TESE DE DOUTORADO IFT - D.004/97

MODELOS REDUZIDOS DE BURACOS - NEGROS EM 1+1 - DIMENSÕES

FRANCISCO EUGENIO MENDONÇA DA SILVEIRA

ORIENTADOR

ABRAHAM HIRSZ ZIMERMAN

SETEMBRO - 1997

Dedicada à memória de meu pai

e a minha mãe.

Agradecimentos

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo apoio financeiro.

Ao Instituto de Física Teórica (IFT) e à Universidade Estadual Paulista (Unesp), pelas facilidades oferecidas ao desenvolvimento de minha pesquisa. Aos professores e pesquisadores do IFT, sempre disponíveis às discussões acerca dos mais variados temas.

Aos funcionários do IFT, sempre à disposição para ajudar no que fosse necessário. Em particular, ao "seu" Antônio ("in memorian").

Pesquisar, como todas as coisas da vida, é algo que se define por si próprio. Apenas quem o faz, provavelmente, o sente. Provavelmente, também, cada um sente de maneira diferente. Há, é lógico, inúmeras coisas que aprendi com meu orientador, o Prof. Abraham Zimerman. Sinto que há ainda muitas outras a aprender. Entretanto, se o conheço um pouco, penso que ficaria contente em saber que já percebi que devo observar, prestar atenção , refletir e trabalhar. Só após calcular muito, surgem as idéias.

Ao Prof. José Francisco Gomes, a quem tenho como co-orientador e amigo. O principal que aprendi com ele foi colaborar. Vale dizer, o que eu faço, o que o outro faz e o que nós fazemos. Ao Prof. Galen Sotkov, com quem tive o privilégio e o prazer de colaborar. Em princípio, como espectador e ao fim, como ator. Ao Prof. Luiz Agostinho Ferreira, pelos esclarecimentos sempre pertinentes a respeito de meu trabalho.

Ao Prof. Ruben Aldrovandi, pelas muitas conversas inteligentes ao café e, em particular, pelo "Moisés" do Freud.

Ao Prof. Sérgio Novaes e à Profa. Sandra Padula, pela ajuda valiosa.

Aos meus amigos Claudia, Claudio, Clisthenis, Dimiter, George, Jaime, Kokubun, Mirian, Pablo, Samuel e Thut e aos colegas do IFT.

À Profa. Regina Ricotta, a quem tenho como amiga, pela confiança em mim depositada.

À Marilúcia, que "há na minha lista".

Ao Marco Aurélio, por uma amizade inestimável. Ao grupo do "Totem e Tabu", Maria Inez, Nilton, Roberto e, em particular, à Leila. Ao Idel, da "prospectiva".

Às minhas irmãs, Deborah e Dalila, por existirem.

"Au mois d'octobre 1913 - j'avais cinq ans et demi - on décida de me faire entrer dans un cours au nom alléchant: le cours Désir. La directrice des classes élémentaires, Mlle Fayet, me reçut dans un cabinet solennel, aux portières capitonnées. Tou en parlant avec maman, elle me caressait les cheveux. "Nous ne sommes pas des institutrices, mais des éducatrices", expliquait-elle. Elle portait une guimpe montante, une jupe longue et me parut trop onctueuse: j'aimais ce qui résistait un peu."

Jean-Paul Sartre, Les Mots, Gallimard.

Resumo

Neste trabalho, através da aplicação do método da redução hamiltoniana às correntes de quiralidades conservadas do modelo de Wess-Zumino-Witten (WZW), baseado nas álgebras de Lie B_2 e B_3, construímos modelos reduzidos que descrevem a propagação de cordas 1+1-dimensionais em um fundo bidimensional (euclidiano) do tipo buraco-negro. Deduzimos que as estruturas algébricas, satisfeitas pelas correntes remanescentes dos modelos reduzidos, são álgebras-V, i. e., extensões não -locais da álgebra de Virasoro. No contexto do formalismo canônico, reobtemos as álgebras-V satisfeitas pelas correntes remanescentes, a partir da estrutura algébrica clássica dos parênteses de Poisson satisfeita pelos campos físicos dos modelos reduzidos baseados em B_2. Obtemos, também, a descrição destes modelos em termos de campos livres (osciladores harmônicos). Para limites convenientes dos campos físicos do modelo reduzido, baseado em B_3, reproduzimos um dos modelos reduzidos, baseado em B_2, o que sugere uma extensão . De fato, a álgebra-V satisfeita pelas correntes remanescentes do modelo reduzido, baseado em B_3, é uma extensão da estrutura algébrica satisfeita pelas correntes remanescentes deste modelo reduzido, baseado em B_2.

Palavras-chaves: álgebra-V, redução hamiltoniana, modelo de WZW, buraco-negro.

Área do conhecimento: 1.05.03.00-5

Abstract

In this work, through applying the Hamiltonian reduction method to the conserved chiral currents of the Wess-Zumino-Witten (WZW)-model, based on B_2 and B_3 Lie algebras, we construct reduced models which describe 1+1-dimensional strings propagation on a bidimensional (Euclidean) background of black-hole type. We deduce that the algebraic structures, satisfied by the remaining currents of the reduced models, are V-algebras, i. e., non-local extensions of the Virasoro algebra. In the canonical formalism context, we reobtain the V-algebras satisfied by the remaining currents, from the classical algebraic structure of Poisson brackets satisfied by the physical fields of the reduced models based on B_2. We obtain, also, the description of these models in terms of free fields (harmonic oscilators). For convenient limits of the physical fields of the reduced model, based on B_3, we reproduce one of the reduced models, based on B_2, which suggests an extension. In fact, the V-algebra satisfied by the remaining currents of the reduced model, based on B_3, is an extension of the algebraic structure satisfied by the remaining currents of this reduced model, based on B_2.

Key-words: V-algebra, Hamiltonian reduction, WZW-model, black-hole.

Conteúdo

1 O modelo de WZW **1**

1.1 A álgebra de Lie semi-simples 1

1.1.1 Os parênteses de Lie 2

1.1.2 O traço normalizado 4

1.1.3 Os pesos fundamentais 4

1.2 As decomposições de Gauss 5

1.2.1 A decomposição abeliana de Gauss 5

1.2.2 As decomposições não -abelianas de Gauss 7

1.3 O modelo de WZW 8

1.3.1 O modelo-σ generalizado 8

1.3.2 O modelo de WZW 9

1.3.3 A identidade de Polyakov-Wiegmann 10

1.3.4 As correntes de Noether 11

1.3.5 A álgebra de Kac-Moody 12

1.4 A redução hamiltoniana 14

1.4.1 Os vínculos 15

1.4.2 As fixações de calibre 16

1.4.3 A condição de buraco-negro 17

2 Os modelos reduzidos de um buraco-negro **19**

2.1 O modelo-I 21

2.1.1 O termo cinético desacoplado 22

2.1.2 A lagrangiana singular 23

2.1.3 Os momentos 25

2.1.4 As equações de Euler-Lagrange 26

2.2 O modelo-II 28

2.2.1 O termo cinético desacoplado 29

2.2.2 A lagrangiana singular 30

2.2.3 Os momentos 32

2.2.4 As equações de Euler-Lagrange 33

2.3 O modelo-III 35

2.3.1 O termo cinético desacoplado 36

2.3.2 A lagrangiana singular 37

2.3.3 Os momentos 39

2.3.4 As equações de Euler-Lagrange 40

2.4 O modelo-IV 42

2.4.1 O termo cinético desacoplado 43

2.4.2 A lagrangiana singular 44

2.4.3 Os momentos 46

2.4.4 As equações de Euler-Lagrange 47

3 As estruturas algébricas dos modelos de um buraco-negro **49**

3.1 O formalismo canônico 49

3.1.1 A lagrangiana 50

3.1.2 O tensor de energia-momento 54

3.1.3 As correntes não -locais 57

3.2 Os campos livres 61

3.2.1 Os novos campos físicos 63

3.2.2 A invariância conforme 67

3.2.3 A descrição 71

4 O modelo reduzido de dois buracos-negros **73**

4.1 O modelo original 73

4.1.1 A decomposição não -abeliana de Gauss 74

4.1.2 A corrente de quiralidade direita conservada 75

4.2 O modelo reduzido 82

4.2.1 A redução hamiltoniana 82

4.2.2 A redução adicional 85

4.3 A lagrangiana 86

4.3.1 A lagrangiana do modelo reduzido 87

4.3.2 A lagrangiana singular 88

5 Conclusões e problemas em aberto **93**

5.1 Conclusões 93

5.2 Problemas em aberto 95

5.2.1 A relação entre os modelos reduzidos de um buraco-negro . . . 96

5.2.2 A construção de modelos reduzidos de multi-buracos-negros . 97

A A álgebra de Lie B_2 **101**

A.1 Os geradores 101

A.1.1 Uma representação linear 101

A.1.2 O traço normalizado 103

A.1.3 Os parênteses de Lie . . . 104
A.2 A estrutura graduada . . . 106
A.2.1 A base de Chevalley . . . 106
A.2.2 A matriz de Cartan . . . 107
A.2.3 Os pesos fundamentais . . . 107
A.2.4 Os operadores de graduação . . . 108

B As lagrangianas dos modelos de um buraco-negro **109**
B.1 Os termos cinéticos . . . 110
B.1.1 O operador de graduação Q_1 . . . 111
B.1.2 O operador de graduação Q_2 . . . 112
B.2 Os potenciais . . . 112
B.2.1 O modelo-I . . . 113
B.2.2 O modelo-II . . . 113
B.2.3 O modelo-III . . . 113
B.2.4 O modelo-IV . . . 114

C As correntes remanescentes dos modelos de um buraco-negro **115**
C.1 As decomposições não -abelianas de Gauss . . . 115
C.1.1 O operador de graduação Q_1 . . . 117
C.1.2 O operador de graduação Q_2 . . . 120
C.2 As reduções hamiltonianas . . . 123
C.2.1 O modelo-I . . . 123
C.2.2 O modelo-II . . . 126
C.2.3 O modelo-III . . . 129
C.2.4 O modelo-IV . . . 132

D As álgebras-V dos modelos de um buraco-negro 135

D.1 A variação da corrente 136

D.2 As álgebras-V de spin-2 139

D.2.1 O modelo-II 139

D.2.2 O modelo-III 141

D.3 As álgebras-V de spin-$\frac{3}{2}$ 143

D.3.1 O modelo-I 143

D.3.2 O modelo-IV 145

E A álgebra de Lie B_3 147

E.1 Os geradores 147

E.1.1 Uma representação linear 148

E.1.2 O traço normalizado 154

E.1.3 Os parênteses de Lie 156

E.2 A estrutura graduada 159

E.2.1 A base de Chevalley 159

E.2.2 A matriz de Cartan 160

E.2.3 Os pesos fundamentais 161

E.2.4 Os operadores de graduação 161

F A álgebra-V do modelo de dois buracos-negros 163

F.1 A variação da corrente 163

F.2 A redução 170

F.3 A álgebra-V 173

Referências Bibliográficas 175

Introdução

Uma linha de pesquisa de grande interesse, atualmente, é a construção de modelos que manifestam invariância conforme e que representam cordas que se propagam em um fundo do tipo buraco-negro. A maioria destas construções é feita em 1+1-dimensões , mas há exemplos de outras, em dimensões mais altas [1]. Muito embora a idéia em si mesma não seja tão nova assim [2], o interesse recente é, em grande parte, devido à observação de Witten [3] de que o modelo de Wess-Zumino-Witten (WZW), calibrado pelo coset $SL(2,\Re)/U(1)$ [4], pode ser interpretado como uma corda 1+1-dimensional que se propaga em um fundo bidimensional (euclidiano) do tipo buraco-negro. A diferença essencial entre esta abordagem do problema, proposta por Witten, e as anteriores é que ela conduz à construção de um modelo exatamente conformemente invariante, ao passo que as soluções apresentadas anteriormente eram válidas apenas perturbativamente. A proposta de Witten abriu um sem-número de possibilidades de investigação da natureza das singularidades espaço-temporais, no contexto dos modelos de cordas, através da utilização de técnicas de teoria de campos conforme. Nos dois parágrafos a seguir, passamos a apresentar a essência da idéia de Witten.

O modelo-σ generalizado, em um espaço-alvo 1+1-dimensional com coordenadas $\sigma = (x^1, x^2)$, é descrito pela ação

$$S = \frac{1}{2\pi}\int d^2z[G_{ij}(\sigma)\bar{\partial}x^i\partial x^j + \Phi(\sigma)R^{(2)} + T(\sigma)], \tag{0.1}$$

onde $G_{ij}(\sigma)$ e $\Phi(\sigma)$, os campos de fundo, são o gráviton e o dílaton, respectivamente, e $T(\sigma)$ descreve o táquion; além disto, $R^{(2)}$ representa o escalar de curvatura no espaço 1+1-dimensional e $d^2z = d\bar{z}dz$, com $z = x^1 - \imath x^2$ e $\bar{z} = x^1 + \imath x^2$; finalmente,

$\partial = \frac{\partial}{\partial z}$ e $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Em (0.1), não incluímos um campo tensorial anti-simétrico $B_{ij}(\sigma)$, uma vez que, em espaços-alvos 1+1-dimensionais, ele pode ser eliminado por uma transformação de calibre conveniente. A dinâmica dos campos de fundo é governada pela condição de que as funções -β, da teoria de campos na folha de mundo, anulam-se. Em nível de um enlace, estas funções -β podem ser identificadas com as equações de campo da ação no espaço-alvo [5]

$$S_{eff} = \int d^2\sigma \sqrt{G} e^{\Phi}[R + (\nabla\Phi)^2 + (\nabla T)^2 - 2T^2 - 8], \tag{0.2}$$

onde R representa o escalar de curvatura no espaço de Minkowski, $G = \det(G_{ij})$ e $d^2\sigma = dx^1 dx^2$. O que torna especiais os modelos de cordas 1+1-dimensionais é o fato de que, uma vez que não há direções transversais, a corda não pode vibrar, podendo ser então completamente descrita, em nível clássico, pelas coordenadas de seu centro de massa. Como conseqüência, modelos de cordas 1+1-dimensionais contêm essencialmente um grau de liberdade, o qual, através da investigação das invariâncias de calibre da ação que descreve a corda, pode ser identificado com o táquion $T(\sigma)$. O gráviton e o dílaton (bem como todos os demais modos massivos) possuem apenas modos globais, e servem de fundo para a propagação do táquion.

Uma solução particularmente interessante para as equações de campo satisfeitas pelo gráviton e pelo dílaton, encontrada por Witten, é

$$ds^2 = \frac{dudv}{1 - uv}, \tag{0.3}$$

$$\Phi = \log(1 - uv), \tag{0.4}$$

onde u e v são certas funções dos x^i's. A observação surpreendente de Witten é que esta solução , de fato, exibe todas as propriedades características de uma geometria do tipo buraco-negro. Em particular, ela possui um horizonte em $uv = 0$, bem como a curvatura ds^2 torna-se singular para $uv = 1$, exatamente como no caso da solução do tipo buraco-negro, de Schwarzschild, das equações de Einstein, em termos das coordenadas de Kruskal (precisamente, as funções u e v)! O que torna a solução acima particularmente interessante é que, como mostrado por Witten, ela, de fato, corresponde a uma teoria de campos exatamente conforme, na forma de um modelo de WZW, calibrado pelo coset $SL(2,\Re)/U(1)$. Neste sentido, abrem-se as portas de um sem-número de excitantes possibilidades de estudo de importantes aspectos dos modelos de cordas, como a natureza das singularidades espaço-temporais, com a ajuda de técnicas provenientes da teoria de campos conforme.

Recentemente, Bilal [6] construiu um modelo que apresenta invariância conforme e que é completamente integrável, baseado na álgebra de Lie B_2. Ele corresponde à propagação de cordas 1+1-dimensionais em um fundo bidimensional (euclidiano) do tipo buraco-negro. Neste modelo, paralelamente aos dois campos que descrevem a corda, há um terceiro, que relaciona-se com os demais através de uma interação do tipo Liouville. Um modelo assim é chamado de modelo de Toda não -abeliano. Além disto, através de transformações de variáveis apropriadas, Bilal constrói também três campos, que possuem quiralidade bem definida e que conduzem à descrição do modelo em termos de campos livres (osciladores harmônicos). Estes campos livres satisfazem uma estrutura algébrica clássica do tipo parênteses de Poisson, o que é de fundamental importância para uma possível quantização do modelo. Finalmente, Bilal mostra que este modelo possui três correntes de quiralidade direita conservada e três, de quiralidade esquerda conservada, e que estas correntes satisfazem uma álgebra-V, dentro da mesma quiralidade. A álgebra-V é uma extensão não -local da álgebra de Virasoro. Neste trabalho, estudamos e extendemos o modelo de Bilal, através da aplicação do método da redução hamiltoniana às correntes de quiralidades conservadas do modelo de WZW, baseado nas álgebras de Lie B_2 e B_3. Nos parágrafos seguintes, passamos a descrever, com algum detalhe, o que fazemos.

No **Capítulo 1**, fazemos uma breve revisão acerca do modelo de WZW. Em primeiro lugar, apresentamos as principais propriedades das álgebras de Lie semi-simples. Assim, escrevemos os parênteses de Lie de seus geradores, nas bases de Cartan-Weyl e de Chevalley, definimos o traço normalizado dos geradores, através da forma de Cartan-Killing, e construímos os pesos fundamentais das representações lineares de dimensão finita da álgebra, através do cálculo da matriz de Cartan, bem como de sua inversa. Em seguida, dotamos a álgebra de Lie semi-simples de uma estrutura graduada, através da definição dos operadores de graduação , que conduzem às decomposições de Gauss dos elementos do grupo de Lie, associado à álgebra de Lie semi-simples. Neste sentido, apresentamos a decomposição abeliana de Gauss e mostramos como construir as decomposições não -abelianas de Gauss. Neste ponto, apresentamos o modelo de WZW, propriamente dito. Em particular, observamos que a ação que descreve o modelo de WZW é invariante por certas transformações dos elementos do grupo de Lie, associado à álgebra de Lie semi-simples, na qual este modelo está baseado. Neste sentido, esta simetria é assegurada quando escrevemos a ação que descreve o modelo de WZW em termos da identidade de Polyakov-Wiegmann. Mostramos ainda que a versão infinitesimal desta simetria conduz à verificação de que as correntes de quiralidades conservadas do modelo de WZW satisfazem uma álgebra de Kac-Moody. Finalmente, apresentamos o método da redução hamiltoniana, que será exaustivamente utilizado neste trabalho. Como veremos, o método constitui-se de três etapas, a saber a escolha apropriada dos vínculos, a imposição conveniente das fixações de calibre, associadas a estes vínculos, e a exigência de um vínculo adicional, que conduz a condições de não -localidade, a serem satisfeitas pelos campos físicos, bem como a singularidades nas lagrangianas que descrevem os modelos reduzidos. Ao longo deste trabalho, chamamos estas condições de condições de buraco-negro. As reduções não -abelianas do modelo de WZW, de que tratamos neste trabalho, conduzem a simetrias dos modelos reduzidos, manifestadas através das álgebras-V, às quais já nos referimos, e que devem ser satisfeitas pelas correntes remanescentes da aplicação desta redução não -abeliana. Como vemos, estas álgebras-V surgem, então , naturalmente como estruturas mais fundamentais que aquelas, resultantes das reduções abelianas, i. e., as álgebras-W.

No **Capítulo 2**, apresentamos os modelos que decorrem da aplicação do método da redução hamiltoniana às correntes de quiralidades conservadas do modelo de WZW, baseado na álgebra de Lie B_2. Construímos, então , quatro modelos, através de quatro reduções hamiltonianas específicas. Para cada um deles, apresentamos, em primeiro lugar, as lagrangianas que os descrevem, as condições de não -localidade satisfeitas pelos campos físicos e as correntes remanescentes. Em seguida, através de transformações de variáveis apropriadas, a não -localidade de um dos campos, em particular, numa direção na subálgebra de Cartan, manifesta-se explicitamente, o que conduz à revelação do caráter singular da lagrangiana, uma lagrangiana do tipo buraco-negro. Esta condição de não -localidade é a condição de buraco-negro. Finalmente, no contexto do formalismo canônico (cálculo dos momentos canonicamente conjugados aos campos, equações de Euler-Lagrange etc.), verificamos a conservação das quiralidades das correntes remanescentes dos modelos reduzidos. Observamos que um dos modelos reduzidos obtidos, o modelo-III, é uma reprodução do modelo de Bilal. Interpretamos estes modelos reduzidos como modelos de um buraco-negro.

No **Capítulo 3**, estudamos os aspectos relacionados à invariância conforme dos modelos reduzidos. Em primeiro lugar, mostramos como verificar a álgebra-V, satisfeita pelas correntes remanescentes destes modelos. Para tanto, no âmbito do formalismo canônico, a partir dos parênteses de Poisson elementares, satisfeitos pelos campos físicos locais, calculamos as estruturas algébricas que devem ser satisfeitas pelos campos não -locais e deduzimos que as correntes remanescentes satisfazem uma álgebra-V, desde que sejam identificadas convenientemente (através da introdução de certas constantes apropriadas) com o tensor de energia-momento e com as correntes não -locais, que satisfazem uma álgebra deste tipo. Em particular, mostramos todo o nosso procedimento, em detalhes, para o modelo-I, cujas correntes remanescentes satisfazem uma álgebra-V de spin conforme igual a $\frac{3}{2}$. Em seguida, estudamos a descrição dos modelos reduzidos em termos de campos livres (osciladores harmônicos). Para tanto, em primeiro lugar, consideramos que os campos possuem quiralidade bem definida e em seguida propomos certas transformações de variáveis sobre os campos, bem como conjecturamos as estruturas algébricas, satisfeitas então por estes novos campos. A condição de não -localidade, que deve também ser satisfeita pelos novos campos físicos, conduz a restrições sobre as constantes de estrutura da álgebra. Estas constantes de estrutura são , então , determinadas, impondo que as correntes remanescentes satisfaçam a álgebra-V apropriada. Finalmente, mostramos como escrever os novos campos físicos em termos dos campos livres, que satisfazem estruturas algébricas do tipo parênteses de Poisson clássicos, o que é de fundamental importância para uma possível quantização destes modelos reduzidos. Em particular, mostramos todo o nosso processo, em detalhes, para o modelo-II, cujas correntes remanescentes satisfazem uma álgebra-V de spin conforme igual a 2.

No **Capítulo 4**, apresentamos um muito imteressante modelo, que decorre da aplicação do método da redução hamiltoniana às correntes de quiralidades conservadas do modelo de WZW, baseado na álgebra de Lie B_3. Com o intuito de interpretá-lo como uma extensão dos modelos reduzidos, apresentados no **Capítulo 2**, e que são baseados na álgebra de Lie B_2, impomos uma redução adicional sobre suas correntes remanescentes, nas direções dos geradores de graus nulos, atribuídos por um certo operador de graduação , que conduz a uma decomposição não -abeliana de Gauss de um elemento do grupo de Lie, associado à álgebra de Lie B_3. Com esta redução adicional, é possível obter, após tranformações de variáveis apropriadas, condições manifestas de não -localidade, satisfeitas pelos campos físicos, e que são semelhantes àquelas dos modelos reduzidos, baseados na álgebra de Lie B_2. Estas condições de não -localidade conduzem a duplas singularidades na lagrangiana que descreve o modelo reduzido, baseado na álgebra de Lie B_3, diferentemente do que ocorre com os modelos reduzidos, baseados na álgebra de Lie B_2, cujas lagrangianas apresentam uma singularidade simples. Outro aspecto extremamente interessante acerca do modelo reduzido, baseado na álgebra de Lie B_3, diz respeito ao fato de que ele apresenta dois pares de correntes remanescentes não -locais, que satisfazem uma álgebra-V de spin conforme igual a 2, para cada quiralidade, diferentemente dos modelos reduzidos, baseados na álgebra de Lie B_2, que apresentam um único par de correntes não -locais, satisfazendo álgebras-V, para cada quiralidade. Finalmente, observamos que para certos limites apropriados dos campos físicos do modelo reduzido, baseado na álgebra de Lie B_3, reproduzimos o modelo-III (o modelo de Bilal), que é baseado na álgebra de Lie B_2. O modelo reduzido, baseado na álgebra de Lie B_3, é interpretado como um modelo de dois buracos-negros.

No **Capítulo 5**, apresentamos, detalhadamente, a contribuição original de nosso trabalho e também os problemas em aberto que ele suscita. Aqui, fazemos um resumo desta contribuição . Em linhas gerais, ela pode ser compreendida como a construção de uma teoria de campos clássica 1+1-dimensional, que descreve a propagação de uma corda em um fundo bidimensional (euclidiano) do tipo buraco-negro. Esta construção provem da aplicação do método da redução hamiltoniana às correntes de quiralidades conservadas do modelo de WZW. A partir do modelo de WZW, baseado na álgebra de Lie B_2, construímos quatro modelos reduzidos específicos. Deduzimos as estruturas algébricas satisfeitas pelas correntes remanescentes dos modelos reduzidos, que provam ser álgebras-V, i. e., extensões não - locais da álgebra de Virasoro. No contexto do formalismo canônico, a partir dos parênteses de Poisson clássicos, que devem ser satisfeitos pelos campos físicos dos modelos reduzidos, verificamos as álgebras-V satisfeitas pelas correntes remanescentes. Obtemos a descrição em termos de campos livres (osciladores harmônicos) dos modelos reduzidos, verificamos que estes campos livres satisfazem estruturas algébricas clássicas, do tipo parênteses de Poisson, e observamos que isto é de fundamental importância para uma possível quantização dos modelos reduzidos. Por outro lado, a partir do modelo de WZW, baseado na álgebra de Lie B_3, construímos um outro modelo reduzido. Deduzimos, também, as estruturas algébricas satisfeitas pelas correntes remanescentes deste modelo reduzido, que provam ser, novamente, álgebras-V. Verificamos que estes modelos reduzidos apresentam dois pares de correntes remanescentes não -locais, que satisfazem a álgebra-V, para cada quiralidade, diferentemente dos modelos reduzidos, baseados na álgebra de Lie B_2, que apresentam um único par de correntes remanescentes não -locais, que satisfazem uma álgebra deste tipo, para cada quiralidade. Finalmente, verificamos que para limites apropriados dos campos físicos do modelo reduzido, baseado na álgebra de Lie B_3, reproduzimos o modelo-III (o modelo de Bilal), que é baseado na álgebra de Lie B_2. Quanto aos problemas em aberto que discutimos neste capítulo final, são dois, a saber a relação entre os modelos reduzidos de um buraco-negro e a construção de modelos reduzidos de multi-buracos-negros. Mas, deixemos esta discussão para o **Capítulo 5**, propriamente dito.

Há seis apêndices neste trabalho. O **Apêndice A** é uma breve revisão acerca da álgebra de Lie B_2. O **Apêndice B** trata da obtenção das lagrangianas do tipo Polyakov-Wiegmann dos modelos reduzidos, baseados na álgebra de Lie B_2. No **Apêndice C**, calculamos as correntes remanescentes da aplicação do método da redução hamiltoniana ao modelo de WZW, baseado na álgebra de Lie B_2. No **Apêndice D**, deduzimos as álgebras-V de spins conformes iguais a $\frac{3}{2}$ e iguais a 2, satisfeitas pelas correntes remanescentes dos modelos reduzidos, baseados na álgebra de Lie B_2. O **Apêndice E** é uma breve revisão acerca da álgebra de Lie B_3. No **Apêndice F**, deduzimos a álgebra-V de spin conforme igual a 2, satisfeita pelas correntes remanescentes do modelo reduzido, baseado na álgebra de Lie B_3.

Capítulo 1

O modelo de WZW

Neste capítulo, apresentamos o modelo de Wess-Zumino-Witten (WZW). Para tanto, em primeiro lugar, fazemos uma breve revisão acerca das álgebras de Lie semi-simples e, em particular, mostramos como fornecer-lhes uma estrutura graduada. Em seguida, no contexto do modelo de WZW, propriamente dito, observamos que a identidade de Polyakov-Wiegmann assegura uma importante simetria e mostramos como deduzir a álgebra de Kac-Moody satisfeita pelas correntes de quiralidades conservadas. Finalmente, apresentamos o método da redução hamiltoniana, que será exaustivamente utilizado neste trabalho, com o intuito de obter os modelos reduzidos de WZW.

1.1 A álgebra de Lie semi-simples

Dada uma álgebra de Lie $\tilde{G}$, uma sua subálgebra $\tilde{H} \subset \tilde{G}$ é dita um *invariante* de $\tilde{G}$, ou um *ideal* para $\tilde{G}$, se $\tilde{H}$ e $\tilde{G}$ satisfazem os seguintes parênteses de Lie

$$[\tilde{H}, \tilde{G}] \subset \tilde{H}. \tag{1.1}$$

Dizemos que uma álgebra de Lie G é *semi-simples* se ela não possui nenhum ideal abeliano. Definimos a *subálgebra de Cartan* $H \subset G$ como sendo sua mais ampla subálgebra abeliana, cujos elementos ainda podem ser simultaneamente diagonalizados.

1.1.1 Os parênteses de Lie

Uma álgebra G de rank igual a r possui r raízes simples α_i. A cada uma destas raízes simples associamos um gerador $H_i \in H$ de G através da projeção de α_i sobre H, i. e., através de

$$H_i = \alpha_i \cdot H. \tag{1.2}$$

Também, a cada raiz $\pm\alpha$ de G associamos um gerador $E_{\pm\alpha}$ de G, do tipo escada. Os geradores de G satisfazem os seguintes parênteses de Lie na *base de Cartan-Weyl*

$$[H_i, H_j] = 0, \tag{1.3}$$

$$[H_i, E_{\pm\alpha}] = \pm\alpha^i E_{\pm\alpha}, \tag{1.4}$$

$$[E_{\alpha_i}, E_{-\alpha_j}] = \frac{2}{\alpha_i^2} H_i \delta_{ij}, \tag{1.5}$$

onde

$$\alpha^i = \alpha_i \cdot \alpha. \tag{1.6}$$

A definição

$$h_i = \frac{2}{\alpha_i^2} H_i \tag{1.7}$$

permite reescrever os parênteses de Lie dos geradores de G na *base de Chevalley* da seguinte maneira

$$[h_i, h_j] = 0, \tag{1.8}$$

$$[h_i, E_{\pm\alpha_j}] = \pm k_{ji} E_{\pm\alpha_j}, \tag{1.9}$$

$$[E_{\alpha_i}, E_{-\alpha_j}] = h_i \delta_{ij}, \tag{1.10}$$

onde

$$k_{ij} = 2\frac{\alpha_i \cdot \alpha_j}{\alpha_j^2} \tag{1.11}$$

são as entradas da *matriz de Cartan* de G.

1.1.2 O traço normalizado

Dada uma representação linear de dimensão finita para G, definimos o *traço normalizado* de dois de seus geradores através de

$$Tr(h_i h_j) = \eta_{ij}, \tag{1.12}$$

$$Tr(h_i E_\alpha) = 0, \tag{1.13}$$

$$Tr(E_\alpha E_\beta) = \frac{2}{\alpha^2}\delta_{\alpha+\beta,0}, \tag{1.14}$$

onde η_{ij} é a *forma de Cartan-Killing* da representação em questão .

1.1.3 Os pesos fundamentais

Os r *pesos fundamentais* λ_i de G são ortogonais a todas as raízes simples, exceto a uma delas, pois eles satisfazem a relação

$$2\frac{\lambda_i \cdot \alpha_j}{\alpha_j^2} = \delta_{ij}, \tag{1.15}$$

donde segue que eles podem ser reescritos como as seguintes combinações lineares das raízes simples

$$\lambda_i = \sum_j k_{ij}^{-1}\alpha_j. \tag{1.16}$$

1.2 As decomposições de Gauss

A álgebra G pode ser decomposta na forma

$$G = \oplus_i G_i, \tag{1.17}$$

de tal modo que a cada componente G_i seja atribuído o *grau* i, através da relação

$$[Q, G_{\pm i}] = \pm i G_{\pm i}, \tag{1.18}$$

onde Q é um *operador de graduação* definido, pelo menos até este ponto, abstratamente, sobre G. A motivação para dizer que a estrutura, assim obtida para G, é uma *estrutura graduada* decorre do fato de que as componentes G_i satisfazem a seguinte propriedade

$$[G_i, G_j] \subset G_{i+j}. \tag{1.19}$$

1.2.1 A decomposição abeliana de Gauss

Existem várias maneiras de se definir, explicitamente, um operador de graduação , sobre G. A mais comum é a seguinte

$$Q = \sum_{i=1}^{r} 2 \frac{\lambda_i \cdot H}{\alpha_i^2}. \tag{1.20}$$

Neste caso, as componentes $G_{\pm i}$ contêm os geradores do tipo escada nas direções das raízes positivas (respectivamente, negativas), escritas como combinações lineares de i raízes simples. Concluímos, então , que

$$G_{>} = \oplus_{i>0} G_i, \tag{1.21}$$

$$G_{<} = \oplus_{i<0} G_i \tag{1.22}$$

são componentes nilpotentes de G. A componente G_0 é uma subálgebra abeliana de G, que contem os geradores na sua subálgebra de Cartan, i. e.,

$$G_0 = [U(1)]^r. \tag{1.23}$$

A partir desta definição para Q, segue que um elemento g típico do grupo de Lie, associado à álgebra de Lie, pode ser escrito como o produto formal

$$g = NAM, \tag{1.24}$$

onde N e M são exponenciais de combinações lineares dos elementos de $G_{>}$ e de $G_{<}$, respectivamente, e A é a exponencial de combinações lineares dos elementos de G_0. A equação (1.24) é chamada de *decomposição abeliana de Gauss* para g, segundo o operador de graduação Q, definido sobre G.

1.2.2 As decomposições não -abelianas de Gauss

Há uma outra maneira de se definir, explicitamente, um operador de graduação , sobre G, e esta definição é, exaustivamente, utilizada neste trabalho. Ela é a seguinte

$$Q_i = \sum_{j=1}^{r} 2\frac{\lambda_j \cdot H}{\alpha_j^2}, \tag{1.25}$$

onde $j \neq i$. A ausência do peso fundamental λ_i na definição de Q_i conduz a uma estrutura não -abeliana para G_0 que contem agora, além dos geradores na subálgebra de Cartan de G, também os geradores do tipo escada $E_{\pm\alpha_i}$, i. e.,

$$G_0 = SL(2, \Re) \otimes [U(1)]^{r-1}. \tag{1.26}$$

Neste caso, g escreve-se como o seguinte produto formal

$$g = NBM, \tag{1.27}$$

onde B é a exponencial de combinações lineares dos geradores na subálgebra de Cartan e dos geradores do tipo escada $E_{\pm\alpha_i}$. A equação (1.27) é chamada de *decomposição não -abeliana de Gauss* para g, segundo o operador de graduação Q_i, definido sobre G.

Seguindo esta mesma linha de raciocínio, podemos remeter G_0 a uma estrutura não -abeliana cada vez mais complicada através da seguinte definição , sobre G, para o operador de graduação

$$Q_{i_1,i_2,...,i_k} = \sum_{j=1}^{r} 2\frac{\lambda_j \cdot H}{\alpha_j^2}, \tag{1.28}$$

onde $j \neq i_1, i_2, ..., i_k$, de tal modo que G_0 assuma a seguinte forma

$$G_0 = \otimes_{m=1}^{n} G(m) \otimes [U(1)]^{r-s}, \tag{1.29}$$

onde $s = \sum_{m=1}^{n} r_m$, com r_m denotando o rank de $G(m)$, para algum $n \leq k$. Neste caso, a decomposição não -abeliana de Gauss para g, segundo o operador de graduação em questão , é dada, formalmente, pela equação (1.27).

1.3 O modelo de WZW

Nesta seção , a partir do modelo-σ generalizado, apresentamos o modelo de Wess-Zumino-Witten (WZW). Observamos também que escrevendo a ação de WZW em termos da identidade de Polyakov-Wiegmann, asseguramos uma importante simetria do modelo. Finalmente, mostramos como deduzir a álgebra de Kac-Moody, satisfeita pelas correntes de quiralidades conservadas.

1.3.1 O modelo-σ generalizado

O *modelo-σ generalizado* é descrito pela ação [7]

$$S_{\lambda,k}(g) = \frac{1}{4\lambda^2} \int d^2\sigma Tr(\partial_i g^{-1} \partial_i g) + k\Gamma(g). \tag{1.30}$$

O campo $g(\sigma)$ em (1.30) é tomado como sendo um elemento de um dado grupo de Lie, associado a uma álgebra de Lie G semi-simples, $\sigma = (x^1, x^2)$ são as coordenadas no espaço-tempo de Minkowski, λ^2 e k são constantes de acoplamento adimensionais, k sendo necessariamente inteiro. O *termo de Wess-Zumino* $\Gamma(g)$ é definido através da integral

$$\Gamma(g) = \frac{1}{24\pi} \int d^3X \epsilon^{abc} Tr(g^{-1}\partial_a g g^{-1}\partial_b g g^{-1}\partial_c g). \tag{1.31}$$

O *pseudo-tensor completamente anti-simétrico* $\epsilon^{abc} = \pm 1$ se $\{abc\}$ for uma permutação par (respectivamente, ímpar) de $\{123\}$, ou anula-se em qualquer outro caso. A integral (1.31) é efetuada sobre um "volume" 2+1-dimensional de coordenadas X^a, o contorno deste volume sendo identificado com uma "superfície" 1+1-dimensional, tangente ao espaço-tempo de Minkowski. Os valores assumidos por $g(\sigma)$ sobre este contorno determinam (1.31), módulo 2π.

1.3.2 O modelo de WZW

Se $k = 0$, a ação (1.30) reduz-se àquela que descreve o modelo-σ usual, que possui liberdade assintótica e massa efetiva. A solução completa deste modelo pode ser encontrada, por exemplo, em [8]. Entretanto, sob as escolhas $k = 1, 2, ...$, o caráter da ação (1.30) altera-se drasticamente. Em particular, o modelo apresenta invariância conforme, sob estas condições , e para

$$\lambda^2 = \frac{4\pi}{k}. \tag{1.32}$$

Este modelo é não -massivo e seu comportamento de longo alcance é governado pela ação

$$S_k(g) = kW(g). \tag{1.33}$$

onde

$$W(g) = \frac{1}{16\pi}\int d^2\sigma Tr(\partial_i g^{-1}\partial_i g) + \Gamma(g). \tag{1.34}$$

O modelo descrito pela ação (1.33) é chamado de *modelo de Wess-Zumino-Witten* (WZW).

1.3.3 A identidade de Polyakov-Wiegmann

A propriedade mais importante da ação (1.33) é sua invariância com respeito à álgebra de Kac-Moody (uma álgebra de correntes ∞-dimensional). A ação (1.33) mantem-se inalterada sob as transformações

$$g(\sigma) \to \bar{\Omega}^{-1}(\bar{z})g(\sigma)\Omega(z), \tag{1.35}$$

onde $\Omega(z)$ e $\bar{\Omega}(\bar{z})$ são elementos arbitrários do grupo de Lie, associado à álgebra de Lie G semi-simples, cujas dependências analíticas se dão com respeito às coordenadas complexas

$$z = x^1 - \imath x^2, \tag{1.36}$$

$$\bar{z} = x^1 + \imath x^2, \tag{1.37}$$

respectivamente. No espaço-tempo de Minkovski, as variáveis (1.36) e (1.37) são as coordenadas no cone-de-luz. Podemos assegurar a simetria (1.35), utilizando a notável relação [9]

$$\begin{aligned} W(ABC) &= W(A) + W(B) + W(C) \\ &+ \frac{1}{16\pi}\int d^2\sigma Tr[(A^{-1}\bar{\partial}A)(\partial B)B^{-1} \\ &+ (B^{-1}\bar{\partial}B)(\partial C)C^{-1} \\ &+ (A^{-1}\bar{\partial}A)B(\partial C)C^{-1}B^{-1}], \end{aligned} \tag{1.38}$$

onde $g = ABC$ e com $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$ e $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. A relação (1.38) é chamada de *identidade de Polyakov-Wiegmann.*

1.3.4 As correntes de Noether

A simetria (1.35) dá origem a um número infinito de correntes de Noether, de quiralidades conservadas, o que pode ser deduzido a partir das equações

$$\bar{\partial}J = 0, \tag{1.39}$$

$$\partial\bar{J} = 0, \tag{1.40}$$

satisfeitas pelas correntes básicas

$$
\begin{aligned}
J &= J^a T^a \\
&= g^{-1}\partial g,
\end{aligned}
\tag{1.41}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{J} &= \bar{J}^a T^a \\
&= -\bar{\partial} g g^{-1}.
\end{aligned}
\tag{1.42}
$$

Aqui, T^a são os geradores da álgebra de Lie G semi-simples, cujos parênteses de Lie podem ser escritos, de uma maneira abstrata, através de

$$[T^a, T^b] = f^{abc} T^c, \tag{1.43}$$

onde f^{abc} são as constantes de estrutura. De fato, devido a (1.39) e a (1.40), segue que

$$J^a = J^a(z), \tag{1.44}$$

$$\bar{J}^a = \bar{J}^a(\bar{z}). \tag{1.45}$$

1.3.5 A álgebra de Kac-Moody

As variações funcionais das correntes quirais J e $\bar{J}$, sob as transformações infinitesimais (1.35), onde

$$\begin{aligned}\Omega(z) &= I + \epsilon(z) \\ &= I + \epsilon^a(z)T^a,\end{aligned} \tag{1.46}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}(\bar{z}) &= I + \bar{\epsilon}(\bar{z}) \\ &= I + \bar{\epsilon}^a(\bar{z})T^a,\end{aligned} \tag{1.47}$$

com I denotando o elemento unitário da álgebra de Lie G semi-simples, são descritas pelas fórmulas

$$\delta J(z) = \partial\epsilon(z) + [J(z), \epsilon(z)], \tag{1.48}$$

$$\bar{\delta}\bar{J}(\bar{z}) = \bar{\partial}\bar{\epsilon}(\bar{z}) + [\bar{J}(\bar{z}), \bar{\epsilon}(\bar{z})], \tag{1.49}$$

onde $\delta = \frac{\delta}{\delta\epsilon}$ e $\bar{\delta} = \frac{\delta}{\delta\bar{\epsilon}}$. Devido a (1.41), (1.42) e (1.46), (1.47), utilizando (1.43), a partir de (1.48), (1.49), decorre que

$$\delta_b J^a = \delta^{ab}\partial\epsilon^b - f^{abc}J^c\epsilon^b, \tag{1.50}$$

$$\bar{\delta}_b \bar{J}^a = \delta^{ab}\bar{\partial}\bar{\epsilon}^b - f^{abc}\bar{J}^c\bar{\epsilon}^b, \tag{1.51}$$

com $\delta_b = \frac{\delta}{\delta\epsilon^b}$ e $\bar{\delta}_b = \frac{\delta}{\delta\bar{\epsilon}^b}$ e onde usamos a propriedade de anti-simetria das constantes de estrutura f^{abc}, pela troca de um par de índices. Neste ponto, identificando

$\epsilon^b = \delta(\sigma - \sigma')$, $\delta_b J^a = \{J^a(\sigma), J^b(\sigma')\}$ e $\bar{\epsilon}^b = \delta(\sigma - \sigma')$, $\bar{\delta}_b \bar{J}^a = \{\bar{J}^a(\sigma), \bar{J}^b(\sigma')\}$, concluímos que

$$\{J^a(\sigma), J^b(\sigma')\} = \delta^{ab}\partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') - f^{abc} J^c(\sigma')\delta(\sigma - \sigma'), \tag{1.52}$$

$$\{\bar{J}^a(\sigma), \bar{J}^b(\sigma')\} = \delta^{ab}\partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') - f^{abc} \bar{J}^c(\sigma')\delta(\sigma - \sigma'), \tag{1.53}$$

onde σ e σ' são dois pontos do espaço-tempo de Minkowski de mesmas coordenadas temporais e coordenadas espaciais distintas. As equações (1.52) e (1.53) mostram que as correntes quirais J e $\bar{J}$ podem ser interpretadas como os geradores de uma álgebra de Kac-Moody.

1.4 A redução hamiltoniana

Nesta seção , apresentamos o método da redução hamiltoniana, que, como veremos, constitui-se de três etapas, a saber a escolha apropriada dos vínculos, a imposição conveniente das correspondentes fixações de calibre, associadas aos vínculos escolhidos, e a exigência da satisfação da condição de buraco-negro, cuja denominação ficará clara, ao longo deste trabalho. A aplicação do método dá-se às correntes quirais J e $\bar{J}$, estudadas na seção anterior, e que, nesta seção , sem perda de generalidade, escrevemos como combinações lineares dos geradores h_i e $E_{\pm\alpha}$ da álgebra de Lie G semi-simples, digamos

$$J = J_i h_i + J_{\mp\alpha} E_{\pm\alpha}, \tag{1.54}$$

$$\bar{J} = \bar{J}_i h_i + \bar{J}_{\pm\alpha} E_{\mp\alpha}. \tag{1.55}$$

Além disto, supomos uma estrutura graduada para a álgebra de Lie G semi-simples.

1.4.1 Os vínculos

Em primeiro lugar, impomos que todas as componentes de J (respectivamente, $\bar{J}$) nas direções dos geradores do tipo escada de graus positivos (respectivamente, negativos) sejam nulas, exceto uma delas, i. e.

$$J_{-\alpha} = 0, \tag{1.56}$$

$$\bar{J}_{\alpha} = 0, \tag{1.57}$$

para toda raiz α, exceto

$$J_{-\beta} = \mu, \tag{1.58}$$

$$\bar{J}_{\beta} = \bar{\mu}, \tag{1.59}$$

para alguma raiz β, onde μ e $\bar{\mu}$ são dois escalares.

No contexto do formalismo canônico, a cada vínculo imposto sobre um campo, exigimos uma fixação de calibre, que deve ser imposta ao momento canonicamente conjugado ao campo vinculado, com o intuito de obter uma redução consistente do espaço de fase, i. e., do espaço linear gerado pelos campos e pelos momentos canonicamente conjugados aos primeiros. A transposição desta exigência para o caso presente constitui, precisamente, a segunda etapa de nosso método, que ora passamos a expor.

1.4.2 As fixações de calibre

Motivados pelo exposto no último parágrafo, para cada imposição de um vínculo do tipo $J_{-\alpha} = 0$ (respectivamente, $\bar{J}_\alpha = 0$), exigimos a fixação de calibre

$$J_\gamma = 0, \tag{1.60}$$

$$\bar{J}_{-\gamma} = 0, \tag{1.61}$$

de tal maneira que a raiz γ satisfaça a seguinte condição

$$\alpha = \beta + \gamma. \tag{1.62}$$

Observe que esta exigência garante que todas as contribuições possíveis para a componente $J_{-\beta}$ (respectivamente, $\bar{J}_\beta$), que, no âmbito do formalismo canônico, provêm dos parênteses de Poisson do tipo $\{J_{-\alpha}(\sigma), J_\gamma(\sigma')\}$ (respectivamente, do tipo $\{\bar{J}_\alpha(\sigma), \bar{J}_{-\gamma}(\sigma')\}$), sejam proporcionais a μ (respectivamente, $\bar{\mu}$). Como estas estruturas algébricas são calculadas a partir dos parênteses de Poisson elementares do tipo $\{\phi_i(\sigma), \Pi_i(\sigma')\}$, onde ϕ_i e Π_i denotam os campos físicos e os momentos canonicamente conjugados aos primeiros, respectivamente, a exigência do formalismo canônico está cumprida.

Suponha, entretanto, que não exista nenhuma raiz γ que satisfaça a condição (1.62), para uma dada raiz α. Neste caso, exigimos que a fixação de calibre, associada ao vínculo $J_{-\alpha} = 0$ (respectivamente, $\bar{J}_{\alpha} = 0$), seja dada por $J_{\alpha} = 0$ (respectivamente, $\bar{J}_{-\alpha} = 0$). Note que, agora, esta exigência garante o anulamento da contribuição dos parênteses de Poisson do tipo $\{J_{-\alpha}(\sigma), J_{\alpha}(\sigma')\}$ (respectivamente, $\{\bar{J}_{\alpha}(\sigma), \bar{J}_{-\alpha}(\sigma')\}$) para as componentes J_i (respectivamente, $\bar{J}_i$), e sugere exigir que a fixação de calibre, associada ao vínculo $J_{-\beta} = \mu$ (respectivamente, $\bar{J}_{\beta} = \bar{\mu}$), seja dada por

$$J_{\beta \cdot H} = 0, \tag{1.63}$$

$$\bar{J}_{-\beta \cdot H} = 0, \tag{1.64}$$

onde H denota a subálgebra de Cartan da álgebra de Lie G semi-simples.

Há, porém, um preço a pagar, quando desta última exigência de fixação de calibre, e isto nos conduz, precisamente, à terceira, e última, etapa de nosso método.

1.4.3 A condição de buraco-negro

Com o intuito de anular a contribuição para a componente J_i (respectivamente, $\bar{J}_i$), que provem dos parênteses de Poisson do tipo $\{J_i(\sigma), J_{-\beta}(\sigma')\}$ (respectivamente, $\{\bar{J}_i(\sigma), \bar{J}_{\beta}(\sigma')\}$), e uma vez que já exigimos a fixação de calibre (1.63) (respectivamente, (1.64)), associada à imposição do vínculo (1.58) (respectivamente, (1.59)), basta exigir, também, que as seguintes condições sejam satisfeitas

$$J_{\delta \cdot H} = 0, \tag{1.65}$$

$$\bar{J}_{-\delta \cdot H} = 0, \tag{1.66}$$

onde $\delta \cdot H$ denota uma direção , na subálgebra de Cartan H, ortogonal à direção denotada por $\beta \cdot H$. As condições (1.65) e (1.66) são chamadas de condições de buraco-negro. Elas são denominadas assim devido ao fato de que, quando satisfeitas pelos campos físicos, conferem a eles um caráter não -local, que se reflete numa singularidade do tipo buraco-negro, presente na ação que descreve o modelo reduzido de WZW, como veremos ao longo deste trabalho.

Capítulo 2

Os modelos reduzidos de um buraco-negro

Neste capítulo, apresentamos os quatro modelos que decorrem da aplicação do método da redução hamiltoniana às componentes das correntes de quiralidades conservadas do modelo de WZW, conforme exposto no **Apêndice C**.

No que segue, definimos as relações entre as derivadas quirais e as derivadas cartesianas dos campos dos quatro modelos reduzidos da seguinte maneira

$$\partial = \partial_t - \partial_x, \tag{2.1}$$

$$\bar{\partial} = \partial_t + \partial_x, \tag{2.2}$$

ou, equivalentemente, designamos estas relações do seguinte modo

$$\partial_t = \frac{1}{2}(\bar{\partial} + \partial), \tag{2.3}$$

$$\partial_x = \frac{1}{2}(\bar{\partial} - \partial). \tag{2.4}$$

Denotamos, também, exaustivamente, as derivadas cartesianas da seguinte forma

$$\dot{\phi}_i = \partial_t \phi_i, \tag{2.5}$$

$$\phi_i' = \partial_x \phi_i. \tag{2.6}$$

No **Apêndice B**, exibimos as lagrangianas que descrevem os quatro modelos reduzidos. Neste capítulo, estas lagrangianas escrevem-se, de maneira geral, através de

$$L = L(\phi_i, \partial\phi_i, \bar{\partial}\phi_i). \tag{2.7}$$

Com o intuito de verificar a estrutura algébrica satisfeita pelas correntes de quiralidades conservadas dos modelos reduzidos, o que faremos no próximo capítulo, neste calculamos os momentos canonicamente conjugados aos campos, através da definicão

$$\Pi_i = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}_i}. \tag{2.8}$$

Por outro lado, motivados pela verificação da conservação das quiralidades das correntes dos modelos reduzidos, calculamos, também, a partir das lagrangianas que os descrevem, as equações de Euler-Lagrange, a saber

$$\frac{\delta L}{\delta \phi_i} = \partial \left[\frac{\delta L}{\delta(\partial \phi_i)} \right] + \bar{\partial} \left[\frac{\delta L}{\delta(\bar{\partial}\phi_i)} \right]. \tag{2.9}$$

2.1 O modelo-I

De acordo com o **Apêndice B**, o termo cinético e o potencial que descrevem o modelo-I escrevem-se, respectivamente, em termos dos campos físicos como

$$T = \partial\varphi_1\bar{\partial}\varphi_1 - \partial\varphi_1\bar{\partial}\varphi_2 - \partial\varphi_2\bar{\partial}\varphi_1 + 2\partial\varphi_2\bar{\partial}\varphi_2 + 2\partial\psi\bar{\partial}\chi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2}, \tag{2.10}$$

$$V = e^{2\varphi_1 - 2\varphi_2}. \tag{2.11}$$

Estes campos físicos, conforme o exposto no **Apêndice C**, satisfazem uma condição de buraco-negro, a saber

$$\partial\varphi_2 + \chi\partial\psi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2} = 0. \tag{2.12}$$

Ainda, no **Apêndice C**, encontramos as correntes de quiralidade direita conservada do modelo-I, que são dadas em termos dos campos não -físicos na forma

$$J_{-\alpha_2} = \partial\psi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2}, \tag{2.13}$$

$$J_{\alpha_1} = \partial\chi_1 + \chi_1^2 + 2\chi_2 J_{-\alpha_2}, \tag{2.14}$$

$$J_{\alpha_1+\alpha_2} = \partial\chi_2 + \chi_1\chi_2 - \chi_3 J_{-\alpha_2}. \tag{2.15}$$

Os campos não -físicos, por sua vez, são dados em termos dos físicos através de

$$\chi_1 = -\partial\varphi_1, \tag{2.16}$$

$$\chi_2 = (\partial\chi + \chi\partial\varphi_1 + \chi^2\partial\psi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2}), \tag{2.17}$$

$$\partial\chi_3 = -\chi_2^2. \tag{2.18}$$

Do exposto acima, é imediato verificar que χ_3, J_{α_1} e $J_{\alpha_1+\alpha_2}$ escrevem-se em termos de χ_1, χ_2 e $J_{-\alpha_2}$.

2.1.1 O termo cinético desacoplado

Com o intuito de desacoplar os campos físicos que figuram no termo cinético, propomos uma transformação de variáveis, a saber

$$\varphi_1 = \phi + \rho, \tag{2.19}$$

$$\varphi_2 = \rho. \tag{2.20}$$

De fato, desta transformação de variáveis, segue que o termo cinético reescreve-se como

$$T = \partial\phi\bar{\partial}\phi + \partial\rho\bar{\partial}\rho + 2\partial\psi\bar{\partial}\chi e^{\phi-\rho}. \qquad (2.21)$$

Além disto, dela decorre também que o potencial reescreve-se como

$$V = e^{2\phi}. \qquad (2.22)$$

A condição de buraco-negro é, agora, dada por

$$\partial\rho + \chi\partial\psi e^{\phi-\rho} = 0. \qquad (2.23)$$

Finalmente, concluímos que

$$\chi_1 = -\partial\phi + \chi\partial\psi e^{\phi-\rho}, \qquad (2.24)$$

$$\chi_2 = (\partial\chi + \chi\partial\phi), \qquad (2.25)$$

$$J_{-\alpha_2} = \partial\psi e^{\phi-\rho}. \qquad (2.26)$$

2.1.2 A lagrangiana singular

Por outro lado, motivados pelo desejo de manifestar explicitamente o caráter não -local do campo físico ρ, propomos uma segunda transformação de variáveis, a saber

$$\psi = \tilde{\psi} e^{\frac{\rho}{2}}, \tag{2.27}$$

$$\chi = \tilde{\chi} e^{\frac{\rho}{2}}. \tag{2.28}$$

Desta transformação de variáveis, com efeito, segue que

$$\partial \rho = -\frac{\tilde{\chi}\partial\tilde{\psi}}{\Delta} e^{\phi}, \tag{2.29}$$

$$\bar{\partial} \rho = -\frac{\tilde{\psi}\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta} e^{\phi}, \tag{2.30}$$

onde

$$\Delta = 1 + \frac{1}{2}\tilde{\psi}\tilde{\chi} e^{\phi}. \tag{2.31}$$

A equação (2.30) é a condição de buraco-negro que segue da aplicação do método da redução hamiltoniana às componentes da corrente de quiralidade esquerda conservada do modelo de WZW. A não -localidade do campo físico ρ, manifesta pelas condições de buraco-negro acima, fornece um caráter singular à lagrangiana. De fato, a partir desta transformação de variáveis, decorre que a lagrangiana reescreve-se como

$$L = k\left(-e^{2\phi} + \partial\phi\bar{\partial}\phi + 2\frac{\partial\tilde{\psi}\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta} e^{\phi}\right). \tag{2.32}$$

Concluímos, finalmente, que

$$J_{-\alpha_2} = \left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\Delta}e^{\phi}\right)e^{-\frac{\varrho}{2}}, \tag{2.33}$$

$$\chi_1 = -\partial\phi + \frac{\tilde{\chi}\partial\tilde{\psi}}{\Delta}e^{\phi}, \tag{2.34}$$

$$\chi_2 = \left(\partial\tilde{\chi} + \tilde{\chi}\partial\phi - \frac{1}{2}\frac{\tilde{\chi}^2\partial\tilde{\psi}}{\Delta}e^{\phi}\right)e^{\frac{\varrho}{2}}. \tag{2.35}$$

2.1.3 Os momentos

A equação (2.8) conduz aos momentos canonicamente conjugados aos campos físicos, a saber

$$\Pi_{\phi} = 2k(\phi' + \partial\phi), \tag{2.36}$$

$$\Pi_{\tilde{\psi}} = 2k\frac{\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta}e^{\phi}, \tag{2.37}$$

$$\Pi_{\tilde{\chi}} = 2k\frac{\partial\tilde{\psi}}{\Delta}e^{\phi}. \tag{2.38}$$

Uma vez de posse destes momentos, podemos reescrever as condições de buraco-negro como

$$\partial\rho = -\frac{1}{2k}\tilde{\chi}\Pi_{\tilde{\chi}}, \tag{2.39}$$

$$\bar{\partial}\rho = -\frac{1}{2k}\tilde{\psi}\Pi_{\tilde{\psi}}. \tag{2.40}$$

Finalmente, concluímos que

$$J_{-\alpha_2} = \frac{1}{2k}\Pi_{\tilde{\chi}}e^{-\frac{\rho}{2}}, \tag{2.41}$$

$$\chi_1 = \phi' - \frac{1}{2k}\Pi_\phi + \frac{1}{2k}\tilde{\chi}\Pi_{\tilde{\chi}}, \tag{2.42}$$

$$\chi_2 = \left(-\tilde{\chi}\phi' + \frac{1}{2k}\tilde{\chi}\Pi_\phi + \frac{1}{2k}\Delta\Pi_{\tilde{\psi}}e^{-\phi} - 2\tilde{\chi}' - \frac{1}{4k}\tilde{\chi}^2\Pi_{\tilde{\chi}}\right)e^{\frac{\rho}{2}}. \tag{2.43}$$

Os momentos canonicamente conjugados aos campos físicos, ora obtidos, serão exaustivamente utilizados no próximo capítulo, quando do cálculo da estrutura algébrica satisfeita pelas correntes remanescentes $J_{-\alpha_2}$, J_{α_1} e $J_{\alpha_1+\alpha_2}$.

2.1.4 As equações de Euler-Lagrange

A equação (2.9) remete às equações de Euler-Lagrange, a saber

$$\bar{\partial}\partial\phi = -e^{2\phi} + \frac{\partial\tilde{\psi}\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta^2}e^{\phi}, \tag{2.44}$$

$$\partial\left(2\frac{\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta}e^{\phi}\right) = -\tilde{\chi}\frac{\partial\tilde{\psi}\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta^2}e^{2\phi}, \tag{2.45}$$

$$\bar{\partial}\left(2\frac{\partial\tilde{\psi}}{\Delta}e^{\phi}\right) = -\tilde{\psi}\frac{\partial\tilde{\psi}\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta^2}e^{2\phi}. \tag{2.46}$$

Com o auxílio dos momentos canonicamente conjugados aos campos físicos que figuram no parágrafo anterior, reescrevêmo-las como

$$\partial\Pi_{\phi} = 2k(\phi'' - e^{2\phi}) - \Pi'_{\phi} + \frac{1}{2k}\Pi_{\tilde{\psi}}\Pi_{\tilde{\chi}}e^{-\phi}, \tag{2.47}$$

$$\partial\Pi_{\tilde{\psi}} = -\frac{1}{4k}\tilde{\chi}\Pi_{\tilde{\psi}}\Pi_{\tilde{\chi}}, \tag{2.48}$$

$$\bar{\partial}\Pi_{\tilde{\chi}} = -\frac{1}{4k}\tilde{\psi}\Pi_{\tilde{\psi}}\Pi_{\tilde{\chi}}. \tag{2.49}$$

Fazendo uso das equações de Euler-Lagrange, ora obtidas, é imediato verificar a conservação da quiralidade direita das correntes remanescentes $J_{-\alpha_2}$, J_{α_1} e $J_{\alpha_1+\alpha_2}$.

2.2 O modelo-II

De acordo com o **Apêndice B**, o termo cinético e o potencial que descrevem o modelo-II escrevem-se, respectivamente, em termos dos campos físicos como

$$T = \partial\varphi_1\bar{\partial}\varphi_1 - \partial\varphi_1\bar{\partial}\varphi_2 - \partial\varphi_2\bar{\partial}\varphi_1 + 2\partial\varphi_2\bar{\partial}\varphi_2 + \partial\psi\bar{\partial}\chi e^{2\varphi_2-2\varphi_1}, \tag{2.50}$$

$$V = 2e^{2\varphi_2-\varphi_1}. \tag{2.51}$$

Estes campos físicos, conforme o exposto no **Apêndice C**, satisfazem uma condição de buraco-negro, a saber

$$\partial\varphi_1 + \chi\partial\psi e^{2\varphi_2-2\varphi_1} = 0. \tag{2.52}$$

Ainda, no **Apêndice C**, encontramos as correntes de quiralidade direita conservada do modelo-II, que são dadas em termos dos campos não -físicos na forma

$$J_{-\alpha_1} = \partial\psi e^{2\varphi_2-2\varphi_1}, \tag{2.53}$$

$$J_{\alpha_2} = \partial\chi_1 + \chi_1^2 - \chi_2 J_{-\alpha_1}, \tag{2.54}$$

$$J_{\alpha_1+2\alpha_2} = \partial\chi_3 + \chi_1\partial\chi_2 - \chi_2\partial\chi_1 + \chi_2^2 J_{-\alpha_1}. \tag{2.55}$$

Os campos não -físicos, por sua vez, são dados em termos dos físicos através de

$$\chi_1 = -\partial\varphi_2, \tag{2.56}$$

$$\chi_2 = -\frac{1}{2}(\partial\chi + 2\chi\partial\varphi_2 + \chi^2\partial\psi e^{2\varphi_2 - 2\varphi_1}), \tag{2.57}$$

$$\chi_3 = \partial\chi_2 + \chi_1\chi_2. \tag{2.58}$$

Do exposto acima, é imediato verificar que χ_3, J_{α_2} e $J_{\alpha_1+2\alpha_2}$ escrevem-se em termos de χ_1, χ_2 e $J_{-\alpha_1}$.

2.2.1 O termo cinético desacoplado

Com o intuito de desacoplar os campos físicos que figuram no termo cinético propomos uma transformação de variáveis, a saber

$$\varphi_1 = \rho, \tag{2.59}$$

$$\varphi_2 = \phi + \frac{1}{2}\rho. \tag{2.60}$$

De fato, desta transformação de variáveis, segue que o termo cinético reescreve-se como

$$T = 2\partial\phi\bar{\partial}\phi + \frac{1}{2}\partial\rho\bar{\partial}\rho + \partial\psi\bar{\partial}\chi e^{2\phi-\rho}. \tag{2.61}$$

Além disto, dela decorre também que o potencial reescreve-se como

$$V = 2e^{2\phi}. \tag{2.62}$$

A condição de buraco-negro é, agora, dada por

$$\partial\rho + \chi\partial\psi e^{2\phi-\rho} = 0. \tag{2.63}$$

Finalmente, concluímos que

$$\chi_1 = -\partial\phi + \frac{1}{2}\chi\partial\psi e^{2\phi-\rho}, \tag{2.64}$$

$$\chi_2 = -\frac{1}{2}(\partial\chi + 2\chi\partial\phi), \tag{2.65}$$

$$J_{-\alpha_1} = \partial\psi e^{2\phi-\rho}. \tag{2.66}$$

2.2.2 A lagrangiana singular

Por outro lado, motivados pelo desejo de manifestar explicitamente o caráter não -local do campo físico ρ, propomos uma segunda transformação de variáveis, a saber

$$\psi = \tilde{\psi} e^{\frac{\rho}{2}}, \tag{2.67}$$

$$\chi = \tilde{\chi} e^{\frac{\rho}{2}}. \tag{2.68}$$

Desta transformação de variáveis, com efeito, segue que

$$\partial \rho = -\frac{\tilde{\chi} \partial \tilde{\psi}}{\Delta} e^{2\phi}, \tag{2.69}$$

$$\bar{\partial} \rho = -\frac{\tilde{\psi} \bar{\partial} \tilde{\chi}}{\Delta} e^{2\phi}, \tag{2.70}$$

onde

$$\Delta = 1 + \frac{1}{2} \tilde{\psi} \tilde{\chi} e^{2\phi}. \tag{2.71}$$

A equação (2.70) é a condição de buraco-negro que segue da aplicação do método da redução hamiltoniana às componentes da corrente de quiralidade esquerda conservada do modelo de WZW. A não -localidade do campo físico ρ, manifesta pelas condições de buraco-negro acima, fornece um caráter singular à lagrangiana. De fato, a partir desta transformação de variáveis, decorre que a lagrangiana reescreve-se como

$$L = k \left(-2e^{2\phi} + 2\partial \phi \bar{\partial} \phi + \frac{\partial \tilde{\psi} \bar{\partial} \tilde{\chi}}{\Delta} e^{2\phi} \right). \tag{2.72}$$

Concluímos, finalmente, que

$$J_{-\alpha_1} = \left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\Delta}e^{2\phi}\right)e^{-\frac{\varrho}{2}}, \tag{2.73}$$

$$\chi_1 = -\partial\phi + \frac{1}{2}\frac{\tilde{\chi}\partial\tilde{\psi}}{\Delta}e^{2\phi}, \tag{2.74}$$

$$\chi_2 = -\frac{1}{2}\left(\partial\tilde{\chi} + 2\tilde{\chi}\partial\phi - \frac{1}{2}\frac{\tilde{\chi}^2\partial\tilde{\psi}}{\Delta}e^{2\phi}\right)e^{\frac{\varrho}{2}}. \tag{2.75}$$

2.2.3 Os momentos

A equação (2.8) conduz aos momentos canonicamente conjugados aos campos físicos, a saber

$$\Pi_\phi = 4k(\phi' + \partial\phi), \tag{2.76}$$

$$\Pi_{\tilde{\psi}} = k\frac{\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta}e^{2\phi}, \tag{2.77}$$

$$\Pi_{\tilde{\chi}} = k\frac{\partial\tilde{\psi}}{\Delta}e^{2\phi}. \tag{2.78}$$

Uma vez de posse destes momentos, podemos reescrever as condições de buraco-negro como

$$\partial\rho = -\frac{1}{k}\tilde{\chi}\Pi_{\tilde{\chi}}, \tag{2.79}$$

$$\bar{\partial}\rho = -\frac{1}{k}\tilde{\psi}\Pi_{\tilde{\psi}}. \tag{2.80}$$

Finalmente, concluímos que

$$J_{-\alpha_1} = \frac{1}{k}\Pi_{\tilde{\chi}}e^{-\frac{\rho}{2}}, \tag{2.81}$$

$$\chi_1 = \phi' - \frac{1}{4k}\Pi_\phi + \frac{1}{2k}\tilde{\chi}\Pi_{\tilde{\chi}}, \tag{2.82}$$

.

$$\chi_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k}\tilde{\chi}\Pi_\phi - 2\tilde{\chi}\phi' + \frac{1}{k}\Delta\Pi_{\tilde{\psi}}e^{-2\phi} - 2\tilde{\chi}' - \frac{1}{2k}\tilde{\chi}^2\Pi_{\tilde{\chi}}\right)e^{\frac{\rho}{2}}. \tag{2.83}$$

Os momentos canonicamente conjugados aos campos físicos, ora obtidos, serão exaustivamente utilizados no próximo capítulo, quando do cálculo da estrutura algébrica satisfeita pelas correntes remanescentes $J_{-\alpha_1}$, J_{α_2} e $J_{\alpha_1+2\alpha_2}$.

2.2.4 As equações de Euler-Lagrange

A equação (2.9) remete às equações de Euler-Lagrange, a saber

$$\bar{\partial}\partial\phi = -2e^{2\phi} + \frac{\partial\tilde{\psi}\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta^2}e^{2\phi}, \tag{2.84}$$

$$\partial\left(\frac{\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta}e^{2\phi}\right) = -\frac{1}{2}\tilde{\chi}\frac{\partial\tilde{\psi}\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta^2}e^{4\phi}, \tag{2.85}$$

$$\bar{\partial}\left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\Delta}e^{2\phi}\right) = -\frac{1}{2}\tilde{\psi}\frac{\partial\tilde{\psi}\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta^2}e^{4\phi}. \tag{2.86}$$

Com o auxílio dos momentos canonicamente conjugados aos campos físicos que figuram no parágrafo anterior, reescrevêmo-las como

$$\partial\Pi_\phi = 4k(\phi'' - 2e^{2\phi}) - \Pi'_\phi + \frac{4}{k}\Pi_{\tilde{\psi}}\Pi_{\tilde{\chi}}e^{-2\phi}, \tag{2.87}$$

$$\partial\Pi_{\tilde{\psi}} = -\frac{1}{2k}\tilde{\chi}\Pi_{\tilde{\psi}}\Pi_{\tilde{\chi}}, \tag{2.88}$$

$$\bar{\partial}\Pi_{\tilde{\chi}} = -\frac{1}{2k}\tilde{\psi}\Pi_{\tilde{\psi}}\Pi_{\tilde{\chi}}. \tag{2.89}$$

Fazendo uso das equações de Euler-Lagrange, ora obtidas, é imediato verificar a conservação da quiralidade direita das correntes remanescentes $J_{-\alpha_1}$, J_{α_2} e $J_{\alpha_1+2\alpha_2}$.

2.3 O modelo-III

De acordo com o **Apêndice B**, o termo cinético e o potencial que descrevem o modelo-III escrevem-se, respectivamente, em termos dos campos físicos como

$$T = \partial\varphi_1\bar{\partial}\varphi_1 - \partial\varphi_1\bar{\partial}\varphi_2 - \partial\varphi_2\bar{\partial}\varphi_1 + 2\partial\varphi_2\bar{\partial}\varphi_2 + 2\partial\psi\bar{\partial}\chi e^{\varphi_1-2\varphi_2}, \tag{2.90}$$

$$V = 2(1 + 2\psi\chi e^{\varphi_1-2\varphi_2})e^{\varphi_1}. \tag{2.91}$$

Estes campos físicos, conforme o exposto no **Apêndice C**, satisfazem uma condição de buraco-negro, a saber

$$\partial\varphi_2 - \frac{1}{2}\partial\varphi_1 + \chi\partial\psi e^{\varphi_1-2\varphi_2} = 0. \tag{2.92}$$

Ainda, no **Apêndice C**, encontramos as correntes de quiralidade direita conservada do modelo-III, que são dadas em termos dos campos não -físicos na forma

$$J_{\alpha_1} = \partial\chi_1 + 2\chi_1\chi_2, \tag{2.93}$$

$$J_{\alpha_1+\alpha_2} = \partial\chi_2 + \chi_2^2 - \chi_1\chi_3, \tag{2.94}$$

$$J_{\alpha_1+2\alpha_2} = \partial\chi_3 + 2\chi_2\chi_3. \tag{2.95}$$

Os campos não -físicos, por sua vez, são dados em termos dos físicos através de

$$\chi_1 = \partial\psi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2}, \tag{2.96}$$

$$\chi_2 = -\frac{1}{2}\partial\varphi_1, \tag{2.97}$$

$$\chi_3 = -(\partial\chi + \chi^2\partial\psi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2}). \tag{2.98}$$

Do exposto acima, é imediato verificar que J_{α_1}, $J_{\alpha_1+\alpha_2}$ e $J_{\alpha_1+2\alpha_2}$ escrevem-se em termos de χ_1, χ_2 e χ_3.

2.3.1 O termo cinético desacoplado

Com o intuito de desacoplar os campos físicos que figuram no termo cinético propomos uma transformação de variáveis, a saber

$$\varphi_1 = \phi, \tag{2.99}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\phi + \rho. \tag{2.100}$$

De fato, desta transformação de variáveis, segue que o termo cinético reescreve-se como

$$T=\frac{1}{2}\partial\phi\bar{\partial}\phi+2\partial\rho\bar{\partial}\rho+2\partial\psi\bar{\partial}\chi e^{-2\rho}. \tag{2.101}$$

Além disto, dela decorre também que o potencial reescreve-se como

$$V=2(1+2\psi\chi e^{-2\rho})e^{\phi}. \tag{2.102}$$

A condição de buraco-negro é, agora, dada por

$$\partial\rho+\chi\partial\psi e^{-2\rho}=0. \tag{2.103}$$

Finalmente, concluímos que

$$\chi_1=\partial\psi e^{-2\rho}, \tag{2.104}$$

$$\chi_2=-\frac{1}{2}\partial\phi, \tag{2.105}$$

$$\chi_3=-(\partial\chi+\chi^2\partial\psi e^{-2\rho}). \tag{2.106}$$

2.3.2 A lagrangiana singular

Por outro lado, motivados pelo desejo de manifestar explicitamente o caráter não -local do campo físico ρ, propomos uma segunda transformação de variáveis, a saber

$$\psi = \tilde{\psi} e^{\rho}, \tag{2.107}$$

$$\chi = \tilde{\chi} e^{\rho}. \tag{2.108}$$

Desta transformação de variáveis, com efeito, segue que

$$\partial\rho = -\frac{\tilde{\chi}\partial\tilde{\psi}}{\Delta}, \tag{2.109}$$

$$\bar{\partial}\rho = -\frac{\tilde{\psi}\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta}, \tag{2.110}$$

onde

$$\Delta = 1 + \tilde{\psi}\tilde{\chi}. \tag{2.111}$$

A equação (2.110) é a condição de buraco-negro que segue da aplicação do método da redução hamiltoniana às componentes da corrente de quiralidade esquerda conservada do modelo de WZW. A não -localidade do campo físico ρ, manifesta pelas condições de buraco-negro acima, fornece um caráter singular à lagrangiana. De fato, a partir desta transformação de variáveis, decorre que a lagrangiana reescreve-se como

$$L = k\left[-2(1 + 2\tilde{\psi}\tilde{\chi})e^{\phi} + \frac{1}{2}\partial\phi\bar{\partial}\phi + 2\frac{\partial\tilde{\psi}\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta}\right]. \tag{2.112}$$

Concluímos, finalmente, que

$$\chi_1 = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\Delta} e^{-\rho}, \tag{2.113}$$

$$\chi_2 = -\frac{1}{2} \partial \phi, \tag{2.114}$$

$$\chi_3 = -\partial \tilde{\chi} e^{\rho}. \tag{2.115}$$

2.3.3 Os momentos

A equação (2.8) conduz aos momentos canonicamente conjugados aos campos físicos, a saber

$$\Pi_\phi = k(\phi' + \partial \phi), \tag{2.116}$$

$$\Pi_{\tilde{\psi}} = 2k \frac{\bar{\partial} \tilde{\chi}}{\Delta}, \tag{2.117}$$

$$\Pi_{\tilde{\chi}} = 2k \frac{\partial \tilde{\psi}}{\Delta}. \tag{2.118}$$

Uma vez de posse destes momentos, podemos reescrever as condições de buraco-negro como

$$\partial\rho = -\frac{1}{2k}\tilde{\chi}\Pi_{\tilde{\chi}}, \tag{2.119}$$

$$\bar{\partial}\rho = -\frac{1}{2k}\tilde{\psi}\Pi_{\tilde{\psi}}. \tag{2.120}$$

Finalmente, concluímos que

$$\chi_1 = \frac{1}{2k}\Pi_{\tilde{\chi}}e^{-\rho}, \tag{2.121}$$

$$\chi_2 = \frac{1}{2}\left(\phi' - \frac{1}{k}\Pi_{\phi}\right), \tag{2.122}$$

$$\chi_3 = \left(2\tilde{\chi}' - \frac{1}{2k}\Delta\Pi_{\tilde{\psi}}\right)e^{\rho}. \tag{2.123}$$

Os momentos canonicamente conjugados aos campos físicos, ora obtidos, serão exaustivamente utilizados no próximo capítulo, quando do cálculo da estrutura algébrica satisfeita pelas correntes remanescentes J_{α_1}, $J_{\alpha_1+\alpha_2}$ e $J_{\alpha_1+2\alpha_2}$.

2.3.4 As equações de Euler-Lagrange

A equação (2.9) remete às equações de Euler-Lagrange, a saber

$$\bar{\partial}\partial\phi = -2(1+2\tilde{\psi}\tilde{\chi})e^{\phi}, \tag{2.124}$$

$$\partial\left(2\frac{\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta}\right) = -4\tilde{\chi}e^{\phi} - 2\tilde{\chi}\frac{\partial\tilde{\psi}\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta^2}, \tag{2.125}$$

$$\bar{\partial}\left(2\frac{\partial\tilde{\psi}}{\Delta}\right) = -4\tilde{\psi}e^{\phi} - 2\tilde{\psi}\frac{\partial\tilde{\psi}\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta^2}. \tag{2.126}$$

Com o auxílio dos momentos canonicamente conjugados aos campos físicos que figuram no parágrafo anterior, reescrevêmo-las como

$$\partial\Pi_{\phi} = k[\phi'' - 2(1+2\tilde{\psi}\tilde{\chi})e^{\phi}] - \Pi_{\phi}', \tag{2.127}$$

$$\partial\Pi_{\tilde{\psi}} = -4k\tilde{\chi}e^{\phi} - \frac{1}{2k}\tilde{\chi}\Pi_{\tilde{\psi}}\Pi_{\tilde{\chi}}, \tag{2.128}$$

$$\bar{\partial}\Pi_{\tilde{\chi}} = -4k\tilde{\psi}e^{\phi} - \frac{1}{2k}\tilde{\psi}\Pi_{\tilde{\psi}}\Pi_{\tilde{\chi}}. \tag{2.129}$$

Fazendo uso das equações de Euler-Lagrange, ora obtidas, é imediato verificar a conservação da quiralidade direita das correntes remanescentes J_{α_1}, $J_{\alpha_1+\alpha_2}$ e $J_{\alpha_1+2\alpha_2}$.

2.4 O modelo-IV

De acordo com o **Apêndice B**, o termo cinético e o potencial que descrevem o modelo-IV escrevem-se, respectivamente, em termos dos campos físicos como

$$T = \partial\varphi_1\bar{\partial}\varphi_1 - \partial\varphi_1\bar{\partial}\varphi_2 - \partial\varphi_2\bar{\partial}\varphi_1 + 2\partial\varphi_2\bar{\partial}\varphi_2 + 2\partial\psi\bar{\partial}\chi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2}, \tag{2.130}$$

$$V = [(1 + \psi\chi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2})e^{\varphi_2}]^2. \tag{2.131}$$

Estes campos físicos, conforme o exposto no **Apêndice C**, satisfazem uma condição de buraco-negro, a saber

$$\partial\varphi_1 - \partial\varphi_2 - \chi\partial\psi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2} = 0. \tag{2.132}$$

Ainda, no **Apêndice C**, encontramos as correntes de quiralidade direita conservada do modelo-IV, que são dadas em termos dos campos não -físicos na forma

$$J_{\alpha_2} = \partial\chi - \chi\partial\varphi_2, \tag{2.133}$$

$$J_{\alpha_1+\alpha_2} = \partial\chi_2 + \chi_2\chi_3 + \chi_1 J_{\alpha_2}, \tag{2.134}$$

$$J_{\alpha_1+2\alpha_2} = \partial\chi_3 + \chi_3^2 - 2\chi_2 J_{\alpha_2}. \tag{2.135}$$

Os campos não -físicos, por sua vez, são dados em termos dos físicos através de

$$\partial\chi_1 = \chi_2^2, \tag{2.136}$$

$$\chi_2 = -\partial\psi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2}, \tag{2.137}$$

$$\chi_3 = -\partial\varphi_1. \tag{2.138}$$

Do exposto acima, é imediato verificar que χ_1, $J_{\alpha_1+\alpha_2}$ e $J_{\alpha_1+2\alpha_2}$ escrevem-se em termos de χ_2, χ_3 e J_{α_2}.

2.4.1 O termo cinético desacoplado

Com o intuito de desacoplar os campos físicos que figuram no termo cinético propomos uma transformação de variáveis, a saber

$$\varphi_1 = \phi + \rho, \tag{2.139}$$

$$\varphi_2 = \phi. \tag{2.140}$$

De fato, desta transformação de variáveis, segue que o termo cinético reescreve-se como

$$T = \partial\phi\bar{\partial}\phi + \partial\rho\bar{\partial}\rho + \partial\psi\bar{\partial}\chi e^{\rho-\phi}. \tag{2.141}$$

Além disto, dela decorre também que o potencial reescreve-se como

$$V = [(1 + \psi\chi e^{\rho-\phi})e^{\phi}]^2. \tag{2.142}$$

A condição de buraco-negro é, agora, dada por

$$\partial\rho - \chi\partial\psi e^{\rho-\phi} = 0. \tag{2.143}$$

Finalmente, concluímos que

$$\chi_2 = -\partial\psi e^{\rho-\phi}, \tag{2.144}$$

$$\chi_3 = -(\partial\phi + \chi\partial\psi e^{\rho-\phi}), \tag{2.145}$$

$$J_{\alpha_2} = \partial\chi - \chi\partial\phi. \tag{2.146}$$

2.4.2 A lagrangiana singular

Por outro lado, motivados pelo desejo de manifestar explicitamente o caráter não -local do campo físico ρ, propomos uma segunda transformação de variáveis, a saber

$$\psi = \tilde{\psi} e^{-\frac{\rho}{2}}, \tag{2.147}$$

$$\chi = \tilde{\chi} e^{-\frac{\rho}{2}}. \tag{2.148}$$

Desta transformação de variáveis, com efeito, segue que

$$\partial \rho = \frac{\tilde{\chi} \partial \tilde{\psi}}{\Delta} e^{-\phi}, \tag{2.149}$$

$$\bar{\partial} \rho = \frac{\tilde{\psi} \bar{\partial} \tilde{\chi}}{\Delta} e^{-\phi}, \tag{2.150}$$

onde

$$\Delta = 1 + \frac{1}{2} \tilde{\psi} \tilde{\chi} e^{-\phi}. \tag{2.151}$$

A equação (2.150) é a condição de buraco-negro que segue da aplicação do método da redução hamiltoniana às componentes da corrente de quiralidade esquerda conservada do modelo de WZW. A não -localidade do campo físico ρ, manifesta pelas condições de buraco-negro acima, fornece um caráter singular à lagrangiana. De fato, a partir desta transformação de variáveis, decorre que a lagrangiana reescreve-se como

$$L = k \left\{ -[(1 + \tilde{\psi} \tilde{\chi} e^{-\phi}) e^{\phi}]^2 + \partial \phi \bar{\partial} \phi + 2 \frac{\partial \tilde{\psi} \bar{\partial} \tilde{\chi}}{\Delta} e^{-\phi} \right\}. \tag{2.152}$$

Concluímos, finalmente, que

$$J_{\alpha_2} = \left(\partial\tilde{\chi} - \tilde{\chi}\partial\phi - \frac{1}{2}\frac{\tilde{\chi}^2\partial\tilde{\psi}}{\Delta}e^{-\phi} \right) e^{-\frac{\varrho}{2}}, \tag{2.153}$$

$$\chi_3 = -\partial\phi - \frac{\tilde{\chi}\partial\tilde{\psi}}{\Delta}e^{-\phi}, \tag{2.154}$$

$$\chi_2 = -\left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\Delta}e^{-\phi} \right) e^{\frac{\varrho}{2}}. \tag{2.155}$$

2.4.3 Os momentos

A equação (2.8) conduz aos momentos canonicamente conjugados aos campos físicos, a saber

$$\Pi_\phi = 2k(\phi' + \partial\phi), \tag{2.156}$$

$$\Pi_{\tilde{\psi}} = 2k\frac{\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta}e^{-\phi}, \tag{2.157}$$

$$\Pi_{\tilde{\chi}} = 2k\frac{\partial\tilde{\psi}}{\Delta}e^{-\phi}. \tag{2.158}$$

Uma vez de posse destes momentos, podemos reescrever as condições de buraco-negro como

$$\partial\rho = \frac{1}{2k}\tilde{\chi}\Pi_{\tilde{\chi}}, \tag{2.159}$$

$$\bar{\partial}\rho = \frac{1}{2k}\tilde{\psi}\Pi_{\tilde{\psi}}. \tag{2.160}$$

Finalmente, concluímos que

$$J_{\alpha_2} = \left(\tilde{\chi}\phi' - \frac{1}{2k}\tilde{\chi}\Pi_\phi + \frac{1}{2k}\Delta\Pi_{\tilde{\psi}}e^{\phi} - 2\tilde{\chi}' - \frac{1}{4k}\tilde{\chi}^2\Pi_{\tilde{\chi}}\right)e^{-\frac{\rho}{2}}, \tag{2.161}$$

$$\chi_3 = \phi' - \frac{1}{2k}\Pi_\phi - \frac{1}{2k}\tilde{\chi}\Pi_{\tilde{\chi}}, \tag{2.162}$$

$$\chi_2 = -\frac{1}{2k}\Pi_{\tilde{\chi}}e^{\frac{\rho}{2}}. \tag{2.163}$$

Os momentos canonicamente conjugados aos campos físicos, ora obtidos, serão exaustivamente utilizados no próximo capítulo, quando do cálculo da estrutura algébrica satisfeita pelas correntes remanescentes J_{α_2}, $J_{\alpha_1+\alpha_2}$ e $J_{\alpha_1+2\alpha_2}$.

2.4.4 As equações de Euler-Lagrange

A equação (2.9) remete às equações de Euler-Lagrange, a saber

$$\bar{\partial}\partial\phi = -(1+\tilde{\psi}\tilde{\chi}e^{-\phi})e^{2\phi} - \frac{\partial\tilde{\psi}\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta^2}e^{-\phi}, \tag{2.164}$$

$$\partial\left(2\frac{\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta}e^{-\phi}\right) = -2\tilde{\chi}(1+\tilde{\psi}\tilde{\chi}e^{-\phi})e^{\phi} - \tilde{\chi}\frac{\partial\tilde{\psi}\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta^2}e^{-2\phi}, \tag{2.165}$$

$$\bar{\partial}\left(2\frac{\partial\tilde{\psi}}{\Delta}e^{-\phi}\right) = -2\tilde{\psi}(1+\tilde{\psi}\tilde{\chi}e^{-\phi})e^{\phi} - \tilde{\psi}\frac{\partial\tilde{\psi}\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta^2}e^{-2\phi}. \tag{2.166}$$

Com o auxílio dos momentos canonicamente conjugados aos campos físicos que figuram no parágrafo anterior, reescrevêmo-las como

$$\partial\Pi_{\phi} = 2k[\phi'' - (1+\tilde{\psi}\tilde{\chi}e^{-\phi})e^{2\phi}] - \Pi'_{\phi} - \frac{1}{2k}\Pi_{\tilde{\psi}}\Pi_{\tilde{\chi}}e^{\phi}, \tag{2.167}$$

$$\partial\Pi_{\tilde{\psi}} = -2k\tilde{\chi}(1+\tilde{\psi}\tilde{\chi}e^{-\phi})e^{\phi} - \frac{1}{4k}\tilde{\chi}\Pi_{\tilde{\psi}}\Pi_{\tilde{\chi}}, \tag{2.168}$$

$$\bar{\partial}\Pi_{\tilde{\chi}} = -2k\tilde{\psi}(1+\tilde{\psi}\tilde{\chi}e^{-\phi})e^{\phi} - \frac{1}{4k}\tilde{\psi}\Pi_{\tilde{\psi}}\Pi_{\tilde{\chi}}. \tag{2.169}$$

Fazendo uso das equações de Euler-Lagrange, ora obtidas, é imediato verificar a conservação da quiralidade direita das correntes remanescentes J_{α_2}, $J_{\alpha_1+\alpha_2}$ e $J_{\alpha_1+2\alpha_2}$.

Capítulo 3

As estruturas algébricas dos modelos de um buraco-negro

Neste capítulo, verificamos a invariância conforme dos modelos reduzidos apresentados no capítulo anterior. Fazemos isto em detalhes, em primeiro lugar, para o modelo-I, no contexto do formalismo canônico, para, em seguida, procedermos da mesma maneira com respeito ao modelo-II, para o qual, em particular, introduzimos a importante noção de campos livres.

3.1 O formalismo canônico

Nesta seção , mostramos como proceder à verificação das estruturas algébricas satisfeitas pelas correntes de quiralidade direita conservada dos modelos reduzidos, apresentados no capítulo anterior, no contexto do formalismo canônico. Em particular, desenvolvemos todo o nosso procedimento, em detalhes, para o modelo-I. A extensão do método aqui apresentado para os demais modelos é direta.

Em primeiro lugar, lembramos que o formalismo canônico estabelece que os campos físicos ϕ, $\tilde{\psi}$ e $\tilde{\chi}$ do modelo-I, junto com os momentos canonicamente conjugados a eles, satisfazem os seguintes parênteses de Poisson elementares

$$\{\phi(\sigma), \Pi_{\phi}(\sigma')\} = \delta(\sigma - \sigma'), \tag{3.1}$$

$$\{\tilde{\psi}(\sigma), \Pi_{\tilde{\psi}}(\sigma')\} = \delta(\sigma - \sigma'), \tag{3.2}$$

$$\{\tilde{\chi}(\sigma), \Pi_{\tilde{\chi}}(\sigma')\} = \delta(\sigma - \sigma'). \tag{3.3}$$

A partir destas estruturas algébricas elementares, calculamos os parênteses de Poisson satisfeitos pelas correntes remanescentes do modelo-I. De fato, como veremos, elas satisfazem uma álgebra-V de spin conforme igual a $\frac{3}{2}$, a menos de certas redefinições convenientes, que envolvem o cálculo de constantes apropriadas. De qualquer modo, nosso próximo passo é fixar a constante k, que figura na lagrangiana do modelo-I e é isso que faremos a seguir.

3.1.1 A lagrangiana

Bem, no capítulo anterior, vimos que o caráter não -local do campo ρ manifesta-se através das condições de buraco-negro, satisfeitas pelos campos físicos ϕ, $\tilde{\psi}$ e $\tilde{\chi}$ e por ele próprio. Agora, levando em conta estas condições , escritas como em (2.39) e (2.40) e com o auxílio de (2.4) podemos escrever

$$\rho' = \frac{1}{4k}(\tilde{\chi}\Pi_{\tilde{\chi}} - \tilde{\psi}\Pi_{\tilde{\psi}}). \tag{3.4}$$

Ora, dos parênteses de Poisson elementares satisfeitos pelos campos físicos e pelos momentos canonicamente conjugados a eles, segue imediatamente que

$$\{\rho(\sigma), \tilde{\psi}(\sigma')\} = \frac{1}{8k}\tilde{\psi}(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.5}$$

$$\{\rho(\sigma), \Pi_{\tilde{\psi}}(\sigma')\} = -\frac{1}{8k}\Pi_{\tilde{\psi}}(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.6}$$

$$\{\rho(\sigma), \tilde{\chi}(\sigma')\} = -\frac{1}{8k}\tilde{\chi}(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.7}$$

$$\{\rho(\sigma), \Pi_{\tilde{\chi}}(\sigma')\} = \frac{1}{8k}\Pi_{\tilde{\chi}}(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'). \tag{3.8}$$

Por outro lado, de acordo com (2.41), a corrente remanescente $J_{-\alpha_2}$ é dada por

$$J_{-\alpha_2} = \frac{1}{2k}\Pi_{\tilde{\chi}}e^{-\frac{\rho}{2}}. \tag{3.9}$$

Desta maneira, fazendo uso dos parênteses de Poisson, ora obtidos, satisfeitos pelo campo não -local ρ e pelos campos físicos $\tilde{\psi}$ e $\tilde{\chi}$ e momentos canonicamente conjugados a eles, decorre claramente que

$$\{J_{-\alpha_2}(\sigma), J_{-\alpha_2}(\sigma')\} = -\frac{1}{8k}J_{-\alpha_2}(\sigma)J_{-\alpha_2}(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'). \tag{3.10}$$

Entretanto, desejamos identificar a corrente remanescente $J_{-\alpha_2}$ com uma das correntes não -locais V^+ ou V^-, que satisfaçam uma álgebra-V de spin conforme igual a $\frac{3}{2}$. Neste sentido, devemos impor que a corrente remanescente $J_{-\alpha_2}$ satisfaça a seguinte condição (conferir com o **Apêndice D**)

$$\{V^{\pm}(\sigma), V^{\pm}(\sigma')\} = \frac{1}{4}V^{\pm}(\sigma)V^{\pm}(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'). \tag{3.11}$$

Desta forma, comparando as equações (3.10) e (3.11), concluímos que a constante k deve assumir o seguinte valor

$$k = -\frac{1}{2} \tag{3.12}$$

para o modelo-I.

Com este valor de k, é fácil ver que o modelo-I será descrito pela seguinte lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}e^{2\phi} - \frac{1}{2}\partial\phi\bar{\partial}\phi - \frac{\partial\tilde{\psi}\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta}e^{\phi}, \tag{3.13}$$

donde seguem os seguintes momentos canonicamente conjugados aos campos físicos ϕ, $\tilde{\psi}$ e $\tilde{\chi}$

$$\Pi_{\phi} = -(\phi' + \partial\phi), \tag{3.14}$$

$$\Pi_{\tilde{\psi}} = -\frac{\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta}e^{\phi}, \tag{3.15}$$

$$\Pi_{\tilde{\chi}} = -\frac{\partial\tilde{\psi}}{\Delta}e^{\phi} \tag{3.16}$$

e as seguintes equações de Euler-Lagrange

$$\partial\Pi_{\phi} = -(\phi'' - e^{2\phi} + \Pi'_{\phi} + \Pi_{\tilde{\psi}}\Pi_{\tilde{\chi}}e^{-\phi}), \tag{3.17}$$

$$\partial\Pi_{\tilde{\psi}} = \frac{1}{2}\tilde{\chi}\Pi_{\tilde{\psi}}\Pi_{\tilde{\chi}}, \tag{3.18}$$

$$\bar{\partial}\Pi_{\tilde{\chi}} = \frac{1}{2}\tilde{\psi}\Pi_{\tilde{\psi}}\Pi_{\tilde{\chi}}. \tag{3.19}$$

Além disto, decorre que a corrente remanescente $J_{-\alpha_2}$ e os campos não -físicos χ_1 e χ_2 agora escrevem-se como

$$J_{-\alpha_2} = -\Pi_{\tilde{\chi}}e^{-\frac{\rho}{2}}, \tag{3.20}$$

$$\chi_1 = \phi' + \Pi_{\phi} - \tilde{\chi}\Pi_{\tilde{\chi}}, \tag{3.21}$$

$$\chi_2 = -\left(\tilde{\chi}\phi' + \tilde{\chi}\Pi_{\phi} + \Delta\Pi_{\tilde{\psi}}e^{-\phi} + 2\tilde{\chi}' - \frac{1}{2}\tilde{\chi}^2\Pi_{\tilde{\chi}}\right)e^{\frac{\rho}{2}}. \tag{3.22}$$

Ainda, concluímos que os parênteses de Poisson satisfeitos pelo campo não -local ρ e pelos campos físicos $\tilde{\psi}$ e $\tilde{\chi}$ e momentos canonicamente conjugados a eles são dados por

$$\{\rho(\sigma), \tilde{\psi}(\sigma')\} = -\frac{1}{4}\tilde{\psi}(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.23}$$

$$\{\rho(\sigma), \Pi_{\tilde{\psi}}(\sigma')\} = \frac{1}{4}\Pi_{\tilde{\psi}}(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.24}$$

$$\{\rho(\sigma), \tilde{\chi}(\sigma')\} = \frac{1}{4}\tilde{\chi}(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.25}$$

$$\{\rho(\sigma), \Pi_{\tilde{\chi}}(\sigma')\} = -\frac{1}{4}\Pi_{\tilde{\chi}}(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'). \tag{3.26}$$

3.1.2 O tensor de energia-momento

Nosso desejo agora é identificar o tensor de energia-momento T, que satisfaça uma álgebra-V de spin conforme igual a $\frac{3}{2}$, com a corrente remanescente J_{α_1} do modelo-I, a menos de uma constante apropriada, cujo valor passamos a determinar. Para tanto, vamos verificar as estruturas algébricas satisfeitas pelas correntes remanescentes J_{α_1} e $J_{-\alpha_2}$. Bem, de acordo com a equação (2.14), a corrente remanescente J_{α_1} escreve-se como

$$J_{\alpha_1} = \partial\chi_1 + \chi_1^2 + 2\chi_2 J_{-\alpha_2}. \tag{3.27}$$

Deste modo, os parênteses de Poisson satisfeitos pelas correntes remanescentes J_{α_1} e $J_{-\alpha_2}$ são dados por

$$
\begin{aligned}
\{J_{\alpha_1}(\sigma), J_{-\alpha_2}(\sigma')\} &= \{\partial\chi_1(\sigma), J_{-\alpha_2}(\sigma')\} \\
&+ 2\chi_1(\sigma)\{\chi_1(\sigma), J_{-\alpha_2}(\sigma')\} \\
&+ 2\{\chi_2(\sigma), J_{-\alpha_2}(\sigma')\}J_{-\alpha_2}(\sigma) \\
&+ 2\chi_2(\sigma)\{J_{-\alpha_2}(\sigma), J_{-\alpha_2}(\sigma')\}.
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

Neste ponto, lembramos que a equação (2.4) permite reescrever $\partial\chi_1$ através de

$$
\partial\chi_1 = \bar{\partial}\chi_1 - 2\chi_1'. \tag{3.29}
$$

Agora, se calcularmos $\bar{\partial}\chi_1$ para χ_1 escrito como em (3.21), com o auxílio das equações (3.14) a (3.19), será fácil mostrar que

$$
\bar{\partial}\chi_1 = e^{2\phi}. \tag{3.30}
$$

Porém, é imediato ver que $\bar{\partial}\chi_1$ e $J_{-\alpha_2}$ comutam, desde que ϕ claramente comuta com ρ e $\Pi_{\bar{\chi}}$. Em outras palavras, verificamos que

$$
\{\bar{\partial}\chi_1(\sigma), J_{-\alpha_2}(\sigma')\} = 0. \tag{3.31}
$$

Desta maneira, o cálculo dos parênteses de Poisson que figuram em (3.28) reduz-se ao cálculo da seguinte estrutura algébrica

$$
\begin{aligned}
\{J_{\alpha_1}(\sigma), J_{-\alpha_2}(\sigma')\} &= -2\partial_\sigma\{\chi_1(\sigma), J_{-\alpha_2}(\sigma')\} \\
&+ 2\chi_1(\sigma)\{\chi_1(\sigma), J_{-\alpha_2}(\sigma')\} \\
&+ 2\{\chi_2(\sigma), J_{-\alpha_2}(\sigma')\}J_{-\alpha_2}(\sigma) \\
&+ 2\chi_2(\sigma)\{J_{-\alpha_2}(\sigma), J_{-\alpha_2}(\sigma')\}.
\end{aligned} \tag{3.32}
$$

Ora, a partir das estruturas algébricas elementares (3.1) a (3.3) e das estruturas algébricas (3.23) a (3.26), decorrem os seguintes parênteses de Poisson

$$
\{\chi_1(\sigma), J_{-\alpha_2}(\sigma')\} = -J_{-\alpha_2}(\sigma')\delta(\sigma - \sigma'), \tag{3.33}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\chi_2(\sigma), J_{-\alpha_2}(\sigma')\} &= 2\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma') \\
&+ \chi_1(\sigma')\delta(\sigma - \sigma') \\
&- \frac{1}{4}\chi_2(\sigma)J_{-\alpha_2}(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma').
\end{aligned} \tag{3.34}
$$

Portanto, substituindo (3.33) e (3.34) em (3.32), concluímos que

$$
\{J_{\alpha_1}(\sigma), J_{-\alpha_2}(\sigma')\} = 6J_{-\alpha_2}(\sigma')\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma') - 4\partial_{\sigma'}J_{-\alpha_2}(\sigma')\delta(\sigma - \sigma'). \tag{3.35}
$$

Mas, queremos identificar a corrente remanescente J_{α_1} com o tensor de energia-momento T, que satisfaça uma álgebra-V de spin conforme igual a $\frac{3}{2}$. Neste sentido, devemos impor que J_{α_1} satisfaça a seguinte condição (conferir com o **Apêndice D**)

$$
\{T(\sigma), V^\pm(\sigma')\} = \frac{3}{2}V^\pm(\sigma')\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma') - \partial_{\sigma'}V^\pm(\sigma')\delta(\sigma - \sigma'), \tag{3.36}
$$

donde concluímos imediatamente que devemos dividir J_{α_1} por 4 para obtermos T. Em outras palavras, devemos identificar

$$T = \frac{1}{4}\partial\chi_1 + \frac{1}{4}\chi_1^2 + \frac{1}{2}\chi_2 J_{-\alpha_2}. \tag{3.37}$$

3.1.3 As correntes não -locais

Queremos agora identificar as correntes remanescentes $J_{\alpha_1+\alpha_2}$ e $J_{-\alpha_2}$ com as correntes não -locais V^+ e V^-, que satisfaçam uma álgebra-V de spin conforme igual a $\frac{3}{2}$. Para ver isto, vamos verificar as estruturas algébricas satisfeitas pelas correntes remanescentes $J_{\alpha_1+\alpha_2}$ e $J_{-\alpha_2}$. Bem, de acordo com a equação (2.15), a corrente remanescente $J_{\alpha_1+\alpha_2}$ escreve-se como

$$J_{\alpha_1+\alpha_2} = \partial\chi_2 + \chi_1\chi_2 - \chi_3 J_{-\alpha_2}. \tag{3.38}$$

Deste modo, os parênteses de Poisson satisfeitos pelas correntes remanescentes $J_{\alpha_1+\alpha_2}$ e $J_{-\alpha_2}$ são dados por

$$\begin{aligned}
\{J_{\alpha_1+\alpha_2}(\sigma), J_{-\alpha_2}(\sigma')\} &= \{\partial\chi_2(\sigma), J_{-\alpha_2}(\sigma')\} \\
&+ \{\chi_1(\sigma), J_{-\alpha_2}(\sigma')\}\chi_2(\sigma) \\
&+ \chi_1(\sigma)\{\chi_2(\sigma), J_{-\alpha_2}(\sigma')\} \\
&- \{\chi_3(\sigma), J_{-\alpha_2}(\sigma')\}J_{-\alpha_2}(\sigma) \\
&- \chi_3(\sigma)\{J_{-\alpha_2}(\sigma), J_{-\alpha_2}(\sigma')\}. \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

Neste ponto, lembramos que a equação (2.4) permite reescrever $\partial\chi_2$ através de

$$\partial\chi_2 = \bar{\partial}\chi_2 - 2\chi_2'. \tag{3.40}$$

Agora, se calcularmos $\bar{\partial}\chi_2$ para χ_2 escrito como em (3.22), com o auxílio das equações (3.14) a (3.19), será fácil mostrar que

$$\bar{\partial}\chi_2 = -(\tilde{\chi}e^{\frac{\rho}{2}})e^{2\phi}. \tag{3.41}$$

Ora, fazendo uso das estruturas algébricas elementares (3.1) a (3.3) e das estruturas algébricas (3.23) a (3.26), segue imediatamente que

$$\begin{aligned} \{\bar{\partial}\chi_2(\sigma), J_{-\alpha_2}(\sigma')\} &= e^{2\phi(\sigma')}\delta(\sigma-\sigma') \\ &- \frac{1}{4}\bar{\partial}\chi_2(\sigma)J_{-\alpha_2}(\sigma')\epsilon(\sigma-\sigma'). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Além disso, conforme a equação (2.18), χ_3 escreve-se como

$$\partial\chi_3 = -\chi_2^2. \tag{3.43}$$

Por outro lado, é evidente que também podemos escrever

$$\partial\chi_3 = \bar{\partial}\chi_3 - 2\chi_3', \tag{3.44}$$

devido à mesma equação (2.4), e através de um cálculo semelhante àquele que conduziu à expressão (3.41) remetermo-nos a

$$\bar{\partial}\chi_3 = -(\tilde{\chi}e^{\frac{\rho}{2}})^2e^{2\phi}. \tag{3.45}$$

Portanto, das equações (3.43) a (3.45) decorre que

$$\chi_3' = \frac{1}{2}[\chi_2^2 - (\tilde{\chi}e^{\frac{\varrho}{2}})^2 e^{2\phi}]. \tag{3.46}$$

Novamente, utilizando as estruturas algébricas elementares (3.1) a (3.3) e as estruturas algébricas (3.23) a (3.26), concluímos que

$$\begin{aligned}
\{\chi_3(\sigma), J_{-\alpha_2}(\sigma')\} &= \chi_2(\sigma')\delta(\sigma - \sigma') \\
&+ \frac{1}{4}[\chi_3(\sigma) - \chi_3(\sigma')]J_{-\alpha_2}(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma') \\
&+ \frac{1}{4}[\partial\chi_2(\sigma') + \chi_1(\sigma')\chi_2(\sigma')]\epsilon(\sigma - \sigma').
\end{aligned} \tag{3.47}$$

De tudo que vimos até agora, estamos finalmente numa posição confortável! Conhecemos todas as estruturas algébricas que figuram no membro direito de (3.39), o que conduz à seguinte expressão para os parênteses de Poisson de $J_{\alpha_1+\alpha_2}$ e $J_{-\alpha_2}$

$$\begin{aligned}
\{J_{\alpha_1+\alpha_2}(\sigma), J_{-\alpha_2}(\sigma')\} &= -4\partial_\sigma^2\delta(\sigma - \sigma') \\
&+ J_{\alpha_1}(\sigma')\delta(\sigma - \sigma') \\
&- \frac{1}{4}J_{\alpha_1+\alpha_2}(\sigma)J_{-\alpha_2}(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma') \\
&+ \frac{1}{2}J_{\alpha_1+\alpha_2}(\sigma')J_{-\alpha_2}(\sigma)\epsilon(\sigma - \sigma').
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Como as correntes não -locais V^+ e V^-, que satisfaçam uma álgebra-V de spin conforme igual a $\frac{3}{2}$, verificam os seguintes parênteses de Poisson (conferir com o **Apêndice D**)

$$
\begin{aligned}
\{V^{\pm}(\sigma), V^{\mp}(\sigma')\} &= \mp\partial_\sigma^2\delta(\sigma-\sigma') \\
&\pm\ T(\sigma')\delta(\sigma-\sigma') \\
&-\ \frac{1}{4}V^{\pm}(\sigma)V^{\mp}(\sigma')\epsilon(\sigma-\sigma') \\
&+\ \frac{1}{2}V^{\pm}(\sigma')V^{\mp}(\sigma)\epsilon(\sigma-\sigma'),
\end{aligned} \tag{3.49}
$$

é fácil concluir que se, por exemplo, dividirmos $J_{\alpha_1+\alpha_2}$ e $J_{-\alpha_2}$ por 2, obteremos V^+ e V^-, desde que levemos em conta a equação (3.37). Em outras palavras, podemos, por exemplo, identificar

$$
V^- = -\frac{1}{2}\Pi_{\tilde{\chi}}e^{-\frac{\varrho}{2}}, \tag{3.50}
$$

$$
V^+ = \frac{1}{2}\partial\chi_2 + \frac{1}{2}\chi_1\chi_2 - \chi_3V^-. \tag{3.51}
$$

Além disto, a equação (3.37) reescreve-se agora como

$$
T = \frac{1}{4}\partial\chi_1 + \frac{1}{4}\chi_1^2 + \chi_2V^-. \tag{3.52}
$$

Naturalmente, o método que ora expomos pode ser aplicado de maneira semelhante ao cálculo dos demais parênteses de Poisson necessários à verificação da consistência, como um todo, da álgebra-V de spin conforme igual a $\frac{3}{2}$, a que nos referimos nesta seção . Sua extensão aos demais modelos, como já dissemos, é imediata, conduzindo, analogamente, a redefinições convenientes das correntes remanescentes, sempre através da introdução de certas constantes apropriadas.

3.2 Os campos livres

Nesta seção , mostramos como introduzir a noção de campos livres para descrever os modelos reduzidos apresentados no capítulo anterior. Como veremos, uma escolha apropriada das constantes de estrutura dos parênteses de Poisson elementares satisfeitos por estes campos mantem a invariância conforme dos modelos.

Em primeiro lugar, suponha que os campos físicos ϕ_i que descrevem os modelos reduzidos sejam todos de quiralidade direita definida (a suposição de que todos eles sejam de quiralidade esquerda definida conduz a resultados equivalentes). Em outras palavras, suponha que $\bar{\partial}\phi_i = 0$, para todos os campos físicos ϕ_i. Segue imediatamente que os termos cinéticos T que descrevem os modelos são todos nulos, i. e., $T = 0$, donde decorre que as lagrangianas L que os descrevem reduzem-se a seus potenciais V, a menos de uma certa constante k, ou seja, $L = -kV$ (conferir com o **Apêndice B**). Além disto, a partir da equação (2.4), concluímos que $\partial\phi_i = -2\phi_i'$.

Considere, em particular, o modelo-II. No âmbito do que ora expomos, sua lagrangiana escreve-se da seguinte maneira

$$L = -2ke^{2\phi}. \tag{3.53}$$

Por outro lado, não faz mais sentido chamarmos a equação (2.63) de condição de buraco-negro, na medida em que ela nao mais conduz a uma singularidade na lagrangiana que descreve o modelo-II. No contexto presente, ela é tão somente uma condição de nao-localidade e é assim que a chamaremos de agora em diante. Em particular, ela pode ser lida do seguinte modo

$$\rho' + \chi\psi' e^{2\phi-\rho} = 0. \tag{3.54}$$

Os campos não -físicos do modelo-II são dados da seguinte forma

$$\chi_1 = 2\phi' - \chi\psi' e^{2\phi-\rho}, \tag{3.55}$$

$$\chi_2 = \chi' + 2\chi\phi', \tag{3.56}$$

$$\chi_3 = -2\chi_2' + \chi_1\chi_2. \tag{3.57}$$

Finalmente, as correntes remanescentes do modelo-II são fornecidas por

$$J_{-\alpha_1} = -2\psi' e^{2\phi-\rho}, \tag{3.58}$$

$$J_{\alpha_2} = -2\chi_1' + \chi_1^2 - \chi_2 J_{-\alpha_1}, \tag{3.59}$$

$$J_{\alpha_1+2\alpha_2} = -2\chi_3' - 2\chi_1\chi_2' + 2\chi_2\chi_1' + \chi_2^2 J_{-\alpha_1}. \tag{3.60}$$

Neste ponto, procedemos a uma certa transformação conveniente de variáveis sobre os campos físicos do modelo-II que conduzirá diretamente à introdução da noção de campos livres para descrevê-lo.

3.2.1 Os novos campos físicos

Considere a seguinte transformação de variáveis sobre os campos físicos do modelo-II

$$\rho = f_1 + f_2, \tag{3.61}$$

$$\phi = \frac{1}{2} f_2, \tag{3.62}$$

$$\chi = f_+ e^{f_1}, \tag{3.63}$$

$$\psi' = f'_-. \tag{3.64}$$

Esta transformação de variáveis permite reescrever a condição de não -localidade da seguinte maneira

$$f'_1 + f'_2 + f_+ f'_- = 0. \tag{3.65}$$

Além disto, a corrente remanescente $J_{-\alpha_1}$ e os campos não -físicos χ_1 e χ_2 lêem-se agora do seguinte modo

$$J_{-\alpha_1} = -2 f'_- e^{-f_1}, \tag{3.66}$$

$$\chi_1 = f_2' - f_+ f_-', \tag{3.67}$$

$$\chi_2 = (f_+' - f_+^2 f_-')e^{f_1}. \tag{3.68}$$

O campo não -físico χ_3 e as correntes remanescentes J_{α_2} e $J_{\alpha_1+2\alpha_2}$, naturalmente, escrevem-se em termos dos campos físicos χ_1 e χ_2 e da corrente remanescente $J_{-\alpha_1}$.

Neste ponto, conjecturamos que os novos campos físicos satisfaçam os seguintes parênteses de Poisson elementares

$$\{f_1(\sigma), f_1(\sigma')\} = c_{11}\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.69}$$

$$\{f_1(\sigma), f_2(\sigma')\} = c_{12}\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.70}$$

$$\{f_2(\sigma), f_2(\sigma')\} = c_{22}\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.71}$$

$$\{f_1(\sigma), f_+(\sigma')\} = c_1^+ f_+(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.72}$$

$$\{f_1(\sigma), f_-'(\sigma')\} = c_1^- f_-'(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.73}$$

$$\{f_2(\sigma), f_+(\sigma')\} = c_2^+ f_+(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.74}$$

$$\{f_2(\sigma), f'_-(\sigma')\} = c_2^- f'_-(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.75}$$

$$\{f_+(\sigma), f_+(\sigma')\} = c^{++} f_+(\sigma) f_+(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned} \{f_+(\sigma), f'_-(\sigma')\} &= c^{+-}\delta(\sigma - \sigma') \\ &+ c^{-+} f_+(\sigma) f'_-(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'), \end{aligned} \tag{3.77}$$

$$\{f'_-(\sigma), f'_-(\sigma')\} = c^{--} f'_-(\sigma) f'_-(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'). \tag{3.78}$$

Observemos, entretanto, que as onze constantes de estrutura dos parênteses de Poisson elementares acima não são todas independentes. Com efeito, se nos lembrármos da condição de não -localidade (3.65), que deve ser satisfeita pelos campos físicos, concluiremos que ela deve impor certas restrições sobre estas constantes. De fato, substituindo estas estrturas algébricas elementares na condição de não - localidade, podemos reescrevê-las da seguinte forma

$$\{f_1(\sigma), f_1(\sigma')\} = -k_0\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.79}$$

$$\{f_1(\sigma), f_2(\sigma')\} = k_0\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.80}$$

$$\{f_2(\sigma), f_2(\sigma')\} = -k_0\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.81}$$

$$\{f_1(\sigma), f_+(\sigma')\} = k_1 f_+(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.82}$$

$$\{f_1(\sigma), f'_-(\sigma')\} = -k_1 f'_-(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.83}$$

$$\{f_2(\sigma), f_+(\sigma')\} = k_2 f_+(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.84}$$

$$\{f_2(\sigma), f'_-(\sigma')\} = -k_2 f'_-(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.85}$$

$$\{f_+(\sigma), f_+(\sigma')\} = -2(k_1 + k_2) f_+(\sigma) f_+(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.86}$$

$$\begin{aligned} \{f_+(\sigma), f'_-(\sigma')\} &= 2(k_1 + k_2)\delta(\sigma - \sigma') \\ &+ 2(k_1 + k_2) f_+(\sigma) f'_-(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'), \end{aligned} \tag{3.87}$$

$$\{f'_-(\sigma), f'_-(\sigma')\} = -2(k_1 + k_2) f'_-(\sigma) f'_-(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'). \tag{3.88}$$

Notemos, portanto, que há agora, tão somente, três constantes de estrutura dos parênteses de Poisson elementares, satisfeitos pelos campos físicos, a descobrir, a saber k_0, k_1 e k_2. Com o intuito, pois, de determiná-las passemos à verificação da invariância conforme do modelo-II, no contexto destas novas estruturas elementares.

3.2.2 A invariância conforme

Em primeiro lugar, observemos que dos parênteses de Poisson elementares satisfeitos por f_1, f_2, f_+ e f'_- segue imediatamente que a corrente remanescente $J_{-\alpha_1}$ satisfaz a seguinte estrutura algébrica

$$\{J_{-\alpha_1}(\sigma), J_{-\alpha_1}(\sigma')\} = -2\left(k_2 + \frac{1}{2}k_0\right) J_{-\alpha_1}(\sigma)J_{-\alpha_1}(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.89}$$

donde decorre claramente que

$$k_2 + \frac{1}{2}k_0 = -\frac{1}{2}, \tag{3.90}$$

desde que identifiquemos a corrente remanescente $J_{-\alpha_1}$ com uma das correntes não -locais V^+ ou V^-, que satisfaçam uma álgebra-V de spin conforme igual a 2 (conferir com o **Apêndice D**). A equação (3.90) refere-se, portanto, à primeira das relações satisfeitas pelas constantes de estrutura dos parênteses de Poisson elementares a que nos referimos. Resta, pois, obter duas outras relações . Neste sentido, notemos a seguir que dos parênteses de Poisson elementares, concluímos também que os campos físicos f_1, f_2, f_+ e f'_- e a corrente remanescente $J_{-\alpha_1}$ satisfazem as seguintes estruturas algébricas

$$\{f_1(\sigma), J_{-\alpha_1}(\sigma')\} = -(k_1 - k_0)J_{-\alpha_1}(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.91}$$

$$\{f_2(\sigma), J_{-\alpha_1}(\sigma')\} = -(k_2 + k_0)J_{-\alpha_1}(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.92}$$

$$\begin{aligned}\{f_+(\sigma), J_{-\alpha_1}(\sigma')\} &= -4(k_1+k_2)e^{-f_1(\sigma')}\delta(\sigma-\sigma') \\ &+ 2\left(k_2+\frac{1}{2}k_1\right) f_+(\sigma)J_{-\alpha_1}(\sigma')\epsilon(\sigma-\sigma'),\end{aligned} \tag{3.93}$$

$$\{f'_-(\sigma), J_{-\alpha_1}(\sigma')\} = -2\left(k_2+\frac{1}{2}k_1\right) f'_-(\sigma)J_{-\alpha_1}(\sigma')\epsilon(\sigma-\sigma'). \tag{3.94}$$

Por outro lado, a partir destas estruturas algébricas, segue que os campos não - físicos χ_1 e χ_2 e a corrente remanescente $J_{-\alpha_1}$ satisfazem os seguintes parênteses de Poisson

$$\{\chi_1(\sigma), J_{-\alpha_1}(\sigma')\} = -2k_0 J_{-\alpha_1}(\sigma')\delta(\sigma-\sigma'), \tag{3.95}$$

$$\begin{aligned}\{\chi_2(\sigma), J_{-\alpha_1}(\sigma')\} &= -4(k_1+k_2)\partial_\sigma\delta(\sigma-\sigma') \\ &- 4(k_1+k_2)\chi_1(\sigma')\delta(\sigma-\sigma') \\ &- (k_1-k_0)\chi_2(\sigma)J_{-\alpha_1}(\sigma')\epsilon(\sigma-\sigma').\end{aligned} \tag{3.96}$$

Além disto, destes parênteses de Poisson, decorre que as correntes remanescentes J_{α_2} e $J_{-\alpha_1}$ satisfazem a seguinte estrutura algébrica

$$\begin{aligned}\{J_{\alpha_2}(\sigma), J_{-\alpha_1}(\sigma')\} &= 4[k_0+(k_1+k_2)]J_{-\alpha_1}(\sigma')\partial_\sigma\delta(\sigma-\sigma') \\ &- 4(k_1+k_2)\partial_{\sigma'}J_{-\alpha_1}(\sigma')\delta(\sigma-\sigma') \\ &- 4[k_0-(k_1+k_2)]\chi_1(\sigma')J_{-\alpha_1}(\sigma')\delta(\sigma-\sigma') \\ &+ [(k_1-k_0)-1]\chi_2(\sigma)J_{-\alpha_1}(\sigma)J_{-\alpha_1}(\sigma')\epsilon(\sigma-\sigma'),\end{aligned} \tag{3.97}$$

donde concluímos claramente que

$$k_0 = k_1 + k_2, \tag{3.98}$$

$$k_1 - k_0 = 1, \tag{3.99}$$

desde que identifiquemos as correntes remanescentes J_{α_2} e $J_{-\alpha_1}$, respectivamente, com o tensor de energia-momento T e com uma das correntes não -locais V^+ ou V^-, que satisfaçam uma álgebra-V de spin conforme igual a 2 (conferir com o **Apêndice D**).

As equações (3.98) e (3.99), juntamente com a equação (3.90), permitem, pois, determinar, univocamente, as constantes de estrutura dos parênteses de Poisson elementares satisfeitos pelos campos físicos f_1, f_2, f_+ e f'_-. Com efeito, seus valores são

$$k_0 = 1, \tag{3.100}$$

$$k_1 = 2, \tag{3.101}$$

$$k_2 = -1. \tag{3.102}$$

Uma vez de posse dos valores numéricos destas constantes de estrutura, escrevemos os parênteses de Poisson elementares satisfeitos pelos campos físicos da seguinte maneira

$$\{f_1(\sigma), f_1(\sigma')\} = -\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.103}$$

$$\{f_1(\sigma), f_2(\sigma')\} = \epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.104}$$

$$\{f_2(\sigma), f_2(\sigma')\} = -\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.105}$$

$$\{f_1(\sigma), f_+(\sigma')\} = 2f_+(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.106}$$

$$\{f_1(\sigma), f_-'(\sigma')\} = -2f_-'(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.107}$$

$$\{f_2(\sigma), f_+(\sigma')\} = -f_+(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.108}$$

$$\{f_2(\sigma), f_-'(\sigma')\} = f_-'(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.109}$$

$$\{f_+(\sigma), f_+(\sigma')\} = -2f_+(\sigma)f_+(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{3.110}$$

$$\begin{aligned}\{f_+(\sigma), f_-'(\sigma')\} &= 2\delta(\sigma - \sigma') \\ &+ 2f_+(\sigma)f_-'(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'),\end{aligned} \tag{3.111}$$

$$\{f'_-(\sigma), f'_-(\sigma')\} = -2f'_-(\sigma)f'_-(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma'). \tag{3.112}$$

Vale observar aqui que a estrutura algébrica satisfeita pelas correntes remanescentes J_{α_2} e $J_{-\alpha_1}$ do modelo-II, que obtivemos, escreve-se do seguinte modo

$$\begin{aligned}\{J_{\alpha_2}(\sigma), J_{-\alpha_1}(\sigma')\} &= 8J_{-\alpha_1}(\sigma')\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma') \\ &- 4\partial_{\sigma'}J_{-\alpha_1}(\sigma')\delta(\sigma - \sigma'),\end{aligned} \tag{3.113}$$

donde deduzimos, imediatamente, através de argumentos análogos àqueles expostos na seção anterior, que devemos dividir a corrente remanescente J_{α_2} por 4, com o intuito de obtermos, efetivamente, o tensor de energia-momento T, que satisfaça uma álgebra-V de spin conforme igual a 2 (conferir com o **Apêndice D**).

Neste ponto, estamos finalmente em posição de introduzir a noção de campos livres, com o intuito de descrever o modelo reduzido-II.

3.2.3 A descrição

Uma observação um tanto mais sutil da estrutura algébrica elementar satisfeita pelos campos físicos, apresentada no parágrafo anterior, revela a esperança de poder escrever f_+ e f'_- (que desempenham o papel dos antigos χ e ψ', respectivamente) em pé de igualdade com f_1 e f_2 (que desempenham o papel dos antigos ρ e ϕ), i. e., em termos de exponenciais de outros campos físicos. Com efeito, basta observar os parênteses de Poisson elementares (3.110) a (3.112), para perceber que tais estruturas repetem os campos em questão , na direção de $\epsilon(\sigma-\sigma')$, precisamente como se eles fossem escritos em termos de exponenciais de outros campos. De fato, é possível fazer o que ora mencionamos. Para ver isto será suficiente considerarmos a seguinte transformação de variáveis

$$f_1 = -\left[\sqrt{2}\,(\nu_1 + \imath\nu_2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\nu_3 + \nu_4)\right], \tag{3.114}$$

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\nu_1 + \imath\nu_2) - (\nu_3 + \nu_4)\right], \tag{3.115}$$

$$f_+ = \exp(\sqrt{2}\nu_1), \tag{3.116}$$

$$f'_- = \exp(-\sqrt{2}\nu_1)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\nu_1 + \imath\nu_2)'\right]. \tag{3.117}$$

Além disto, com o intuito de manter a invariância conforme do modelo-II, devemos impor que estes novos campos físicos ν_i satisfaçam os seguintes parênteses de Poisson elementares

$$\{\nu_i(\sigma), \nu_j(\sigma')\} = -\delta_{ij}\epsilon(\sigma - \sigma'). \tag{3.118}$$

Estes novos campos físicos são , finalmente, os campos livres, que descrevem o modelo-II. Eles possuem este nome porque são típicos de descrições de modelos de osciladores harmônicos. Por outro lado, são de fundamental importância no estudo da quantização canônica dos modelos em teorias de campos.

Vale notar aqui que os campos livres em questão não são todos independentes. Com efeito, eles ainda devem satisfazer a condição de não -localidade. Neste sentido, um deles escreve-se em termos dos demais.

Capítulo 4

O modelo reduzido de dois buracos-negros

Neste capítulo, apresentamos um modelo reduzido de WZW descrito por uma lagrangiana que apresenta uma dupla singularidade e que denominamos de modelo reduzido de dois buracos-negros. Para manifestar tal singularidade, através de relações de não -localidade satisfeitas pelos campos físicos, recorremos a uma redução adicional à redução hamiltoniana. Observamos também que a estrutura algébrica satisfeita pelas correntes remanescentes deste modelo reduzido é uma extensão da álgebra-V, satisfeita pelas correntes remanescentes do modelo-III (o modelo de Bilal), o que sugere, com efeito, que este modelo reduzido seja uma extensão daquele.

4.1 O modelo original

Nesta seção , calculamos as correntes de quiralidade direita conservada do modelo de WZW, baseados numa decomposição não -abeliana de Gauss.

4.1.1 A decomposição não -abeliana de Gauss

O operador de graduação Q_{23}, exposto no **Apêndice E**, conduz à seguinte decomposição não -abeliana de Gauss para um elemento g do grupo de Lie, associado à álgebra de Lie B_3

$$g = NBM, \tag{4.1}$$

onde

$$\begin{aligned} N &= \exp(\nu_1 E_{\alpha_1} + \nu_2 E_{\alpha_1+\alpha_2} + \nu_3 E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \\ &+ \nu_4 E_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3} + \nu_5 E_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}), \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} M &= \exp(\mu_1 E_{-\alpha_1} + \mu_2 E_{-\alpha_1-\alpha_2} + \mu_3 E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} \\ &+ \mu_4 E_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3} + \mu_5 E_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}), \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$B = nam, \tag{4.4}$$

com

$$n = \exp(\psi_1 E_{\alpha_2+2\alpha_3} + \psi_2 E_{\alpha_2} + \psi_3 E_{\alpha_3} + \psi_4 E_{\alpha_2+\alpha_3}), \tag{4.5}$$

$$m = \exp(\chi_1 E_{-\alpha_2-2\alpha_3} + \chi_2 E_{-\alpha_2} + \chi_3 E_{-\alpha_3} + \chi_4 E_{-\alpha_2-\alpha_3}), \tag{4.6}$$

$$a = \exp\left[\phi h_1 + (\rho+\phi)h_2 + \left(\rho_3 + \frac{1}{2}\phi\right)h_3\right]. \tag{4.7}$$

Observe que na decomposição abeliana de Gauss para B tomamos o campo ϕ na direção do operador de graduação Q_{23}, que é ortogonal às direções de h_2 e h_3 (conferir com o **Apêndice E**). Neste sentido, esta escolha para a parametrização de a, em termos dos geradores na subálgebra de Cartan de B_3, desacopla o campo ϕ dos demais, ρ e ρ_3, no termo cinético da lagrangiana que descreve o modelo reduzido, como veremos em breve, na medida em que a escolha manifesta o caráter ortogonal do sistema de coordenadas.

4.1.2 A corrente de quiralidade direita conservada

De acordo com o **Capítulo 1**, segue que a corrente de quiralidade direita conservada do modelo de WZW, baseado na álgebra de Lie B_3, pode ser escrita da seguinte maneira

$$J = M^{-1}B^{-1}N^{-1}\partial NBM + M^{-1}B^{-1}\partial BM + M^{-1}\partial M. \tag{4.8}$$

A partir da decomposição não -abeliana de Gauss, exposta no parágrafo anterior, e com o auxílio da fórmula de BCH (conferir com o **Apêndice B**), decorre que as componentes da corrente podem ser lidas através de

$$J_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3} = Y_5, \tag{4.9}$$

$$J_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3} = Y_4, \tag{4.10}$$

$$J_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} = Y_3, \tag{4.11}$$

$$J_{-\alpha_1-\alpha_2} = Y_2, \tag{4.12}$$

$$J_{-\alpha_1} = Y_1, \tag{4.13}$$

$$J_{-\alpha_2-2\alpha_3} = X_1 - Y_4\mu_1 + Y_5\mu_2, \tag{4.14}$$

$$J_{-\alpha_2} = X_2 - Y_2\mu_1 + Y_5\mu_4, \tag{4.15}$$

$$J_{-\alpha_3} = X_3 - Y_3\mu_2 + Y_4\mu_3, \tag{4.16}$$

$$J_{-\alpha_2-\alpha_3} = X_4 - Y_3\mu_1 + Y_5\mu_3, \tag{4.17}$$

$$J_1 = X_5 + Y_1\mu_1 + Y_2\mu_2 + 2Y_3\mu_3 + Y_4\mu_4 + Y_5\mu_5, \tag{4.18}$$

$$J_2 = X_6 + Y_2\mu_2 + 2Y_3\mu_3 + Y_4\mu_4 + 2Y_5\mu_5, \tag{4.19}$$

$$J_3 = X_7 + Y_3\mu_3 + Y_4\mu_4 + Y_5\mu_5, \tag{4.20}$$

$$J_{\alpha_2+\alpha_3} = X_8 - Y_1\mu_3 + Y_3\mu_5, \tag{4.21}$$

$$J_{\alpha_3} = X_9 - Y_2\mu_3 + Y_3\mu_4, \tag{4.22}$$

$$J_{\alpha_2} = X_{10} - Y_1\mu_2 + Y_5\mu_5, \tag{4.23}$$

$$J_{\alpha_2+2\alpha_3} = X_{11} - Y_1\mu_4 + Y_2\mu_5, \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned} J_{\alpha_1} &= \partial\mu_1 \\ &+ (X_1\mu_4 + X_2\mu_2 + 2X_4\mu_3 - 2X_5\mu_1 + X_6\mu_1) \\ &+ [-Y_1\mu_1^2 - Y_2\mu_1\mu_2 - 2Y_3\mu_1\mu_3 \\ &- Y_4\mu_1\mu_4 + Y_5(\mu_2\mu_4 + \mu_3^2)], \end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned} J_{\alpha_1+\alpha_2} &= \partial\mu_2 \\ &+ (-X_1\mu_5 + 2X_3\mu_3 - X_5\mu_2 - X_6\mu_2 + 2X_7\mu_2 + X_{10}\mu_1) \\ &+ [-Y_1\mu_1\mu_2 - Y_2\mu_2^2 - 2Y_3\mu_2\mu_3 \\ &+ Y_4(\mu_1\mu_5 + \mu_3^2) - Y_5\mu_2\mu_5], \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} &= \partial\mu_3 \\ &+ (-X_3\mu_4 - X_4\mu_5 - X_5\mu_3 + X_8\mu_1 + X_9\mu_2) \\ &+ [-Y_1\mu_1\mu_3 - Y_2\mu_2\mu_3 + Y_3(\mu_1\mu_5 - \mu_3^3 + \mu_2\mu_4) \\ &- Y_4\mu_3\mu_4 - Y_5\mu_3\mu_5],\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3} &= \partial\mu_4 \\ &+ (-X_2\mu_5 - X_5\mu_4 + X_6\mu_4 - 2X_7\mu_4 - 2X_9\mu_3 + X_{11}\mu_1) \\ &+ [-Y_1\mu_1\mu_4 + Y_2(\mu_1\mu_5 + \mu_3^2) - 2Y_3\mu_3\mu_4 \\ &- Y_4\mu_4^2 - Y_5\mu_4\mu_5],\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}J_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3} &= \partial\mu_5 \\ &+ (-X_6\mu_5 - 2X_8\mu_3 - X_{10}\mu_4 - X_{11}\mu_2) \\ &+ [Y_1(\mu_2\mu_4 + \mu_3^2) - Y_2\mu_2\mu_5 - 2Y_3\mu_3\mu_5 \\ &- Y_4\mu_4\mu_5 - Y_5\mu_5^2],\end{aligned} \tag{4.29}$$

onde

$$X_1 = x_1, \tag{4.30}$$

$$X_2 = -x_1\chi_3^2 + x_2 + 2x_4\chi_3, \tag{4.31}$$

$$X_3 = x_1\left(\chi_4 + \frac{1}{2}\chi_2\chi_3\right) + x_3 - x_4\chi_2, \tag{4.32}$$

$$X_4 = -x_1\chi_3 + x_4, \tag{4.33}$$

$$X_5 = \partial\phi, \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned} X_6 &= (\partial\rho + \partial\phi) \\ &+ x_1\left[\chi_1 - \chi_3\left(\chi_4 + \frac{1}{3}\chi_2\chi_3\right)\right] + x_2\chi_2 + 2x_4\left(\chi_4 + \frac{1}{2}\chi_2\chi_3\right), \end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned} X_7 &= \left(\partial\rho_3 + \frac{1}{2}\partial\phi\right) \\ &+ x_1\left(\chi_1 + \frac{1}{6}\chi_2\chi_3^2\right) + x_3\chi_3 + x_4\left(\chi_4 - \frac{1}{2}\chi_2\chi_3\right), \end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned} X_8 &= \left(\partial\chi_4 + \frac{1}{2}\chi_2\partial\chi_3 - \frac{1}{2}\chi_3\partial\chi_2\right) \\ &+ \left[-\left(\chi_4 - \frac{3}{2}\chi_2\chi_3\right)\partial\rho - 2\chi_2\chi_3\partial\rho_3\right] \\ &- x_1\left(\chi_1 + \frac{1}{6}\chi_2\chi_3^2\right)\left(\chi_4 + \frac{1}{2}\chi_2\chi_3\right) - x_2\chi_2\left(\chi_4 - \frac{1}{2}\chi_2\chi_3\right) \\ &- x_3\left[\chi_1 + \chi_3\left(\chi_4 + \frac{2}{3}\chi_2\chi_3\right)\right] - x_4\left[\chi_4^2 - \chi_2\left(\chi_1 + \frac{5}{12}\chi_2\chi_3^2\right)\right], \end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned} X_9 &= \partial\chi_3 + (\chi_3\partial\rho - 2\chi_3\partial\rho_3) \\ &- x_1\chi_3\left(\chi_1 + \frac{1}{6}\chi_2\chi_3^2\right) - x_2\left(\chi_4 - \frac{1}{2}\chi_2\chi_3\right) \\ &+ x_3\chi_3^2 + x_4\left[\chi_1 - \chi_3\left(\chi_4 - \frac{2}{3}\chi_2\chi_3\right)\right], \end{aligned} \tag{4.38}$$

$$
\begin{aligned}
X_{10} &= \partial\chi_2 + (-2\chi_2\partial\rho + 2\chi_2\partial\rho_3) \\
&+ x_1\left(\chi_4 + \frac{1}{2}\chi_2\chi_3^2\right)^2 - x_2\chi_2^2 \\
&+ 2x_3\left(\chi_4 + \frac{1}{2}\chi_2\chi_3\right) - 2x_4\chi_2\left(\chi_4 + \frac{1}{2}\chi_2\chi_3\right),
\end{aligned} \tag{4.39}
$$

$$
\begin{aligned}
X_{11} &= \left[\partial\chi_1 - \frac{1}{3}\chi_3^2\partial\chi_2 - \left(\chi_4 - \frac{1}{2}\chi_2\chi_3\right)\partial\chi_3 + \chi_3\partial\chi_4\right] \\
&+ \left\{-2\chi_3\left(\chi_4 - \frac{1}{2}\chi_2\chi_3\right)\partial\rho - 2\left[\chi_1 - \chi_3\left(\chi_4 - \frac{2}{3}\chi_2\chi_3\right)\right]\partial\rho_3\right\} \\
&- x_1\left(\chi_1 + \frac{1}{6}\chi_2\chi_3^2\right)^2 + x_2\left(\chi_4 - \frac{1}{2}\chi_2\chi_3\right)^2 \\
&- 2x_3\chi_3\left(\chi_1 + \frac{1}{6}\chi_2\chi_3^2\right) - 2x_4\left(\chi_1 + \frac{1}{6}\chi_2\chi_3^2\right)\left(\chi_4 - \frac{1}{2}\chi_2\chi_3\right)
\end{aligned} \tag{4.40}
$$

e também onde

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= y_1 + y_2\chi_2 + 2y_3\left(\chi_4 + \frac{1}{2}\chi_2\chi_3\right) \\
&+ y_4\left[\chi_1 - \chi_3\left(\chi_4 + \frac{1}{3}\chi_2\chi_3\right)\right] \\
&- y_5\left[\chi_4^2 + \chi_2\left(\chi_1 - \frac{1}{6}\chi_2\chi_3^2\right)\right],
\end{aligned} \tag{4.41}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_2 &= y_2 + 2y_3\chi_3 - y_4\chi_3^2 \\
&- y_5\left[\chi_1 + \chi_3\left(\chi_4 - \frac{1}{3}\chi_2\chi_3\right)\right],
\end{aligned} \tag{4.42}
$$

$$
Y_3 = y_3 - y_4\chi_3 - y_5\left(\chi_4 - \frac{1}{2}\chi_2\chi_3\right), \tag{4.43}
$$

$$Y_4 = y_4 - y_5\chi_2, \tag{4.44}$$

$$Y_5 = y_5, \tag{4.45}$$

com

$$x_1 = \left[\partial\psi_1 - \frac{1}{3}\psi_3^2\partial\psi_2 + \left(\psi_4 + \frac{1}{3}\psi_2\psi_3\right)\partial\psi_3 - \psi_3\partial\psi_4\right]e^{-2\rho_3}, \tag{4.46}$$

$$x_2 = \partial\psi_2 e^{2(\rho_3-\rho)}, \tag{4.47}$$

$$x_3 = \partial\psi_3 e^{\rho-2\rho_3}, \tag{4.48}$$

$$x_4 = \left(\partial\psi_4 - \frac{1}{2}\psi_2\partial\psi_3 + \frac{1}{2}\psi_3\partial\psi_2\right)e^{-\rho} \tag{4.49}$$

e também com

$$y_1 = \partial\nu_1 e^{\rho-\phi}, \tag{4.50}$$

$$y_2 = (\partial\nu_2 + \psi_2\partial\nu_1)e^{2\rho_3-\rho-\phi}, \tag{4.51}$$

$$y_3 = \left[\partial\nu_3 + \psi_3\partial\nu_2 + \left(\psi_4 + \frac{1}{2}\psi_2\psi_3\right)\partial\nu_1\right]e^{-\phi}, \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned} y_4 &= \left\{\partial\nu_4 - 2\psi_3\partial\nu_3 - \psi_3^2\partial\nu_2\right\}e^{\rho-2\rho_3-\phi} \\ &+ \left\{\left[\psi_1 - \psi_3\left(\psi_4 + \frac{1}{3}\psi_2\psi_3\right)\right]\partial\nu_1\right\}e^{\rho-2\rho_3-\phi}, \end{aligned} \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned} y_5 &= \left\{\partial\nu_5 - \psi_2\partial\nu_4 - 2\left(\psi_4 - \frac{1}{2}\psi_2\psi_3\right)\partial\nu_3\right\}e^{-\rho-\phi} \\ &- \left\{\left[\psi_1 + \psi_3\left(\psi_4 + \frac{2}{3}\psi_2\psi_3\right)\right]\partial\nu_2\right\}e^{-\rho-\phi} \\ &+ \left\{\left[\psi_4^2 - \psi_2\left(\psi_1 + \frac{5}{12}\psi_2\psi_3^2\right)\right]\partial\nu_1\right\}e^{-\rho-\phi}. \end{aligned} \tag{4.54}$$

4.2 O modelo reduzido

Nesta seção , aplicamos o método da redução hamiltoniana, conforme exposto no **Capítulo 1**, às componentes da corrente de quiralidade direita conservada do modelo original, obtidas na seção anterior. Entretanto, com o intuito de construir um modelo reduzido de WZW que seja uma extensão dos modelos reduzidos apresentados no **Capítulo 2**, propomos uma redução adicional.

4.2.1 A redução hamiltoniana

De acordo com o método da redução hamiltoniana, conforme exposto no **Capítulo 1**, vamos impor os seguintes vínculos sobre as componentes da corrente de quiralidade direita conservada do modelo original

$$J_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3} = 0 \Rightarrow Y_5 = 0, \tag{4.55}$$

$$J_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3} = 0 \Rightarrow Y_4 = 0, \tag{4.56}$$

$$J_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} = 1 \Rightarrow Y_3 = 1, \tag{4.57}$$

$$J_{-\alpha_1-\alpha_2} = 0 \Rightarrow Y_2 = 0, \tag{4.58}$$

$$J_{-\alpha_1} = 0 \Rightarrow Y_1 = 0, \tag{4.59}$$

bem como exigir as seguintes fixações de calibre, a eles associadas

$$J_{\alpha_2+\alpha_3} = 0 \Rightarrow X_8 = -\mu_5, \tag{4.60}$$

$$J_{\alpha_3} = 0 \Rightarrow X_9 = -\mu_4, \tag{4.61}$$

$$J_1 = J_2 = J_3 = 0 \Rightarrow X_5 = X_6 = 2X_7 = -2\mu_3, \tag{4.62}$$

$$J_{-\alpha_3} = 0 \Rightarrow X_3 = \mu_2, \tag{4.63}$$

$$J_{-\alpha_2-\alpha_3} = 0 \Rightarrow X_4 = \mu_1, \tag{4.64}$$

donde decorrem as seguintes correntes remanescentes

$$J_{-\alpha_2-2\alpha_3} = X_1, \tag{4.65}$$

$$J_{-\alpha_2} = X_2, \tag{4.66}$$

$$J_{\alpha_2} = X_{10}, \tag{4.67}$$

$$J_{\alpha_2+2\alpha_3} = X_{11}, \tag{4.68}$$

$$J_{\alpha_1} = \partial X_4 - X_1 X_9 + X_2 X_3 - X_4 X_5, \tag{4.69}$$

$$J_{\alpha_1+\alpha_2} = \partial X_3 + X_1 X_8 - X_3 X_5 + X_4 X_{10}, \tag{4.70}$$

$$J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} = -\frac{1}{2}\partial X_5 + \frac{1}{4}X_5^2 + X_3 X_9 + X_4 X_8, \tag{4.71}$$

$$J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3} = -\partial X_9 + X_2 X_8 + X_5 X_9 + X_4 X_{11}, \tag{4.72}$$

$$J_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3} = -\partial X_8 - X_3 X_{11} + X_5 X_8 + X_9 X_{10}. \tag{4.73}$$

Para verificar que as correntes remanescentes, ora obtidas, satisfazem a álgebra-V de spin conforme igual a 2, como exposto no **Apêndice F**, basta identificar (no espírito do **Capítulo 3**, i. e., a menos de certas constantes apropriadas) o tensor de energia-momento $T = J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$ e, por exemplo, as correntes não -locais $V_1^+ = J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_2}$, $V_1^- = J_{\alpha_1+\alpha_2}$, $V_2^+ = J_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}$ e $V_2^- = J_{\alpha_1}$.

4.2.2 A redução adicional

Ora, nosso desejo aqui é construir um modelo reduzido de WZW que seja uma extensão dos modelos reduzidos apresentados no **Capítulo 2**. Aqueles, eram baseados na álgebra de Lie B_2 e este é baseado numa álgebra de Lie de rank maior, B_3. Neste sentido, queremos anular as componentes da corrente de quiralidade direita conservada nas direções dos geradores de B_3 de grau nulo, que lhes atribui o operador de graduação Q_{23}, o que se cumpre com a imposição dos seguintes vínculos adicionais sobre as correntes remanescentes da redução hamiltoniana

$$J_{-\alpha_2-2\alpha_3} = 0 \Rightarrow X_1 = 0, \tag{4.74}$$

$$J_{-\alpha_2} = 0 \Rightarrow X_2 = 0, \tag{4.75}$$

bem como com a exigência das seguintes fixações de calibre, a eles associadas

$$J_{\alpha_2+2\alpha_3} = 0 \Rightarrow X_{11} = 0, \tag{4.76}$$

$$J_{\alpha_2} = 0 \Rightarrow X_{10} = 0. \tag{4.77}$$

As condições (4.76) e (4.77) provam ser puras relações de consistência com a conservação da quiralidade direita das correntes remanescentes. As condições (4.74) e (4.75), juntamente com a condição (4.62), entretanto, revelam uma muito interessante estrutura do tipo buraco-negro, como veremos a seguir.

4.3 A lagrangiana

A lagrangiana L do modelo reduzido, de que tratamos neste capítulo, pode ser escrita formalmente da seguinte maneira

$$L = k(T - V), \tag{4.78}$$

onde o termo cinético T pode ser lido do seguinte modo

$$T = Tr(n^{-1}\partial na\bar{\partial}mm^{-1}a^{-1}) + \frac{1}{2}Tr(a^{-1}\partial a\bar{\partial}a^{-1}) \tag{4.79}$$

e o potencial V, da seguinte forma

$$V = Tr(BE_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}B^{-1}E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}), \tag{4.80}$$

na medida em que $J_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} = 1$, para a redução hamiltoniana que consideramos. Denotamos a constante de acoplamento adimensional por k.

4.3.1 A lagrangiana do modelo reduzido

Com o auxílio do traço normalizado dos geradores de B_3, conforme exposto no **Apêndice E**, segue que

$$Tr(a^{-1}\partial a\bar{\partial}aa^{-1}) = \partial\phi\bar{\partial}\phi + 2\partial\rho\bar{\partial}\rho - 2\partial\rho\bar{\partial}\rho_3 - 2\partial\rho_3\bar{\partial}\rho + 4\partial\rho_3\bar{\partial}\rho_3, \tag{4.81}$$

$$Tr(n^{-1}\partial na\bar{\partial}mm^{-1}a^{-1}) = x_1\bar{x}_1e^{2\rho_3} + x_2\bar{x}_2e^{2(\rho-\rho_3)} + x_3\bar{x}_3e^{2\rho_3-\rho} + x_4\bar{x}_4e^{\rho}, \tag{4.82}$$

$$Tr(BE_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}B^{-1}E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}) = 2(1 + 2\psi_3\chi_3e^{\rho-2\rho_3} + 2\psi\chi e^{-\rho})e^{\phi}, \tag{4.83}$$

onde x_1, x_2, x_3 e x_4 são dados como em (4.46), (4.47), (4.48) e (4.49), respectivamente, ao passo que $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ e $\bar{x}_4$ são dados por

$$\bar{x}_1 = \left[\bar{\partial}\chi_1 - \frac{1}{3}\chi_3^2\bar{\partial}\chi_2 + \left(\chi_4 + \frac{1}{3}\chi_2\chi_3\right)\bar{\partial}\chi_3 - \chi_3\bar{\partial}\chi_4\right]e^{-2\rho_3}, \tag{4.84}$$

$$\bar{x}_2 = \bar{\partial}\chi_2e^{2(\rho_3-\rho)}, \tag{4.85}$$

$$\bar{x}_3 = \bar{\partial}\chi_3e^{\rho-2\rho_3}, \tag{4.86}$$

$$\bar{x}_4 = \left(\bar{\partial}\chi_4 - \frac{1}{2}\chi_2\bar{\partial}\chi_3 + \frac{1}{2}\chi_3\bar{\partial}\chi_2\right)e^{-\rho} \tag{4.87}$$

e ψ e χ escrevem-se da seguinte maneira

$$\psi = \psi_4 - \frac{1}{2}\psi_2\psi_3, \tag{4.88}$$

$$\chi = \chi_4 - \frac{1}{2}\chi_2\chi_3. \tag{4.89}$$

4.3.2 A lagrangiana singular

As condições adicionais (4.74) e (4.75), juntamente com a condição (4.62), que devem ser satisfeitas pelos campos físicos, traduzem-se nas seguintes equações

$$\partial\psi_1 - \frac{1}{3}\psi_3^2\partial\psi_2 + \left(\psi_4 + \frac{1}{3}\psi_2\psi_3\right)\partial\psi_3 - \psi_3\partial\psi_4 = 0, \tag{4.90}$$

$$\partial\psi_2 e^{2(\rho_3-\rho)} + 2\chi_3\left(\partial\psi_4 - \frac{1}{2}\psi_2\partial\psi_3 + \frac{1}{2}\psi_3\partial\psi_2\right)e^{-\rho} = 0, \tag{4.91}$$

$$\begin{aligned} &\partial\rho + \chi_2\partial\psi_2 e^{2(\rho_3-\rho)} \\ &+ \; 2\left(\chi_4 + \frac{1}{2}\chi_2\chi_3\right)\left(\partial\psi_4 - \frac{1}{2}\psi_2\partial\psi_3 + \frac{1}{2}\psi_3\partial\psi_2\right)e^{-\rho} = 0, \end{aligned} \tag{4.92}$$

$$\partial\rho = 2\partial\rho_3 + \chi_3\partial\psi_3 e^{\rho-2\rho_3}. \tag{4.93}$$

A princípio, parece ser difícil extrair uma condição semelhante àquelas que temos chamado de condições de buraco-negro, ao longo deste trabalho, do conjunto de equações acima. Entretanto, uma observação um tanto mais atenta destas relações sugere que possamos subtrair (4.91) de (4.92) e utilizar (4.88) e (4.89) para reescrever

$$\partial\psi_2 e^{2(\rho_3-\rho)} + 2\chi_3(\partial\psi + \psi_3\partial\psi_2)e^{-\rho} = 0, \tag{4.94}$$

$$\partial\rho + 2\chi(\partial\psi + \psi_3\partial\psi_2)e^{-\rho} = 0. \tag{4.95}$$

Neste ponto, propomos a seguinte transformação de variáveis

$$\psi_3 = \tilde{\psi}_3 e^{\rho_3 - \frac{1}{2}\rho}, \tag{4.96}$$

$$\chi_3 = \tilde{\chi}_3 e^{\rho_3 - \frac{1}{2}\rho}, \tag{4.97}$$

$$\psi = \tilde{\psi} e^{\frac{1}{2}\rho}, \tag{4.98}$$

$$\chi = \tilde{\chi} e^{\frac{1}{2}\rho}, \tag{4.99}$$

donde decorre que podemos reescrever as equações (4.93), (4.94) e (4.95) da seguinte maneira

$$(1 + \tilde{\psi}_3\tilde{\chi}_3)\partial\rho = 2(1 + \tilde{\psi}_3\tilde{\chi}_3)\partial\rho_3 + 2\tilde{\chi}_3\partial\tilde{\chi}_3, \tag{4.100}$$

$$(1 + 2\tilde{\psi}_3\tilde{\chi}_3)\partial\psi_2 e^{\rho_3-\rho} = -2\tilde{\chi}_3\left(\partial\tilde{\psi} + \frac{1}{2}\tilde{\psi}\partial\rho\right), \tag{4.101}$$

$$(1 + \tilde{\psi}\tilde{\chi})\partial\rho = -2\tilde{\chi}(\partial\tilde{\psi} + \tilde{\psi}_3\partial\psi_2 e^{\rho_3-\rho}). \tag{4.102}$$

Agora, estamos finalmente numa posição confortável! De fato, das equações (4.101) e (4.102) segue diretamente que

$$\partial\rho = -2\frac{\tilde{\chi}\partial\tilde{\psi}}{\Delta}, \tag{4.103}$$

onde

$$\Delta = 1 + 2\tilde{\psi}_3\tilde{\chi}_3 + \tilde{\psi}\tilde{\chi}. \tag{4.104}$$

Por outro lado, substituindo a equação (4.103) na equação (4.100), decorre imediatamente que

$$\partial\rho_3 = -\frac{\tilde{\chi}_3\partial\tilde{\psi}_3}{\Delta_3} - \frac{\tilde{\chi}\partial\tilde{\psi}}{\Delta}, \tag{4.105}$$

onde

$$\Delta_3 = 1 + \tilde{\psi}_3\tilde{\chi}_3. \tag{4.106}$$

As equações (4.103) e (4.105), juntamente com as equações

$$\bar{\partial}\rho = -2\frac{\tilde{\psi}\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta}, \tag{4.107}$$

$$\bar{\partial}\rho_3 = -\frac{\tilde{\psi}_3\bar{\partial}\tilde{\chi}_3}{\Delta_3} - \frac{\tilde{\psi}\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta}, \tag{4.108}$$

que provêm da aplicação do método da redução hamiltoniana às componentes da corrente de quiralidade esquerda conservada do modelo de WZW, baseado na álgebra de Lie B_3, manifestam explicitamente o caráter de não -localidade dos campos ρ e ρ_3 e merecem ser chamadas de condições de buraco-negro, desde que conduzam a singularidades desta natureza na lagrangiana do modelo reduzido. Com efeito, em vista delas, é possível escrever tal lagrangiana do seguinte modo

$$L = k\left[-2(1+2\tilde{\psi}_3\tilde{\chi}_3+2\tilde{\psi}\tilde{\chi})e^{\phi} + \frac{1}{2}\partial\phi\bar{\partial}\phi + 2\frac{\partial\tilde{\psi}_3\bar{\partial}\tilde{\chi}_3}{\Delta_3} + 2\frac{\partial\tilde{\psi}\bar{\partial}\tilde{\chi}}{\Delta}\right]. \tag{4.109}$$

Esta é, enfim, a lagrangiana singular que descreve o *modelo reduzido de dois buracos-negros.*

Observe que no limite em que $\tilde{\psi}_3, \tilde{\chi}_3 \to 0$, reproduzimos o modelo-$III$ (o modelo de Bilal), na medida em que, para este limite, a equação (4.109), que descreve o modelo reduzido de dois buracos-negros, identifica-se com a equação (2.112), que descreve o modelo de Bilal (um modelo de um buraco-negro).

Isto sugere fortemente que o modelo reduzido de dois buracos-negros, que construímos neste capítulo, seja uma extensão de um modelo de um buraco-negro.

Aliado a este fato, observe ainda que a estrutura algébrica satisfeita pelas correntes remanescentes do modelo reduzido de dois buracos-negros, construído neste capítulo é, com efeito, uma extensão da álgebra-V satisfeita pelas correntes remanescentes dos modelos II e III (dois modelos de um buraco-negro).

No capítulo seguinte, tecemos comentários detalhados com respeito a nossas conjecturas acerca desta questão e de outros problemas em aberto, que nosso trabalho suscita.

Capítulo 5

Conclusões e problemas em aberto

Neste capítulo final, após resumir tudo o que fizemos, desejamos discutir alguns pontos aos quais somos remetidos naturalmente através deste trabalho e cuja solução ainda está por vir. Estes pontos são a relação entre os modelos reduzidos de um buraco-negro e a construção de modelos reduzidos de multi-buracos-negros.

5.1 Conclusões

Neste trabalho, construímos uma teoria de campos clássica 1+1-dimensional, que descreve a propagação de uma corda em um fundo bidimensional (euclidiano) do tipo buraco-negro. A técnica utilizada para esta construção foi a aplicação do método da redução hamiltoniana às correntes de quiralidades conservadas do modelo de WZW.

A partir do modelo de WZW baseado na álgebra de Lie B_2, construímos quatro modelos reduzidos, através de quatro reduções hamiltonianas específicas. Utilizando a fórmula da variação funcional das correntes de quiralidades conservadas, que provem das simetrias da ação que descreve o modelo de WZW, com respeito a transformações infinitesimais do elemento do grupo de Lie, associado à álgebra de Lie B_2, na qual o modelo de WZW está baseado, fomos capazes de deduzir que as correntes remanescentes de dois dos modelos reduzidos satisfazem uma álgebra-V de spin conforme igual a $\frac{3}{2}$, ao passo que as correntes remanescentes dos outros dois, uma álgebra-V de spin conforme igual a 2. No contexto do formalismo canônico, verificamos as estruturas algébricas clássicas do tipo parênteses de Poisson dos campos físicos e das correntes remanescentes dos modelos reduzidos. Através de transformações de variáveis apropriadas, obtivemos a descrição destes modelos reduzidos em termos de campos livres (osciladores harmônicos), desde que estes campos tenham quiralidade bem definida. Além disto, conjecturamos as estruturas algébricas por eles satisfeitos e determinamos exatamente os valores de suas constantes de estrutura, impondo invariância conforme dos modelos reduzidos. Salientamos a importância para uma possível quantização dos modelos reduzidos, na medida em que estas estruturas algébricas são do tipo parênteses de Poisson clássicos. Um destes modelos reduzidos por nós obtidos, o modelo-III, reproduz o modelo de Bilal. Chamamos estes modelos de modelos reduzidos de um buraco-negro.

Por outro lado, a partir do modelo de WZW baseado na álgebra de Lie B_3, construímos um outro modelo reduzido, novamente através da aplicação do método da redução hamiltoniana às correntes de quiralidades conservadas. Além disto, recorremos a uma redução adicional, com o intuito de obter uma extensão das simetrias dos modelos reduzidos de um buraco-negro. Mais uma vez, usamos a fórmula da variação funcional das correntes de quiralidades conservadas para deduzir a estrutura algébrica satisfeita pelas correntes remanescentes do modelo reduzido, que provamos ser uma álgebra-V de spin conforme igual a 2. Entretanto, diferentemente do que ocorre para os modelos reduzidos de um buraco-negro, para os quais há um único par de correntes remanescentes não -locais, que satisfazem álgebras-V, para cada quiralidade, para este modelo reduzido, baseado na álgebra de Lie B_3 há dois pares de correntes remanescentes não -locais, que satisfazem a álgebra-V, para cada quiralidade. Através de transformações de variáveis apropriadas, mostramos que dois dos campos físicos do modelo reduzido, baseado na álgebra de Lie B_3, manifestam explicitamente seu caráter não -local. Mostramos ainda que as relações de não -localidade que devem ser satisfeitas pelos campos físicos deste modelo reduzido conduzem necessariamente a duplas singularidades na lagrangiana que o descreve. Finalmente, provamos que para limites apropriados dos campos físicos deste modelo reduzido, esta lagrangiana se reduz àquela que descreve o modelo-III (o modelo de Bilal) de um buraco-negro, cujas correntes remanescentes satisfazem também uma álgebra-V de spin conforme igual a 2, interpretando assim, com efeito, este modelo reduzido como sendo uma extensão do modelo-III. Chamamos este modelo de modelo reduzido de dois buracos-negros.

5.2 Problemas em aberto

Nosso trabalho suscita questões , cuja solução deve ser investigada. Nesta seção , discutimos duas delas, a saber a relação entre os modelos reduzidos de um buraco-negro e a construção de modelos reduzidos de multi-buracos-negros.

5.2.1 A relação entre os modelos reduzidos de um buraco-negro

Em primeiro lugar, discutimos a relação entre os modelos reduzidos de um buraco-negro. Como já dissemos, dois dos modelos reduzidos de um buraco-negro, que construímos neste trabalho, são tais que suas correntes remanescentes satisfazem uma álgebra-V de spin conforme igual a $\frac{3}{2}$, ao passo que para os outros dois, suas correntes remanescentes satisfazem uma álgebra-V de spin conforme igual a 2. Por isto, conjecturamos que modelos que apresentam mesma simetria conforme devem ser equivalentes, no sentido de descrever a mesma teoria.

Construímos os dois modelos reduzidos de spin conforme igual a 2 através de duas parametrizações distintas do elemento do grupo de Lie, associado à álgebra de Lie B_2, na medida em que utilizamos dois operadores de graduação distintos quando da decomposição não -abeliana de Gauss deste elemento. Neste sentido, uma maneira de provar sua equivalência seria escrever este elemento do grupo de Lie em termos das duas parametrizações , numa representação matricial apropriada, e procurar por uma transformação que os relacione. Conjecturamos que esta transformação deve ser semelhante a uma rotação de Weyl, que permuta as raízes de uma álgebra de Lie. Assim, esta transformação permutaria, por assim dizer, as correntes remanescentes.

Os dois modelos reduzidos de spin conforme igual a $\frac{3}{2}$ foram construídos, utilizando-se a mesma parametrização para o elemento do grupo de Lie. Ora, como conjecturamos que eles sejam equivalentes, esperamos que a relação entre as lagrangianas que os descrevem seja de tal sorte que, após uma transformação apropriada de coordenadas, sua diferença se escreva na forma de uma divergência total.

Ambos os cálculos a que nos referimos nos dois parágrafos acima, entretanto, não se mostram triviais, exigindo portanto um estudo mais aprofundado do grupo de simetria das transformações residuais dos modelos reduzidos de um buraco-negro.

5.2.2 A construção de modelos reduzidos de multi-buracos-negros

Passemos agora à discussão acerca da construção de modelos reduzidos de multi-buracos-negros. Recentemente, Gervais e Saveliev [10] mostraram que modelos não -abelianos de Toda conduzem a sistemas conformes exatamente solúveis, em presença de buracos-negros. Estes modelos correspondem a modelos reduzidos de WZW, cujo grupo de simetria das transformações residuais é nilpotente, sendo portanto de natureza essencialmente distinta daquela do coset $SL(2,\Re)/U(1)$, considerado por Witten. Dentro deste contexto, eles mostraram que existe um operador de graduação , definido sobre uma álgebra de Lie B_n, para o qual a lagrangiana que descreve tais sistemas é dada por

$$L = -(1-2\vec{u}\cdot\vec{v})e^{2\phi} - \partial\phi\bar{\partial}\phi + \frac{1}{1-\vec{u}\cdot\vec{v}}(\partial\vec{u}\cdot\bar{\partial}\vec{v} + \partial\vec{v}\cdot\bar{\partial}\vec{u}), \tag{5.1}$$

onde

$$\vec{u} = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1}), \tag{5.2}$$

$$\vec{v} = (\chi_1, \chi_2, ..., \chi_{n-1}), \tag{5.3}$$

com ϕ, ψ_i e χ_i denotando os campos físicos. Esta lagrangiana representaria uma estrutura do tipo buraco-negro multi-dimensional.

Observe que as lagrangianas que descrevem os modelos reduzidos de um buraco-negro, que obtivemos, são bastante semelhantes a (5.1). Em linhas gerais, conjecturamos que elas devem ser equivalentes, seguindo a argumentação da seção anterior.

Com respeito à lagrangiana que descreve o modelo reduzido de dois buracos-negros que obtivemos, entretanto, as dificuldades aumentam. De fato, esta lagrangiana apresenta uma dupla singularidade, diferentemente de (5.1), que apresenta uma singularidade simples. Ora, por um lado, é bem verdade que não esgotamos o estudo da classe de modelos reduzidos de dois buracos-negros, que provêm da aplicação do método da redução hamiltoniana às correntes de quiralidades conservadas do modelo de WZW baseado na álgebra de Lie B_3. Neste sentido, conjecturamos que haja alguma outra espécie de redução hamiltoniana, diferente daquela por nós estudada, que conduza diretamente à obtenção de uma lagrangiana semelhante a (5.1).

Por outro lado, conjecturamos que haja uma transformação de coordenadas sobre os campos físicos do modelo reduzido de dois buracos-negros que obtivemos, tal que a lagrangiana que o descreve manifeste explicitamente seu caráter singular, como ocorre com a lagrangiana que figura em (5.1).

Mais uma vez, ambas as conjecturas que fazemos nos dois parágrafos acima conduzem a cálculos altamente não triviais. Com efeito, ainda diríamos que, provavelmente, seria bem mais instrutivo, em primeiro lugar, esgotar completamente o estudo da classe de modelos reduzidos de dois buracos-negros que provêm da aplicação do método da redução hamiltoniana às correntes de quiralidades conservadas do modelo de WZW. Isto colocaria o nosso conhecimento com respeito ao grupo de simetria das transformações residuais destes modelos, por assim dizer, em pé de igualdade com relação aos modelos de um buraco-negro, no espírito de nossa argumentação ao final da última seção .

De qualquer maneira, o fato de que a estrutura algébrica, satisfeita pelos dois pares de correntes remanescentes não -locais do modelo reduzido de dois buracos-negros, é uma extensão daquela, satisfeita pelo par de correntes remanescentes não -locais, do modelo-III (o modelo de Bilal) de um buraco-negro, para cada quiralidade, estimula-nos a procurar por uma formulação que conduza à construção de modelos reduzidos de multi-buracos-negros, baseados numa álgebra de Lie B_n.

Apêndice A

A álgebra de Lie B_2

A álgebra de Lie semi-simples B_2 tem rank igual a 2. Logo, ela possui duas raízes simples, que denotamos por α_1 e α_2. Com estas duas raízes simples, construímos todas as oito raízes da álgebra, quatro positivas e quatro negativas, a saber $\pm\alpha_1$, $\pm\alpha_2$, $\pm(\alpha_1 + \alpha_2)$ e $\pm(\alpha_1 + 2\alpha_2)$.

A.1 Os geradores

A cada raiz simples de B_2, associamos um gerador na sua subálgebra de Cartan, que representamos por h_1 e h_2. Também, a cada raiz de B_2, associamos um gerador do tipo escada, que simbolizamos por E_α, onde α corresponde a qualquer uma destas raízes.

A.1.1 Uma representação linear

Uma representação linear, bastante conveniente a nossos propósitos neste trabalho, para os geradores de B_2 é fornecida em termos de osciladores fermiônicos.

Esta representação linear pode ser realizada numa representação matricial, constituída por matrizes quadradas de ordem cinco. No que segue, exibimos tal representação linear para os geradores na subálgebra de Cartan e para os geradores do tipo escada.

$$h_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$E_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{-\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{-\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{\alpha_1+\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{-\alpha_1-\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{\alpha_1+2\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{-\alpha_1-2\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A.1.2 O traço normalizado

Uma vez de posse da representação linear para os geradores de B_2 descrita no parágrafo anterior, podemos definir o traço normalizado sobre B_2 através da metade dos traços dos produtos das matrizes. A seguir, exibimos os traços normalizados não -nulos dos produtos das matrizes.

$$Tr(h_1^2) = 2, \tag{A.1}$$

$$Tr(h_1 h_2) = Tr(h_2 h_1) = -2, \tag{A.2}$$

$$Tr(h_2^2) = 4, \tag{A.3}$$

$$Tr(E_{\alpha_1} E_{-\alpha_1}) = Tr(E_{-\alpha_1} E_{\alpha_1}) = 1, \tag{A.4}$$

$$Tr(E_{\alpha_2} E_{-\alpha_2}) = Tr(E_{-\alpha_2} E_{\alpha_2}) = 2, \tag{A.5}$$

$$Tr(E_{\alpha_1+\alpha_2} E_{-\alpha_1-\alpha_2}) = Tr(E_{-\alpha_1-\alpha_2} E_{\alpha_1+\alpha_2}) = 2, \tag{A.6}$$

$$Tr(E_{\alpha_1+2\alpha_2} E_{-\alpha_1-2\alpha_2}) = Tr(E_{-\alpha_1-2\alpha_2} E_{\alpha_1+2\alpha_2}) = 1. \tag{A.7}$$

A.1.3 Os parênteses de Lie

A partir da representação linear para os geradores de B_2 exposta no parágrafo **A.1.1**, podemos definir os parênteses de Lie sobre B_2 como sendo os comutadores das matrizes. No que segue, exibimos os comutadores não -nulos das matrizes.

$$[E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1}] = h_1, \tag{A.8}$$

$$[E_{\alpha_2}, E_{-\alpha_2}] = h_2, \tag{A.9}$$

$$[E_{\alpha_1+\alpha_2}, E_{-\alpha_1-\alpha_2}] = 2h_1 + h_2, \tag{A.10}$$

$$[E_{\alpha_1+2\alpha_2}, E_{-\alpha_1-2\alpha_2}] = h_1 + h_2, \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned} E_{\pm\alpha_1} &= \pm\frac{1}{2}[h_1, E_{\pm\alpha_1}] = \pm\frac{1}{2}[E_{\pm\alpha_1}, h_2] \\ &= \pm\frac{1}{2}[E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}, E_{\mp\alpha_2}], \end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned} E_{\pm\alpha_2} &= \pm[E_{\pm\alpha_2}, h_1] = \pm\frac{1}{2}[h_2, E_{\pm\alpha_2}] \\ &= \pm[E_{\mp\alpha_1}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}] = \pm[E_{\pm(\alpha_1+2\alpha_2)}, E_{\mp(\alpha_1+\alpha_2)}], \end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned} E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)} &= \pm[h_1, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}] \\ &= \pm[E_{\pm\alpha_1}, E_{\pm\alpha_2}] = \pm[E_{\mp\alpha_2}, E_{\pm(\alpha_1+2\alpha_2)}], \end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned} E_{\pm(\alpha_1+2\alpha_2)} &= \pm\frac{1}{2}[h_2, E_{\pm(\alpha_1+2\alpha_2)}] \\ &= \pm\frac{1}{2}[E_{\pm\alpha_2}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}]. \end{aligned} \tag{A.15}$$

A.2 A estrutura graduada

No **Capítulo 1**, vimos que podemos atribuir uma estrutura graduada à uma álgebra de Lie semi-simples a partir da definição de um operador de graduação sobre ela. Nesta seção , a partir da definição da base de Chevalley de B_2, mostramos como obter diretamente a matriz de Cartan, bem como sua inversa, que conduzem imediatamente à construção dos dois pesos fundamentais e dos correspondentes operadores de graduação , cuja utilização será exaustiva neste trabalho.

A.2.1 A base de Chevalley

A base de Chevalley definida sobre B_2 é o conjunto $\{e_i\}$, cujos elementos satisfazem o seguinte produto escalar normalizado

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}, \tag{A.16}$$

onde $i, j = 1, 2$. Os elementos da base de Chevalley escrevem-se como combinações lineares das raízes simples de B_2 através de $e_1 = \alpha_1 + \alpha_2$ e $e_2 = \alpha_2$, donde segue diretamente que $\alpha_1 = e_1 - e_2$ e $\alpha_2 = e_2$. A partir da equação (A.16) e com o auxílio das relações ora obtidas, decorre imediatamente que as raízes simples de B_2 verificam o seguinte produto escalar normalizado

$$\alpha_1^2 = 2, \tag{A.17}$$

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \alpha_2 \cdot \alpha_1 = -1, \tag{A.18}$$

$$\alpha_2^2 = 1. \tag{A.19}$$

A.2.2 A matriz de Cartan

As entradas da matriz de Cartan definida sobre B_2 escrevem-se em termos do produto escalar normalizado das raízes simples da álgebra, a saber

$$k_{ij} = 2\frac{\alpha_i \cdot \alpha_j}{\alpha_j^2}, \tag{A.20}$$

onde $i, j = 1, 2$. Das equações (A.17) a (A.19) concluímos que a matriz de Cartan k e sua inversa k^{-1} são as seguintes matrizes quadradas de ordem dois

$$k = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

A.2.3 Os pesos fundamentais

Os pesos fundamentais definidos sobre B_2 escrevem-se como combinações lineares das raízes simples da álgebra, cujos coeficientes são as entradas da inversa da matriz de Cartan, i. e.,

$$\lambda_i = \sum_j k_{ij}^{-1} \alpha_j, \tag{A.21}$$

onde $i, j = 1, 2$. Uma vez de posse da inversa da matriz de Cartan, descrita no parágrafo anterior, concluímos que

$$\lambda_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \tag{A.22}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2\alpha_2). \tag{A.23}$$

A.2.4 Os operadores de graduação

No **Capítulo 1**, vimos que podemos definir um operador de graduação , que conduz a uma decomposição não -abeliana de Gauss para um elemento do grupo de Lie, associado a uma álgebra de Lie G semi-simples de rank igual a r, através de

$$Q_i = \sum_{j=1}^{r} 2\frac{\lambda_j \cdot H}{\alpha_j^2}, \tag{A.24}$$

onde $j \neq i$ e H denota a subálgebra de Cartan de G. A partir dos pesos fundamentais de B_2, expostos no parágrafo anterior, concluímos que

$$Q_1 = h_1 + h_2, \tag{A.25}$$

$$Q_2 = \frac{1}{2}(2h_1 + h_2). \tag{A.26}$$

Apêndice B

As lagrangianas dos modelos de um buraco-negro

Neste trabalho, construímos modelos que seguem da aplicação do método da redução hamiltoniana às correntes de quiralidades conservadas do modelo de WZW baseado nas álgebras de Lie B_2 e B_3. Suas lagrangianas são escritas da maneira usual, i. e.,

$$L = k(T - V), \tag{B.1}$$

onde T e V denotam, respectivamente, o termo cinético e o potencial e k é uma constante a ser fixada pela estrutura algébrica satisfeita pelas correntes remanescentes dos modelos reduzidos. Os cálculos do termo cinético T e do potencial V dependem da decomposição não -abeliana de Gauss do elemento do grupo de Lie, associado à álgebra de Lie, que decorre da definição conveniente dos operadores de graduação Q_i e Q_{ij} sobre as álgebras de Lie B_2 e B_3, respectivamente, bem como da escolha apropriada do conjunto de vínculos e correspondentes fixações de calibre, a eles associadas, sobre as componentes das correntes de quiralidades conservadas do modelo de WZW.

A componente de grau nulo do elemento do grupo é escrita em termos de uma decomposição abeliana de Gauss, ou seja,

$$B = nam, \tag{B.2}$$

onde n e m são exponenciais das combinações lineares dos geradores do tipo escada de graus nulos nas direções das raízes positivas e negativas, respectivamente, e a é a exponencial da combinação linear dos geradores na subálgebra de Cartan. Nas três combinações lineares citadas, o papel dos coeficientes é desempenhado pelos campos.

No que segue, fazemos uso exaustivo do traço normalizado dos geradores de B_2, conforme exposto no apêndice anterior, e da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH), a saber

$$\exp(\gamma)\Gamma\exp(-\gamma) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}[\gamma,[\gamma,[\gamma,...[\gamma,\Gamma]]]...]. \tag{B.3}$$

B.1 Os termos cinéticos

No **Capítulo 1**, vimos que a invariância da ação , que descreve o modelo de WZW, por transformações infinitesimais do elemento do grupo de Lie, associado à álgebra de Lie, na qual o modelo está baseado, é assegurada quando escrevemos esta ação em termos da identidade de Polyakov-Wiegmann. Neste sentido, em particular, para a álgebra de Lie B_2, substituindo os vínculos e as fixações de calibre, a eles associadas (exceto a condição de buraco-negro), guardando o espírito do **Capítulo**

1, na identidade de Polyakov-Wiegmann, o termo cinético escreve-se da seguinte maneira

$$T = Tr(n^{-1}\partial n a\bar{\partial} m m^{-1} a^{-1}) + \frac{1}{2} Tr(a^{-1}\partial a \bar{\partial} a a^{-1}), \tag{B.4}$$

tal que, para toda decomposição abeliana de Gauss de B, a é lido do seguinte modo

$$a = \exp(\varphi_1 h_1 + \varphi_2 h_2). \tag{B.5}$$

De qualquer forma, concluímos, pois, que

$$Tr(a^{-1}\partial a \bar{\partial} a a^{-1}) = 2(\partial\varphi_1\bar{\partial}\varphi_1 - \partial\varphi_1\bar{\partial}\varphi_2 - \partial\varphi_2\bar{\partial}\varphi_1 + 2\partial\varphi_2\bar{\partial}\varphi_2). \tag{B.6}$$

B.1.1 O operador de graduação Q_1

Por um lado, o operador de graduação Q_1, definido sobre B_2, determina que

$$n = \exp(\psi E_{\alpha_1}), \tag{B.7}$$

$$m = \exp(\chi E_{-\alpha_1}), \tag{B.8}$$

donde segue diretamente que

$$Tr(n^{-1}\partial n a \bar{\partial} m m^{-1} a^{-1}) = \partial\psi\bar{\partial}\chi e^{2\varphi_2 - 2\varphi_1}. \tag{B.9}$$

B.1.2 O operador de graduação Q_2

Por outro lado, o operador de graduação Q_2, também definido sobre B_2, estabelece que

$$n = \exp(\psi E_{\alpha_2}), \tag{B.10}$$

$$m = \exp(\chi E_{-\alpha_2}), \tag{B.11}$$

donde decorre imediatamente que

$$Tr(n^{-1}\partial n a \bar{\partial} m m^{-1} a^{-1}) = 2\partial\psi\bar{\partial}\chi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2}. \tag{B.12}$$

B.2 Os potenciais

O potencial escreve-se da seguinte maneira

$$V = Tr(B^{-1}\Lambda_{-1}B\Lambda_1), \tag{B.13}$$

onde Λ_1 (respectivamente, Λ_{-1}) representa o gerador do tipo escada de grau igual a 1 (respectivamente, de grau igual a -1), que lhe é atribuido através de um dado operador de graduação Q_i ou Q_{ij}, dependendo da álgebra de Lie na qual o modelo de WZW está baseado (B_2 ou B_3, respectivamente), tal que a componente da corrente J (respectivamente, $\bar{J}$), de quiralidade conservada, na direção de Λ_1 (respectivamente, Λ_{-1}) é vinculada a 1.

B.2.1 O modelo-I

Considere a decomposição não -abeliana de Gauss que segue do operador de graduação Q_2, definido sobre B_2, e tome $\Lambda_1 = E_{\alpha_1}$. Decorre, pois, que o potencial é lido do seguinte modo

$$V = e^{2\varphi_1 - 2\varphi_2}. \tag{B.14}$$

Chamamos o modelo reduzido descrito por este potencial de modelo-I.

B.2.2 O modelo-II

Considere a decomposição não -abeliana de Gauss que segue do operador de graduação Q_1, definido sobre B_2, e tome $\Lambda_1 = E_{\alpha_2}$. Decorre, pois, que o potencial é lido do seguinte modo

$$V = 2e^{2\varphi_2 - \varphi_1}. \tag{B.15}$$

Chamamos o modelo reduzido descrito por este potencial de modelo-II.

B.2.3 O modelo-III

Considere a decomposição não -abeliana de Gauss que segue do operador de graduação Q_2, definido sobre B_2, e tome $\Lambda_1 = E_{\alpha_1+\alpha_2}$. Decorre, pois, que o potencial é lido do seguinte modo

$$V = 2(1 + 2\psi\chi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2})e^{\varphi_1}. \tag{B.16}$$

Chamamos o modelo reduzido descrito por este potencial de modelo-III.

B.2.4 O modelo-IV

Considere a decomposição não -abeliana de Gauss que segue do operador de graduação Q_2, definido sobre B_2, e tome $\Lambda_1 = E_{\alpha_1 + 2\alpha_2}$. Decorre, pois, que o potencial é lido do seguinte modo

$$V = [(1 + \psi\chi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2})e^{\varphi_2}]^2. \tag{B.17}$$

Chamamos o modelo reduzido descrito por este potencial de modelo-IV.

Apêndice C

As correntes remanescentes dos modelos de um buraco-negro

Neste apêndice, apresentamos as correntes remanescentes da aplicação do método da redução hamiltoniana às componentes da corrente de quiralidade direita conservada do modelo de WZW baseado na álgebra de Lie B_2. No que segue, a corrente J de quiralidade direita conservada é escrita como a seguinte combinação linear dos geradores da álgebra de Lie B_2

$$J = J_{-\alpha}E_{\alpha} + J_i h_i + J_{\alpha}E_{-\alpha}. \tag{C.1}$$

C.1 As decomposições não -abelianas de Gauss

No **Capítulo 1**, vimos que a corrente J de quiralidade direita conservada do modelo de WZW escreve-se em termos de um elemento g do grupo de Lie, associado à álgebra de Lie, na qual o modelo está baseado, da seguinte maneira

$$J = g^{-1}\partial g. \tag{C.2}$$

Nesta seção , consideramos decomposições não -abelianas de Gauss do elemento g do grupo de Lie, escrevendo-o do seguinte modo

$$g = NBM, \tag{C.3}$$

donde concluímos que a corrente J pode ser lida da seguinte forma

$$J = M^{-1}B^{-1}N^{-1}\partial NBM + M^{-1}B^{-1}\partial BN + M^{-1}\partial M. \tag{C.4}$$

No que segue, fazemos uso exaustivo da fórmula de BCH, conforme exposto no apêndice anterior.

C.1.1 O operador de graduação Q_1

Por um lado, o operador de graduação Q_1 determina que

$$N = \exp(\psi_1 E_{\alpha_2} + \psi_2 E_{\alpha_1+\alpha_2} + \psi_3 E_{\alpha_1+2\alpha_2}), \tag{C.5}$$

$$M = \exp(\chi_1 E_{-\alpha_2} + \chi_2 E_{-\alpha_1-\alpha_2} + \chi_3 E_{-\alpha_1-2\alpha_2}), \tag{C.6}$$

donde segue que as componentes da corrente J escrevem-se através de

$$J_{-\alpha_1-2\alpha_2} = Y_1, \tag{C.7}$$

$$J_{-\alpha_1-\alpha_2} = Y_2 - \chi_1 Y_1, \tag{C.8}$$

$$J_{-\alpha_2} = Y_3 + \chi_2 Y_1, \tag{C.9}$$

$$J_{-\alpha_1} = -\chi_1^2 Y_1 + 2\chi_1 Y_2 + \partial\psi e^{2\varphi_2-2\varphi_1}, \tag{C.10}$$

$$J_1 = (\chi_3 - \chi_1\chi_2)Y_1 + 2\chi_2 Y_2 + (\partial\varphi_1 + \chi\partial\psi e^{2\varphi_2-2\varphi_1}), \tag{C.11}$$

$$J_2 = \chi_3 Y_1 + \chi_2 Y_2 + \chi_1 Y_3 + \partial\varphi_2, \tag{C.12}$$

$$J_{\alpha_1} = \chi_2^2 Y_1 + 2\chi_2 Y_3 + (\partial\chi + 2\chi\partial\varphi_2 - 2\chi\partial\varphi_1 - \chi^2\partial\psi e^{2\varphi_2-2\varphi_1}), \tag{C.13}$$

$$\begin{aligned} J_{\alpha_2} &= -\chi_1\chi_3 Y_1 + (\chi_3 - \chi_1\chi_2)Y_2 - \chi_1^2 Y_3 \\ &- \chi_2\partial\psi e^{2\varphi_2-2\varphi_1} + \chi_1(\partial\varphi_1 + \chi\partial\psi e^{2\varphi_2-2\varphi_1}) - 2\chi_1\partial\varphi_2 + \partial\chi_1, \end{aligned} \tag{C.14}$$

$$\begin{aligned} J_{\alpha_1+\alpha_2} &= -\chi_2\left(\chi_3 - \frac{1}{3}\chi_1\chi_2\right)Y_1 - \chi_2^2 Y_2 - (\chi_3 + \chi_1\chi_2)Y_3 \\ &- \chi_2(\partial\varphi_1 + \chi\partial\psi e^{2\varphi_2-2\varphi_1}) \\ &- \chi_1(\partial\chi + 2\chi\partial\varphi_2 - 2\chi\partial\varphi_1 - \chi^2\partial\psi e^{2\varphi_2-2\varphi_1}) + \partial\chi_2, \end{aligned} \tag{C.15}$$

$$\begin{aligned} J_{\alpha_1+2\alpha_2} &= -\left(\chi_3^2 - \frac{1}{6}\chi_1^2\chi_2^2\right)Y_1 - 2\chi_2\chi_3 Y_2 - 2\chi_1\chi_3 Y_3 \\ &+ \chi_2^2\partial\psi e^{2\varphi_2-2\varphi_1} - 2\chi_1\chi_2(\partial\varphi_1 + \chi\partial\psi e^{2\varphi_2-2\varphi_1}) \\ &- 2(\chi_3 - \chi_1\chi_2)\partial\varphi_2 \\ &- \chi_1^2(\partial\chi + 2\chi\partial\varphi_2 - 2\chi\partial\varphi_1 - \chi^2\partial\psi e^{2\varphi_2-2\varphi_1}) \\ &+ \partial\chi_3 + \chi_1\partial\chi_2 - \chi_2\partial\chi_1, \end{aligned} \tag{C.16}$$

onde

$$Y_1 = y_1, \tag{C.17}$$

$$Y_2 = y_2, \tag{C.18}$$

$$Y_3 = y_3 - \chi y_2, \tag{C.19}$$

com

$$y_1 = (\partial\psi_3 - \psi_1\partial\psi_2 + \psi_2\partial\psi_1)e^{-2\varphi_2}, \tag{C.20}$$

$$y_2 = (\partial\psi_2 - \psi\partial\psi_1)e^{-\varphi_1}, \tag{C.21}$$

$$y_3 = \partial\psi_1 e^{\varphi_1 - 2\varphi_2}. \tag{C.22}$$

C.1.2 O operador de graduação Q_2

Por outro lado, o operador de graduação Q_2 estabelece que

$$N = \exp(\psi_1 E_{\alpha_1} + \psi_2 E_{\alpha_1+\alpha_2} + \psi_3 E_{\alpha_1+2\alpha_2}), \tag{C.23}$$

$$M = \exp(\chi_1 E_{-\alpha_1} + \chi_2 E_{-\alpha_1-\alpha_2} + \chi_3 E_{-\alpha_1-2\alpha_2}), \tag{C.24}$$

donde decorre que as componentes da corrente J lêem-se através de

$$J_{-\alpha_1-2\alpha_2} = Y_1, \tag{C.25}$$

$$J_{-\alpha_1-\alpha_2} = Y_2, \tag{C.26}$$

$$J_{-\alpha_1} = Y_3, \tag{C.27}$$

$$J_{-\alpha_2} = \chi_2 Y_1 - \chi_1 Y_2 + \partial\psi e^{\varphi_1-2\varphi_2}, \tag{C.28}$$

$$J_1 = \chi_3 Y_1 + 2\chi_2 Y_2 + \chi_1 Y_3 + \partial\varphi_1, \tag{C.29}$$

$$J_2 = \chi_3 Y_1 + \chi_2 Y_2 + (\partial\varphi_2 + \chi\partial\psi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2}), \tag{C.30}$$

$$J_{\alpha_2} = \chi_3 Y_2 - \chi_2 Y_3 + (\partial\chi + \chi\partial\varphi_1 - 2\chi\partial\varphi_2 - \chi^2\partial\psi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2}), \tag{C.31}$$

$$\begin{aligned} J_{\alpha_1} &= \chi_2^2 Y_1 - 2\chi_1\chi_2 Y_2 - \chi_1^2 Y_3 \\ &+ 2\chi_2\partial\psi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2} - 2\chi_1\partial\varphi_1 + 2\chi_1(\partial\varphi_2 + \chi\partial\psi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2}) + \partial\chi_1, \end{aligned} \tag{C.32}$$

$$\begin{aligned} J_{\alpha_1+\alpha_2} &= -\chi_2\chi_3 Y_1 - (\chi_2^2 - \chi_1\chi_3) Y_2 - \chi_1\chi_2 Y_3 \\ &- \chi_3\partial\psi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2} - \chi_2\partial\varphi_1 \\ &+ \chi_1(\partial\chi + \chi\partial\varphi_1 - 2\chi\partial\varphi_2 - \chi^2\partial\psi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2}) + \partial\chi_2, \end{aligned} \tag{C.33}$$

$$\begin{aligned} J_{\alpha_1+2\alpha_2} &= -\chi_3^2 Y_1 - 2\chi_2\chi_3 Y_2 + \chi_2^2 Y_3 \\ &- 2\chi_3(\partial\varphi_2 + \chi\partial\psi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2}) \\ &- 2\chi_2(\partial\chi + \chi\partial\varphi_1 - 2\chi\partial\varphi_2 - \chi^2\partial\psi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2}) + \partial\chi_3, \end{aligned} \tag{C.34}$$

onde

$$Y_1 = y_1, \tag{C.35}$$

$$Y_2 = y_2 - \chi y_1, \tag{C.36}$$

$$Y_3 = y_3 + 2\chi y_2 - \chi^2 y_1, \tag{C.37}$$

com

$$y_1 = (\partial\psi_3 - 2\psi\partial\psi_2 - \psi^2\partial\psi_1)e^{-2\varphi_2}, \tag{C.38}$$

$$y_2 = (\partial\psi_2 + \psi\partial\psi_1)e^{-\varphi_1}, \tag{C.39}$$

$$y_3 = \partial\psi_1 e^{2\varphi_2 - 2\varphi_1}. \tag{C.40}$$

C.2 As reduções hamiltonianas

Nesta seção , exibimos as correntes remanescentes da aplicação de quatro reduções hamiltonianas específicas às componentes da corrente J de quiralidade direita conservada, conforme expostas na seção anterior.

C.2.1 O modelo-I

Considere as componentes da corrente J, que seguem da decomposição não -abeliana de Gauss determinada pelo operador de graduação Q_2 e imponha os seguintes vínculos

$$J_{-\alpha_1} = 1, \tag{C.41}$$

$$J_{-\alpha_1-\alpha_2} = 0, \tag{C.42}$$

$$J_{-\alpha_1-2\alpha_2} = 0. \tag{C.43}$$

Deles, segue que

$$\partial\psi_1 = e^{2\varphi_1-2\varphi_2}, \tag{C.44}$$

$$\partial\psi_2 = -\psi e^{2\varphi_1-2\varphi_2}, \tag{C.45}$$

$$\partial\psi_3 = -\psi^2 e^{2\varphi_1 - 2\varphi_2}. \tag{C.46}$$

A imposição destes vínculos exige as seguintes fixações de calibre

$$J_1 = 0, \tag{C.47}$$

$$J_2 = 0, \tag{C.48}$$

$$J_{\alpha_2} = 0, \tag{C.49}$$

$$J_{\alpha_1 + 2\alpha_2} = 0. \tag{C.50}$$

Delas, decorre que

$$\chi_1 = -\partial\varphi_1, \tag{C.51}$$

$$\chi_2 = (\partial\chi + \chi\partial\varphi_1 + \chi^2\partial\psi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2}), \tag{C.52}$$

$$\partial\chi_3 = -\chi_2^2 \tag{C.53}$$

e a seguinte condição de buraco-negro

$$\partial\varphi_2 + \chi\partial\psi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2} = 0. \tag{C.54}$$

Concluímos, pois, que as correntes remanescentes são

$$J_{-\alpha_2} = \partial\psi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2}, \tag{C.55}$$

$$J_{\alpha_1} = \partial\chi_1 + \chi_1^2 + 2\chi_2 J_{-\alpha_2}, \tag{C.56}$$

$$J_{\alpha_1+\alpha_2} = \partial\chi_2 + \chi_1\chi_2 - \chi_3 J_{-\alpha_2}. \tag{C.57}$$

Estas são as correntes de quiralidade direita conservada do modelo-I, descrito pelo potencial exposto no parágrafo **B.2.1**, do apêndice anterior.

C.2.2 O modelo-II

Considere as componentes da corrente J, que seguem da decomposição não-abeliana de Gauss determinada pelo operador de graduação Q_1 e imponha os seguintes vínculos

$$J_{-\alpha_2} = 1, \tag{C.58}$$

$$J_{-\alpha_1-\alpha_2} = 0, \tag{C.59}$$

$$J_{-\alpha_1-2\alpha_2} = 0. \tag{C.60}$$

Deles, segue que

$$\partial\psi_1 = e^{2\varphi_2-\varphi_1}, \tag{C.61}$$

$$\partial\psi_2 = \psi e^{2\varphi_2-\varphi_1}, \tag{C.62}$$

$$\partial\psi_3 = -(\psi_2 - \psi\psi_1)e^{2\varphi_2-\varphi_1}. \tag{C.63}$$

A imposição destes vínculos exige as seguintes fixações de calibre

$$J_1 = 0, \tag{C.64}$$

$$J_2 = 0, \tag{C.65}$$

$$J_{\alpha_1} = 0, \tag{C.66}$$

$$J_{\alpha_1+\alpha_2} = 0. \tag{C.67}$$

Delas, decorre que

$$\chi_1 = -\partial\varphi_2, \tag{C.68}$$

$$\chi_2 = -\frac{1}{2}(\partial\chi + 2\chi\partial\varphi_2 + \chi^2\partial\psi e^{2\varphi_2-2\varphi_1}), \tag{C.69}$$

$$\chi_3 = \partial\chi_2 + \chi_1\chi_2 \tag{C.70}$$

e a seguinte condição de buraco-negro

$$\partial\varphi_1 + \chi\partial\psi e^{2\varphi_2-2\varphi_1} = 0. \tag{C.71}$$

Concluímos, pois, que as correntes remanescentes são

$$J_{-\alpha_1} = \partial\psi e^{2\varphi_2 - 2\varphi_1}, \tag{C.72}$$

$$J_{\alpha_2} = \partial\chi_1 + \chi_1^2 - \chi_2 J_{-\alpha_1}, \tag{C.73}$$

$$J_{\alpha_1+2\alpha_2} = \partial\chi_3 + \chi_1\partial\chi_2 - \chi_2\partial\chi_1 + \chi_2^2 J_{-\alpha_1}. \tag{C.74}$$

Estas são as correntes de quiralidade direita conservada do modelo-II, descrito pelo potencial exposto no parágrafo **B.2.2**, do apêndice anterior.

C.2.3 O modelo-III

Considere as componentes da corrente J, que seguem da decomposição não -abeliana de Gauss determinada pelo operador de graduação Q_2 e imponha os seguintes vínculos

$$J_{-\alpha_1-\alpha_2} = 1, \tag{C.75}$$

$$J_{-\alpha_1-2\alpha_2} = 0, \tag{C.76}$$

$$J_{-\alpha_1} = 0. \tag{C.77}$$

Deles, segue que

$$\partial\psi_1 = -2(\chi e^{\varphi_1-2\varphi_2})e^{\varphi_1}, \tag{C.78}$$

$$\partial\psi_2 = (1 + 2\psi\chi e^{\varphi_1-2\varphi_2})e^{\varphi_1}, \tag{C.79}$$

$$\partial\psi_3 = 2\psi(1 + \psi\chi e^{\varphi_1-2\varphi_2})e^{\varphi_1}. \tag{C.80}$$

A imposição destes vínculos exige as seguintes fixações de calibre

$$J_1 = 0, \tag{C.81}$$

$$J_2 = 0, \tag{C.82}$$

$$J_{\alpha_2} = 0, \tag{C.83}$$

$$J_{-\alpha_2} = 0. \tag{C.84}$$

Delas, decorre que

$$\chi_1 = \partial\psi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2}, \tag{C.85}$$

$$\chi_2 = -\frac{1}{2}\partial\varphi_1, \tag{C.86}$$

$$\chi_3 = -(\partial\chi + \chi^2\partial\psi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2}) \tag{C.87}$$

e a seguinte condição de buraco-negro

$$\partial\varphi_2 - \frac{1}{2}\partial\varphi_1 + \chi\partial\psi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2} = 0. \tag{C.88}$$

Concluímos, pois, que as correntes remanescentes são

$$J_{\alpha_1} = \partial\chi_1 + 2\chi_1\chi_2, \tag{C.89}$$

$$J_{\alpha_1+\alpha_2} = \partial\chi_2 + \chi_2^2 - \chi_1\chi_3, \tag{C.90}$$

$$J_{\alpha_1+2\alpha_2} = \partial\chi_3 + 2\chi_2\chi_3. \tag{C.91}$$

Estas são as correntes de quiralidade direita conservada do modelo-III, descrito pelo potencial exposto no parágrafo **B.2.3**, do apêndice anterior.

C.2.4 O modelo-IV

Considere as componentes da corrente J, que seguem da decomposição não -abeliana de Gauss determinada pelo operador de graduação Q_2 e imponha os seguintes vínculos

$$J_{-\alpha_1-2\alpha_2} = 1, \tag{C.92}$$

$$J_{-\alpha_1} = 0, \tag{C.93}$$

$$J_{-\alpha_1-\alpha_2} = 0. \tag{C.94}$$

Deles, segue que

$$\partial\psi_1 = -(\chi e^{\varphi_1-2\varphi_2})^2 e^{2\varphi_2}, \tag{C.95}$$

$$\partial\psi_2 = \chi e^{\varphi_1-2\varphi_2}(1+\psi\chi e^{\varphi_1-2\varphi_2})e^{2\varphi_2}, \tag{C.96}$$

$$\partial\psi_3 = [1+\psi\chi e^{\varphi_1-2\varphi_2}(2+\psi\chi e^{\varphi_1-2\varphi_2})]e^{2\varphi_2}. \tag{C.97}$$

A imposição destes vínculos exige as seguintes fixações de calibre

$$J_1 = 0, \tag{C.98}$$

$$J_2 = 0, \tag{C.99}$$

$$J_{\alpha_1} = 0, \tag{C.100}$$

$$J_{-\alpha_2} = 0. \tag{C.101}$$

Delas, decorre que

$$\partial\chi_1 = \chi_2^2, \tag{C.102}$$

$$\chi_2 = -\partial\psi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2}, \tag{C.103}$$

$$\chi_3 = -\partial\varphi_1 \tag{C.104}$$

e a seguinte condição de buraco-negro

$$\partial\varphi_1 - \partial\varphi_2 - \chi\partial\psi e^{\varphi_1 - 2\varphi_2} = 0. \tag{C.105}$$

Concluímos, pois, que as correntes remanescentes são

$$J_{\alpha_1+\alpha_2} = \partial\chi_2 + \chi_2\chi_3 + \chi_1 J_{\alpha_2}, \tag{C.106}$$

$$J_{\alpha_1+2\alpha_2} = \partial\chi_3 + \chi_3^2 - 2\chi_2 J_{\alpha_2}, \tag{C.107}$$

$$J_{\alpha_2} = \partial\chi - \chi\partial\varphi_2. \tag{C.108}$$

Estas são as correntes de quiralidade direita conservada do modelo-IV, descrito pelo potencial exposto no parágrafo **B.2.4**, do apêndice anterior.

Apêndice D

As álgebras-V dos modelos de um buraco-negro

Neste apêndice, apresentamos a estrutura algébrica satisfeita pelas correntes remanescentes da aplicação do método da redução hamiltoniana às correntes de quiralidade direita conservada do modelo de WZW baseado na álgebra B_2. Em particular, mostramos que esta estrutura é uma extensão não -local da álgebra de Virasoro, chamada de álgebra-V. Como veremos, duas destas reduções conduzem a estruturas de spin conforme igual a 2, ao passo que as outras duas, a estruturas de spin conforme igual a $\frac{3}{2}$. Para tanto, basta proceder a identificações apropriadas das correntes remanescentes com o tensor de energia-momento T do modelo de WZW e com as correntes não -locais V^+ e V^-.

No que segue, primeiro exibimos as variações funcionais das componentes da corrente de quiralidade direita conservada do modelo de WZW, para em seguida verificar os parênteses de Poisson clássicos, por elas satisfeitas. Aqui, denotamos dois pontos do espaço-tempo de Minkovski, de mesmas coordenadas temporais e de coordenadas espaciais distintas por $\sigma = (t, x)$ e $\sigma' = (t, x')$ e designamos

$$\partial_\sigma \epsilon(\sigma - \sigma') = 2\delta(\sigma - \sigma'). \tag{D.1}$$

D.1 A variação da corrente

No **Capítulo 1**, vimos que a variação funcional da corrente de quiralidade direita conservada do modelo de WZW é dada pela seguinte fórmula

$$\delta J = \partial\epsilon + [J, \epsilon], \tag{D.2}$$

onde escrevemos a corrente J e o elemento infinitesimal ϵ da álgebra de Lie semi-simples, na qual o modelo de WZW está baseado, através das seguintes combinações lineares dos geradores da álgebra de Lie

$$J = J_i h_i + J_{\mp\alpha} E_{\pm\alpha}, \tag{D.3}$$

$$\epsilon = \epsilon_i h_i + \epsilon_{\mp\alpha} E_{\pm\alpha}. \tag{D.4}$$

Fazendo, pois, uso dos parênteses de Lie dos geradores de B_2, conforme exposto no **Apêndice A**, podemos ler as variações funcionais das componentes da corrente J nas direções destes geradores, a saber

$$\begin{aligned}
\delta J_1 &= \partial\epsilon_1 + (J_{-\alpha_1}\epsilon_{\alpha_1} - J_{\alpha_1}\epsilon_{-\alpha_1}) \\
&+ 2(J_{-\alpha_1-\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2} - J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2}) \\
&+ (J_{-\alpha_1-2\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2} - J_{\alpha_1+2\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2}),
\end{aligned} \tag{D.5}$$

$$\begin{aligned}
\delta J_2 &= \partial\epsilon_2 + (J_{-\alpha_2}\epsilon_{\alpha_2} - J_{\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_2}) \\
&+ (J_{-\alpha_1-\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2} - J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2}) \\
&+ (J_{-\alpha_1-2\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2} - J_{\alpha_1+2\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2}),
\end{aligned} \tag{D.6}$$

$$\begin{aligned}
\delta J_{-\alpha_1} &= \partial\epsilon_{-\alpha_1} + 2(J_1\epsilon_{-\alpha_1} - J_{-\alpha_1}\epsilon_1) \\
&+ 2(J_{-\alpha_1}\epsilon_2 - J_2\epsilon_{-\alpha_1}) \\
&+ 2(J_{-\alpha_1-\alpha_2}\epsilon_{\alpha_2} - J_{\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2}),
\end{aligned} \tag{D.7}$$

$$\begin{aligned}
\delta J_{\alpha_1} &= \partial\epsilon_{\alpha_1} + 2(J_{\alpha_1}\epsilon_1 - J_1\epsilon_{\alpha_1}) \\
&+ 2(J_2\epsilon_{\alpha_1} - J_{\alpha_1}\epsilon_2) \\
&+ 2(J_{-\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2} - J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_2}),
\end{aligned} \tag{D.8}$$

$$\begin{aligned}
\delta J_{-\alpha_2} &= \partial\epsilon_{-\alpha_2} + (J_{-\alpha_2}\epsilon_1 - J_1\epsilon_{-\alpha_2}) \\
&+ 2(J_2\epsilon_{-\alpha_2} - J_{-\alpha_2}\epsilon_2) + (J_{\alpha_1}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2} - J_{-\alpha_1-\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1}) \\
&+ (J_{-\alpha_1-2\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2} - J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2}),
\end{aligned} \tag{D.9}$$

$$
\begin{aligned}
\delta J_{\alpha_2} &= \partial\epsilon_{\alpha_2} + (J_1\epsilon_{\alpha_2} - J_{\alpha_2}\epsilon_1) \\
&+ 2(J_{\alpha_2}\epsilon_2 - J_2\epsilon_{\alpha_2}) + (J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1} - J_{-\alpha_1}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2}) \\
&+ (J_{-\alpha_1-\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2} - J_{\alpha_1+2\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2}),
\end{aligned}
\tag{D.10}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta J_{-\alpha_1-\alpha_2} &= \partial\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2} + (J_1\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2} - J_{-\alpha_1-\alpha_2}\epsilon_1) \\
&+ (J_{-\alpha_1}\epsilon_{-\alpha_2} - J_{-\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1}) \\
&+ (J_{\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2} - J_{-\alpha_1-2\alpha_2}\epsilon_{\alpha_2}),
\end{aligned}
\tag{D.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta J_{\alpha_1+\alpha_2} &= \partial\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2} + (J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_1 - J_1\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2}) \\
&+ (J_{\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1} - J_{\alpha_1}\epsilon_{\alpha_2}) \\
&+ (J_{\alpha_1+2\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_2} - J_{-\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2}),
\end{aligned}
\tag{D.12}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta J_{-\alpha_1-2\alpha_2} &= \partial\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2} \\
&+ 2(J_2\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2} - J_{-\alpha_1-2\alpha_2}\epsilon_2) \\
&+ 2(J_{-\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2} - J_{-\alpha_1-\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_2}),
\end{aligned}
\tag{D.13}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta J_{\alpha_1+2\alpha_2} &= \partial\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2} \\
&+ 2(J_{\alpha_1+2\alpha_2}\epsilon_2 - J_2\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2}) \\
&+ 2(J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{\alpha_2} - J_{\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2}).
\end{aligned}
\tag{D.14}
$$

D.2 As álgebras-V de spin-2

As álgebras-V de spin conforme igual a 2, de que tratamos nesta seção , apresentam a seguinte estrutura

$$
\begin{aligned}
\{T(\sigma), T(\sigma')\} &= -\frac{1}{2}\partial_\sigma^3 \delta(\sigma-\sigma') \\
&+ 2T(\sigma')\partial_\sigma \delta(\sigma-\sigma') - \partial_{\sigma'} T(\sigma')\delta(\sigma-\sigma'),
\end{aligned}
\tag{D.15}
$$

$$
\{T(\sigma), V^\pm(\sigma')\} = 2V^\pm(\sigma')\partial_\sigma \delta(\sigma-\sigma') - \partial_{\sigma'} V^\pm(\sigma')\delta(\sigma-\sigma'),
\tag{D.16}
$$

$$
\{V^\pm(\sigma), V^\pm(\sigma')\} = V^\pm(\sigma)V^\pm(\sigma')\epsilon(\sigma-\sigma'),
\tag{D.17}
$$

$$
\begin{aligned}
\{V^\pm(\sigma), V^\mp(\sigma')\} &= -\frac{1}{2}\partial_\sigma^3 \delta(\sigma-\sigma') \\
&+ 2T(\sigma')\partial_\sigma \delta(\sigma-\sigma') - \partial_{\sigma'} T(\sigma')\delta(\sigma-\sigma') \\
&- V^\pm(\sigma)V^\mp(\sigma')\epsilon(\sigma-\sigma').
\end{aligned}
\tag{D.18}
$$

D.2.1 O modelo-II

A partir da redução hamiltoniana exposta no parágrafo **C.2.2**, seguem as seguintes relações entre os ϵ's

$$
\partial \epsilon_1 = -J_{-\alpha_1}\epsilon_{\alpha_1} + J_{\alpha_1+2\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2},
\tag{D.19}
$$

$$2\partial\epsilon_2 = -J_{-\alpha_1}\epsilon_{\alpha_1} + \partial^2\epsilon_{-\alpha_2} + J_{\alpha_1+2\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2}, \tag{D.20}$$

$$2\epsilon_{\alpha_2} = -\partial^2\epsilon_{-\alpha_2} + J_{-\alpha_1}\epsilon_{\alpha_1} + 2J_{\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_2} + J_{\alpha_1+2\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2}, \tag{D.21}$$

$$\epsilon_{-\alpha_1} = -\frac{1}{2}\partial^2\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2} + J_{-\alpha_1}\epsilon_{-\alpha_2} + J_{\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2}, \tag{D.22}$$

$$\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2} = -\frac{1}{2}\partial\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2}, \tag{D.23}$$

$$\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2} = -\frac{1}{2}\partial\epsilon_{\alpha_1}, \tag{D.24}$$

$$\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2} = -\frac{1}{2}\partial^2\epsilon_{\alpha_1} + J_{\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1} + J_{\alpha_1+2\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_2}, \tag{D.25}$$

bem como as seguintes variações funcionais das correntes remanescentes

$$\delta J_{-\alpha_1} = \partial\epsilon_{-\alpha_1} - 2J_{-\alpha_1}\epsilon_1 + 2J_{-\alpha_1}\epsilon_2 - 2J_{\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2}, \tag{D.26}$$

$$\delta J_{\alpha_2} = \partial\epsilon_{\alpha_2} - J_{-\alpha_1}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2} - J_{\alpha_2}\epsilon_1 + 2J_{\alpha_2}\epsilon_2 - J_{\alpha_1+2\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2}, \tag{D.27}$$

$$\delta J_{\alpha_1+2\alpha_2} = \partial\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2} - 2J_{\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2} + 2J_{\alpha_1+2\alpha_2}\epsilon_2. \tag{D.28}$$

Substituindo as equações (D.19) a (D.25) nas equações (D.26) a (D.28) e identificando o tensor de energia-momento $T = J_{\alpha_2}$, assim como as correntes não -locais $V^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} J_{\alpha_1+2\alpha_2}$, $V^- = \frac{1}{\sqrt{2}} J_{-\alpha_1}$ e identificando também a distribuição $\delta(\sigma - \sigma') = \epsilon_{-\alpha_2} = \frac{1}{2}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha_1}$, concluímos que as correntes remanescentes satisfazem uma álgebra-V de spin conforme igual a 2. Estas são as correntes de quiralidade direita conservada do modelo-II, apresentado na seção **2.2** do **Capítulo 2**.

D.2.2 O modelo-III

A partir da redução hamiltoniana exposta no parágrafo **C.2.3**, seguem as seguintes relações entre os ϵ's

$$\epsilon_1 = \partial \epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2}, \tag{D.29}$$

$$2\partial\epsilon_2 = \partial^2 \epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2} - J_{\alpha_1}\epsilon_{-\alpha_1} + J_{\alpha_1+2\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2}, \tag{D.30}$$

$$\epsilon_{\alpha_1} = \frac{1}{2}\partial^2 \epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2} + J_{\alpha_1}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2} - J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2}, \tag{D.31}$$

$$\epsilon_{-\alpha_2} = \frac{1}{2}\partial\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2}, \tag{D.32}$$

$$\epsilon_{\alpha_2} = -\frac{1}{2}\partial\epsilon_{-\alpha_1}, \tag{D.33}$$

$$2\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2} = -\partial^2\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2} + J_{\alpha_1}\epsilon_{-\alpha_1} + 2J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2} + J_{\alpha_1+2\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2}, \qquad (D.34)$$

$$\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2} = \frac{1}{2}\partial^2\epsilon_{-\alpha_1} - J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1} + J_{\alpha_1+2\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2}, \qquad (D.35)$$

bem como as seguintes variações funcionais das correntes remanescentes

$$\delta J_{\alpha_1} = \partial\epsilon_{\alpha_1} + 2J_{\alpha_1}\epsilon_1 - 2J_{\alpha_1}\epsilon_2 - 2J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_2}, \qquad (D.36)$$

$$\delta J_{\alpha_1+\alpha_2} = \partial\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2} - J_{\alpha_1}\epsilon_{\alpha_2} + J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_1 + J_{\alpha_1+2\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_2}, \qquad (D.37)$$

$$\delta J_{\alpha_1+2\alpha_2} = \partial\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2} + 2J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{\alpha_2} + 2J_{\alpha_1+2\alpha_2}\epsilon_2. \qquad (D.38)$$

Substituindo as equações (D.29) a (D.35) nas equações (D.36) a (D.38) e identificando o tensor de energia-momento $T = J_{\alpha_1+\alpha_2}$, assim como as correntes não -locais $V^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}J_{\alpha_1+2\alpha_2}$, $V^- = -\frac{1}{\sqrt{2}}J_{\alpha_1}$ e identificando também a distribuição $\delta(\sigma-\sigma') = \epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2} = \frac{1}{2}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2} = \frac{1}{2}\epsilon_{-\alpha_1}$, concluímos que as correntes remanescentes satisfazem uma álgebra-V de spin conforme igual a 2. Estas são as correntes de quiralidade direita conservada do modelo-III, apresentado na seção **2.3** do **Capítulo 2**.

D.3 As álgebras-V de spin-$\frac{3}{2}$

As álgebras-V de spin conforme igual a $\frac{3}{2}$, de que tratamos nesta seção , apresentam a seguinte estrutura

$$\begin{aligned}\{T(\sigma),T(\sigma')\} &= -\frac{1}{2}\partial_\sigma^3\delta(\sigma-\sigma') \\ &+ 2T(\sigma')\partial_\sigma\delta(\sigma-\sigma') - \partial_{\sigma'}T(\sigma')\delta(\sigma-\sigma'),\end{aligned} \tag{D.39}$$

$$\{T(\sigma),V^{\pm}(\sigma')\} = \frac{3}{2}V^{\pm}(\sigma')\partial_\sigma\delta(\sigma-\sigma') - \partial_{\sigma'}V^{\pm}(\sigma')\delta(\sigma-\sigma'), \tag{D.40}$$

$$\{V^{\pm}(\sigma),V^{\pm}(\sigma')\} = \frac{1}{4}V^{\pm}(\sigma)V^{\pm}(\sigma')\epsilon(\sigma-\sigma'), \tag{D.41}$$

$$\begin{aligned}\{V^{\pm}(\sigma),V^{\mp}(\sigma')\} &= \mp\partial_\sigma^2\delta(\sigma-\sigma') \\ &\pm T(\sigma')\delta(\sigma-\sigma') \\ &- \frac{1}{4}[V^{\pm}(\sigma)V^{\mp}(\sigma') - 2V^{\pm}(\sigma')V^{\mp}(\sigma)]\epsilon(\sigma-\sigma').\end{aligned} \tag{D.42}$$

D.3.1 O modelo-I

A partir da redução hamiltoniana exposta no parágrafo **C.2.1**, seguem as seguintes relações entre os ϵ's

$$\partial\epsilon_1 = \frac{1}{2}\partial^2\epsilon_{-\alpha_1} - J_{-\alpha_2}\epsilon_{\alpha_2} + J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2}, \tag{D.43}$$

$$\partial\epsilon_2 = -J_{-\alpha_2}\epsilon_{\alpha_2} + J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2}, \tag{D.44}$$

$$\epsilon_{\alpha_1} = -\frac{1}{2}\partial^2\epsilon_{-\alpha_1} + J_{-\alpha_2}\epsilon_{\alpha_2} + J_{\alpha_1}\epsilon_{-\alpha_1} + J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2}, \tag{D.45}$$

$$\epsilon_{-\alpha_2} = -\partial\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2} + J_{-\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1}, \tag{D.46}$$

$$\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2} = \partial\epsilon_{\alpha_2} + J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1}, \tag{D.47}$$

$$\partial\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2} = -2J_{-\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2}, \tag{D.48}$$

$$\partial\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2} = -2J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{\alpha_2}, \tag{D.49}$$

bem como as seguintes variações funcionais das correntes remanescentes

$$\delta J_{-\alpha_2} = \partial\epsilon_{-\alpha_2} + J_{-\alpha_2}\epsilon_1 - 2J_{-\alpha_2}\epsilon_2 + J_{\alpha_1}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2} - J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2}, \tag{D.50}$$

$$\delta J_{\alpha_1} = \partial\epsilon_{\alpha_1} + 2J_{-\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2} + 2J_{\alpha_1}\epsilon_1 - 2J_{\alpha_1}\epsilon_2 - 2J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_2}, \tag{D.51}$$

$$\delta J_{\alpha_1+\alpha_2} = \partial\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2} - J_{-\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2} - J_{\alpha_1}\epsilon_{\alpha_2} + J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_1. \tag{D.52}$$

Substituindo as equações (D.43) a (D.49) nas equações (D.50) a (D.52) e identificando o tensor de energia-momento $T = J_{\alpha_1}$, assim como as correntes não - locais $V^+ = \sqrt{2}J_{\alpha_1+\alpha_2}$, $V^- = -\sqrt{2}J_{-\alpha_2}$ e identificando também a distribuição $\delta(\sigma - \sigma') = \epsilon_{-\alpha_1} = 2\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2} = 2\epsilon_{\alpha_2}$, concluímos que as correntes remanescentes satisfazem uma álgebra-V de spin conforme igual a $\frac{3}{2}$. Estas são as correntes de quiralidade direita conservada do modelo-I, apresentado na seção **2.1** do **Capítulo 2**.

D.3.2 O modelo-IV

A partir da redução hamiltoniana exposta no parágrafo **C.2.4**, seguem as seguintes relações entre os ϵ's

$$\partial\epsilon_1 = \frac{1}{2}\partial^2\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2} - J_{\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_2} + J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2}, \tag{D.53}$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{2}\partial\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2}, \tag{D.54}$$

$$\partial\epsilon_{-\alpha_1} = 2J_{\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2}, \tag{D.55}$$

$$\partial\epsilon_{\alpha_1} = 2J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_2}, \tag{D.56}$$

$$\epsilon_{\alpha_2} = \partial\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2} + J_{\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2}, \tag{D.57}$$

$$\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2} = -\partial\epsilon_{-\alpha_2} + J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2}, \tag{D.58}$$

$$\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2} = -\frac{1}{2}\partial^2\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2} + J_{\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_2} + J_{\alpha_1+2\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2} + J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2}, \tag{D.59}$$

bem como as seguintes variações funcionais das correntes remanescentes

$$\delta J_{\alpha_1+\alpha_2} = \partial\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2} + J_{\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1} + J_{\alpha_1+2\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_2} + J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_1, \tag{D.60}$$

$$\delta J_{\alpha_1+2\alpha_2} = \partial\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2} - 2J_{\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2} + 2J_{\alpha_1+2\alpha_2}\epsilon_2 + 2J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{\alpha_2}, \tag{D.61}$$

$$\delta J_{\alpha_2} = \partial\epsilon_{\alpha_2} - J_{\alpha_2}\epsilon_1 + 2J_{\alpha_2}\epsilon_2 - J_{\alpha_1+2\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2} + J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1}. \tag{D.62}$$

Substituindo as equações (D.53) a (D.59) nas equações (D.60) a (D.62) e identificando o tensor de energia-momento $T = J_{\alpha_1+2\alpha_2}$, assim como as correntes não -locais $V^+ = \sqrt{2}J_{\alpha_2}$, $V^- = \sqrt{2}J_{\alpha_1+\alpha_2}$ e identificando também a distribuição $\delta(\sigma-\sigma') = \epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2} = 2\epsilon_{-\alpha_2} = 2\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2}$, concluímos que as correntes remanescentes satisfazem uma álgebra-V de spin conforme igual a $\frac{3}{2}$. Estas são as correntes de quiralidade direita conservada do modelo-IV, apresentado na seção **2.4** do **Capítulo 2**.

Apêndice E

A álgebra de Lie B_3

A álgebra de Lie semi-simples B_3 tem rank igual a 3. Logo, ela possui três raízes simples, que denotamos por α_1, α_2 e α_3. Com estas três raízes simples, construímos todas as dezoito raízes da álgebra, nove positivas e nove negativas, a saber $\pm\alpha_1$, $\pm\alpha_2$, $\pm\alpha_3$, $\pm(\alpha_1+\alpha_2)$, $\pm(\alpha_2+\alpha_3)$, $\pm(\alpha_2+2\alpha_3)$, $\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$, $\pm(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)$, $\pm(\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3)$.

E.1 Os geradores

A cada raiz simples de B_3, associamos um gerador na sua subálgebra de Cartan, que representamos por h_1, h_2 e h_3. Também, a cada raiz de B_3, associamos um gerador do tipo escada, que simbolizamos por E_α, onde α corresponde a qualquer uma destas raízes.

E.1.1 Uma representação linear

Uma representação linear, bastante conveniente a nossos propósitos neste trabalho, para os geradores de B_3 é fornecida em termos de osciladores fermiônicos. Esta representação linear pode ser realizada numa representação matricial, constituída por matrizes quadradas de ordem sete. No que segue, exibimos tal representação linear para os geradores na subálgebra de Cartan e para os geradores do tipo escada.

$$h_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad h_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$E_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{-\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{-\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{-\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{\alpha_1+\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{-\alpha_1-\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{\alpha_2+\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{-\alpha_2-\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{\alpha_2+2\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{-\alpha_2-2\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

E.1.2 O traço normalizado

Uma vez de posse da representação linear para os geradores de B_3 descrita no parágrafo anterior, podemos definir o traço normalizado sobre B_3 através da metade dos traços dos produtos das matrizes. A seguir, exibimos os traços normalizados não -nulos dos produtos das matrizes.

$$Tr(h_1^2) = 2, \tag{E.1}$$

$$Tr(h_1 h_2) = Tr(h_2 h_1) = -1, \tag{E.2}$$

$$Tr(h_2^2) = 2, \tag{E.3}$$

$$Tr(h_2h_3) = Tr(h_3h_2) = -2, \tag{E.4}$$

$$Tr(h_3^2) = 4, \tag{E.5}$$

$$Tr(E_{\alpha_1}E_{-\alpha_1}) = Tr(E_{-\alpha_1}E_{\alpha_1}) = 1, \tag{E.6}$$

$$Tr(E_{\alpha_2}E_{-\alpha_2}) = Tr(E_{-\alpha_2}E_{\alpha_2}) = 1, \tag{E.7}$$

$$Tr(E_{\alpha_3}E_{-\alpha_3}) = Tr(E_{-\alpha_3}E_{\alpha_3}) = 2, \tag{E.8}$$

$$Tr(E_{\alpha_1+\alpha_2}E_{-\alpha_1-\alpha_2}) = Tr(E_{-\alpha_1-\alpha_2}E_{\alpha_1+\alpha_2}) = 1, \tag{E.9}$$

$$Tr(E_{\alpha_2+\alpha_3}E_{-\alpha_2-\alpha_3}) = Tr(E_{-\alpha_2-\alpha_3}E_{\alpha_2+\alpha_3}) = 2, \tag{E.10}$$

$$Tr(E_{\alpha_2+2\alpha_3}E_{-\alpha_2-2\alpha_3}) = Tr(E_{-\alpha_2-2\alpha_3}E_{\alpha_2+2\alpha_3}) = 1, \tag{E.11}$$

$$Tr(E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}) = Tr(E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}) = 2, \tag{E.12}$$

$$Tr(E_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}E_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3}) = Tr(E_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3}E_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}) = 1, \tag{E.13}$$

$$Tr(E_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}E_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}) = Tr(E_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}E_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}) = 1. \tag{E.14}$$

Observamos ainda que

$$Tr(h_1 h_3) = Tr(h_3 h_1) = 0. \tag{E.15}$$

E.1.3 Os parênteses de Lie

A partir da representação linear para os geradores de B_3, exposta no parágrafo **E.1.1**, podemos definir os parênteses de Lie sobre B_3 como sendo os comutadores das matrizes. No que segue, exibimos os comutadores não -nulos das matrizes

$$[E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1}] = h_1, \tag{E.16}$$

$$[E_{\alpha_2}, E_{-\alpha_2}] = h_2, \tag{E.17}$$

$$[E_{\alpha_3}, E_{-\alpha_3}] = h_3, \tag{E.18}$$

$$[E_{\alpha_1+\alpha_2}, E_{-\alpha_1-\alpha_2}] = h_1 + h_2, \tag{E.19}$$

$$[E_{\alpha_2+\alpha_3}, E_{-\alpha_2-\alpha_3}] = 2h_2 + h_3, \tag{E.20}$$

$$[E_{\alpha_2+2\alpha_3}, E_{-\alpha_2-2\alpha_3}] = h_2 + h_3, \tag{E.21}$$

$$[E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}] = 2h_1 + 2h_2 + h_3, \tag{E.22}$$

$$[E_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}, E_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3}] = h_1 + h_2 + h_3, \tag{E.23}$$

$$[E_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}, E_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}] = h_1 + 2h_2 + h_3, \tag{E.24}$$

$$\begin{aligned} E_{\pm\alpha_1} &= \pm\frac{1}{2}[h_1, E_{\pm\alpha_1}] = \mp[h_2, E_{\pm\alpha_1}] \\ &= \mp[E_{\mp\alpha_2}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}] = \mp\frac{1}{2}[E_{\mp(\alpha_2+\alpha_3)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}] \\ &= \mp[E_{\mp(\alpha_2+2\alpha_3)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)}], \end{aligned} \tag{E.25}$$

$$\begin{aligned} E_{\pm\alpha_2} &= \mp[h_1, E_{\pm\alpha_2}] = \pm\frac{1}{2}[h_2, E_{\pm\alpha_2}] = \mp\frac{1}{2}[h_3, E_{\pm\alpha_2}] \\ &= \pm[E_{\mp\alpha_1}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}] = \mp\frac{1}{2}[E_{\mp\alpha_3}, E_{\pm(\alpha_2+\alpha_3)}] \\ &= \mp[E_{\mp(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)}, E_{\pm(\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3)}], \end{aligned} \tag{E.26}$$

$$
\begin{aligned}
E_{\pm\alpha_3} &= \mp[h_2, E_{\pm\alpha_3}] = \pm\frac{1}{2}[h_3, E_{\pm\alpha_3}] = \pm[E_{\mp\alpha_2}, E_{\pm(\alpha_2+\alpha_3)}] \\
&= \pm[E_{\mp(\alpha_1+\alpha_2)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}] = \mp[E_{\mp(\alpha_2+\alpha_3)}, E_{\pm(\alpha_2+2\alpha_3)}] \\
&= \mp[E_{\mp(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)}],
\end{aligned} \tag{E.27}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)} &= \pm[h_1, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}] = \pm[h_2, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}] = \mp\frac{1}{2}[h_3, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}] \\
&= \pm[E_{\pm\alpha_1}, E_{\pm\alpha_2}] = \mp\frac{1}{2}[E_{\mp\alpha_3}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}] \\
&= \pm[E_{\mp(\alpha_2+2\alpha_3)}, E_{\pm(\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3)}],
\end{aligned} \tag{E.28}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{\pm(\alpha_2+\alpha_3)} &= \mp[h_1, E_{\pm(\alpha_2+\alpha_3)}] = \pm[h_2, E_{\pm(\alpha_2+\alpha_3)}] = \pm[E_{\pm\alpha_2}, E_{\pm\alpha_3}] \\
&= \pm[E_{\mp\alpha_1}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}] = \pm[E_{\mp\alpha_3}, E_{\pm(\alpha_2+2\alpha_3)}] \\
&= \mp[E_{\mp(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}, E_{\pm(\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3)}],
\end{aligned} \tag{E.29}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{\pm(\alpha_2+2\alpha_3)} &= \mp[h_1, E_{\pm(\alpha_2+2\alpha_3)}] = \pm\frac{1}{2}[h_3, E_{\pm(\alpha_2+2\alpha_3)}] \\
&= \pm\frac{1}{2}[E_{\pm\alpha_3}, E_{\pm(\alpha_2+\alpha_3)}] = \pm[E_{\mp\alpha_1}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)}] \\
&= \mp[E_{\mp(\alpha_1+\alpha_2)}, E_{\pm(\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3)}],
\end{aligned} \tag{E.30}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)} &= \pm[h_1, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}] = \pm[E_{\pm\alpha_1}, E_{\pm(\alpha_2+\alpha_3)}] \\
&= \mp[E_{\pm\alpha_3}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}] = \pm[E_{\mp\alpha_3}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)}] \\
&= \pm[E_{\mp(\alpha_2+\alpha_3)}, E_{\pm(\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3)}],
\end{aligned} \tag{E.31}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)} &= \pm[h_1, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)}] = \mp[h_2, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)}] \\
&= \pm\frac{1}{2}[h_3, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)}] = \pm[E_{\pm\alpha_1}, E_{\pm(\alpha_2+2\alpha_3)}] \\
&= \pm\frac{1}{2}[E_{\pm\alpha_3}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}] = \pm[E_{\mp\alpha_2}, E_{\pm(\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3)}], \quad \text{(E.32)}
\end{aligned}
$$

.

$$
\begin{aligned}
E_{\pm(\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3)} &= \pm[h_2, E_{\pm(\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3)}] = \pm[E_{\pm\alpha_2}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)}] \\
&= \mp[E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}, E_{\pm(\alpha_2+2\alpha_3)}] \\
&= \pm\frac{1}{2}[E_{\pm(\alpha_2+\alpha_3)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}]. \quad \text{(E.33)}
\end{aligned}
$$

E.2 A estrutura graduada

Nesta seção , a partir da definição da base de Chevalley de B_3, mostramos como obter diretamente a matriz de Cartan, bem como sua inversa, que conduzem imediatamente à construção dos três pesos fundamentais e dos correspondentes operadores de graduação .

E.2.1 A base de Chevalley

Os elementos da base de Chevalley escrevem-se como combinações lineares das raízes simples de B_3 através de $e_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $e_2 = \alpha_2 + \alpha_3$ e $e_3 = \alpha_3$, donde segue diretamente que $\alpha_1 = e_1 - e_2$, $\alpha_2 = e_2 - e_3$ e $\alpha_3 = e_3$. Estes elementos satisfazem um produto escalar normalizado. Logo, a partir das relações ora obtidas, decorre imediatamente que as raízes simples de B_3 verificam o seguinte produto escalar normalizado

$$\alpha_1^2 = 2, \tag{E.34}$$

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \alpha_2 \cdot \alpha_1 = -1, \tag{E.35}$$

$$\alpha_2^2 = 2, \tag{E.36}$$

$$\alpha_2 \cdot \alpha_3 = \alpha_3 \cdot \alpha_2 = -1, \tag{E.37}$$

$$\alpha_3^2 = 1, \tag{E.38}$$

$$\alpha_3 \cdot \alpha_1 = \alpha_1 \cdot \alpha_3 = 0. \tag{E.39}$$

E.2.2 A matriz de Cartan

Das equações (E.34) a (E.39), concluímos que a matriz de Cartan k de B_3 e sua inversa k^{-1} são as seguintes matrizes quadradas de ordem três

$$k = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

E.2.3 Os pesos fundamentais

Uma vez de posse da inversa da matriz de Cartan de B_3, descrita no parágrafo anterior, concluímos que os três pesos fundamentais definidos sobre B_3 podem ser escritos como as seguintes combinações lineares das raízes simples da álgebra

$$\lambda_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \tag{E.40}$$

$$\lambda_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \tag{E.41}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3). \tag{E.42}$$

E.2.4 Os operadores de graduação

No **Capítulo 1**, vimos que podemos definir um operador de graduação , que conduz a uma decomposição não -abeliana de Gauss para um elemento do grupo de Lie, associado a uma álgebra de Lie G semi-simples de rank igual a r, através de

$$Q_{ij} = \sum_k 2\frac{\lambda_k \cdot H}{\alpha_k^2}, \tag{E.43}$$

onde $k \neq i, j$ e H denota a subálgebra de Cartan de G. A partir dos pesos fundamentais de B_3, expostos no parágrafo anterior, concluímos que

$$Q_{12} = \frac{1}{2}(2h_1 + 4h_2 + 3h_3), \tag{E.44}$$

$$Q_{23} = \frac{1}{2}(2h_1 + 2h_2 + h_3), \tag{E.45}$$

$$Q_{31} = h_1 + 2h_2 + h_3. \tag{E.46}$$

Apêndice F

A álgebra-V do modelo de dois buracos-negros

Neste apêndice, apresentamos a estrutura algébrica satisfeita pelas correntes remanescentes da redução hamiltoniana do modelo de WZW baseado na álgebra B_3. Em particular, mostramos que esta estrutura é uma álgebra-V de spin conforme igual a 2. Entretanto, diferentemente das álgebras-V de mesmo spin conforme, satisfeitas pelas correntes remanescentes da redução hamiltoniana do modelo de WZW baseado na álgebra B_2, esta álgebra apresenta dois pares de correntes não -locais, para cada quiralidade. Aquelas, apresentavam apenas um par de correntes não -locais, para cada quiralidade.

F.1 A variação da corrente

Fazendo uso dos parênteses de Lie dos geradores de B_3, conforme exposto no apêndice anterior, seguem as seguintes variações funcionais para as componentes da corrente J, de quiralidade direita conservada, nas direções destes geradores

$$
\begin{aligned}
\delta J_1 &= \partial\epsilon_1 + (J_{-\alpha_1}\epsilon_{\alpha_1} - J_{\alpha_1}\epsilon_{-\alpha_1}) \\
&+ (J_{-\alpha_1-\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2} - J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1+\alpha_2}) \\
&+ 2(J_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} - J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}) \\
&+ (J_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3} - J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3}) \\
&+ (J_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3} - J_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}),
\end{aligned}
\tag{F.1}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta J_2 &= \partial\epsilon_2 + (J_{-\alpha_2}\epsilon_{\alpha_2} - J_{\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_2}) \\
&+ (J_{-\alpha_1-\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2} - J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2}) \\
&+ 2(J_{-\alpha_2-\alpha_3}\epsilon_{\alpha_2+\alpha_3} - J_{\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_2-\alpha_3}) \\
&+ (J_{-\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_2+2\alpha_3} - J_{\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_2-2\alpha_3}) \\
&+ 2(J_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} - J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}) \\
&+ (J_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3} - J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3}) \\
&+ 2(J_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3} - J_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}),
\end{aligned}
\tag{F.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta J_3 &= \partial\epsilon_3 + (J_{-\alpha_3}\epsilon_{\alpha_3} - J_{\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_3}) \\
&+ (J_{-\alpha_2-\alpha_3}\epsilon_{\alpha_2+\alpha_3} - J_{\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_2-\alpha_3}) \\
&+ (J_{-\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_2+2\alpha_3} - J_{\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_2-2\alpha_3}) \\
&+ (J_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} - J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}) \\
&+ (J_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3} - J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3}) \\
&+ (J_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3} - J_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}),
\end{aligned}
\tag{F.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta J_{-\alpha_1} &= \partial\epsilon_{-\alpha_1} + 2(J_1\epsilon_{-\alpha_1} - J_{-\alpha_1}\epsilon_1) + (J_{-\alpha_1}\epsilon_2 - J_2\epsilon_{-\alpha_1}) \\
&+ (J_{-\alpha_1-\alpha_2}\epsilon_{\alpha_2} - J_{\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2}) \\
&+ 2(J_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}\epsilon_{\alpha_2+\alpha_3} - J_{\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}) \\
&+ (J_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_2+2\alpha_3} - J_{\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3}),
\end{aligned}
\tag{F.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta J_{\alpha_1} &= \partial\epsilon_{\alpha_1} + 2(J_{\alpha_1}\epsilon_1 - J_1\epsilon_{\alpha_1}) + (J_2\epsilon_{\alpha_1} - J_{\alpha_1}\epsilon_2) \\
&+ (J_{-\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2} - J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_2}) \\
&+ 2(J_{-\alpha_2-\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} - J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_2-\alpha_3}) \\
&+ (J_{-\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3} - J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_2-2\alpha_3}),
\end{aligned}
\tag{F.5}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta J_{-\alpha_2} &= \partial\epsilon_{-\alpha_2} + (J_{-\alpha_2}\epsilon_1 - J_1\epsilon_{-\alpha_2}) \\
&+ 2(J_2\epsilon_{-\alpha_2} - J_{-\alpha_2}\epsilon_2) + 2(J_{-\alpha_2}\epsilon_3 - J_3\epsilon_{-\alpha_2}) \\
&+ (J_{\alpha_1}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2} - J_{-\alpha_1-\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1}) + 2(J_{-\alpha_2-\alpha_3}\epsilon_{\alpha_3} - J_{\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_2-\alpha_3}) \\
&+ (J_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3} - J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}),
\end{aligned}
\tag{F.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta J_{\alpha_2} &= \partial\epsilon_{\alpha_2} + (J_1\epsilon_{\alpha_2} - J_{\alpha_2}\epsilon_1) \\
&+ 2(J_{\alpha_2}\epsilon_2 - J_2\epsilon_{\alpha_2}) + 2(J_3\epsilon_{\alpha_2} - J_{\alpha_2}\epsilon_3) \\
&+ (J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1} - J_{-\alpha_1}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2}) + 2(J_{-\alpha_3}\epsilon_{\alpha_2+\alpha_3} - J_{\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_3}) \\
&+ (J_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3} - J_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3}),
\end{aligned}
\tag{F.7}
$$

$$\begin{aligned}
\delta J_{-\alpha_3} &= \partial\epsilon_{-\alpha_3} + (J_{-\alpha_3}\epsilon_2 - J_2\epsilon_{-\alpha_3}) + 2(J_3\epsilon_{-\alpha_3} - J_{-\alpha_3}\epsilon_3) \\
&+ (J_{\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_2-\alpha_3} - J_{-\alpha_2-\alpha_3}\epsilon_{\alpha_2}) \\
&+ (J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} - J_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2}) \\
&+ (J_{-\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_2+\alpha_3} - J_{\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_2-2\alpha_3}) \\
&+ (J_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} - J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3}),
\end{aligned} \tag{F.8}$$

$$\begin{aligned}
\delta J_{\alpha_3} &= \partial\epsilon_{\alpha_3} + (J_2\epsilon_{\alpha_3} - J_{\alpha_3}\epsilon_2) + 2(J_{\alpha_3}\epsilon_3 - J_3\epsilon_{\alpha_3}) \\
&+ (J_{\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_2} - J_{-\alpha_2}\epsilon_{\alpha_2+\alpha_3}) \\
&+ (J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2} - J_{-\alpha_1-\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}) \\
&+ (J_{-\alpha_2-\alpha_3}\epsilon_{\alpha_2+2\alpha_3} - J_{\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_2-\alpha_3}) \\
&+ (J_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3} - J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}),
\end{aligned} \tag{F.9}$$

$$\begin{aligned}
\delta J_{-\alpha_1-\alpha_2} &= \partial\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2} \\
&+ (J_1\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2} - J_{-\alpha_1-\alpha_2}\epsilon_1) + (J_2\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2} - J_{-\alpha_1-\alpha_2}\epsilon_2) \\
&+ 2(J_{-\alpha_1-\alpha_2}\epsilon_3 - J_3\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2}) + (J_{-\alpha_1}\epsilon_{-\alpha_2} - J_{-\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1}) \\
&+ 2(J_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}\epsilon_{\alpha_3} - J_{\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}) \\
&+ (J_{\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3} - J_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_2+2\alpha_3}),
\end{aligned} \tag{F.10}$$

$$
\begin{aligned}
\delta J_{\alpha_1+\alpha_2} &= \partial\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2} \\
&+ (J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_1 - J_1\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2}) + (J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_2 - J_2\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2}) \\
&+ 2(J_3\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2} - J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_3) + (J_{\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1} - J_{\alpha_1}\epsilon_{\alpha_2}) \\
&+ 2(J_{-\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} - J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_3}) \\
&+ (J_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_2-2\alpha_3} - J_{-\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}), \qquad \text{(F.11)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta J_{-\alpha_2-\alpha_3} &= \partial\epsilon_{-\alpha_2-\alpha_3} + (J_{-\alpha_2-\alpha_3}\epsilon_1 - J_1\epsilon_{-\alpha_2-\alpha_3}) \\
&+ (J_2\epsilon_{-\alpha_2-\alpha_3} - J_{-\alpha_2-\alpha_3}\epsilon_2) + (J_{-\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_3} - J_{-\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_2}) \\
&+ (J_{\alpha_1}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} - J_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1}) \\
&+ (J_{\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_2-2\alpha_3} - J_{-\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_3}) \\
&+ (J_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} - J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}), \qquad \text{(F.12)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta J_{\alpha_2+\alpha_3} &= \partial\epsilon_{\alpha_2+\alpha_3} + (J_1\epsilon_{\alpha_2+\alpha_3} - J_{\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_1) \\
&+ (J_{\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_2 - J_2\epsilon_{\alpha_2+\alpha_3}) + (J_{\alpha_3}\epsilon_{\alpha_2} - J_{\alpha_2}\epsilon_{\alpha_3}) \\
&+ (J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1} - J_{-\alpha_1}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}) \\
&+ (J_{\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_3} - J_{-\alpha_3}\epsilon_{\alpha_2+2\alpha_3}) \\
&+ (J_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3} - J_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}), \qquad \text{(F.13)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta J_{-\alpha_2-2\alpha_3} &= \partial\epsilon_{-\alpha_2-2\alpha_3} + (J_{-\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_1 - J_1\epsilon_{-\alpha_2-2\alpha_3}) \\
&+ 2(J_3\epsilon_{-\alpha_2-2\alpha_3} - J_{-\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_3) \\
&+ 2(J_{-\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_2-\alpha_3} - J_{-\alpha_2-\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_3}) \\
&+ (J_{\alpha_1}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3} - J_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1}) \\
&+ (J_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2} - J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}),
\end{aligned}
\tag{F.14}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta J_{\alpha_2+2\alpha_3} &= \partial\epsilon_{\alpha_2+2\alpha_3} + (J_1\epsilon_{\alpha_2+2\alpha_3} - J_{\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_1) \\
&+ 2(J_{\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_3 - J_3\epsilon_{\alpha_2+2\alpha_3}) \\
&+ 2(J_{\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{\alpha_3} - J_{\alpha_3}\epsilon_{\alpha_2+\alpha_3}) \\
&+ (J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1} - J_{-\alpha_1}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}) \\
&+ (J_{-\alpha_1-\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3} - J_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2}),
\end{aligned}
\tag{F.15}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta J_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} &= \partial\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} + (J_1\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} - J_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}\epsilon_1) \\
&+ (J_{-\alpha_1}\epsilon_{-\alpha_2-\alpha_3} - J_{-\alpha_2-\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1}) \\
&+ (J_{-\alpha_1-\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_3} - J_{-\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2}) \\
&+ (J_{\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3} - J_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_3}) \\
&+ (J_{\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3} - J_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_2+\alpha_3}),
\end{aligned}
\tag{F.16}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} &= \partial\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} + (J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_1 - J_1\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}) \\
&+ (J_{\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1} - J_{\alpha_1}\epsilon_{\alpha_2+\alpha_3}) \\
&+ (J_{\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2} - J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{\alpha_3}) \\
&+ (J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_3} - J_{-\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}) \\
&+ (J_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_2-\alpha_3} - J_{-\alpha_2-\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}),
\end{aligned} \tag{F.17}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta J_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3} &= \partial\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3} + (J_1\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3} - J_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_1) \\
&+ (J_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_2 - J_2\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3}) \\
&+ 2(J_3\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3} - J_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_3) \\
&+ (J_{-\alpha_1}\epsilon_{-\alpha_2-2\alpha_3} - J_{-\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1}) \\
&+ 2(J_{-\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} - J_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_3}) \\
&+ (J_{\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3} - J_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_2}),
\end{aligned} \tag{F.18}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3} &= \partial\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3} + (J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_1 - J_1\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}) \\
&+ (J_2\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3} - J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_2) \\
&+ 2(J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_3 - J_3\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}) \\
&+ (J_{\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1} - J_{\alpha_1}\epsilon_{\alpha_2+2\alpha_3}) \\
&+ 2(J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{\alpha_3} - J_{\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}) \\
&+ (J_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_2} - J_{-\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}),
\end{aligned} \tag{F.19}
$$

$$\begin{aligned}
\delta J_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3} &= \partial\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3} + \left(J_2\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3} - J_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_2\right) \\
&+ \left(J_{-\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3} - J_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_2}\right) \\
&+ \left(J_{-\alpha_2-2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2} - J_{-\alpha_1-\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_2-2\alpha_3}\right) \\
&+ 2(J_{-\alpha_2-\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} - J_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_2-\alpha_3}), \qquad \text{(F.20)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta J_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3} &= \partial\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3} + \left(J_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_2 - J_2\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}\right) \\
&+ \left(J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_2} - J_{\alpha_2}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}\right) \\
&+ \left(J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{\alpha_2+2\alpha_3} - J_{\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2}\right) \\
&+ 2(J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{\alpha_2+\alpha_3} - J_{\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}). \qquad \text{(F.21)}
\end{aligned}$$

F.2 A redução

A partir da redução hamiltoniana, juntamente com a redução adicional, ambas expostas no **Capítulo 4**, decorrem as seguintes relações entre os ϵ's

$$\epsilon_1 = \partial\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}, \qquad \text{(F.22)}$$

$$\partial\epsilon_2 = -J_{\alpha_1}\epsilon_{-\alpha_1} + \partial^2\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} + J_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}, \qquad \text{(F.23)}$$

$$\begin{aligned}
2\partial\epsilon_3 &= -J_{\alpha_1}\epsilon_{-\alpha_1} - J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2} + \partial^2\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} \\
&+ J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3} + J_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}, \qquad \text{(F.24)}
\end{aligned}$$

$$\epsilon_{\alpha_1} = J_{\alpha_1}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} - J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3} + \frac{1}{2}\partial^2\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}, \tag{F.25}$$

$$\partial\epsilon_{-\alpha_2} = -J_{\alpha_1}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2} + J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}, \tag{F.26}$$

$$\partial\epsilon_{\alpha_2} = -J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1} + J_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3}, \tag{F.27}$$

$$\epsilon_{-\alpha_3} = \frac{1}{2}\partial\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3}, \tag{F.28}$$

$$\epsilon_{\alpha_3} = -\frac{1}{2}\partial\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2}, \tag{F.29}$$

$$\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2} = J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} - J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3} + \frac{1}{2}\partial^2\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3}, \tag{F.30}$$

$$\epsilon_{-\alpha_2-\alpha_3} = \frac{1}{2}\partial\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}, \tag{F.31}$$

$$\epsilon_{\alpha_2+\alpha_3} = -\frac{1}{2}\partial\epsilon_{-\alpha_1}, \tag{F.32}$$

$$\partial\epsilon_{-\alpha_2-2\alpha_3} = -J_{\alpha_1}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3} + J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}, \tag{F.33}$$

$$\partial\epsilon_{\alpha_2+2\alpha_3} = -J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1} + J_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2}, \tag{F.34}$$

$$\begin{aligned} 2\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} &= J_{\alpha_1}\epsilon_{-\alpha_1} + J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2} \\ &+ 2J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} - \partial^2\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} \\ &+ J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3} + J_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}, \end{aligned} \tag{F.35}$$

$$\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3} = J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} - J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2} + \frac{1}{2}\partial^2\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2}, \tag{F.36}$$

$$\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3} = J_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} - J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_1} + \frac{1}{2}\partial^2\epsilon_{-\alpha_1}, \tag{F.37}$$

bem como as seguintes variações funcionais das correntes remanescentes

$$\begin{aligned} \delta J_{\alpha_1} &= \partial\epsilon_{\alpha_1} + 2J_{\alpha_1}\epsilon_1 - J_{\alpha_1}\epsilon_2 - J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{-\alpha_2} \\ &- 2J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_2-\alpha_3} - J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_2-2\alpha_3}, \end{aligned} \tag{F.38}$$

$$\begin{aligned} \delta J_{\alpha_1+\alpha_2} &= \partial_{\alpha_1+\alpha_2} + J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_1 + J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_2 - 2J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_3 \\ &- J_{\alpha_1}\epsilon_{\alpha_2} - 2J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_3} + J_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_2-2\alpha_3}, \end{aligned} \tag{F.39}$$

$$\begin{aligned} \delta J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} &= \partial_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} + J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_1 - J_{\alpha_1}\epsilon_{\alpha_2+\alpha_3} \\ &- J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{\alpha_3} + J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_3} + J_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_2-\alpha_3}, \end{aligned} \tag{F.40}$$

$$\begin{aligned}\delta J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3} &= \partial\epsilon_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3} + J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_1 - J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_2 + 2J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_3 \\ &- J_{\alpha_1}\epsilon_{\alpha_2+2\alpha_3} + 2J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{\alpha_3} + J_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{-\alpha_2}, \qquad \text{(F.41)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta J_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3} &= \partial\epsilon_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3} + J_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_2 + J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}\epsilon_{\alpha_2} \\ &+ J_{\alpha_1+\alpha_2}\epsilon_{\alpha_2+2\alpha_3} + 2J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\epsilon_{\alpha_2+\alpha_3}. \qquad \text{(F.42)}\end{aligned}$$

F.3 A álgebra-V

Substituindo as equações (F.22) a (F.37) nas equações (F.38) a (F.42) e identificando o tensor de energia-momento $T = J_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$, assim como as correntes não -locais $V_1^+ = J_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}$, $V_1^- = J_{\alpha_1+\alpha_2}$, $V_2^+ = J_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}$, $V_2^- = J_{\alpha_1}$ e identificando também a distribuição $\delta(\sigma-\sigma') = \epsilon_{-\alpha_1} = \epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2} = \epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} = \epsilon_{-\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3} = \epsilon_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}$, concluímos que as correntes remanescentes satisfazem a seguinte álgebra-V de spin conforme igual a 2, onde $i,j = 1,2$

$$\begin{aligned}\{T(\sigma), T(\sigma')\} &= -\frac{1}{2}\partial_\sigma^3\delta(\sigma-\sigma') \\ &+ 2T(\sigma')\partial_\sigma\delta(\sigma-\sigma') - \partial_{\sigma'}T(\sigma')\delta(\sigma-\sigma'), \qquad \text{(F.43)}\end{aligned}$$

$$\{T(\sigma), V_i^\pm(\sigma')\} = 2V_i^\pm(\sigma')\delta(\sigma-\sigma') - \partial_{\sigma'}V_i^\pm(\sigma')\delta(\sigma-\sigma'), \qquad \text{(F.44)}$$

$$\{V_i^\pm(\sigma), V_j^\pm(\sigma')\} = \frac{1}{2}V_i^\pm(\sigma')V_j^\pm(\sigma)\epsilon(\sigma-\sigma'). \qquad \text{(F.45)}$$

Para $i \neq j$, as correntes não -locais satisfazem a seguinte estrutura algébrica

$$\{V_i^{\pm}(\sigma), V_j^{\mp}(\sigma')\} = \frac{1}{2}V_i^{\pm}(\sigma')V_j^{\mp}(\sigma)\epsilon(\sigma - \sigma'), \tag{F.46}$$

$$\begin{aligned}
\{V_i^{\pm}(\sigma), V_i^{\mp}(\sigma')\} &= \frac{1}{2}\partial_\sigma^3\delta(\sigma - \sigma') \\
&- 2T(\sigma')\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma') + \partial_{\sigma'}T(\sigma')\delta(\sigma - \sigma') \\
&- \frac{1}{2}V_i^{\pm}(\sigma)V_i^{\mp}(\sigma')\epsilon(\sigma - \sigma') \\
&- \frac{1}{2}[V_j^{+}(\sigma)V_j^{-}(\sigma') + V_j^{+}(\sigma')V_j^{-}(\sigma)]\epsilon(\sigma - \sigma').
\end{aligned} \tag{F.47}$$

Estas correntes remanescentes são as correntes de quiralidade direita conservada do modelo reduzido de dois buracos-negros, apresentado no **Capítulo 4**.

Bibliografia

[1] J.H.Horne and G.T.Horowitz, Nucl.Phys.B368(1992)444;

[2] G.W.Gibbons and K.Maeda, Nucl.Phys.B298(1988)741;

[3] E.Witten, Phys.Rev.D44(1991)314;

[4] E.Witten, Commun.Math.Phys.92(1984)455;

[5] C.G.Callan, D.Friedan, E.J.Martinec and M.J.Perry, Nucl.Phys.B262(1985)593;

[6] A.Bilal, Nucl.Phys.B422(1994)258;

[7] S.P.Novikov, Usp.Mat.Nauk 37(1982)3;

[8] P.B.Wiegmann, Pisma ZhETF 39(1984)180;

[9] A.M.Polyakov and P.B.Wiegmann, Phys.Lett.B131(1983)121;

[10] J.-L.Gervais and M.Saveliev, Phys.Lett.B286(1992)271.