1=0,001$ | $\alpha_1=0$ | $\alpha_1=0,001$ | $\alpha_1=0$ |
| 0,25 | 0,177 | 115,55 | 75,65 | 70,88 | 63,76 | 59,12 | 56,25 | 51,83 |
| 0,50 | 0,354 | 41,92 | 17,90 | 16,50 | 13,86 | 12,87 | 12,08 | 11,35 |
| 0,75 | 0,530 | 15,78 | 5,72 | 5,38 | 4,73 | 4,56 | 4,59 | 4,49 |
| 1,00 | 0,707 | 6,88 | 2,65 | 2,57 | 2,53 | 2,50 | 2,72 | 2,72 |
| 1,25 | 0,884 | 3,55 | 1,69 | 1,67 | 1,79 | 1,79 | 1,98 | 1,99 |
| 1,50 | 1,061 | 2,16 | 1,33 | 1,32 | 1,45 | 1,45 | 1,58 | 1,59 |

* $LC=10,597$ Tabela 19 – Valores de NMA para os gráficos T^2 e $BIDU$ $(NMA_0=200; \bar{n}=4; n_1=3)$

| λ | $\delta_x = \delta_y$ | T^{2*} | $n_1=3$ | | $n_1=3$ | | $n_1=3$ | |
|-----------|-----------------------|----------|------------------|--------------|------------------|--------------|------------------|--------------|
| | | | $n_2=8$ | | $n_2=12$ | | $n_2=16$ | |
| | | | $BIDU$ | $BIDU$ | $BIDU$ | $BIDU$ | $BIDU$ | $BIDU$ |
| | | | $\alpha_1=0,001$ | $\alpha_1=0$ | $\alpha_1=0,001$ | $\alpha_1=0$ | $\alpha_1=0,001$ | $\alpha_1=0$ |
| 0,25 | 0,177 | 115,55 | 71,41 | 67,51 | 62,15 | 58,41 | 56,92 | 53,93 |
| 0,50 | 0,354 | 41,92 | 16,39 | 15,39 | 13,69 | 13,00 | 12,75 | 12,28 |
| 0,75 | 0,530 | 15,78 | 5,29 | 5,07 | 4,81 | 4,71 | 4,96 | 4,91 |
| 1,00 | 0,707 | 6,88 | 2,51 | 2,46 | 2,57 | 2,55 | 2,82 | 2,83 |
| 1,25 | 0,884 | 3,55 | 1,63 | 1,62 | 1,76 | 1,77 | 1,93 | 1,95 |
| 1,50 | 1,061 | 2,16 | 1,29 | 1,29 | 1,39 | 1,39 | 1,48 | 1,49 |

* $LC=10,597$

5.5 DESEMPENHO DO GRÁFICO *SyBIDU*

Na Tabela 20 estão os valores dos parâmetros de entrada do programa *FORTRAN* (Apêndice D) para o gráfico *SyBIDU* e nas Tabelas de 21 até 26 estão os NMA_{ss} . À medida que L aumenta de 1 para 50, em geral, o NMA_{ss} diminui. Por exemplo, na Tabela 21, para $\lambda=0,5$, o NMA_{ss} diminui de 24,08 para 14,26. O efeito de variar L de 50 para 100 quase não afeta a velocidade com que o gráfico detecta pequenas ou grandes alterações. Por exemplo, na Tabela 21 para $\lambda=0,75$, o NMA_{ss} aumenta de 5,03 para 5,16 a medida em que L aumenta de 50 para 100. Para uma perturbação maior, por exemplo, $\lambda=1,5$, o NMA_{ss} diminui de 1,54 para 1,51 a medida em que L aumenta de 50 para 100.

De forma semelhante ao gráfico *BIDU*, as escolhas de n_1 e n_2 afetam a velocidade com que o gráfico *SyBIDU* sinaliza desajustes no processo. Da comparação entre as Tabelas 21, 23 e 25 e entre as Tabelas 22, 24 e 26, conclui-se que quando n_1 aumenta de 1 para 2, o NMA_{ss} , em geral, diminui para qualquer valor de L e, quando n_1 aumenta de 2 para 3, o mesmo não ocorre. Da comparação entre as Tabelas 21 e 22, entre as Tabelas 22 e 23 e entre as Tabelas 24 e 25, conclui-se que quando n_2 aumenta de 8 para 16 o NMA_{ss} , em geral, diminui independentemente do valor de L , exceto para o caso em que $n_1=3$.

Nas Tabelas de 21 até 26 estão os valores de NMA_{ss} para o gráfico bivariado tradicional (gráfico T^2) e para o gráfico *BIDU*. Observa-se que, em geral, o gráfico *SyBIDU* tem um desempenho superior ao do gráfico T^2 . Por exemplo, da Tabela 21, para $\lambda=0,5$ e $L=10$, o NMA_{ss} para o gráfico *SyBIDU* é 14,70. O NMA para o gráfico T^2 considerando a mesma perturbação é igual a 41,92. As exceções ocorrem para pequenos valores de L e grandes perturbações. Nestes casos, o desempenho do gráfico *SyBIDU* é inferior ao do gráfico T^2 . Por exemplo, da Tabela 21, para $\lambda=1,5$ e $L=1$, o NMA_{ss} para o gráfico *SyBIDU* é 2,99. O NMA para o gráfico T^2 considerando a mesma perturbação é igual a 2,16.

Da comparação entre os gráficos *SyBIDU* e *BIDU* conclui-se que, em geral, o gráfico *SyBIDU* tem desempenho superior ao gráfico *BIDU* nas situações em que as

perturbações variam de pequenas a moderadas, os valores de L variam de moderados a grandes e os valores de n_2 são pequenos. Por exemplo, da Tabela 21 em que $n_2=8$, para $\lambda=0,75$ e $L=10$, o NMA_{ss} para o gráfico *SyBIDU* é 5,25 e para o gráfico *BIDU*, igual a 6,42. Da Tabela 25 em que $n_2=16$, para $\lambda=0,75$ e $L=10$, o NMA_{ss} para o gráfico *SyBIDU* é 6,04 e para o gráfico *BIDU*, igual a 4,92, ou seja, neste caso o gráfico *BIDU* tem desempenho superior ao do gráfico *SyBIDU*.

Tabela 20 - Parâmetros de entrada: gráfico *SyBIDU* ($\bar{n}=4$; $\alpha_1=0$)

| | | $L=1 \quad 5 \quad 10 \quad 20 \quad 50 \quad 100$ | | | | | | | | | |
|-------|-------|--|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----|
| n_1 | n_2 | Rmax | LA | LC_1 | LC_2 | LC_2 | LC_2 | LC_2 | LC_2 | LC_2 | m |
| 1 | 8 | 50 | 1,962 | 30 | 3,633 | 5,230 | 5,880 | 6,495 | 7,240 | 7,740 | 200 |
| 1 | 16 | 50 | 3,353 | 30 | 2,074 | 3,679 | 4,332 | 4,952 | 5,704 | 6,208 | 300 |
| 2 | 8 | 50 | 2,773 | 30 | 3,202 | 4,963 | 5,665 | 6,324 | 7,117 | 7,646 | 200 |
| 2 | 16 | 55 | 4,159 | 30 | 1,365 | 3,163 | 3,883 | 4,560 | 5,374 | 5,918 | 200 |
| 3 | 8 | 55 | 4,159 | 30 | 1,945 | 4,095 | 4,903 | 5,647 | 6,527 | 7,105 | 200 |
| 3 | 16 | 50 | 5,561 | 30 | 0,537 | 1,797 | 2,656 | 3,444 | 4,373 | 4,982 | 200 |

Tabela 21 – Valores de NMA e NMA_{SS} para os gráficos T^2 , *BIDU* e *SyBIDU*

($\alpha_1=0$; $NMA_0=200$; $\bar{n}=4$; $n_1=1$; $n_2=8$)

| | | | <i>SyBIDU</i> | | | | | | |
|-----------|-----------------------|----------|---------------|---------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | | $n_1=1$ | $n_1=1$ | | | | | |
| | | | $n_2=8$ | $n_2=8$ | | | | | |
| | | | <i>BIDU</i> | | | | | | |
| λ | $\delta_x = \delta_y$ | T^{2*} | $\alpha_1=0$ | $L=1$ | 5 | 10 | 20 | 50 | 100 |
| 0,25 | 0,177 | 115,55 | 76,96 | 87,80 | 70,78 | 66,89 | 64,65 | 63,88 | 64,66 |
| 0,50 | 0,354 | 41,92 | 19,19 | 24,08 | 15,98 | 14,70 | 14,17 | 14,26 | 14,70 |
| 0,75 | 0,530 | 15,78 | 6,42 | 9,34 | 5,73 | 5,25 | 5,04 | 5,03 | 5,16 |
| 1,00 | 0,707 | 6,88 | 3,04 | 5,32 | 3,18 | 2,88 | 2,73 | 2,67 | 2,69 |
| 1,25 | 0,884 | 3,55 | 1,94 | 3,78 | 2,30 | 2,07 | 1,94 | 1,87 | 1,85 |
| 1,50 | 1,061 | 2,16 | 1,52 | 2,99 | 1,90 | 1,71 | 1,60 | 1,54 | 1,51 |

* $LC=10,597$

Tabela 22 – Valores de NMA e NMA_{SS} para os gráficos T^2 , $BIDU$ e $SyBIDU$
 $(\alpha_1=0; NMA_0=200; \bar{n}=4; n_1=1; n_2=16)$

| λ | $\delta_x = \delta_y$ | T^{2*} | $SyBIDU$ | | | | | | |
|-----------|-----------------------|----------|--------------|-------|-------|----------|-------|-------|-------|
| | | | $n_1=1$ | | | $n_1=1$ | | | |
| | | | $n_2=16$ | | | $n_2=16$ | | | |
| | | | $BIDU$ | | | | | | |
| | | | $\alpha_1=0$ | $L=1$ | 5 | 10 | 20 | 50 | 100 |
| 0,25 | 0,177 | 115,55 | 54,12 | 86,67 | 58,15 | 52,03 | 48,35 | 46,25 | 46,15 |
| 0,50 | 0,354 | 41,92 | 12,14 | 30,64 | 14,80 | 12,41 | 11,17 | 10,48 | 10,39 |
| 0,75 | 0,530 | 15,78 | 4,92 | 16,93 | 7,36 | 6,04 | 5,32 | 4,84 | 4,71 |
| 1,00 | 0,707 | 6,88 | 3,12 | 11,09 | 5,02 | 4,16 | 3,67 | 3,32 | 3,19 |
| 1,25 | 0,884 | 3,55 | 2,43 | 7,60 | 3,74 | 3,18 | 2,84 | 2,61 | 2,52 |
| 1,50 | 1,061 | 2,16 | 2,01 | 5,36 | 2,88 | 2,51 | 2,28 | 2,12 | 2,06 |

* $LC=10,597$

Tabela 23 – Valores de NMA e NMA_{SS} para os gráficos T^2 , $BIDU$ e $SyBIDU$
 $(\alpha_1=0; NMA_0=200; \bar{n}=4; n_1=2; n_2=8)$

| λ | $\delta_x = \delta_y$ | T^{2*} | $SyBIDU$ | | | | | | |
|-----------|-----------------------|----------|--------------|-------|-------|---------|-------|-------|-------|
| | | | $n_1=2$ | | | $n_1=2$ | | | |
| | | | $n_2=8$ | | | $n_2=8$ | | | |
| | | | $BIDU$ | | | | | | |
| | | | $\alpha_1=0$ | $L=1$ | 5 | 10 | 20 | 50 | 100 |
| 0,25 | 0,177 | 115,55 | 70,88 | 85,91 | 66,51 | 62,16 | 59,64 | 58,66 | 59,32 |
| 0,50 | 0,354 | 41,92 | 16,50 | 22,96 | 14,29 | 12,96 | 12,39 | 12,38 | 12,71 |
| 0,75 | 0,530 | 15,78 | 5,38 | 8,94 | 5,18 | 4,68 | 4,45 | 4,39 | 4,47 |
| 1,00 | 0,707 | 6,88 | 2,57 | 4,78 | 2,83 | 2,55 | 2,39 | 2,32 | 2,33 |
| 1,25 | 0,884 | 3,55 | 1,67 | 3,21 | 2,02 | 1,82 | 1,71 | 1,64 | 1,63 |
| 1,50 | 1,061 | 2,16 | 1,32 | 2,42 | 1,63 | 1,49 | 1,40 | 1,35 | 1,33 |

* $LC=10,597$

Tabela 24 – Valores de NMA e NMA_{SS} para os gráficos T^2 , $BIDU$ e $SyBIDU$
 $(\alpha_1=0; NMA_0=200; \bar{n}=4; n_1=2; n_2=16)$

| λ | $\delta_x = \delta_y$ | T^{2*} | $SyBIDU$ | | | | | | |
|-----------|-----------------------|----------|--------------|-------|-------|----------|-------|-------|-------|
| | | | $n_1=2$ | | | $n_1=2$ | | | |
| | | | $n_2=16$ | | | $n_2=16$ | | | |
| | | | $BIDU$ | | | | | | |
| | | | $\alpha_1=0$ | $L=1$ | 5 | 10 | 20 | 50 | 100 |
| 0,25 | 0,177 | 115,55 | 51,83 | 98,22 | 60,79 | 53,15 | 48,51 | 45,62 | 45,15 |
| 0,50 | 0,354 | 41,92 | 11,35 | 35,90 | 15,59 | 12,69 | 11,15 | 10,25 | 10,04 |
| 0,75 | 0,530 | 15,78 | 4,49 | 16,59 | 7,03 | 5,73 | 5,01 | 4,52 | 4,37 |
| 1,00 | 0,707 | 6,88 | 2,72 | 8,92 | 4,23 | 3,56 | 3,16 | 2,88 | 2,79 |
| 1,25 | 0,884 | 3,55 | 1,99 | 5,31 | 2,87 | 2,49 | 2,27 | 2,11 | 2,06 |
| 1,50 | 1,061 | 2,16 | 1,59 | 3,49 | 2,11 | 1,88 | 1,75 | 1,65 | 1,62 |

* $LC=10,597$

Tabela 25 – Valores de NMA e NMA_{SS} para os gráficos T^2 , $BIDU$ e $SyBIDU$
 $(\alpha_1=0; NMA_0=200; \bar{n}=4; n_1=3; n_2=8)$

| λ | $\delta_x = \delta_y$ | T^{2*} | $SyBIDU$ | | | | | | |
|-----------|-----------------------|----------|--------------|-------|-------|----------|-------|-------|-------|
| | | | $BIDU$ | | | $SyBIDU$ | | | |
| | | | $\alpha_1=0$ | $L=1$ | 5 | 10 | 20 | 50 | 100 |
| 0,25 | 0,177 | 115,55 | 67,51 | 96,17 | 68,19 | 62,23 | 58,70 | 56,85 | 57,02 |
| 0,50 | 0,354 | 41,92 | 15,39 | 29,51 | 15,58 | 13,54 | 12,55 | 12,18 | 12,32 |
| 0,75 | 0,530 | 15,78 | 5,07 | 11,32 | 5,69 | 4,94 | 4,56 | 4,37 | 4,39 |
| 1,00 | 0,707 | 6,88 | 2,46 | 5,58 | 3,05 | 2,68 | 2,47 | 2,35 | 2,33 |
| 1,25 | 0,884 | 3,55 | 1,62 | 3,35 | 2,06 | 1,85 | 1,72 | 1,64 | 1,62 |
| 1,50 | 1,061 | 2,16 | 1,29 | 2,35 | 1,59 | 1,45 | 1,37 | 1,32 | 1,3 |

* $LC=10,597$

Tabela 26 – Valores de NMA e NMA_{SS} para os gráficos T^2 , $BIDU$ e $SyBIDU$
 $(\alpha_1=0; NMA_0=200; \bar{n}=4; n_1=3; n_2=16)$

| λ | $\delta_x = \delta_y$ | T^{2*} | $SyBIDU$ | | | | | | |
|-----------|-----------------------|----------|--------------|------------|-------|----------|-------|-------|-------|
| | | | $BIDU$ | | | $SyBIDU$ | | | |
| | | | $\alpha_1=0$ | $L=2^{**}$ | 5 | 10 | 20 | 50 | 100 |
| 0,25 | 0,177 | 115,55 | 53,93 | 110,42 | 78,43 | 64,81 | 56,61 | 51,00 | 49,29 |
| 0,50 | 0,354 | 41,92 | 12,28 | 38,51 | 22,59 | 17,04 | 14,12 | 12,28 | 11,68 |
| 0,75 | 0,530 | 15,78 | 4,91 | 14,69 | 9,12 | 7,14 | 6,05 | 5,30 | 5,03 |
| 1,00 | 0,707 | 6,88 | 2,83 | 6,67 | 4,60 | 3,83 | 3,38 | 3,06 | 2,94 |
| 1,25 | 0,884 | 3,55 | 1,95 | 3,66 | 2,77 | 2,42 | 2,20 | 2,05 | 2,00 |
| 1,50 | 1,061 | 2,16 | 1,49 | 2,41 | 1,94 | 1,75 | 1,63 | 1,55 | 1,52 |

* $LC=10,597$

5.6 COMPARAÇÃO DOS DESEMPENHOS DOS GRÁFICOS $BIDU$ E $MVSSVSI$

Nas Tabelas de 27 até 32 estão os valores dos parâmetros de entrada para o gráfico $MVSSVSI$ e $BIDU$ e nas Tabelas de 33 até 38 os valores do TES para o gráfico bivariado tradicional (gráfico T^2), para o gráfico $BIDU$ e para o gráfico $MVSSVSI$. Destas tabelas verifica-se que o gráfico $MVSSVSI$ tem, para quaisquer valores de λ , (b, a) e tamanhos de amostras, um desempenho superior ao do gráfico T^2 . Por sua vez, o gráfico $BIDU$ proposto neste trabalho tem desempenho superior aos dos gráficos T^2 e $MVSSVSI$. Por exemplo, da Tabela 33, para $\lambda=0,50$, o TES para o gráfico

$BIDU$ é igual a 20,63 e para o gráfico T^2 é igual a 76,87. Considerando o mesmo valor de λ tem-se para o gráfico $MVSSVSI$ um TES igual a 34,59.

Tabela 27 - Parâmetros dos gráficos $BIDU$ e $MVSSVSI$ ($\bar{n}=2$; $\alpha_1=0$; $b=0,1$)

| $MVSSVSI$ | | | | | $BIDU$ | | | | |
|-----------|-------|-----|-------|-------|--------|-------|--------|--------|-----|
| N_1 | n_2 | b | a | w | Rmax | LA | LC_1 | LC_2 | m |
| 1 | 21 | 0,1 | 1,047 | 5,810 | 75 | 6,074 | 30 | 5,129 | 400 |
| 1 | 8 | 0,1 | 1,159 | 3,738 | 75 | 4,159 | 30 | 7,716 | 400 |
| 1 | 3 | 0,1 | 2,349 | 1,015 | 75 | 2,199 | 30 | 9,914 | 400 |
| 1 | 3 | 0,1 | 2,349 | 1,015 | 75 | 2,199 | 30 | 9,914 | 400 |

Tabela 28 - Parâmetros dos gráficos $BIDU$ e $MVSSVSI$ ($\bar{n}=3$; $\alpha_1=0$; $b=0,1$)

| $MVSSVSI$ | | | | | $BIDU$ | | | | |
|-----------|-------|-----|-------|-------|--------|-------|--------|--------|-----|
| N_1 | n_2 | b | a | w | Rmax | LA | LC_1 | LC_2 | m |
| 1 | 41 | 0,1 | 1,047 | 5,810 | 75 | 6,032 | 30 | 4,885 | 400 |
| 1 | 7 | 0,1 | 1,485 | 2,081 | 75 | 2,504 | 30 | 9,122 | 400 |
| 2 | 4 | 0,1 | 2,350 | 1,015 | 74 | 2,773 | 30 | 9,976 | 400 |
| 2 | 4 | 0,1 | 2,350 | 1,015 | 74 | 2,733 | 30 | 9,976 | 400 |

Tabela 29 - Parâmetros dos gráficos $BIDU$ e $MVSSVSI$ ($\bar{n}=4$; $\alpha_1=0$; $b=0,1$)

| $MVSSVSI$ | | | | | $BIDU$ | | | | |
|-----------|-------|-----|-------|-------|--------|-------|--------|--------|-----|
| n_1 | n_2 | b | a | w | Rmax | LA | LC_1 | LC_2 | m |
| 1 | 31 | 0,1 | 1,100 | 4,517 | 75 | 4,666 | 30 | 6,345 | 400 |
| 2 | 6 | 0,1 | 2,100 | 1,188 | 72 | 2,199 | 30 | 9,915 | 400 |
| 3 | 5 | 0,1 | 2,349 | 1,015 | 74 | 3,219 | 30 | 9,952 | 400 |
| 3 | 5 | 0,1 | 2,349 | 1,015 | 74 | 3,219 | 30 | 9,952 | 400 |

Tabela 30 - Parâmetros dos gráficos $BIDU$ e $MVSSVSI$ ($\bar{n}=2$; $\alpha_1=0$; $b=0,2$)

| $MVSSVSI$ | | | | | $BIDU$ | | | | |
|-----------|-------|-----|-------|-------|--------|-------|--------|--------|-----|
| n_1 | n_2 | b | a | w | Rmax | LA | LC_1 | LC_2 | m |
| 1 | 21 | 0,2 | 1,042 | 5,810 | 75 | 6,074 | 30 | 5,129 | 400 |
| 1 | 8 | 0,2 | 1,141 | 3,738 | 75 | 4,159 | 30 | 7,716 | 400 |
| 1 | 4 | 0,2 | 1,533 | 1,818 | 74 | 2,773 | 30 | 9,394 | 400 |
| 1 | 3 | 0,2 | 2,199 | 1,015 | 75 | 2,199 | 30 | 9,914 | 400 |

Tabela 31 - Parâmetros dos gráficos *BIDU* e *MVSSVSI* ($\bar{n}=3$; $\alpha_1=0$; $b=0,2$)

| <i>MVSSVSI</i> | | | | | <i>BIDU</i> | | | | |
|----------------|-------|-----|-------|-------|-------------|-------|--------|--------|-----|
| n_1 | n_2 | b | a | w | Rmax | LA | LC_1 | LC_2 | m |
| 1 | 41 | 0,2 | 1,042 | 5,810 | 75 | 6,032 | 30 | 4,885 | 400 |
| 1 | 8 | 0,2 | 1,343 | 2,385 | 74 | 2,773 | 30 | 8,826 | 400 |
| 2 | 5 | 0,2 | 1,533 | 1,818 | 74 | 3,219 | 30 | 9,587 | 400 |
| 2 | 4 | 0,2 | 2,199 | 1,015 | 74 | 2,733 | 30 | 9,976 | 400 |

Tabela 32 - Parâmetros dos gráficos *BIDU* e *MVSSVSI* ($\bar{n}=4$; $\alpha_1=0$; $b=0,2$)

| <i>MVSSVSI</i> | | | | | <i>BIDU</i> | | | | |
|----------------|-------|-----|-------|-------|-------------|-------|--------|--------|-----|
| n_1 | n_2 | b | a | w | Rmax | LA | LC_1 | LC_2 | m |
| 1 | 31 | 0,2 | 1,089 | 4,517 | 75 | 4,666 | 30 | 6,345 | 400 |
| 2 | 9 | 0,2 | 1,343 | 2,385 | 71,5 | 3,007 | 30 | 9,915 | 400 |
| 3 | 5 | 0,2 | 2,199 | 1,015 | 74 | 3,219 | 30 | 9,952 | 400 |
| 3 | 5 | 0,2 | 2,199 | 1,015 | 74 | 3,219 | 30 | 9,952 | 400 |

Tabela 33 – Valores de *TES* para os gráficos *BIDU* e *MVSSVSI* ($\bar{n}=2$; $\alpha_1=0$; $b=0,1$)

| λ | $\delta_x = \delta_y$ | n_1 | n_2 | b | a | T^{2*} | <i>BIDU</i> | |
|-----------|-----------------------|-------|-------|-----|-------|----------|--------------|----------------|
| | | | | | | | $\alpha_1=0$ | <i>MVSSVSI</i> |
| 0,50 | 0,354 | 1 | 21 | 0,1 | 1,047 | 76,87 | 20,63 | 34,59 |
| 1,00 | 0,707 | 1 | 8 | 0,1 | 1,159 | 18,49 | 4,56 | 4,76 |
| 1,50 | 1,061 | 1 | 3 | 0,1 | 2,349 | 5,76 | 2,02 | 1,67 |
| 2,00 | 1,414 | 1 | 3 | 0,1 | 2,349 | 2,51 | 0,92 | 1,18 |

* $LC=10,597$ Tabela 34 – Valores de *TES* para os gráficos *BIDU* e *MVSSVSI* ($\bar{n}=3$; $\alpha_1=0$; $b=0,1$)

| λ | $\delta_x = \delta_y$ | n_1 | n_2 | b | a | T^{2*} | <i>BIDU</i> | |
|-----------|-----------------------|-------|-------|-----|-------|----------|--------------|----------------|
| | | | | | | | $\alpha_1=0$ | <i>MVSSVSI</i> |
| 0,50 | 0,354 | 1 | 41 | 0,1 | 1,047 | 55,33 | 15,55 | 17,04 |
| 1,00 | 0,707 | 1 | 7 | 0,1 | 1,485 | 10,51 | 3,27 | 2,75 |
| 1,50 | 1,061 | 2 | 4 | 0,1 | 2,350 | 3,18 | 1,07 | 1,26 |
| 2,00 | 1,414 | 2 | 4 | 0,1 | 2,350 | 1,56 | 0,61 | 1,06 |

* $LC=10,597$ Tabela 35 – Valores de *TES* para os gráficos *BIDU* e *MVSSVSI* ($\bar{n}=4$; $\alpha_1=0$; $b=0,1$)

| λ | $\delta_x = \delta_y$ | n_1 | n_2 | b | a | T^{2*} | <i>BIDU</i> | |
|-----------|-----------------------|-------|-------|-----|-------|----------|--------------|----------------|
| | | | | | | | $\alpha_1=0$ | <i>MVSSVSI</i> |
| 0,50 | 0,354 | 1 | 31 | 0,1 | 1,100 | 41,92 | 10,21 | 11,38 |
| 1,00 | 0,707 | 2 | 6 | 0,1 | 2,100 | 6,88 | 2,42 | 2,01 |
| 1,50 | 1,061 | 3 | 5 | 0,1 | 2,349 | 2,16 | 0,76 | 1,13 |
| 2,00 | 1,414 | 3 | 5 | 0,1 | 2,349 | 1,23 | 0,53 | 1,02 |

* $LC=10,597$

Tabela 36 – Valores de *TES* para os gráficos *BIDU* e *MVSSVSI* ($\bar{n}=2$; $\alpha_1=0$; $b=0,2$)

| λ | $\delta_x = \delta_y$ | n_1 | n_2 | b | a | T^{2*} | <i>BIDU</i> | |
|-----------|-----------------------|-------|-------|-----|-------|----------|--------------|----------------|
| | | | | | | | $\alpha_1=0$ | <i>MVSSVSI</i> |
| 0,50 | 0,354 | 1 | 21 | 0,2 | 1,042 | 76,87 | 20,63 | 34,75 |
| 1,00 | 0,707 | 1 | 8 | 0,2 | 1,141 | 18,49 | 4,56 | 4,92 |
| 1,50 | 1,061 | 1 | 4 | 0,2 | 1,533 | 5,76 | 1,76 | 1,83 |
| 2,00 | 1,414 | 1 | 3 | 0,2 | 2,199 | 2,51 | 0,92 | 1,26 |

* $LC=10,597$

Tabela 37 – Valores de *TES* para os gráficos *BIDU* e *MVSSVSI* ($\bar{n}=3$; $\alpha_1=0$; $b=0,2$)

| λ | $\delta_x = \delta_y$ | n_1 | n_2 | b | a | T^{2*} | <i>BIDU</i> | |
|-----------|-----------------------|-------|-------|-----|-------|----------|--------------|----------------|
| | | | | | | | $\alpha_1=0$ | <i>MVSSVSI</i> |
| 0,50 | 0,354 | 1 | 41 | 0,2 | 1,042 | 55,33 | 15,55 | 17,12 |
| 1,00 | 0,707 | 1 | 8 | 0,2 | 1,343 | 10,51 | 3,11 | 2,93 |
| 1,50 | 1,061 | 2 | 5 | 0,2 | 1,533 | 3,18 | 1,02 | 1,39 |
| 2,00 | 1,414 | 2 | 4 | 0,2 | 2,199 | 1,56 | 0,61 | 1,10 |

* $LC=10,597$

Tabela 38 – Valores de *TES* para os gráficos *BIDU* e *MVSSVSI* ($\bar{n}=4$; $\alpha_1=0$; $b=0,2$)

| λ | $\delta_x = \delta_y$ | n_1 | n_2 | b | a | T^{2*} | <i>BIDU</i> | |
|-----------|-----------------------|-------|-------|-----|-------|----------|--------------|----------------|
| | | | | | | | $\alpha_1=0$ | <i>MVSSVSI</i> |
| 0,50 | 0,354 | 1 | 31 | 0,2 | 1,089 | 41,92 | 10,21 | 11,51 |
| 1,00 | 0,707 | 2 | 9 | 0,2 | 1,343 | 6,88 | 2,00 | 2,18 |
| 1,50 | 1,061 | 3 | 5 | 0,2 | 2,199 | 2,16 | 0,76 | 1,21 |
| 2,00 | 1,414 | 3 | 5 | 0,2 | 2,199 | 1,23 | 0,53 | 1,05 |

* $LC=10,597$

5.7 ESTUDO DO EFEITO DA CORRELAÇÃO NO DESEMPENHO DO GRÁFICO *BIDU*

Na Tabela 39 estão os valores dos parâmetros de entrada do programa *FORTTRAN* (Apêndice D), na Tabela 40 os *NMAs* para o gráfico T^2 e nas Tabelas 41 e 42 os *NMAs* para o gráfico *BIDU*. Ao se comparar os valores da Tabela 40 com os das Tabelas 41 e 42 verifica-se que, em geral, o gráfico *BIDU* para o caso em que as variáveis de qualidade são correlacionadas tem desempenho superior ao do gráfico T^2 . Quanto maior a perturbação e mais positiva a correlação, menor a diferença entre os desempenhos dos gráficos sob comparação.

A escolha de n_2 afeta a velocidade com que o gráfico *BIDU* sinaliza desajustes do processo. Quando n_2 aumenta, em geral, o gráfico se torna mais ágil na detecção de

alterações. Por exemplo, na Tabela 41 em que $n_2=8$, para $\rho=0,50$ e $(\delta'_x, \delta'_y)=(0,25;0)$ o NMA é igual a 61,57 e na Tabela 42, em que $n_2=16$, o NMA é igual a 41,66.

Ainda das Tabelas 40, 41 e 42, para valores de δ'_x e δ'_y com mesma magnitude e mesmo sinal, o gráfico se torna lento à medida que ρ se torna mais positivo. Por exemplo, na Tabela 41, para $(\delta'_x, \delta'_y) = (0,25;0,25)$ e $\rho=-0,95$, $\rho=0$ e $\rho=0,95$, os valores de NMA são iguais a 1,44, 42,41 e 75,39, respectivamente.

Para valores de δ'_x e δ'_y com mesma magnitude e sinais contrários, o gráfico se torna mais ágil à medida que ρ se torna mais positivo. Por exemplo, na Tabela 41, para $(\delta'_x, \delta'_y) = (0,25;-0,25)$ e $\rho=-0,95$, $\rho=0$ e $\rho=0,95$ os valores de NMA são iguais a 75,39, 42,41 e 1,44, respectivamente.

Quando só há perturbação em uma das variáveis do processo o gráfico se torna lento à medida que valores negativos de ρ se aproximam de zero; o gráfico volta a ser ágil à medida que o valor de ρ aumenta de zero para 0,95. Por exemplo, na Tabela 41, para $(\delta'_x, \delta'_y) = (0,25;0)$ e $\rho=-0,95$, $\rho=0$ e $\rho=0,95$ os valores de NMA são iguais a 5,38, 76,87 e 5,38, respectivamente.

Tabela 39 - Parâmetros de entrada: gráfico $BIDU$ ($\bar{n}=4$; $\alpha_1=0$)

| n_1 | n_2 | Rmax | LA | LC ₁ | LC ₂ | m |
|-------|-------|------|-------|-----------------|-----------------|-----|
| 1 | 8 | 79 | 1,962 | 30 | 9,412 | 400 |
| 1 | 16 | 74 | 3,353 | 30 | 7,892 | 400 |

Tabela 40 – Valores de NMA para o gráfico T^{2*} ($NMA_0=200$; $\bar{n}=4$)

| ρ | (δ'_x, δ'_y) | | | | | | | | |
|--------|--------------------------|-------------|--------------|---------|-----------|------------|-------|-------|--------|
| | (0,25;0) | (0,25;0,25) | (0,25;-0,25) | (0,5;0) | (0,5;0,5) | (0,5;-0,5) | (1;0) | (1;1) | (1;-1) |
| -0,95 | 13,16 | 1,90 | 114,19 | 1,85 | 1,00 | 40,84 | 1,00 | 1,00 | 6,62 |
| -0,75 | 69,53 | 18,49 | 108,30 | 15,44 | 2,51 | 36,39 | 2,11 | 1,01 | 5,63 |
| -0,50 | 99,73 | 41,92 | 99,73 | 30,60 | 6,88 | 30,60 | 4,47 | 1,23 | 4,47 |
| -0,25 | 112,07 | 61,33 | 89,43 | 39,19 | 12,45 | 24,60 | 6,24 | 1,77 | 3,43 |
| 0 | 115,55 | 76,87 | 76,87 | 41,92 | 18,49 | 18,49 | 6,88 | 2,51 | 2,51 |
| 0,25 | 112,07 | 89,43 | 61,33 | 39,19 | 24,60 | 12,45 | 6,24 | 3,43 | 1,77 |
| 0,50 | 99,73 | 99,73 | 41,92 | 30,60 | 30,60 | 6,88 | 4,47 | 4,47 | 1,23 |
| 0,75 | 69,53 | 108,30 | 18,49 | 15,44 | 36,39 | 2,51 | 2,11 | 5,63 | 1,01 |
| 0,95 | 13,16 | 114,19 | 1,90 | 1,85 | 40,84 | 1,00 | 1,00 | 6,62 | 1,00 |

*LC=10,597

Tabela 41 – Valores de *NMA* para o gráfico *BIDU* $(\alpha_1=0; NMA_0=200; \bar{n}=4; n_1=1; n_2=8)$

| (δ'_x, δ'_y) | | | | | | | | | |
|--------------------------|----------|-------------|--------------|---------|-----------|------------|-------|-------|--------|
| ρ | (0,25;0) | (0,25;0,25) | (0,25;-0,25) | (0,5;0) | (0,5;0,5) | (0,5;-0,5) | (1;0) | (1;1) | (1;-1) |
| -0,95 | 5,38 | 1,44 | 75,39 | 1,43 | 1,02 | 18,55 | 1,02 | 1,00 | 2,95 |
| -0,75 | 36,98 | 7,54 | 69,66 | 6,29 | 1,63 | 16,16 | 1,51 | 1,05 | 2,61 |
| -0,50 | 61,57 | 19,19 | 61,73 | 13,18 | 3,04 | 13,16 | 2,23 | 1,22 | 2,23 |
| -0,25 | 73,45 | 31,19 | 52,39 | 17,69 | 5,08 | 10,26 | 2,82 | 1,40 | 1,90 |
| 0 | 76,87 | 42,41 | 42,41 | 19,20 | 7,54 | 7,54 | 3,04 | 1,63 | 1,63 |
| 0,25 | 73,45 | 52,39 | 31,19 | 17,69 | 10,26 | 5,08 | 2,82 | 1,90 | 1,40 |
| 0,50 | 61,57 | 61,73 | 19,19 | 13,18 | 13,16 | 3,04 | 2,23 | 2,23 | 1,22 |
| 0,75 | 36,98 | 69,66 | 7,54 | 6,29 | 16,16 | 1,63 | 1,51 | 2,61 | 1,05 |
| 0,95 | 5,38 | 75,39 | 1,44 | 1,43 | 18,55 | 1,02 | 1,02 | 2,95 | 1,00 |

* $LC=10,597$ Tabela 42 – Valores de *NMA* para o gráfico *BIDU* $(\alpha_1=0; NMA_0=200; \bar{n}=4; n_1=1; n_2=16)$

| (δ'_x, δ'_y) | | | | | | | | | |
|--------------------------|----------|-------------|--------------|---------|-----------|------------|-------|-------|--------|
| ρ | (0,25;0) | (0,25;0,25) | (0,25;-0,25) | (0,5;0) | (0,5;0,5) | (0,5;-0,5) | (1;0) | (1;1) | (1;-1) |
| -0,95 | 4,36 | 1,90 | 52,96 | 1,88 | 1,00 | 11,80 | 1,00 | 1,00 | 3,07 |
| -0,75 | 23,54 | 5,53 | 48,18 | 4,84 | 2,13 | 10,40 | 1,99 | 1,00 | 2,88 |
| -0,50 | 41,65 | 12,14 | 41,66 | 8,65 | 3,12 | 8,66 | 2,65 | 1,49 | 2,65 |
| -0,25 | 51,26 | 19,70 | 34,56 | 11,25 | 4,21 | 7,02 | 3,01 | 1,84 | 2,41 |
| 0 | 54,31 | 27,39 | 27,39 | 12,17 | 5,53 | 5,53 | 3,11 | 2,13 | 2,13 |
| 0,25 | 51,26 | 34,56 | 19,70 | 11,25 | 7,02 | 4,21 | 3,01 | 2,41 | 1,84 |
| 0,50 | 41,65 | 41,66 | 12,14 | 8,65 | 8,66 | 3,12 | 2,65 | 2,65 | 1,49 |
| 0,75 | 23,54 | 48,18 | 5,53 | 4,84 | 10,40 | 2,13 | 1,99 | 2,88 | 1,00 |
| 0,95 | 4,36 | 52,96 | 1,90 | 1,88 | 11,80 | 1,00 | 1,00 | 3,07 | 1,00 |

* $LC=10,597$

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

Considerou-se nesta dissertação os gráficos de controle bivariados com amostragem dupla com ou sem regra especial de decisão. Considerou-se também a amostragem em dois estágios, que é um caso particular da amostragem dupla, onde o tamanho da amostra no primeiro estágio, n_1 , é igual a 1 e o limite de controle do primeiro estágio, LC_1 , é igual a ∞ . A vantagem deste esquema é que, com frequência, a amostragem é interrompida no primeiro estágio. Dessa forma, em grande parte do tempo, o usuário lida com a informação direta dos parâmetros sob monitoramento, ou seja, com os valores de $(x; y)$. Dispositivos do tipo “calibres” permitem que, no primeiro estágio da amostragem, a inspeção seja por atributos.

A regra especial de decisão também é muito vantajosa para o usuário, que pode esperar o surgimento de um segundo ponto na região de ação do gráfico e, além disso, só tomar a decisão drástica de parar o processo se este ponto não estiver distante do primeiro.

Para tanto, inicialmente, fez-se uma revisão acerca dos gráficos de controle univariados e multivariados, abordando as pesquisas mais recentes sobre o assunto. Foram estudadas as propriedades dos gráficos de controle e as principais medidas de desempenho utilizadas, o número médio de amostras até o sinal (*NMA*) e o tempo esperado até o sinal (*TES*).

Foram detalhados os gráficos de controle com amostragem dupla e regra especial de decisão, foco deste trabalho, bem como os gráficos concorrentes.

Todos os cálculos necessários ao completo desenvolvimento das expressões para obtenção das propriedades do gráfico de controle bivariado com amostragem dupla e regra especial de decisão foram mostrados. Fez-se uso de Teoremas e Corolários da Estatística, o que possibilitou a obtenção de expressões fechadas para o *NMA* e se constituiu na principal contribuição deste trabalho e é inédito.

O desempenho do esquema proposto foi comparado com o de outros esquemas ágeis na detecção de pequenas e moderadas alterações nos parâmetros do processo (*MVSS*, *MVSI* e *MVSSMVSI*). Uma variedade de casos foi analisada para diversos valores de \bar{n} , n_1 , n_2 , α_1 , λ e L , onde \bar{n} é o número médio de itens inspecionado por

amostragem; n_1 é o tamanho da amostra no primeiro estágio; n_2 é o tamanho da amostra no segundo estágio; α_1 é a probabilidade de alarme falso no primeiro estágio; λ é a magnitude da perturbação no processo e L é o número máximo de amostras entre amostras não-conformes para que se tenha um alarme nos gráficos *SyBIDU* e *SyBITWO*.

Os resultados obtidos mostraram que, em geral, o gráfico proposto tende a fornecer *NMAs* ou valores de *TES* menores do que os dos gráficos concorrentes. Um ponto que merece destaque é o fato de que a adoção de um limite de ação para o primeiro estágio da amostragem dupla, em geral, reduz o desempenho do gráfico de controle, além de aumentar a complexidade do dispositivo de monitoramento. Assim sendo, a amostragem dupla com $\alpha_1 = 0$, ou seja, $LC_1 = \infty$, se mostrou mais vantajosa do que a amostragem dupla com $\alpha_1 \neq 0$.

Os estudos foram estendidos para o caso em que as variáveis de qualidade são correlacionadas.

É importante destacar que a autora deste trabalho se dedicou a obtenção das propriedades dos Gráficos de Controle Bivariados com Amostragem Dupla e Regra Especial de Decisão por meio de desenvolvimentos teóricos, enquanto outros autores, como por exemplo Grigoryan (2003), fizeram uso apenas de técnicas de simulação.

É importante salientar que a autora desta dissertação iniciou os estudos sobre gráficos de controle com amostragem em dois estágios em 2003, em seu projeto de Iniciação Científica. Tal fato foi decisivo para que esta dissertação pudesse ser feita em um tempo curto, embora esta tenha sido bastante complexa, em especial, do ponto de vista do desenvolvimento matemático. Contribuiu também, é claro, o fato da autora ter se dedicado em tempo integral ao presente projeto, graças a bolsa da CAPES que lhe foi concedida.

Até o momento a autora deste trabalho já publicou os seguintes artigos: Costa e Machado (2003, 2003a), onde foram estudadas as propriedades dos gráficos de controle por meio de simulações; Machado e Costa (2005, 2005a), onde foram citados os gráficos de Shewhart baseados na estatística de qui-quadrado e com regra especial de decisão e Machado e Costa (2006, 2006a), onde foram abordados os gráficos de controle com amostragem dupla para o monitoramento de processos bivariados. Além

disso, seu trabalho de conclusão de curso tratou do monitoramento de um processo real em que os dados eram autocorrelacionados (MACHADO, 2005).

Uma possível extensão deste trabalho poderia levar em consideração processos em que k variáveis de qualidade são monitoradas, sendo $k > 2$. Poderia se pensar também em ampliar os estudos para o caso em que os parâmetros de processo são estimados, portanto considerados desconhecidos. Além disso, poderia se estender para o caso multivariado, o trabalho realizado por Costa e Rahim (2004) em que estudaram o gráfico de controle com amostragem dupla para o caso univariado e, no primeiro estágio de amostragem, adotaram a inspeção por atributos. Vale ressaltar que a inspeção por atributos torna o monitoramento mais simples. Estas propostas fazem parte do projeto de pesquisa de doutorado da autora.

Finalmente, destaca-se que ainda há na literatura um espaço em aberto quando o assunto é a autocorrelação em processos multivariados. Um trabalho recente sobre o assunto é o de Kalgonda e Kulkarni (2004). Eles apresentaram um método para se trabalhar com a autocorrelação em processos multivariados onde o tamanho da amostra n é igual a 1. Sugerem, como futura pesquisa, que o método seja estendido para o caso em que $n > 1$.

REFERÊNCIAS

- ALBIN, S. L.; KANG, L.; SHEHA, G. An X and EWMA Chart for Individual Observations. **Journal of Quality Technology**, v. 29, p. 41-48, 1997.
- APARISI, F. Hotelling's T^2 Control Chart with Adaptive Sample Sizes. **International Journal of Production Research**, v. 34, p. 2853-2862, 1996.
- APARISI, F., HARO, C.L. Hotelling's T^2 Control Chart with Variable Sampling Intervals. **International Journal of Production Research**. v. 39, p. 3127-3140, 2001.
- APARISI, F.; HARO, C. L. A Comparison of T^2 Control Charts with Variable Sampling Schemes as Opposed to MEWMA Chart. **International Journal of Production Research**, v. 41, p. 2169-2182, 2003.
- BARBOSA, A.S.; MACHADO, M. A. G.; COSTA, A.F.B. Estudo das Propriedades dos Gráficos de Shewhart com Regra Especial de Decisão Via Simulações. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 37, 2005, Gramado. **CD ROM**. Rio de Janeiro: SOBRAPO, 2005, 6 p.
- BERNARD, S. A. **A Multivariate EWMA Approach to Monitor Process Dispersion**. 2001. 125 f. Thesis (PhD) - Department of Decision and Information Technology of the University of Maryland, 2001.
- CALZADA, M.E.; SCARIANO, S.M. The Robustness of the Synthetic Control Chart to Non-normality. **Communications in Statistics: Simulation and Computation**, v. 30, p. 311-326, 2001.
- CHAMP, C. W.; JONES-FARMER, L. A.; RIGDON, S. E. Properties of the T^2 Control Chart when Parameters are Estimated. **Technometrics**, v. 47, p. 437-445, 2005.
- CHEN, G.; CHENG, S. W.; XIE, H. Monitoring Process Mean and Variability with One EWMA Chart. **Journal of Quality Technology**, v. 33, p. 223-233, 2001.
- CHEN, G.; CHENG, S. W.; XIE, H. A New EWMA control Chart for Monitoring Both Location and Dispersion. **Quality Technology and Quantitative Management**, v.1, p.217-231, 2004.
- CHOU, C.Y.; CHEN, C.H.; CHEN, C.H. Economic Design of Variable Sampling Intervals T^2 Control Charts Using Genetic Algorithms. **Expert Systems with Applications**, v. 30, n. 2, p. 233-242, 2006.

COSTA, A.F.B. Joint Economic Design of \bar{X} and R Control Charts for Processes Subject to Two Independent Assignable Causes. **IIE Transactions**, v. 25, p. 27-33, 1993.

COSTA, A.F.B. \bar{X} Control Charts with Variable Sample Size. **Journal of Quality Technology**, v. 26, p. 155-163, 1994.

COSTA, A.F.B. \bar{X} Control Charts with Variable Sample Sizes and Sampling Intervals. **Journal of Quality Technology**, v. 29, p. 197-204, 1997.

COSTA, A. F. B. Joint \bar{X} and R Charts with Variable Parameters. **IIE Transactions**, v. 30, p. 505-514, 1998.

COSTA, A. F. B. Joint \bar{X} and R Charts with Variable Sample Sizes and Sampling Intervals. **Journal of Quality Technology**, v. 31, p. 387-397, 1999.

COSTA, A. F. B. \bar{X} Charts with Variable Parameters. **Journal of Quality Technology**, v. 31, p. 408-416, 1999a.

COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A G. M. Estudo das propriedades dos gráficos de controle por meio de simulações. In: JORNADA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E DE PÓS-GRADUAÇÃO, 5, 2003, Guaratinguetá. **CD ROM**. Guaratinguetá: Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2003, 5p.

COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A G. M. Estudo das propriedades dos gráficos de controle por meio de simulações. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA, 15, 2003a, Marília. **CD ROM**. Marília: Universidade Estadual Paulista, 2003a, 1p.

COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. Synthetic Control Chart with Two-Stage Sampling for Monitoring Bivariate Processes. **Pesquisa Operacional**, (submetido), 2006.

COSTA, A.F.B.; De MAGALHÃES, M.S. O Uso da Estatística de Qui-quadrado no Monitoramento de Processos. **Gestão&Produção**, v. 12, p. 271-277, 2005.

COSTA, A.F.B.; De MAGALHÃES, M.S. An Adaptative Chart for Monitoring the Process Mean and Variance, **Quality and Reliability Engineering International**, (forthcoming), 2006.

COSTA, A.F.B.; RAHIM, M. A. Economic Design of \bar{X} and R Charts Under Weibull Shock Models. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 16, p. 143-156, 2000.

COSTA, A.F.B.; RAHIM, M. A. Economic Design of Charts with Variable Parameters: the Markov Chain Approach. **Journal of Applied Statistics**, v. 28, p. 875-885, 2001.

- COSTA, A.F.B.; RAHIM, M. A. Joint \bar{X} and R Charts with Two Stage Samplings. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 20, p. 699-708, 2004.
- COSTA, A.F.B.; RAHIM, M. A. Monitoring Process Mean and Variability with One Non-Central Qui-Square Chart. **Journal of Applied Statistics**, v. 31, p. 1171-1183, 2004a.
- COSTA, A.F.B.; RAHIM, M. A. The Non-central Chi-square Chart with Two Stage Samplings. **European Journal of Operation Research**, v. 171, p. 64-73, 2006.
- COSTA, A.F.B.; RAHIM, M. A. A Synthetic Control Chart for Monitoring the Process Mean and Variance. **Journal of Quality In Maintenance Engineering**, v. 12, p. 81-88, 2006a.
- COSTA, A. F. B.; RAHIM, M. A. A Single EWMA Chart for Monitoring Process Mean and Process Variance. **Quality Technology and Quantitative Management**, v. 3, p. 295-305, 2006b.
- COSTA, A.F.B.; EPPRECHT E.K.; CARPINETTI, L.C.R. **Controle Estatístico de Qualidade**. 2. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2005. 334 p.
- CROSIER, R.B. Multivariate generalizations of cumulative sum quality control schemes. **Technometrics**, v. 30; n. 3, p.291-303, 1988.
- DAUDIN, J. J. Double Sampling \bar{X} Charts. **Journal of Quality Technology**, v. 24, p. 78-87, 1992.
- DAVIS, R.B.; WOODALL, W.H. Evaluating and Improving the Synthetic Control Chart. **Journal of Quality Technology**, v. 34, p. 200-208, 2002.
- DE MAGALHÃES, M. S.; EPPRECHT, E. K.; COSTA, A. F. B. Economic Design of a VP \bar{X} Chart. **International Journal of Production Economics**, v. 74, p. 191-200, 2001.
- DE MAGALHÃES, M. S.; COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K. Constrained Optimization Model for the Design of an Adaptive \bar{X} Chart. **International Journal of Production Research**, v. 40, p. 3199-3218, 2002.
- DE MAGALHÃES, M. S.; MOURA NETO, F. D. Joint Economic Model for Totally Adaptive \bar{X} and R Charts. **European Journal of Operational Research**, v. 161, p.148-161, 2005.
- DE MAGALHÃES, M. S.; COSTA, A. F. B.; MOURA NETO, F. D. Adaptive Control Charts: A Markovian Approach for Processes Subject to Independent Out-of-control Disturbances. **International Journal of Production Economics**, v. 99, p. 236-246, 2006.

- DIEHL, A. A.; TATIM, D. C. **Pesquisa em Ciências Sociais Aplicadas: Métodos e Técnicas**. 1. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2004. 168 p.
- DOMANGUE, R.; PATCH, S. C. Some Omnibus Exponentially Weighted Moving Average Statistical Process Monitoring Schemes. **Technometrics**, v. 33, p. 299-313, 1991.
- EPPRECHT, E. K.; COSTA, A. F. B. Adaptive Sample Size Control Charts for Attributes. **Quality Engineering**, v. 13, p. 465-473, 2001.
- EPPRECHT, E. K.; COSTA, A. F. B.; MENDES, F. C. T. Adaptive Control Charts for Attributes. **IIE Transactions**, v. 35, p. 567-582, 2003.
- EPPRECHT, E. K.; COSTA, A. F. B.; MENDES, F. C. T. Gráficos de Controle por Atributos e Seu Projeto na Prática. **Pesquisa Operacional**, v. 25, p. 113-134, 2005.
- GAN, F. F. Joint Monitoring of Process Mean and Variance Using Exponentially Weighted Moving Average Control Charts. **Technometrics**, v. 37, p. 446-453, 1995.
- GRIGORYAN, A. **Statistical Design of multiple sampling charts**. 2003. 174f. Thesis (PhD in Industrial Engineering and Operations Research) – Graduate College of the University of Illinois, Chicago, 2003.
- GRIGORYAN, A.; HE, D. Multivariate Double Sampling $|S|$ Charts for controlling process variability. **International Journal of Production Research**, v. 43, p. 715-730, 2005.
- HANEDA, B. K.; MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B. **Gráfico de controle bivariado com tamanho de amostra variado**. 2006. 21f. Relatório Técnico (Estágio no Departamento de Engenharia de Produção) – Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2006.
- HE, D.; GRIGORYAN, A. Multivariate Multiple Sampling Charts. **IIE Transactions**, v.37, p. 509-521, 2005.
- HOTELLING, H. Multivariate Quality Control, Illustrated by the Air Testing of Sample Bombsights. **Techniques of Statistical Analysis**, p. 111-184, New York, McGraw Hill, 1947.
- KALGONDA, A. A.; KULKARNI, S. R. Multivariate Quality Control Chart for Autocorrelated Processes. **Journal of Applied Statistics**, v. 31, p. 317-327, 2004.
- KONRATH, A. C. **Decomposição da Estatística do Gráfico de Controle Multivariado T^2 de Hotelling por Meio de um Algoritmo Computacional**. 2002. 90f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção e Sistemas) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.

LOWRY, C. A.; MONTGOMERY, D. C. A Review of Multivariate Control Charts. **IIE Transactions**, v. 27, p. 800-810, 1995.

LOWRY, C.A. et al. A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart. **Technometrics**, v. 32; n. 1, p. 46-53, 1992.

LU, C. W.; REYNOLDS, M. R. Control Charts for Monitoring the Mean and Variance of Autocorrelated Processes. **Journal of Quality Technology**, v.31, p. 259-274, 1999.

MACHADO, M. A. G. **Considerações sobre a Utilização dos Gráficos de Shewhart em um Processo Produtivo de uma Empresa do Setor de Fabricação de Componentes Automotivos**. 2005. 48f. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia de Produção Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2005.

MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B. Synthetic Control Chart for Monitoring the Process Mean and Variance. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INDUSTRIAL ENGINEERING AND OPERATIONS MANAGEMENT , 11, ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 25, 2005, Porto Alegre. **Proceedings of the XI International Conference on Industrial Engineering and Operations Management**, Porto Alegre: ABEPRO, 2005, p. 17-23.

MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B. Gráficos de Shewhart Baseados na Estatística de Qui-quadrado e com Regra Especial de Decisão. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 37, 2005a, Gramado. **CD ROOM**. Rio de Janeiro: SOBRAPO, 2005a, 8 p.

MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B. Gráficos de controle com Amostragens Duplas para o Monitoramento de Processos Bivariados (aceito). In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 38, 2006, Goiânia.

MACHADO, M. A. G.; COSTA, A. F. B. Gráficos de controle com amostragens duplas para o monitoramento de processos bivariados (aceito). In: SINAPE - SIMPÓSIO NACIONAL DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA, 17, 2006a, Caxambu.

MASON, R. L.; YOUNG, J. C. **Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications**. 1st. ed. Philadelphia: ASA-SIAM, 2002, 263p.

MASON, R. L.; TRACY, N.D.; YOUNG, J. C. Decomposition of T^2 for Multivariate Control Chart Interpretation. **Journal of Quality Technology**, v. 27, p. 99-108, 1995.

MICHEL, R.; FOGLIATTO, F. S. Projeto Econômico de Cartas Adaptativas para Monitoramento de Processos. **Gestão&Produção**, v. 9, p. 17-31, 2002.

MICROSOFT FORTRAN POWER STATION 4.0. Professional Edition with Microsoft IMSL Mathematical and Statistical Libraries. **Microsoft Corporation**, 1995.

MINGOTI, S. A. **Análise de Dados Através de Métodos de Estatística Multivariada: Uma Abordagem Aplicada**. 1. ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2005. 297 p.

MONTGOMERY, D. C.; MASTRANGELO, C. M. Some Statistical Process Control Methods for Autocorrelated Data. **Journal of Quality Technology**, v. 23, p. 179-193, 1991.

MOREIRA, F.; ECHEVESTE, M. E. Uma abordagem de análise para o Controle Estatístico de Processo com dados autocorrelacionados. In: ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 24, 2004, Florianópolis. **CD ROM**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2004, 8p.

MOREIRA, F.; CATEN, C. S. Proposta de uma carta de controle estatístico de dados autocorrelacionados. In: ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 24, 2004, Florianópolis. **CD ROM**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2004, 8p.

PIGNATIELLO, J.; RUNGER, G. Comparisons of Multivariate CUSUM Charts. **Journal of Quality Technology**, v. 22, p.173-186, 1990.

PRABHU, S. S.; RUNGER, G. C.; KEATS, J. B. An Adaptive Sample Size \bar{X} Chart. **International Journal of Production Research**, v. 31, p. 2895-2909, 1993.

PRABHU, S. S.; MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. A Combined Adaptive Sample Size and Interval \bar{X} Control Chart, **Journal of Quality Technology**, v. 26, p. 164-176, 1994.

PRABHU, S.S.; RUNGER, G.C. Designing a Multivariate EWMA Control Chart. **Journal of Quality Technology**, v. 29, p. 8-15, 1997.

QIU, P.; HAWKINS, D. A Rank-based Multivariate CUSUM Procedure. **Technometrics**, v. 43, n. 2, p. 120-132, 2001.

RAHIM, M. A.; COSTA, A. F. B. Joint Economic Design of \bar{X} and R Charts Under Weibull Shock Models. **International Journal of Production Research**, v. 28, p. 2871-2889, 2000.

REYNOLDS, M. R.; STOUMBOS, Z.G. Monitoring the Process Mean and Variance Using Individual Observations and Variable Sampling Intervals. **Journal of Quality Technology**, v. 33, p. 181-205, 2001.

- REYNOLDS, M. R. et al. \bar{X} Charts with Variable Sampling Interval. **Technometrics**, v. 30, p. 181-192, 1988.
- REYNOLDS, M. R.; ARNOLD, J. C. Optimal one-side Shewhart control chart with variable sampling intervals. **Sequential Analysis**, v. 8, p. 51-77, 1989.
- RUNGER, G. C.; PIGNATIELLO, J. J. Adaptive Sampling for Process Control. **Journal of Quality Tecnology**, v. 23, p. 133-155, 1991.
- RUNGER, G. C.; MONTGOMERY, D. C. Adaptive Sampling Enhancements for Shewhart Control Charts. **IIE Transactions**, v. 25, p. 41-51, 1993.
- RUSSO, S.; CAMARGO, M. E Controle Estatístico de Processo: solução de um estudo de caso usando procedimentos estatísticos. In: ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E SISTEMAS, 24, 2004, Florianópolis. **CD ROM**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2004, 6p.
- SKINNER, K. R. **Multivariate Process Control for Discrete Data**. 2002. 117f. Thesis (PhD) - Arizona State University, 2002.
- TESTIK, M. C. **Univariate and Multivariate Statistical Process Control: A Generalized Likelihood Ratio Approach**. 2003. 135f. Tese (PhD) - Arizona State University, 2003.
- THOMAS, J. B. **Interpretation of Multivariate Control Chart Signals**. 2002. 128f. Thesis (PhD in the Program of Applied Statistics) – Graduate School of The University of Alabama, Tuscaloosa, 2002.
- WOODALL, W. H.; NCUBE, M.M. Multivariate CUSUM Quality Control Procedures. **Technometrics**, v. 27; n. 3, p. 285-292, 1985.
- WU, Z.; SPEDDING, T.A. A Synthetic Control Chart for Detecting Small Shifts in the Process Mean. **Journal of Quality Technology**, v. 32, p. 32-38, 2000.
- WU, Z.; SPEDDING, T.A. Implementing Synthetic Control Charts. **Journal of Quality Technology**, v. 32, p. 75-78, 2000a.
- WU, Z.; YEO, S.H. Implementing Synthetic Control Charts for Attributes. **Journal of Quality Technology**, v. 33, p. 112-114, 2001.
- WU, Z.; YEO, S.H.; SPEDDING, T.A. A Synthetic Control Chart for Detecting Fraction Nonconforming Increases. **Journal of Quality Technology**, v. 33, p. 104-111, 2001.

YEH, A. B.; LIN, D. K. J. A New Variables Control Chart for Simultaneously Monitoring Multivariate Process Mean and Variability. **International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering**, v. 9, p. 41-59, 2002.

APÊNDICE A – Prova do Teorema A.1

As propriedades dos gráficos de controle bivariados baseadas na estatística T^2 são facilmente obtidas, pois T^2 tem distribuição de Qui-Quadrado,

$$T^2(n, \mu) = \frac{n}{|\Sigma|} \left[\sigma_y^2 (\bar{x} - \mu_x)^2 + \sigma_x^2 (\bar{y} - \mu_y)^2 - 2\sigma_{xy} (\bar{y} - \mu_y)(\bar{x} - \mu_x) \right].$$

Para o caso proposto em que se adota a amostragem dupla foi preciso definir T^2 como

$$T^2 = g_1^2(n, \mu) + g_2^2(n, \mu) \quad (\text{A.1})$$

onde

$$g_1(n, \mu) = h_1(\bar{x}) \cos \varphi - h_2(\bar{y}) \sin \varphi, \quad (\text{A.2})$$

$$g_2(n, \mu) = -h_1(\bar{x}) \sin \varphi + h_2(\bar{y}) \cos \varphi, \quad (\text{A.3})$$

sendo $\sin 2\varphi = \sigma_{xy} / (\sigma_x \sigma_y)$, $h_1(\bar{x}) = \sqrt{n} \sigma_y (\bar{x} - \mu_x) / \sqrt{|\Sigma|}$, $h_2(\bar{y}) = \sqrt{n} \sigma_x (\bar{y} - \mu_y) / \sqrt{|\Sigma|}$, e $|\Sigma| = \det \Sigma = \sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2 > 0$.

O vetor aleatório bi-dimensional $g(n, \mu) = (g_1, g_2)$ tem distribuição normal com média zero e matriz de covariância unitária $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A vantagem de se trabalhar com as variáveis g_1 e g_2 é que elas não são correlacionadas, isto é, $\sigma_{g_1 g_2} = 0$.

Através da construção apresentada na Figura A.1 foi possível definir $g_1(n, \mu)$ e $g_2(n, \mu)$. Fez-se uso de uma estratégia que consistiu na rotação de eixos cartesianos de um determinado ângulo φ de forma a transformar as variáveis originais, consideradas correlacionadas, em variáveis independentes.

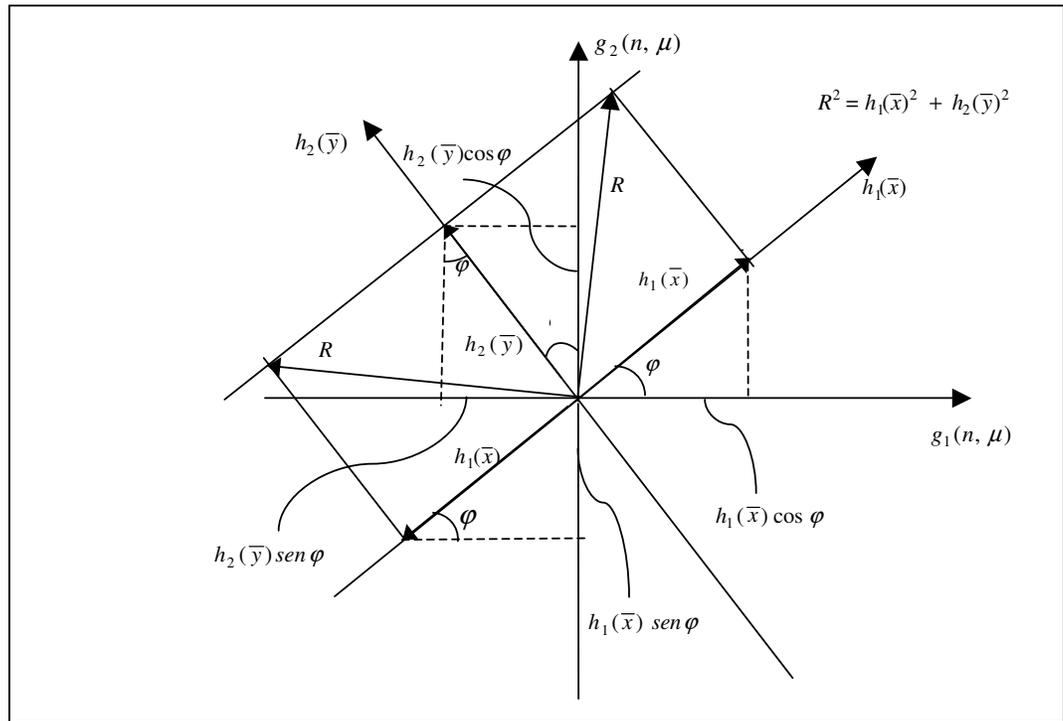


Figura A.1 – Rotação dos eixos $h_1(\bar{x})$ e $h_2(\bar{y})$

Pode-se provar que (A.2) e (A.3) são variáveis aleatórias normais, porque elas são combinações lineares das variáveis normais x_i e y_i . Sabe-se que

$$E(\bar{x} - \mu_x)^2 = \frac{\sigma_x^2}{n}, E(\bar{y} - \mu_y)^2 = \frac{\sigma_y^2}{n}, E(\bar{x} - \mu_x)(\bar{y} - \mu_y) = \frac{\sigma_{xy}}{n}.$$

Após algumas simplificações, obtém-se que

$$E[g_1(n, \mu)]^2 = \frac{n}{|\Sigma|} \left[\frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2}{n} - \frac{1}{n} \sigma_x \sigma_y \sigma_{xy} \sin 2\varphi \right].$$

Por simetria dos índices x e y , tem-se que

$$E[g_1(n, \mu)]^2 = E[g_2(n, \mu)]^2 = \frac{n}{|\Sigma|} \left[\frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2}{n} - \frac{1}{n} \sigma_x \sigma_y \sigma_{xy} \sin 2\varphi \right].$$

Como $\sin 2\varphi = \sigma_{xy} / (\sigma_x \sigma_y)$ e $|\Sigma| = \sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2$ segue que

$$E[g_1(n, \mu)]^2 = E[g_2(n, \mu)]^2 = \frac{1}{|\Sigma|} \left[\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2 \right] = 1.$$

Similarmente

$$E[g_1(n, \mu)g_2(n, \mu)] = \frac{n}{|\Sigma|} \left[\frac{\sigma_x \sigma_y \sigma_{xy}}{n} - \frac{1}{n} \sigma_x^2 \sigma_y^2 \text{sen}2\varphi \right] = \frac{\sigma_x \sigma_y}{|\Sigma|} [\sigma_{xy} - \sigma_x \sigma_y \text{sen}2\varphi] = 0 .$$

O Teorema A1 está provado.

APÊNDICE B – Cálculos Secundários

Para um processo em controle define-se p_0 , a probabilidade da amostragem dupla ser interrompida antes de atingir o segundo estágio; α_1 , a probabilidade de alarme falso no primeiro estágio e α_2 , a probabilidade de alarme falso no segundo estágio.

A Figura B.1 representa o espaço amostral das variáveis $g_1(n_1, \mu_0)$ e $g_2(n_1, \mu_0)$, dividido em três as regiões. I_1 é a região que compreende o disco de raio \sqrt{LA} , isto é, $D(0, \sqrt{LA})$; I_2 é a região que compreende o anel de raio superior igual a $\sqrt{LC_1}$ e raio inferior igual a \sqrt{LA} ; e I_3 é a região externa ao disco $D(0, \sqrt{LC_1})$.

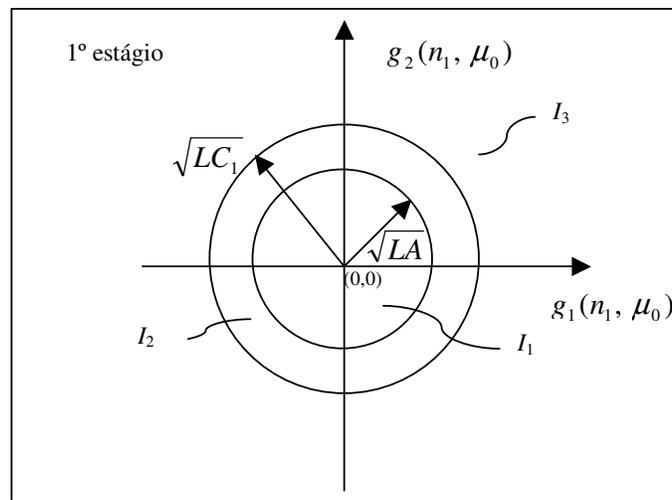


Figura B.1 – Espaço amostral de $(g_1(n_1, \mu_0); g_2(n_1, \mu_0))$

A probabilidade p_0 é dada por:

$$p_0 = Pr[g(n_1, \mu_0) \notin I_2]$$

$$p_0 = 1 - Pr[LC_1 < T_1^2 < LA \mid \mu = \mu_0]$$

As variáveis $g(n, \mu)$ e T^2 foram definidas no Capítulo 4:

$$T^2 = g_1^2(n, \mu) + g_2^2(n, \mu)$$

$$g_1(n, \mu) = h_1(\bar{x}) \cos \varphi - h_2(\bar{y}) \sin \varphi,$$

$$g_2(n, \mu) = -h_1(\bar{x}) \sin \varphi + h_2(\bar{y}) \cos \varphi,$$

sendo $\sin 2\varphi = \sigma_{xy} / (\sigma_x \sigma_y)$, $h_1(\bar{x}) = \sqrt{n} \sigma_y (\bar{x} - \mu_x) / \sqrt{|\Sigma|}$, $h_2(\bar{y}) = \sqrt{n} \sigma_x (\bar{y} - \mu_y) / \sqrt{|\Sigma|}$,

e $|\Sigma| = \det \Sigma = \sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2 > 0$.

No Apêndice A está a prova de que T^2 tem distribuição normal com média zero e matriz de covariância unitária $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Portanto, a probabilidade de um ponto $(x, y) \in D(0, a)$ é dada por:

$$\Pr[T^2 < a^2] = \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-a}^a f_{N(0, \mathcal{E})}(x, y) dx dy = \int_0^a r \exp(-r^2) dr = 1 - \exp(-a^2 / 2) \quad (\text{B.1})$$

em que $f_{N(0, \mathcal{E})}$ é a função densidade da distribuição normal bivariada com média zero e matriz de covariância unitária,

$$f_{N(0, \mathcal{E})}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp[-(x^2 + y^2) / 2].$$

Conseqüentemente:

$$p_0 = 1 - \int_{\sqrt{LA}}^{\sqrt{LC_1}} r \exp(-r^2) dr = 1 - [\exp(-LA / 2) - \exp(-LC_1 / 2)].$$

A probabilidade de se ter um alarme falso no primeiro estágio é dada por:

$$\alpha_1 = \Pr[g(n_1, \mu_0) \in I_3]$$

$$\alpha_1 = \Pr[T^2(n_1, \mu_0) > LC_1 \mid \mu = \mu_0]$$

$$\alpha_1 = \iint_{\notin D(0, \sqrt{LC_1})} f_{N(0, \mathcal{E})}(x, y) dx dy$$

Fazendo uso da equação B.1 obtém-se que:

$$\alpha_1 = 1 - \int_0^{\sqrt{LC_1}} r \exp(-r^2) dr = 1 - [1 - \exp(-LC_1 / 2)] = \exp(-LC_1 / 2)$$

A Figura B.2 representa o espaço amostral das variáveis $g_1(n, \mu_0)$ e $g_2(n, \mu_0)$, dividido em duas regiões, I_4 e I_5 , sendo I_4 a região que compreende o disco de raio $\sqrt{LC_2}$, isto é, $D(0, \sqrt{LC_2})$ e I_5 a região externa ao disco $D(0, \sqrt{LC_2})$.

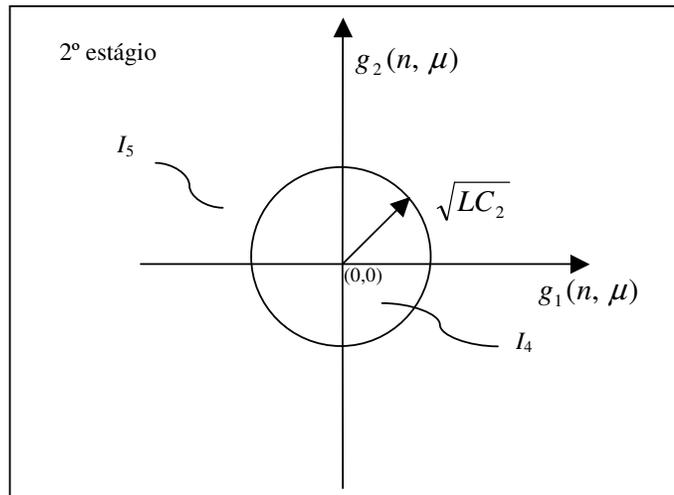


Figura B.2 – Espaço amostral de $(g_1(n, \mu_0); g_2(n, \mu_0))$

Quando a amostra de tamanho n é dividida em duas sub-amostras de tamanho n_1 e n_2 , sendo $n_1 + n_2 = n$, a estatística $g(n, \mu)$ tem a seguinte propriedade:

$$g(n, \mu) = \frac{(\sqrt{n_1} g(n_1, \mu) + \sqrt{n_2} g(n_2, \mu))}{(\sqrt{n_1 + n_2})}$$

Desta forma a estatística $g(n_2)$ é dada por (considere $\mu = \mu_0$):

$$g(n_2) = \frac{\sqrt{n_1 + n_2}}{\sqrt{n_2}} g(n) - \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_2}} g(n_1)$$

Se $g(n_1) = (x, y)$ e $g(n) \in I_5$, segue que:

$$g(n_2) \in I_5^*(x, y),$$

sendo $I_5^*(x, y)$ a região externa ao disco de raio $R = \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_2}} LC_2$ centrado em $C(-x\sqrt{n_1/n_2}; -y\sqrt{n_1/n_2})$, isto é $D(C, R)$.

A probabilidade de alarme falso no segundo estágio é dada por:

$$\alpha_2 = Pr[(g(n, \mu_0) \notin I_4) \cap (g(n_1, \mu_0) \in I_2)]$$

$$\alpha_2 = Pr[g(n, \mu_0) \notin I_4 | g(n_1, \mu_0) \in I_2] Pr[g(n_1, \mu_0) \in I_2]$$

$$\alpha_2 = \iint_{\in D(\sqrt{LA}, \sqrt{LC_1})} f_{N(0, \mathcal{E})}(x, y) \left[\iint_{\notin D(C, R)} f_{N(0, \mathcal{E})} dudv \right] dx dy$$

$$\alpha_2 = \sum_i^m \sum_j^m I_{ij} \left[\int_b^c \int_d^e f_{N(0, \mathcal{E})}(x, y) dx dy \right] \quad (\text{B.2})$$

A equação (B.2) foi utilizada no programa *FORTRAN* (Apêndice D) para o cálculo de α_2 , onde:

$$I_{ij} = \begin{cases} Pr[(x, y) \in A_{ij} \mid (x, y) \sim N(0, \mathcal{E})] & \text{se } LA < x_i^2 + y_i^2 < LC_1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e $N(0, \mathcal{E})$ representa uma distribuição normal bivariada com média zero, ou seja $\mu_x = \mu_y = 0$, e matriz de covariância unitária $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Na Figura B.3 tem-se a área A_{ij} .

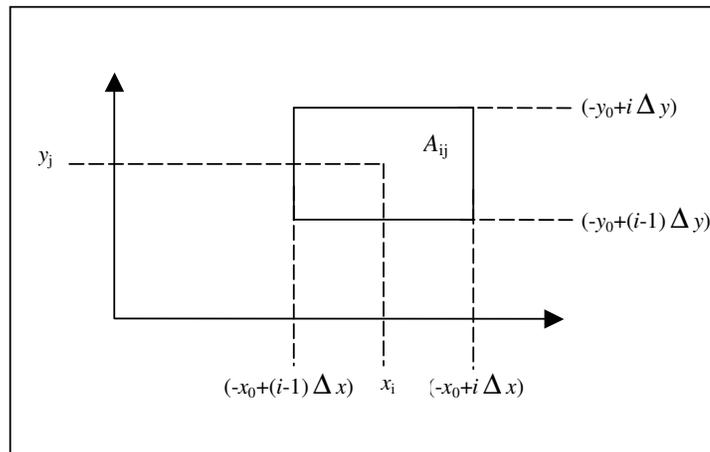


Figura B.3 – Área A_{ij}

Da Figura B.3 observa-se que:

$$\begin{aligned} Pr[(x, y) \in A_{ij} \mid (x, y) \sim N(0, \mathcal{E})] = & F(-x_0 + i\Delta x; -y_0 + i\Delta y) - \\ & -F(-x_0 + i\Delta x; -y_0 + (i-1)\Delta y) - \\ & -F(-x_0 + (i-1)\Delta x; -y_0 + i\Delta y) + \\ & +F(-x_0 + (i-1)\Delta x; -y_0 + (i-1)\Delta y) \end{aligned} \quad (B.3)$$

onde $F(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \exp[-(x^2 + y^2) / 2] dx dy$. Para o cálculo de $F(x, y)$ utilizou-se a sub-rotina *DBNRDF* da biblioteca *IMSL FORTRAN* (1995) para o cálculo da função de distribuição da normal bivariada. Os valores de x_0 e y_0 são iguais a $\sqrt{R \max}$, isto é,

$x_0 = y_0 = \sqrt{R \max}$. A escolha do valor de $R \max$ deve ser tal que $\Pr[x^2 + y^2 > R \max] \approx 0$. De acordo com a Figura B.4, Δx e Δy são dados por:

$$\Delta x = 2 \frac{\sqrt{R \max}}{m} e$$

$$\Delta y = 2 \frac{\sqrt{R \max - x_i^2}}{m}.$$

onde m é o número de partições das variáveis x e y . As variáveis $R \max$ e m são parâmetros de entrada do programa do Apêndice D. Elas foram escolhidas com base na precisão desejada.

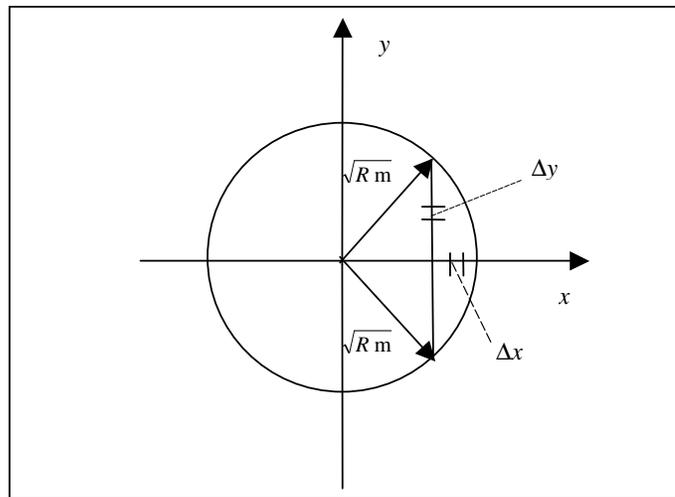


Figura B.4 - Δx e Δy

Para o cálculo de $\int_b^c \int_d^e f_{N(0, \mathcal{E})}(x, y) dx dy$ utilizou-se a sub-rotina DT2ODQ da biblioteca IMSL *FORTRAN* (1995) para o cálculo de integrais duplas. Os limites de integração b , c , d e e são dados por:

$$b = -R - x_i \sqrt{\frac{n_1}{n_2}};$$

$$c = R - x_i \sqrt{\frac{n_1}{n_2}};$$

$$d = -\sqrt{R^2 - \left(x + x_i \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\right)^2} - y_i \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} e$$

$$e = \sqrt{R^2 - \left(x + x_i \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\right)^2 - y_i \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}}$$

De acordo com as hipóteses estabelecidas no Capítulo 4, após a ocorrência da causa especial, o vetor de médias se desloca do seu valor alvo μ'_0 para μ'_1 e o centro do disco D da Figura B.2 se desloca de $(0;0)$ para $a' = (\sqrt{n_1}\delta'_x; \sqrt{n_1}\delta'_y)$, vide Figura B.5, onde:

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\delta'_x &= g_1(n, \mu_1) - g_1(n, \mu_0) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{|\Sigma|}} [-\sigma_y\delta_x \cos\varphi + \sigma_x\delta_y \sin\varphi], \\ \sqrt{n}\delta'_y &= g_2(n, \mu_1) - g_2(n, \mu_0) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{|\Sigma|}} [-\sigma_x\delta_y \cos\varphi + \sigma_y\delta_x \sin\varphi].\end{aligned}$$

$$\text{sendo } \delta_x = \frac{(\mu_{1x} - \mu_{0x})}{\sigma_x} \text{ e } \delta_y = \frac{(\mu_{1y} - \mu_{0y})}{\sigma_y}.$$

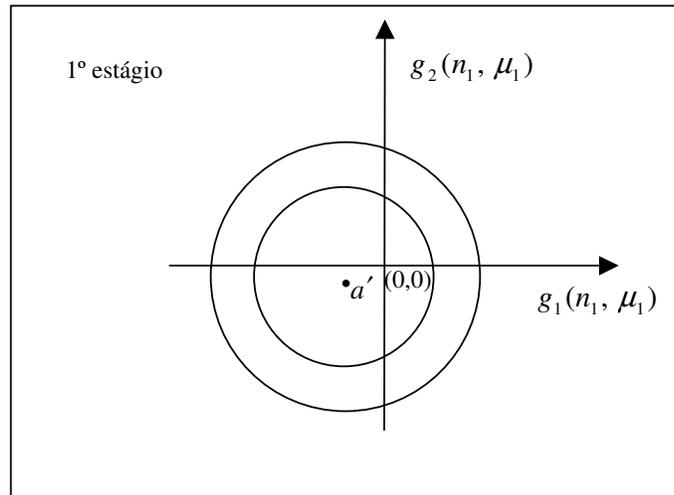


Figura B.5 – Espaço amostral de $(g_1(n_1, \mu_1); g_2(n_1, \mu_1))$

O poder de detecção do gráfico de controle no primeiro estágio é dado por:

$$p_1 = Pr[g(n_1, \mu_1) \in I_3]$$

$$p_1 = Pr[T^2(n_1, \mu_1) > LC_1 \mid \mu = \mu_1]$$

$$p_1 = \iint_{\notin D(a', \sqrt{LC_1})} f_{N(0, \mathcal{E})}(x, y) dx dy$$

$$p_1 = \sum_i^m \sum_j^m I_{ij} \tag{B.4}$$

A equação (B.4) foi utilizada no programa *FORTTRAN* (Apêndice D) para o cálculo de p_1 , onde:

$$I_{ij} = \begin{cases} Pr[(x, y) \in A_{ij} \mid (x, y) \sim N(0, \mathcal{E})] & \text{se } (x_i - \sqrt{n_1}\delta'_x)^2 + (y_i - \sqrt{n_1}\delta'_y)^2 > LC_1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para o cálculo de $Pr[(x, y) \in A_{ij} \mid (x, y) \sim N(0, \mathcal{E})]$ utilizou-se a equação (B.3).

No segundo estágio, a causa especial desloca o centro do disco D de C para $C'(-x\sqrt{n_1/n_2} + \delta'_x\sqrt{n_2}; -y\sqrt{n_1/n_2} + \delta'_y\sqrt{n_2})$. Conseqüentemente, o poder do gráfico é dado por

$$\begin{aligned} p_2 &= Pr[(g(n, \mu_1) \notin I_4) \cap (g(n_1, \mu_1) \in I_2)] \\ p_2 &= Pr[g(n, \mu_1) \notin I_4 \mid g(n_1, \mu_1) \in I_2] Pr[g(n_1, \mu_1) \in I_2] \\ p_2 &= \iint_{\in(\sqrt{LA}, \sqrt{LC_1})} f_{N(0, \mathcal{E})}(x, y) \left[\iint_{\notin D(C', R)} f_{N(0, \mathcal{E})} dudv \right] dx dy \\ p_2 &= \sum_i^m \sum_j^m I_{ij} \left[\int_{b'}^{c'} \int_{d'}^{e'} f_{N(0, \mathcal{E})}(x, y) dx dy \right] \end{aligned} \quad (B.5)$$

A equação (B.5) foi utilizada no programa *FORTTRAN* (Apêndice D) para o cálculo de p_2 , onde:

$$I_{ij} = \begin{cases} Pr[(x, y) \in A_{ij} \mid (x, y) \sim N(0, \mathcal{E})] & \text{se } LA < (x - \sqrt{n_1}\delta'_x)^2 + (y - \sqrt{n_1}\delta'_y)^2 < LC_1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para o cálculo de $Pr[(x, y) \in A_{ij} \mid (x, y) \sim N(0, \mathcal{E})]$ utilizou-se a equação (B.3). Os limites de integração b' , c' , d' e e' são dados por:

$$\begin{aligned} b' &= -R - x_i \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} + \sqrt{n_2}\delta'_x; \\ c' &= R - x_i \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} + \sqrt{n_2}\delta'_x; \\ d' &= -\sqrt{R^2 - \left(x + x_i \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\right)^2} - y_i \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} + \sqrt{n_2}\delta'_y \text{ e} \end{aligned}$$

$$e' = \sqrt{R^2 - \left(x + x_i \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\right)^2} - y_i \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} + \sqrt{n_2} \delta'_y.$$

APÊNDICE C – Modelo de cadeia de Markov para obtenção do *NMA* do gráfico de controle com regra especial de decisão

O *Synthetic control chart*, que nesta dissertação de mestrado foi chamado de gráfico de controle com regra especial de decisão, foi introduzido por Wu e Spedding (2000). O gráfico de Shewhart sinaliza uma deterioração do processo sempre quando um ponto cai em sua região de ação; alternativamente, o *Synthetic Control Chart* sinaliza somente quando um segundo ponto cai na região de ação, e sob a condição de que o número de amostras entre os dois pontos que caíram na região de ação, não seja superior a L . Tal estratégia de decisão tem sido observada na prática, pois em geral o usuário se sente inseguro em interromper o processo após a ocorrência do primeiro ponto amostral na região de ação do gráfico de controle.

Davis e Woodall (2002) utilizaram um modelo de cadeia de Markov para obtenção do NMA_{zs} e NMA_{ss} para o *Synthetic Control Chart*. Quando o *Synthetic Control Chart* está em uso, a decisão sobre o estado do processo é baseada no NA , número de amostras retiradas do processo entre ocorrências de amostras não-conformes. Uma amostra será não-conforme quando seu valor amostral gerar um ponto fora dos limites de controle. No início do monitoramento, o primeiro NA corresponde ao número de amostras retiradas do processo antes da ocorrência da primeira amostra não conforme. Se o NA for menor ou igual a L , onde L é um número inteiro positivo, o processo é considerado fora de controle e um sinal é gerado. A medida que L aumenta o *Synthetic Control Chart* tende ao gráfico de controle de Shewhart.

Suponha que cada ponto amostral do gráfico de observações individuais é classificado como sendo “0” (se dentro dos limites de controle) ou “1” (se fora dos limites de controle). Uma seqüência de pontos amostrais pode ser representada por uma seqüência de zeros e uns; por exemplo, 1000001000 indica que em uma seqüência de 10 amostras, a primeira e a sétima estão fora dos limites de controle, ver Figura C.1. O último dígito da seqüência representa o que aconteceu com a observação mais recente.

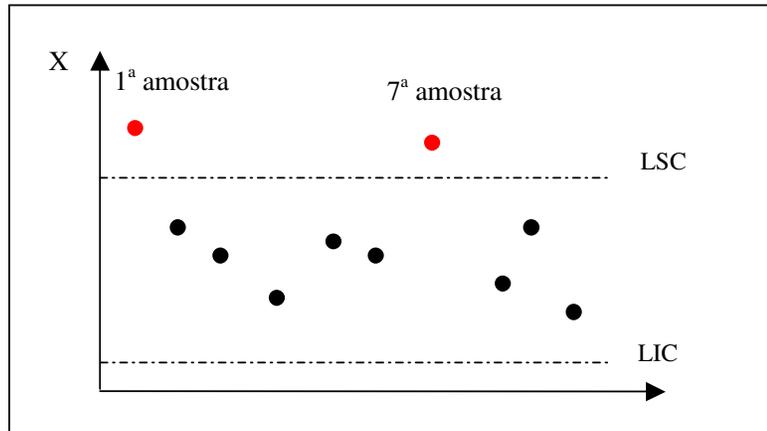


Figura C.1- Seqüência de amostras dentro ou fora dos limites

Considere que $L=3$. Isto significa que as seqüências de médias amostrais 11, 101 ou 1001 geram um sinal. As possibilidades do gráfico de controle com regra especial de decisão sinalizar um desajuste, para $L=3$, estão ilustradas na Figura C.2.

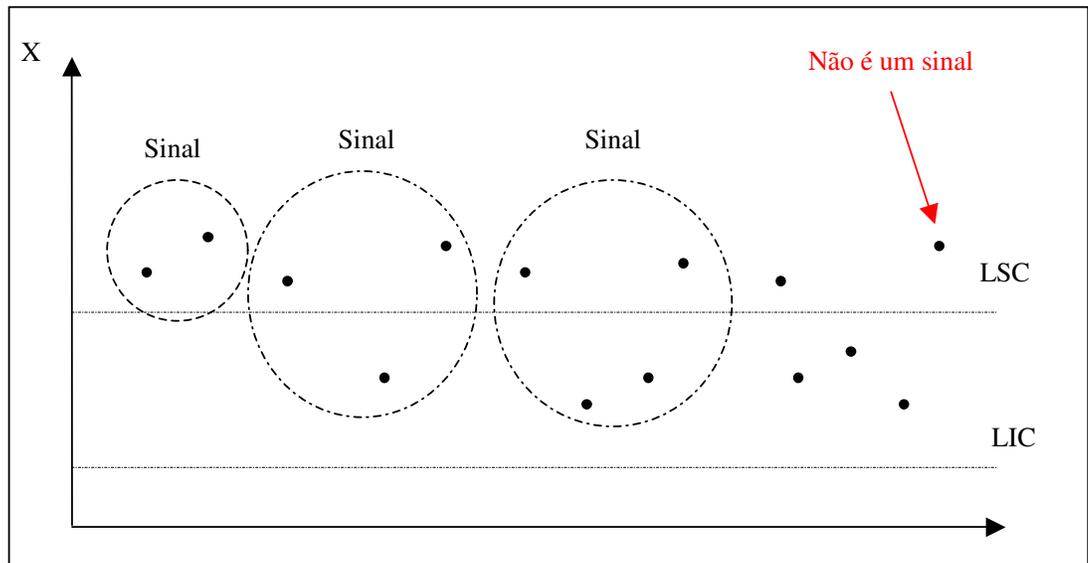


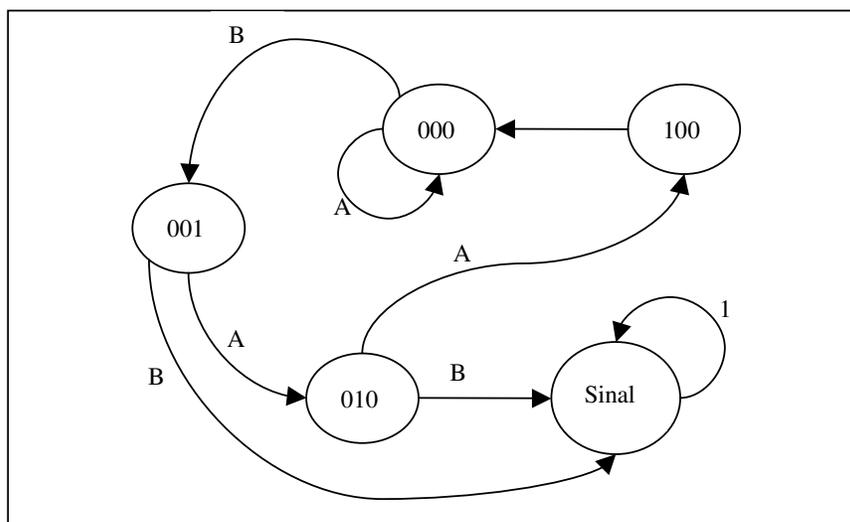
Figura C.2 - Casos em que o gráfico com regra especial de decisão sinaliza ($L=3$)

Seja $A=P[LIC < X < LSC]$ e $B=1-A$. O estado da cadeia de Markov depende das classificações das últimas três amostras, se “0” ou “1”. A matriz de transição da cadeia de Markov é dada por P , sendo “001” o estado inicial:

Tabela C.1 – Matriz de transição da cadeia de Markov ($L=3$)

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Estados} & 000 & 001 & 010 & 100 & \text{Sinal} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 000 \\ 001 \\ 010 \\ 100 \\ \text{Sinal} \end{matrix} & \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & A & B \\ A & 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

A Figura C.3 apresenta o diagrama de transição de estados da cadeia de Markov descrita pela matriz da Tabela C.1.

Figura C.3 - Diagrama de transição de estados ($L=3$)

Para qualquer valor de L , a matriz Q é obtida a partir da matriz P eliminando todas as linhas e colunas correspondentes aos estados recorrentes. Q é uma matriz $(L+1)$ por $(L+1)$, que pode ser construída como segue:

- (1) A primeira linha contém A na primeira coluna e B na segunda coluna.
- (2) A última linha contém A na primeira coluna.
- (3) Nas outras linhas, A deve estar acima da diagonal.
- (4) Nos espaços restantes deve-se preencher com zeros.

O NMA é idêntico ao tempo médio que esta cadeia de Markov leva pra atingir o

estado absorvente. Para todos os possíveis estados iniciais, tem-se que $NMA=(I-Q)^{-1}1$, onde I é a matriz identidade $(L+1)$ por $(L+1)$ e 1 é um vetor unitário $(L+1)$.

$$I - Q = \begin{pmatrix} 1-A & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A \\ -A & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Assumindo que a causa especial ocorra após um período em controle, o NMA_{ss} mede o tempo que o *Synthetic Control Chart* leva para sinalizar a causa especial.

Neste caso, o vetor para o processo em regime permanente consiste na probabilidade da cadeia de Markov, que representa o *Synthetic Control Chart*, estar em cada estado transitório após um longo período de tempo. Existem $L+1$ estados transitórios. Considere S um vetor de linha $1 \times (L+1)$ que corresponde a essas probabilidades. A matriz Q' é a matriz de probabilidades iniciais. De acordo com Davis e Woodall (2002) o vetor S pode ser obtido pela solução de um sistema linear de equações onde:

$$\begin{cases} S = Q'xS' \\ \sum_i^{L+1} S_i \end{cases} \quad (C.1)$$

Para $L=3$ a matriz Q' é dada por:

Tabela C.2 – Matriz de probabilidades iniciais da cadeia de Markov ($L=3$)

$$Q' = \begin{array}{c} \text{Estados} \\ \begin{array}{cccc} 000 & 001 & 010 & 100 \\ 000 & \left(\begin{array}{cccc} A & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ 001 \\ 010 \\ 100 \end{array} \end{array}$$

O NMA_{ss} é dado por $S \times NMA$, onde NMA é o vetor $(L+1) \times 1$ de número médio de amostras até o sinal. S_i é a probabilidade da cadeia estar em cada um dos estados transitórios após um longo período de tempo. Existem quatro estados transitórios para $L = 3$, ou seja, $i=1, 2, 3, 4$. Neste caso o vetor S é dado por $S' = (S_1, S_2, S_3, S_4)$. Através da solução do sistema linear de equações obtém-se que:

$$S_1 = \frac{1}{1 + 3B} \quad \text{e} \quad S_2 = S_3 = S_4 = \frac{B}{1 + 3B} .$$

E, as fórmulas gerais, para qualquer valor de L , são dadas por:

$$S_1 = \frac{1}{1 + (N - 1)B} \quad \text{e} \quad S_i = \frac{B}{1 + (N - 1)B}, \quad \text{sendo } N=L+1.$$

APÊNDICE D – CÓDIGO COMPUTACIONAL EM *FORTRAN*

```

C
C
C          PROCESSO BIVARIADO
C          AMOSTRAGEM DUPLA
C          NMA E NMA STEADY-STATE PARA O GRÁFICO COM REGRA
C          ESPECIAL DE DECISÃO
C          NN=L+1
C          N=N2
C          R11=LA
C          R12=LC1
C          R2=LC2
C
C          USE MSIMSL
C          DOUBLE PRECISION  AA, ARL ,NBARRA  , RO, DESLOCX, DESLOCY
C          &, COSFI          , SENFI
C
C          DOUBLE PRECISION  RHO, R, R2,RMAX,X1,XM, DX1,Y1,YM,
C          &DY1,PSOMA,LSY,LIY ,DELTX, DELTY , RESULT, PROB,
C          &A, B, ERRABS, ERREST, ERRREL, F, G,H  ,N  ,N1, R11,R12,
C          &SHIFTX,SHIFTY, ALIST,BLIST,RLIST,ELIST,WK,PSAA,PSAB
C
C          DIMENSION ALIST (1000) ,BLIST(1000),RLIST(1000),ELIST(1000) ,
C          &IORD(1000),WK(4000),IWK(1000)
C
C          COMMON  XM,YM,R2,N,N1  ,SHIFTX,SHIFTY
C
C          EXTERNAL  F , G, H
C
C          WRITE(*,747)
C
C          747  FORMAT (' DIGITE 1 PARA NMA E 2 PARA NMASS (REGRA ESPECIAL)')
C
C          READ(*,*)IT
C
C          NN=11
C
C          IF(IT.EQ.2) THEN
C
C          WRITE(*,748)
C
C          748  FORMAT (' DIGITE L+1 ')
C          READ(*,*)NN
C          ENDIF

```

```

N1=1.0D0
N=6.0D0
RMAX=75.0D0
R11=1.386D0
R12=30.0D0
R2=6.442D0*(N+N1)/N
DESLOC=0.0D0

WRITE(*,479)
479  FORMAT  (" FORNECER N1, N2 (ou N0), LA, LC1")
      READ(*,*) N1,N,R11,R12

1000 CONTINUE

PSOMA=0.0D0
PSAA=0.0D0
PSAB=0.0D0

WRITE(*,476)
476  FORMAT  (" DESEJA MUDAR O LC2 OU O RMAX, SE SIM DIGITE 1")

      READ(*,*) KKS

      IF (KKS.EQ.1) THEN

WRITE(*,473)
473  FORMAT  (" DIGITAR LC2, RMAX E M")

      READ(*,*)R2, RMAX, M

      R2=R2*(N+N1)/N
      DESLOC=0.0D0

      ELSE

WRITE(*,471)
471  FORMAT  (" DIGITAR RO DELTAX e DELTAY")

      READ(*,*)RO, DESLOCX, DESLOCY

      COSFI=DSQRT( DSQRT(0.25D0*(1.0D0-RO*RO))+0.5)
      SENFI=DSQRT(1.0D0-COSFI*COSFI)
      IF (RO.LT.0.0D0)SENFI=-SENFI

      SHIFTX=(1.0D0/DSQRT(1.0D0-RO*RO))*(-
DESLOCX*COSFI+DESLOCY*SENFI)
      SHIFTY=(1.0D0/DSQRT(1.0D0-RO*RO))*(-
DESLOCY*COSFI+DESLOCX*SENFI)

```

```
IF (SHIFTX.LT.0.0D0)SHIFTX=-SHIFTX
IF (SHIFTY.LT.0.0D0)SHIFTY=-SHIFTY
```

```
WRITE(*,594)RO,COSFI,SENF,SHIFTX,SHIFTY
594 FORMAT(5F14.7)
READ(*,*)
```

```
ENDIF
```

```
RHO=0.0D0
```

```
DELTX=2.0D0*DSQRT(RMAX) /M
```

```
DO 10 I=1,M
```

```
X1=-DSQRT(RMAX)+DELTX*(I-1)
DX1=-DSQRT(RMAX)+DELTX*(I)
```

```
XM=(X1+DX1)/2.0D0
```

```
LSY=DSQRT(RMAX-XM*XM)
LIY=- DSQRT(RMAX-XM*XM)
```

```
XM=XM-DSQRT(N1)*SHIFTX
```

```
DELT=(LSY-LIY)/M
```

```
DO 20 J=1, M
```

```
Y1=LIY+DELT*(J-1)
DY1=LIY+DELT*(J)
YM=(Y1+DY1)/2.0D0
```

```
YM=YM-DSQRT(N1)*SHIFTY
```

```
R=(XM*XM+YM*YM)
```

```
PROB=DBNRDF(DX1, DY1, RHO) - DBNRDF(DX1, Y1, RHO)
& -(DBNRDF(X1, DY1, RHO) - DBNRDF(X1, Y1, RHO))
```

```

      IF(R.LT.R11) THEN
      PSAA=PSAA+PROB
      ENDIF

```

```

      IF(R.GT.R12) THEN
      PSAB=PSAB+PROB
      ENDIF

```

```

      IF (R.GT.R11.AND.R.LT.R12) THEN

```

```

      A=-DSQRT(R2)-DSQRT(N1)*XM/DSQRT(N) +DSQRT(N)*SHIFTX
      B=DSQRT(R2)-DSQRT(N1)*XM/DSQRT(N)   +DSQRT(N)*SHIFTX

```

```

      ERRABS = 0.0
      ERRREL = 0.01
      IRULE =6

```

```

      MAXSUB=1000

```

```

      CALL DT2ODQ (F, A, B, G, H, ERRABS, ERRREL, IRULE,
&    RESULT, ERREST, MAXSUB, NEVAL, NSUBIN,
&    ALIST, BLIST, RLIST, ELIST, IORD, WK,
&    IWK)

```

```

      PSOMA=PSOMA+PROB*RESULT

```

```

      GOTO 20

```

```

      ENDIF
20  CONTINUE

```

```

      GOTO 10

```

```

10  CONTINUE

```

```

      AA=  PSAA+PSOMA

```

```

      NBARRA=N1+N*(1.0D0-(PSAA+PSAB))

```

```

CALL AFBC(AA,NN,ARL)

IF (IT.EQ.1) THEN
  ARL=1.0D0/(1.0D0-(PSAA+PSOMA))
  WRITE(*,222)PSOMA ,PSAA,PSAB,NBARRA,ARL
222  FORMAT(' (PSOMA=',F6.5, ' PSAA=',F6.5, ' ALF1=',F6.5, ' NBAR=',
  &F5.3,')', ' ARL= ',F6.2)

      ELSE

      WRITE(*,221)PSOMA ,PSAA,PSAB,NBARRA,ARL
221  FORMAT(' (PSOMA=',F6.5, ' PSAA=',F6.5, ' ALF1=',F6.5, ' NBAR=',
  &F5.3,')', ' SSARL(SYNTHETIC)=',F6.2)

      ENDIF

      GOTO 1000

END

```

```

SUBROUTINE AFBC(AA,NN,ARL)
C
C
C           NMA
C
C

```

```

      DOUBLE PRECISION M(NN,NN),MINV(NN,NN), ARL,
      &P(NN) , AR(NN) , AA, B ,NM

      NM=1.0D0

      B=1.0D0 - AA

      DO 44  I=1,NN
      DO 55  J=1,NN

      M(I,J)=0.0D0
      MINV(I,J)=0.0D0

55  CONTINUE
44  CONTINUE

      M(1,1)=1.0D0-AA

```

```

M(1,2)=-B
M(NN,1)=-AA

DO 22 L=3,NN

M(L-1,L)=-AA
22 CONTINUE

DO 33 L=2,NN

M(L,L)=1.0D0

33 CONTINUE

CALL DLINRG(NN,M,NN,MINV,NN)
DO 11 J=1,NN

AR(J)=0.0D0

DO 12 I=1,NN

AR(J)=AR(J)+ MINV(J,I)

12 CONTINUE
11 CONTINUE

ARL=0.0D0

DO 13 K=1,NN
P(K)=B/(1.0D0+(NN-1)*B)
P(1)=1/(1.0D0+(NN-1)*B)

ARL=ARL+P(K)*AR(K)

13 CONTINUE

END

FUNCTION F (X, Y)
DOUBLE PRECISION X, Y

INTRINSIC DEXP
COMMON XM,YM,R2,N,N1 ,SHIFTX,SHIFTY

F = (1.0D0/6.283185307D0)*DEXP(-0.5*(X*X+Y*Y) )

```

```

RETURN
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION G (X)
DOUBLE PRECISION X, XM, YM, R2      ,N,N1 ,SHIFTX,SHIFTY

```

```

INTRINSIC DSQRT
COMMON XM, YM, R2, N, N1      ,SHIFTX,SHIFTY

```

```

      G= DSQRT(N)*SHIFTY - DSQRT(N1)*YM/DSQRT(N)-
&DSQRT(R2-(X-DSQRT(N)*SHIFTX+DSQRT(N1)*XM/DSQRT(N))**2 )
END

```

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION H (X)
DOUBLE PRECISION X, XM, YM, R2      ,N,N1 ,SHIFTX,SHIFTY

```

```

INTRINSIC DSQRT
COMMON XM, YM, R2, N, N1      ,SHIFTX,SHIFTY

```

```

      H= DSQRT(N)*SHIFTY - DSQRT(N1)*YM/DSQRT(N)+
&DSQRT(R2-(X-DSQRT(N)*SHIFTX+DSQRT(N1)*XM/DSQRT(N))**2 )

```

```

END

```