

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"**  
**CAMPUS DE GUARATINGUETÁ**

**NATAN CARVALHO ROSAS QUINQUIOLO**

**Um estudo sobre fundamentos da teoria de campos quânticos:** de representações de uma partícula às possíveis classes não-usuais de Wigner.

Guaratinguetá

2022

**Natan Carvalho Rosas Quinquiolo**

**Um estudo sobre fundamentos da teoria de campos quânticos:** de representações de uma partícula às possíveis classes não-usuais de Wigner.

Dissertação de mestrado apresentada ao Conselho de Pós-Graduação em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Mestre em Física .

Orientador: Prof. Dr. Júlio Marny Hoff da Silva

Guaratinguetá

2022



Q7e	<p>Quinquiolo, Natan Carvalho Rosas</p> <p>Um Estudo sobre fundamentos da teoria de campos quânticos: de representações de uma partícula às possíveis classes não-usuais de Wigner / Natan Carvalho Rosas Quinquiolo – Guaratinguetá, 2022.</p> <p>94 f : il.</p> <p>Bibliografia: f. 86-88</p> <p>Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2022.</p> <p>Orientador: Prof. Dr. Júlio Marny Hoff da Silva</p> <p>1. Teoria dos grupos. 2. Teoria quântica de campos. 3. Poincaré, Séries. I. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU 512.54</p>
-----	--

Luciana Máximo  
Bibliotecária/CRB-8 3595

**NATAN CARVALHO ROSAS QUINQUIOLO**

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
“MESTRADO EM FÍSICA”**

**PROGRAMA: FÍSICA  
CURSO: MESTRADO**

**APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**



**Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto**  
Coordenador

**BANCA EXAMINADORA:**



**Prof. Dr. JULIO MARNY HOFF DA SILVA**  
Orientador - UNESP

participou por videoconferência



**Prof. Dr. SAULO HENRIQUE PEREIRA**  
UNESP

participou por videoconferência



**Prof. Dr. JOSÉ ABDALLA HELAYEL-NETO**  
CBPF/RJ

participou por videoconferência

Janeiro de 2022

## **DADOS CURRICULARES**

### **NATAN CARVALHO ROSAS QUINQUIOLO**

**NASCIMENTO** 15 de dezembro de 1989 - Guaratinguetá /  
SP

**FILIAÇÃO** José Manoel Quinquolo  
Deise Aparecida Prado Carvalho Rosas  
Quinquolo

**2013 / 2019** Curso de Graduação - Bacharelado em Física  
UNESP - Faculdade de engenharia de Guaratinguetá

**2019 / 2022** Curso de Pós-Graduação em Física, nível  
Mestrado  
UNESP - Faculdade de engenharia de Guaratinguetá

## AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus familiares próximos, pais e irmã, José Manoel, Deise e Natália, respectivamente.

Também agradeço à minha esposa e companheira de todas as horas, Juliana.

Como não poderia deixar de ser, agradeço aos contribuintes que financiaram, em sua maioria a contragosto, esta pesquisa, assim como agradeço a todos os funcionários da UNESP que fazem o verdadeiro trabalho duro.

Por último, mas não menos importante, fica o meu agradecimento ao meu orientador sobretudo pela paciência, mas também pela oportunidade de aprendizado. Que sua dedicação nesse processo de orientação não tenha sido em vão.

Este trabalho contou com o apoio da seguinte entidade:

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior

*“Leitores peço desculpas  
Se a obra não for de agrado  
Sou um poeta sem força  
O tempo tem me estragado  
Escrevo há 18 anos  
Tenho razão de estar cansado.”*

**Conclusão da Mulher Roubada**  
(Leandro Gomes de Barros)

*“Leitores peço desculpas  
Se a dissertação não for de agrado  
Sou um mestrando sem força  
O tempo tem me estragado  
Faço mestrado há mais de 2 anos  
Tenho razão de estar cansado.”*

**Conclusão da Dissertação de Mestrado**  
(Natan Carvalho Rosas Quinquioló)

*"Hateful is the dark-blue sky,  
Vaulted o'er the dark-blue sea.  
Death is the end of life; ah, why  
Should life all labour be?"*

**The Lotos-Eaters**  
(Alfred Tennyson)

## RESUMO

Neste trabalho serão estudados os conceitos de teoria de grupos e representações de grupos, principalmente grupos de Lie, com o foco no desenvolvimento de uma fundamentação matemática necessária para se estudar as representações irredutíveis do grupo de Poincarè; também será visto de forma consistente um desenvolvimento em primeiros princípios (seguindo o formalismo de Weinberg presente em [15]) do conceito de campo quântico; por fim será feita uma aplicação dos conceitos previamente desenvolvidos na tentativa de se encontrar um possível candidato para preencher as chamadas classes não-usuais de Wigner.

**PALAVRAS-CHAVE:** Simetria; Poincarè; Lorentz; Teoria Quântica de Campos; Weinberg; Wigner; ELKO; classes não usuais de Wigner; Método de Classificação de Wigner.

## ABSTRACT

In this work we will study the concepts of the groups theory and representations theory of groups, Lie groups mainly, focusing in the development of the main mathematical tools to study the irreducible representation of Poincarè group; also we will show a development at first principles (following Weinberg's formalism in [15]) about quantum field; finally we will try to find a good candidate to reach so-called non-standart Wigner's classes.

**KEYWORDS:** Symmetry; Poincarè; Lorentz; Quantum Field Theory; Weinberg; Wigner; ELKO; non-standart Wigner classes; Wigner Classification Method.

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Possíveis classes de partículas de acordo com o MCW; versão adaptada de [23] . 83

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>NOÇÕES DE TEORIA DE GRUPOS E TEORIA DE REPRESENTAÇÕES</b> .	<b>14</b>
2.1	Grupos . . . . .	14
2.2	Representações . . . . .	16
2.3	Grupos de Lie . . . . .	20
2.4	Álgebra de Lie . . . . .	21
<b>3</b>	<b>NOÇÕES DE PARTÍCULAS</b> . . . . .	<b>27</b>
3.1	Espaço de Hilbert . . . . .	27
3.2	Grupo de Poincaré e Grupo de Lorentz (na mecânica quântica) . . . . .	30
<b>4</b>	<b>NOÇÕES DE CAMPOS</b> . . . . .	<b>44</b>
4.1	Matriz S e a série de Dyson . . . . .	44
4.2	Operadores de criação e aniquilação . . . . .	50
4.3	O campo . . . . .	56
4.4	O campo de Dirac como um exemplo . . . . .	58
<b>5</b>	<b>O MÉTODO DE CLASSIFICAÇÃO DE WIGNER E UM POSSÍVEL CANDIDATO ÀS CLASSIFICAÇÕES NÃO USUAIS</b> . . . . .	<b>62</b>
5.1	O MCW . . . . .	62
5.2	Uma particularização para spin 1/2 e mais algum comentário sobre CPT . . . . .	63
5.3	Um bom candidato e as possíveis novas classes de Wigner . . . . .	65
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>84</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>87</b>
	<b>APÊNDICE A – LEMA DE SCHUR</b> . . . . .	<b>90</b>
	<b>APÊNDICE B – PROPOSIÇÃO SOBRE GRUPOS DE LIE</b> . . . . .	<b>93</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objetivo expor o desenvolvimento de minha pesquisa no mestrado em física do programa de pós-graduação da UNESP (campus de Guaratinguetá), como parte obrigatória para a obtenção do título de mestre.

A ideia por trás desta pesquisa é buscar informações fundamentais em teoria quântica de campos para que, de alguma maneira, possa ser feito alguma inferência de cunho físico. Portanto boa parte deste trabalho representa uma leitura crítica sobre alguns aspectos canônicos da teoria quântica de campos (TQC), mas deve-se ressaltar que o formalismo escolhido para tal pesquisa é fortemente baseado nas ideias presentes em [15], [18], [19] e [20].

Um aspecto mais prático que motivou a busca por tais informações fundamentais, de primeiros princípios, foi o trabalho desenvolvido em [23], em que se faz uma análise simples sobre como elencar certo tipo de campo a um candidato a descrever partículas que por sua vez estariam relacionadas à matéria escura, dada a natureza não usual do campo em questão.

Em TQC, há muito se sabe, graças a trabalhos como de Wigner e Bargmann, por exemplo, que é possível se classificar tipos de partículas de acordo com seu comportamento mediante a atuação de certas simetrias, como por exemplo as simetrias de paridade, reversão temporal e conjugação de carga (simetria interna). Wigner em [21] mostrou explicitamente que podemos classificar as partículas em quatro grupos, a depender de como o estado pelo qual elas são representadas reage mediante a atuação de  $P^2$ ,  $T^2$  e  $(CPT)^2$ .

No entanto, desde então, sabe-se que a maioria das partículas pertence ao mesmo tipo. Na verdade, praticamente toda TQC é construída levando-se em conta apenas a mesma classe, desconsiderando ou reduzindo outros tipos ao caso mais usual. Acontece que recentes descobertas de possíveis novos campos, ou mesmo de possíveis novas partículas, abriram novas oportunidades de se revisitar essa classificação, como por exemplo no trabalho sobre o ELKO [24].

[23], fez-se o seguinte questionamento: é sabido que na TQC canônica não se pode esperar novas partículas a serem classificadas pelas classes não-usuais (ou não-standart) de Wigner que se comportam da maneira usual, mas e se por um acaso estas novas partículas não responderem de maneira usual às simetrias discretas? Poderiam elas serem classificadas nas classes não usuais? Poderiam elas estar associadas a campos também não usuais? Caso possam, que tipo de física elas representam?

Para que todas estas perguntas sejam ao menos bem compreendidas se faz necessário o estudo sistemático dos fundamentos da teoria quântica de campos que se está querendo questionar.

Por isso, neste trabalho veremos no capítulo 2 as bases matemáticas necessárias para se entender o conceito por trás de partículas, estados e representações dos grupos de Poincarè e Lorentz; no capítulo 3 veremos aplicações consistentes do ferramental visto no capítulo anterior, bem como as ideias necessárias para se construir a noção elementar de uma partícula para que se possa chegar na ideia de campo; no capítulo 4 veremos como a ideia de campo pode se originar sem que se faça, necessariamente, referência a uma física lagrangeana, tudo de forma bastante consistente e autocontida; por fim, no capítulo 5 será feita uma verificação de uma forma geral para o operador  $T$  no caso com

degenerescências além do spin, proposta no Apêndice C de [15], assim como uma breve investigação sobre algum bom candidato para que sejam alcançadas as classes não-usuais de Wigner; no capítulo 6 temos a conclusão.

Em prol de uma leitura mais fluida, optou-se por deixar para os apêndices A e B, respectivamente, uma demonstração do Lema de Schur (e dois corolários), uma demonstração de uma proposição sobre a natureza das representações de um grupo de Lie não-compacto.

## 2 NOÇÕES DE TEORIA DE GRUPOS E TEORIA DE REPRESENTAÇÕES

Das várias maneiras possíveis de se trabalhar com teoria de grupos, foi-se escolhida, para este texto, aquela que permite um estudo bastante satisfatório da ideia de *simetria* em física. Sendo mais preciso, estamos interessados em uma noção que seja mais conveniente para a teoria quântica de campos (TQC) do que é uma simetria. Dessa maneira podemos dizer que uma *simetria é uma característica de um sistema físico que se preserva diante de uma transformação nesse mesmo sistema*. Uma noção mais geral sobre simetria pode ser consultada em [1], uma obra do matemático Hermann Weyl dedicada exclusivamente a esse tema. Imbuídos dessa ideia de simetria podemos fazer uma associação da noção de grupos com a física; podemos entender um grupo como sendo um ente matemático capaz de descrever as simetrias de um dado sistema físico.

Como dito anteriormente, assim como na teoria de grupos, a teoria de representações também possui várias abordagens, algumas que sequer se relacionam à física, mas aqui preferimos lidar com a ideia de uma *representação de grupo*, ou seja, de uma maneira simples, uma ferramenta que é capaz de expressar um grupo, em alguns casos, literalmente representar a noção abstrata de um grupo de tal forma que seja possível a manipulação matemática dessas representações e posteriormente a extração de algum significado físico.

Neste capítulo veremos com mais clareza as ideias de grupos e de representações de grupos.

### 2.1 GRUPOS

Começamos com a definição de um grupo, mas antes façamos algumas pré-definições, sempre na busca de uma ideia bastante precisa do que é um grupo; segundo [2]:

**I)** Uma *operação binária*  $\circ$  sobre um conjunto  $G$  é uma função  $\circ : G \times G \rightarrow G$ . Para todo  $a, b \in G$  temos  $a \circ b$  para  $\circ(a, b)$ ;

**II)** Dizemos que uma operação binária  $\circ$  sobre o conjunto  $G$  é *associativa* se para todo  $a, b, c$  pertencentes ao conjunto  $G$  tivermos  $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ ;

**III)** Seja  $\circ$  uma operação binária sobre  $G$  e sejam  $a$  e  $b$  elementos de  $G$ , podemos dizer que os elementos *comutam* se  $a \circ b = b \circ a$ .  $\circ$  (ou  $G$ ) é dito ser *comutativa* (ou *comutativo*) se para todo  $a, b$  elementos de  $G$  tivermos  $a \circ b = b \circ a$ .

Com as definições acima podemos dizer que um *grupo* é o *par ordenado*  $(G, \circ)$  em que  $G$  é um conjunto de elementos e  $\circ$  é uma operação binária que respeita três axiomas:

**I)**  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ , para todo  $a, b, c \in G$ , ou seja,  $\circ$  é *associativa*;

**II)** Existe um elemento  $e$  em  $G$ , chamado *identidade* de  $G$ , tal que para todo  $g \in G$  temos  $g \circ e = e \circ g = g$ ;

**III)** Para cada  $g \in G$  existe um elemento  $g^{-1}$  de  $G$ , chamado *inversa* de  $g$ , tal que  $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$ .

De imediato se pode concluir que o segundo axioma garante que todo grupo é um conjunto não vazio; um grupo no qual  $G$  é um conjunto finito é chamado de *grupo finito* e o número de elementos de um conjunto é conhecido como *ordem*.

Podemos definir um tipo especial de grupo, para o qual todos os seus elementos comutam entre si, ou seja,  $(G, \circ)$  é dito ser *abeliano*<sup>1</sup> se  $\forall a, b \in G$  temos  $a \circ b = b \circ a$ .

Usualmente, a operação binária necessária para que se defina um grupo é também chamada de *regra de composição* do grupo, ou ainda, *produto* associado ao grupo. Para o caso em que tivermos um grupo formado por matrizes, por exemplo, essa operação binária é a regra usual de multiplicação entre matrizes. Outra sutileza em relação à notação é que geralmente, ao se referir ao grupo em questão, usa-se a notação  $G$  para se referir ao grupo ao invés da notação mais completa  $(G, \circ)$ , principalmente quando a regra de composição for bem conhecida.

Podemos destacar quatro exemplos conhecidos de grupos (para outros exemplos ver [2] e [3]):

**i)**  $\mathbb{Z}$ : é um grupo em relação à operação de adição usual  $+$  sendo  $e = 0$  and  $g^{-1} = -g$ , para todo  $g \in \mathbb{Z}$ ;

**ii)**  $\mathbb{R} - \{0\}$ : forma um grupo em relação à operação de multiplicação usual  $\times$  sendo  $e = 1$  e  $g^{-1} = \frac{1}{g} \forall g \in \mathbb{R} - \{0\}$ ;

**iii)**  $U(N)$  e  $SU(N)$ :  $U(N)$  para  $N \geq 1$  é o conjunto de todas as matrizes  $N \times N$  unitárias  $U$  com relação à regra de multiplicação usual de matrizes.  $SU(N)$  para  $N \geq 2$  é o subconjunto de matrizes  $U$  com  $\det U = 1$ , também em relação à regra de multiplicação de matrizes;

**iv)**  $O(N)$  e  $SO(N)$ : o conjunto de todas as  $N \times N$  matrizes reais e ortogonais  $O$  (para  $N \geq 2$ ) é conhecido por  $O(N)$ <sup>2</sup>; O subconjunto dessas mesmas matrizes com  $\det O = 1$  é conhecido por  $SO(N)$ <sup>3</sup>, ambos os conjuntos formam grupos com relação à multiplicação usual de matrizes.

Outras duas definições sobre grupos são importantes para que possamos entender um pouco melhor a noção de uma representação e sua relação com um grupo, são elas:

**Definição 1:** Seja  $G$  um grupo e  $SG$  um subconjunto de  $G$  que satisfaça todos as propriedades que fazem  $G$  ser um grupo, então  $SG$  é chamado de *subgrupo* de  $G$ , note que para  $SG$  ser um subgrupo de

<sup>1</sup> O grupo  $SO(2)$  é um exemplo de grupo abeliano.

<sup>2</sup> Em alguns textos a nomenclatura desse grupo pode aparecer como  $O(N, \mathbb{R})$  para ressaltar o fato de serem matrizes reais.

<sup>3</sup> Tanto para os casos em **iii)** quanto para os casos em **iv)** a letra S vem da palavra *special* pelo fato do determinante das matrizes ser 1.

$G$  ele deve necessariamente conter o elemento identidade de  $G$ .

**Definição 2:** Seja  $SG$  um subgrupo de  $G$ , se para todo  $g \in G$  e  $s \in SG$  tivermos  $g \circ s \circ g^{-1} \in SG$ , então dizemos que  $SG$  é um *subgrupo invariante* de  $G$ , ou seja, a ação de um elemento de  $G$  sobre um elemento de  $SG$  ainda é um elemento de  $SG$  e portanto  $SG$  é invariante mediante a ação de um elemento de  $G$ .

## 2.2 REPRESENTAÇÕES

Para que possamos definir com precisão o que é uma representação, devemos antes entender três outros conceitos, o primeiro deles sendo *homomorfismo*. De uma forma genérica, em álgebra abstrata, um homomorfismo é uma relação entre duas estruturas algébricas de um mesmo tipo, de maneira que as operações (e.g. uma operação binária) dessas mesmas estruturas sejam preservadas. Por exemplo, sejam  $N$  e  $Q$  dois conjuntos com a mesma operação binária  $\circ$  e  $h : N \rightarrow Q$ ,  $h$  é dito ser um homomorfismo<sup>4</sup> se

$$h(n_1 \circ n_2) = h(n_1) \circ h(n_2) \quad (2.1)$$

para  $h(n_1 \circ n_2) \in N$  e  $h(n_1) \circ h(n_2) \in Q$ , com  $n_1, n_2 \in N$ . Para uma discussão mais profunda em homomorfismos ver [2], [4] e [5].

Os outros dois conceitos, necessários para que se tenha uma definição precisa de uma representação, são: o conceito de *anel* e o conceito de *corpo*.<sup>5</sup> Para apreciarmos tais conceitos seguiremos as noções presentes em [2]. Em álgebra abstrata, dado um conjunto  $R$  munido de duas operações binárias  $+$  e  $\times$  (adição e multiplicação), podemos chamar  $R$  de anel se esse conjunto respeita os seguintes axiomas:

**i)**  $(R, +)$  é um grupo abeliano;

**ii)**  $\times$  é associativa, ou seja, para elementos  $a, b$  e  $c$  de  $R$  temos:  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ ;

**iii)** Vale a regra distributiva:  $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$  e  $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$  para  $a, b$  e  $c$  em  $R$ .

Um anel  $R$  pode ter outras duas características importantes, ser comutativo (caso a operação de multiplicação seja comutativa) e possuir uma identidade (se existe  $1 \in R$  tal que  $a \times 1 = 1 \times a = a$  para  $a \in R$ ). Com isso em mente podemos definir um corpo qualquer  $F$  como sendo um anel comutativo, que possui uma identidade, no qual todo elemento não-nulo possui uma inversa.

<sup>4</sup> Para o caso em que uma relação linear entre os conjuntos seja não somente sobrejetiva, mas também injetiva (ou seja, bijetiva) essa relação ganha o nome de *isomorfismo*; caso o homomorfismo seja injetivo (relação um para um) a representação é dita ser *fiel*.

<sup>5</sup> O termo em inglês para *corpo* é *field*; embora menos comum, uma tradução literal desse termo pode ser feita e o termo em português passa a ser *campo*.

De posse dessas três ideias, a saber, homomorfismo, anel e campo, podemos enfim definir uma representação, de acordo com [2]:

**Definição 3:** Sejam  $G$  um grupo finito,  $F$  um campo,  $V$  um espaço vetorial<sup>6</sup> sobre  $F$ , e  $GL(V)$ <sup>7</sup> o grupo de transformações lineares inversíveis de  $V$  em  $V$ , então podemos dizer que uma *representação linear*<sup>8</sup> de  $G$  é qualquer homomorfismo  $h$  de  $G$  em  $GL(V)$ , mais explicitamente

$$h : g \in G \rightarrow h(g) \in GL(V), \quad (2.2)$$

isso é o mesmo que dizer  $h(g_1)h(g_2) = h(g_1g_2)$  (equação [2.1]).

Como dito anteriormente, grupos são entes matemáticos abstratos bem como suas representações. Com uma perspectiva voltada para a TQC, faz sentido pensar em representações de grupos, sendo mais específico pensar em grupos como sendo a estrutura matemática que relaciona as transformações de simetria de um dado sistema físico. Consequentemente as representações desses tipos de grupo seriam uma espécie de "realização" dessa ideia matemática; uma das maneiras mais úteis para a física de se estudar representações é através das representações matriciais, mas como uma representação definida acima se relaciona com uma matriz? Pois bem, caso escolhamos um espaço vetorial  $V$  de dimensão finita  $n$  sobre o campo  $F$  e fixemos uma base de  $V$  podemos identificar o isomorfismo  $GL(V) \cong GL_n(F)$  que estabelece uma relação de um para um do grupo de transformações lineares inversíveis de  $V$  ( $GL(V)$ ) para com o grupo de matrizes inversíveis  $n \times n$  ( $GL(n)$ ).

Com o discutido acima podemos estabelecer várias definições importantes com relação à teoria das representações (de grupos), por exemplo as *representações irredutíveis* e as *representações unitárias*, mas antes vejamos o conceito por trás das *representações equivalentes*.

**Definição 4:** Duas representações são ditas equivalentes se elas puderem se relacionar através de uma transformação de similaridade, explicitamente:

$$h'(g) = S^{-1}h(g)S, \quad (2.3)$$

para  $h$  sendo uma representação de dimensão  $n$  de um grupo qualquer  $G$  com  $g \in G$  e  $S$  uma matriz não singular<sup>9</sup>  $n \times n$ . Podemos checar se de fato a equação (2.3) é mesmo válida

$$h'(g_3) = h'(g_1)h'(g_2) = S^{-1}h(g_1)SS^{-1}h(g_2)S = S^{-1}h(g_1)\mathbb{I}h(g_2)S = S^{-1}h(g_1g_2)S = h'(g_1g_2),$$

para  $g_1, g_2, g_3 \in G$  e  $\mathbb{I}$  sendo a matriz identidade.

<sup>6</sup> Neste contexto podemos definir um espaço vetorial  $V$  pela quádrupla  $(V, F, +, \cdot)$  em que  $+$  :  $V \times V \rightarrow V$  é a adição de vetores e  $\cdot$  :  $F \times V \rightarrow V$  é a multiplicação escalar.

<sup>7</sup>  $T : V \rightarrow V$ .

<sup>8</sup> Em termos de notação, na maioria dos casos, quando um texto utiliza a palavra *representação* na realidade ele está fazendo referência às *representações lineares*.

<sup>9</sup> Uma matriz quadrada não singular, para nosso contexto, é o mesmo que uma matriz inversível.

Vamos supor que uma representação  $h$ , de dimensão  $n$ , de um grupo  $G$  possa ser escrita da forma

$$h(g) = \begin{pmatrix} h(g)_{11} & h(g)_{12} \\ \mathbf{0}_{21} & h(g)_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

com  $h(g)_{11}$  sendo  $n_1 \times n_1$ ,  $h(g)_{12}$  sendo  $n_1 \times n_2$ ,  $h(g)_{22}$  sendo  $n_2 \times n_2$ ,  $\mathbf{0}_{21}$  sendo  $n_2 \times n_1$  para  $n = n_1 + n_2$ . Uma representação é dita ser *reduzível* se ela for equivalente a uma representação da forma da equação (2.4), conseqüentemente:

**Definição 5:** Uma representação é dita ser *irreduzível*<sup>10</sup> se ela não for reduzível.

Existe uma relação mais profunda entre as representações reduzíveis e as representações irreduzíveis que vai além dessa definição quase tautológica. Ao olharmos com atenção para a equação (2.4) podemos perceber que as representações que constituem  $h(g)$  também podem, elas próprias, serem reduzíveis, mas nesse caso sempre será possível atuarmos com uma transformação de similaridade em cada uma dessas representações de maneira que a forma final da representação seja (utilizando a equação (2.3) e a definição de redutibilidade):

$$h'(g) = S^{-1}h(g)S = \begin{pmatrix} h'_{11}(g) & h'_{12}(g) & h'_{13}(g) & \dots & h'_{1k}(g) \\ \mathbf{0} & h'_{22}(g) & h'_{23}(g) & \dots & h'_{2k}(g) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & h'_{33}(g) & \dots & h'_{3k}(g) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & h'_{jk}(g) \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

com as representações  $h'(g)_{ij}$  para  $i = j$  e  $j = 1, 2, 3, \dots, k$  sendo representações irreduzíveis. Indo além, para o caso em que seja possível transformar todas as representações  $h'(g)_{ij}$ <sup>11</sup> para  $i \neq j$  em matrizes nulas, teremos uma representação na forma

$$h''(g) = \begin{pmatrix} h'_{11}(g) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & h'_{22}(g) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & h'_{33}(g) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & h'_{jk}(g) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

e nesse caso todas as representações  $h''_{ij}(g)$  para  $i = j$  serão irreduzíveis. Com isso podemos ver que os "blocos" construtores das representações reduzíveis são as representações irreduzíveis. Representações equivalentes às representações escritas na forma da equação (2.6) são ditas serem *representações completamente reduzíveis*. Por fim, vejamos como podemos definir uma representação unitária:

**Definição 6:** Dado um grupo  $G$  uma representação  $h$  é dita ser unitária se todas as matrizes  $h(g)$

<sup>10</sup> Podemos pensar na irreduzibilidade de uma representação de outra maneira, associando a ideia de subgrupos invariantes; sendo assim, uma representação será dita irreduzível se os únicos subgrupos invariantes são o próprio grupo  $G$  e o vazio.

<sup>11</sup>  $h'(g)_{ij}$  são representações  $n'_i \times n'_j$  de tal forma que  $d = n'_1 + n'_2 + n'_3 + \dots + k$ .

forem unitárias<sup>12</sup> para todo  $g \in G$ .

Apesar de não ser tão comumente apresentado, o seguinte teorema (e seus corolários) são sempre citados em textos sobre física e são fundamentais na apreciação da teoria de representações, sua demonstração pode ser apreciada parcialmente em [6], parcialmente em [7 e [8], tanto a disposição do teorema quanto de seus corolários estão baseadas em [6], [7] e [8] (ver demonstração no apêndice A):

**Teorema 1 (Lema de Schur<sup>13</sup>):** Sejam  $h_1$  e  $h_2$  duas representações irredutíveis (reais ou complexas) de um grupo  $G$  atuando em dois espaços vetoriais  $V_1$  e  $V_2$  respectivamente. Suponhamos a existência do mapeamento linear  $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ ,  $\phi$ ; é chamado de um *mapa de entrelaçamento*<sup>14</sup> de representações se

$$\phi(h_1(g)v_1) = h_2(g)\phi(v_1), \quad (2.7)$$

para  $g \in G$  e  $v_1 \in V_1$ .

**Parte 1):** Sejam  $h_1$  e  $h_2$  duas representações irredutíveis (reais ou complexas) de um grupo  $G$  atuando em dois espaços vetoriais  $V_1$  e  $V_2$  respectivamente, e  $\phi$  um mapa de entrelaçamento, então  $\phi$  é um isomorfismo ou  $\phi = 0$ ;

**Parte 2):** Seja  $h$  uma representação complexa irredutível de  $G$  atuando em  $V$  e sejam  $\phi \rightarrow \phi$  e  $\phi$  o mapa de entrelaçamento  $\phi : V \rightarrow V$ , então  $\phi = k\mathbb{I}$  para  $k \in \mathbb{C}$ ;

**Parte 3):** Sejam  $h_1$  e  $h_2$  duas representações complexas irredutíveis de  $G$  atuando em  $V_1$  e  $V_2$ , respectivamente e sejam  $\phi_1 \neq 0$  e  $\phi_2 \neq 0$  dois mapas de entrelaçamento  $\phi_1, \phi_2 : V_1 \rightarrow V_2$ , então  $\phi_1 = k\phi_2$  para  $k \in \mathbb{C}$ .

**Corolário 1:** Seja  $h$  uma representação  $h : G \rightarrow GL(V)$  em que  $V$  é um espaço vetorial complexo, se  $C$  é um subgrupo<sup>15</sup> de  $G$  formado pelos elementos de  $G$  que comutam com todos os elementos de  $G$  então  $h(C) = k\mathbb{I}$ , para  $k \in \mathbb{C}$ .

**Corolário 2:** Se  $G$  é um grupo abeliano então todas as suas representações irredutíveis sobre espaços vetoriais complexos são 1-dimensionais;

Com isso podemos avançar para a última parte do ferramental matemático deste trabalho que é definirmos grupos de Lie, álgebras de Lie e como esses dois conceitos se relacionam entre si e com as representações.

<sup>12</sup> Uma matriz  $U$  complexa é dita ser unitária se  $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}$  em que  $\mathbb{I}$  é a matriz identidade e  $U^\dagger$  é o transposto conjugado.

<sup>13</sup> Em matemática a palavra lema costuma aparecer para fazer referência a um teorema que serve, geralmente, para provar outras afirmações. No entanto, essa classificação é arbitrária e aparece aqui apenas por tradição de escrita.

<sup>14</sup> Mapa de entrelaçamento é o nome dado a um mapa equivariante quando aplicado à teoria de representações.

<sup>15</sup> Às vezes esse subconjunto é também chamado de centro de  $G$ .

### 2.3 GRUPOS DE LIE

Como argumentado em [8] e [7] é possível se falar de grupos de Lie de vários ângulos diferentes. Um grupo de Lie deve certamente respeitar os axiomas que formam a definição de um grupo qualquer, mas também deve respeitar certas características de espaços topológicos, assim como de variedades analíticas. Como dito anteriormente, a maioria dos grupos de interesse na física (e neste trabalho) são grupos de matrizes, assim como suas representações o são, mais ainda são grupos lineares de matrizes, portanto faz mais sentido que trabalhemos com a noção de grupos de Lie que melhor se enquadra nessas características. Mas apesar dessa escolha, podemos deixar, por uma questão de completeza, uma definição mais genérica de grupos de Lie:

**Definição 7:** Um grupo de Lie é uma variedade suave dotada das propriedades de um grupo, das quais a regra de composição e a operação de inversão são mapas suaves.

Dentro do contexto deste texto, definiremos um grupo de Lie da seguinte maneira:

**Definição 8:** Seja  $G$  um grupo de Lie (de matrizes),  $G$  é um subgrupo do grupo  $GL(n, \mathbb{C})$  com a propriedade de que se tivermos qualquer sequência  $A_m \in G$  de matrizes convergindo<sup>16</sup> para alguma matriz  $A$ , ou  $A \in G$  ou  $A$  não é uma matriz inversível<sup>17</sup>.

Mesmo estando interessado nas propriedades dos grupos de Lie que decorrem da definição acima, é importante notar que os grupos Lie são comumente associados a algumas de suas características topológicas. E estas mesmas características serão importantes para nosso texto na classificação de alguns grupos, por conseguinte, vejamos quais e como elas podem ser definidas.

**Definição 9:** Um grupo de Lie é dito ser *compacto* se os parâmetros associados ao grupo em questão variam em um intervalo fechado. Utilizando a definição acima como referência, tem-se que para toda sequência  $A_m \in G$  que converge para  $A$  teremos  $A \in G$  e vai existir uma constante qualquer  $K$  de maneira que para todo  $A \in G$  teremos  $|A_{ij}| \leq K$  e  $1 \leq i, j \leq n$ , com  $G$  sendo subgrupo de  $GL(n, \mathbb{C})$ .

**Definição 10:** Um grupo de Lie é dito ser *conexo* se para quaisquer elementos de  $G$ , digamos  $g'$  e  $g''$  tivermos um caminho  $g'(t)$  contínuo ( $a \leq t \leq b$ ) em  $G$  de maneira que  $g'(a) = g'$  e  $g'(b) = g''$ .

**Definição 11:** Um grupo de Lie é dito ser *simplesmente conexo* se puder contrair continuamente todo caminho contínuo e fechado em  $G$  para um ponto em  $G$ .

<sup>16</sup> Uma sequência  $A_m$  de matrizes complexas é dita ser convergente para uma matriz  $A$  se cada entrada em  $A_m$  converge para a respectiva entrada em  $A$ .

<sup>17</sup> Vale notar que se  $G$  é um subgrupo de  $GL(n, \mathbb{C})$  então necessariamente o produto de duas matrizes quaisquer de  $GL$  deve pertencer a  $G$  bem como a inversa de  $GL$ .

Os grupos  $O(n)$ ,  $SO(n)$ ,  $U(n)$  e  $SU(n)$  são exemplos de grupos compactos; os grupos  $GL(n, \mathbb{C})$ ,  $SL(n, \mathbb{C})$ ,  $U(n)$  e  $SU(n)$  para  $n \geq 1$  são exemplos de grupos conexos; o grupo  $SU(2)$  é um exemplo de grupo simplesmente conexo.

## 2.4 ÁLGEBRA DE LIE

Um importante objeto nos estudos dos grupos de Lie é a estrutura matemática abstrata conhecida como álgebra de Lie. Vejamos como podemos entendê-la e associá-la a um grupo de Lie de matrizes.

Uma definição abstrata de álgebra de Lie se dá da seguinte maneira:

**Definição 12:** Uma *álgebra de Lie*, real ou complexa, dimensionalmente finita é um espaço vetorial também dimensionalmente finito  $\mathfrak{a}$  munido de uma operação bilinear  $[\ , \ ] : \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}$ , tal que para quaisquer  $A, B, C \in \mathfrak{a}$  as relações abaixo são satisfeitas:

$$[A, B] = -[B, A] \implies [A, A] = 0, \quad \text{antissimetria;} \quad (2.8)$$

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0, \quad \text{identidade de Jacobi.} \quad (2.9)$$

Dois elementos de uma álgebra de Lie *comutam* se  $[A, B] = 0$ , caso para todo  $A, B \in \mathfrak{a}$  tivermos  $[A, B] = 0$  a álgebra em questão é dita ser *comutativa*. A operação bilinear  $[\ , \ ]$  é também conhecida como uma *operação de colchetes sobre  $\mathfrak{a}$*  ou *colchetes de Lie*.

Estamos próximos de encontrar uma relação direta entre grupos de Lie matriciais e álgebras de Lie do mesmo tipo, para tanto vejamos algumas outras definições:

**Definição 13:** Seja  $X$  uma matriz  $n \times n$ , a *exponencial* de  $X$  ( $e^X$  ou  $\exp X$ ) é definida através da série de potências:

$$e^X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!}, \quad (2.10)$$

em que  $X^0$  é a matriz identidade e  $X^m$  para  $m \geq 2$  é o produto da matriz  $X$  por ela mesma  $m$ -vezes.<sup>18</sup>

**Definição 14:** Uma função  $A : \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  é chamada de *subgrupo paramétrico* ou *subgrupo 1-paramétrico* de  $GL(n, \mathbb{C})$  se

**I):**  $A$  é contínua;

**II):**  $A(0) = \mathbb{I}$ ;

**III):**  $A(t + s) = A(t)A(s)$  para  $s, t \in \mathbb{R}$ .

<sup>18</sup> É importante ressaltar que a equação [2.10] converge para todo  $X \in M_n(\mathbb{C})$  e  $e^X$  é uma função contínua de  $X$ , a demonstração dessa afirmação pode ser encontrada em [7].

Com o que definimos até o momento podemos fazer uma associação entre um grupo de Lie de matrizes e uma álgebra de Lie de matrizes da seguinte maneira:

**Definição 15:** Seja  $G$  um grupo de Lie de matrizes, a álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  associada a  $G$  é o conjunto de todas as matrizes  $X$  tal que  $e^{tX} \in G$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Mais forte que associar uma álgebra a um grupo, podemos garantir que essa associação é única para o caso de grupos de Lie matriciais.

**Teorema 2:** Seja  $A(\cdot)$  um subgrupo 1-paramétrico de  $GL(n, \mathbb{C})$ , existe uma única matriz  $n \times n$  complexa  $X$  tal que

$$A(t) = e^{tX}. \quad (2.11)$$

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [7].

Vamos explorar as características dos subgrupos 1-paramétricos para melhor enxergar uma relação entre essas características e os grupos de Lie e as álgebras de Lie (o processo desenvolvido aqui é semelhante ao desenvolvido em [9] e [10]).

Dado um subgrupo 1-paramétrico  $A(\cdot)$  de um grupo  $G$ , vamos assumir a existência de um elemento  $A$  desse grupo e que esse elemento seja caracterizado por um número finito de parâmetros  $a^1, a^2, \dots, a^r$  formando um conjunto  $\{a\}$ ; o grupo  $A(\cdot)$  será um grupo de Lie conexo se seus elementos estiverem relacionados à identidade através de sequências contínuas de elementos do grupo; obviamente, elementos distintos desse grupo corresponderão a conjuntos distintos de valores para os parâmetros. Suponhamos, por exemplo  $A(a)$  e  $A(b)$ , podemos dizer que os elementos do grupo dependem de maneira suave dos parâmetros  $a^i$ , por ser um grupo a lei de composição entre dois elementos do grupo deve ser  $A(a)A(b) = A(c)$  tal que

$$c^i = \varphi^i(a, b), \quad (2.12)$$

em que  $\varphi^i$  são funções suaves de  $a$  e  $b$  e valha

**I) (associatividade):**

$$\varphi^i(a, \varphi(b, c)) = \varphi^i(\varphi(a, b), c); \quad (2.13)$$

**II) (identidade):**

$$\varphi^i(a, a_0) = \varphi^i(a_0, a) = a^i; \quad (2.14)$$

(com  $A(a_0) = A(0, 0, \dots, 0)$ );

**III) (inversa):**

$$\varphi^i(a, \bar{a}) = \varphi^i(\bar{a}, a) = a_0^i = 0, \quad (2.15)$$

(com  $A(a)$  tendo sua inversa em  $A(-a)$ ).

As matrizes associadas ao grupo de Lie em questão dependem suavemente dos parâmetros  $a^i$ , o que permite a expansão de cada elemento de cada matriz em uma série de Taylor em torno do ponto

$a^i = 0$ , em termos da matriz  $A$ :

$$A(a) = \mathbf{1} + a^i \left( \frac{\partial A}{\partial a^i} \right)_{a=0} + \frac{1}{2!} a^i a^j \left( \frac{\partial^2 A}{\partial a^i \partial a^j} \right)_{a=0} + \dots \equiv \mathbf{1} + ia^i X_i + \frac{1}{2} a^i a^j X_{ij} + \dots \quad (2.16)$$

As matrizes  $X_i = \left( \frac{-i\partial A}{\partial a^i} \right)_{a=0}$  são chamadas de *geradores* do grupo. Por definição um gerador de um grupo é um objeto pertencente a um conjunto que em alguns casos pode ser combinado aos elementos de um grupo de maneira a gerar todo o grupo, quando isso é possível podemos exprimir um elemento genérico do grupo através do uso dos geradores, desde que sejam especificados o conjunto de parâmetros que o caracteriza. Vejamos como.

Podemos expandir em série de Taylor a lei de composição dos parâmetros  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \varphi^k(a, b) = \varphi^k(0, 0) + a^i \left( \frac{\partial \varphi^k}{\partial a^i} \right)_{a=b=0} + b^i \left( \frac{\partial \varphi^k}{\partial b^i} \right)_{a=b=0} + \frac{1}{2!} a^i a^j \left( \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial a^i \partial a^j} \right)_{a=b=0} \\ + \frac{1}{2!} b^i b^j \left( \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial b^i \partial b^j} \right)_{a=b=0} + \frac{1}{2!} a^i b^j \left( \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial a^i \partial b^j} \right)_{a=b=0} + \dots \end{aligned} \quad (2.17)$$

Donde valem as relações

$$\varphi^k(0, 0) = 0; \quad \varphi^k(a, 0) = a^k; \quad \varphi^k(0, b) = b^k; \quad \varphi^k(a, -a) = 0, \quad (2.18)$$

implicando

$$\left( \frac{\partial \varphi^k}{\partial a^i} \right)_{a=b=0} = \left( \frac{\partial \varphi^k}{\partial b^i} \right)_{a=b=0} = \delta_i^k, \quad (2.19)$$

e

$$\left( \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial a^i \partial a^j} \right)_{a=b=0} = \left( \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial b^i \partial b^j} \right)_{a=b=0} = 0. \quad (2.20)$$

$\varphi^k(a, b)$  pode ser escrito como

$$\varphi^k(a, b) = a^k + b^k - \frac{1}{2} C_{ij}^k a^i b^j + \dots, \quad (2.21)$$

com

$$C_{ij}^k a^i b^j = - \left( \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial a^i \partial b^j} \right)_{a=b=0}, \quad (2.22)$$

(2.18) e (2.21) nos fornece

$$0 = a^k - a^k + \frac{1}{2} C_{ij}^k a^i a^j + \dots, \quad (2.23)$$

que satisfaz  $C_{ij}^k a^i a^j = 0$ . Escrevendo  $C_{ij}^k$  como  $C_{ij}^k = \frac{1}{2}(C_{ij}^k + C_{ji}^k) + \frac{1}{2}(C_{ij}^k - C_{ji}^k) = e_{ij}^k + f_{ij}^k$ , percebe-se que  $e_{ij}^k = 0$ , conseqüentemente  $C_{ij}^k = f_{ij}^k = -f_{ji}^k$ . Com (2.16) em  $A(a)A(b) = A(\varphi(a, b))$  ficamos com

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{1} + ia^i X_i + \frac{1}{2} a^i a^j X_{ij} + \dots \right) \left( \mathbf{1} + ib^i X_i + \frac{1}{2} b^i b^j X_{ij} + \dots \right) = \\ \left( \mathbf{1} + i\varphi^i(a, b) X_i + \frac{1}{2} \varphi^i(a, b) \varphi^j(a, b) X_{ij} + \dots \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Substituindo (2.21) em (2.24), igualando os coeficientes de  $a^i b^i$  dos dois lados da equação e lembrando que  $X_{ij}$  é simétrico, temos:

$$-a^k b^j X_k X_j = -\frac{i}{2} f_{kj}^i X_i a^k b^j + \frac{1}{2} (a^k b^j + a^j b^k) X_{kj}. \quad (2.25)$$

Trabalhando (2.25) temos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} (a^k b^j + a^j b^k) \{X_k, X_j\} - \frac{1}{4} (a^k b^j - a^j b^k) [X_k, X_j] = \\ -\frac{i}{4} f_{kj}^i X_i (a^k b^j - a^j b^k) + \frac{1}{2} X_{kj} (a^k b^j + a^j b^k). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ao comparar os coeficientes encontramos

$$X_{kj} = -\frac{1}{2} \{X_k, X_j\} \quad (2.27)$$

e

$$[X_k, X_j] = i f_{kj}^i X_i. \quad (2.28)$$

Com isso, definimos  $f_{kj}^i$  como sendo as *constantes de estrutura* e para encontrarmos a forma de um elemento genérico do grupo trabalhemos a expressão de  $A(\varphi(a, b))$ ; ao substituir a expressão para  $X_{ij}$  ficamos com

$$\begin{aligned} A(\varphi(a, b)) = \mathbf{1} + i\varphi^i(a, b) X_i - \frac{1}{2} \varphi^i(a, b) \varphi^j(a, b) X_i X_j + \\ -\frac{i}{3!} \varphi^i(a, b) \varphi^j(a, b) \varphi^k(a, b) X_i X_j X_k \dots \end{aligned} \quad (2.29)$$

A equação (2.29) equivale à expansão em série de Taylor para a função exponencial, ou seja,

$$A(\varphi(a, b)) = \exp(i\varphi^i(a, b) X_i), \quad (2.30)$$

com  $\varphi^i(a, b)$  dependendo de  $a^i$ ,  $b^i$  e das constantes de estrutura e sendo determinado ordem a ordem. Para o caso específico em que  $b^i = 0$

$$A(a) = \exp(ia^i X_i), \quad (2.31)$$

a equação (2.31) é válida na vizinhança da identidade de cada elemento do grupo e para o caso de um grupo de Lie compacto e conexo ela é a representação de um elemento genérico do grupo.

Com o que foi trabalhado acima podemos estabelecer uma relação mais explícita entre os grupos de Lie e as álgebras de Lie além do que já foi definido até aqui. Para o caso dos grupos de Lie conexos encontramos

$$[X_i, X_j] = i f_{ij}^k X_k, \quad (2.32)$$

em que  $f_{ij}^k$ 's são as constantes de estrutura, os  $X_i$ 's os geradores do grupo e  $[ , ]$  os colchetes de Lie da álgebra associada ao grupo. Podemos definir um objeto importante no estudo de grupos, o chamado

*operador de Casimir*, um operador obtido através da álgebra de Lie associada ao grupo, que tem a propriedade de comutar com todos os geradores do grupo.

Para finalizar este capítulo vemos os enunciados de três teoremas importantes no estudo de teoria de grupo e representações que por vezes são utilizados em física, ainda que não enunciados explicitamente.

**Teorema 3:** Sejam  $N$  e  $Q$  dois grupos de Lie matriciais e  $\mathfrak{n}$  e  $\mathfrak{q}$  suas respectivas álgebras de Lie associadas, se  $N$  e  $Q$  são *localmente isomórficos* então  $\mathfrak{n}$  e  $\mathfrak{q}$  são localmente isomórficas.

**Teorema 4:** Sejam  $N$  e  $Q$  dois grupos de Lie matriciais e  $\mathfrak{n}$  e  $\mathfrak{q}$  suas respectivas álgebras de Lie associadas, se  $\mathfrak{n}$  e  $\mathfrak{q}$  são *localmente isomórficas* então  $N$  e  $Q$  são localmente isomórficos.

Os Teoremas 3 e 4 também são conhecidos em alguns textos como Primeiro e Segundo Teorema Fundamental de Lie, respectivamente. Existe ainda um Terceiro Teorema Fundamental de Lie, mas foge do escopo deste texto. É importante pontuar que existem muitas formas de se enunciar os três teoremas fundamentais e provavelmente a maioria delas difere dos teoremas originais propostos por Sophus Lie em suas três principais obras *Theorie der Transformationsgruppen I (1888)*, *Theorie der Transformationsgruppen II (1890)* e *Theorie der Transformationsgruppen III (1893)*. Os dois teoremas acima foram enunciados de acordo com [11], onde o leitor pode encontrar suas respectivas demonstrações.

Uma aplicação bastante comum do estudo da álgebra de Lie de um grupo de Lie na física é a tentativa de se encontrar uma relação entre a álgebra de Lie estudada com uma álgebra de Lie conhecida e a partir daí encontrar o grupo de Lie relacionado a álgebra de Lie desconhecida e por fim encontrar o grupo de Lie conhecido que é homomórfico ao grupo de Lie desconhecido, tendo esse homomorfismo sido induzido pelo homomorfismo entre as álgebras de Lie. Esta estratégia é bastante viável quando não se conhece bem a estrutura de um determinado grupo de interesse. No entanto é importante ressaltar que geralmente os teoremas que permitem esse tipo de estudo são mais restritos com relação ao tipo de grupo de Lie em questão; é comum que esses grupos tenham que ser simplesmente conexos para que seja possível estabelecer um homomorfismo entre os grupos induzido por um homomorfismo entre as álgebras (a volta desse raciocínio também é válida para casos de grupos de Lie simplesmente conexos); comparando os teoremas que estabelecem homomorfismos entre grupos de Lie simplesmente conexos graças a homomorfismos entre álgebras de Lie com os teoremas 3 e 4 expostos acima, observamos que o vínculo entre álgebras de Lie e grupos de Lie pode ser mais forte e genérico se nos restringirmos a regiões nas vizinhanças da identidade de cada grupo bem como de cada álgebra. Por isso é possível estabelecer um isomorfismo ao invés de um homomorfismo, mas restrito às condições ditas locais; em suma se diz que ao menos localmente uma álgebra de Lie isomórfica a outra álgebra de Lie garante a existência de um isomorfismo entre os grupos de Lie relacionados às respectivas álgebras de Lie, o raciocínio no sentido oposto também é válido.

A última proposição deste capítulo é um importante resultado da teoria das representações de grupos

de Lie, ele estabelece quais tipos de representações unitárias são possíveis para grupos de Lie simples e não compactos, vejamos.

**Proposição:** Seja  $G$  um grupo de Lie conexo, não-compacto, simples e  $\pi$  uma representação unitária  $\pi : G \rightarrow GL(n, V)$ ,  $Im(\pi) \subseteq U(n)$  de  $G$  atuando no espaço de Hilbert (real ou complexo),  $\mathcal{H}$ , de dimensão finita  $n \in \mathbb{N}$ , então  $\pi$  é sempre a representação trivial.

Uma possível demonstração dessa proposição pode ser vista em [Apêndice B]. Um grupo bastante conhecido na física e de suma importância para este texto é o grupo de Lorentz Ortócrono Próprio  $SO(3, 1)^+$  (também conhecido como grupo de Lorentz "restrito"). Este grupo é um grupo de Lie simples, não compacto e portanto não possui representações unitárias de dimensão finita que não sejam a representação trivial, mas possui representações de dimensão finita que não são unitárias.

### 3 NOÇÕES DE PARTÍCULAS

Uma das mais interessantes manifestações da teoria de grupos de Lie e de suas representações surge quando se une a teoria da mecânica quântica com a teoria da relatividade restrita. Esta união se dá, primeiramente, pelo reconhecimento de quais são os grupos responsáveis por representar as simetrias da relatividade restrita, assim como pelo reconhecimento das ferramentas necessárias da mecânica quântica para a implementação dessas simetrias.

Pois bem, um primeiro passo é reconhecer que o espaço vetorial em que se constrói a mecânica quântica é um espaço vetorial complexo,  $\mathbb{H}$ , conhecido por espaço de Hilbert. A seguir vejamos algumas características desse espaço.

#### 3.1 ESPAÇO DE HILBERT

Talvez seja valioso começar a descrição sobre o espaço de Hilbert alertando o leitor de que muitas vezes, na física, ao se mencionar a expressão *espaço de Hilbert* está se fazendo referência, na realidade, ao chamado *espaço pré-Hilbert*.

**Definição 16:** Um espaço pré-Hilbert,  $\mathbb{H}$ , é um espaço vetorial sobre o campo  $\mathbb{C}$  (ou  $\mathbb{R}$ ) dotado de um produto escalar

$$\mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\phi \times \psi \rightarrow (\phi, \psi)$$

de maneira que

$$(\phi, \psi) = (\psi, \phi)^*, \quad (3.1)$$

$$(\phi, \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2) = \alpha_1 (\phi, \psi_1) + \alpha_2 (\phi, \psi_2), \quad (3.2)$$

$$(\alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2, \psi) = \alpha_1^* (\phi_1, \psi) + \alpha_2^* (\phi_2, \psi), \quad (3.3)$$

$$(\phi, \phi) \geq 0, \text{ com } (\phi, \phi) = 0, \text{ se, e somente se, } \phi = 0. \quad (3.4)$$

Como  $\mathbb{H}$  é um espaço pré-Hilbert munido de um produto interno podemos definir uma norma:

$$\|\phi\| = \sqrt{(\phi, \phi)}, \quad (3.5)$$

com essa norma é possível se definir uma distância<sup>1</sup>

$$d(\phi, \psi) = \|\phi - \psi\|. \quad (3.6)$$

<sup>1</sup> Note que  $d$  é o menor valor possível desta norma.

Seja  $\mathbb{H}$  um espaço de pré-Hilbert que possui uma norma induzida pelo seu produto interno. Dizemos que  $\mathbb{H}$  é um *espaço de Hilbert* se ele for *completo* com relação à norma induzida pelo seu produto interno. Neste caso a noção de completude está relacionada à convergência de Cauchy, ou seja, qualquer sequência de Cauchy de vetores de  $\mathbb{H}$  vai ter um limite que pertence a  $\mathbb{H}$ , mais precisamente, segundo o critério de convergência de Cauchy, dado um  $\varepsilon$  para  $\varepsilon > 0$  existe um número  $C$  tal que para  $n, q > C$  temos  $d(\phi_n, \phi_q) < \varepsilon$ . A sequência que converge segundo o critério anterior é conhecida como sequência de Cauchy.

A necessidade da noção de completude acima é sutil, mas bastante importante para a física, uma vez que a mecânica quântica, bem como a TQC (no contexto deste texto) precisam de um espaço de dimensão infinita. No entanto, as operações realizadas em espaços de dimensão finita (principalmente as operações que dependem de certos limites e convergências) não são necessariamente satisfeitas em espaços vetoriais de dimensão infinita como são em espaços de dimensão finita. É sabido que todo espaço vetorial normado de dimensão finita é completo, mas o mesmo não se pode afirmar de espaços vetoriais normados de dimensão infinita. Por isso é importante que o espaço em questão seja, de fato, um espaço de Hilbert, ou seja, um espaço vetorial sobre o campo dos complexos, normado e completo, podendo, então, ser de dimensão infinita. Mais discussões acerca da natureza dos espaços de Hilbert podem ser encontradas em [12], [13] e [14].

Podemos definir funções sobre o espaço de Hilbert de bastante valor para física, os chamados *operadores*. Dada a relação

$$O : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$$

$$\phi \mapsto O\phi.$$

$O$  é chamado de operador e pode ser classificado em algumas categorias importantes, como os operadores lineares

$$O(\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2) = \alpha_1O\phi_1 + \alpha_2O\phi_2 \quad (3.7)$$

e os operadores antilineares

$$O(\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2) = \alpha_1^*O\phi_1 + \alpha_2^*O\phi_2. \quad (3.8)$$

O adjunto de um operador linear e de um operador antilinear é definido, respectivamente, por:

$$(\phi, O^\dagger\psi) = (O\phi, \psi) \quad (3.9)$$

e<sup>2</sup>

$$(\phi, O^\dagger\psi) \equiv (O\phi, \psi)^* = (\psi, O\phi). \quad (3.10)$$

Os operadores conhecidos por *hermitianos* são definidos como

$$O = O^\dagger. \quad (3.11)$$

<sup>2</sup> Como pode ser visto em [15], esta forma é necessária para que não se gere uma contradição na linearidade da forma usual de se definir hermiticidade, como na equação (3.9).

Por fim, temos os chamados operadores unitários

$$(U\phi_1, U\phi_2) = (\phi_1, \phi_2) \quad (3.12)$$

e os antiunitários

$$(U\phi_1, U\phi_2) = (\phi_1, \phi_2)^*, \quad (3.13)$$

com

$$UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}, \text{ ou seja, } U^{-1} = U^\dagger. \quad (3.14)$$

A conexão das ideias desenvolvidas neste capítulo com a mecânica quântica pode ser feita, como em [9], notando que:

**I):** Estados físicos são representados por *raios* no espaço de Hilbert, sendo um raio um conjunto de vetores normalizados, ou seja,  $(\phi, \phi) = 1$ , dizemos que  $\phi$  e  $\phi'$  pertencem ao mesmo raio se  $\phi' = c\phi$  com  $c \in \mathbb{C}$  e  $|c| = 1$ ;

**II):** Em geral, utilizam-se operadores Hermitianos para representar observáveis físicos, uma vez que os autovalores dos operadores Hermitianos são reais;

**III):** Para um observável físico representado pelo operador  $O$ , o estado representado pelo raio  $\mathfrak{R}$  tem um valor definido  $\vartheta$  se os vetores  $\phi$  que pertencem ao raio  $\mathfrak{R}$  são autovetores de  $O$  com autovalores  $\theta$ :

$$O\phi = \vartheta\phi, \quad (3.15)$$

para  $\phi$  em  $\mathfrak{R}$ ; seja um sistema físico descrito por  $\phi$ , dizemos que a probabilidade de que uma medida do observável  $O$  fornecer o valor  $\vartheta$  é

$$P(\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}_1) = |(\phi, \phi_1)|^2, \quad (3.16)$$

para  $\phi$  em  $\mathfrak{R}$  e  $\phi_1$  em  $\mathfrak{R}_1$ .

Assim, definimos as *operações de simetria* (como em [9]) como sendo as transformações globais do espaço de Hilbert que preservam as probabilidades

$$P(\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}_1) = P(\mathfrak{R}' \rightarrow \mathfrak{R}'_1). \quad (3.17)$$

O teorema fundamental sobre o assunto é um teorema provado por Wigner (ver [16]) que afirma: para toda transformação  $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}'$  podemos associar um operador  $U$  no espaço de Hilbert de maneira que se  $\phi$  está em  $\mathfrak{R}$  temos  $U\phi$  em  $\mathfrak{R}'$ , neste caso  $U$  será linear e unitário ou será antilinear e antiunitário; de uma outra maneira podemos dizer que o teorema garante "que toda transformação de simetria pode ser representada no espaço de Hilbert por um operador que será, necessariamente, ou unitário e linear ou antiunitário e antilinear". Uma demonstração desse teorema pode ser encontrada em [15] e [10].

Como apontado em [15], sempre podemos encontrar uma transformação de simetria que seja trivial,

representada pelo operador identidade  $U = \mathbb{I}$ , que é unitário e linear, por isso, em geral<sup>3</sup>, notamos que simetrias que podem ser feitas por mudanças contínuas nos parâmetros a partir da trivial são representadas por operadores unitários e lineares, enquanto simetrias discretas estarão associadas a operadores antiunitários e antilineares. Uma transformação de simetria que infinitesimalmente próxima à identidade pode ser representada por um operador linear e unitário que também é infinitesimalmente próximo à identidade como:

$$U = \mathbb{I} + i\varepsilon T, \quad (3.18)$$

com  $\varepsilon$  sendo real e infinitesimal.  $U$  é unitário e linear, então  $T$  deve ser Hermitiano e linear, isso nos permite colocar  $T$  como um candidato a observável; observáveis físicos como momento angular e momento linear aparecem dessa forma através de transformações de simetrias. A relação anterior nos estimula a buscar representações unitárias de transformações no espaço de Hilbert induzidas por transformações de simetria, é o que faremos na próxima seção.

### 3.2 GRUPO DE POINCARÉ E GRUPO DE LORENTZ (NA MECÂNICA QUÂNTICA)

Temos, até o momento, os elementos para podermos caracterizar o espaço no qual se trabalha a mecânica quântica, assim como temos boas noções de grupos, representações de grupos e boas noções de simetria. Passemos então para a próxima etapa: a aplicação dessas ideias através do estudo do grupo que representa as simetrias da relatividade, juntamente com o grupo das translações, tudo isso no espaço em que se constrói a própria mecânica quântica.

Como exposto em [10] a relatividade restrita pode ser sintetizada em dois postulados:

- *A velocidade de propagação de uma onda eletromagnética no vácuo é independente de qualquer referencial inercial, ou seja, assume um valor constante para qualquer observador;*

- *As leis da física são válidas para qualquer referencial inercial.*

Uma consequência destes postulados é que

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 = (x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 + (z' - z'_0)^2 - c^2(t' - t'_0)^2 = \alpha, \quad (3.19)$$

em que  $\alpha$  é uma constante e as coordenadas “sem linha” indicam os eventos em um referencial inercial da mesma maneira que as coordenadas “com linha” indicam os dois eventos no outro referencial inercial.

A equação (3.19) descreve um intervalo entre dois eventos que deve se manter invariante (segundo os postulados da teoria) e esse intervalo pode ser escrito como  $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ , ou ainda,  $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ , mas como ele é invariante temos  $ds'^2 = \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = ds^2$ . Uma transformação linear de coordenadas  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$  que satisfaça a equação

<sup>3</sup> Talvez a exceção mais famosa (para o caso de estados de uma partícula) seja a paridade, que mesmo sendo uma simetria discreta é associada à uma representação unitária e linear.

anterior (assim como a equação (3.19)) é uma transformação linear da forma

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}, \quad (3.20)$$

com  $a^{\mu}$  uma constante arbitrária e  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  uma matriz constante que satisfaça

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu}. \quad (3.21)$$

A equação [3.21] é conhecida como *condição de Lorentz* e pode ser escrita como

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta, \quad (3.22)$$

em que

$$\eta = (\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Transformações do tipo da equação (3.20) são conhecidas como *transformações de Poincarè*. Duas dessas transformações respeitam uma regra de composição tal como abaixo

$$x'^{\mu} = (\Lambda_1)^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a_1^{\mu} = P(\Lambda_1, a_1) x^{\mu}, \quad (3.24)$$

$$x''^{\mu} = (\Lambda_2)^{\mu}_{\nu} x'^{\nu} + a_2^{\mu} = P(\Lambda_2, a_2) x'^{\mu}. \quad (3.25)$$

Substituindo (3.24) em (3.25) ficamos com

$$x''^{\mu} = (\Lambda_2 \Lambda_1)^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + (\Lambda_2)^{\mu}_{\nu} a_1^{\nu} + a_2^{\mu} = P(\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2) x^{\mu}, \quad (3.26)$$

em que  $P(\Lambda, a) = P(\Lambda_1, a_1) x^{\mu} P(\Lambda_2, a_2) = P(\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$  é uma transformação de Poincarè. Estas mesmas transformações  $P(\Lambda, a)$  formam um grupo chamado *Grupo de Poincarè* ou *Grupo de Lorentz Inomogêneo*. Caso tenhamos  $a^{\mu} = 0$  na equação (3.20) a parte das transformações de Poincarè referente às translações no espaço vai desaparecer e ficaremos apenas com as matrizes  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  responsáveis pelos chamados *boosts* e pelas chamadas *rotações*, com isso o conjunto de todas as matrizes  $\Lambda$ ,  $4 \times 4$ , que satisfazem a condição de Lorentz também formam um grupo, este chamado de *Grupo de Lorentz* ou *Grupo de Lorentz Homogêneo*.

O grupo de Lorentz pode ser dividido em alguns subconjuntos, desde que analisemos o determinante e variemos os índices da equação (3.21). Esses subconjuntos são:

1. O subconjunto das transformações de Lorentz próprias ortócronas, com  $\det \Lambda = 1$  e  $\Lambda^0_0 \geq 1$ , sendo representado pelo símbolo  $L_+^{\uparrow}$ ;

2. O subconjunto das transformações de Lorentz próprias não-ortócronas, com  $\det\Lambda = 1$  e  $\Lambda_0^0 \leq -1$ , sendo representado pelo símbolo  $L_+^\downarrow$ ;

3. O subconjunto das transformações de Lorentz impróprias ortócronas, com  $\det\Lambda = -1$  e  $\Lambda_0^0 \geq 1$ , sendo representado pelo símbolo  $L_-^\uparrow$ ;

4. O subconjunto das transformações de Lorentz impróprias não-ortócronas, com  $\det\Lambda = -1$  e  $\Lambda_0^0 \leq 1$ , sendo representado pelo símbolo  $L_-^\downarrow$ ;

Obviamente dos quatro casos apenas um forma um subgrupo, o caso 1, uma vez que é o único subconjunto que possui o elemento identidade. Mesmo não fornecendo um subgrupo, os outros subconjuntos fornecem outras transformações relevantes como a transformação de inversão espacial (ou paridade),

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

que pertence a  $L_-^\uparrow$ , e a inversão temporal

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

que pertence a  $L_-^\downarrow$ . Podemos escrever qualquer transformação de Lorentz, pertencente a qualquer subconjunto do grupo, através do produto de  $\Lambda \in L_+^\uparrow$  com  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{T}$  ou  $\mathcal{PT}$ . Por exemplo, suponhamos  $A \in L_-^\uparrow$ , sabemos que  $\mathcal{P}\mathcal{P} = \mathcal{P}^2 = \mathbb{I}$ , então  $A = \mathcal{P}^2 A = \mathcal{P}(\mathcal{P}A)$ . Por hipótese  $A_0^0 \geq 1$ , então  $(\mathcal{P}A)_0^0 = 1A_0^0 \geq 1$ . Como  $\det(\mathcal{P}A) = (\det\mathcal{P})(\det A) = (-1)(-1) = +1$  concluímos que  $(\mathcal{P}A) \in L_+^\uparrow$ .

O grupo de Poincaré é um grupo de Lie, portanto podemos estudá-lo através de representações que são induzidas por transformações infinitesimais, mais do que isso, vamos associar as transformações de Poincaré a operadores unitários no espaço de Hilbert de maneira que as representações sejam adequadas. É esperado que os operadores unitários herdem a regra de composição do grupo

$$U(\Lambda_1, a_1)U(\Lambda_2, a_2) = U(\Lambda_3, a_3), \quad (3.29)$$

infinitesimalmente falando

$$U(\Lambda, a) \rightarrow U(1 + \omega, \varepsilon) \simeq \mathbb{I} + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - i\varepsilon_\rho P^\rho. \quad (3.30)$$

Da equação acima podemos identificar os geradores do grupo

$$(J^{\rho\sigma})^\dagger = J^{\rho\sigma}, \quad (P^\rho)^\dagger = P^\rho, \quad J^{\rho\sigma} = -J^{\sigma\rho}, \quad (3.31)$$

e deles extrair informações através do estudo dos parâmetros de transformações que eles geram.

Quando  $\omega_{\rho\sigma} = 0$  e  $\varepsilon_\rho \neq 0$ , percebe-se que teremos  $x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu$ , ou seja, translações em  $\mathcal{R}^{1+3}$ . As translações temporais serão realizadas por  $P^0$  e as translações espaciais geradas por  $P^i$ , naturalmente interpretaremos  $P^0 = H$  como uma *hamiltoniana* e  $P^i$  como o *momento linear* uma vez que são essas as definições destas mesmas grandezas.

Com  $\omega_{0\rho} = 0$  e  $\varepsilon_\rho = 0$  teremos  $x'^0 = x^0$  e  $x'^i = x^i + \omega^i_j x^j$ , já que  $\omega^i_j = -\omega^j_i$ . Transformações como a anterior são transformações de Lorentz que preservam uma forma quadrática tridimensional,  $\sum_i (x'^i)^2 = \sum_i (x^i)^2$  isso nos leva a interpretar os geradores

$$J_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} J^{jk}, \quad (3.32)$$

como os *momentos angulares*.

As transformações restantes serão relacionadas aos boosts, em que  $\omega_{0i} \neq 0$  e todos os outros parâmetros são nulos, estas transformações relacionam o espaço e o tempo  $x'^0 = x^0 + \omega^0_i x^i$  e temos  $x'^i = x^i + \omega^i_0 x^0$ . Os geradores correspondentes são escritos como

$$K_i = J^{i0}. \quad (3.33)$$

Podemos estudar muito de um grupo de Lie pela sua álgebra de Lie associada, mas antes notemos que em uma transformação de simetria  $\phi \rightarrow U\phi$ , o valor esperado de um observável relacionado ao operado  $O$  respeita:

$$(\phi, O\phi) \rightarrow (U\phi, OU\phi) = (\phi, U^\dagger OU\phi) = (\phi, U^{-1}OU\phi), \quad (3.34)$$

consequentemente as propriedades da transformação de simetria podem ser encontradas em valores esperados através de

$$O \rightarrow U^{-1}OU. \quad (3.35)$$

Três propriedades importantes das transformações de similaridade devem ser elencadas: estas transformações preservam as propriedades algébricas, ou seja,  $NQ \rightarrow (U^{-1}NU)(U^{-1}QU) = U^{-1}NQU$ ; caso  $O\phi = \vartheta\phi$  então  $\vartheta$  é preservado por  $U^{-1}\phi$ ; por fim, dado  $U = \mathbb{I} + i\varepsilon T$  o operador  $O$  se transforma por similaridade como:

$$O \rightarrow U^{-1}OU = (\mathbb{I} - i\varepsilon T)O(\mathbb{I} + i\varepsilon T) = O + i\varepsilon OT - i\varepsilon TO + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.36)$$

em que  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  representa termos de segunda ordem, ou seja,

$$O \rightarrow O - i\varepsilon[T, O]. \quad (3.37)$$

O resultado anterior nos diz que uma transformação de simetria em qualquer operador infinitesimal pode ser escrito em função das relações de comutação dos geradores da transformação em questão, portanto este é o vínculo que utilizaremos para encontrar a álgebra de Lie associada ao grupo de Poincarè.

Comecemos com uma conjugação de uma transformação de Poincarè com uma transformação unitária infinitesimal como

$$U(\Lambda, a)U(1 + \omega, \varepsilon)U^{-1}(\Lambda, a) = U(1 + \Lambda\omega\Lambda^{-1}, \Lambda\varepsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a), \quad (3.38)$$

expandindo os termos da igualdade e usando  $(\Lambda^{-1})^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\nu$ , passasse a ter, após organizar os termos, a equação

$$U(\Lambda, a)(\mathbb{I} + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - i\varepsilon_\rho P^\rho)U^{-1}(\Lambda, a) = \mathbb{I} + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(\Lambda_\mu^\rho\Lambda_\nu^\sigma[J^{\mu\nu} + 2a^\nu P^\mu]) - i\varepsilon_\rho\Lambda_\mu^\rho P^\mu. \quad (3.39)$$

Podemos comparar termos proporcionais a  $\omega$  e a  $\varepsilon$  nos dois lados da equação (3.39). Lembrando que  $\omega_{\rho\sigma}\Lambda_\mu^\rho\Lambda_\nu^\sigma a^\nu P^\mu = \frac{1}{4}\omega_{\rho\sigma}(\Lambda_\mu^\rho\Lambda_\nu^\sigma - \Lambda_\nu^\rho\Lambda_\mu^\sigma)(a^\nu P^\mu - a^\mu P^\nu)$  e uma vez que  $\omega$  e  $\varepsilon$  são parâmetros independentes e geradores não dependem dos parâmetros, ficamos então com

$$U(\Lambda, a)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu^\rho\Lambda_\nu^\sigma(J^{\mu\nu} - a^\mu P^\nu + a^\nu P^\mu) \quad (3.40)$$

e

$$U(\Lambda, a)P^\rho U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu^\rho P^\mu. \quad (3.41)$$

Considerando  $\Lambda = 1 + \omega$  como sendo infinitesimalmente próximo a identidade,  $a^\mu = \varepsilon^\mu$ , e substituindo em (3.40) e (3.41)

$$i[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \varepsilon_\mu P^\mu, J^{\rho\sigma}] = \omega_\mu^\rho J^{\mu\sigma} + \omega_\mu^\sigma J^{\rho\mu} - \varepsilon^\rho P^\sigma + \varepsilon^\sigma P^\rho \quad (3.42)$$

e

$$i[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \varepsilon_\mu P^\mu, P^\rho] = \omega_\mu^\rho P^\mu, \quad (3.43)$$

substituindo  $\omega_\mu^\rho J^{\mu\sigma} + \omega_\mu^\sigma J^{\rho\mu} = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(\eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}J^{\rho\mu} - \eta^{\mu\sigma}J^{\rho\nu})$  em (3.42) e (3.43) conseguimos encontrar a álgebra de Lie associada aos geradores do grupo de Poincaré:

$$\begin{aligned} i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= (\eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}J^{\rho\mu} - \eta^{\mu\sigma}J^{\rho\nu}); \\ i[P^\mu, J^{\rho\sigma}] &= \eta^{\mu\rho}P^\sigma - \eta^{\mu\sigma}P^\rho; \\ [P^\mu, P^\nu] &= 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Em uma notação tridimensional, as equações expressas em (3.44) se tornam:

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\varepsilon_{ijk}J_k, & [J_i, K_j] &= i\varepsilon_{ijk}K_k, & [K_i, K_j] &= -i\varepsilon_{ijk}J_k, \\ [P_i, P_j] &= 0, & [J_i, P_j] &= i\varepsilon_{ijk}P_k, & [K_i, P_j] &= iH\delta_{ij}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$[J_i, H] = [P_i, H] = [H, H] = 0, \quad [K_i, H] = iP_i.$$

Vale notar que as quantidades que comutam com a hamiltoniana são constantes de movimento, portanto o mesmo vale para o caso dos geradores acima, por isso as quantidades conhecidas como *estados de uma partícula*,  $\psi_{p,\sigma}$  serão uma base comum de autovetores de certas constantes de movimento

$$P^\mu \psi_{p,\sigma} = p^\mu \psi_{p,\sigma}, \quad (3.46)$$

com  $\sigma$  sendo um rótulo para possíveis casos de degenerescências. Para encontrarmos tais estados e seu significado, primeiramente notemos que uma transformação de Poincarè pode ser escrita como uma transformação de Lorentz seguida de uma translação, uma vez que  $U(\Lambda, 0)U(1, \Lambda^{-1}a) = U(\Lambda, \Lambda\Lambda^{-1}a + 0) = U(\Lambda, a)$  temos

$$U(\Lambda, a) = U(\Lambda, 0)U(1, \Lambda^{-1}a), \quad (3.47)$$

o que nos permite estudar a representação do grupo de Poincarè de maneira separada, primeiramente estudando uma representação para a atuação do operador unitário representando uma translação e posteriormente como um estado de uma partícula reage a um operador unitário que representa uma transformação de Lorentz. Acontece que as translações, neste espaço, estão representadas de maneira direta por

$$\begin{aligned} U(1, a)\psi_{p,\sigma} &= \exp(-ia_\mu P^\mu)\psi_{p,\sigma} = ((\mathbb{I} - ia_\mu P^\mu) + \dots)\psi_{p,\sigma} = \\ &= ((\mathbb{I} - ia_\mu p^\mu) + \dots)\psi_{p,\sigma} = e^{-ia_\mu p^\mu} \psi_{p,\sigma}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

o que nos leva a buscar representações para o caso  $U(\Lambda, 0) \equiv U(\Lambda)$  das transformações de Lorentz; como todo o grupo de Lorentz pode ser montado via uma transformação do ortócrono próprio com  $\mathcal{P}, \mathcal{T}$  ou  $\mathcal{PT}$ , para representarmos o grupo de Poincarè devemos buscar as representações para as simetrias discretas também. Ao começar pelo ortócrono próprio, notamos que

$$P^\mu(U(\Lambda)\psi_{p,\sigma}) = \Lambda^\mu_\nu p^\nu(U(\Lambda)\psi_{p,\sigma}), \quad (3.49)$$

ou seja,  $(U(\Lambda)\psi_{p,\sigma})$  é autovetor de  $P^\mu$  com autovalor  $\Lambda^\mu_\nu p^\nu$ , pois

$$P^\mu(U(\Lambda)\psi_{p,\sigma}) = U(\Lambda)U(\Lambda^{-1})P^\mu U(\Lambda)\psi_{p,\sigma},$$

mas  $UP^\rho U^{-1} = \Lambda_\mu^\rho P^\mu$ , portanto  $P^\rho U^{-1} = \Lambda_\mu^\rho U^{-1} P^\mu$ , com isso, temos

$$P^\rho = \Lambda_\mu^\rho U^{-1} P^\mu U \Rightarrow (\Lambda^{-1})_\rho^k \Lambda_\mu^\rho U^{-1} P^\mu U = (\Lambda^{-1})_\rho^k P^\rho,$$

então com  $U^{-1} P^k U = (\Lambda^{-1})_\rho^k P^\rho$  ou  $U^{-1} P^\mu U = \Lambda_\rho^\mu P^\rho$ , teremos

$$P^\mu(U(\Lambda)\psi_{p,\sigma}) = (U(\Lambda)\Lambda_\rho^\mu P^\rho \psi_{p,\sigma},$$

consequentemente,

$$P^\mu(U(\Lambda)\psi_{p,\sigma}) = \Lambda_\nu^\mu p^\nu (U(\Lambda)\psi_{p,\sigma}).$$

Podemos então escrever

$$U(\Lambda)\psi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p) \psi_{\Lambda p, \sigma'}, \quad (3.50)$$

uma vez que

$$P^\mu U(\Lambda)\psi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p) \Lambda_\nu^\mu p^\nu \psi_{\Lambda p, \sigma'} = \Lambda_\nu^\mu p^\nu (U(\Lambda)\psi_{p,\sigma}). \quad (3.51)$$

Podemos notar que os  $C'$ s não fornecem uma representação do grupo, para vermos isso, realizemos duas transformações sucessivas e notemos que

$$U(\Lambda_1)U(\Lambda_2)\psi_{p,\sigma} = U(\Lambda_1) \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda_2, p) \psi_{\Lambda_2 p, \sigma'} = \sum_{\sigma''\sigma'} C_{\sigma''\sigma'}(\Lambda_1, \Lambda_2 p) C_{\sigma'\sigma}(\Lambda_2, p) \psi_{\Lambda_1 \Lambda_2 p, \sigma''}. \quad (3.52)$$

Para que tenhamos uma representação deveríamos ter  $U(\Lambda_1)U(\Lambda_2) = U(\Lambda_1 \Lambda_2)$ , mas

$$U(\Lambda_1 \Lambda_2)\psi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma''} C_{\sigma''\sigma}(\Lambda_1 \Lambda_2, p) \psi_{\Lambda_1 \Lambda_2 p, \sigma''} \quad (3.53)$$

e concluímos que

$$\sum_{\sigma'} C_{\sigma''\sigma'}(\Lambda_1, \Lambda_2 p) C_{\sigma'\sigma}(\Lambda_2, p) = C_{\sigma''\sigma}(\Lambda_1 \Lambda_2, p), \quad (3.54)$$

o que a equação anterior nos mostra é que a dependência dos  $C'$ s por  $\Lambda_1 \Lambda_2$  viola um requisito básico da necessidade de se ter uma representação, a correspondência biunívoca que respeita a regra de composição do grupo; o máximo que seria possível fazer é encontrar alguma forma de fazer com que as matrizes expressas pelos  $C'$ s fossem bloco diagonal e portanto representações redutíveis, mas procuramos pelos componentes mais básicos da teoria, procuramos por representações irredutíveis. Neste caso uma maneira de resolver o problema é sugerir que  $C'$ s não dependam do momento e aí sim termos  $\sum_{\sigma'} C_{\sigma''\sigma'}(\Lambda_1) C_{\sigma'\sigma}(\Lambda_2) = C_{\sigma''\sigma}(\Lambda_1 \Lambda_2) = C_{\sigma''\sigma}(\Lambda_3)$ , no entanto para que se possa normalizar os estados  $\psi_{p,\sigma}$  de maneira a ser transformado adequadamente por transformações de Lorentz, essa dependência deve se manter.

Sabendo dessas considerações a estratégia escolhida para encontrarmos as representações ade-

quadas será a seguinte: vamos encontrar características importantes do subgrupo de Lorentz  $L_+^\uparrow$  e definir uma nova base para os estados munidos dessas características; esse método foi desenvolvido por Wigner e é conhecido como o método de classificação dos *Grupos de Isotropia*. Pois bem, para que possamos executar o método dos grupos de isotropia devemos primeiro perceber que as transformações pertencentes a  $L_+^\uparrow$  tem como características preservar a norma de um vetor ( $p^\mu p_\mu = p^\mu p_\mu = m^2$ ) e também o sinal da componente zero ( $p^0 > 0$  se  $p^0 > 0$  e  $p^0 < 0$  se  $p^0 < 0$ ). Observamos também que  $U(\Lambda)$  associa  $\psi_{p,\sigma}$  a autovetores de  $P^\mu$  relacionados a  $\Lambda p$ , assim percebemos que o grupo de Lorentz pode ser representado dentro de espaços com  $p^2$  e  $p^0$  fixos. Vetores com a mesma norma podem ser escritos como o efeito de uma transformação de  $L_+^\uparrow$  aplicada a um vetor  $k^\mu$  como

$$p^\mu = L^\mu_\nu(p)k^\nu, \quad (3.55)$$

em que  $p^2 = k^2 = m^2$  e o sinal de  $p^0$  é o mesmo de  $k^0$ .

Dessa forma, ao atuarmos com o operador unitário temos

$$U(L(p))\psi_{k,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(L(p), k)\psi_{p,\sigma'} := \frac{1}{N(p)}\bar{\psi}_{p,\sigma}, \quad (3.56)$$

em que o fator  $N(p)$  é obtido através da normalização<sup>5</sup>; notemos que  $k^\mu = L^\mu_\nu k^\nu \therefore L^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu \Rightarrow N(k) = 1$ .

Sendo assim, a nova base para os estados será definida como  $\bar{\psi}_{p,\sigma} = N(p)U(L(p))\psi_{k,\sigma}$  e o efeito de uma transformação unitária nesse novo estado é dado por

$$U(\Lambda)\bar{\psi}_{p,\sigma} = N(p)U(L(\Lambda p))U(W(\Lambda, p))\psi_{k,\sigma}, \quad (3.57)$$

em que  $W(\Lambda, p) = L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$ . Uma característica notável de  $W$  é  $W(\Lambda, p)k = L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)k = L^{-1}(\Lambda p)\Lambda p = L^{-1}(\Lambda p)L(\Lambda p)k = k$ , portanto  $W(\Lambda, p)k = k$ ;  $W(\Lambda, p)$  é um elemento de  $L_+^\uparrow$ . O conjunto de todos os  $W$ 's que mantêm um vetor  $k$  invariante é um subgrupo de  $L_+^\uparrow$  conhecido como *Grupo de Isotropia*<sup>6</sup> de  $k^\mu$ . A atuação de  $W$  no espaço de Hilbert se dá através de

$$U(W(p))\psi_{k,\sigma} \equiv \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p), k)\psi_{k,\sigma'} \quad (3.58)$$

e neste caso sim, os  $D$ 's podem ser representações já que

$$\begin{aligned} U(W_1)U(W_2)\psi_{k,\sigma} &= U(W_1) \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W_2, k)\psi_{W_2 k, \sigma'} = \\ &= \sum_{\sigma''\sigma'} D_{\sigma''\sigma'}(W_1, W_2 k) D_{\sigma'\sigma}(W_2, k)\psi_{W_1 W_2 k, \sigma''} = \sum_{\sigma''\sigma'} D_{\sigma''\sigma'}(W_1, k) D_{\sigma'\sigma}(W_2, k)\psi_{k, \sigma''}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

<sup>4</sup>  $p_\mu = \eta_{\mu\alpha} L^\alpha_\gamma k^\gamma \therefore p^\mu p_\mu = L^\mu_\nu k^\nu \eta_{\mu\alpha} L^\alpha_\gamma k^\gamma = L^\mu_\nu L^\alpha_\gamma \eta_{\mu\alpha} k^\nu k^\gamma = \eta_{\nu\gamma} k^\nu k^\gamma = k_\mu k^\mu$ .

<sup>5</sup> Ver as referências [15] e [9].

<sup>6</sup> Também chamado de *little group*.

enquanto

$$U(W_1 W_2) \psi_{k,\sigma} = \sum_{\sigma''} D_{\sigma''\sigma}(W_2, k) \psi_{k,\sigma''}, \quad (3.60)$$

levando a

$$\sum_{\sigma'} D_{\sigma''\sigma'}(W_1, k) D_{\sigma'\sigma}(W_2, k) = D_{\sigma''\sigma}(W_1 W_2, k). \quad (3.61)$$

Após a normalização a forma final dos estados sobre a atuação dos operadores será

$$U(\Lambda) \bar{\psi}_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\sigma'\sigma} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p)) \bar{\psi}_{\Lambda p,\sigma'}. \quad (3.62)$$

Como exposto em [15], [17],[9] e [10] para a classificação dos casos dos grupos de isotropia temos que uma transformação nesse grupo se faz infinitesimalmente como

$$W_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} + \alpha_{\nu}^{\mu}. \quad (3.63)$$

Da condição que define  $W$  temos

$$W_{\nu}^{\mu} k^{\nu} = (\delta_{\nu}^{\mu} + \alpha_{\nu}^{\mu}) k^{\nu} = k^{\mu}, \quad (3.64)$$

o que implica  $\alpha_{\nu}^{\mu} k^{\nu} = 0$  ou  $\alpha_{\mu\nu} k^{\nu} = 0$ . Como podemos perceber é claro que determinar  $W$  depende da escolha que é feita para  $k^{\mu}$ .

Os únicos casos são:

**1. Caso:**  $k^{\mu} = (\pm m, 0, 0, 0)$ ,  $k^2 = m^2$ . Neste caso temos momento do tipo tempo, associado a energias positivas ou negativas, a depender do sinal da componente zero. As condições de vínculos estabelecidas para esse caso após análise das equações (3.63) e (3.64) são  $\alpha_{0\nu} k^{\nu} = 0$  que é a identidade e  $\alpha_{10} = \alpha_{20} = \alpha_{30} = 0$ .

Para esse caso teremos uma transformação do grupo de isotropia parametrizada por  $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}$  como  $U(W) = \mathbf{1} + \frac{i}{2} \alpha_{ij} J^{ij}$ .

Lembrando que  $J_1 = J^{23}$ ,  $J_2 = J^{31}$  e  $J_3 = J^{12}$  e que  $[J_i, J_j] = i \varepsilon_{ijk} J_k$ , temos, após definir  $\theta^1 = \alpha_{23}$ ,  $\theta^2 = \alpha_{31}$  e  $\theta^3 = \alpha_{12}$ ,  $U(W) = \mathbf{1} + \frac{i}{2} \theta_{ij} J_i$ . O vetor escolhido se mantém invariante pelo grupo  $SO(3)$ , e a representação para esse grupo de isotropia é dada por:

$$D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(W(\Lambda, p)) = [\exp(i\boldsymbol{\theta}(\Lambda, p) \cdot \mathbf{J})]_{\sigma'\sigma}. \quad (3.65)$$

Vemos que a álgebra de Lie associada a este grupo de isotropia é a mesma que a álgebra de Lie associada ao  $SO(3)$ , estamos no referencial de repouso da partícula, então a maneira mais natural de se interpretar o  $\sigma$  é como uma projeção de um momento angular intrínseco, conhecido como *spin*. Portanto pode-se dizer que o estado  $\bar{\psi}_{p,\sigma}$  representa a situação física na qual estamos tratando de uma partícula com momento  $p^{\mu}$ , massa  $p^{\mu} p_{\mu} = m^2$ , spin  $j$  e projeção de spin  $\sigma$ .

Vamos aproveitar este momento para falarmos sobre uma classe de operadores que comutam com todos os elementos do grupo, os operadores de Casimir. No grupo de Poincaré podemos construir dois importantes operadores de Casimir, um deles é dado pelo quadrado do momento, ou seja,  $P^\mu P_\mu = P^2$  e o outro é dado por  $W^\mu W_\mu = W^2$  com  $W_\mu$  sendo o *vetor de Pauli-Lubanski*, definido como  $W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^\sigma$ . Neste caso os dois Casimir são construídos com os geradores do grupo de Poincaré  $P$  e  $J$ , esses dois operadores de Casimir ajudarão a rotular<sup>7</sup> a partícula em questão. Como escolhemos um referencial adequado, o de repouso, o autovalor associado a  $P^2 = m^2$  é a massa da partícula e no caso de  $W^2 = -m^2 J^2$  o autovalor associado a  $J^2$  é o spin da partícula.

**2. Caso:**  $k^\mu = (\pm\kappa, 0, 0, \kappa)$ ,  $k^2 = 0$ . São os momentos tipo luz, também associados a energias positivas e negativas como no caso anterior. O grupo de isotropia encontrado é o *grupo euclidiano* em duas dimensões, ou também  $ISO(2)$ . A forma da representação desse grupo de isotropia é dada por

$$D_{\sigma'\sigma}(W) = exp(i\sigma\theta)\delta_{\sigma'\sigma}. \quad (3.66)$$

É possível associar o vetor escolhido com uma partícula de massa zero, em que se define os autovalores relacionados ao operador

$$J_{\hat{p}} = \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{P}} = \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{P}|}, \quad (3.67)$$

como sendo a *helicidade*. Este operador é obtido no processo de se encontrar os geradores do grupo de isotropia, desde que o vetor escolhido tenha momento na direção  $\hat{p}$ , do contrário,  $J_{\hat{p}}$  se torna apenas  $J_3$ .

**3. Caso:**  $k^\mu = (0, 0, 0, 0)$ ,  $k^2 = 0$ . Todo o grupo de Lorentz ( $SO(3, 1)$ ) mantém esse grupo invariante. Como esse grupo é não compacto, devemos tomar uma solução trivial para podermos ter uma representação unitária com dimensão finita, com isso a representação escolhida é a representação trivial do grupo de Lorentz

$$U(\Lambda)\psi_0 = \psi_0. \quad (3.68)$$

Esta situação está associada a não termos nenhuma partícula presente, e usualmente é chamada de *vácuo*. É considerado invariante de Lorentz e tomado como sendo normalizado  $(\psi_0, \psi_0) = 1$ .

**4. Caso:**  $k^\mu = (0, 0, 0, m)$ ,  $k^2 = -m^2$ . Neste caso temos rotações em torno do eixo  $\hat{z}$ , *boosts* nas direções  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ , que define  $SO(2, 1)$ , partículas descritas com essas características são conhecidas como *táquions*.

<sup>7</sup> Este fato é garantido pelo Lema de Schur e seus respectivos corolários; como o operador de Casimir comuta com qualquer representação dos geradores da álgebra do grupo, ele deve ser um múltiplo da identidade, ou seja, os "valores" dos Casimir podem ser utilizados para rotular as representações do grupo. Mais do que isso, para o caso das representações unitárias, é garantido que os autovalores associados aos Casimir serão reais. A demonstração deste Lema e de seus corolários pode ser vista no apêndice A.

Um fato importante, sobre os casos do grupo de isotrofia, dá-se justamente pela proposição demonstrada no apêndice B, sobre as representações de grupos de Lie não-compactos. Para o primeiro caso, como  $SO(3)$  é um grupo de Lie compacto, é possível termos representações unitárias de dimensão finita que não sejam as triviais, mas para o segundo caso, como  $ISO(2)$  é um grupo de Lie não-compacto, suas representações unitárias não triviais devem ter dimensão infinita. Esse problema é contornado ao se tomar as representações unitárias de dimensão finita desse grupo, que serão as representações unitárias triviais.

Para finalizar a descrição do grupo de Poincarè vejamos algumas informações sobre as simetrias de paridade e de reversão temporal.

Em relação a quadrivetores do tipo  $x^\mu$ , as transformações de paridade e reversão temporal são descritas, respectivamente, por:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.69)$$

e

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.70)$$

Note que  $\mathcal{P}^2 = \mathcal{T}^2 = 1$ . Os operadores  $P = U(\mathcal{P})$  e  $T = U(\mathcal{T})$  que representam, respectivamente,  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{T}$  devem satisfazer:

$$\begin{aligned} PU(\Lambda, a)P^{-1} &= U(\mathcal{P}\Lambda\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}a), \\ TU(\Lambda, a)T^{-1} &= U(\mathcal{T}\Lambda\mathcal{T}^{-1}, \mathcal{T}a). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Supondo  $\Lambda$  e  $a$  infinitesimais, para o caso de  $\mathcal{P}$ , temos

$$PU(1 + \omega, \varepsilon)P^{-1} = U(\mathcal{P}(1 + \omega)\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}\varepsilon) = U(1 + \mathcal{P}\omega\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}\varepsilon) \quad (3.72)$$

e trabalhando a equação (3.72) chegamos a

$$\begin{aligned} PU(1 + \omega, \varepsilon)P^{-1} &= P \left\{ 1 + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - i\varepsilon_\rho P^\rho \right\} P^{-1} = \\ &= 1 + \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}P(iJ^{\rho\sigma})P^{-1} - \varepsilon_\rho P(iP^\rho)P^{-1}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Da (3.72) temos

$$U(1 + \mathcal{P}\omega\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}\varepsilon) = 1 + \frac{i}{2}(\mathcal{P}\omega\mathcal{P}^{-1})_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i(\mathcal{P}\varepsilon)_\mu P^\mu, \quad (3.74)$$

mas

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}\varepsilon)_\mu &= (\mathcal{P}\varepsilon)_\mu^\rho \varepsilon_\rho, \\ (\mathcal{P}\omega\mathcal{P}^{-1})_{\mu\nu} &= (\mathcal{P}\varepsilon)_\mu^\rho \omega_{\rho\sigma} (\mathcal{P}\varepsilon^{-1})^\sigma_\nu = (\mathcal{P}\varepsilon)_\mu^\rho (\mathcal{P}\varepsilon)_\nu^\sigma \omega_{\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

portanto

$$U(1 + \mathcal{P}\omega\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}\varepsilon) = 1 + \frac{i}{2} (\mathcal{P}\varepsilon)_\mu^\rho (\mathcal{P}\varepsilon)_\nu^\sigma \omega_{\rho\sigma} J^{\mu\nu} - i (\mathcal{P}\varepsilon)_\mu^\rho \varepsilon_\rho P^\mu. \quad (3.76)$$

Comparando os coeficientes encontramos:

$$\begin{aligned} P(iJ^{\rho\sigma})P^{-1} &= iP_\mu^\rho P_\nu^\sigma J^{\mu\nu}, \\ P(iP^\rho)P^{-1} &= iP_\mu^\rho P^\mu, \end{aligned} \quad (3.77)$$

o mesmo processo vale para o caso  $\mathcal{T}$  de modo que

$$\begin{aligned} T(iJ^{\rho\sigma})T^{-1} &= iT_\mu^\rho T_\nu^\sigma J^{\mu\nu}, \\ T(iP^\rho)T^{-1} &= iT_\mu^\rho P^\mu. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Ao olharmos para a componente zero do momento percebemos que

$$P(iP^0)P^{-1} = iP_\mu^0 P^\mu = iP^0 \quad (3.79)$$

ou seja,

$$P(iH)P^{-1} = iH, \quad (3.80)$$

caso  $P$  fosse anti-unitário, teríamos  $PH = -HP$  e conseqüentemente, ao atuarmos em um auto-estado  $\psi$  de  $H$  com energia  $E$ , ficaríamos com

$$H(P\psi) = -iPH\psi = -E(P\psi). \quad (3.81)$$

O estado  $P\psi$  seria um autoestado de  $H$  com energia negativa, o que implicaria em não ter um limite inferior que por sua vez implicaria na impossibilidade de definição de um estado de vácuo. Como a existência de um estado de menor energia é essencial para um sistema físico ser estável podemos aceitar, por este raciocínio, que a representação de  $P$  deve ser linear e conseqüentemente unitária. Caso façamos um raciocínio semelhante para  $T$  veremos que

$$T(iH)T^{-1} = -iH, \quad (3.82)$$

o que implica a necessidade da representação de  $T$  ser antilinear e conseqüentemente antiunitária. Com isso podemos estabelecer que a álgebra satisfeita por  $P$  e  $T$  é

$$\begin{aligned} PJP^{-1} &= \mathbf{J}, \quad PKP^{-1} = -\mathbf{K}, \quad PPP^{-1} = -\mathbf{P}, \quad PHP^{-1} = H; \\ TJT^{-1} &= -\mathbf{J}, \quad TKT^{-1} = \mathbf{K}, \quad TPT^{-1} = -\mathbf{P}, \quad THT^{-1} = H. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Vejam como essas transformações se comportam atuando em estados de uma partícula; é importante ressaltar que essa atuação é dividida em dois casos, para quando a massa é diferente de zero e para quando a massa é igual a zero. Como para o nosso texto estamos interessados apenas no caso em que a massa é diferente de zero este será o único caso desenvolvido aqui (para informações a respeito do caso em que a massa é nula ver [15]).

Começemos a análise observando que  $P$  comuta com  $H$  e  $J_3$ , mas anticomuta com  $\mathbf{P}$ . Sendo assim, assumindo que não haja degenerescências, os estados  $\psi_{k,\sigma}$  são autoestados simultâneos de  $P$ ,  $H$ ,  $J_3$  e  $\mathbf{P}$  e

$$P\psi_{k,\sigma} = \eta_\sigma\psi_{k,\sigma}. \quad (3.84)$$

Precisamos saber se a fase  $\eta_\sigma$  depende de  $\sigma$ . Ora vejamos que atuando com  $J_\pm = J_1 \pm iJ_2$  sobre  $\psi_{k,\sigma}$ ,

$$(J_1 \pm iJ_2)\psi_{k,\sigma} = \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}\psi_{k,\sigma \pm 1}.$$

Com  $[P, \mathbf{J}] = 0$ , temos

$$\begin{aligned} (J_1 \pm iJ_2)P\psi_{k,\sigma} &= P(J_1 \pm iJ_2)\psi_{k,\sigma} \\ \Rightarrow \eta_\sigma(J_1 \pm iJ_2)\psi_{k,\sigma} &= \eta_{\sigma \pm 1}\sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}\psi_{k,\sigma \pm 1} \end{aligned}$$

e

$$\eta_\sigma\sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}\psi_{k,\sigma \pm 1} = \eta_{\sigma \pm 1}\sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}\psi_{k,\sigma \pm 1}$$

$$\Rightarrow \eta_\sigma = \eta_{\sigma \pm 1} = \eta,$$

concluindo que a fase<sup>8</sup>  $\eta$  é independente de  $\sigma$ . Vejamos como  $P$  atua sobre um estado com um momento genérico. Para tanto, notemos que utilizando a equação para  $P$  de (3.71) (com  $\Lambda = L(p)$  e  $a = 0$ ) e multiplicando pela direta com  $P$  teremos  $PU(L(p))P^{-1}P = U(\mathcal{P}L(p)\mathcal{P}^{-1})P = U(\mathcal{P}L(p)\mathcal{P}^{-1}\mathcal{P})$ , então

$$\begin{aligned} P\psi_{p,\sigma} &= \sqrt{\frac{m}{p^0}}P(U(L(p))\psi_{k,\sigma}) \\ &= \sqrt{\frac{m}{p^0}}U(\mathcal{P}L(p)\mathcal{P}^{-1}\mathcal{P})\psi_{k,\sigma} \\ &= \sqrt{\frac{m}{p^0}}U(\mathcal{P}L(p)\mathcal{P}^{-1})P\psi_{k,\sigma} \\ &= \eta\sqrt{\frac{m}{p^0}}U(\mathcal{P}L(p)\mathcal{P}^{-1})\psi_{k,\sigma}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Como  $\mathcal{P}L(p)\mathcal{P}^{-1}k = \mathcal{P}L(p)k = \mathcal{P}p = L(\mathcal{P}p)k$ , ficamos com

$$P\psi_{p,\sigma} = \eta\sqrt{\frac{m}{p^0}}U(L(\mathcal{P}p))\psi_{k,\sigma} = \eta\psi_{\mathcal{P}p,\sigma}. \quad (3.86)$$

<sup>8</sup> Esta fase é conhecida como *paridade intrínseca*.

Para o caso de  $T$  temos que comuta com  $H$  e anticomuta com  $J_3$  e  $\mathbf{P}$ , mas os autovalores de  $\mathbf{P}$  são nulos quando o estado em questão é  $\psi_{k,\sigma}$ , então

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T\psi_{k,\sigma}) &= -T\mathbf{P}\psi_{k,\sigma} = 0 \\ H(T\psi_{k,\sigma}) &= m(T\psi_{k,\sigma}) \\ J_3(T\psi_{k,\sigma}) &= -\sigma(T\psi_{k,\sigma}), \end{aligned} \quad (3.87)$$

portanto

$$T\psi_{k,\sigma} = \zeta_\sigma \psi_{k,-\sigma}. \quad (3.88)$$

Procendo da mesma maneira que no caso anterior

$$\begin{aligned} T(J_1 \pm iJ_2)\psi_{k,\sigma} &= (-J_1 \pm iJ_2)T\psi_{k,\sigma} \\ \Rightarrow \zeta_{\sigma\pm 1} \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}\psi_{k,-\sigma\mp 1} &= -\zeta_\sigma (J_1 \mp iJ_2)\psi_{k,-\sigma} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (J_1 \mp iJ_2)\psi_{k,-\sigma} &= \sqrt{(j \pm (-\sigma))(j \mp (-\sigma) + 1)}\psi_{k,-\sigma\mp 1} \\ &= \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}\psi_{k,-\sigma\mp 1}, \end{aligned}$$

implicando  $\zeta_{\sigma\pm 1} = -\zeta_\sigma$ . A solução para a equação anterior em  $\zeta$  pode ser escrita como  $\zeta_\sigma = \zeta(-1)^{j-\sigma}$  e por fim

$$T\psi_{k,\sigma} = \zeta(-1)^{j-\sigma}\psi_{k,-\sigma}. \quad (3.89)$$

Notemos que  $\zeta$ , diferentemente de  $\eta$ , pode ser eliminada, desde que façamos

$$\psi_{k,\sigma} \rightarrow \psi'_{k,\sigma} = \zeta^{1/2}\psi_{k,\sigma} \quad (3.90)$$

e

$$T\psi'_{k,\sigma} = T\zeta^{1/2}\psi_{k,\sigma} = (\zeta^*)^{1/2}T\psi_{k,\sigma} = (\zeta^*)^{1/2}\zeta(-1)^{j-\sigma}\psi_{k,-\sigma} = (-1)^{j-\sigma}\psi'_{k,-\sigma}. \quad (3.91)$$

Finalmente, como no caso da paridade, para sabermos o comportamento de  $T$  em relação a um momento arbitrário basta que apliquemos um boost como feito anteriormente e o resultado será

$$T\psi_{p,\sigma} = (-1)^{j-\sigma} \sqrt{\frac{m}{p^0}} U(L(\mathcal{P}p)) \psi'_{k,-\sigma} = (-1)^{j-\sigma} \psi_{\mathcal{P}p,-\sigma}. \quad (3.92)$$

## 4 NOÇÕES DE CAMPOS

Neste capítulo pretendemos desenvolver uma noção do que é um campo quântico livre. Para tanto, o formalismo utilizado será o desenvolvido pelo Weinberg em [18], [19], [20] e bastante trabalhado pelo próprio Weinberg em [15]. No entanto, devemos ressaltar que, como bem apresentado em [18], parece existir uma certa intenção em atribuir um protagonismo para a matriz  $S$ , o que faz todo sentido uma vez que a física que modela os fenômenos da realidade, em sua maioria, baseia-se em interações entre os campos e não em campos livres, mas neste texto a ideia é focarmos nos campos quânticos livres, portanto tentaremos inverter o protagonismo dado para a matriz  $S$  e a descrição de teorias de perturbações. Com isso, apenas o necessário com relação a matriz  $S$  e a teoria de perturbação serão apresentados, mais especificamente, construiremos nossa noção de campo baseada em três condições expostas em [18]:

**1. Teoria de perturbação:** Que a matriz  $S$  possa ser escrita pela *série de Dyson*  $S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \cdots d^4x_n T[\mathcal{H}(x_1) \cdots \mathcal{H}(x_n)]$ , em que a hamiltoniana  $H$  será composta de uma parte correspondente à partícula livre,  $H_0$ , e uma parte relacionada à interação,  $V(t)$ , de maneira que  $V(t) \equiv \exp(iH_0t)V\exp(-iH_0t)$ ;

**2. Invariância de Lorentz da matriz  $S$ :** Neste caso para que a matriz  $S$  seja invariante de Lorentz devemos ter  $V(t) = \int d^3\mathcal{H}(x, t)$ , em que a densidade hamiltoniana deve se transformar como  $U(\Lambda, a)\mathcal{H}(x)U^{-1}(\Lambda, a) = \mathcal{H}(\Lambda x + a)$  e para separações do tipo espaço ( $(x - y) < 0$ )  $[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)] = 0$ ;

**3. Interpretação de partícula:** A densidade de interação,  $\mathcal{H}(x)$ , deve ser construída a partir de operadores de criação e aniquilação associados às partículas livres descritas por  $H_0$ .

### 4.1 MATRIZ S E A SÉRIE DE DYSON

Começemos por definir a matriz  $S$ , mas para tanto suponhamos que uma situação de interação seja descrita por  $H = H_0 + V$  e suponhamos também que os estados considerados nesse cenário sejam autoestados da hamiltoniana completa  $H\Psi_{\alpha}^{\pm} = E_{\alpha}\Psi_{\alpha}^{\pm}$  e  $E_{\alpha}$  também esteja associada com  $\Phi_{\alpha}$ <sup>1</sup>. Então um estado físico será construído através da superposição de autoestados desta mesma hamiltoniana completa como

$$\Psi_g^{\pm} = \int d\alpha g(\alpha)\Psi_{\alpha}^{\pm}, \quad (4.1)$$

ou da hamiltoniana livre como

$$\Phi_g = \int d\alpha g(\alpha)\Phi_{\alpha}, \quad (4.2)$$

<sup>1</sup> Em que  $\Phi_{\alpha}$  é um estado base genérico do espaço de Hilbert formado pela soma direta do espaço dos produtos tensoriais de vários outros espaços de Hilbert que acomodam diferentes tipos de partículas de maneira que  $H_0\Phi_{\alpha} = E_{\alpha}\Phi_{\alpha}$  para  $E_{\alpha} = \sum_{i=1}^k p_i^0$ .

em que  $g(\alpha)$  é uma função dos quadrimomentos das partículas presentes no estado  $\Phi_\alpha$ . Pela descrição de Schrödinger, a evolução desses estados no tempo será

$$\Psi_g^\pm(t) = \int d\alpha e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) \Psi_\alpha^\pm \quad (4.3)$$

e

$$\Phi_g(t) = \int d\alpha e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) \Phi_\alpha. \quad (4.4)$$

As condições de contorno satisfeitas para  $\Psi_\alpha^\pm$ , neste caso, podem ser definidas de maneira que  $\Psi_g^+(t)$  represente uma situação na qual as partículas estejam livres e caracterizadas por  $\Phi_g(t)$ , mas em um tempo muito anterior à interação, ou seja,

$$\Psi_g^+(t) \rightarrow \Phi_g(t), \quad (4.5)$$

para  $t \rightarrow -\infty$ . Analogamente, sobre  $\Psi_g^-(t)$ , requeremos que tudo se passe livremente, mas num tempo muito posterior à interação

$$\Psi_g^-(t) \rightarrow \Phi_g(t), \quad (4.6)$$

para  $t \rightarrow +\infty$ . A energia  $E_\alpha$  se conserva no processo, uma vez que os estados  $\Psi_\alpha^\pm$  estão associados à mesma energia que os estados  $\Phi_\alpha$ . Os estados  $\Psi_\alpha^+$  são chamados de *estados in* e os estados  $\Psi_\alpha^-$  são chamados de *estados out*.

Podemos definir um operador que seja unitário e linear que relaciona  $\Psi_\alpha^\pm$  e  $\Phi_\alpha$  dadas as relações entre  $\Psi_g^\pm$  e  $\Phi_g$  notando que

$$\begin{aligned} \Psi_g^\pm(t) &= e^{-iHt} \Psi_g^\pm, \\ \Phi_g(t) &= e^{-iH_0 t} \Phi_g. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Assim as equações (4.5) e (4.6) nos levam a

$$\begin{aligned} e^{iHt} \Psi_g^+(t) &= \Psi_g^\pm, \\ &(t \rightarrow \mp\infty) \\ e^{iHt} \Phi_g(t) &= e^{iHt} e^{-iH_0 t} \Phi_g. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Com isso podemos definir o operador unitário

$$\Omega(t) = e^{iHt} e^{-iH_0 t}, \quad (4.9)$$

e como  $\Psi_g^\pm$  e  $\Phi_g$  não dependem do tempo temos

$$\Psi_g^\pm = \Omega(\mp\infty) \Phi_g. \quad (4.10)$$

Como a relação anterior vale para qualquer  $g(\alpha)$  ficamos com

$$\Psi_\alpha^\pm = \Omega(\mp\infty) \Phi_\alpha. \quad (4.11)$$

Notemos, a partir da equação (4.10), que os estados *in* e os estados *out* possuem o mesmo produto interno que os estados associados às partículas livres, pois

$$(\Psi_{\beta}^{\pm}, \Psi_{\alpha}^{\pm}) = (\Omega(\mp\infty)\Phi_{\beta}, \Omega(\mp\infty)\Phi_{\alpha}) = (\Phi_{\beta}, \Phi_{\alpha}). \quad (4.12)$$

Também devemos ressaltar o fato de que tanto  $\beta$  quanto  $\alpha$  são multi-índices, eles representam as características das várias partículas descritas pelos estados respectivos. Com isso, ao escrevermos explicitamente as características das partículas associadas aos estados, teremos o seguinte produto interno:

$$\begin{aligned} & (\Phi_{p_{1\beta}\sigma_{1\beta}n_{1\beta}; p_{2\beta}\sigma_{2\beta}n_{2\beta}; \dots p_{k\beta}\sigma_{k\beta}n_{k\beta}}, \Phi_{p_{1\alpha}\sigma_{1\alpha}n_{1\alpha}; p_{2\alpha}\sigma_{2\alpha}n_{2\alpha}; \dots p_{k\alpha}\sigma_{k\alpha}n_{k\alpha}}) = \\ & = \delta^{(3)}(p_{1\beta} - p_{1\alpha})\delta_{\sigma_{1\beta}\sigma_{1\alpha}}\delta_{n_{1\beta}n_{1\alpha}}\delta^{(3)}(p_{2\beta} - p_{2\alpha})\delta_{\sigma_{2\beta}\sigma_{2\alpha}}\delta_{n_{2\beta}n_{2\alpha}} \dots \delta^{(3)}(p_{k\beta} - p_{k\alpha})\delta_{\sigma_{k\beta}\sigma_{k\alpha}}\delta_{n_{k\beta}n_{k\alpha}}. \end{aligned}$$

Com uma notação mais compacta a equação anterior se torna

$$(\Phi_{\beta}, \Phi_{\alpha}) = \delta(\beta - \alpha) \quad (4.13)$$

com

$$\beta \rightarrow p_{1\beta}, \sigma_{1\beta}, n_{1\beta}; p_{2\beta}, \sigma_{2\beta}, n_{2\beta}; \dots p_{k\beta}, \sigma_{k\beta}, n_{k\beta}$$

$$\alpha \rightarrow p_{1\alpha}, \sigma_{1\alpha}, n_{1\alpha}; p_{2\alpha}, \sigma_{2\alpha}, n_{2\alpha}; \dots p_{k\alpha}, \sigma_{k\alpha}, n_{k\alpha}$$

e  $\delta(\beta - \alpha)$  representando

$$\delta^{(3)}(p_{1\beta} - p_{1\alpha})\delta_{\sigma_{1\beta}\sigma_{1\alpha}}\delta_{n_{1\beta}n_{1\alpha}}\delta^{(3)}(p_{2\beta} - p_{2\alpha})\delta_{\sigma_{2\beta}\sigma_{2\alpha}}\delta_{n_{2\beta}n_{2\alpha}} \dots \delta^{(3)}(p_{k\beta} - p_{k\alpha})\delta_{\sigma_{k\beta}\sigma_{k\alpha}}\delta_{n_{k\beta}n_{k\alpha}}.$$

Aplicando a equação (4.13) em (4.12) encontramos

$$(\Psi_{\beta}^{\pm}, \Psi_{\alpha}^{\pm}) = (\Phi_{\beta}, \Phi_{\alpha}) = \delta(\beta - \alpha). \quad (4.14)$$

Podemos definir a *matriz S* como sendo a matriz que codifica a dinâmica de interação, (como em [15] e [9]) ela é a amplitude de probabilidade de transição de um estado livre caracterizado por  $\alpha$  (em  $t \rightarrow -\infty$ ) e outro estado livre caracterizado por  $\beta$  (em  $t \rightarrow +\infty$ ) após a interação. Essa matriz é dada pelo produto escalar:

$$S_{\beta\alpha} = (\Psi_{\beta}^{-}, \Psi_{\alpha}^{+}), \quad (4.15)$$

e aparece explicitamente se considerarmos o limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\Psi_{g_2}^{-}(t), \Psi_{g_1}^{+}(t)) = \int d\alpha d\beta g_2^*(\beta) g_1(\alpha) e^{-i(E_{\alpha} - E_{\beta})t} (\Psi_{\beta}^{-}, \Psi_{\alpha}^{+}) \quad (4.16)$$

que descreve (como em [9]) a amplitude de probabilidade de que um pacote de ondas  $g_1$  centrado em uma configuração  $\alpha$  de partículas livres (em  $t \rightarrow -\infty$ ) evolua para outro  $g_2$  centrado em outra configuração de partículas livres  $\beta$  (em  $t \rightarrow +\infty$ ). Caso não haja interação teremos  $S_{\beta\alpha} = (\Psi_{\beta}^{-}, \Psi_{\alpha}^{+})$ .

Podemos montar um operador  $S$  que se associa à matriz  $S$  através de

$$S\Phi_\alpha = \int d\beta S_{\beta\alpha}\Phi_\beta,$$

$$\Rightarrow (\Phi_\beta, S\Phi_\alpha) = S_{\beta\alpha},$$

com  $S^\dagger = S^{-1}$  e podemos ter

$$S_{\beta\alpha} = (\Psi_\beta^- \Psi_\alpha^+) = (\Omega(\infty)\Phi_\beta, \Omega(-\infty)\Phi_\alpha) = (\Phi_\beta \Omega^\dagger(\infty), \Omega(-\infty)\Phi_\alpha),$$

$$\Rightarrow S = \Omega^\dagger(\infty)\Omega(-\infty) \equiv U(\infty, -\infty),$$
(4.17)

em que

$$U(t, t_0) = \Omega^\dagger(t)\Omega(t_0) = \exp(iH_0 t) \exp(-iH(t-t_0)) \exp(-iH_0 t_0). \quad (4.18)$$

Com o desenvolvido anteriormente podemos procurar uma maneira de encontrar a série de Dyson. Primeiro tomemos a equação  $U(\tau, \tau_0) = e^{iH_0\tau} e^{-iH(\tau-\tau_0)} e^{-iH_0\tau_0}$ . Derivando esta equação em relação a  $\tau$  ficamos com

$$i \frac{d}{d\tau} U(\tau, \tau_0) = (i \frac{d}{d\tau} e^{(iH_0\tau)}) e^{(-iH(\tau-\tau_0))} e^{(-iH_0\tau_0)} + e^{(iH_0\tau)} (i \frac{d}{d\tau} e^{(-iH(\tau-\tau_0))}) e^{(-iH_0\tau_0)}$$

$$= e^{(iH_0\tau)(H-H_0)} e^{(-iH(\tau-\tau_0))} e^{(-iH_0\tau_0)} = e^{(iH_0\tau)} V e^{(-iH_0\tau)} U(\tau, \tau_0) = V(\tau) U(\tau, \tau_0),$$
(4.19)

em que  $V(\tau) = e^{iH_0\tau} V e^{-iH_0\tau}$ . Vamos tentar encontrar uma solução para ela; assumindo a condição inicial  $U(\tau_0, \tau_0) = 1$  temos como solução

$$U(\tau, \tau_0) = 1 - i \int_{\tau_0}^{\tau} dt V(t) U(t, \tau_0), \quad (4.20)$$

por ser uma equação iterativa, podemos performar várias substituições de  $U(\tau, \tau_0)$  de maneira a se obter termos de ordem superiores e com isso ficar com

$$U(\tau, \tau_0) = 1 - i \int_{\tau_0}^{\tau} dt V(t) + (-i)^2 \int_{\tau_0}^{\tau} dt_1 \int_{\tau_0}^{t_1} dt_2 V(t_1) V(t_2) +$$

$$+ (-i)^3 \int_{\tau_0}^{\tau} dt_1 \int_{\tau_0}^{t_1} dt_2 \int_{\tau_0}^{t_2} dt_3 V(t_1) V(t_2) V(t_3) + \dots$$
(4.21)

Ao tomarmos os limites  $\tau \rightarrow \infty$  e  $\tau_0 \rightarrow -\infty$  conseguimos

$$U(\infty, -\infty) = S = 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} dt V(t) + (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 V(t_1) V(t_2) +$$

$$+ (-i)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_3 V(t_1) V(t_2) V(t_3) + \dots$$
(4.22)

Ainda que a equação acima já seja uma expressão para a matriz  $S$  temos dependências temporais nos limites de integração, o que pode acarretar problemas ao se avaliar invariância por certas transformações; para que essas dependências sumam, o truque é escrevermos produtos temporalmente ordenados para que possamos calcular integrais adequadas e fazermos as substituições na equação (4.22). Começemos

escrevendo as relações para os produtos temporalmente ordenados:

$$T(V(t)) = V(t),$$

$$T(V(t_1)V(t_2)) = \theta(t_1 - t_2)V(t_1)V(t_2) + \theta(t_2 - t_1)V(t_2)V(t_1),$$

$$\begin{aligned} T(V(t_1)V(t_2)V(t_3)) &= \theta(t_1 - t_2)\theta(t_2 - t_3)\theta(t_1 - t_3)V(t_1)V(t_2)V(t_3) + \\ &+ \theta(t_1 - t_2)\theta(t_1 - t_3)\theta(t_3 - t_2)V(t_1)V(t_3)V(t_2) + \\ &+ \theta(t_2 - t_1)\theta(t_2 - t_3)\theta(t_1 - t_3)V(t_2)V(t_1)V(t_3) + \\ &+ \theta(t_2 - t_1)\theta(t_2 - t_3)\theta(t_3 - t_1)V(t_2)V(t_3)V(t_1) + \\ &+ \theta(t_3 - t_1)\theta(t_3 - t_2)\theta(t_1 - t_2)V(t_3)V(t_1)V(t_2) + \\ &+ \theta(t_3 - t_1)\theta(t_3 - t_2)\theta(t_2 - t_1)V(t_3)V(t_2)V(t_1), \end{aligned}$$

e assim por diante. Para que possamos fazer as substituições adequadas, devemos, de alguma maneira, encontrar integrais que sejam propícias para as respectivas trocas com seus termos equivalentes. Vejamos um exemplo: queremos encontrar uma substituição para o termo  $\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 V(t_1)V(t_2)$  da equação (4.22). Calculemos a integral com relação à  $T(V(t_1)V(t_2)) = \theta(t_1 - t_2)V(t_1)V(t_2) + \theta(t_2 - t_1)V(t_2)V(t_1)$ .

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 T(V(t_1)V(t_2)) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \theta(t_1 - t_2)V(t_1)V(t_2) + \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \theta(t_2 - t_1)V(t_2)V(t_1). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Podemos fazer uma troca de variáveis na segunda integral do lado direito da equação (4.23) de maneira que  $t_1 \rightarrow t'_2$  e  $t_2 \rightarrow t'_1$  resulte em

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 T(V(t_1)V(t_2)) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \theta(t_1 - t_2)V(t_1)V(t_2) + \int_{-\infty}^{\infty} dt'_2 \int_{-\infty}^{\infty} dt'_1 \theta(t'_1 - t'_2)V(t'_1)V(t'_2), \end{aligned} \quad (4.24)$$

caso possamos inverter a ordem da integração ficaremos com

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 T(V(t_1)V(t_2)) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \theta(t_1 - t_2)V(t_1)V(t_2) + \int_{-\infty}^{\infty} dt'_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt'_2 \theta(t'_1 - t'_2)V(t'_1)V(t'_2), \end{aligned} \quad (4.25)$$

e fazendo novamente outra substituição de variáveis da forma  $t'_1 \rightarrow t_1$  e  $t'_2 \rightarrow t_2$  na mesma integral

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 T(V(t_1)V(t_2)) = \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \theta(t_1 - t_2) V(t_1)V(t_2) + \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \theta(t_1 - t_2) V(t_1)V(t_2) = \quad (4.26) \\
& = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \theta(t_1 - t_2) V(t_1)V(t_2).
\end{aligned}$$

Notemos que para o caso em que  $t_2 > t_1$  o resultado da integral será zero pela própria definição dos produtos temporalmente ordenados, então deduzimos que o limite superior da integração em  $dt_2$  (na equação anterior) não precisa ser  $\infty$ , mas sim  $t_1$  e com isso também não se tem mais a necessidade de se escrever  $\theta(t_1 - t_2)$ . O resultado é

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 T(V(t_1)V(t_2)) = \\
& = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 V(t_1)V(t_2). \quad (4.27)
\end{aligned}$$

Com isso temos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 T(V(t_1)V(t_2)) = \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 V(t_1)V(t_2), \quad (4.28)
\end{aligned}$$

que por sua vez é equivalente ao termo que estamos interessados em trocar na equação (4.22). Podemos proceder da mesma maneira para o caso da integração de  $T(V(t_1)V(t_2)V(t_3))$  e o resultado será

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_3 T(V(t_1)V(t_2)V(t_3)) = \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_3 \theta(t_1 - t_2)\theta(t_2 - t_3)\theta(t_1 - t_3) V(t_1)V(t_2)V(t_3) + \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_3 \theta(t_1 - t_2)\theta(t_1 - t_3)\theta(t_3 - t_2) V(t_1)V(t_3)V(t_2) + \dots = \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_3 V(t_1)V(t_2)V(t_3) + \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_3 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \theta(t_1 - t_3)\theta(t_1 - t_2)\theta(t_2 - t_3) V(t_1)V(t_2)V(t_3) + \\
& + \dots = 3! \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_3 V(t_1)V(t_2)V(t_3), \quad (4.29)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_3 T(V(t_1)V(t_2)V(t_3)) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_3 V(t_1)V(t_2)V(t_3). \end{aligned} \quad (4.30)$$

A forma generalizada para cálculos como os realizados acima é dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T(V(t_1) \dots V(t_n)) = n! \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n V(t_1) \dots V(t_n).$$

Com isso, a forma final da matriz  $S$  é

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n T[V(t_1) \dots V(t_n)], \quad (4.31)$$

a equação (4.31) é série de Dyson para a matriz  $S$ .

Chegamos em um ponto que podemos resolver duas, das três condições para definirmos um campo quântico livre. Ao olharmos com mais cuidado, para satisfazermos a **condição 1** e a **condição 2**, para termos uma invariância sob Lorentz da equação da matriz  $S$  via série de Dyson, devemos supor que o potencial possa ser escrito como  $V(t) = \int d^3\mathcal{H}(x, t)$ , em que a quantidade  $\mathcal{H}(x)$  é um escalar no sentido de  $U(\Lambda, a)\mathcal{H}(x)U^{-1}(\Lambda, a) = \mathcal{H}(\Lambda x + a)$ . Ao fazermos isso a equação (4.31) fica

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n T[\mathcal{H}(x_1) \dots \mathcal{H}(x_n)], \quad (4.32)$$

por fim se impusermos a condição de microcausalidade manifesta em  $[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)] = 0$  se  $(x - y) < 0$  podemos enfim garantir que a equação para a matriz  $S$  expressa pela equação (4.32) é invariante de Lorentz.

## 4.2 OPERADORES DE CRIAÇÃO E ANIQUILAÇÃO

Para abordarmos a terceira condição para se poder formar um campo, temos que primeiro olhar para as definições dos operadores de criação e aniquilação.

Como é sabido, o espaço de Hilbert pode ser construído por vários estados de várias partículas, um desses estados é o estado de vácuo,  $\Phi_0$ , que por definição é o estado que contém nenhuma partícula. Obviamente, sendo isto verdade, caso tentemos estudar a ação do operador relativo ao momento,  $P$ , neste mesmo estado esperamos que o resultado seja  $P^\mu \Phi_0 = \Phi_0$ , uma vez que o estado de vácuo não contém partículas. É de se esperar também que essa equação valha para qualquer efeito de uma simetria do espaço tempo, ou seja, que ela valha para qualquer sistema inercial, para que não se viole o princípio de conservação do momento, portanto faz sentido que sob uma transformação de Lorentz o vácuo seja invariante,  $U(\Lambda, a)\Phi_0 = \Phi_0$ . Definimos então, os operadores de criação e aniquilação a

partir de suas respectivas atuações no estado de vácuo

$$a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n)\Phi_0 = \Phi(\mathbf{p}, \sigma, n), \quad (4.33)$$

como sendo o operador de criação e seu adjunto como

$$a(\mathbf{p}, \sigma, n)\Phi_0 = 0, \quad (4.34)$$

como sendo o operador de aniquilação. Ao atuarmos em  $\Phi_0$  com sucessivas operações de  $a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n)$  nós teremos um estado de multipartículas como

$$a^\dagger(\mathbf{p}_1, \sigma_1, n_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2, \sigma_2, n_2)\cdots\Phi_0 = \Phi(\mathbf{p}_1, \sigma_1, n_1; \mathbf{p}_2, \sigma_2, n_2; \cdots), \quad (4.35)$$

mas note que se trocarmos a ordem da atuações dos operadores e conseqüentemente a ordem dos estados gerados esperamos que o estado resultado continue sendo proporcional ao estado original

$$\Phi(\mathbf{p}_1, \sigma_1, n_1; \mathbf{p}_2, \sigma_2, n_2; \cdots) = \alpha\Phi(\mathbf{p}_2, \sigma_2, n_2; \mathbf{p}_1, \sigma_1, n_1; \cdots), \quad (4.36)$$

com  $\alpha$  sendo uma constante global independente de  $\sigma$ , caso façamos novamente uma troca nos estados podemos esperar que

$$\Phi(\mathbf{p}_1, \sigma_1, n_1; \mathbf{p}_2, \sigma_2, n_2; \cdots) = \alpha^2\Phi(\mathbf{p}_1, \sigma_1, n_1; \mathbf{p}_2, \sigma_2, n_2; \cdots), \quad (4.37)$$

isso nos induz a  $\alpha^2 = 1$ , ou seja,  $\alpha = \pm 1$ . Embora este resultado possa parecer desprezível, ele codifica o chamado teorema Spin-Estatística e dele herdamos relações de comutação ou anticomutação de acordo com o tipo de partícula

$$[a(\mathbf{p}', \sigma', n'), a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n)]_\pm = \delta_{\sigma\sigma'}\delta_{nn'}\delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \quad (4.38)$$

e

$$[a(\mathbf{p}', \sigma', n'), a(\mathbf{p}, \sigma, n)]_\pm = [a^\dagger(\mathbf{p}', \sigma', n'), a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n)]_\pm = 0 \quad (4.39)$$

com o sinal "+" reservado para partículas do tipo fermiônicas e o sinal "-" reservado para partículas do tipo bosônicas.

Sob transformações de Lorentz os operadores de criação e aniquilação se transformam da seguinte maneira [15]:

$$U(\Lambda, b)a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n)U^{-1}(\Lambda, b) = e^{i(\Lambda p)b} \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\bar{\sigma}} D_{\sigma\bar{\sigma}}^{(j)}(W^{-1}(\Lambda, p))a^\dagger(\Lambda\mathbf{p}, \bar{\sigma}, n) \quad (4.40)$$

$$U(\Lambda, b)a(\mathbf{p}, \sigma, n)U^{-1}(\Lambda, b) = e^{-i(\Lambda p)b} \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\bar{\sigma}} D_{\sigma\bar{\sigma}}^{(j^*)}(W^{-1}(\Lambda, p))a(\Lambda\mathbf{p}, \bar{\sigma}, n). \quad (4.41)$$

Um teorema fundamental diz que qualquer operador, digamos  $\mathcal{O}$  no espaço de Hilbert, pode ser escrito como a soma de produtos entre operadores de criação e aniquilação, ou seja,

$$\mathcal{O} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \int dq'_1 \cdots dq'_N dq_1 \cdots dq_M a^\dagger(q'_1) \cdots a^\dagger(q'_N) a(q_M) \cdots a(q_1) C_{NM}(q'_1 \cdots q'_N q_1 \cdots q_M) \quad (4.42)$$

em que aqui os  $q'$ 's generalizam a ideia de rótulo das partículas contendo toda a informação necessária. É importante ressaltar que ao se escolher um operador a ser estudado faz-se necessário o conhecimento dos elementos que compõem este mesmo operador, para o caso de trabalharmos com matrizes devemos conhecer os respectivos elementos destas mesmas matrizes de maneira a escolher adequadamente os  $C_{NM}$  para que valha (4.42). Seguindo esta ideia, podemos analisar alguns casos para verificarmos a funcionalidade do teorema.

Por exemplo, para o caso do vácuo, temos que  $(\Phi_0, \mathcal{O}\Phi_0) = C_{00}$  sendo  $C_{00}$  o único termo restante, portanto basta que façamos  $(\Phi_0, \mathcal{O}\Phi_0) \equiv C_{00}$ .

Já para o caso de um estado qualquer,  $(\Phi_0, \mathcal{O}\Phi_q) = (\Phi_0, \int dq_1 C_{01}(q_1) \delta(q_1 - q) \Phi_0) = C_{01}(\Phi_0, \Phi_0) = C_{01}(q)$  e com isso escolhemos  $(\Phi_0, \mathcal{O}\Phi_q) = C_{01}(q)$ , o mesmo vale para  $C_{10}$  quando escolhemos  $(\Phi_q, \mathcal{O}\Phi_0) = C_{10}(q)$ .

O caso mais genérico para dois estados quaisquer se dá por

$$\begin{aligned} (\Phi_{\bar{q}_1}, \mathcal{O}\Phi_{\bar{q}_2}) &= (\Phi_{\bar{q}_1}, \{C_{00} + \int dq_1 dq'_1 C_{11}(q'_1, q_1) a^\dagger(q'_1) a(q_1)\} \Phi_{\bar{q}_2}) = \\ &= (\Phi_{\bar{q}_1}, C_{00} \Phi_{\bar{q}_2}) + (\Phi_{\bar{q}_1}, \int dq_1 dq'_1 C_{11}(q'_1, q_1) a^\dagger(q'_1) a(q_1) \Phi_{\bar{q}_2}) = \\ &= C_{00} \delta(\bar{q}_1 - \bar{q}_2) + (\Phi_{\bar{q}_1}, \int dq_1 dq'_1 C_{11}(q'_1, q_1) a^\dagger(q'_1) \delta(q_1 - \bar{q}_2) \Phi_0) = \\ &= C_{00} \delta(\bar{q}_1 - \bar{q}_2) + (\Phi_{\bar{q}_1}, \int dq'_1 C_{11}(q'_1, \bar{q}_2) a^\dagger \Phi_0) = \\ &= C_{00} \delta(\bar{q}_1 - \bar{q}_2) + \int dq'_1 C_{11}(q'_1, \bar{q}_2) (\Phi_{\bar{q}_1}, \Phi_{q'_1}) = \\ &= C_{00} \delta(\bar{q}_1 - \bar{q}_2) + \int dq'_1 C_{11}(q'_1, \bar{q}_2) \delta(\bar{q}_1 - q'_1) = \\ &= C_{00} \delta(\bar{q}_1 - \bar{q}_2) + C_{11}(\bar{q}_1, \bar{q}_2). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Consequentemente ficamos com

$$C_{11}(\bar{q}_1, \bar{q}_2) = (\Phi_{\bar{q}_1}, \mathcal{O}\Phi_{\bar{q}_2}) - C_{00} \delta(\bar{q}_1 - \bar{q}_2), \quad (4.44)$$

que implica em

$$C_{11}(\bar{q}_1, \bar{q}_2) = (\Phi_{\bar{q}_1}, \mathcal{O}\Phi_{\bar{q}_2}) - (\Phi_0, \mathcal{O}\Phi_0) \delta(\bar{q}_1 - \bar{q}_2). \quad (4.45)$$

Desta maneira, podemos vislumbrar como o teorema anterior se manifesta.

Antes de continuarmos é benéfico comentar sobre uma restrição física imposta sobre a matriz  $S$  que é o *princípio de decomposição em cluster*. Este princípio declara que experimentos realizados a longas

distâncias um do outro não podem se influenciar. Existe uma consequência desse princípio para a matriz  $S$  que se manifesta da seguinte forma: suponhamos uma quantidade  $N$  de experimentos de multipartículas  $\alpha_1 \rightarrow \beta_1, \alpha_2 \rightarrow \beta_2, \dots, \alpha_N \rightarrow \beta_N$  e todos os experimentos são realizados distantes uns dos outros, então a matriz  $S$  dos processos combinados será  $S_{\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_N, \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_N} \rightarrow S_{\beta_1\alpha_1} S_{\beta_2\alpha_2} \dots S_{\beta_N\alpha_N}$ . Podemos buscar uma implicação dessas características na hamiltoniana, portanto tomemos a hamiltoniana completa por  $H = H_0 + V$ . Por se tratar de um operador no espaço de Hilbert,  $H$  pode ser expressa como

$$H = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \int d^3 p'_1 \dots d^3 p'_N d^3 p_1 \dots d^3 p_M \times a^\dagger(\mathbf{p}'_1) \dots a^\dagger(\mathbf{p}'_N) a(\mathbf{p}_1) \dots \dots \alpha(\mathbf{p}_M) \times h_{NM}(\mathbf{p}'_1, \dots, \mathbf{p}'_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_M). \quad (4.46)$$

A equação (4.46) não traz nenhuma informação além da própria aplicação do teorema para operadores no espaço de Hilbert que foi visto anteriormente, no entanto é através de um outro teorema exposto em [15] que podemos obter informações de caráter físico. Segundo este teorema, caso tenhamos a hamiltoniana escrita na forma da equação (4.46) e impusermos que a função  $h_{NM}(\mathbf{p}'_1, \dots, \mathbf{p}'_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_M)$  dada por

$$h_{NM}(\mathbf{p}'_1, \dots, \mathbf{p}'_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_M) = \delta^3(\mathbf{p}'_1 + \dots + \mathbf{p}'_N - \mathbf{p}_1 - \dots - \mathbf{p}_M) \times \bar{h}_{NM}(\mathbf{p}'_1, \dots, \mathbf{p}'_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_M), \quad (4.47)$$

não contenha deltas de conservação de subconjuntos de  $p$  e  $p'$  então teremos garantido o princípio de decomposição em cluster, ou ainda,  $S_{\beta\alpha} = \delta(\mathbf{P}_\beta - \mathbf{P}_\alpha) \bar{S}_{\beta\alpha}$ . Podemos observar que a análise sobre  $H$  pode se restringir a análise sobre  $V$ , dado que  $H$  é escrita como  $H = H_0 + V$  e  $H_0$  é um tipo de operador aditivo<sup>2</sup> e consequentemente pode ser escrito como

$$H_0 = \int dp_1 a^\dagger(\mathbf{p}_1) a(\mathbf{p}_1) E(\mathbf{p}_1) = \int dp'_1 dp_1 a^\dagger(\mathbf{p}_1) a(\mathbf{p}_1) \delta(\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1) E(\mathbf{p}_1) = \dots = \int dp'_1 dp_1 a^\dagger(\mathbf{p}_1) a(\mathbf{p}_1) h_{11}(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}_1), \quad (4.48)$$

em que  $E(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ . Portanto o princípio de decomposição em cluster está garantido para  $H_0$  e a afirmação do teorema anterior passa a ser sobre  $V$  e não mais  $H$ . Para uma demonstração deste teorema ver [15].

Conforme nossa proposta de construção do campo, vemos da **condição 3** que queremos construir uma densidade hamiltoniana que seja escalar de Lorentz e em função dos operadores de criação e aniquilação, mas como vimos, as transformações via Lorentz dos operadores em questão não são simples, o que dificulta nossa busca por tal densidade hamiltoniana. Para tanto, podemos abordar uma estratégia de buscar uma nova forma de representar a densidade hamiltoniana que ao mesmo tempo seja construída com os operadores, mas também que tenha um comportamento adequado sob Lorentz.

<sup>2</sup> Um operador qualquer  $F$  é dito ser aditivo se  $F\Phi_{q_1\dots q_N} = (f(q_1) + f(q_2) + \dots + f(q_N))\Phi_{q_1\dots q_N}$ . Temos um lema bastante útil que afirma que todo operador que pode ser escrito como  $F = \int dq a^\dagger(q) a(q) f(q)$  é um operador aditivo. Para uma demonstração desse lema ver [9].

Vejam, voltando para nossa hamiltoniana, que pode ser expressa como

$$H = \int dp_1^{0'} \cdots dp_N^0 dp_1^0 \cdots dp_M^0 \mathcal{H}, \quad (4.49)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{\sigma} \sum_n \int d^3 \mathbf{p}'_1 \cdots d^3 \mathbf{p}'_N d^3 \mathbf{p}_1 \cdots d^3 \mathbf{p}_M \times \\ & C_{NM}(\mathbf{p}'_1, \sigma'_1, n_1; \cdots; \mathbf{p}'_N, \sigma'_N, n'_N; \mathbf{p}_1, \sigma_1, n_1; \cdots; \mathbf{p}_M, \sigma_M, n_M) \\ & \times a^\dagger(\mathbf{p}'_1, \sigma'_1, n'_1) \cdots a^\dagger(\mathbf{p}'_N, \sigma'_N, n'_N) a(\mathbf{p}_M, \sigma_M, n_M) \cdots a(\mathbf{p}_1, \sigma_1, n_1). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Escrevendo a equação acima em termos de constantes  $g_{l'_1 \dots l'_N, l_1 \dots l_M}$  coeficientes de expansão adequados  $u_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n)$  e  $v_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n)$ , ficamos com

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{\sigma} \sum_n \sum_{l'_1 \dots l'_N} \sum_{l_1 \dots l_M} g_{l'_1 \dots l'_N, l_1 \dots l_M} \int d^3 \mathbf{p}'_1 \cdots d^3 \mathbf{p}'_N d^3 \mathbf{p}_1 \cdots d^3 \mathbf{p}_M \times \\ & u_{l'_1}(x; \mathbf{p}, \sigma, n) \cdots u_{l'_N}(x; \mathbf{p}'_N, \sigma'_N, n'_N) v_{l_1}(x; \mathbf{p}, \sigma, n) \cdots v_{l_M}(x; \mathbf{p}_M, \sigma_M, n_M) \\ & \times a^\dagger(\mathbf{p}'_1, \sigma'_1, n'_1) \cdots a^\dagger(\mathbf{p}'_N, \sigma'_N, n'_N) a(\mathbf{p}_M, \sigma_M, n_M) \cdots a(\mathbf{p}_1, \sigma_1, n_1). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Rearranjando os termos da equação anterior temos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{\sigma n} \sum_{l'_1 \dots l'_N} \sum_{l_1 \dots l_M} g_{l'_1 \dots l'_N, l_1 \dots l_M} \int d^3 \mathbf{p}'_1 u_{l'_1}(x; \mathbf{p}, \sigma, n) a^\dagger(\mathbf{p}'_1, \sigma'_1, n'_1) \\ & \times \int d^3 \mathbf{p}'_N u_{l'_N}(x; \mathbf{p}'_N, \sigma'_N, n'_N) a^\dagger(\mathbf{p}'_N, \sigma'_N, n'_N) \times \\ & \times \int d^3 \mathbf{p}_1 v_{l_1}(x; \mathbf{p}, \sigma, n) a(\mathbf{p}_1, \sigma_1, n_1) \times \int d^3 \mathbf{p}_M v_{l_M}(x; \mathbf{p}_M, \sigma_M, n_M) a(\mathbf{p}_M, \sigma_M, n_M) \end{aligned} \quad (4.52)$$

e, por fim, a densidade hamiltoniana pode ser expressa como

$$\mathcal{H} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{l'_1 \dots l'_N} \sum_{l_1 \dots l_M} g_{l'_1 \dots l'_N, l_1 \dots l_M} \psi_{l'_N}^-(x) \cdots \psi_{l'_1}^-(x) \psi_{l_1}^+(x) \cdots \psi_{l_M}^+(x), \quad (4.53)$$

identificando os operadores  $\psi_l^+(x)$  e  $\psi_l^-(x)$  como sendo

$$\psi^+(x) = \sum_{\sigma, n} \int d^3 \mathbf{p} u_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n) a(\mathbf{p}, \sigma, n), \quad (4.54)$$

e

$$\psi^-(x) = \sum_{\sigma, n} \int d^3 \mathbf{p} v_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n). \quad (4.55)$$

Caso façamos uma transformação do tipo  $\Lambda x + a$  na densidade hamiltoniana e compararmos termos

correlatos veremos que

$$U(\Lambda, a)\psi_l^+(x)U(\Lambda, a)^{-1} = \sum_{\bar{l}} \mathcal{D}_{\bar{l}}(\Lambda^{-1})\psi_{\bar{l}}^+(\Lambda x + a), \quad (4.56)$$

$$U(\Lambda, a)\psi_l^-(x)U(\Lambda, a)^{-1} = \sum_{\bar{l}} \mathcal{D}_{\bar{l}}(\Lambda^{-1})\psi_{\bar{l}}^-(\Lambda x + a). \quad (4.57)$$

As matrizes  $\mathcal{D}_{\bar{l}}(\Lambda)$  fornecem uma representação de dimensão finita do grupo de Lorentz e portanto devem ser redutível e não deve ser confundida com  $D_{\sigma\bar{\sigma}}$  que são representações advindas do grupo de Poincarè e são de dimensão infinita.

Usualmente, para que a matriz  $S$  seja invariante por Lorentz, para intervalos do tipo espaço a densidade hamiltoniana comuta com ela própria, ou seja,  $[\mathcal{H}(x_1), \mathcal{H}(x_2)] = 0$  o que a essa altura implica que os operadores identificados acima satisfaçam:

$$[\psi_l(x), \psi_{l'}(x')]_{\pm} = [\psi_l(x), \psi_{l'}^{\dagger}(x')]_{\pm} = 0. \quad (4.58)$$

Desenvolvendo a equação anterior para os operadores  $\psi_l^+ = (x)$  e  $\psi_{l'}^- = (y)$  temos

$$\begin{aligned} [\psi_l^+(x), \psi_{l'}^-(y)]_{\pm} &= \sum_{\sigma, n} \sum_{\sigma', n'} \int d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{p}' \times (u(x; \mathbf{p}, \sigma, n)v(y; \mathbf{p}', \sigma', n')a(\mathbf{p}, \sigma, n)a^{\dagger}(\mathbf{p}', \sigma', n') \\ &\quad \pm u(x; \mathbf{p}, \sigma, n)v(y; \mathbf{p}', \sigma', n')a^{\dagger}(\mathbf{p}, \sigma, n)a(\mathbf{p}', \sigma', n')) \\ &= \sum_{\sigma, n} \sum_{\sigma', n'} \int d^3\mathbf{p} \int d^3\mathbf{p}' u_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n)v_{l'}(y; \mathbf{p}', \sigma', n')[a(\mathbf{p}, \sigma, n), a^{\dagger}(\mathbf{p}', \sigma', n')]_{\pm} = \\ &= \sum_{\sigma, n} \sum_{\sigma', n'} \int d^3\mathbf{p} \int d^3\mathbf{p}' u_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n)v_{l'}(y; \mathbf{p}', \sigma', n')(2\pi)^3\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \\ &= (2\pi)^3 \sum_{\sigma, n} \int d^3\mathbf{p} u_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n)v_{l'}(y; \mathbf{p}, \sigma, n). \end{aligned} \quad (4.59)$$

O problema com a equação acima é que ela geralmente não zera e, portanto, não conseguiremos uma densidade hamiltoniana adequada. A saída para esse problema é tomarmos operadores do tipo  $\psi_{\ell}(x) = \kappa\psi_{\ell}^+(x) + \lambda\psi_{\ell}^-(x)$  de maneira que

$$\begin{aligned} [\psi_{\ell}^+(x), \psi_{\ell'}^-(y)]_{\pm} &= (2\pi)^3 \sum_{\sigma, n} \int d^3\mathbf{p} (\kappa u_l(x; \mathbf{p}, \sigma, n)v_{l'}(y; \mathbf{p}', \sigma', n') \pm \\ &\quad \pm \lambda (u_{l'}(x; \mathbf{p}, \sigma, n)v_l(y; \mathbf{p}', \sigma', n'))) \end{aligned} \quad (4.60)$$

e escolhe-se  $\kappa$  e  $\lambda$  de maneira a satisfazer a relação de comutação.

### 4.3 O CAMPO

O operador  $\psi_l(x)$ , sugerido na seção anterior, ganha o nome de *campo quântico* ou *operador de campo*. Estudemos algumas de suas propriedades, como o comportamento dos coeficientes de expansão.

Utilizando as equações (4.54) e (4.55) para os campos e tendo em vista as equações (4.40) e (4.41) para os operadores de criação e aniquilação sob a ação de uma transformação unitária, podemos escrever uma transformação  $U(\Lambda, a)$  agindo nos operadores de campo como [15]

$$\begin{aligned} U(\Lambda, b)\psi^+(x)U^{-1}(\Lambda, b) &= \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3(\Lambda p)}{\sqrt{2(\Lambda p)^0}} \sum_{\sigma\bar{\sigma}} u_\ell(\mathbf{x}; \mathbf{p}, \sigma) e^{-i(\Lambda p)\cdot a} D_{\sigma\bar{\sigma}}(W^{-1}(\Lambda, p)) a(\Lambda \mathbf{p}, \bar{\sigma}) \end{aligned} \quad (4.61)$$

e

$$\begin{aligned} U(\Lambda, b)\psi^-(x)U^{-1}(\Lambda, b) &= \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3(\Lambda p)}{\sqrt{2(\Lambda p)^0}} \sum_{\sigma\bar{\sigma}} v_\ell(\mathbf{x}; \mathbf{p}, \sigma) e^{i(\Lambda p)\cdot a} D_{\sigma\bar{\sigma}}^*(W^{-1}(\Lambda, p)) a^\dagger(\Lambda \mathbf{p}, \bar{\sigma}). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Comparando essas equações com as equações (4.56) e (4.57) vemos que

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{\ell}}(\Lambda x + a; \Lambda \mathbf{p}, \bar{\sigma}) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(J)}(W(\Lambda, p)) = e^{-i(\Lambda p)\cdot a} \sum_{\ell} \mathcal{D}_{\bar{\ell}\ell}(\Lambda) u_\ell(\mathbf{x}; \Lambda \mathbf{p}, \sigma) \quad (4.63)$$

e

$$\sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{\ell}}(\Lambda x + a; \Lambda \mathbf{p}, \bar{\sigma}) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(J^*)}(W(\Lambda, p)) = e^{i(\Lambda p)\cdot a} \sum_{\ell} \mathcal{D}_{\bar{\ell}\ell}(\Lambda) v_\ell(\mathbf{x}; \Lambda \mathbf{p}, \sigma), \quad (4.64)$$

submetendo essas equações às translações no espaço-tempo e ficamos com

$$u_{\bar{\ell}}(\mathbf{x}; \mathbf{p}, \sigma) = e^{(-ip\cdot x)} u_{\bar{\ell}}(\mathbf{p}, \sigma) \quad (4.65)$$

$$v_{\bar{\ell}}(\mathbf{x}; \mathbf{p}, \sigma) = e^{(ip\cdot x)} v_{\bar{\ell}}(\mathbf{p}, \sigma), \quad (4.66)$$

uma vez que, para este caso especial,  $\Lambda = \mathbb{I}$  e  $a$  qualquer. Com esses vínculos as equações das representações ficam

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_\ell(\Lambda \mathbf{p}, \bar{\sigma}) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(J)}(W(\Lambda, p)) = \sum_{\ell} \mathcal{D}_{\bar{\ell}\ell}(\Lambda) u_\ell(\mathbf{p}, \sigma) \quad (4.67)$$

e

$$\sum_{\bar{\sigma}} v_\ell(\Lambda \mathbf{p}, \bar{\sigma}) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(J^*)}(W(\Lambda, p)) = \sum_{\ell} \mathcal{D}_{\bar{\ell}\ell}(\Lambda) v_\ell(\mathbf{p}, \sigma). \quad (4.68)$$

Já para os boosts tomemos  $\mathbf{p} = 0$  e  $\Lambda = L(p)$ , conseqüentemente  $W(\Lambda, p) = \mathbb{I}$  e  $D(\Lambda, p) = \mathbb{I}$  e

ficaremos com

$$u_\ell(\mathbf{p}, \sigma) = \sum_{\bar{\ell}} \mathcal{D}_{\bar{\ell}\ell}(L(p)) u_{\bar{\ell}}(0, \sigma) \quad (4.69)$$

e

$$v_\ell(\mathbf{p}, \sigma) = \sum_{\bar{\ell}} \mathcal{D}_{\bar{\ell}\ell}(L(p)) v_{\bar{\ell}}(0, \sigma). \quad (4.70)$$

Por fim, para as rotações, teremos  $\mathbf{p} = 0$  e  $\Lambda = R W(R, p) = R$  e

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_\ell(0, \bar{\sigma}) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(J)}(R) = \sum_{\ell} \mathcal{D}_{\bar{\ell}\ell}(R) u_\ell(0, \sigma) \quad (4.71)$$

e

$$\sum_{\bar{\sigma}} v_\ell(0, \bar{\sigma}) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(J^*)}(R) = \sum_{\ell} \mathcal{D}_{\bar{\ell}\ell}(R) v_\ell(0, \sigma). \quad (4.72)$$

Infinitesimalmente, teremos

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_\ell(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(J)}(R) = \sum_{\ell} \mathcal{J}_{\bar{\ell}\ell}(R) u_\ell(0, \sigma) \quad (4.73)$$

e

$$\sum_{\bar{\sigma}} v_\ell(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(J^*)}(R) = \sum_{\ell} \mathcal{J}_{\bar{\ell}\ell}(R) v_\ell(0, \sigma). \quad (4.74)$$

Com o que vimos até aqui, podemos garantir a criação de campos quânticos seguindo as três condições propostas em [18]. Vejamos mais um detalhe sobre a teoria envolvendo interação.

Sabe-se que em geral, em teorias que descrevem interação, os estados que descrevem partículas costumam ter cargas conservadas  $q_n$  diferentes de zero, bem como associadas a um operador hermitiano, digamos  $Q$ , que satisfaz:

$$[Q, a(\mathbf{p}, \sigma, n)] = -q(n)a(\mathbf{p}, \sigma, n), \quad (4.75)$$

e

$$[Q, a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n)] = q(n)a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n). \quad (4.76)$$

Como o comutador entre  $Q$  e os operadores de criação e aniquilação não são nulos, é de se esperar que também não o seja o comutador do operador de campo com este mesmo operador  $Q$ , uma vez que o campo pode ser expresso em função de operadores de criação e aniquilação. Exigimos então que o comutador seja

$$[Q, \psi_\ell(x)] = -q(n)\psi_\ell(x), \quad (4.77)$$

para que ele possa comutar com a densidade hamiltoniana. Esta relação de comutação se dá através de

$$[Q, \mathcal{H}(x)] = (-q'_1 - \dots - q'_N + q'_1 + \dots + q'_N + \dots + q'_M)\mathcal{H}. \quad (4.78)$$

Essa relação de comutação é zero se e somente se  $-q'_1 - \dots - q'_N + q'_1 + \dots + q'_N + \dots + q'_M = 0$ . A equação  $[Q, \psi_\ell(x)] = -q(n)\psi_\ell(x)$  não pode ser resolvida se tanto  $\psi^+(x)$  quanto  $\psi^-(x)$  descreverem

a mesma partícula, com a mesma carga  $q$ ; a única solução é que  $[Q, \psi^+(x)] = -q(n)\psi^+(x)$  e  $[Q, \psi^-(x)] = q(n)\psi^-(x)$ . O que a relação anterior nos diz é que a necessidade da invariância da matriz  $S$ , bem como toda a construção dos operadores de campo (ou os próprios campos), demandam a existência de uma partícula com carga oposta, ou seja, a existência da partícula e sua antipartícula.

#### 4.4 O CAMPO DE DIRAC COMO UM EXEMPLO

Tomemos o campo de Dirac como exemplo, cujo campo de aniquilação é dado por

$$\psi^+(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \sum_{\sigma} e^{ip \cdot x} u(\mathbf{p}, \sigma) a(\mathbf{p}, \sigma) \quad (4.79)$$

e o campo de criação é

$$\psi^-(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \sum_{\sigma} e^{-ip \cdot x} v(\mathbf{p}, \sigma) b^{\dagger}(\mathbf{p}, \sigma). \quad (4.80)$$

Notemos que a paridade atua nos operadores de aniquilação e criação como

$$\begin{aligned} P a(\mathbf{p}, \sigma) P^{-1} &= \eta^* a(-\mathbf{p}, \sigma) \\ P b^{\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) P^{-1} &= \bar{\eta} b^{\dagger}(-\mathbf{p}, \sigma), \end{aligned} \quad (4.81)$$

com  $\eta^*$  e  $\bar{\eta}$  sendo as fases conhecidas como paridades intrínsecas. Consequentemente<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} P \psi^+(x) P^{-1} &= \eta^* (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \sum_{\sigma} e^{ip \cdot x} u(\mathbf{p}, \sigma) a(-\mathbf{p}, \sigma) \\ P \psi^-(x) P^{-1} &= \bar{\eta} (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \sum_{\sigma} e^{-ip \cdot x} v(\mathbf{p}, \sigma) b^{\dagger}(-\mathbf{p}, \sigma). \end{aligned} \quad (4.82)$$

Notemos que um coeficiente para um momento genérico  $\mathbf{p}$  se relaciona com um coeficiente para o repouso através de um boost por<sup>4</sup>

$$u(\mathbf{p}, \sigma) = \sqrt{2p^0} \mathcal{D}(L(p)) u(0, \sigma), \quad (4.83)$$

mas podemos atuar com a paridade em  $u$  de maneira que

$$\mathcal{P} u(\mathbf{p}, \sigma) = u(-\mathbf{p}, \sigma) = \sqrt{2p^0} \mathcal{P} \mathcal{D}(L(p)) u(0, \sigma). \quad (4.84)$$

Introduzindo a identidade  $\mathcal{P}^{-1} \mathcal{P} = \mathbb{1}$  na equação acima teremos

$$u(-\mathbf{p}, \sigma) = \sqrt{2p^0} \mathcal{P} \mathcal{D}(L(p)) \mathcal{P}^{-1} \mathcal{P} u(0, \sigma), \quad (4.85)$$

<sup>3</sup> Note que  $\mathbf{p}$  representa a atuação da paridade na variável  $x$ .

<sup>4</sup> O fator  $\sqrt{2p^0}$  é um fator de normalização.

lembrando que  $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}$  e que  $\mathcal{P}u(0, \sigma) = u(0, \sigma)$  ficamos com

$$u(-\mathbf{p}, \sigma) = \sqrt{2p^0} \mathcal{P} \mathcal{D}(L(p)) \mathcal{P} u(0, \sigma). \quad (4.86)$$

É importante salientar que para uma transformação qualquer de Lorentz  $D(\Lambda)$  temos

$$D(\Lambda) \gamma^\alpha D(\Lambda)^{-1} = \Lambda^\alpha_\beta \gamma^\beta. \quad (4.87)$$

Em especial, quando  $\mathcal{P} \equiv D(\mathcal{P})$  vamos ter

$$P \gamma^\alpha P^{-1} = \mathcal{P}^\alpha_\beta \gamma^\beta. \quad (4.88)$$

Como  $\mathcal{P}$  é dada pela equação (3.27) podemos perceber que quando  $\alpha \neq \beta$  os valores serão zero e para  $\alpha = \beta = 0$  temos  $\mathcal{P}^0_0 = 1$  então<sup>5</sup>

$$P \gamma^0 P^{-1} = \mathcal{P}^0_0 \gamma^0 = \gamma^0. \quad (4.89)$$

Para o caso de  $\alpha = \beta = i$  com  $i = 1, 2, 3$  temos  $\mathcal{P}^i_i = -1$  então

$$P \gamma^i P^{-1} = \mathcal{P}^i_i \gamma^i = -\gamma^i. \quad (4.90)$$

Note que podemos atuar com  $P$  pela direita na equação (4.89) e obter

$$P \gamma^0 P^{-1} P = \gamma^0 P \Rightarrow P \gamma^0 = \gamma^0 P \Rightarrow [P, \gamma^0] = 0. \quad (4.91)$$

O mesmo pode ser feito com a equação (4.90) e neste caso obteremos

$$P \gamma^i P^{-1} P = -\gamma^i P \Rightarrow P \gamma^i = -\gamma^i P \Rightarrow \{P, \gamma^i\} = 0. \quad (4.92)$$

As equações (4.91) e (4.92) permitem que tomemos  $P = \gamma^0$  e por conseguinte, ao substituirmos esse resultado em (4.86), encontraremos

$$u(-\mathbf{p}, \sigma) = \sqrt{2p^0} [\gamma^0 \mathcal{D}(L(p)) \gamma^0] u(0, \sigma). \quad (4.93)$$

O mesmo raciocínio vale para  $v(-\mathbf{p}, \sigma)$  com

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (4.94)$$

Utilizando a identidade (4.93) e notando que

$$\gamma^0 \mathcal{D}(L(p)) \gamma^0 = \mathcal{D}(L(\mathcal{P}p)) \quad (4.95)$$

---

<sup>5</sup> Ressaltando que  $\gamma_0 = \gamma^0$ .

é uma condição suficiente para a conservação da paridade que

$$\gamma^0 v(0, \sigma) = b_v v(0, \sigma), \quad (4.96)$$

$$\gamma^0 u(0, \sigma) = b_u u(0, \sigma), \quad (4.97)$$

em que  $b_v$  e  $b_u$  são fatores de sinais. Atuando com  $\mathcal{D}(L(p))$  nas duas equações anteriores ficamos com

$$\gamma^0 v(\mathbf{p}, \sigma) = b_v v(\mathbf{p}, \sigma), \quad (4.98)$$

$$\gamma^0 u(\mathbf{p}, \sigma) = b_u u(\mathbf{p}, \sigma). \quad (4.99)$$

Como no caso do campo de Dirac os coeficientes no quadrimomento de repouso são dados por

$$u\left(\mathbf{0}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.100)$$

$$u\left(\mathbf{0}, \frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.101)$$

$$v\left(\mathbf{0}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (4.102)$$

$$v\left(\mathbf{0}, \frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.103)$$

Podemos tomar  $b_u = -b_v = 1$  e conseqüentemente encontramos como os campos de criação e aniquilação reagem à paridade de acordo com

$$\begin{aligned} P\psi^+(x)P^{-1} &= \eta^* b_u \gamma^0 \psi^+(\mathbf{p}x) = \eta^* \gamma^0 \psi^+(\mathbf{p}x) \\ P\psi^-(x)P^{-1} &= \bar{\eta} b_v \gamma^0 \psi^-(\mathbf{p}x) = -\bar{\eta} \gamma^0 \psi^-(\mathbf{p}x). \end{aligned} \quad (4.104)$$

Logo, para que o campo de Dirac se transforme, sob a ação da paridade, em alguma coisa proporcional a  $\psi'(\mathbf{p}x)$  como  $\psi(x) = \psi(x)$ , deve-se ter que as paridades intrínsecas sejam  $-\eta^* = \bar{\eta}$ . Com isso,

temos

$$P\psi(x)P^{-1} = \eta^* \gamma^0 \psi(\mathbf{p}x). \quad (4.105)$$

## 5 O MÉTODO DE CLASSIFICAÇÃO DE WIGNER E UM POSSÍVEL CANDIDATO ÀS CLASSIFICAÇÕES NÃO USUAIS

Este capítulo tem por finalidade expor, de maneira sucinta, quais as ideias presentes em [21] que culminam no que pode ser chamado de "*método de classificação de Wigner para estados de uma partícula*"<sup>1</sup> bem como apresentar um possível candidato que preencha as chamadas classes não-usuais de Wigner.

A construção desta parte da dissertação se baseia, quase que em sua totalidade, nas referências [21], [15], [23], [24] e [33]. Vale mencionar que, em alguns aspectos, o conteúdo de [33], conseqüentemente deste capítulo, complementarará, e eventualmente corrigirá, o que fora discutido em [23].

### 5.1 O MCW

Em seu artigo de título "Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group Including Reflections", publicado em 1964 [21], Wigner dá continuidade ao seu trabalho desenvolvido em [17] ao implementar as simetrias de paridade e reversão-temporal no estudo dos estados de uma partícula via grupo de Poincarè.

Neste processo, Wigner percebeu ser possível diferenciar estados de uma partícula pela maneira como eles reagem ao sofrerem a ação dos operadores que representam as simetrias discretas. Mais especificamente, foram utilizados operadores unitários (para o caso da paridade) e anti-unitários (para o caso da reversão-temporal e de *CPT*). Como era de se esperar, ao atuarem nos estados, os operadores devolviam estados transformados com a presença de uma fase (ainda que, por alguma argumentação coerente, essa fase pudesse ser 1). É justamente sobre estas fases, mais precisamente sobre a análise do quadrado dessas fases<sup>2</sup>, que é possível se estabelecer um critério para classificar estados de uma partícula.

Primeiramente, notou-se que estados de uma partícula associados às partículas que não possuem degenerescência além do spin deveriam se comportar de maneira a fornecer

- Caso 1

$$T^2 = (-1)^{2j} \quad \text{e} \quad (CPT)^2 = (-1)^{2j}, \quad (5.1)$$

no entanto, como analisado por Wigner, a própria estrutura do grupo de Poincarè, quando levadas em conta as simetrias discretas, permite a presença de possíveis estados de uma partícula degenerados (associados às partículas com degenerescências além das que representam o spin), e para estes estados degenerados é possível que a combinação de resultados para as fases seja diferente. Essa ideia possibilita a existência de outros três casos:

- Caso 2:

$$T^2 = -(-1)^{2j} \quad \text{e} \quad (CPT)^2 = (-1)^{2j}, \quad (5.2)$$

<sup>1</sup> Doravante, por conveniência, será utilizada a abreviação MCW quando feita referência ao método.

<sup>2</sup> O estudo das fases quadradas se justifica sobre a ideia de que a atuação sucessiva de um mesmo operador unitário em um estado devolva o estado original.

- Caso 3:

$$T^2 = (-1)^{2j} \quad \text{e} \quad (CPT)^2 = -(-1)^{2j}, \quad (5.3)$$

- Caso 4:

$$T^2 = -(-1)^{2j} \quad \text{e} \quad (CPT)^2 = -(-1)^{2j}. \quad (5.4)$$

Os resultados obtidos por Wigner podem ser encontrados na Tabela 3, da página 72, de [17]<sup>3</sup>.

Ocorre que, como apontado em [23], Lee e Wick em [22] mostraram que, para o caso de uma teoria quântica de campos ao menos localmente invariante por transformações de Lorentz, os campos quânticos permitiriam apenas a existência de partículas que estivessem associadas à estados que se classificassem no Caso 1. Como exposto em [22], simetrias internas poderiam ser utilizadas para se redefinir simetrias discretas, de modo a reclassificar partículas no Caso 1. Neste contexto, faz sentido a ideia de nomear os casos como sendo usuais e não-usuais: para o Caso 1 (situação na qual todas as partículas usuais se encontram) dá-se o nome de classe usual de Wigner de acordo com o MCW; para os outros casos dá-se o nome de classes não-usuais de Wigner de acordo com o MCW.

## 5.2 UMA PARTICULARIZAÇÃO PARA SPIN 1/2 E MAIS ALGUM COMENTÁRIO SOBRE CPT

Para que se possa continuar com a procura de candidatos que pertençam as classes não-usuais de Wigner, é proveitoso que seja feita uma particularização, ou seja, escolhermos um tipo específico de partícula para a qual queremos fazer a análise.

A partir deste ponto, deve-se assumir que a particularização é feita para estados de uma partícula associados às partículas com massa e com spin 1/2.

Assim, as classificações descritas anteriormente passam a ser<sup>4</sup>

- Caso 1 :  $T^2 = -1 \quad \text{e} \quad (CPT)^2 = -1,$  (5.5)

- Caso 2 :  $T^2 = -1 \quad \text{e} \quad (CPT)^2 = +1,$  (5.6)

- Caso 3 :  $T^2 = -1 \quad \text{e} \quad (CPT)^2 = +1,$  (5.7)

- Caso 4 :  $T^2 = +1 \quad \text{e} \quad (CPT)^2 = +1.$  (5.8)

<sup>3</sup> Algumas palavras de precaução devem ser escritas para o leitor que queira analisar os resultados obtidos por Wigner diretamente da tabela citada: deve-se levar em conta que o que está definido no artigo como sendo uma simetria do tipo PT deve ser entendido como o que se conhece atualmente por uma simetria CPT, um cuidado semelhante é necessário ao se analisar o significado da simetria de paridade. Dadas as diferenças entre notações, bem como a característica do trabalho presente em [17] ser auto-contido (e matematicamente complexo), o autor desta dissertação optou por não reproduzir a Tabela 3 no decorrer do texto a fim de não gerar confusão.

<sup>4</sup> Esses resultados podem ser conferidos na Tabela 1, página 2, de [23].

Dos resultados acima, de imediato, é possível dizer que para o caso usual de Dirac deve-se ter (5.5). No entanto, em algumas referências como na página 45, equações (6.27) e (6.28) em [24], os resultados para os espinores de Dirac são  $T^2 = -1$  e  $(CPT)^2 = +1$ , que correspondem ao caso de (5.8), portanto resultando em uma possível incoerência.

Para resolver essa aparente incoerência, deve-se atentar para algumas sutilezas da teoria. Como bem pontuado em [23] e extensamente desenvolvido em [15], os operadores de simetria discreta atuam em diferentes níveis na teoria quântica de campos, isto significa que as transformações dessas simetrias atuarão em operadores de criação/aniquiação, bem como em coeficientes de expansão e nos próprios campos. Mas em todas essas atuações as necessidades do problema vão determinar de que maneira os operadores se comportarão.

Acontece que, para a teoria quântica de campos relativística, é esperado que os campos sejam invariantes por transformações de simetria<sup>5</sup>  $CPT$ , e conseqüentemente é esperado que essa característica, de alguma maneira, seja transmitida para os coeficientes de expansão na equação desse campo quântico, bem como seja transmitida para os operadores de criação/aniquiação do mesmo campo e por fim essa característica chegue até os estados de uma partícula sobre os quais toda essa teoria foi consistentemente construída. Portanto, é possível inferir que a validade do teorema  $CPT$ , demonstrada para os campos quânticos relativísticos, seja estendida para os estados de uma partícula associados à esses mesmos campos, desde que o comportamento dos operadores de simetria esteja vinculado às características fundamentais necessárias da teoria quântica de campos, quando vista pela perspectiva de estados de uma partícula.

Com isso, o caso da aparente incoerência descrita anteriormente se explica justamente porque os resultados da página 45, equações (6.27) e (6.28) em [24], foram encontrados para o caso dos espinores de Dirac em uma representação específica, levando em conta as devidas necessidades dessa representação, e não foram calculados em estados de uma partícula para o caso usual de Dirac. Caso o fossem, o resultado seria, de fato,  $T^2 = -1$  e  $CPT^2 = -1$  como no Caso 1.

Dado o que foi discutido anteriormente, talvez este seja o ponto ideal para adotarmos algumas convenções que podem diferir do restante do trabalho, mas que por um motivo ou por outro, são mais convenientes para este capítulo. Utilizando como referência [15] e [24] tem-se que:

- ▶ Estados de uma partícula serão representados por  $\Psi_{\vec{p},\sigma,n}$ , com  $n$  sendo uma possível degenerescência além do spin;
- ▶ Campos quânticos serão representados por  $\psi(x)$ ;
- ▶ Operadores de simetria como paridade, reversão temporal e conjugação de carga, ao atuarem em estados de uma partícula (ou nos próprios campos), serão escritos como  $P$ ,  $T$  e  $C$ , respectivamente;

<sup>5</sup> O conhecido teorema CPT; ver, por exemplo, na página 245 de [15].

► Os operadores das mesmas simetrias citadas anteriormente, atuando em coeficientes de expansão que compõem os campos  $\psi(x)$ , serão escritos como  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{C}$ .

Tendo em vista o que foi exposto acima, pode-se revisitar o resultado obtido por Lee e Wick em [22] e afirmar, como em [23], que duas condições são necessárias para que o único caso possível para o MCW seja o Caso 1, são elas:

◊ Que exista uma relação<sup>6</sup> do tipo

$$P\psi(x)P^{-1} \propto \mathcal{P}\psi(-x) \quad (5.9)$$

para a paridade e uma relação equivalente para a reversão temporal;

◊ Que exista alguma simetria interna no problema, de maneira a ser possível relacionar um operador a essa simetria.

Com essas duas características, Lee e Wick em [22] concluem que<sup>7</sup>, particularizando para o caso de spin 1/2,  $(CPT)^2 = -1$ ,  $P^2 = T^2$  e  $TP = -TP$ , conseqüentemente  $(CPT)^2 = T^2$ . Uma outra análise, feita por Weinberg nas páginas 103 e 104 de [15], chega a mesma conclusão para o caso usual de Dirac, ou seja,  $(CPT)^2 = -1$ .

### 5.3 UM BOM CANDIDATO E AS POSSÍVEIS NOVAS CLASSES DE WIGNER

Vale ressaltar que a condição exposta em (5.9) implica, para o caso usual de Dirac, o fato dos espinores na função de coeficientes de expansão do campo quântico de Dirac serem autoespinores do operador de paridade, ou seja, para coeficientes de expansão tipo  $u$  e  $v$ , como demonstrado em [15], tem-se:

$$\mathcal{P}u = +u, \quad \mathcal{P}v = -v, \quad (5.10)$$

portanto é esperado que essa mesma característica se manifeste também em estados de uma partícula para o caso de Dirac usual.

Com o que foi desenvolvido até aqui, pode-se inferir que, para a existência das classes não-usuais, um bom candidato a estado de uma partícula deve, de alguma maneira, não possuir alguma dessas características. Neste contexto, um espinor que surge como candidato é o autoespinor do operador de conjugação de carga, ou de acordo com seu acrônimo em alemão, ELKO<sup>8</sup>. O ELKO é adequado justamente pelas suas características não usuais sob a ação de transformações de simetrias discretas. Vejamos algumas delas e como isso se transporia para estados de uma partícula associados ao ELKO.

De acordo com [24], o ELKO pode ser exposto em quatro componentes<sup>9</sup> que servem de coeficientes

<sup>6</sup> Note que, neste ponto da análise, foi utilizada uma relação de proporcionalidade ao invés de uma relação de igualdade, como na página 1388, equação (2.7), em [22], para que não seja necessária a escrita de possíveis fases.

<sup>7</sup> Estas conclusões se encontram nas páginas 1388 e 1389 de [22].

<sup>8</sup> O processo de descoberta e construção, bem como uma coletânea de resultados, sobre o ELKO pode ser visto em [24].

<sup>9</sup> Os índices alfabéticos superiores são para distinguir dois tipos de ELKO, os auto duais (letra S, de self dual) e os anti-auto duais (letra A, de anti-self duals); os índices sub-escritos tem relação com a própria construção do ELKO e algumas escolhas de fases adequadas, ver em [24].

de expansão para um possível campo quântico, são eles:  $\lambda_{\pm}^S(\vec{p})$ ,  $\lambda_{\pm}^A(\vec{p})$ ,  $\lambda_{\pm}^S(\vec{p})$  e  $\lambda_{\pm}^A(\vec{p})$ . Sob a atuação dos operadores  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{T}$  essas componentes se relacionam como [24]:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\lambda_{\pm}^S(\vec{p}) &\longrightarrow +\lambda_{\pm}^S(\vec{p}), \\ \mathcal{C}\lambda_{\pm}^A(\vec{p}) &\longrightarrow -\lambda_{\pm}^A(\vec{p}), \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\lambda_{\pm}^S(\vec{p}) &\longrightarrow \lambda_{\mp}^S(\vec{p}), \\ \mathcal{P}\lambda_{\pm}^A(\vec{p}) &\longrightarrow \lambda_{\mp}^A(\vec{p}), \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\lambda_{\pm}^S(\vec{p}) &\longrightarrow \lambda_{\mp}^A(\vec{p}), \\ \mathcal{T}\lambda_{\pm}^A(\vec{p}) &\longrightarrow \lambda_{\mp}^S(\vec{p}). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Nota-se, na equação (5.11), a própria classificação do ELKO em um autoespinor do operador de conjugação de carga. Para o caso da equação (5.12) é possível observar que o ELKO não é um autoespinor do operador de paridade. Por fim, da equação (5.13), percebe-se uma "mistura" entre os tipos de espinores.<sup>10</sup>

Por conta das características descritas acima, faz sentido supor que, em uma construção de estados de uma partícula associados ao ELKO, estes estados não sejam, também, autoespinores do operador de paridade, de maneira que essa relação possa ser dada por

$$\begin{aligned} P\Psi_{\vec{p},\sigma,\pm}^S &= \xi\Psi_{-\vec{p},\sigma,\mp}^S \\ P\Psi_{\vec{p},\sigma,\pm}^A &= \zeta\Psi_{-\vec{p},\sigma,\mp}^A. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Como as paridades intrínsecas são as mesmas, desde que as espécies de partículas sejam as mesmas, tem-se que  $PP\Psi_{\vec{p},\sigma,\pm}^S = P^2\Psi_{\vec{p},\sigma,\pm}^S = \xi P\Psi_{-\vec{p},\sigma,\mp}^S = \xi^2\Psi_{\vec{p},\sigma,\pm}^S \Rightarrow P^2 = \xi^2 = 1$  e o mesmo pode ser feito para o caso de  $\Psi_{\vec{p},\sigma,\pm}^A$ .

Com isso, pode-se definir, para um estado de uma partícula associado ao ELKO, um operador de criação, bem como a atuação da paridade nesse próprio operador. Faz sentido, escolhendo fases de forma que o vácuo se mantenha invariante, que  $b^\dagger(\vec{p}, \sigma, +)$  ao atuar em um estado de vácuo devolva  $b^\dagger(\vec{p}, \sigma, +)\Psi_{vac} = \Psi_{\vec{p},\sigma,\pm}^S$ . Portanto, sob a atuação da paridade

$$Pb^\dagger(\vec{p}, \sigma, \pm)\Psi_{vac} = \zeta b^\dagger(-\vec{p}, \sigma, \mp)P\Psi_{vac} = \zeta b^\dagger(-\vec{p}, \sigma, \mp)\Psi_{vac}, \quad (5.15)$$

mas

$$Pb^\dagger(\vec{p}, \sigma, \pm)\mathbb{1}\Psi_{vac} = Pb^\dagger(\vec{p}, \sigma, \pm)P^{-1}P\Psi_{vac} = Pb^\dagger(\vec{p}, \sigma, \pm)P^{-1}\Psi_{vac}, \quad (5.16)$$

<sup>10</sup> Possíveis escolhas de coeficientes para as equações (5.12) e (5.12) foram omitidos neste ponto do texto, mas quando convenientes, serão adicionados.

então

$$\zeta b^\dagger(-\vec{p}, \sigma, \mp) \Psi_{vac} = P b^\dagger(\vec{p}, \sigma, \pm) P^{-1} \Psi_{vac} \Rightarrow P b^\dagger(\vec{p}, \sigma, \pm) P^{-1} = \zeta b^\dagger(-\vec{p}, \sigma, \mp). \quad (5.17)$$

De acordo com [24], e mantendo uma notação semelhante a [15], a equação para o campo de criação é dada por:

$$\psi^{A-}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \{ d^3 p \lambda_+^A(\vec{p}, \sigma) b^\dagger(\vec{p}, \sigma, +) e^{i\vec{p}\cdot x} + d^3 p \lambda_-^A(\vec{p}, \sigma) b^\dagger(\vec{p}, \sigma, -) e^{i\vec{p}\cdot x} \}. \quad (5.18)$$

Mantendo esta notação, assim como exposto em [23], um possível coeficiente de normalização<sup>11</sup>, digamos  $N$ , é deixado a cargo da relação dos coeficientes em repouso com os coeficientes para qualquer momento

$$\lambda_\pm^A(\vec{p}, \sigma) = N e^{i\vec{k}\cdot\vec{\varphi}} \lambda_\pm^A(\vec{0}, \sigma), \quad (5.19)$$

em que o boost representado por  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{\varphi}}$  segue a notação de [24]. Pode-se investigar, com o desenvolvido até aqui, a atuação da paridade no campo definido anteriormente de maneira que

$$\begin{aligned} P \psi^{A-}(x) P^{-1} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int P \{ d^3 p \lambda_+^A(\vec{p}, \sigma) b^\dagger(\vec{p}, \sigma, +) e^{i\vec{p}\cdot x} + d^3 p \lambda_-^A(\vec{p}, \sigma) b^\dagger(\vec{p}, \sigma, -) e^{i\vec{p}\cdot x} \} P^{-1} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 p \{ \lambda_+^A(\vec{p}, \sigma) P b^\dagger(\vec{p}, \sigma, +) P^{-1} + \lambda_-^A(\vec{p}, \sigma) P b^\dagger(\vec{p}, \sigma, -) P^{-1} \} e^{i\vec{p}\cdot x} \\ &= \zeta \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 p \{ \lambda_+^A(\vec{p}, \sigma) \zeta b^\dagger(-\vec{p}, \sigma, -) + \lambda_-^A(\vec{p}, \sigma) \zeta b^\dagger(-\vec{p}, \sigma, +) \} e^{i\vec{p}\cdot x}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

É importante ressaltar que na equação (5.20) os operadores  $P$  e  $P^{-1}$  não atuam nos coeficientes de expansão, apenas nos operadores de criação para os quais fora utilizada a equação (5.17). Percebe-se também, na equação anterior, que é possível se realizar uma mudança de variável da forma  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ , fazendo com que (5.20) passe a ser

$$P \psi^{A-}(x) P^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \zeta \int d^3 p \{ \lambda_+^A(-\vec{p}, \sigma) b^\dagger(\vec{p}, \sigma, -) + \lambda_-^A(-\vec{p}, \sigma) b^\dagger(\vec{p}, \sigma, +) \} e^{i\vec{p}\cdot x}, \quad (5.21)$$

neste caso deve-se atentar para um sinal em  $e^{-i\vec{p}\cdot x}$ , mas que no fim das contas, pode ser atribuído a uma transformação da paridade no próprio  $x$ , ou seja,  $-\vec{p}\cdot x = \vec{p}\cdot \mathbf{p}x$ , então  $e^{-i\vec{p}\cdot x} = e^{i\vec{p}\cdot \mathbf{p}x}$ .

Com o conhecimento da equação (5.19), espera-se que

$$\lambda_\pm^A(-\vec{p}, \sigma) = N e^{-i\vec{k}\cdot\vec{\varphi}} \lambda_\pm^A(\vec{0}, \sigma), \quad (5.22)$$

<sup>11</sup> Em conformidade com a análise feita em [23], este coeficiente de normalização não afeta os resultados obtidos.

no entanto, pode-se ter

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\lambda_{\pm}^A(-\vec{p}, \sigma) &= \mathcal{P}N e^{-i\vec{k}\cdot\vec{\varphi}} \lambda_{\pm}^A(\vec{0}, \sigma) \\
&= N e^{+i\vec{k}\cdot\vec{\varphi}} \mathcal{P}\lambda_{\pm}^A(\vec{0}, \sigma) \\
&= N \mathbb{1} e^{+i\vec{k}\cdot\vec{\varphi}} \mathcal{P}\lambda_{\pm}^A(\vec{0}, \sigma) \\
&= N \mathcal{P} \mathcal{P}^{-1} e^{+i\vec{k}\cdot\vec{\varphi}} \mathcal{P}\lambda_{\pm}^A(\vec{0}, \sigma).
\end{aligned}$$

De onde vê-se que

$$\mathcal{P}^{-1} \mathcal{P} \lambda_{\pm}^A(-\vec{p}, \sigma) = N \mathcal{P}^{-1} \mathcal{P} \mathcal{P}^{-1} e^{+i\vec{k}\cdot\vec{\varphi}} \mathcal{P} \lambda_{\pm}^A(\vec{0}, \sigma),$$

ou seja,

$$\lambda_{\pm}^A(-\vec{p}, \sigma) = \mathcal{P} e^{+i\vec{k}\cdot\vec{\varphi}} \mathcal{P} \lambda_{\pm}^A(\vec{0}, \sigma), \quad (5.23)$$

uma vez que  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{-1}$  e  $\{\vec{k}, \gamma_0\} = 0$ . Ocorre que, conforme [24], a atuação de  $\mathcal{P}$  em  $\lambda_{\pm}^A(\vec{0}, \sigma)$ , levando em conta a escolha de fases para que a teoria do ELKO seja relativística, é

$$\mathcal{P} \lambda_{\pm}^A(\vec{0}, \sigma) = \mp i \lambda_{\mp}^A(\vec{0}, \sigma), \quad (5.24)$$

consequentemente, aplicando (5.24) em (5.23) e levando em conta que  $N^{-1} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{\varphi}} \lambda_{\pm}^A(\vec{p}, \sigma) = \lambda_{\pm}^A(\vec{0}, \sigma)$

$$\lambda_{\pm}^A(-\vec{p}, \sigma) = \mp i N \mathcal{P} e^{+i\vec{k}\cdot\vec{\varphi}} \lambda_{\mp}^A(\vec{0}, \sigma) = \mp i N \mathcal{P} e^{+i\vec{k}\cdot\vec{\varphi}} N^{-1} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{\varphi}} \lambda_{\mp}^A(\vec{p}, \sigma) = \mp i \lambda_{\mp}^A(\vec{p}, \sigma). \quad (5.25)$$

Substituindo esse resultado na equação (5.21), tem-se

$$\begin{aligned}
P\psi^{A-}(x)P^{-1} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \zeta \int d^3p \{ -i\mathcal{P}\lambda_{-}^A(\vec{p}, \sigma)b^{\dagger}(\vec{p}, \sigma, -) + i\mathcal{P}\lambda_{+}^A(\vec{p}, \sigma)b^{\dagger}(\vec{p}, \sigma, +) \} e^{i\vec{p}\cdot\mathbf{p}x} = \\
&= \frac{i\zeta}{(2\pi P)^{3/2}} \int d^3p \mathcal{P} \{ -\lambda_{-}^A(\vec{p}, \sigma)b^{\dagger}(\vec{p}, \sigma, -) + \lambda_{+}^A(\vec{p}, \sigma)b^{\dagger}(\vec{p}, \sigma, +) \} e^{i\vec{p}\cdot\mathbf{p}x} = \\
&= \frac{i\zeta}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \mathcal{P} \{ \lambda_{+}^A(\vec{p}, \sigma)b^{\dagger}(\vec{p}, \sigma, +) - \lambda_{-}^A(\vec{p}, \sigma)b^{\dagger}(\vec{p}, \sigma, -) \} e^{i\vec{p}\cdot\mathbf{p}x}.
\end{aligned} \quad (5.26)$$

Note o surgimento de um sinal relativo entre os coeficientes de expansão do campo na equação (5.26) quando comparada com a equação (5.18) para o campo ainda não transformado. Uma análise semelhante pode ser feita para o campo de aniquilação, e dado o comportamento dos espinores sob a paridade, o mesmo problema com o sinal aparecerá, com a respectiva diferença na paridade intrínseca ( $\zeta$  passa a ser  $\xi$ ).

Devido aos vínculos impostos pela equação (5.24) (o comportamento dos espinores ELKO sob a ação da paridade em uma teoria relativística), a escolha das fases  $\zeta$  e  $\xi$  não pode ser feita da maneira

como é feita no caso usual de Dirac. Soma-se a esse fato o surgimento do sinal relativo<sup>12</sup> tanto na equação do campo de criação quanto na equação do campo de aniquilação. Por conseguinte,<sup>13</sup> para o caso do campo do tipo ELKO, não é possível ser feita uma escolha entre as paridades intrínsecas  $\zeta$  e  $\xi$  para que uma equação do tipo (5.9) prevaleça.

Assim, esses resultados permitem inferir que, dado o campo total relacionado ao ELKO (criação  $\Psi^{A-}$  + aniquilação  $\Psi^{S+}$ ) como

$$\psi(x) \propto \psi(x)^{S+} + \psi(x)^{A-}, \quad (5.27)$$

tem-se que

$$\begin{aligned} P\psi(x)P^{-1} &\propto P\psi(x)^{S+}P^{-1} + P\psi(x)^{A-}P^{-1} \\ \Rightarrow P\psi(x)P^{-1} &\propto \mathcal{P}\psi'(-x)^{S+} + \mathcal{P}\psi'(-x)^{A-}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$P\psi(x)P^{-1} \propto \mathcal{P} \{ \psi'(-x)^{S+} + \psi'(-x)^{A-} \},$$

isto é,

$$P\psi(x)P^{-1} \propto \mathcal{P}\psi'(-x), \quad (5.28)$$

mas devido ao comportamento dos sinais já explicitado, pode-se concluir que  $\psi \neq \psi'$ .

O resultado de (5.28) entra em contraste com o que se espera de um campo quântico relativístico usual, relacionado à partículas com massa e spin 1/2. Conforme visto por Lee e Wick em [22], é condição necessária que um campo para esse caso se comporte como na equação (5.9), portanto o campo associado ao ELKO viola essa condição.

Ora, o fato do campo quântico construído a partir de coeficientes de expansão que são do tipo ELKO permitir a violação da condição da equação (5.9) para campos usuais, aliado a uma outra característica desse mesmo campo, sugere que estados de uma partícula associados ao ELKO sejam bons candidatos a pertencer às classes não-usuais de Wigner. Essa outra característica é o fato desse campo ser, por construção, verdadeiramente neutro, ou seja, não possuir algum tipo de simetria interna<sup>14</sup>. Veja que, essa última característica, permite que nenhuma das duas condições encontradas por Lee e Wick em [22], para restringir os valores de  $T^2$  e  $(CPT)^2$ , sejam satisfeitas.

Estabelecido que campos associados ao ELKO são bons candidatos, basta que se construa a atuação dos operadores  $C$ ,  $P$  e  $T$  em estados de uma partícula associados a esses campos para que seja possível investigar a possibilidade da existência de classes não-usuais.

<sup>12</sup> Para o caso usual de Dirac tem-se que  $-\eta^* = \bar{\eta}$ , além do fato de não aparecer um sinal relativo entre os coeficientes de expansão.

<sup>13</sup> Tendo em conta que  $-\eta^* = \bar{\eta}$ , bem como o não aparecimento de um sinal relativo entre os coeficientes de expansão.

<sup>14</sup> Nesse caso, a noção de simetria interna deve ser entendida como a mesma descrita em [22]. Nada impede que simetrias internas relacionadas especificamente ao ELKO apareçam.

Começemos pela observação, já feita anteriormente para justificar a equação (5.14), sobre a atuação da paridade nesses estados. Como visto em (5.14), essa atuação deve ser dada por

$$\begin{aligned} P\Psi_{\vec{p},\sigma,\pm}^S &= \xi\Psi_{-\vec{p},\sigma,\mp}^S \\ P\Psi_{\vec{p},\sigma,\pm}^A &= \zeta\Psi_{-\vec{p},\sigma,\mp}^A. \end{aligned} \quad (5.29)$$

No caso da atuação do operador  $C$ , deve ser feita uma observação importante. Diferentemente da atuação de  $C$  em espinores para o caso usual (ou alguma outra representação espinorial), em que o operador  $C$  ganha a forma de  $\mathcal{C}$  e é necessário que ele seja antiunitário, para o caso de uma atuação mais fundamental<sup>15</sup>, nos estados de uma partícula, espera-se em TQC que esse operador seja unitário e a única exigência é que ele relacione partículas com antipartículas<sup>16</sup>. Para o caso dos estados associados ao ELKO, a proposta de atuação do operador<sup>17</sup>  $C$  será dada por

$$\begin{aligned} C\Psi_{\vec{p},\sigma,\pm}^S &= +\Psi_{\vec{p},\sigma,\pm}^S \\ C\Psi_{\vec{p},\sigma,\pm}^A &= -\Psi_{\vec{p},\sigma,\pm}^A. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Resta agora a construção da atuação de  $T$  sobre os estados de uma partícula associados ao ELKO. Para tanto, é válida a hipótese sugerida por Weinberg no Apêndice C de [15]. Lá, o autor sugere a ideia de que uma vez trabalhando com a possibilidade de estados de uma partícula com degenerescências além do spin, deve-se levar em conta a possibilidade da representação de  $T$  para esses casos não ser a mesma representação dada para o caso sem degenerescência. Segundo Weinberg, nem mesmo o apelo de Wigner em [21] à estrutura do grupo de Poincarè completo (com as simetrias discretas) parece ser suficiente para impedir essas tais representações diferentes. Sendo assim, para o caso da presença de degenerescências além do spin, uma forma possível de  $T$  atuar é

$$T\psi_{\vec{p},\sigma,n} = (-1)^{j-\sigma} \sum_m \mathcal{I}_{mn} \psi_{-\vec{p},-\sigma,m}, \quad (5.31)$$

Percebe-se de imediato que a única informação possível de se extrair da equação (5.31) diz respeito à unitariedade da matriz  $\mathcal{I}_{mn}$ . Como o operador  $T$  é antiunitário sabe-se que deve ser escrito como uma combinação de um operador antiunitário por um operador unitário (ver [16]). Pois bem, a presença do fator  $(-1)^{j-\sigma}$  deve-se justamente a atuação da anti-unitariedade de  $T$  no estado de uma partícula, por conseguinte resta a matriz  $\mathcal{I}_{mn}$  ser unitária.

A fim de simplificar a transformação presente na equação (5.31), bem como conhecer o funcionamento da matriz  $\mathcal{I}_{mn}$ , tomemos uma mudança de base na forma de uma transformação unitária como

$$\psi'_{\vec{p},\sigma,n} = \sum_m \mathcal{U}_{mn} \psi_{\vec{p},\sigma,m}. \quad (5.32)$$

<sup>15</sup> Como justificado por Weinberg na página 131 de [22].

<sup>16</sup> Isso remete a  $C$  unitário.

<sup>17</sup> Vale notar, que existe uma discussão acerca da unitariedade ou anti-unitariedade de  $C$  em [22], no entanto, ao que parece, é importante que a simetria  $CPT$  seja antiunitária, o que para o exemplo trabalhado continua acontecendo, uma vez que mesmo  $C$  unitário o resultado de  $CPT$  continua sendo antiunitário.

A atuação do operador  $T$  neste novo estado deve ser

$$T\psi'_{\vec{p},\sigma,n} = (-1)^{j-\sigma} \sum_m \mathcal{T}'_{mn} \psi'_{-\vec{p},-\sigma,m}. \quad (5.33)$$

No entanto, deve-se notar que  $T$  atua na equação (5.32) como

$$T\psi'_{\vec{p},\sigma,n} = T \left( \sum_m \mathcal{U}_{mn} \psi_{\vec{p},\sigma,m} \right) = \sum_m \mathcal{U}_{mn}^* T\psi_{\vec{p},\sigma,m} = \sum_m \mathcal{U}_{mn}^* (-1)^{j-\sigma} \sum_n \mathcal{T}_{nm} \psi_{-\vec{p},-\sigma,n}. \quad (5.34)$$

Para que se possa comparar, a equação (5.33) com a equação (5.34), como abaixo

$$(-1)^{j-\sigma} \sum_m \mathcal{U}_{mn}^* \sum_n \mathcal{T}_{nm} \psi_{-\vec{p},-\sigma,n} = (-1)^{j-\sigma} \sum_m \mathcal{T}'_{mn} \psi'_{-\vec{p},-\sigma,m}, \quad (5.35)$$

é necessário que ambas retornem o mesmo estado transformado. Para tanto, toma-se

$$\psi'_{-\vec{p},-\sigma,m} = \sum_n \mathcal{U}_{nm} \psi_{-\vec{p},-\sigma,n}, \quad (5.36)$$

e inserindo (5.36) na equação (5.35) tem-se

$$(-1)^{j-\sigma} \sum_m \mathcal{U}_{mn}^* \sum_n \mathcal{T}_{nm} \psi_{-\vec{p},-\sigma,n} = (-1)^{j-\sigma} \sum_m \mathcal{T}'_{mn} \sum_n \mathcal{U}_{nm} \psi_{-\vec{p},-\sigma,n}, \quad (5.37)$$

com isso conclui-se que

$$\mathcal{U}_{mn}^* \mathcal{T}_{nm} = \mathcal{T}'_{mn} \mathcal{U}_{nm}. \quad (5.38)$$

Note que

$$(\mathcal{U}_{mn}^* \mathcal{T}_{nm})^T = (\mathcal{T}'_{mn} \mathcal{U}_{nm})^T \Rightarrow (\mathcal{T}_{nm})^T (\mathcal{U}_{mn}^*)^T = (\mathcal{U}_{nm})^T (\mathcal{T}'_{mn})^T,$$

logo

$$\mathcal{T}_{nm} \mathcal{U}_{mn}^* = \mathcal{U}_{nm} \mathcal{T}'_{mn} \quad (5.39)$$

e conseqüentemente pode-se fazer

$$\mathcal{T}_{nm} \mathcal{U}_{mn}^* = \mathcal{U}_{nm} \mathcal{T}'_{mn} \Rightarrow \mathcal{U}_{nm} \mathcal{U}_{nm}^{-1} \mathcal{T}'_{mn} = \mathcal{U}_{mn}^* \mathcal{T}_{nm} \mathcal{U}_{nm}^{-1} \Rightarrow \mathcal{T}'_{mn} = \mathcal{U}_{nm}^{-1} \mathcal{T}_{nm} \mathcal{U}_{mn}^*, \quad (5.40)$$

ou seja,

$$\mathcal{T}'_{mn} = \mathcal{U}_{mn}^{-1} \mathcal{T}_{nm} \mathcal{U}_{mn}^*, \quad (5.41)$$

cujas disposição final, desde que sejam abandonados os subíndices, é

$$\mathcal{T}' = \mathcal{U}^{-1} \mathcal{T} \mathcal{U}^*. \quad (5.42)$$

A equação (5.42) fornece a informação de que  $\mathcal{T}'$  é uma matriz unitária uma vez que é escrita como o produto de outras três matrizes unitárias. No entanto, este tipo de transformação unitária não é uma transformação da forma  $A = U^{-1}BU$  (similaridade) utilizada para diagonalizar matrizes. Vejamos o que pode ser feito a respeito.

Tomando o complexo conjugado de  $\mathcal{T}'$  tem-se

$$(\mathcal{T}')^* = (\mathcal{U}^{-1} \mathcal{T} \mathcal{U}^*)^* = (\mathcal{U}^{-1})^* \mathcal{T}^* \mathcal{U} \quad (5.43)$$

e fazendo o produto de (5.42) com (5.43) obtém-se

$$\mathcal{T}' \mathcal{T}'^* = \mathcal{U}^{-1} \mathcal{T} \mathcal{U}^* (\mathcal{U}^*)^{-1} \mathcal{T}^* \mathcal{U} = \mathcal{U}^{-1} \mathcal{T} \mathcal{T}^* \mathcal{U}. \quad (5.44)$$

A equação (5.44) é, de fato, uma transformação unitária de similaridade e pode ser utilizada para diagonalizar  $\mathcal{T} \mathcal{T}^*$ .

Considerando que esta diagonalização tenha sido feita, é de se esperar que

$$\mathcal{T}' \mathcal{T}'^* = D, \quad (5.45)$$

para  $D$  uma matriz diagonal.

Como  $D$  é uma matriz diagonal, sabe-se que  $D = (D)^T$  uma vez que toda matriz diagonal é simétrica, e tendo em vista que  $\mathcal{T}'$  é unitária também se sabe que  $\mathcal{T}'^\dagger \mathcal{T}' = \mathbb{1}$ . Com isso, tem-se que

$$D = (\mathbb{1} D)^T = (\mathcal{T}'^\dagger \mathcal{T}' D)^T = (\mathcal{T}'^{*T} \mathcal{T}' D)^T = (D)^T (\mathcal{T}')^T (\mathcal{T}'^{*T})^T = D \mathcal{T}'^T \mathcal{T}'^*, \quad (5.46)$$

ou seja,  $D = D \mathcal{T}'^T \mathcal{T}'^*$ . Inserindo este resultado na equação (5.45) tem-se

$$\mathcal{T}' \mathcal{T}'^* = D \mathcal{T}'^T \mathcal{T}'^*,$$

ou seja,

$$\mathcal{T}' \mathcal{T}'^* (\mathcal{T}'^*)^{-1} = D \mathcal{T}'^T \mathcal{T}'^* (\mathcal{T}'^*)^{-1} \Rightarrow \mathcal{T}' = D \mathcal{T}'^T, \quad (5.47)$$

por fim, abandonando os símbolos super-escritos, encontra-se a forma

$$\mathcal{T} = D \mathcal{T}^T. \quad (5.48)$$

A equação (5.48) é o vínculo necessário para que se possa entender a construção da matriz que representa a atuação do operador  $T$  em estados de uma partícula com degenerescências além do spin. Neste ponto é importante chamar a atenção para um aspecto desta construção, o aspecto da escolha das fases. Como  $D$  é uma matriz unitária, ela pertence ao grupo  $U(n)$  e pode ser representada como  $e^{i\varphi}$ . Além de unitária, a matriz  $D$  também é diagonal, de maneira que a representação de  $D$  em sua forma exponencial se manifesta nos elementos da diagonal principal, ou seja, cada elemento da diagonal terá uma fase arbitrária do tipo  $e^{i\varphi_n}$ , em que  $n$  varia tanto quanto são os elementos da diagonal principal de  $D$ . Para os outros elementos da matriz  $D$  os valores serão zero.

Analisando a equação (5.48) com o que se sabe de  $D$ , pode-se supor que a origem de uma possível fase, na atuação de  $T$  sobre os estados, deve-se originar justamente das fases de  $D$ . No entanto, essas fases, por construção, não possuem nenhum caráter de obrigatoriedade em suas escolhas. Esta característica permite que as fases sejam tomadas de acordo com a necessidade do problema em questão, sempre respeitando o vínculo imposto por (5.48). Vejamos como a equação (5.48) se manifesta em sua forma matricial e quais resultados podem ser extraídos desta representação.

Para efeito de análise, vamos supor que as matrizes sejam do tipo  $4 \times 4$ , assim a equação (5.48) fica

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} & t_{41} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} & t_{42} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} & t_{43} \\ t_{14} & t_{24} & t_{34} & t_{44} \end{pmatrix}, \quad (5.49)$$

resultando em

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1}t_{11} & e^{i\varphi_1}t_{21} & e^{i\varphi_1}t_{31} & e^{i\varphi_1}t_{41} \\ e^{i\varphi_2}t_{12} & e^{i\varphi_2}t_{22} & e^{i\varphi_2}t_{32} & e^{i\varphi_2}t_{42} \\ e^{i\varphi_3}t_{13} & e^{i\varphi_3}t_{23} & e^{i\varphi_3}t_{33} & e^{i\varphi_3}t_{43} \\ e^{i\varphi_4}t_{14} & e^{i\varphi_4}t_{24} & e^{i\varphi_4}t_{34} & e^{i\varphi_4}t_{44} \end{pmatrix}. \quad (5.50)$$

Nota-se da equação (5.50), de imediato, que para o caso da diagonal principal tem-se, por exemplo, que  $t_{11} = e^{i\varphi_1}t_{11}$ , o que implica  $e^{i\varphi_1} = 1$  ou  $e^{i\varphi_1}t_{11} = 0$ . No caso em que, por exemplo,  $e^{i\varphi_1} = 1$ , mas  $e^{i\varphi_3} \neq 1$ , deve-se ter  $t_{13} = t_{31} = 0$ , uma vez que  $t_{13} = e^{i\varphi_1}t_{31} = t_{31}$  e  $t_{31} = e^{i\varphi_3}t_{13} = e^{i\varphi_3}e^{i\varphi_1}t_{31}$ ; como  $e^{i\varphi_3}e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_3} \neq 1$  isso implica  $t_{13} = t_{31} = 0$ .

Então, para este caso, tomando  $e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2} = 1$  e  $e^{i\varphi_3} \neq 1$ , bem como  $e^{i\varphi_4} \neq 1$ , a equação (5.50) passa a ter a forma

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & 0 & 0 \\ t_{12} & t_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi_3}t_{43} \\ 0 & 0 & e^{i\varphi_4}t_{34} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.51)$$

podendo ser colocada em uma forma bloco-diagonal como

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathcal{B}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \text{ com } \mathcal{A} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \end{pmatrix} \text{ e } \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi_3}t_{43} \\ e^{i\varphi_4}t_{34} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.52)$$

Percebe-se que  $\mathcal{A}$  é simétrica, então  $A = e^S$  também o é, mas  $\mathcal{A}$  também é unitária (unitariedade passada de  $\mathcal{T}$  para os seus blocos constituintes) e por isso pode ser representada por uma exponencial com uma matriz anti-hermitiana, de maneira que se  $S$  for hermitiana  $iS$  vai ser anti-hermitiana. Com isso, a matriz  $\mathcal{A}$  pode ser representada como uma exponencial de uma matriz simétrica e anti-hermitiana e

neste caso, poderá ser unitariamente diagonalizada com uma transformação do tipo  $R^{-1} \mathcal{T} R$  como

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}_{2 \times 2}^{-1} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathcal{B}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{2 \times 2}^{-1} \mathcal{A}_{2 \times 2} \mathcal{U}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad (5.53)$$

uma vez que  $\mathcal{U}$  é real e conseqüentemente  $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}$  e a diagonalização unitária ocorre apenas em  $\mathcal{A}$ . Por conseguinte, a matriz que se encontra resultante no lugar de  $\mathcal{A}$  é uma matriz que também possui fases escritas como exponenciais apenas na diagonal principal.

Com esse resultado, faz-se necessário que sejam estudadas as possibilidades para a matriz  $\mathcal{B}$ . Para tanto, notemos que  $t_{43} = e^{i\varphi_4} t_{34}$  e  $t_{34} = e^{i\varphi_3} t_{43}$ , mas  $e^{i\varphi_4} \neq 1$  e  $e^{i\varphi_3} \neq 1$ , então devemos ter  $e^{i\varphi_4} = e^{-i\varphi_3}$  e a matriz  $\mathcal{B}$  fica

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi_3} t_{43} \\ e^{-i\varphi_3} t_{34} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.54)$$

Perceba que a unitariedade herdada por  $\mathcal{A}$  também deverá ser herdada por  $\mathcal{B}$ , conseqüentemente deve-se ter  $t_{43}(t_{43})^{*T} = 1$  que é o mesmo que  $t_{43}(t_{34})^* = 1$ , mas  $t_{43} = t_{34}$ , portanto  $t_{43}(t_{43})^* = 1$ . Supondo que  $t_{43}$  seja número complexo qualquer  $z = a + ib$ , então  $zz^* = 1 \Rightarrow |z| = 1$ , podendo, então, tomar-se  $z = 1$  e conseqüentemente  $t_{43} = t_{34} = 1$ . Com esse resultado  $\mathcal{B}$  pode ser escrita como

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi_3} \\ e^{-i\varphi_3} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.55)$$

Com isso, e pelo fato das fases poderem ser quaisquer (podendo ser colocadas sob uma maneira conveniente), a forma final de  $\mathcal{T}$  pode ser escrita como<sup>18</sup>

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi'/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi''/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi'''/2} \\ 0 & 0 & e^{-i\varphi'''/2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.56)$$

Tomemos como exemplo a atuação de (5.56) em um caso para o qual se tem estados de uma partícula com possíveis degenerescências; sejam essas degenerescências rotuladas com os números 1, 2, 3 e 4. Para este caso teremos

$$\begin{aligned} T\psi_{\vec{p},\sigma,1} &= (-1)^{j-\sigma} \sum_{m=1,2,3,4} \mathcal{T}_{m1} \psi_{-\vec{p},-\sigma,m} \\ &= (-1)^{j-\sigma} (\mathcal{T}_{11} \psi_{-\vec{p},-\sigma,1} + \mathcal{T}_{21} \psi_{-\vec{p},-\sigma,2} + \mathcal{T}_{31} \psi_{-\vec{p},-\sigma,3} + \mathcal{T}_{41} \psi_{-\vec{p},-\sigma,4}) \\ &= (-1)^{j-\sigma} (\mathcal{T}_{11} \psi_{-\vec{p},-\sigma,1}) = (-1)^{j-\sigma} e^{i\varphi'/2} \psi_{-\vec{p},-\sigma,1}, \end{aligned} \quad (5.57)$$

<sup>18</sup> A notação dos símbolos sobrescritos ' serve para diferenciar os possíveis  $\varphi$ 's, ou seja, todas as vezes em que os símbolos forem iguais em quantidade quer dizer que os  $\varphi$ 's são os mesmos.

$$\begin{aligned}
T\psi_{\vec{p},\sigma,2} &= (-1)^{j-\sigma} \sum_{m=1,2,3,4} \mathcal{T}_{m2}\psi_{-\vec{p},-\sigma,m} \\
&= (-1)^{j-\sigma} (\mathcal{T}_{12}\psi_{-\vec{p},-\sigma,1} + \mathcal{T}_{22}\psi_{-\vec{p},-\sigma,2} + \mathcal{T}_{32}\psi_{-\vec{p},-\sigma,3} + \mathcal{T}_{42}\psi_{-\vec{p},-\sigma,4}) \\
&= (-1)^{j-\sigma} (\mathcal{T}_{22}\psi_{-\vec{p},-\sigma,2}) = (-1)^{j-\sigma} e^{i\varphi''/2}\psi_{-\vec{p},-\sigma,2},
\end{aligned} \tag{5.58}$$

$$\begin{aligned}
T\psi_{\vec{p},\sigma,3} &= (-1)^{j-\sigma} \sum_{m=1,2,3,4} \mathcal{T}_{m3}\psi_{-\vec{p},-\sigma,m} \\
&= (-1)^{j-\sigma} (\mathcal{T}_{13}\psi_{-\vec{p},-\sigma,1} + \mathcal{T}_{23}\psi_{-\vec{p},-\sigma,2} + \mathcal{T}_{33}\psi_{-\vec{p},-\sigma,3} + \mathcal{T}_{43}\psi_{-\vec{p},-\sigma,4}) \\
&= (-1)^{j-\sigma} (\mathcal{T}_{43}\psi_{-\vec{p},-\sigma,4}) = (-1)^{j-\sigma} e^{-i\varphi'''/2}\psi_{-\vec{p},-\sigma,4},
\end{aligned} \tag{5.59}$$

$$\begin{aligned}
T\psi_{\vec{p},\sigma,4} &= (-1)^{j-\sigma} \sum_{m=1,2,3,4} \mathcal{T}_{m4}\psi_{-\vec{p},-\sigma,m} \\
&= (-1)^{j-\sigma} (\mathcal{T}_{14}\psi_{-\vec{p},-\sigma,1} + \mathcal{T}_{24}\psi_{-\vec{p},-\sigma,2} + \mathcal{T}_{34}\psi_{-\vec{p},-\sigma,3} + \mathcal{T}_{44}\psi_{-\vec{p},-\sigma,4}) \\
&= (-1)^{j-\sigma} (\mathcal{T}_{34}\psi_{-\vec{p},-\sigma,3}) = (-1)^{j-\sigma} e^{i\varphi'''/2}\psi_{-\vec{p},-\sigma,3}.
\end{aligned} \tag{5.60}$$

Notemos que nos dois primeiros casos

$$T\psi_{\vec{p},\sigma,1} = (-1)^{j-\sigma} e^{i\varphi'/2}\psi_{-\vec{p},-\sigma,1} \tag{5.61}$$

e

$$T\psi_{\vec{p},\sigma,2} = (-1)^{j-\sigma} e^{i\varphi''/2}\psi_{-\vec{p},-\sigma,2}, \tag{5.62}$$

embora as fases em forma de exponenciais apareçam, elas podem ser suprimidas, uma vez que sempre será possível fazer, como por exemplo,  $\psi_{\vec{p},\sigma,1} = e^{-i\varphi'/4}\psi'_{\vec{p},\sigma,1}$ , e assim ter  $\psi_{-\vec{p},-\sigma,1} = e^{-i\varphi'/4}\psi'_{-\vec{p},-\sigma,1}$ , ou seja, sob a atuação de  $T$

$$T\psi_{\vec{p},\sigma,1} = (-1)^{j-\sigma} e^{i\varphi'/2}\psi_{-\vec{p},-\sigma,1} = (-1)^{j-\sigma} e^{i\varphi'/2} e^{-i\varphi'/4}\psi'_{-\vec{p},-\sigma,1}, \tag{5.63}$$

$$T\psi_{\vec{p},\sigma,1} = T e^{-i\varphi'/4}\psi'_{\vec{p},\sigma,1} = e^{i\varphi'/4} T\psi'_{\vec{p},\sigma,1}, \tag{5.64}$$

então

$$e^{i\varphi'/4} T\psi'_{\vec{p},\sigma,1} = (-1)^{j-\sigma} e^{i\varphi'/2} e^{-i\varphi'/4}\psi'_{-\vec{p},-\sigma,1} = (-1)^{j-\sigma} e^{i\varphi'/4}\psi'_{-\vec{p},-\sigma,1}$$

que nos leva a

$$T\psi'_{\vec{p},\sigma,1} = (-1)^{j-\sigma}\psi'_{-\vec{p},-\sigma,1}. \tag{5.65}$$

A mesma análise pode ser feita para o caso da degenerescência 2. No entanto, o mesmo não

pode se dizer dos casos 3 e 4, pois os estados de uma partícula associados aos estados antes de serem transformados por  $T$  estão trocados, ou seja,

$$T\psi_{\vec{p},\sigma,3} = (-1)^{j-\sigma} e^{-i\varphi'''/2} \psi_{-\vec{p},-\sigma,4}, \quad (5.66)$$

$$T\psi_{\vec{p},\sigma,4} = (-1)^{j-\sigma} e^{i\varphi'''/2} \psi_{-\vec{p},-\sigma,3}. \quad (5.67)$$

Este fato joga luz sobre um aspecto importante da forma como a matriz  $\mathcal{T}$  pode ser construída: mesmo as fases podendo ser escolhidas de maneira arbitrária, a depender da escolha, a forma final da matriz  $\mathcal{T}$  não irá surtir efeito nos estados com degenerescência, pelo menos não o bloco da matriz  $\mathcal{T}$  para o qual as fases estejam dispostas na diagonal principal ao invés da diagonal secundária. Isso impõe uma restrição na escolha das fases, caso se queira trabalhar com os estados de uma partícula com degenerescências além do spin, de maneira a se perceber a existência destas mesmas degenerescências, é condição necessária que as fases sejam escolhidas respeitando os vínculos impostos pela equação (5.48) ao mesmo tempo que estes vínculos permitam uma construção da matriz  $\mathcal{T}$  adequada, ou seja, com as fases dispostas na diagonal secundária.

A essa altura, duas perguntas devem surgir naturalmente, o que aconteceria com a análise feita caso a matriz fosse de ordem superior? E o que aconteceria com essa matriz caso outras combinações de fase fossem feitas? Pois bem, respondendo a primeira pergunta, o que poderia acontecer é que, respeitando os mesmos vínculos que foram analisados, a equação (5.51) seria escrita como

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} & t_{17} & t_{18} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} & t_{25} & t_{26} & t_{27} & t_{28} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} & t_{35} & t_{36} & t_{37} & t_{38} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} & t_{45} & t_{46} & t_{47} & t_{48} \\ t_{51} & t_{52} & t_{53} & t_{54} & t_{55} & t_{56} & t_{57} & t_{58} \\ t_{61} & t_{62} & t_{63} & t_{64} & t_{65} & t_{66} & t_{67} & t_{68} \\ t_{71} & t_{72} & t_{73} & t_{74} & t_{75} & t_{76} & t_{77} & t_{78} \\ t_{81} & t_{82} & t_{83} & t_{84} & t_{85} & t_{86} & t_{87} & t_{88} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} & t_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} & t_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} & t_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_{14} & t_{24} & t_{34} & t_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi_5} t_{65} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi_6} t_{56} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi_7} t_{87} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi_8} t_{78} & 0 \end{pmatrix}.$$

Uma análise semelhante a que foi feita para o caso  $4 \times 4$  se seguiria, com a atenção para o fato de que agora, para a matriz  $\mathcal{B}$ , teria-se uma ideia mais generalizada, ou seja, ela seria uma matriz diagonal por blocos do tipo

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi_5} t_{65} & 0 & 0 \\ e^{i\varphi_6} t_{56} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi_7} t_{87} \\ 0 & 0 & e^{i\varphi_8} t_{78} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_2 \end{pmatrix}, \quad (5.68)$$

e seus sub-blocos seriam, após a adequação dos sinais das fases, matrizes do tipo

$$\mathcal{B}_i = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi_i/2} \mathcal{C}_i \\ e^{-i\varphi_i/2} \mathcal{C}_i^\mathcal{T} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.69)$$

Nesse caso, a análise da unitariedade das matrizes será feita sobre as  $\mathcal{B}_i$ , o que implicará uma análise sobre as matrizes  $\mathcal{C}_i$ , ou seja,  $\mathcal{C}_i \mathcal{C}_i^\dagger = \mathcal{C}_i^\dagger \mathcal{C}_i = \mathbb{1}$ . Essa característica implica o fato das matrizes  $\mathcal{C}_i$  serem unitárias e quadradas, com isso as matrizes  $\mathcal{C}_i$  podem sofrer transformações do tipo  $A_i^{-1} \mathcal{C}_i B_i^*$  para que  $\mathcal{C}_i$  possa, de maneira conveniente, ser  $\mathcal{C}_i = \mathbb{1}$ . Devido a sua natureza, independente do tamanho, a matriz  $\mathcal{A}$  sofreria o mesmo processo resultando na mesma forma final, mudando apenas o tamanho de sua diagonal principal.

A outra das duas perguntas a ser respondida é sobre o que aconteceria caso outra escolha de fases fosse feita, de maneira que a matriz não fosse disposta da mesma forma como analisado anteriormente. Caso isso aconteça, os vínculos impostos pela equação (5.48) restringiriam a forma final da matriz da mesma maneira que aconteceu no exemplo da matriz  $4 \times 4$ . Não importa o tamanho da matriz  $\mathcal{T}$  (a depender da quantidade de possíveis degenerescências), para que uma fase se manifeste no estado transformado por  $T$ , sem que possa ser absorvida por uma redefinição de um estado equivalente, é necessário que a disposição das fases na matriz  $\mathcal{T}$  seja bloco-diagonal, com os blocos contendo as respectivas fases em sua diagonal secundária.

Com essas ideias em mente, pode-se particularizar o estudo da atuação de  $T$ , em estados com degenerescência além do spin, para o caso em que se tenha apenas duas degenerescências. Sejam essas degenerescências rotuladas pelos sinais  $+$  e  $-$ , de maneira que a matriz  $\mathcal{T}$  para esse caso tenha a forma

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi/2} \\ e^{-i\varphi/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.70)$$

assim,  $T$  atuará como

$$\begin{aligned} T\psi_{\vec{p},\sigma,+} &= (-1)^{j-\sigma} \sum_{m=-,+} \mathcal{T}_{m+} \psi_{-\vec{p},-\sigma,m} \\ &= (-1)^{j-\sigma} (\mathcal{T}_{-+} \psi_{-\vec{p},-\sigma,-} + \mathcal{T}_{++} \psi_{-\vec{p},-\sigma,+}) \\ &= (-1)^{j-\sigma} (\mathcal{T}_{-+} \psi_{-\vec{p},-\sigma,-}) = (-1)^{j-\sigma} e^{i\varphi/2} \psi_{-\vec{p},-\sigma,-}, \end{aligned} \quad (5.71)$$

$$\begin{aligned} T\psi_{\vec{p},\sigma,-} &= (-1)^{j-\sigma} \sum_{m=-,+} \mathcal{T}_{m-} \psi_{-\vec{p},-\sigma,m} \\ &= (-1)^{j-\sigma} (\mathcal{T}_{--} \psi_{-\vec{p},-\sigma,-} + \mathcal{T}_{+-} \psi_{-\vec{p},-\sigma,+}) \\ &= (-1)^{j-\sigma} (\mathcal{T}_{+-} \psi_{-\vec{p},-\sigma,+}) = (-1)^{j-\sigma} e^{-i\varphi/2} \psi_{-\vec{p},-\sigma,+}, \end{aligned} \quad (5.72)$$

com a convenção de

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi/2} \\ e^{-i\varphi/2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -- & -+ \\ +- & ++ \end{pmatrix}. \quad (5.73)$$

De maneira mais sucinta, tem-se

$$T\psi_{\vec{p},\sigma,\pm} = e^{\pm i\varphi/2}(-1)^{j-\sigma}\psi_{-\vec{p},-\sigma,\mp}. \quad (5.74)$$

Obviamente que, sendo  $T$  dado pela equação (5.74),  $T^2$  será

$$\begin{aligned} T^2\psi_{\vec{p},\sigma,\pm} &= TT\psi_{\vec{p},\sigma,\pm} \\ &= T \left\{ e^{\pm i\varphi/2}(-1)^{j-\sigma}\psi_{-\vec{p},-\sigma,\mp} \right\} \\ &= e^{\mp i\varphi/2}(-1)^{j+\sigma}T\psi_{-\vec{p},-\sigma,\mp} \\ &= e^{\mp i\varphi/2}(-1)^{j+\sigma}(-1)^{j-\sigma}e^{\mp i\varphi/2}\psi_{\vec{p},\sigma,\pm} \\ &= (-1)^{2j}e^{\mp i\varphi}\psi_{\vec{p},\sigma,\pm}, \end{aligned} \quad (5.75)$$

ou seja

$$T^2\psi_{\vec{p},\sigma,\pm} = (-1)^{2j}e^{\mp i\varphi}\psi_{\vec{p},\sigma,\pm} \Rightarrow T^2 = (-1)^{2j}e^{\mp i\varphi}. \quad (5.76)$$

Talvez, como última observação, seja importante salientar que em caso de se existir algum tipo de simetria interna no problema em questão, será possível se definir um operador relacionado a essa simetria de maneira que

$$S\psi_{\vec{p},\sigma,\pm} = e^{\pm i\varphi/2}\psi_{-\vec{p},\sigma,\mp}, \quad (5.77)$$

fazendo com que o operador de reversão temporal possa ser escrito como  $T' \equiv S^{-1}T$ . Assim, dada essa nova definição, o novo operador anularia a existência da fase proveniente de  $T$ , pois

$$S^{-1}S\psi_{\vec{p},\sigma,\pm} = S^{-1}e^{\pm i\varphi/2}\psi_{-\vec{p},\sigma,\mp} = e^{\pm i\varphi/2}S^{-1}\psi_{-\vec{p},\sigma,\mp} = e^{\pm i\varphi/2}e^{\mp i\varphi/2}\psi_{\vec{p},\sigma,\pm} = \psi_{\vec{p},\sigma,\pm}. \quad (5.78)$$

Supondo um operador  $T'$  atuando em um estado de uma partícula com degenerescências além do spin, tem-se

$$\begin{aligned} T'\psi_{\vec{p},\sigma,\pm} &= S^{-1}T\psi_{\vec{p},\sigma,\pm} = S^{-1}e^{\pm i\varphi/2}(-1)^{j-\sigma}\psi_{-\vec{p},-\sigma,\mp} = \\ &= e^{\pm i\varphi/2}(-1)^{j-\sigma}S^{-1}\psi_{-\vec{p},-\sigma,\mp} = e^{\pm i\varphi/2}(-1)^{j-\sigma}e^{\mp i\varphi/2}\psi_{\vec{p},-\sigma,\pm} = \\ &= (-1)^{j-\sigma}\psi_{\vec{p},-\sigma,\pm}, \end{aligned} \quad (5.79)$$

ou seja,

$$T'\psi_{\vec{p},\sigma,\pm} = (-1)^{j-\sigma}\psi_{\vec{p},-\sigma,\pm}. \quad (5.80)$$

Então, com o que fora desenvolvido anteriormente, fica estabelecido que na presença de degenerescências além do spin, rotuladas por  $+$  e  $-$ ,  $T$  atua em um estado de uma partícula como

$$T\psi_{\vec{p},\sigma,\pm} = (-1)^{j-\sigma}e^{\pm i\varphi/2}\psi_{-\vec{p},-\sigma,\mp}, \quad (5.81)$$

em concordância com a forma proposta no Apêndice C de [15].

Ocorre que, para o caso dos espinores do tipo ELKO, a atuação da simetria de reversão temporal sobre os espinores se manifesta como em (5.13). Então é esperado que essa característica seja repassada para os estados de uma partícula como

$$\begin{aligned}
T\Psi_{\vec{p},\sigma,+}^S &\propto (-1)^{1/2-\sigma}\Psi_{-\vec{p},-\sigma,-}^A, \\
T\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^S &\propto (-1)^{1/2-\sigma}\Psi_{-\vec{p},-\sigma,+}^A, \\
T\Psi_{\vec{p},\sigma,+}^A &\propto (-1)^{1/2-\sigma}\Psi_{-\vec{p},-\sigma,-}^S, \\
T\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A &\propto (-1)^{1/2-\sigma}\Psi_{-\vec{p},-\sigma,+}^S.
\end{aligned} \tag{5.82}$$

O surgimento de  $(-1)^{1/2-\sigma}$ , nas equações acima, dá-se pelo fato da álgebra sobre a qual são construídos os geradores de rotações no caso do ELKO ser a mesma álgebra sobre a qual (como faz Weinberg em [15]) são construídos os operadores de rotação para o caso usual, essa álgebra é a álgebra de Lorentz<sup>19</sup>.

Para que as relações em (5.82) sejam dadas por uma igualdade ao invés de uma proporcionalidade, basta que se leve em conta a forma sugerida para  $T$  quando na presença de degenerescências além do spin, ou seja, particularizar a forma da equação (5.81) para spin 1/2. Com isso, tem-se

$$\begin{aligned}
T\Psi_{\vec{p},\sigma,+}^S &= (-1)^{1/2-\sigma}e^{+i\varphi/2}\Psi_{-\vec{p},-\sigma,-}^A, \\
T\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^S &= (-1)^{1/2-\sigma}e^{-i\varphi/2}\Psi_{-\vec{p},-\sigma,+}^A, \\
T\Psi_{\vec{p},\sigma,+}^A &= (-1)^{1/2-\sigma}e^{+i\varphi/2}\Psi_{-\vec{p},-\sigma,-}^S, \\
T\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A &= (-1)^{1/2-\sigma}e^{-i\varphi/2}\Psi_{-\vec{p},-\sigma,+}^S.
\end{aligned} \tag{5.83}$$

Com o desenvolvido até este ponto do texto, tem-se todo o aparato teórico necessário para que se inicie a investigação da existência de estados de uma partícula que pertencem às classes não-usuais de Wigner. Pois bem, comecemos pela investigação sobre  $T^2$ , tomando como base a atuação de  $T$  em  $\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A$  e tendo sempre em vista as equações (5.29), (5.30) e (5.83). A aplicação em  $\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A$  será usada como exemplo para se expressar a relação geral.

Para este caso, tem-se que

$$\bullet T\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = (-1)^{1/2-\sigma}e^{-i\varphi/2}\Psi_{-\vec{p},-\sigma,+}^S.$$

Então

$$\begin{aligned}
TT\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A &= T^2\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = (-1)^{1/2+\sigma}e^{i\varphi/2}T\Psi_{-\vec{p},-\sigma,+}^S \\
&= (-1)^{1/2+\sigma}e^{i\varphi/2}(-1)^{1/2-\sigma}e^{i\varphi/2}\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = -e^{i\varphi}\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A.
\end{aligned}$$

Logo

$$T^2\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = -e^{i\varphi}\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A \quad \therefore T^2 = -e^{i\varphi}. \tag{5.84}$$

<sup>19</sup> Este fato é mostrado em [24].

Para o caso de  $(CPT)^2$ , também atuando em  $\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A$ , tem-se que

$$\begin{aligned}
& \bullet T\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = (-1)^{1/2-\sigma} e^{-i\varphi/2} \Psi_{-\vec{p},-\sigma,+}^S, \\
& \bullet PT\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = (-1)^{1/2-\sigma} e^{-i\varphi/2} P \Psi_{-\vec{p},-\sigma,+}^S = \xi(-1)^{1/2-\sigma} e^{-i\varphi/2} \Psi_{\vec{p},-\sigma,-}^S, \\
& \bullet CPT\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = \xi(-1)^{1/2-\sigma} e^{-i\varphi/2} C\Psi_{\vec{p},-\sigma,-}^S = \xi(-1)^{1/2-\sigma} e^{-i\varphi/2} \Psi_{\vec{p},-\sigma,-}^S, \\
& \bullet TCPT\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = T \{ \xi(-1)^{1/2-\sigma} e^{-i\varphi/2} \Psi_{\vec{p},-\sigma,-}^S \} = \xi(-1)^{1/2+\sigma} e^{+i\varphi/2} T\Psi_{\vec{p},-\sigma,-}^S = \\
& = \xi(-1)^{1/2+\sigma} e^{+i\varphi/2} (-1)^{1/2-\sigma} e^{-i\varphi/2} \Psi_{-\vec{p},\sigma,+}^A, \\
& \bullet PTCPT\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = \xi(-1)^{1/2+\sigma} e^{+i\varphi/2} (-1)^{1/2-\sigma} e^{-i\varphi/2} P\Psi_{-\vec{p},\sigma,+}^A = \\
& = \xi\zeta(-1)^{1/2+\sigma} e^{+i\varphi/2} (-1)^{1/2-\sigma} e^{-i\varphi/2} \Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A, \\
& \bullet CPTCPT\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = \xi\zeta(-1)^{1/2+\sigma} e^{+i\varphi/2} (-1)^{1/2-\sigma} e^{-i\varphi/2} C\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = \\
& = -\xi\zeta(-1)^{1/2+\sigma} e^{+i\varphi/2} (-1)^{1/2-\sigma} e^{-i\varphi/2} \Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = \xi\zeta\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A \\
& \Rightarrow (CPT)^2\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = \xi\zeta\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A \quad \therefore (CPT)^2 = \xi\zeta.
\end{aligned} \tag{5.85}$$

Com o que foi feito é possível estabelecer que os valores de  $T^2$  e  $(CPT)^2$  para estados de uma partícula vinculadas ao ELKO são:

$$T^2 = -e^{i\varphi} \text{ e } (CPT)^2 = \xi\zeta. \tag{5.86}$$

Vale notar que até este ponto, não há restrição sobre os valores possíveis para essas fases, sendo que tanto  $\xi$  quanto  $\zeta$  são as chamadas paridades intrínsecas.

Em uma teoria quântica de campos, é de se esperar que os operadores que representam as atuações das simetrias, tenham operações de comutação ou anti-comutação bem definidas. Neste contexto, talvez seja produtivo investigar como são essas relações para os operadores  $P$ ,  $T$  e  $C$  utilizados nos cálculos de  $T^2$  e  $(CPT)^2$ .

Tomemos a atuação de  $P$  e  $C$  em um estado  $\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A$  como referência, teremos

$$\bullet P\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = \zeta\Psi_{-\vec{p},\sigma,+}^A \Rightarrow CP\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = \zeta C\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = -\zeta\Psi_{-\vec{p},\sigma,+}^A,$$

isto é,

$$CP\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = -\zeta\Psi_{-\vec{p},\sigma,+}^A.$$

$$\bullet C\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = -\Psi_{-\vec{p},\sigma,-}^A \Rightarrow PC\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = -P\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = -\zeta\Psi_{-\vec{p},\sigma,+}^A,$$

ou seja,

$$CP\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = -\zeta\Psi_{-\vec{p},\sigma,+}^A.$$

Portanto

$$PC\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = PC\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A \Rightarrow CP = PC \therefore [C, P] = 0. \quad (5.87)$$

Veamos a atuação de  $T$  e  $C$  em um estado semelhante ao estudado acima. Com isso, tem-se que

$$\bullet CT\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = (-1)^{1/2-\sigma} e^{-i\varphi/2} \Psi_{-\vec{p},-\sigma,+}^S.$$

$$\bullet TC\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = -(-1)^{1/2-\sigma} e^{-i\varphi/2} \Psi_{-\vec{p},-\sigma,+}^S.$$

Assim

$$CT\Psi_{-\vec{p},-\sigma,+}^S = -TC\Psi_{-\vec{p},-\sigma,+}^S \Rightarrow CT = -TC \therefore \{C, T\} = 0. \quad (5.88)$$

Resta agora o estudo para a atuação de  $T$  e  $P$ . Nesse caso, tem-se que

$$\bullet PT\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = \xi(-1)^{1/2-\sigma} e^{-i\varphi/2} \Psi_{\vec{p},-\sigma,-}^S,$$

(5.89)

$$\bullet TP\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = \zeta(-1)^{1/2-\sigma} e^{+i\varphi/2} \Psi_{\vec{p},-\sigma,-}^S.$$

Até aqui, nada pode se afirmar sobre a relação de (anti-)comutação para  $P$  e  $T$ . No entanto, perceba que se pode multiplicar  $PT\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A = \xi(-1)^{1/2-\sigma} e^{-i\varphi/2} \Psi_{\vec{p},-\sigma,-}^S$  por  $(\zeta\xi e^{+i\varphi})$ , assim

$$\begin{aligned} (\zeta\xi e^{+i\varphi})PT\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A &= (\zeta\xi e^{+i\varphi})\xi e^{-i\varphi/2} (-1)^{1/2-\sigma} \Psi_{\vec{p},-\sigma,-}^S = \zeta\xi^2 e^{+i\varphi/2} (-1)^{1/2-\sigma} \Psi_{\vec{p},-\sigma,-}^S = \\ &= \zeta(-1)^{1/2-\sigma} e^{+i\varphi/2} \Psi_{\vec{p},-\sigma,-}^S = TP\Psi_{\vec{p},\sigma,-}^A. \end{aligned}$$

Levando a

$$TP = \zeta\xi e^{+i\varphi} PT. \quad (5.90)$$

Coletando os resultados obtidos são encontradas as seguinte relações:

► Os operadores  $C$  e  $P$  comutam:

$$[C, P] = 0; \quad (5.91)$$

► Os operadores  $C$  e  $T$  anti-comutam:

$$\{C, T\} = 0; \quad (5.92)$$

► Os operadores  $P$  e  $T$  não possuem uma relação definida:

$$TP = \zeta \xi e^{+i\varphi} PT. \quad (5.93)$$

Tudo o que foi desenvolvido até aqui, tanto em relação aos valores de  $T^2$  e  $(CPT)^2$  quanto em relação aos (anti-)comutadores, poderia ter sido feito tomando como referência um dos outros três estados, digamos  $\Psi_{\vec{p}, \sigma, +}^S$ . A diferença nos resultados apareceria como um sinal na exponencial, de maneira que não é errado concluir que as diferenças aparecem por conta de qual degenerescência está sendo utilizada, dado o modo como  $T$  atua nos estados. Por conseguinte, uma maneira mais geral de sintetizar os resultados, que seja capaz de expressar essa diferença no sinal, é:

$$T^2 = -e^{\mp i\varphi} \quad (5.94)$$

e

$$TP = \zeta \xi e^{\mp i\varphi} PT, \quad (5.95)$$

$(CPT)^2$  não sofreria mudança, pois

$$(CPT)^2 = \zeta \xi \quad (5.96)$$

depende apenas das paridades intrínsecas.

O fato da relação entre  $P$  e  $T$  não estar bem definida, a princípio, pode gerar certa estranheza. No entanto, esta indefinição permite que se imponham vínculos nos valores de  $T^2$  e  $(CPT)^2$ . Vejamos quais<sup>20</sup>

◆ Para o caso em que  $[T, P] = 0$ :

$$[T, P] = 0 \Rightarrow TP = PT \Rightarrow \zeta \xi e^{i\varphi} = +1, \quad (5.97)$$

então

$$\zeta \xi = +1 \text{ e } e^{i\varphi} = +1, \text{ ou, } \zeta \xi = -1 \text{ e } e^{i\varphi} = -1. \quad (5.98)$$

◆ Para o caso em que  $\{T, P\} = 0$ :

$$\{T, P\} = 0 \Rightarrow TP = -PT \Rightarrow \zeta \xi e^{i\varphi} = -1, \quad (5.99)$$

<sup>20</sup> Por completeza, a análise continua sendo feita para o caso dos operadores atuando em  $\Psi_{\vec{p}, \sigma, -}^A$ , mas isso em nada interfere no resultado final, uma vez que a exponencial de  $T^2$  tem o mesmo sinal que a exponencial da relação de  $TP$ .

então

$$\zeta\xi = +1 \text{ e } e^{i\varphi} = -1, \text{ ou, } \zeta\xi = -1 \text{ e } e^{i\varphi} = +1. \quad (5.100)$$

Como  $T^2 = -e^{i\varphi}$  e  $(CPT)^2 = \zeta\xi$ , tem-se que

■ Se  $[T, P] = 0$ :

$$\begin{aligned} T^2 = -1 \text{ e } (CPT)^2 = +1, \\ \text{ou} \\ T^2 = +1 \text{ e } (CPT)^2 = -1. \end{aligned} \quad (5.101)$$

■ Se  $\{T, P\} = 0$ :

$$\begin{aligned} T^2 = +1 \text{ e } (CPT)^2 = +1, \\ \text{ou} \\ T^2 = -1 \text{ e } (CPT)^2 = -1. \end{aligned} \quad (5.102)$$

Sumarizando os resultados e reproduzindo uma versão adaptada da Tabela de [23], tem-se

Tabela 1 – Possíveis classes de partículas de acordo com o MCW; versão adaptada de [23]

Tipo	$(CPT)^2$	$T^2$	Relação entre $P$ e $T$
1	-1	-1	$\{T, P\} = 0$
2	-1	+1	$[T, P] = 0$
3	+1	-1	$[T, P] = 0$
4	+1	+1	$\{T, P\} = 0$

Como pode ser visto na tabela acima, caso os estados de uma partícula sejam construídos de maneira a abarcar as características fundamentais de espinores do tipo ELKO, bem como seja levado em conta a proposta feita por Weinberg, de uma nova representação para a atuação de  $T$  na presença de degenerescências além do spin, todas as classes de partículas são possíveis. As possibilidades dependerão da imposição feita em relação à comutação ou anti-comutação dos operadores  $P$  e  $T$ . Partículas do Tipo 1 e 4 podem ocorrer simultaneamente, partículas do Tipo 2 e 3 também, não sendo possível qualquer outro tipo de combinação.

## 6 CONCLUSÃO

Observa-se, com a conclusão deste trabalho, que mesmo uma abordagem via primeiros princípios pode gerar consequências profundas em uma teoria. O simples fato de se tentar entender como simetrias se manifestam em TQC, via teoria de representações e teoria de grupos, possibilitou a apreciação, através de uma consistente construção de conceitos, do significado de uma partícula, bem como noções bastante fundamentais de campos quânticos.

Não obstante essas possibilidades, tal abordagem permitiu explorar questões ao mesmo tempo de natureza simples, porém bastante pertinentes para a teoria quântica de campos atual. Uma dessas questões, por exemplo, é a possibilidade de, à luz da existência de objetos físicos como os espinores do tipo ELKO [24], revisitar-se o método de classificação de partículas segundo Wigner [21]. Neste processo de reanálise levantou-se a possibilidade, outrora descartada pela análise presente em ([22]), da existência de estados de uma partícula com degenerescências além do spin, o que, a princípio, permite a existência das chamadas classes não-usuais de partículas segundo o MCW.

No entanto, nunca é demais chamar a atenção, para o fato de que tal possibilidade de resultado, só foi possível através de um estudo sistemático de questões em fundamentos de TQC via formalismo proposto por Weinberg em [15]. Tal estudo se desenvolveu ao longo dos capítulos 2, 3 e 4 desta dissertação.

Quanto aos resultados obtidos no capítulo 5, é importante que se tenha todo o processo de maneira bastante clara, a fim de evitar qualquer erro devido a algum tipo de má interpretação. Munido deste propósito, talvez seja proveitoso repassar o caminho até o capítulo final desta dissertação.

Pois bem, tudo começa com a tentativa de Wigner em [21] de incluir as simetrias discretas no seu estudo prévio (ver [17]) sobre as unitárias representações do grupo de Poincarè em uma teoria quântica. Nessa tentativa (bem sucedida) foi apontado um método para que se classificasse estados de uma partícula ao sofrerem a atuação das simetrias discretas representadas por um operador unitário. As simetrias em questão eram, a paridade  $P$ , a reversão temporal  $T$  e o que hoje se entende por  $CPT$ . Sendo mais preciso, o método consistia em estudar as possibilidades de valores para as fases resultantes da atuação de cada operação simetria em um estado de uma partícula. Com esse método, Wigner percebeu que os estados de uma partícula poderiam ser classificados, com relação aos valores das fases atribuídas aos operadores  $T^2$  e  $CPT^2$ , em quatro tipos. Essas possibilidades estão presentes nas equações (5.1), (5.2), (5.3) e (5.4). Mesmo havendo quatro possíveis tipos, Wigner notou que apenas o tipo presente em (5.1) aconteceria sem que ocorresse algum tipo de estado degenerado.

Foi só algum tempo depois que Lee e Wick em [22] determinaram que, dentro do contexto de uma teoria quântica de campos localmente relativística, os casos conhecidos de estados associados aos campos quânticos usuais pertenciam todos aos mesmo tipo de classe, o tipo 1, ou classe 1. Na análise de Lee e Wick classes diferentes da do tipo 1 não eram permitidas, seja pelo fato dos estados já pertencerem ao tipo 1, seja pelo fato de algum tipo de simetria interna da teoria permitir a redefinição dos operadores de maneira que se recaísse no caso do tipo 1, nenhuma classe não-usual de Wigner (tipo 2, tipo 3 e tipo 4) aconteceria.

Vale ressaltar que pelo menos duas condições necessárias para o trabalho feito em [22] valer devem ser satisfeitas: que os campos se transformem, sob a paridade, como em (5.9); e que caso sejam possíveis o surgimento de alguma fase não prevista, essa fase possa ser "absorvida" por alguma simetria interna. De certa maneira, esse trabalho de Lee e Wick foi o trabalho norteador para quando se queria discutir as possibilidades de classes não-usuais de Wigner.

Muito se passou até que Weinberg em [15], através do seu formalismo idiossincrático de se trabalhar em TQC, propusesse uma atuação diferente para o operador da simetria de reversão temporal. A ideia de Weinberg era que, quando olhando para o trabalho original de Wigner, não haveria motivo para que as representações de  $T$  no caso de degenerescência além do spin fossem as mesmas que no caso sem degenerescência, portanto, permitindo uma representação como a da equação (5.74). Ocorre que,  $T$  atuando em estados degenerados como na equação (5.74), permitiria a existência de um sinal extra nos estados transformados, abrindo novamente a possibilidade das classes não-usuais de Wigner existirem. Mas o próprio Weinberg descartou essa possibilidade, alegando não serem conhecidos exemplos de partículas que apresentassem tal degenerescência na TQC usual.

No entanto, em um intervalo de tempo entre os estudos desenvolvidos por Weinberg e alguma data no ano de 2005, Ahluwalia e Grumiller inesperadamente se depararam com a existência de tipos não usuais de espinores, os chamados ELKO (como pode ser apreciado em [24]). Esses espinores acabaram por representar partículas de spin  $1/2$  e dimensão de massa 1. Também tinham por característica intrínseca serem autoespinores do operador de conjugação de carga e não serem autoespinores do operador de paridade. Eram também parte de uma teoria que poderia ser considerada verdadeiramente neutra, ou seja, sem a presença de simetrias internas. Diante da possibilidade do ELKO representar uma física nova, em [23] assumiu-se a possibilidade de ser possível construir estados de uma partícula que, associados aos espinores do tipo ELKO, viessem a descrever um novo tipo de partícula, sempre preservando as características mais fundamentais da teoria descrita por Ahluwalia em [24].

A premissa em [23] era simples: é sabido desde o trabalho de Wigner e sacramentado pelo trabalho de Lee e Wick que na teoria quântica de campos usual não são permitidas as classes não-usuais de Wigner. No entanto, caso fosse possível estudar estados de uma partícula que de alguma maneira não pertencessem ao que se convencionou chamar de física usual, talvez as classes não usuais de Wigner passassem a ser uma possibilidade. O ELKO foi o escolhido para essa empreitada justamente por não ter um comportamento esperado para espinores que descrevem férmions. Com todos esses ingredientes em mãos, foram investigadas as possibilidades abertas pelo ELKO e se concluiu em [23] que ao menos uma classe não-usual de Wigner não poderia ser descartada.

Neste ponto do texto, vale uma nota importante: os resultados obtidos no capítulo 5 deste trabalho concordam com o resultado obtido em [23], ao menos no sentido de que classes não-usuais não podem mais serem descartadas, mas discorda de quais são essas classes e como elas podem ser escolhidas. Essas diferenças foram notadas por um dos autores e serão oportunamente publicadas [33].

Como pode ser visto na Tabela 1 desta dissertação, tendo em vista as novas considerações desenvolvidas no capítulo 5, pode-se concluir que nenhuma classe de Wigner pode ser descartada ao se trabalhar com estados de uma partícula relacionados ao ELKO. As possibilidades de diferentes tipos de classes de Wigner estão condicionadas às relações de (anti-)comutação entre os operadores  $T$  e  $P$ ,

que por sua vez dependem das escolhas das fases  $\xi$  e  $\zeta$ . É sabido que escolha para as fases tem sua determinação pautada por uma certa necessidade experimental, portanto é provável que essa escolha fique condicionada a algum vínculo presente em um possível experimento.

Apesar do que fora discutido anteriormente, ainda resta um questionamento a ser feito: quais são as implicações da possibilidade de existirem as classes não-usuais de Wigner?

Ora, é sabido que todas as partículas (particularizando para o caso de spin  $1/2$ , como o ELKO) que são conhecidas pela TQC, enquadram-se na classe **1**. Portanto, ao se permitir a existência de novas classes, permite-se, também, a existência de novas partículas.

Com isso, talvez a hipótese levantada em [23], do ELKO ser um candidato a descrever o campo responsável pela matéria escura, ganhe respaldo, uma vez que passa a ser possível associar a esses mesmos campos, partículas novas, que por sua vez, podem obedecer a uma física diferente, tão diferente quanto o necessário para se descrever a matéria escura.

## REFERÊNCIAS

- [1] WEYL, Hermann. **Symmetry**. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2016. 178 p.
- [2] DUMMIT, David S.; FOOTE, Richard M. **Abstract Algebra**. 3. ed. [S. L.]: John Wiley And Sons, 2004. 932 p.
- [3] CORNWELL, J. F. **Group theory in physics: an introduction**. San Diego, California: Academic Press, 1997. 361 p.
- [4] ARTIN, Michael. **Algebra**. 2. ed. [S.L.]: Pearson, 2010. 559 p.
- [5] SARACINO, Dan. **Abstrac algebra: a first course**. 2. ed. Long Grove, Illinois: Waveland Press, 2008. 313 p.
- [6] WOIT, Peter. **Quantum theory, groups and representations: an introduction**. New York, New York: Springer, 2017. 659 p.
- [7] HALL, Brian C. **Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction**. 2. ed. [S. L.]: Springer, 2015. 453 p.
- [8] CORNWELL, J. F. **Group theory in physics: volume 1**. London: Academic Press, 1964. 371 p.
- [9] DIAS, Sebastião Alves. **Métodos matemáticos para física de altas energias**. 2015. Disciplina ministrada no programa de pós-graduação do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Disponível em: <https://www.professorglobal.com.br/fisica-pos-graduacao-ii/metodos-matematicos-teoricos>. Acesso em: 5 ago. 2019.
- [10] QUINQUIOLO, Natan Carvalho Rosas. **Estados de uma partícula: uma busca por representações irreduzíveis do grupo de Poincarè**. 2019. 50 f. TCC (Graduação) - Curso de Física, Departamento de Física e Química, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Guaratinguetá, 2019.
- [11] WANG, Zuoqin. **Lie's Fundamental theorems**. 2013. Notas de aula da disciplina de grupos de Lie ministrada em University of Science and Technology of China School of Mathematical Sciences. Disponível em: <http://staff.ustc.edu.cn/wangzuoq/Courses/13F-Lie/Notes/Lec%2012.pdf>. Acesso em: 10 maio 2021.
- [12] DEBNATH, Lokenath; MIKUSINSKI, Piotr. **Hilbert spaces with applications**. 3. ed. London: Elsevier, 2005. 599 p.
- [13] SCHWARZ, Albert. **Mathematical foundations of quantum field theory**. [Singapura]: World Scientific, 2020. 461 p.
- [14] FOLLAND, Gerald B. **Quantum field theory: a tourist guide for mathematicians**. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2008. 337 p.

- [15] WEINBERG, Steven. **The quantum theory of fields: volume 1, foundations**. [S. L.]: Cambridge University Press, 1995. 609 p.
- [16] WIGNER, Eugene P. **Group theory: and its applications to the quantum mechanics of atomic spectra**. New York, New York: Academic Press, 1959. 384 p. Tradução do alemão: J. J. Griffin.
- [17] WIGNER, E. On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group. . **The Annals Of Mathematics**, [S. L.], v. 40, n. 1, p. 149-204, jan. 1939.
- [18] WEINBERG, Steven. Feynman rules for any spin. **Physical Review**, [S. L.], v. 133, n. 5, p. 1318-1332, 9 mar. 1964.
- [19] WEINBERG, Steven. Feynman rules for any spin: ii, massless particles. **Physical Review**, [S. L.], v. 134, n. 4, p. 882-896, 25 maio 1964.
- [20] WEINBERG, Steven. Feynman rules for any spin: iii. **Physical Review**, [S. L.], v. 181, n. 5, p. 1893-1899, 25 maio 1969.
- [21] WIGNER, E. P. Unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group including reflections. In: WIGNER, Eugene. . **Group theoretical concepts in elementary particle physics**. New York: Gordon And Breach, 1964. p. 37-80. Edição: Feza Gursey.
- [22] LEE, T. D.; WICK, G. C. Space inversion, time reversal, and other discrete symmetries in local field theories. . **Physical Review**, New York, v. 148, n. 4, p. 1385-1404, 26 ago. 1966.
- [23] SILVA, J. M. Hoff da; ROGÉRIO, R. J. Bueno. Massive spin-one-half one-particles states for the mass-dimension-one fermions. **Epl**, [S. L.], v. 128, n. 11002, p. 1-5, 21 nov. 2019.
- [24] AHLUWALIA, Dharam. **Mass dimension one fermions**. New York, New York: Cambridge University Press, 2019. 114 p.
- [25] LEE, Cheng-Yang. Spin-half mass dimension one fermions and their higher-spin generalizations. **The European Physical Journal: Special Topics**, [S. L.], v. 229, p. 2003-2022, 21 set. 2020.
- [26] AXLER, Sheldon. **Linear algebra done right**. 3. ed. [S. L.]: Springer, 2015. 352 p.
- [27] BEKAERT, Xavier; BOULANGER, Nicolas. **The unitary representations of the Poincaré group in any spacetime dimension**. 2021. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/hep-th/0611263v2>. Acesso em: 12 set. 2021.
- [28] HILGERT, Joachim; NEEB, Karl-Hermann. **Structure and geometry of Lie Groups**. [S. L.]: Springer, 2012. 755 p.
- [29] LEE, John M. **Introduction to smooth manifolds**. 2. ed. New York, New York: Springer, 2013. 708 p.
- [30] JAMESON, G. J. O. **Topology and normed spaces**. New York, New York: John Wiley And Sons, 1974. 408 p.

- [31] SINGER, I. M.; THORPE, John A. **Lecture notes on elementary topology and geometry**. New York, New York: Springer, 1967. 214 p.
- [32] BARUT, Asim O.; RACZKA, Ryszard. **Theory of group representation and applications**. 2. ed. Varsóvia: Polish Scientific Publishers, 1980. 717 p.
- [33] SILVA, J. M. Hoff da; AHLUWALIA, Dharam. *A ser publicado*.

## APÊNDICE A – LEMA DE SCHUR

Embora o Lema de Schur apareça na literatura de diversas maneiras diferentes, em geral, elas tem os mesmos significados ou, numa hipótese mais restrita, consequências equivalentes. Apesar disso, as ideias utilizadas para suas demonstrações são muito similares. Para o caso deste apêndice a demonstração do que se segue foi baseada em [6], [7] e [8]. Vamos estruturar as etapas de demonstração no valendo das partes descritas no texto.

**Parte 1):** *Sejam  $h_1$  e  $h_2$  duas representações irredutíveis (reais ou complexas) de um grupo  $G$  atuando em dois espaços vetoriais  $V_1$  e  $V_2$  respectivamente, e  $\phi$  um mapa de entrelaçamento, então  $\phi$  é um isomorfismo ou  $\phi = 0$ .*

Perceba que o  $\ker(\phi)$  é um subespaço invariante de  $V_1$  sob a atuação de  $\phi$ . Utilizando a equação

$$\phi(h_1(g)v_1) = h_2(g)\phi(v_1) \quad (\text{A.1})$$

e a definição de núcleo de uma transformação linear:

$$h_1(g)v_1 = h_2(g)\phi(v_1) = h_2(g)(g)0 = 0, \quad (\text{A.2})$$

temos

$$\Rightarrow h_1(g)v_1 \in \ker(\phi),$$

para  $g \in G$  e  $v_1 \in V_1$ . Como  $v_1$  é um elemento qualquer de  $\ker(\phi)$ , podemos entender que  $h_1(g)v_1 \in \ker(\phi)$  é equivalente a  $h_1V_1(g)\ker(\phi) = \ker(\phi)$ , mostrando que o  $\ker(\phi)$  é um subespaço invariante de  $V_1$ . Mas, por hipótese,  $h_1(g)$  é uma representação irredutível, portanto seus únicos subespaços invariantes são  $\ker(\phi) = 0$  ou  $\ker(\phi) = V_1$ . Por conseguinte, ou  $\phi$  é injetiva ou  $\phi = 0$  (mapeamento nulo).

Mas  $\ker(\phi) = 0$  implica injetividade e injetividade implica  $\ker(\phi) = 0$ , pois suponhamos que  $\phi$  seja injetiva, então para qualquer  $v \in \ker(\phi)$  devemos ter

$$\phi(v) = 0, \quad (\text{A.3})$$

mas  $\phi$  é linear, por conseguinte também devemos ter

$$\phi(0) = 0, \quad (\text{A.4})$$

ou seja,

$$\phi(0) = 0 = \phi(v) \quad (\text{A.5})$$

e pela definição de injetividade isso implica em  $v = 0$ . Supondo a volta, temos que  $\ker(\phi) = 0$ . Então,

para  $v_1, v_2 \in V_1$  se

$$\phi(v_1) = \phi(v_2), \quad (\text{A.6})$$

por  $\phi$  ser linear

$$\phi(v_1) - \phi(v_2) = \phi(v_1) + \phi(-v_2) = \phi(v_1 - v_2) = 0, \quad (\text{A.7})$$

pela definição de um núcleo, temos que  $(v_1 - v_2) \in \ker(\phi)$ . Mas por hipótese  $\ker(\phi) = 0$ , então  $(v_1 - v_2) = 0$ , ou seja,  $v_1 = v_2$ , e concluímos que  $\phi$  é injetiva.

Caso  $\ker(\phi) = V_1$  teremos  $\phi = 0$  (mapeamento nulo, pela própria definição). Então vamos supor que  $\ker(\phi) = 0$  e tenhamos  $\phi$  injetiva. Neste caso, é garantido que a imagem de  $\phi$  (um subespaço de  $V_2$ ) tenha pelo menos um elemento e sempre será possível escrever, para um  $w \in V_2$  e  $v \in V_1$ ,  $\phi(v) = w$  e o mapa equivariante fica

$$h_2(g)w = h_2(g)\phi(v) = \phi(h_1(g)v), \quad (\text{A.8})$$

implicando (como no caso anterior)  $h_2(g)Im(\phi) = Im(\phi)$ .

Novamente, como  $h_2$  é uma representação irredutível, isso implica o fato de que os dois únicos subespaços invariantes são  $Im(\phi) = 0$  ou  $Im(\phi) = V_2$ . Como a imagem de  $\phi$  não pode ser nula para esse caso, devemos ter  $Im(\phi) = V_2$  e  $\phi$  é sobrejetiva. Portanto  $\phi$  lienear é nula ou bijetiva, ou seja, um isomorfismo.

**Parte 2):** *Seja  $h$  uma representação complexa irredutível de  $G$  atuando em  $V$  e sejam  $\phi \rightarrow \phi$  e  $\phi$  o mapa de entrelaçamento  $\phi : V \rightarrow V$ , então  $\phi = k\mathbb{I}$  para  $k \in \mathbb{C}$*

Note que

$$\phi(h(g)v) = h(g)\phi(v). \quad (\text{A.9})$$

Vale ressaltar que o Teorema Fundamental da Álgebra (consultar [26]) estabelece que "Todo polinômio, não constante, com coeficientes complexos tem pelo menos um zero". Uma consequência deste teorema é a seguinte afirmação: "caso  $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$  seja um polinômio não constante, então  $p$  tem uma fatoração única na forma  $p(z) = c(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m)$  em que  $c, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ ". Um resultado importante que pode ser demonstrado utilizando os resultados anteriores é a afirmação de que "todo operador em um espaço vetorial (não nulo) complexo de dimensão finita tem ao menos um autovalor."<sup>1</sup>. Em particular,

$$V_k = \{v \in V : \phi v = kv\}, \quad (\text{A.10})$$

que é o subespaço não vazio de  $V$  formado pelos (auto)vectores que se associam aos autovalores através de  $\phi$ . Notemos que  $\phi v = \lambda v \Rightarrow (\phi - k\mathbb{I})v = 0$  e podemos trabalhar com  $V_k$  sendo o núcleo de uma outra transformação linear, digamos  $\hat{\phi}$ , da forma

$$\hat{\phi} \equiv \phi - k\mathbb{I} : V \rightarrow V. \quad (\text{A.11})$$

<sup>1</sup> Também ver em [26].

Mas  $\hat{\phi}$  é também um mapa equivariante, pois

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(h(g)v) &= \phi(h(g)v) - k(h(g)v) \\ &= h(g)(\phi(v)) - h(g)(kv) \\ &= h(g)(\phi(v) - kv) = h(g)\hat{\phi}v.\end{aligned}\tag{A.12}$$

Como visto,  $\hat{\phi}$  é um mapa equivariante e  $\ker(\hat{\phi}) \neq \{0\}$ , uma vez que  $k$  é um autovalor e tem pelo menos um autovetor associado. Com isso o núcleo de  $\hat{\phi}$  deve ser pelo menos 1-dimensional, portanto  $\ker(\hat{\phi}) \neq \{0\}$  implicando  $\hat{\phi}$  não ser injetiva, que por sua vez quer dizer que  $\hat{\phi}$  não é um isomorfismo. Consequentemente, pela parte 1 do Lema de Schur,  $\hat{\phi} = 0$ , ou seja,

$$\hat{\phi} = 0 \Rightarrow \phi - k\mathbb{I} = 0 \Rightarrow \phi = k\mathbb{I}.\tag{A.13}$$

**Parte 3):** *Sejam  $h_1$  e  $h_2$  duas representações complexas irredutíveis de  $G$  atuando em  $V_1$  e  $V_2$ , respectivamente e sejam  $\phi_1 \neq 0$  e  $\phi_2 \neq 0$  dois mapas de entrelaçamento  $\phi_1, \phi_2 : V_1 \rightarrow V_2$ , então  $\phi_1 = k\phi_2$  para  $k \in \mathbb{C}$*

Para mostrarmos a afirmação acima, basta notarmos que  $\phi_2$  é não nulo, consequentemente, pelo Lema de Schur, é um isomorfismo. Por conseguinte possui uma inversa e podemos escrever  $\phi_1\phi_2^{-1}$ . O mapa de equivariância  $\phi_1\phi_2^{-1}$  nada mais é que um mapeamento  $V_2 \rightarrow V_2$ , então pela parte 2 do Lema de Schur devemos ter  $\phi_1\phi_2^{-1} = k\mathbb{I} \Rightarrow \phi_1\phi_2^{-1}\phi_2 = k\mathbb{I}\phi_2 \Rightarrow \phi_1 = k\phi_2$ .

**Corolário 1:** *Seja  $h$  uma representação  $h : G \rightarrow GL(V)$  em que  $V$  é um espaço vetorial complexo, se  $C$  é um subgrupo de  $G$  formado pelos elementos de  $G$  que comutam com todos os elementos de  $G$  (centro de  $G$ ) então  $h(C) = k\mathbb{I}$ , para  $k \in \mathbb{C}$ .*

Como  $g \in Z(G)$  (centro do grupo), então para qualquer  $g' \in G$  devemos ter  $h(g)h(g') = h(gg') = h(g'g) = h(g')h(g)$ , mas a equação anterior é exatamente a definição de um mapa de equivariância de um espaço vetorial nele mesmo, portanto pela parte 2 do Lema de Schur devemos ter  $h(g) = k\mathbb{I}$ .

**Corolário 2:** *Se  $G$  é um grupo abeliano então todas as suas representações irredutíveis sobre espaços vetoriais complexos são 1-dimensionais.*

Para o caso de um grupo abeliano, temos que  $Z(G) = G$ , portanto pela afirmação anterior esta representação deve ser um múltiplo da identidade  $\rho(g) = \lambda\mathbb{I}$ . Isso mostra que qualquer subespaço  $S$  de  $V$  deve ser invariante, mas como  $h$  (uma representação qualquer) é irredutível, os únicos subespaços invariantes são  $S = \{0\}$  e  $S = V$ , como  $V$  não é zero, deve ser  $S = V$  e as únicas representações irredutíveis que não possuem  $S = \{0\}$  são as representações 1-dimensionais.

## APÊNDICE B – PROPOSIÇÃO SOBRE GRUPOS DE LIE

O caso deste apêndice é um pouco mais curioso. Embora seja um resultado bastante enunciado em livros de teoria de grupos e representações de Lie voltados para física, não é tão comum de se encontrar uma demonstração. A demonstração mais antiga que fora encontrada pelo autor deste texto foi em [17], a partir da página 159. No entanto uma outra demonstração (essa mais voltada para teoria de grupos e representações *Stricto sensu*), pode ser encontrada em [32], a partir da página 202.

Os comentários deste apêndice serão baseados em um artigo mais recente, [27]. Na página 5 desse mesmo artigo os autores propõem um tipo de demonstração de características mais "heurísticas". Talvez essa não seja a maneira mais precisa do ponto de vista matemático, mas certamente tem seu valor.

Portanto, são necessárias algumas palavras de aviso ao leitor: os comentários feitos aqui, pelo autor deste texto, contém certo grau de imprecisão. No entanto, contém também certo grau de originalidade, de sorte que resta saber se o último ocorre no mínimo na mesma proporção que o primeiro.

**Proposição:** *Seja  $G$  um grupo de Lie conexo, não-compacto, simples e  $\pi$  uma representação unitária  $\pi : G \rightarrow GL(n, V)$ ,  $Im(\pi) \subseteq U(n)$  de  $G$  atuando no espaço de Hilbert (real ou complexo),  $\mathcal{H}$ , de dimensão finita  $n \in \mathbb{N}$ , então  $\pi$  é sempre a representação trivial.*

Começemos por investigar as implicações do fato de que o  $Ker(\pi)$  é um subgrupo normal de  $G$ . Mas, a princípio, nenhuma exigência é feita sobre  $G$ , a não ser pelo fato dele ser um grupo de Lie (como já fora definido no texto). Por subgrupo normal devemos entender a definição abaixo

**Definição:** *Seja  $H$  um subgrupo de  $G$  de maneira que  $g \circ h \circ g^{-1} = h$ ,  $\forall g \in G$  e  $\forall h \in H$ .  $H$  é dito ser um subgrupo *normal* de  $G$ .*

Para que se verifique se  $Ker(\pi)$  é um subgrupo normal de  $G$  deve ser verificada a propriedade do fechamento, da identidade, da inversa e da própria característica de ser normal. Vejamos

• Fechamento:

$$a, b \in Ker(\pi) \Rightarrow a \circ b \in Ker(\pi) \longrightarrow \pi(a \circ b) = \pi(a) \circ \pi(b) = \mathbb{I} \circ \mathbb{I} = \mathbb{I}. \quad (B.1)$$

• Identidade:  $\mathbb{I}_G \in Ker(\pi)$ , ou seja,  $\pi(\mathbb{I}_G) = \mathbb{I}_{GL}$

$$g \in G, \quad g \cdot \mathbb{I}_G = g = \mathbb{I}_G \cdot g$$

$$\pi(g \cdot \mathbb{I}_G) = \pi(g) = \pi(\mathbb{I}_G \cdot g)$$

$$\pi(g)\pi(\mathbb{I}_G) = \pi(g) = \pi(\mathbb{I}_G)\pi(g)$$

$$\Rightarrow \pi(\mathbb{I}_G) = \mathbb{I}_{GL}. \quad (\text{B.2})$$

• Inversa:  $a \in \text{Ker}(\pi)$  então  $\pi(a) = \mathbb{I}_{GL}$

$$\mathbb{I}_{GL} = \pi(\mathbb{I}_G) = \pi(a \cdot a^{-1}) = \pi(a) \cdot \pi(a^{-1}) = \mathbb{I}_{GL} \cdot \pi(a^{-1}) = \pi(a^{-1}) \quad (\text{B.3})$$

$\Rightarrow a^{-1} \in \text{Ker}(\pi)$  e  $\text{Ker}(\pi)$  é um subgrupo de  $G$ .

• Normal:

$$H = \text{Ker}(\pi) = \{g \in G \mid \pi(g) = \mathbb{I}\} \quad (\text{B.4})$$

$$\pi(ghg^{-1}) = \pi(g)\pi(h)\pi(g^{-1}) = \pi(g)\pi(g)^{-1} = \mathbb{I}, \quad (\text{B.5})$$

para  $h \in H$ .

Então  $\text{Ker}(\pi)$  é um subgrupo normal de  $G$ .

Passemos agora a caracterizar o grupo um pouco mais, exigindo que seja um grupo de Lie simples. Por grupo de Lie simples deve-se levar em conta a seguinte definição

**Definição:** Um grupo de Lie é dito ser *simples* se os únicos subgrupos normais forem o próprio grupo  $G$  e  $H = \{\mathbb{I}\}$ .

Nesse contexto, o fato do grupo ser simples quer dizer que seus únicos subgrupos normais são o próprio grupo  $G$  e o grupo trivial, isso somado ao fato de que o  $\text{Ker}(\pi)$  é um subgrupo normal implicam em duas possibilidades:

►  $\text{Ker}(\pi) = G$  e a representação é trivial;

ou

►  $\text{Ker}(\pi) = \{\mathbb{I}\}$  e a representação é injetiva.

Investiguemos as consequências de: ►  $\text{Ker}(\pi) = G$  e a representação é trivial:

Segundo o Primeiro Teorema do Isomorfismo:<sup>1</sup> caso  $\pi : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  seja um homomorfismo, tem-se

$$G / \text{Ker}(\pi) \cong \text{Im } \pi. \quad (\text{B.6})$$

Em particular

$$\text{Ker}(\pi) = \{\mathbb{I}\} \Rightarrow G / \mathbb{I} \cong \text{Im } \pi \Rightarrow G \cong \text{Im } \pi. \quad (\text{B.7})$$

Com isso, pode-se aplicar mais uma exigência e tomar o grupo como sendo conexo e semi-simples,

<sup>1</sup> Mais sobre este teorema pode ser visto em [2].

por semi-simples deve-se entender

**Definição:** Um grupo de Lie é dito ser *semi-simples* se a álgebra de Lie associada for uma álgebra de Lie semi-simples, ou seja, uma álgebra não abeliana em que os ideais são triviais (identidade e a própria álgebra).

Nada precisa ser dito sobre o grupo ser conexo além do que já fora desenvolvido em capítulos anteriores deste texto. Com essas duas novas características é imprescindível que se olhe para o corolário (14.5.7), da página 556, em [28] que diz

◦ Se  $\pi : G \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$  é uma representação do grupo de Lie conexo e semi-simples  $G$  então  $\text{Im } \pi$  é fechado.

Mas  $U(n)$  é sabidamente compacto ( $U(n) \subseteq M(n, \mathbb{C})$ ), então  $\text{Im } \pi$  é também compacto, uma vez que  $\text{Im } \pi$  é um subconjunto fechado de um grupo compacto (subespaço compacto)<sup>2</sup>.

Munido destas características pode-se visitar o Teorema de Cartan<sup>3</sup> que afirma que "qualquer subgrupo fechado,  $H$ , de um grupo de Lie,  $G$ , é um subgrupo de Lie de  $G$ ." Isto vale para o caso de  $\text{Im } \pi$ . Por fim, basta recorrer ao teorema que estabelece que:

Seja  $X$  e  $Y$  espaços topológicos, e  $f$  um mapeamento contínuo tal que  $f : X \rightarrow Y$ . Se  $X$  é compacto e  $f$  é sobrejetivo, então  $Y$  é também compacto.<sup>4</sup>

De posse dessas informações é razoável inferir que, como  $G \cong \text{Im } \pi$ , deve-se ter que  $\text{Im } \pi$  ser compacto implica em  $G$  ser compacto. Mas esse resultado só é possível porque, por hipótese,  $\text{Ker}(\pi) = \{\mathbb{I}\}$  e consequentemente representação é injetiva.

Ocorre que nada impede que se trabalhe com esse mesmo grupo, mas demandando que ele seja não-compacto. No entanto, neste caso a não-compacticidade do grupo implicaria a não-compacticidade da imagem da representação e isso não seria permitido, uma vez que a imagem da representação é um subconjunto fechado de  $U(n)$  que é compacto. Por conseguinte, a única alternativa para se trabalhar com o grupo  $G$  na necessidade dele ser não-compacto é trocar a hipótese original de que

►  $\text{Ker}(\pi) = \{\mathbb{I}\}$  e a representação é injetiva,

e passar a utilizar

►  $\text{Ker}(\pi) = G$  e a representação é trivial.

Ou seja, caso o grupo seja um grupo de Lie, conexo e não-compacto, simples e semi-simples, com suas representações unitárias atuando em um espaço de Hilbert de dimensão finita, as representações de dimensão finita devem ser triviais.

<sup>2</sup> Ver [30].

<sup>3</sup> Sobre este teorema consultar [29].

<sup>4</sup> Ver [31].