

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
*Campus de Rio Claro*

A Influência da Matemática nas Regras para a Direção do  
Espírito e em O Discurso do Método

Duelci A. de Freitas Vaz  
Orientador: Dr. Irineu Bicudo

Tese de Doutorado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação, em Educação Matemática-Área de Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)  
2007

510.1 Vaz, Duelci Aparecido de Freitas  
V393i A Influência da Matemática nas Regras para a Direção do  
Espírito e em O Discurso do Método / Duelci Aparecido de  
Freitas  
Vaz. – Rio Claro : [s.n.], 2007  
242 f. : il., figs.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Institu-  
to de Geociências e Ciências Exatas  
Orientador: Irineu Bicudo

1. Matemática – Filosofia. 2. Matemática – História.  
3. Descartes. 4. Metodologia cartesiana. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI – Biblioteca da UNESP  
Campus de Rio Claro/SP

## BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Irineu Bicudo \_\_\_\_\_

Prof. DR. Inocência Fernandes Balieiro Filho \_\_\_\_\_

Profa. Dra Renata Cristina Geromel Meneghetti \_\_\_\_\_

Profa. Dra. Verilda Speridião Kluth \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Vanderlei Marcos do Nascimento \_\_\_\_\_

Duelci Aparecido de Freitas Vaz  
Aluno

Rio Claro, 29 de maio de 2007.

Resultado: Aprovado

## **DEDICATÓRIA**

Aos meus pais Francisco de Freitas Vaz e Lavi Deuselice Vaz.

Aos meus irmãos Luiz Wellington de Freitas e Roberly de Freitas Vaz.

Aos amigos Anastácio Alves Neto, Izamar de Freitas, Elienete Alves de Jesus, Elinete Alves, Suely Freitas e Michel Mauch.

Aos meus sobrinhos.

Ao amigo e orientador Irineu Bicudo e sua esposa Elizabeth Christina Plombon pela excelente acolhida em Rio Claro.

Aos professores que contribuíram com minha formação.

Aos meus colegas de trabalho que acreditaram na realização deste projeto.

Aos amigos Fernando Guedes Cury e Jamur Venturim que foram, nesses três anos, amigos confiáveis. Nossos almoços dominicais e encontros semanais, além do futebol nas tardes de sábado e as longas corridas de rua, marcaram mudanças de hábito e amizades profundas que agora fazem parte de minha vida.

Especialmente, dedico esse trabalho a minha família. Aos meus filhos Tales de Freitas Vaz e Janaina Deuselice Vaz que souberam entender a necessidade do distanciamento dos velhos amigos de Goiânia e, também, da família. A esposa Elivanete Alves de Jesus que, com determinação, ajudou-nos a superar obstáculos antes intransponíveis.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Irineu Bicudo pela dedicação e interesse no meu trabalho. Os encontros semanais ficarão guardados em minha memória, momentos que nosso grupo de estudo discutia temas importantes, principalmente, ao desenvolvimento de minha tese. Nesses encontros, o professor Irineu Bicudo falava-nos de História da Matemática, de Matemática e de Filosofia, entre tantos outros temas. Com seu vasto conhecimento de línguas deu-me sugestões valiosas e influenciou minha escrita. Um erudito como Cristoph Clavius, cuja sensibilidade, inteligência e emoção pude constatar em diversos momentos. Um desses momentos foi, para mim, marcante e ocorreu quando da inauguração da fotografia de Mário Tourasse, no dia 07 de dezembro de 2006, no anfiteatro do Departamento de Matemática da UNESP-RC. Na oportunidade, Irineu escreveu um discurso que transcrevo abaixo.

Inauguração da fotografia de Mário Tourasse, sete de dezembro de 2006.

Dentre os muitos privilégios com que as circunstâncias me brindaram, destaco, agora, dois: ter visto um pôr-do-sol na ilha grega de Santarini e convivido, por quase trinta anos, com o Professor Mário Tourasse Teixeira.

Lá, as mãos do fado lançam, sobre a lisa tela do mar egeu, uma mistura de cores que nem em sonho se sonham, nem há pincel humano que as possa debuxar, naquela hora em que de Apolo o carro rola pra fora da vista e a poeira que levantara fica enchendo de leve névoa o horizonte; quando a flauta calma de Pã, descendo seu tom agudo no ar pausado, empresta mais tristeza à moribunda tarde; naquele instante em que o lúcido Planeta, que as horas vai do dia distinguindo, chega à desejada e lenta meta, a luz celeste às gentes encobrindo.

Cá, a presença desse homem, capaz de uma flor, onde as flores não nascem, de abrir velhas portas na velha casa da bondade, há muito fechadas, de entregar, a cada um de nós, o coração dentro de um livro.

Lá, a glória da natureza. Cá, o auge do espírito humano.

Mérito à iniciativa de Sérgio Nobre em reproduzir esta fotografia que acabamos de descerrar.

Cada pequeno e tímido gesto que vivenciamos, cada aperto carinhoso de mão, cada volver de cabeça, cada baixar de leve os olhos, cada sorriso de apoio, tudo o que caracterizava o Professor Mário fica, de hoje em diante, consolidado neste quadro. Seja ele reverenciado como se fazia no passado com os deuse-lares. Assim, todos os que com ele privamos, quando, acabados pelas Parcas, formos, vultos solenes de repente

antigos, e cada vez mais sombras, ao encontro fatal do barco escuro no soturno rio, e os nove abraços do horror estígio, e o regaço insaciável da pátria de Plutão, teremos feito saber aos pósteros que aqui viveu e ensinou uma pessoa, prova concreta de que a inteligência, a integridade de caráter e a extrema bondade são possíveis.

Irineu Bicudo.

Agradeço imensamente a todos os componentes da banca examinadora que com tanto cuidado e zelo leram minha tese e contribuíram com valiosas sugestões.

Ao professor Vanderlei Marcos do Nascimento agradeço pela leitura crítica que permitiu-me constituir um texto livre de fatos desnecessários, além de uma coerência lógica aprimorada.

A professora Renata Cristina Geromel Meneghetti pelas sugestões que contribuíram com a construção lógica de muitas passagens, assegurando que os objetivos fossem alcançados com mais clareza. A sua tese de doutorado foi muito útil e ajudou-me a compor melhor certas passagens da história do pensamento matemático.

A professora Verilda Speridião Kluth que se dispôs a ler com muita atenção minha tese. Suas observações permitiram-me enfatizar, com palavras certas, as partes concludentes do trabalho.

Ao professor Inocêncio Fernandes Balieiro Filho que também deu sugestões valiosas e se dispôs a ler minha tese com muita dedicação. Sua tese de doutorado também foi-me inspiradora e influenciou muitas passagens do meu texto.

A todos que contribuíram diretamente e indiretamente, incluo todos os funcionários da UNESP-RC que tornaram minha estadia em Rio Claro agradável e inesquecível.

A todos os meus sinceros agradecimentos.

## SUMÁRIO

|                                                                               |     |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Índice .....                                                                  | i   |
| Resumo.....                                                                   | iii |
| Abstract.....                                                                 | iv  |
| Introdução.....                                                               | 01  |
| Capítulo I – A Formação Acadêmica de Descartes.....                           | 06  |
| Capítulo II – O Método de Análise e Síntese dos Antigos Geômetras Gregos..... | 71  |
| Capítulo II I– O Discurso do Método e os Ensaios.....                         | 129 |
| Considerações Finais.....                                                     | 225 |
| Referências Bibliográficas.....                                               | 231 |

## ÍNDICE

### INTRODUÇÃO 1

### CAPÍTULO I: A FORMAÇÃO ACADÊMICA DE DESCARTES 06

- 1.1 Situando Descartes historicamente 06
- 1.2 Os estudos em La Fleche 12
  - 1.2.1 A Matemática estudada nos colégios jesuítas 16
- 1.3 Uma síntese do pensamento matemático e a filosofia da Matemática de Cristoph Clavius 21
  - 1.3.1 A filosofia da Matemática e a Matemática de Clavius 24
  - 1.3.2 A influência de Papus nos trabalhos de Clavius 31
  - 1.3.3 A influência de A Aritmética nos Trabalhos de Clavius 35
- 1.4 Algumas concepções matemáticas do professor de Matemática de Descartes em La Flèche 38
- 1.5 Uma Nova Ciência: Os Fundamentos Matemáticos de Descartes 40
  - 1.5.1 A Matemática nas *Cogitationes Privatae* 46
  - 1.5.2 Os Números Figurados, a Extensão do Teorema de Pitágoras e Outros Resultados 55
- 1.6 A Matemática do *De Solidorum Elementis* – Sobre Elementos Sólidos 57
  - 1.6.1 Geometria sólida 58
- 1.7 A Velha Álgebra 66
- 1.8 Descartes: um homem e seu tempo 70

### CAPÍTULO II: O MÉTODO DE ANÁLISE E SÍNTESE DOS ANTIGOS GEÔMETRAS GREGOS 71

- 2.1 Uma síntese do Livro VII de A Coleção Matemática de Papus de Alexandria 74
- 2.2 Uma discussão moderna 76
- 2.3 Uma síntese da obra *A Aritmética* de Diofanto 82
  - 2.3.1 Notações e Definições 86
  - 2.3.2 A Aritmética de Diofanto 88
  - 2.3.3 Uma análise contextual das obras de Papus e Diofanto 89
- 2.4 A Arte Analítica de Viète 92
  - 2.4.1 Considerações sobre a arte analítica de Viète 97
- 2.5 A influência da Matemática nas *Regulae ad Directioni ingenii-Regras para a Direção do Espírito* 99
  - 2.5.1 As Regras I-IV 100
  - 2.5.2 O método de análise e síntese nas Regras 110
  - 2.5.3 Como aplicar as regras anteriores 118
  - 2.5.4. A Matemática nas Regras 121

**CAPÍTULO III: O DISCURSO DO MÉTODO E OS ENSAIOS 129**

- 3.1 A estrutura de *O Discurso do Método* 131
- 3.2 A *Geometria* de Descartes 143
  - 3.2.1 Livro I 144
  - 3.2.2 Como utilizar-se letras em Geometria 145
  - 3.2.3 O método de Descartes na Geometria 149
  - 3.2.4 As operações 151
  - 3.2.5 Problemas planos 152
  - 3.2.6 Resolução de tais problemas 152
  - 3.2.7 O problema de Papus para quatro linhas 154
- 3.3 Livro II 160
  - 3.3.1 Curvas geométricas e curvas mecânicas 160
  - 3.3.2 Uma análise completa das curvas necessárias para resolver o problema de Papus para quatro linhas e para o caso especial de cinco linhas 164
  - 3.3.3 O método da normal ( ou tangente ) de Descartes 164
- 3.4 Livro III 166
  - 3.4.1. Análise completa das raízes de equações 167
  - 3.4.2. As propriedades 168
- 3.5 A Dióptrica 176
- 3.6 Os Meteoros 210

**CONSIDERAÇÕES FINAIS 225****REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 231**

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é estabelecer a relação entre a Matemática e Filosofia nas *Regras para a Direção do Espírito* e em *O Discurso sobre o Método*. Para tanto, procuramos estabelecer a educação matemática que Descartes recebeu na escola jesuíta La Flèche e depois as influências externas de seus contatos com homens como Isaack Beeckman. Depois de seu encontro com Beeckman, Descartes engajou-se no projeto de construir uma ciência completamente nova. Desse modo, reconstruímos a trajetória seguida inicialmente por Descartes, avaliando a sua produção científica em trabalhos como *Cogitationes Privatae*, *De Solidorum Elementis*, *Regulae ad Directionem Ingenii*, onde podemos detectar o envolvimento de Descartes com questões científicas que serão coligidas na sua principal obra *O Discurso do Método*. Nesses três trabalhos colocamos em evidência a produção matemática cartesiana e nas *Regulae ad Directionem Ingenii* apresentamos um estudo, revelando que Descartes foi um seguidor do método de análise e síntese dos antigos geômetras gregos. Finalmente, apresentamos um estudo sobre a principal obra cartesiana, *O Discurso do Método*, com seus três ensaios: *A Dióptrica*, *Os Meteoros*, *A Geometria*. Nessa obra, Descartes define, oficialmente, a sua concepção metodológica, aplicando-a nos ensaios. O método é utilizado para resolver diversos problemas. Destacamos o caso do arco-íris em *Os Meteoros*. Em *A Geometria*, Descartes mostra a eficiência das suas mudanças conceituais, onde, reunindo sua proposta metodológica com um moderno simbolismo, rompe com velhos paradigmas, introduzindo a análise geométrica e dando importante contribuição para o desenvolvimento da matemática.

Palavras-chave: Matemática, História, Filosofia, Descartes, Método

## ABSTRACT

The aim of this work is to establish the relationship between mathematics and philosophy in the *Rules for the Direction of the Mind* and *Discourse on Method*. For it, we try to establish the mathematical education that Descartes received in the Jesuit school La Flèche and later the external influences of his relationship with men as Isaack Beeckman. After his meeting with Beeckman, Descartes engaged completely in the project of building a new science. In this way, we reconstruct the path initially stepped by Descartes, evaluating his scientific production in works as *Cogitationes Privatae*, *De Solidorum Elementis*, *Regulae ad Directionem Ingenii*, where we can detect the involvement of Descartes with scientific subjects that will appear in his main work *The Discourse on Method*. In those three we put in evidence the Cartesian mathematical production and in the *Regulae ad Directionem Ingenii* we presented a study revealing that Descartes was a follower of the method analysis and synthesis of the ancient Greek geometers. Finally, we present a study of the main Cartesian work, *Discourse on Method*, with their three essays: *Dioptrics*, *Meteors*, *Geometry*. In this work, Descartes defines, officially, his methodological conception, applying it in the essays. The method is used to solve several problems. We detached the case of the rainbow in the ‘Meteors’. In the ‘Geometry’, Descartes shows the efficiency of his conceptual changes, and combining his methodological proposal with a modern symbolism gets rid of the old paradigms, introducing the geometric analysis and giving important contribution for the development the mathematics.

Key-words: Mathematics, History, Philosophy, Descartes, Method.

## INTRODUÇÃO

Um fato interessante nos estudos sobre Descartes (1596-1650) é a pouca valorização dada à sua produção Matemática, embora ele seja considerado um dos fundadores da Matemática Moderna. Vale observar, Descartes deixa bastante claro em seus escritos que fora influenciado pela Matemática; além dessa atividade intelectual, intensamente presente na sua fase inicial de estudos, está a sua Filosofia Natural, isto é, ele era também um físico ou filósofo natural.

Relaciona-se com as palavras acima a própria transformação que sofreu, no decorrer dos séculos posteriores, sua principal obra: *O Discurso do Método* (1637) que foi inicialmente publicada com os três ensaios: *A Dióptrica*, *A Geometria* e *Os Meteoros*. A parte introdutória, *O Discurso do Método*, com o passar do tempo, foi apartada dos três ensaios e ganhou grande notoriedade e, em nossos dias, é vista como a principal obra de Descartes. Talvez, tudo isso, foi devido ao fato de que na parte introdutória é apresentada a metodologia cartesiana e que na visão dos filósofos deveria ser a principal a ser considerada. É bem verdade que com o passar do tempo muitos fatos explicados por determinada teoria podem não corresponder mais à verdade e isso foi o que ocorreu com os ensaios. Mas nos ensaios, principalmente em *A Geometria*, encontramos as aplicações do método cartesiano. Assim, se quisermos entender bem a metodologia cartesiana não podemos deixar em segundo plano suas realizações no campo da Matemática e da Física, contempladas nesses ensaios.

Assim, proponho-me nesse estudo compreender, numa perspectiva histórica, a influência da matemática nas *Regras para a Direção do Espírito* e em *O Discurso do Método* e, para atingir esses objetivos, procuro estudar a formação acadêmica de Descartes e a educação que recebeu no Colégio Jesuíta La Flèche, principalmente a parte Matemática do currículo. Viso também estabelecer as influências externas que recebeu através dos contatos com Isaac Beeckmam (1588-1637) e com as obras dos matemáticos gregos. Nesse sentido, procuro compreender a influência dos trabalhos de Cristoph Clavius (1537-1612), responsável pelo currículo matemático nas escolas jesuítas, sobre o jovem Descartes. Procuro estabelecer também a influência dos trabalhos de Pappus de Alexandria (c.300 d. C.) sobre o pensamento cartesiano, principalmente o Livro VII de sua Coleção Matemática, onde encontramos a descrição mais abrangente do método de análise e síntese

que inspirou Descartes; os trabalhos de Diofanto de Alexandria ( III d. C.), onde podemos encontrar, pela primeira vez, processos algébricos que viriam a influenciar os matemáticos ocidentais na criação do modo algébrico de pensar e que resultaria na criação da moderna Ciência. A influência de Papus, Diofanto, Euclides que floresceu por volta de 300 a. C., Arquimedes (287-212 a. C.), entre outros, sobre o pensamento ocidental que estava brotando na época de Descartes é nítida. Assim é que Viète (1540-1603), influenciado por Papus, Diofanto e Eudoxo (c. 400 – c.347 a. C.), transformou a concepção metodológica grega em um novo conceito que permitiu uma reforma importante na Matemática, criando uma nova simbologia e partindo de novos pressupostos teóricos. Descartes, como Viète, consolidará inovações importantes na Matemática e na Física sob a influência dos matemáticos antigos e modernos e das idéias que estavam em voga naquela época.

Num outro momento do trabalho, procuro evidenciar a produção Matemática de Descartes. Isso é interessante, pois Descartes, de certa forma, não valorizou muito a Geometria euclidiana que, segundo ele, era um conhecimento estéril; mas, em contra partida, valorizou a criatividade buscando implementar o método de análise e síntese dos antigos geômetras gregos que proporciona a descoberta antes de escrevê-la sinteticamente, na forma de um resultado comprovado. A produção Matemática de Descartes é, desse modo, repleta de descobertas sem o menor interesse de demonstração, mas é notável que mesmo não sendo um matemático preocupado com o modo sintético de demonstrar, pelas vias da metodologia da Matemática grega, foi capaz, usando o seu método heurístico, de impor uma ferramenta nova e crucial para o desenvolvimento da Ciência ocidental, a Geometria Algébrica. Isso é realizado quando resolve o problema de Papus para quatro retas.

Nas *Regras para a Direção do Espírito* (c. 1628) e em *O Discurso do Método* (1637) são as obras onde afirma claramente ser motivado pela Matemática. Num período anterior ao *Discurso*, estudou Matemática e Física, buscando elementos substanciais para prover seu método filosófico. Aliás, nas *Regras* e no *Discurso* define a sua metodologia como uma herança da Matemática grega, não da Geometria euclidiana, mas do método de análise e síntese empregado na antiga Geometria grega, principalmente em Papus, Arquimedes e Diofanto.

Para realizar a tarefa de mostrar a influência da Matemática sobre a Filosofia de Descartes, divido o trabalho nos seguintes capítulos.

## **Capítulo I – A Formação Acadêmica em La Flèche**

Descartes estudou em La Flèche, segundo a opinião de vários historiadores, e a do próprio Descartes, uma das melhores escolas da Europa daquela época. La Flèche era uma escola da Companhia de Jesus, no tempo de Descartes, orientada pela *Ratio Studiorum*, obra que orientava a educação jesuíta que foi concluída em 1599. A parte Matemática do currículo das escolas jesuítas foi elaborada pelo jesuíta Cristoph Clavius (1537-1612), um dos mais influentes matemáticos, dentro e fora da Companhia de Jesus, apelidado o Euclides do século XVI.

Para compreender o pensamento matemático de Descartes, começo investigando o currículo estabelecido na *Ratio Studiorum* de 1599 e o pensamento matemático de Clavius. Depois estudo a produção Matemática cartesiana durante seus contatos com Isaac Beeckmam (1588-1637) relatada na correspondência mantida entre eles e no próprio diário de Beeckmam. Os pensamentos filosófico e científico de Descartes ganharam forte impulso a partir desse encontro com Isaac Beeckman, ocorrido logo após Descartes deixar La Flèche, em 1619, quando então formulou os fundamentos de sua Matemática e o projeto de construir uma “Ciência inteiramente nova”.

Em seguida, investigo o pensamento matemático de Descartes em suas obras: *Solidorum Elementis* (c. 1620) e *Cogitationes privatae* (c. 1619). Todas datadas de um período anterior à publicação de *O Discurso do Método*, portanto, anteriores ao ensaio *A Geometria* e produzidas após seu contato com Beeckmam, mas publicadas postumamente. A ordem da minha análise é cronológica, isto é, primeiro *Cogitationes Privatae*, depois *Solidorum Elementis*. As principais idéias, amadurecidas num período de aproximadamente nove anos, foram coligidas em *A Geometria* de 1637. Depois da publicação de *O Discurso do Método*, com os seus ensaios, Descartes demonstra desinteresse pela Matemática, voltando-se ao estudo de outros problemas, como a Metafísica.

A tese a ser confirmada nesse capítulo é que o ambiente acadêmico que Descartes vivenciou foi fundamental para a formação do seu pensamento matemático e

filosófico. Na verdade, ele veio a refutar a Matemática e a Filosofia que aprendeu em La Flèche, bem como a Geometria e a Álgebra de Clavius, mas não totalmente. Sua Matemática não estava vinculada à noção euclidiana, embora conhecesse a obra de Euclides, mas, antes, seu principal objetivo era estabelecer um novo método. Sua inspiração foi a certeza da Matemática e a metodologia dos antigos estudiosos gregos, não o estilo geométrico euclidiano, considerado, por Descartes, estéril.

## **Capítulo II – O Método de Análise e Síntese de Descartes**

Minha meta, nesta parte, é mostrar que Descartes recuperou, reconstituiu e generalizou o método de análise e síntese dos antigos geômetras gregos para ser aplicado aos problemas que o incomodavam e que, portanto, o método está na base de todo o seu pensamento. O método é tão importante que ele refuta a dialética em detrimento dele, devido a importância desse método, faço sua reconstrução histórica, desde a Antigüidade até Descartes, mostrando, finalmente, como Descartes o reestruturou. O capítulo termina com um estudo sobre *As Regras*, onde o método cartesiano aparece, nitidamente pela primeira vez, com exemplos ilustrativos. *As Regras* mostram que Descartes ainda não tinha as suas principais idéias amadurecidas, embora, nesse período, já tivesse anunciado ter as bases de uma nova Ciência. É possível notar claramente a influência das idéias matemáticas na obra que, depois de nove anos, foram incorporadas em *O Discurso do método*, de uma forma madura. Mostro, através do exemplo da linha anaclástica, como Descartes usou a sua metodologia para determinar a curva que faz um raio, a partir de um ponto A, depois de refratado pela curva, convergir para um ponto B.

## **Capítulo III–A Influência da Matemática em *O Discurso do Método* e seus ensaios: *A Dióptrica*, *A Geometria*, *Os Meteoros***

Nesse terceiro capítulo me proponho a esclarecer de que forma a Matemática influenciou Descartes em *O Discurso do Método* e nos três ensaios. Nesse ponto, será importante demonstrar a generalidade do método analítico, uma vez que Descartes freqüentemente o re-adapta para aplicá-lo a diversos problemas de áreas diferentes. O

método então se apresenta como uma ferramenta básica, extrapolando o domínio da Geometria.

Descartes declarou que sua metodologia seria melhor entendida nos ensaios e melhor exemplificada em *A Geometria*; de fato, ali encontramos diversos problemas resolvidos por sua metodologia; com sua álgebra dos segmentos e a re-interpretação do método de análise e síntese, associados a uma moderna simbologia, resolve o paradigmático problema de Pappus. Essa passagem é considerada o nascimento da Geometria Analítica, mas minha análise conduz à conclusão de que essa façanha não é obra só de Descartes. De fato, o método de análise e síntese fora ressuscitado também por François Viète e diversos outros matemáticos e físicos estiveram envolvidos nessa tarefa. A principal obra de Viète é *Isagoge in artem analyticam* (Introdução a arte analítica)(1591), nela, Viète aplica o método de análise para resolver problemas matemáticos, mas Descartes vai mais longe e aplica o método de análise e síntese associando Geometria e Álgebra. Juntamente com uma moderna simbologia, fornece as bases para o desenvolvimento da Matemática que viria logo a seguir.

As inovações cartesianas estão contidas, principalmente, nos Livros I e II de *A Geometria*, mas, nesse itinerário, avalio também o Livro III, considerado por muitos historiadores uma parte menos inovadora de *A Geometria* e, talvez por isso, deixado de lado em muitos estudos. A meu ver, essa parte traz luz sobre o entendimento da Matemática da época e sobre o conhecimento matemático de Descartes, além do mais, podemos visualizar seu projeto na totalidade.

Buscaremos também esclarecer em que sentido Descartes usou a Matemática e aplicou o método nos ensaios: *A Dióptrica* e *Os Meteoros*, mostrando como Descartes aplicava a sua metodologia nas chamadas Ciências Físicas, neste ponto, merece destaque a resolução do problema do arco-íris, pelo seu método.

## CAPÍTULO I: A FORMAÇÃO ACADÊMICA DE DESCARTES

Vivendo num período de transição, onde os pensadores<sup>1</sup> procuravam superar as idéias provenientes dos gregos, especificamente de Aristóteles (384-322 a. C.), Descartes vislumbrou uma nova forma de pensar a Matemática e a Filosofia, unindo-as. Para tanto, procurou um novo método, na verdade, retomou um método antigo, a saber, o método de análise e síntese dos antigos geômetras gregos, desse modo, reconstituindo-o e reinterpretando-o, elabora a sua metodologia. Assim, o método o permitiu estabelecer uma nova Filosofia inspirada na Matemática. Antes porém, a Matemática e a Filosofia percorreram um longo caminho: dos gregos até o século XVI.

### 1.1 Situando Descartes historicamente

É um fato comumente aceito por todos que a Matemática, como a entendemos hoje, nasce na Grécia, onde assistimos a transformação de uma Matemática empírica, herdada dos egípcios e dos babilônicos, em uma Matemática dedutiva, formal, tal como encontrada em *Os Elementos* (III a. C) de Euclides. Essa transformação, certamente um grande momento da história da Matemática, se dá, segundo a opinião de muitos historiadores, por meio da intervenção de Platão (427-348/7 a.C.). Bicudo investiga essa transformação e chega na seguinte tese:

A mudança, pois, da Matemática “empírica” para a Matemática “pura” está intimamente associada ao caráter idealista, antiempírico da Filosofia eleática e, sobretudo, da Filosofia de Platão. Como nota van der Waerden a respeito do platonismo:

---

<sup>1</sup> Os pensadores do século XVII, chamados sábios, dedicavam-se a uma gama de estudos científicos, técnicos, metafísicos, políticos e biológicos. Evidentemente que alguns desses sábios dedicavam-se mais a determinados assuntos do que a outros. Não existia diferença entre filósofo e cientista; somente nos meados século XIX é que essa distinção ocorre. Descartes, por exemplo, estudou uma variedade de problemas matemáticos, biológicos, físicos e metafísicos.

“Verdade, que significa as idéias. São as idéias que têm Ser verdadeiro, não as coisas que são observadas pelos sentidos. As idéias podem, às vezes, ser contempladas, em momentos de Graça, através da reminiscência do tempo em que a alma vivia mais perto de Deus, no reino da Verdade; mas isso pode acontecer somente depois de os erros dos sentidos terem sido conquistados pelo pensamento concentrado. O caminho que leva a esse estado é aquele da dialética...”.

Platão incentiva a estruturação dedutiva sistemática da Ciência Matemática, porque a considera propedêutica à dialética, pois

“separando-se, ao mesmo tempo, dos pitagóricos, que mantinham no mesmo plano Ciência e Filosofia, e de Sócrates, cuja investigação prudente parece ter-se detido na determinação da hipótese, Platão conduz a Filosofia Matemática a um caminho todo novo. A Matemática situada na região da *διάνοια* é apenas uma Ciência intermediária (*τὰ μεταξύ, περὶ ἃ τὰς μαθηματικὰς εἶναι φάσιν ἐπιστήμας*, Aristóteles, *Met.* B2,997 b 2). Sua verdade reside em uma Ciência superior, que está em relação a ela como ela mesma em relação à percepção do concreto. A dialética tem por função retomar as hipóteses das técnicas particulares e de conduzi-las até seu princípio (*ἡ διαλεκτικὴ μέθοδος μόνη ταύτη πορεύεται, τὰς ὑποθέσεις ἀναιροῦσα ἐπ’αὐτὴν τὴν ἀρχήν*, REP.VII,533c), ela toma posse do incondicional; e de lá, por uma marcha que é inversa à da análise, forja uma cadeia ininterrupta de idéias( REP. VI, 511b) que suspensa no princípio absoluto, constituirá um mundo completamente independente do sensível, o mundo da *νόησις*. A Filosofia Matemática de Platão, em seu grau mais alto e sob sua forma definitiva será, então, a dialética(...)”. (BICUDO, 1998, p. 312-13)

Assim conclui Bicudo:

Enquanto Zenão toma uma hipótese como uma suposição que se faz para um presente propósito, Platão, no *Fédon* e nos livros VI e VII da *República*,

“tenta tornar suas suposições aquelas que não têm de ser tomadas como certas para o presente caso particular; ele tenta torná-las aquelas que devem ser aceitas por todos. Essa é a procura da *ἀνυπόθετον ἀρχήν*, axioma fundamental que não se tem de pedir a alguém aceitá-lo; é algo que deve ser aceito por qualquer um, (...). É por essa razão que Platão sugere à consideração o ideal axiomático: que deveríamos tentar e desenvolver o todo de nossa Matemática por raciocínio dedutivo, *διάνοια*, a partir de alguns princípios, que ele (erradamente) pensou que poderiam ser estabelecidos além de toda questão. Platão apresentou seu programa. Seus discípulos, em grande parte, realizaram-no. Temos o resultado final, codificado por Euclides. (BICUDO, 1998, p. 313)

A conclusão de Bicudo relata a gênese da Matemática formal grega e demonstra a sua íntima relação com a Filosofia de Platão. Com os gregos, a Filosofia e a

Matemática mergulham num período áureo. A Filosofia com o advento de Aristóteles e a Matemática, principalmente com Euclides que fundamenta a Geometria tendo por base três princípios, a saber: definições, postulados, noções comuns ou axiomas. Aristóteles, que escreveu sobre quase tudo, nos seus *Analíticos* trata da teoria da Ciência.

Lee em seu artigo *Geometrical method and Aristotles's account of first principles* (Método geométrico e a descrição de Aristóteles dos primeiros princípios) mostra a predominância da influência das idéias geométricas na descrição de Aristóteles dos primeiros princípios, nos *Analíticos Posteriores* – para mostrar que sua análise dos primeiros princípios é, em sua essência, uma análise dos primeiros princípios da Geometria, como ele os concebeu. A conclusão de Lee é como segue:

Noções comuns de Euclides e Axiomas de Aristóteles, e as definições de ambos, são exatamente paralelas. As noções comuns e axiomas são princípios de argumentação cujo alcance estende mais do que aqueles de uma simples Ciência: as definições são afirmações do significado dos termos. Às hipóteses de Aristóteles respondem os postulados de Euclides. Ambos são um mínimo de suposições adicionais necessárias ao lado dos axiomas ou noções comuns e das definições. As hipóteses assumem existência, os postulados, a possibilidade de construção,[...] (LEE, 1935, p. 117-tradução nossa)

A Matemática e a Filosofia gregas seguiam interligadas e hegemônicas perdurando por um longo período da história. Na Idade Média estabeleceu-se a Escolástica, Filosofia da Igreja Católica, período marcado por uma forte censura às idéias científicas. Nenhuma nova Filosofia surgiu, pelo menos até o século XVI, assim como nenhuma Matemática além daquela dos antigos gregos. Não significa, porém, essa afirmação, que nada aconteceu nesse período, houve uma discussão em torno dos trabalhos científicos dos gregos. Foi baseado nos ideais aristotélicos que a Ciência se reestruturou na Escolástica. O aristotelismo escolástico não estava simplesmente preso às idéias antigas, e não era só interpretativo da doutrina aristotélica. Também trouxe inovações importantes: era crítico, elevou as Ciências Matemáticas a um alto grau de importância e foi, até certo ponto, experimental.

Mas esse estágio começa a ruir com o Renascimento, depois do Renascimento, seguiram-se a Reforma e a Contra Reforma. Com esses movimentos a doutrina aristotélica começa a ser questionada e entre as questões, a mais profunda diz respeito à metodologia científica, indicando a necessidade de uma nova concepção científica. A mudança mais

importante que ocorrerá será, então, no âmbito científico, conseqüentemente, era necessário romper com o critério de Ciência estabelecido por Aristóteles.

O século XVI, considerado um século de transição da Escolástica para a modernidade, foi uma época de profundas modificações no plano religioso, moral e do saber, exemplo disso são os vários debates travados nesse período.

No âmbito educacional ocorre o memorável confronto acadêmico entre o português Antônio de Gouveia e o francês Pierre de la Ramée também conhecido como Petrus Ramus (1515-1572), ambos professores de Filosofia da Universidade de Paris. O confronto ocorreu a partir da tese de mestrado de Pierre de la Ramée: *Quaecumque ab Aristotele dicta essent, commentitia esse* (Tudo que Aristóteles disse é forjado), de 1536.

No âmbito científico, um debate que merece destaque, uma vez que se relaciona diretamente com o tema desta pesquisa, ocorreu quase que paralelamente ao supra citado, e é relatado, minuciosamente, no livro de Paolo Mancosu intitulado *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century* (A Filosofia da Matemática e a prática Matemática no século XVII) (1996). Mancosu sustenta que a concepção aristotélica de Ciência fomentou questões que nortearam a prática da Matemática do século XVII, afetando, inclusive, a metodologia da Matemática. As questões suscitadas dizem respeito à certeza da Matemática e ao enquadramento da Matemática no esquema aristotélico de Ciência. Especificamente, os trabalhos de Euclides, Pappus, Arquimedes, Apolônio (c. 262-c. 200 a. C.) foram colocados à prova.

A *Quaestio* debate, especificamente, a validade das demonstrações por superposição e demonstrações por contradição. As demonstrações por superposição tornaram-se centrais para os fundamentos dos indivisíveis e as demonstrações por contradição estimularam alguns matemáticos na tentativa de eliminá-las do desenvolvimento da Geometria. Esses conflitos conduziram a novas metodologias que permitiram avanços significativos em diversas áreas da Matemática no século XVII, a exemplo do Cálculo.

Um momento de reflexão é necessário: a influência da Filosofia e da Matemática gregas se faz presente nesse período de transição, conforme os esclarecimentos acima. Ao discutir a Filosofia grega e a certeza da Matemática grega são suscitadas várias questões importantes no âmbito científico. Esse é um momento marcante, pois o conhecimento matemático se desenvolveu rapidamente nos séculos XVI e XVII. As mudanças no campo

da Matemática foram muito significativas. A álgebra, Geometria Projetiva, Teoria da Probabilidade, o Cálculo e outras importantes áreas da Matemática foram profundamente afetadas pela algebrização e pela invasão das técnicas infinitistas que mudaram a direção da Matemática e, conseqüentemente, das Ciências em geral.

No âmbito religioso foi marcante, nesse período, a Contra Reforma, reação da Igreja Católica à Reforma Protestante. Com o desenvolvimento comercial e urbano europeu, houve a necessidade de mudar certas regras estabelecidas pela Igreja, uma vez que se tornaram obstáculos no plano econômico; além disso, a Igreja havia incorporado certas concepções que passaram a ser vistas como contraditórias com os próprios ideais da doutrina cristã. Desse modo, ela passa a ser questionada e, em 1517, Martin Lutero (1483-1546), revoltado com a venda de indulgência, fixou na porta da catedral de Wittenburg um panfleto contendo 95 teses denunciando abusos da Igreja e proclamando sua discordância em relação a orientação do papado. As bases do luteranismo foram expostas em 1530 na confissão de Angsburg, escritas por um discípulo de Lutero chamado Melanchthon (1497-1560).

De 1545 a 1563 a Igreja Católica organizou o Concílio de Trento com representantes de toda a Europa, e preparou a Contra Reforma, reafirmando os seguintes pontos: confirmação da autoridade papal e da doutrina tradicional, confirmação da disciplina dentro da Igreja, fixação da idade mínima para funções eclesiásticas, instituição dos seminários, um catecismo para os fiéis com um resumo da doutrina cristã, um missal com orações e leituras básicas. Ficou também determinado que a Contra Reforma agiria para recuperar o espaço perdido para os protestantes com a criação de vários colégios destinados ao curso primário e a formação das novas gerações; criação da Companhia de Jesus, com a função de catequizar, recuperar e expandir o domínio da Igreja por todo o mundo, agora levando os seus ideais para além-mar e, por fim, a instituição da Inquisição. A reação foi marcada pela fundação da Companhia de Jesus, por Ignácio de Loyola (1491-1556), que fundou diversos colégios jesuítas por toda a Europa e também em outros continentes. Com eles, a Contra Reforma agiria desde muito cedo na formação do indivíduo e, com isso, no plano ideológico, preconizava os fundamentos da Igreja Católica.

O sucesso das escolas jesuítas era nítido. Em 1579, a Companhia de Jesus contava com 180 colégios na Europa e 19 no resto do mundo. Em 1608 passa para 266.

Em 1679, eram 455 e em 1710 somam 517 e ainda mantinha 95 colégios espalhados no Japão, Índia, África, e América Latina. Sem contar com outros gêneros de casas jesuítas. Na Europa, os jesuítas tinham colégios em Portugal, Rússia, Itália, Bélgica, França, Alemanha, Mônaco, Espanha, Áustria, Boemia, Polônia e Lituânia.

Durante mais de 200 anos a Companhia de Jesus dominou o cenário educacional na Europa, estabelecendo escolas por toda parte, ininterruptamente até 21 de julho de 1773, quando foi decretado o fim da Companhia de Jesus, pelo Papa Clemente XIV. Somente a Rússia e a Prússia recusaram esse decreto, tornando-se os principais pontos de exílio dos jesuítas. A Ordem foi restaurada em 7 de agosto de 1814, pelo Papa Pio VII, fundamentado nos benefícios da ação educacional dos jesuítas.

A Companhia de Jesus serviu duplamente aos interesses da Igreja Católica; como instrumento de Contra Reforma e para disseminar a ideologia católica por todo o mundo. A escola jesuíta afetou profundamente o cenário educacional europeu, produzindo um método pedagógico de ensino unificando a forma de atuação dentro da Ordem *A Ratio Studiorum*. A motivação era criar uma unidade acadêmica entre as centenas de escolas jesuítas, a parte curricular traz inovações importantes, conforme explicitarei no Capítulo I deste trabalho. Se quisermos entender o fenômeno da educação jesuíta devemos estudar a *Ratio Studiorum*, documento fundamental sobre o qual a proposta pedagógica dos jesuítas baseava-se. A elaboração desse documento se dá concomitantemente com o humanismo europeu. É um plano de estudo que pretendia abranger todas as escolas jesuítas, estabelecendo regras para todos os envolvidos nas escolas. O sistema escolar jesuítico passa então a ser bem estruturado: fica dotado de uma hierarquia que sujeitava todos a uma única autoridade que coordenava todas as ações, transferir professores para qualquer país e também recursos financeiros.

A versão definitiva da *Ratio studiorum*, em 1599, foi fruto de quatro redações anteriores. As duas primeiras versões foram elaboradas em 1586 e são textos longos sobre os estudos superiores e inferiores. Já as duas últimas versões (de 1591 e 1599) são um conjunto de regras práticas para os reitores, prefeitos de ensino, professores e alunos; enfim, para toda a comunidade envolvida.

A gênese desse plano de estudo já se encontrava na parte IV das *Constituições*<sup>2</sup> da Companhia de Jesus e dividia o ensino em três fases; Letras Humanas, Artes e Teologia. A primeira fase, as Letras Humanas ou *Studios Humanitaris*, era um pré-requisito às Ciências. O objetivo era dar ao aluno uma *eloquentia perfecta*, sem a qual ele não poderia ser capaz de ingressar nas Artes e na Teologia.

O currículo das escolas jesuítas eleva as Ciências Matemáticas, isto é, Astronomia, Geometria, Música, etc., a um alto nível. A Companhia de Jesus é considerada por muitos uma academia de Ciências, devido ao grande número de cientistas que ela formou e que se despontaram nas mais variadas áreas do saber; entre eles: Galileu (1564-1642), Descartes, Molière, Carlos Goldoni, Montaigne, Voltaire, Anchieta, Antônio Vieira.

Outra característica desse período é a busca de uma linguagem universal para prover a Ciência emergente de uma nova ferramenta. A Matemática apresenta-se então com a possibilidade de ser a base da Ciência. Exemplo disso é a Ciência de Galileu, fortemente embasada pelo ideal matemático. Existia, nesse período, a esperança de entender o mundo via Matemática, a língua da Ciência.

## 1.2 Os estudos em La Flèche

Descartes nasceu em La Haye, França, no dia 31 de março de 1596 e morreu em 11 de fevereiro de 1650, em Estocolmo, Suécia. Filho de Joachim Descartes e de Jeanne Brochard Descartes. Sua mãe faleceu em 13 de maio de 1597, um ano após o seu nascimento. Seu pai casou-se novamente e ele passou a ser criado pela sua avó Jeanne Sain, em La Haye.

Descartes estudou no colégio jesuíta La Flèche, onde permaneceu por cerca de oito anos e meio, provavelmente do dia de Páscoa de 1607 até setembro de 1615. Patrocinado e planejado pelo rei Henrique IV em 1603, o colégio começou a receber

---

<sup>2</sup> Documento fundador da Companhia de Jesus, datado de 1539. Foi Inácio de Loyola quem redigiu as *Constitutions*. Esse documento era, como o nome indica, a Constituição dos jesuítas e norteava as ações dos jesuítas resumindo métodos de atuação, propósitos, regras para ingresso e permanência na Ordem de Jesus. A quarta parte era destinada à educação e estava em vigor desde 1552; nela foram delimitadas as linhas mestras que a educação jesuíta deveria seguir e o espírito que deveria animar toda a ordem. O próprio Inácio exige que se deveria escrever um plano detalhado de ensino dentro da ordem. A *Ratio* nasce desse princípio.

estudantes no fim de 1604. Após a morte de Henrique IV, o colégio passou a se chamar Colégio Henrique IV La Flèche.

A Ordem Jesuíta foi fundada por Ignácio de Loyola e oficialmente admitida pela Igreja Católica Romana em 1540, com um período preparatório entre os anos de 1534 e 1538. O currículo nos colégios Jesuítas do século XVII era fundamentado essencialmente nas *Constituições* da Sociedade de Jesus originada do programa educacional fundado por Ignácio de Loyola e na *Ratio Atque Institutio Studiorum Societ* que originou-se das atividades educacionais dos jesuítas no primeiro colégio da Companhia, aberto em 1548, em Messina, Sicília.

Um bom guia de estudos sobre o método pedagógico jesuítas, em língua portuguesa, é o livro do padre Leonel Franca: *O Método Pedagógico dos Jesuítas* (1952). Na primeira parte do livro, em uma introdução, são apresentadas as origens, as principais fontes, a influência da Universidade de Paris e a influência dos antigos e da Idade Média. É apresentada ainda uma visão panorâmica da *Ratio* e discutido seu valor para a cultura ocidental. Na segunda parte do livro é apresentada uma tradução da *Ratio*. Neste Capítulo I, valho-me desse trabalho. Mas a análise da parte Matemática do currículo é aprofundada utilizando-se o livro recente de Shikara: *Descartes's mathematical thought* (O pensamento matemático de Descartes) (2003).

Em seu período inicial, o método educacional dos jesuítas foi inteiramente baseado no *Modus Parisienses*<sup>3</sup>, da Universidade de Paris. Ignácio de Loyola esteve em Paris entre os anos de 1528 e 1538; em 1529 transferiu-se do Colégio Montaignu para o Colégio de Sainte-Barbe. No Colégio Montaignu o movimento humanístico era inexpressivo, mas no Colégio de Sainte-Barbe o movimento encontrou solo fértil. Ignácio testemunhou a transição do período Medieval para o Renascimento e incorporou as mudanças humanísticas como regra fundamental de seu programa, embora o tom escolástico do medievalismo ainda permanecesse vivo nos ramos essenciais do currículo.

Assim, o currículo no Colégio Jesuíta La Flèche era escolástico, mas modificado pelas reformas humanistas, e era dividido em duas partes. A primeira parte era chamada

---

<sup>3</sup> Conjunto de Regras pedagógicas que caracterizavam o ensino na Universidade de Paris. Para muitos estudiosos, o *modus parisienses* era considerado o melhor e mais adequado programa de ensino da época e que melhor se adaptava às características da Companhia de Jesus. Suas principais características: distribuição dos alunos nas classes, atividades escolares, regime de incentivos ao trabalho escolar influenciaram a *Ratio* principalmente as repetições, as disputas, as composições, as interrogações e as declarações.

de currículo humanístico<sup>4</sup> e era um preparatório à segunda parte, necessitando de cinco anos para ser consolidada. Nos três primeiros anos dessa primeira parte estudava-se gramática latina e gramática grega. No quarto ano estudavam-se humanidades, com o objetivo de fundamentar a eloquência. Lia-se Cícero (106-43 a. C.), historiadores tais como César e Salústio (c. 86- c. 34 a. C.), e os poetas tais como Virgílio (70-19 a. C. ) e Horácio (65-8 a. C.). No quinto ano, a retórica era ensinada para aperfeiçoar a eloquência, Cícero era o autor central. Na Idade Média, discussões orais eram essenciais, em La Flèche a composição em latim e grego era fundamental.

Quanto ao ensino das humanidades, era um profundo desejo de Ignácio de Loyola que os envolvidos nas atividades educacionais dos jesuítas se aperfeiçoassem nos estudos das letras de humanidades: a gramática, a poesia e o latim. Os estudiosos de humanidades eram discriminados dentro da ordem por professores de outras áreas. Os estudos humanitários, ou primeiro ciclo, foi o modelo curricular que formou diversas gerações na Europa. A *Constituição* estabelecia que as humanidades deveriam ter o mesmo grau de atenção que as faculdades superiores, determinando inclusive que existissem colégios exclusivamente dedicados ao ensino e à aprendizagem das letras. Estabelecia ainda que não deveria ser esquecido que o ensino do latim era essencial para a comunicação entre os eruditos de nações diferentes, para os exercícios escolares, incluindo os dos filósofos e teólogos: a composição de livros e de tratados; para a compreensão dos santos padres que tinham seus escritos em latim e para o trato das línguas cultas.

O currículo filosófico necessitava de três anos para ser cumprido; assim, o primeiro ano consistia de lógica e introdução a Filosofia Natural. Os estudantes liam essencialmente os trabalhos de lógica de Aristóteles. O professor ensinava primeiro o *Isagoge*, de Porfírio (232[33]-c. 305), depois as obras de Aristóteles: as *Categorias*, a *De Interpretatione*, os cinco primeiros capítulos dos *Analytica Priora*, os oito livros dos

---

<sup>4</sup> Os *studia humanitatis* compreendia gramática, retórica, poética, filosofia moral e história. Incluindo o latim e o grego que constituíam o núcleo do humanismo. O latim instala-se como a língua universal, a língua da erudição, da instrução universitária, dos contatos e das correspondências internacionais. As humanidades refletem um aprimoramento do *trivium*: abandonando-se a lógica, incluindo-se história, filosofia moral e poesia. A gramática consistia no estudo do latim e do grego, ultrapassando o estudo das normas gramaticais, abrangendo o estudo da literatura, principalmente dos poetas e suas obras. A poesia, nesse período, assume importância fundamental, além de ensino e pesquisa, estando na base da renovação humanista. A retórica estuda os prosadores latinos, baseando-se na imitação para aprimorar ou habilitar os humanistas no domínio da língua.

*Topica*, e os *Analytica Posteriora*. O segundo ano era destinado a estudar Filosofia Natural e Matemática. Os estudantes liam as seguintes obras aristotélicas: os oito livros da *Physica*, os quatro livros do *De Caelo* e o primeiro livro do *De Generatione*. Na parte Matemática, estudavam *Os Elementos*, de Euclides, e alguns problemas matemáticos considerados mais avançados. Já no terceiro ano estudavam Metafísica e Filosofia Moral, o segundo livro do *De Generatione*, e os livros *De Anima* e *Metaphysica*, de Aristóteles, eram explicados. Na Filosofia Moral a *Nicomachea Ethica* de Aristóteles era lida.

A Filosofia dos colégios jesuítas do século XVI e princípio do século XVII, como se vê por meio da sua estrutura curricular, era Escolástica aristotélica, mas as filosofias naquele período concordavam apenas em questões mais fundamentais. A essência do aristotelismo era mantida e, a partir dela, gerava-se diversas significações. O estilo filosófico dos colégios jesuítas era conservador, os professores raramente faziam contribuições aos seus campos de estudos, embora algumas vezes introduziam novos pensamentos<sup>5</sup>. Mas o ensino em La Flèche não era completamente dogmático, tinha algum grau de abertura, embora nem toda a Sociedade de Jesus aceitasse a teoria do movimento planetário de Galileu, em 1611 os estudantes em La Flèche leram um soneto sobre a descoberta de novos planetas por Galileu; hoje crê-se que são luas ao redor de Júpiter.

Quanto ao método de ensino, Gaukroger faz a seguinte descrição:

O modo como o material era lecionado nas aulas é interessante. Ao que parece, o que o estudo dos textos pretendia gerar não eram propriamente uma compreensão e uma avaliação de seu conteúdo, mas uma apreciação de seu estilo. Havia regras estritas e detalhadas que ditavam a maneira de apresentar o material, e as normas que regiam a exposição dos textos dão uma idéia considerável da natureza do ensino jesuítico. A primeira parte da exposição era o *argumentum*, na qual se fornecia um resumo geral da passagem citada. Em seguida vinha a *explanation*, na qual se parafraseavam orações e frases do trecho, para que se pudesse esclarecer seu sentido. O que vinha a seguir não era uma investigação da substância do texto, mas uma *rhetorica*, na qual se

---

<sup>5</sup> As questões científicas tinham sido fartamente abordadas na poesia no Renascimento, durante o qual tudo, desde o tratamento contra hemorróidas até a estrutura do cosmo, tinha sido metrificado. Mas esse tipo de literatura costumava reduzir as questões científicas a novidades. O interesse pelas descobertas científicas, no período que estamos considerando, girava em torno de seu valor como novidades – os Médici deram uma bela recompensa a Galileu por sua descoberta das luas de Júpiter, não porque atribuísem qualquer valor científico a essa descoberta, mas por causa do espetáculo assim proporcionado – e não há dúvida de que os jesuítas estimulavam em seus alunos o fascínio pelas novidades. Descartes não foi exceção à regra. No manuscrito que se costuma designar como *Observationes*, datado de 1621, ele descreveu com visível fascínio a maneira de criar diversas ilusões de óptica. (GAUGROGER, 2002, p.88)

examinava e elaborava a maneira como as regras da retórica, da poética, ou mesmo da simples gramática eram empregadas no texto. Essa era a parte mais extensa e mais minuciosa do exercício. Em seguida vinha a parte mais curta, a *eruditio*, na qual se expunham os fatos históricos que se pudessem fazer necessários à compreensão do texto. Por último, na *latinitas*, forneciam-se citações de outros autores, para corroborar a gramática, o estilo e as imagens do texto. O objetivo principal desse tipo de ensino era o estudo da língua e, em particular, da capacidade de pensar, escrever e falar fluentemente num latim elegante. Os modelos eram exatamente aqueles que poderíamos esperar: Cícero (acima de tudo), Ovídio, Virgílio, Tibulo e Catulo, em latim, acrescidos de Esopo, Dion Crisóstomo e outros, em grego. Na quinta série, os textos de Cícero, César e Salústio e outros sobre moral, bem como os escritos sobre retórica de Cícero e Quintiliano, tomavam a maior parte do currículo, enquanto, no estudo do grego, aprendiam-se a *Retórica* e a *Poética* de Aristóteles, ao lado de trechos extraídos de Homero, Píndaro, Demóstenes, Platão (as cartas, não os diálogos) e os Padres da Igreja gregos. (GAUKROGER, 2002, p. 77)

Agora que já temos uma visão da educação jesuíta, passemos a uma questão fundamental e mais específica: qual era a Matemática ensinada no colégio La Flèche? Na verdade, queremos conhecer a formação Matemática de Descartes de forma a compreender sua influência sobre sua Filosofia.

### 1.2.1. A Matemática estudada nos colégios jesuítas

Descartes foi educado de acordo com a *Ratio Studiorum* de 1599 que pretendia uniformizar a maneira de trabalhar dentro da ordem jesuíta impondo métodos e regras a serem seguidos dentro dos colégios e das universidades da Companhia de Jesus. Compunha-se de regras sobre assuntos diversos, tais como currículo, responsabilidades individuais dos professores e dos alunos, formação dos professores, plano de estudos, orientações pedagógicas, avaliação, regras internas, metodologia de trabalho, manuais de ensino, entre outras. Na tradução para o português da *Ratio* feita pelo padre Leonel Franca encontramos na seção Organização e plano de estudos da Companhia de Jesus, no item 20, a seguinte exigência:

Matemáticas: Estudantes e tempo. – No segundo ano do curso todos os estudantes de Filosofia assistirão à aula de Matemática por três quartos de horas. Além disto os que tiverem mais inclinação e capacidade para

semelhantes estudos exercitem-se neles em lições particulares depois do curso. (FRANCA, 1952, p. 126)

Essa exigência é, posteriormente, reafirmada, de um modo mais claro, em uma breve descrição sobre estudos matemáticos intitulada Regras para o Professor de Matemática, que são as seguintes:

1. Autores, tempo, alunos de Matemática. Aos alunos de Física explique na aula durante 3:4 de horas Os Elementos de Euclides; depois de dois meses, quando os alunos já estiverem um pouco familiares com estas explicações, acrescente alguma coisa de Geografia, da esfera[Astronomia] ou de outros assuntos que eles gostam de ouvir, e isto, simultaneamente com Euclides, no mesmo dia ou em dias alternados.
2. Problema. Todos os meses, ou pelo menos de dois em dois meses, na presença de um auditório de filósofos e teólogos, procure que um dos alunos resolva algum problema célebre de Matemática; e, em seguida, se parecer bem, defenda a solução.
3. Repetição. Uma vez por mês e, em geral num sábado, em vez da preleção repitam-se publicamente os pontos principais explicados no mês. (FRANCA, 1952, p. 164 )

Assim, nessa citação, o método de ensino da Matemática é concretamente descrito. *Os Elementos* Euclides era explicado juntamente com Geografia ou Astronomia. O método de ensino era bastante prático. O professor dava aos estudantes problemas matemáticos, bem conhecidos, para serem resolvidos, e alguns problemas importantes eram repetidamente estudados.

Não devemos, para ter uma visão mais profunda da importância do ensino da Matemática nas escolas Jesuítas, nos deter apenas nessa passagem. O ensino de Matemática nos colégios jesuítas pode ser melhor entendido a partir dos documentos históricos que serviram de fontes para a composição da *Ratio Studiorum*. Por exemplo, nas *Constituições* é declarado que a meta da sociedade e de seus seguidores é ajudar o próximo a amar e a conhecer a Deus e a obter a salvação de sua alma, e, para esse fim, a faculdade de Teologia desempenhava uma função central; toda disciplina ensinada na Companhia, o que incluía Matemática e Filosofia, deveria servir à meta religiosa.

Nos documentos históricos relacionados ao primeiro colégio jesuíta, em Messina, encontra-se o primeiro programa de Educação Matemática, composto em 1548, o ano da fundação do colégio. O autor foi Jerome Nadal (1507-1580), seu primeiro reitor. Neles há

descrições que apontam quais livros eram usados no colégio. São sugeridos *A Arithmetica practica libris IV absoluta*, publicada em 1535, de Oronce Fine (1494-1555), livro texto elementar sobre Aritmética prática. Os *Elementos* de Euclides, depois que os estudantes adquirissem uma certa experiência com demonstrações. As outras obras são todas relacionadas à Astronomia: *De Mundi sphaera, sive cosmographia* de Oronce Fine, publicada em 1542, em Paris; O *Elucidatio fabricae ususque astrolabii* de Johannes Stöffler (1451-1531), professor da Universidade de Tübingen, e o *Theoricae novae planetarum cum schooliis Rheinhold* de Georg von Peurbach (1423-1461) de 1512 e 1542, respectivamente. O Próprio Jerome Nadal ensinou a Geometria de Euclides, o grego e o hebreu, em 1549.

Nadal sugeriu ainda o estudo de *Triangulis Omnimodis libri V* (1533), de Johannes Müller (1436 – 1476) apelidado Regiomontanus, o *De triangulis* de Jordanus de Nemore (c. 1220), provavelmente com a intenção de fundamentar a Astronomia com elementos matemáticos.

O programa de Nadal e o programa de Ignácio de Loyola foram integrados na *Ratio Studiorum* de 1551, quando da abertura do Colégio Romano. Após sua abertura, a Companhia começou a ter colégios com cursos inteiros de artes liberais, além do estudo de gramática e de retórica. Em 1553, o Colégio Romano teve o seu primeiro professor de Matemática, Balthassar Torres (c.1550).

Quando a *Ratio Studiorum* se tornou o regimento interno de toda a ordem jesuíta, o ensino da Matemática passou a ser sistemático. O mais influente matemático, responsável pela composição do projeto matemático, foi o padre Cristoph Clavius, segundo professor de Matemática do Colégio Romano, em 1563. Antes da edição final da *Ratio Studiorum*, em 1599, duas versões anteriores tinham sido escritas, uma em 1586 e a outra em 1591. E foi Clavius o responsável pela estruturação da parte Matemática das três versões da *Ratio studiorum*, mas levou em consideração os estudos realizados pelos seus antecessores.

A *Ratio studiorum* de 1586 era um esboço para a versão oficial e não era, em nenhum sentido, definitiva. A versão definitiva foi composta após o exame das correspondências das várias províncias da Companhia de Jesus, dos estatutos de universidades notáveis como a de Paris, e da quarta parte das *Constituições* que era a parte relacionada à educação. Em 1586, a *Ratio* foi enviada às províncias da Companhia para consultas adicionais. Sobre a Matemática, encontramos descrições que justificam o seu

ensino: a Matemática deve ser ensinada nas escolas porque é uma ferramenta que serve a todas as disciplinas como suporte, ajudando a todos (poetas, historiadores, estudantes dos Analíticos de Aristóteles, estadistas, físicos, metafísicos, teólogos, a corte de justiça) a entenderem a natureza de seus próprios objetos de estudos.

A *Ratio Studiorum* afirmava que, para o Colégio Romano, eram necessários dois professores de Matemática. Um deles deveria ensinar *Os Elementos* de Euclides para os estudantes de lógica que estavam sendo preparados para os *Analíticos Segundos* de Aristóteles que não podem, segundo a *Ratio*, serem entendidos sem exemplos matemáticos. A *Ratio* afirmava também que *Os Elementos* deveriam ser estudados como uma preparação necessária para Geografia e Astronomia. Também menciona um compêndio que Clavius escreveu para ser usado como livro texto nos colégios, *Epitome arithmeticae practicae*, publicado em Roma, em 1583. O outro professor, afirmava a *Ratio*, deve ser o padre Christoph Clavius e sua função era treinar futuros professores de Matemática nos colégios jesuítas.

A *Ratio Studiorum* de 1591 propõe, em adição à versão de 1586, que estudantes do segundo ano de Filosofia deveriam ouvir leituras públicas sobre Matemática, todos os dias da semana, se possível, com as leituras seguindo o currículo determinado por Clavius.

De 1581 a 1594 Clavius compôs vários documentos com a finalidade de prover a versão final da *Ratio Studiorum* com elementos substanciais de Matemática. O mais importante esboço traçado por Clavius é o documento intitulado *Um Método de Promover as Diciplinas Matemática nas Escolas da Sociedade*, provavelmente de 1582. As idéias principais desse documento são duas. A primeira diz respeito às características de um professor de Matemática, e a segunda diz respeito à relação entre Matemática e Filosofia Natural. Para Clavius, um professor de Matemática, dentro da ordem jesuíta, deve ter conhecimento e autoridade incomuns. Clavius exigia um alto grau de qualidade para o professor de Matemática dentro da ordem jesuíta, exigindo que a Matemática fosse entendida para melhor compreensão dos fenômenos naturais. Platão e Aristóteles, segundo Clavius, não podiam ser entendidos sem o conhecimento básico da Matemática e, também segundo ele, a falta de conhecimento matemático levou professores de Filosofia, e até mesmo de Matemática, a cometerem incontáveis erros, muitas vezes publicados. Por essas razões, o ensino da Matemática deveria ser encorajado. Clavius era um escolástico que

deu à Matemática uma grande importância e criticou qualquer epistemologia dogmática que afirmasse que Matemática não era Ciência.

Em *Sobre o ensino da Matemática*, provavelmente composto em 1593, Clavius propõe um plano ambicioso para o estudo da Matemática. Propõe outros textos a serem ensinados, além dos seis primeiros livros de Euclides. Segundo Clavius, os estudantes devem estudar do sétimo ao décimo terceiro livros de Euclides, *Spherica* de Theodosius (II a. C.) e alguns trabalhos conhecidos de Apolônio deveriam ser concluídos em um ano, com duas leituras diárias. Recomenda, ainda, que teólogos tenham lições de teoria planetária, gnômica<sup>6</sup>, astrolábio<sup>7</sup>, Álgebra<sup>8</sup> e de alguns textos de Arquimedes. Clavius sugere aos teólogos estudarem os textos de Arquimedes e Álgebra, pois seria necessário ensinar as futuras gerações da ordem jesuíta e importante às atividades missionárias. Por volta do ano de 1581, ainda recomenda que a estrutura e o uso do astrolábio fossem explicados. Sugere que alguns trabalhos de Arquimedes fossem estudados, tais como o método de achar a média proporcional entre dois segmentos de reta, o problema de duplicar o cubo e a quadratura do círculo. Os livros textos sugeridos são os de Michael Stifel (1487-1567), Johannes Scheubel (1494-1570) e Jacques Peletiers (1517-1582).

A Matemática era estudada, pois facilitava o entendimento de certas Ciências e os trabalhos de Aristóteles. Mas existiam muitos outros motivos para introduzir o estudo da Matemática dentro da ordem jesuíta, além dos já citados. Entre eles, o treinamento missionário que foi uma atividade extremamente importante para os jesuítas, não só na Europa, mas também em outros continentes. Alguns missionários voluntários estudavam, em particular e sob a orientação de tutores, para melhor entenderem e se familiarizarem com a Astronomia e as outras Ciências Matemáticas. Clavius orientou muitos alunos que se tornariam importantes membros da Companhia.

A Matemática e a Astronomia foram de fundamental importância para introduzir a Filosofia jesuíta, por exemplo, no leste asiático (Ásia Oriental), especialmente na China e

---

<sup>6</sup> A arte de construir gnômom. Por sua vez, gnômom era um instrumento usado na Antiguidade para medir a altura do sol através da sombra, uma espécie de relógio solar.

<sup>7</sup> Instrumento astronômico inventado pelo astrônomo e matemático grego Hiparco do século II antes de Cristo. Servia para medir as alturas de um astro acima do horizonte. Foi aperfeiçoado e hoje é um dos instrumentos fundamentais da astrometria.

<sup>8</sup> A Álgebra que predominou nos colégios Jesuítas era praticamente a elaborada por Clavius e esclareceremos como era essa Álgebra, posteriormente, quando estudarmos os trabalhos matemáticos produzidos por Clavius.

no Japão. Nas correspondências dos jesuítas encontramos relatos sobre o interesse dos asiáticos na Matemática e na Astronomia européia. Dessa forma, Clavius incentivou o ensino da Matemática dentro da Ordem Jesuíta porque percebeu, entre outras coisas, que esse era um caminho para a aceitação do cristianismo, por parte de culturas milenares, como é o caso das asiáticas, uma vez que a sólida religião desses povos dificultaria a penetração de outras crenças em seus territórios, como está relatado nas cartas de diversos missionários do leste asiático para a central dos jesuítas. O raciocínio era mostrar a superioridade da Ciência européia e, uma vez estabelecida essa crença, seria mais fácil estabelecer o cristianismo.

Finalmente, outro motivo para se ensinar Matemática dentro da ordem jesuíta, é que Cristoph Clavius atribuía a Matemática um alto valor epistemológico, para ele, a Matemática estava na base de todo conhecimento científico e possuía a característica da certeza, enquanto outras Ciências não. Assim, se faz necessário dedicar um pouco mais ao pensamento matemático de Clavius para entendermos, com mais clareza, os seus propósitos.

### **1.3 Uma síntese do pensamento matemático e a filosofia da Matemática de Cristoph Clavius**

Descartes revelou, em 1646, conhecer as obras Matemáticas de outros matemáticos, quando se reuniu com o matemático inglês Jonh Pell (1611-1685), em Amsterdã. O relato das obras conhecidas por Descartes pode ser encontrado na carta de Pell para Charles Cavendish (1591-1654), de 2 de março de 1646. Nela, Pell dá detalhes de sua conversa com Descartes que disse-lhe não ter a sua própria cópia de *Os Elementos*, mas admirava Euclides e Apolônio e era fascinado pelo talento matemático de Arquimedes. Afirmara que os trabalhos matemáticos dos gregos deveriam ser simplificados seguindo o seu novo método. Segundo Pell, Descartes diz que a sua única fonte em *Álgebra* foi o livro de Clavius, trinta anos antes. Referindo-se a *Álgebra*, de Clavius, publicada em 1608, em Roma.

Descartes deve ter lido a *Álgebra* de Clavius antes de 1616, provavelmente após o ano acadêmico de 1613-1614, quando deveria estudar Matemática como aluno do segundo ano do currículo filosófico, em La Flèche. Segundo Shikara, a passagem sobre Euclides dá a impressão que Descartes o leu apenas superficialmente, mas em 13 de novembro de

1629, entretanto, Descartes escreve a Mersenne, de Amsterdã, sobre a curva chamada quadratriz e o conteúdo da carta parece contradizer sua afirmação a Pell sobre Euclides. Na carta, Descartes responde a uma questão proposta por Mersenne (1588-1648), mencionando a quadratriz e indicando que lera *Os Elementos*. O trabalho mencionado por Descartes foi *Euclidis Elementorum libri XV*, com extensas anotações feitas por Clavius, publicado inicialmente em Roma, em 1574. Muito lido, passou por várias impressões que incluem um considerável número de adições e emendas. Descartes seguiu a simbologia proposta por Clavius em sua *Álgebra* por muito tempo, em contra partida, Descartes adotará o método de análise e síntese dos antigos enquanto Clavius seguirá apenas a síntese.

Cristoph Clavius nasceu em 25 de março de 1538 na cidade de Bamberg, na Alemanha. Aderiu a ordem dos jesuítas em que foi admitido pelo próprio Ignácio de Loyola, em 1555; logo entrou na Universidade de Coimbra, em Portugal, onde, certamente, estudou Filosofia sob a orientação de Pedro da Fonseca<sup>9</sup>. Pode-se conjecturar que aprendera Matemática com Pedro Nuñez Saliciense<sup>10</sup>. Após retornar a Roma, começou a ensinar Matemática no Colégio Romano, em 1563. Deste ano até sua morte, em 06 de fevereiro de 1612, foi o mais influente matemático entre os jesuítas. Clavius obteve,

---

<sup>9</sup> Filósofo e teólogo português que nasceu em Cortizada, Portugal, no ano de 1528. Morreu em Lisboa, no dia 4 de novembro de 1599. Entrou para a sociedade de Jesus, em Coimbra, no ano de 1548. No ano de 1551 passou para a Universidade de Évora. Conquistou para si o título de Aristóteles Português. Seus trabalhos foram largamente utilizados por toda Europa. São eles: *Institutionum Dialecticarum Libri Octo* (Lisboa, 1564), *Commentariorum in Libros Metaphysicorum Aristotelis Stagiritae* (Roma, 1577), *Isagoge Philosophica* (Lisboa, 1591).

<sup>10</sup> Pedro Nuñez Saliciense (1502-1578) cursou medicina na Universidade de Lisboa, passando por Salamanca. Por sorte, a medicina de então não dispensava a astrologia que se apoiava na Astronomia que, por sua vez, era fundamentada na Matemática. Assim deve ter despontado o gênio matemático de Pedro Nuñez. Em 1509 foi nomeado cosmógrafo do rei se tornando o mais eminente do mundo de então. Foi professor da Universidade de Lisboa e depois de Coimbra. Sua obra pode ser dividida em duas partes, a saber: as traduções melhoradas e as originais. Traduções: 1537, *Tratado da esfera*, por Sacrabrosco; *Teórica do sol e da lua*; por Purbáquio; *Cosmografia, livro primeiro*, por Ptolomeu. Originais: *Tratado sobre certas dúvidas de navegação* (1537), o tratado é sobre certas dúvidas colocadas por Martim Afonso de Souza ao regressar do Brasil, em uma de suas viagens. Pedro Nuñez esclareceu a natureza verdadeira das linhas de rumo. *Tratado em Defesa da Carta de Marear* (1537). As duas obras foram traduzidas para o latim editadas pela primeira vez em 1566 e pela segunda vez em 1573, ficando conhecidas como o mais importante tratado de navegação impresso, *De Arte Adque Ratione Navigandi* (1566 e 1573). *De Crepusculis* (1542), explica cientificamente a variação do crepúsculo, esta obra bastaria para imortalizá-lo. *De Erratis Orontii Finei* (1546), Pedro Nunes demonstra a falsa solução dada para os clássicos problemas gregos por Orontii Finei, em 1544. *Libro de Álgebra en Arithmética y Geometria* (1567), ocupa uma posição entre a *Ars Magna* (1545) de Cardano e a *Artem Analyticam Isagoge* (1591) de Viète.

quando visitou Messina, em 1574, muitos escritos de Francisco Maurolico<sup>11</sup> que foi um importante tradutor daquele período. Essas traduções tornaram Clavius consciente de muitos trabalhos gregos. Clavius é também lembrado como um dos principais promotores da reforma do calendário gregoriano (1577-82) e como um mentor de Galileu.

Clavius escreveu diversos livros sobre Matemática e Astronomia, além de sua versão e comentários de *Os Elementos* de Euclides: *Elementos de Euclides*, *Epitome arithmeticae practical* (1583), *Geometria practica* (1604), e *Álgebra* (1608). Todos contidos em sua *Opera mathematica*, em cinco volumes, publicados em Mainz, em 1611-12. Seus escritos foram classificados em três categorias: manuais, comentários e edições, escritos polêmicos. Embora Clavius fosse bastante produtivo e um erudito, não foi um matemático criativo. Foi um matemático representativo no fim do século XVI e início do século XVII, pertencendo a geração entre Federico Commandino<sup>12</sup>, um restaurador da Matemática, que traduziu muitos tratados matemáticos gregos para o latim e Viète que realizou uma reforma radical na Matemática. Como astrônomo, pertencia a geração entre Tycho Brahe (1546-1601) e Galileu. A sua obra, *In Sphaeram Iohannis de Sacro Bosco Commentarius*, publicada em 1570, o liga à Idade Média, uma vez que a *Sphaera* foi largamente usada nas universidades medievais como livro texto de Astronomia.

A Matemática de Clavius será melhor entendida ao avaliarmos a sua Filosofia da Matemática, seus tratados geométricos e seu tratado algébrico. Nesse aspecto, a tese de Chikara Sasaki (2003) é de fundamental importância, pois avalia a produção matemática de Clavius pormenorizadamente, além da produção matemática de Descartes.

### 1.3.1 Filosofia da Matemática de Clavius

---

<sup>11</sup> Francisco Maurolico (1494-1575) era conhecedor das geometrias antigas que se estavam tornando disponíveis por meio das traduções, pois lia bem grego e latim. “[...]Na verdade, a partir de algumas indicações em Pappus sobre a obra de Apolônio sobre máximos e mínimos - isto é, sobre normais às seções cônicas - Maurolico reconstruiu o então perdido Livro V de *As Cônicas*. Nisso ele representava uma voga que seria um dos principais estímulos à geometria antes de Descartes - a de reconstruir obras perdidas em geral e os últimos livros de *As Cônicas* em particular”. (BOYER, p. 206). Maurolico, juntamente com Federico Commandino, restaurou obras de grande valor. Quando em 1575, Maurolico e Commandino morreram, a Europa Ocidental tinha recuperado a maior parte das principais obras Matemáticas da Antiguidade.

<sup>12</sup> Federico Commandino (1509-1575), juntamente com Francisco Maurolico, traduziu diversas obras importantes: Arquimedes para o latim em 1558; *As cônicas* de Apolônio, impressa em Bolonha em 1566; A Coleção Matemática de Pappus, impressa em 1588.

No *Prolegomena*<sup>13</sup>, em sua edição de *Os Elementos* de Euclides, primeiro publicado em 1574, Clavius promove a disciplina Matemática. Nela, podemos perceber melhor a sua concepção epistemológica da Matemática. O *Prolegomena* é dividido em nove seções, a saber:

1. As disciplinas Matemáticas, porque elas são assim chamadas?
2. A divisão das disciplinas Matemáticas.
3. A descoberta das disciplinas Matemáticas.
4. A nobreza e preeminência da Ciência Matemática.
5. Vários usos da disciplina Matemática
6. A recomendação a Euclides e a *Geometria*.
7. A divisão da Geometria e de *Os Elementos* de Euclides.
8. O que é um problema, um teorema, uma proposição e um lema de acordo com os matemáticos.
9. Quais são os princípios da Matemática?

A principal característica do *Prolegomena* é que Clavius se mostra bastante influenciado pela Filosofia da Matemática de Proclus (provavelmente nasceu em 410 ou 411 de nossa era), desenvolvida em *Commentary of the First Book of Euclid's Elements* (Comentário dos primeiros livros de *Os Elementos* de Euclides). Foi através da edição de Francisco Barozzi (1537-1604), de 1560, publicada em Pádua, que Clavius obteve conhecimento sobre os comentários de Proclus (410-485), particularmente sobre a História da Matemática grega e sobre a divisão da disciplina Matemática.

Para compreender a Filosofia da Matemática de Clavius é necessário estudar a controvérsia filosófica em que Barozzi foi profundamente envolvido. O debate foi iniciado na Universidade de Pádua: *Quaestio de certitudine mathematicarum*. De um lado os seguidores de Alessandro Piccolomini (1508-1578) e, do outro, os seguidores de Francisco Barozzi. O episódio que dá início à disputa foi a publicação do *Commentarius de Certitudine Mathematicarum Disciplinarium*, em Roma, 1547, por Piccolomini.

No século XVII a Matemática pura se desenvolveu rapidamente alcançando um alto grau de sofisticação, cujo exemplo é o cálculo. A razão para tal desenvolvimento é

---

<sup>13</sup> Explicação inicial que visa expor os princípios gerais de uma ciência. A Introdução geral de uma obra ou um prefácio longo.

que nos séculos XVI e XVII foram suscitadas diversas questões sobre o método científico e, a partir daí, novas técnicas foram apresentadas permitindo um amplo avanço nas questões científicas. Em relação à Matemática, questionaram se satisfazia a concepção aristotélica de Ciência. Dentro desse contexto, a Matemática produzida por Euclides, Arquimedes, Apolônio e Papus foram questionadas. Especificamente, as questões focavam a certeza das demonstrações Matemáticas. Isso estava na base do pensamento de Alessandro Piccolomini que iniciou o debate que se prolongou por mais de cem anos.

O debate foi recentemente investigado por Paolo Mancosu no seu livro *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century* (A Filosofia da Matemática e a Prática Matemática no Século XVII). Daremos aqui as idéias principais do debate para estabelecermos a posição de Clavius.

Piccolomini, um defensor dos ideais científicos de Aristóteles, questionou se a Matemática enquadrava-se no modelo aristotélico. Para falar sobre o debate, Mancosu começa explicando que a teoria científica de Aristóteles é tratada nos *Analíticos Segundos*. Em síntese, para que um conhecimento seja aceito como um conhecimento científico é necessário sabermos, primeiramente, a “causa” desse conhecimento científico.

Nesse contexto “causa” pode ser qualquer uma das quatro causas aristotélicas<sup>14</sup>: formal, material, eficiente e final. Segundo Aristóteles, o conhecimento científico é obtido por demonstração e para se atingir uma transição científica das premissas à conclusão, “um silogismo deve não somente ser válido, mas premissas e conclusão devem estar em uma relação especificada”<sup>15</sup>.

---

<sup>14</sup> 1. causa material, isto é, aquilo de que um ser é feito, sua matéria (por exemplo, água, fogo, ar, terra); 2. causa formal, isto é, aquilo que explica a forma que um ser possui (por exemplo, o rio e o mar são formas da água; mesa é a forma assumida pela matéria madeira com a ação do carpinteiro). A forma é propriamente a essência de um ser, aquilo que ele é em si mesmo ou aquilo que o define em sua identidade e diferença com relação a todos os outros; 3. causa eficiente ou motriz, isto é, aquilo que explica como uma matéria recebeu uma forma para constituir uma essência (por exemplo, o ato sexual é a causa eficiente que faz a matéria do óvulo ao receber o esperma receber a forma de um novo animal ou de uma criança; o carpinteiro é causa eficiente que faz a madeira receber a forma da mesa; o fogo é causa eficiente que faz os corpos frios tornarem-se quentes, etc.); 4. a causa final, isto é, a causa que dá o motivo, a razão ou finalidade para alguma coisa existir e ser tal como ela é (por exemplo, o bem comum é a causa final da política, a felicidade é a causa final da ação ética; a flor é a causa final da semente transformar-se em árvore; o Primeiro Motor Imóvel é a causa do movimento dos seres naturais, etc.) (CHAUI, 2004, p. 111)

<sup>15</sup> Tomemos o clássico exemplo. Todos os homens são mortais. Sócrates é homem. Logo, Sócrates é mortal. O silogismo para ser aceito como verdadeiro deve seguir um conjunto de regras. “A premissa maior deve conter o termo extremo maior (no caso, “mortais”) e o termo médio (no caso, “homens”); a premissa menor deve conter o termo extremo menor (no caso, “Sócrates”) e o termo médio (no caso, “homens”); a conclusão

É imediatamente evidente que as exigências estabelecidas para a relação premissas-conclusão são muito mais fortes do que a simples consequência lógica. Em particular, há várias formas válidas de inferência que não dão, na teoria de Aristóteles, conhecimento científico. Nos *Analíticos Segundos* I.13, Aristóteles introduziu uma importante distinção entre dois tipos de demonstrações – demonstrações *tou hoti* e *tou dioti* – que são traduzidas como demonstração “do fato” e demonstração “do fato arrazoado”. Nos comentários latinos posteriores, eram, freqüentemente, chamadas *demonstratio quia* e *demonstratio propter quid*. A primeira procede dos efeitos às causas, enquanto que a última explica efeitos por meio das causas<sup>16</sup>. (MANCOSU, 1996, p.11)

O comentarista Averroës (1126-1198), segundo Mancosu, reinterpreta essa concepção e introduz um novo conceito de demonstração:

A distinção entre demonstração do fato e do fato arrazoado foi mantida pelos comentaristas aristotélicos e foi ainda mais desenvolvida por Averroës no seu próêmio à *Física* de Aristóteles, onde as demonstrações são partilhadas em três gêneros: *quia*, *propter quid* e *potissima*. A demonstração *potissima* era considerada o tipo mais incontestável de prova (logo, um silogismo científico). Caracterizarei a demonstração *potissima* mais cuidadosamente abaixo. A tripartição da demonstração, herdada pela Renascença, foi ainda mais complicada pelas distinções feitas por eruditos médicos, nos seus comentários ao trabalho de Galeno. De novo, remeto o leitor a Randall (1961), que reconstrói “a elaboração gradual do método aristotélico, à luz da tradição médica, a partir de suas primeiras discussões, em Pietro d’Abano, até a sua completa afirmação, nas controvérsias lógicas de Zabarella, nas quais atinge a forma familiar a Galileu e aos cientistas do século XVII. (MANCOSU, 1996, p.12)

Assim, baseando-se na concepção aristotélica de Ciência, Alessandro Piccolomini suscitou dúvidas sobre os métodos matemáticos:

A classificação tripartida da demonstração é proposta por Alessandro Piccolomini (1508-1578), em um tratado publicado em 1547, intitulado *Commentarium de Certitudine Mathematicarum Disciplinarum*. Nesse trabalho, Piccolomini desafiou o argumento tradicional de que as Ciências Matemáticas possuem o mais alto grau de certeza, porque fazem uso do mais alto tipo de demonstração, a demonstração *potissima*, por ele definida

---

deve conter o maior e o menor e jamais deve conter o termo médio (no caso, deve conter “Sócrates” e mortal” e jamais deve conter “homem”). Sendo função do médio ligar os extremos, deve estar nas premissas, mas nunca na conclusão. (CHAUI, 2004, p. 111)

<sup>16</sup> Tradução de Irineu Bicudo.

como aquela que dá, ao mesmo tempo, a causa e o efeito (*simul et quia et propter quid*). Os aspectos exatos de uma demonstração *potissima* foram amplamente debatidos. É suficiente dizer que tinham que incorporar as propriedades que Aristóteles prescrevera para o silogismo científico. Entre outras coisas, Piccolomini exigia que uma demonstração *potissima* fosse um silogismo na primeira figura, com premissas universais anteriores e mais bem conhecidas do que a conclusão. Seu médio deve ter a forma da definição de uma propriedade, deve ser único, e deve funcionar como a causa imediata da conclusão<sup>17</sup>. (MANCOSU, 1996, p. 12)

O foco era a demonstração Matemática. Piccolomini, no capítulo 11 do *Commentarium de Certitudine Mathematicarum Disciplinarum*, segundo Mancosu, argumenta e conclui que as demonstrações Matemáticas não podem satisfazer a definição de demonstração *potissima*, mas assegura a certeza da Matemática. Segundo Piccolomini, a certeza é devido à natureza conceitual da Matemática, criada na mente humana. Em seguida, Piccolomini focalizou a questão mais geral, se a Matemática poderia ser uma Ciência causal. Se demonstrações Matemáticas não forem demonstrações *potissimae*, a Matemática não pode ser uma Ciência causal e, conseqüentemente não seria uma Ciência aristotélica.

Piccolomini, Pereyra (1535-1610) e Gassendi (1592-1655) defenderam essa tese. Mas, vários estudiosos como Barozzi, Biancani (1566-1604), Barrow (1630-1677), e Wallis (1616-1703) argumentaram em favor de que a Matemática deveria permanecer no reino das Ciências causais.

Piccolomini insiste que a Matemática não pode tratar coisas que contêm matérias e Barozzi enfatiza que a Matemática incorpora uma poderosa certeza demonstrativa e que esta certeza é próxima da Teologia.

As questões que foram suscitadas implicavam uma avaliação das demonstrações Matemáticas. Por exemplo, Pereyra considerou a proposição I.32 de *Os Elementos* de Euclides, a saber, a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos, como um claro exemplo que não podia ser tratado casualmente. Na demonstração, Euclides utiliza-se de construções auxiliares<sup>18</sup> e esse é o ponto onde Pereyra chama a

---

<sup>17</sup> Tradução de Irineu Bicudo.

<sup>18</sup> Considere o triângulo ABC. Na demonstração, Euclides prolonga um dos lados do triângulo, digamos AB até E e, em seguida, traça uma paralela a AC, BF; a partir daí deduz, pelo teorema das paralelas que o

atenção. Segundo Pereyra, o apelo a segmentos auxiliares mostra como a demonstração não é verdadeiramente causal, uma vez que o resultado vale mesmo sem a consideração do ângulo externo e aos segmentos externos, ou seja, o ângulo externo e os segmentos auxiliares não podem ser a verdadeira causa da igualdade. Esse caso, foi amplamente anunciado como um claro contra exemplo da não causalidade da Matemática e foi constantemente re-analisado por aqueles que defendiam a causalidade da Matemática.

Outras questões dizem respeito a demonstrações por contradição e demonstrações por superposição. Em relação à última, Clavius devotou uma longa seção na segunda edição dos seus *Euclidis Elementarum Libri XV* (1589), objetivando Peletier que afirmara que sendo a Geometria provida de elementos estáticos então seria a demonstração por superposição contrária a natureza de toda Geometria. Clavius acusa Peletier de não ter compreendido em que sentido os geômetras usam superposição. Segundo Clavius, o movimento é realizado no nível mental, isto é, na Geometria lidamos com um movimento intelectual. Além do mais, desistir da demonstração por superposição subverteria toda a Geometria, uma vez que diversas demonstrações fazem uso desse tipo de argumento ou utilizam teoremas que dependem destas para serem provadas.

Foi neste ambiente problemático que Clavius compôs o *Prolegomena*, em sua edição de *Os Elementos* de Euclides. Na seção sob o título A nobreza e a preeminência da Ciência Matemática, Clavius posiciona-se sobre o problema da certeza e da posição intermediária da Matemática. De acordo com ele, a Matemática posiciona-se entre a Metafísica e a Ciência Natural, mas em relação à certeza das demonstrações matemáticas, ela é mais preeminente do que qualquer outra disciplina. Clavius eleva a certeza da Matemática nos mais altos termos possíveis, afirmando que não existem desacordos em Matemática, enquanto existem inumeráveis conflitos no primeiro e até mesmo nos outros ramos das Ciências, especialmente na Filosofia.

Clavius, trabalhando no nível institucional, claramente apoiou Barozzi e no memorando sobre o tópico “o modo como as disciplinas Matemáticas poderiam ser fomentadas nas escolas da sociedade”, Clavius delineou um programa de estudos

---

ângulo CAB e EBF são iguais, EBC é igual a ACB, juntos, EBF, CBF e ACB formam o ângulo raso. O lado prolongado é uma construção auxiliar.

matemáticos e tratou do que se tornara uma séria divisão interna entre os matemáticos e filósofos.

Também contribuirá muito para isso, se os professores de Filosofia abstivessem-se daquelas questões que não ajudam na compreensão das coisas naturais e que depreciam muito a autoridade das disciplinas Matemáticas aos olhos dos estudantes, como aquelas nas quais ensinam que as Ciências Matemáticas não são Ciências, não têm demonstrações, abstraem do ser e do bem, etc; pois a experiência ensina que essas questões são um grande estorvo para os alunos e não lhes prestam nenhum serviço; especialmente, desde que os professores, dificilmente, podem ensinar-lhes, trazendo essas questões ao ridículo (o que sei não, apenas, por ouvir dizer)<sup>19</sup>. (MANCOSU, 1996, p. 13 )

Clavius tentou encontrar um meio de pacificar o conflito entre os filósofos e para refutar, entre outros, pensadores céticos que eram muito influentes no fim do século XVI e início do século XVII.

Segundo Sasaki (2003, p.53), na seção sobre A recomendação a Euclides e a Geometria, Clavius sugere que as disciplinas matemáticas, juntamente com a dialética, tinham ferramentas efetivas para colocar em xeque os julgamentos dos céticos ao negarem qualquer certeza sobre o conhecimento humano, sem distinção, entre o científico ou teológico.

Clavius posicionou a dialética ao lado das disciplinas Matemáticas como ferramenta para combater o pirronismo<sup>20</sup>, uma das mais influentes correntes céticas, permanecendo dentro do esquema escolástico de Ciência.

Ainda, segundo Sasaki ( 2003, p. 59), na seção do *Prolegomena*, Vários uso das disciplinas Matemáticas, pode-se detectar um forte tom platônico. Clavius parece ter sido influenciado, em parte, por Proclus, no capítulo traduzido por Barozzi e intitulado “Sobre o uso das Ciências Matemáticas”. Ele cita Proclus, Platão ( *Philebus*, *Epinomis*, *Timaeus*, o Livro 7 da *República*), mas também Santo Agostinho, São Jerônimo, São Gregorio de Nazaré, entre outros, para sustentar a importância em promover a Ciência Matemática.

---

<sup>19</sup> Tradução de Irineu Bicudo.

<sup>20</sup> Doutrina fundada por Pirro de Élida(c. 365 – c. 275 a. C.). Defendia um estado permanente de dúvida.Há vários significados para o termo. Ceticismo global nos diz que nunca atingiremos um conhecimento indubitável sobre o mundo, quer nos domínios das verdades de ordem geral, quer no de algum determinado domínio do conhecimento. O ceticismo prático nos diz que para toda proposição científica existe sempre outra contrária, assim não devemos discutir a ciência., essa é a posição de Pírron de Elida, e de seus seguidores, caracterizada pelo cepticismo radical. O ceticismo metodológico foi usado por Descartes, funciona para chegar a uma certeza absoluta.

Esse debate interessou aos contemporâneos e às futuras gerações. Pietro Catena (1501-1576) seguiu Piccolomini. Ele fez uma detalhada comparação entre provas euclidianas e silogismos aristotélicos. Benedito Pereyra, colega de Clavius no Colégio Romano, também seguiu Piccolomini e desenvolveu o argumento que a Matemática não é propriamente uma Ciência que pode tratar todo tipo de causa. John Wallis (1616-1703) publicou *Mathesis Universalis* em 1657, nele a *Quaestio* é mais uma vez lembrada. A discussão prolongou-se até 1664-1666 com Isaac Barrow (1603-1677), na Universidade de Cambridge.

Foi neste ambiente que Clavius e Descartes desenvolveram suas atividades intelectuais. Num momento em que os céticos eram difundidos como um efeito da Contra Reforma. Descartes foi educado em um ambiente em que Clavius foi muito influente em assuntos ligado à Matemática. Enquanto a Alemanha, Coimbra, Roma, França eram sacudidas pela confrontação intelectual e religiosa, os dois pensadores lutaram para superar essa situação intelectual.

Será importante ainda avaliarmos a influência dos matemáticos Pappus e Diofanto nos trabalhos de Clavius, pois esses dois matemáticos foram muito importantes para a cultura ocidental. Há nos trabalhos de Clavius traços marcantes da influência grega. Descartes também sofrera influência desses matemáticos, conforme explicitarei no próximo capítulo.

### 1.3.2 A influência de Pappus nos trabalhos de Clavius

Clavius ignorou o método analítico dos antigos geômetras gregos<sup>21</sup> em sua Matemática, simplesmente concentrando-se na parte sintética. Matemáticos renascentistas

---

<sup>21</sup> Podemos dividir os matemáticos em duas categorias: os formalistas e os heurísticos. Euclides, que compilou e transmitiu a geometria no estilo axiomático pertence à primeira categoria. Pappus, que dava ênfase ao caráter inventivo da Matemática procurando estabelecer ferramentas para resolver problemas, pertence à

obtiveram informações sobre o significado da análise em Geometria antiga essencialmente da interpolação de um comentário na proposição I-5 do livro XIII de *Os Elementos* de Euclides<sup>22</sup> e da parte inicial do livro VII da coleção de Pappus, chamado *O Tesouro da Análise*<sup>23</sup>.

Apresentaremos no Capítulo II uma discussão pormenorizada sobre o método de análise e síntese dos antigos geômetras gregos. Mas é necessário agora um exemplo ilustrativo para melhor compreendermos o texto a seguir. Suponhamos, então, a título de ilustração, que queiramos provar o simples resultado de que ângulos opostos pelos vértices são iguais, veja a figura 1 abaixo, usando o método acima mencionado. A demonstração dada apenas ilustrará a aplicação do método. O matemático, então procederia, num primeiro momento, aceitando o resultado desejado como já verdadeiro, ou seja,  $A = C$ . Em seguida, se o resultado é verdadeiro, então aplicando o axioma que diz que se adicionarmos iguais a ambos os lados da igualdade, a igualdade permanece verdadeira, obteríamos a igualdade  $A + D = C + D$ , pelo acréscimo de  $D$  a ambos os lados. Vale lembrar que a igualdade obtida nessa segunda etapa não precisa ser exatamente essa, poderia ser qualquer outra, depende da tentativa. Não há certeza na busca por antecedentes. Mas devemos agora perguntar, se essa última igualdade é verdadeira, o que podemos concluir a partir dela? De acordo com a figura,  $A + D$  deve ser igual a dois ângulos retos,  $A + D = 2R$ . O mesmo é válido para  $C + D$ ,  $C + D = 2R$ . Portanto, chegamos em algo claramente verdadeiro. Isso indica o fim da análise e podemos agora passar à síntese.

A síntese começa, neste caso, pela percepção de que, na figura, a soma dos ângulos  $A + D$  é igual a dois retos,  $A + D = 2R$ . Também notamos que  $C + D = 2R$ . Ou

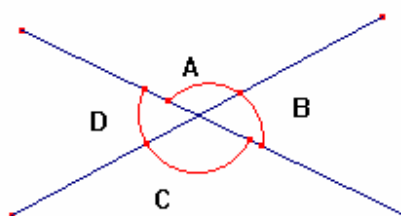
---

segunda categoria. Clavius, embora tenha lido a coleção de Pappus, não foi um simpático de sua arte heurística, concentrando-se exclusivamente no modo euclidiano de fazer Matemática. Sua geometria tem fortes vínculos com a geometria de Euclides, principalmente com o modo sintético de fazer demonstrações. Descartes conheceu o método analítico a partir dos autores antigos como Apolônio, Arquimedes e Pappus ou indiretamente dos restauradores de sua época como Marino Ghetaldi, Willebrord Snel. Conforme mostraremos, Descartes foi um heurístico que procurou usar o método de análise e síntese para descobrir a solução de muitos problemas de sua época.

<sup>22</sup> Na tradução de Heath de *Os Elementos* encontramos a interpolação. “Análise é assumir o que é procurado, como se fosse admitido, [e a passagem] através de suas conseqüências ( ) para algo[que é] admitido verdadeiro. Síntese é assumir o que é admitido[e a passagem] através de suas conseqüências ( ) para o término ou consecução do que é procurado.(ROBINSON, 1983, p.7)

<sup>23</sup> Essa citação será discutida posteriormente neste trabalho. Ela é a melhor e mais abrangente descrição do método de análise e síntese que chegou até nós. Para o momento basta dizer que, tomando por base a última nota de rodapé, a parte analítica seria a etapa da descoberta, enquanto a sintética seria a formalização do resultado. Tal método foi muito importante para o mundo ocidental e teve influência decisiva nos trabalhos científicos e filosóficos das gerações posteriores.

seja, a síntese começa a partir da última etapa da análise. Aplicando agora o axioma que diz que coisas que são iguais a mesma coisa são iguais entre si, obtemos a seguinte igualdade,  $A + D = C + D$ . Aplicando novamente o axioma que diz que se subtrairmos iguais de iguais o que permanecem são ainda iguais, obtemos o resultado final,  $A = C$ . Isso conclui a etapa sintética. Como se vê, nesse exemplo, a etapa analítica pode ser considerada como sendo a descoberta dos possíveis caminhos que o matemático deve seguir para demonstrar o resultado. A etapa sintética é a demonstração como hoje a concebemos.



**Figura 1**

Podemos agora passar à abordagem de Clavius. No prefácio de sua edição de Euclides, Clavius cumprimenta Commandino pela sua restauração da brilhante Geometria grega, indicando claramente que lera a versão de Commandino. A forma que Clavius apresenta a proposição 1 do livro XIII exibe uma característica diferente. A proposição 1 do livro XIII nos diz que se uma linha reta for seccionada em média e extrema razão<sup>24</sup>, o quadrado do segmento maior, acrescido da metade do todo, é cinco vezes o quadrado da metade.



**Figura 2**

Clavius apresenta uma demonstração sintética que pode ser resumida do modo a seguir, apresentada em uma terminologia algébrica moderna. Do comentário da proposição

<sup>24</sup> A secção áurea. Diz-se que um ponto divide um segmento em média e extrema razão se a razão entre o menor (a) e o maior dos segmentos (b) é igual à razão entre o maior e o segmento todo, isto é, em notação moderna,  $a/b = b/(a+b)$ , com  $a < b$ . Fazendo  $b/a = x$ , obtemos a equação quadrática  $x^2 - x - 1 = 0$ . A razão  $a/b$  é chamada de razão áurea ou número de ouro.

4, do livro II, o quadrado da linha AB é quatro vezes o quadrado da linha AD, pois a linha AB é tomada o dobro da linha AD. O raciocínio de Clavius é o seguinte:  $AB^2 = AB.AC + AB.BC$ , e,  $AB.AC = 2.AD.AC$ , por outro lado,  $AB.BC = AC^2$ , da definição de razão extrema e média. Portanto,  $AC^2 + 2.AD.AC = 4.AD^2$ . Assim,  $AC^2 + AD^2 + 2AD.AC = 5AD^2$ . O lado esquerdo é igual a  $CD^2$ . Portanto, temos a conclusão  $CD^2 = 5AD^2$ . A terminologia de Clavius é completamente geométrica. Descrição similar é apresentada na proposição 2 do Livro V.

Clavius tinha consciência da interpolação da proposição 1 do livro V em análise e síntese, mas conscientemente ignorou a parte analítica, oferecendo, simplesmente, a demonstração sintética. Existem poucos lugares em que apresenta procedimentos analíticos claramente, dando pouca atenção à análise geométrica, simplesmente apresentando demonstrações sintéticas, tanto em Euclides como em Pappus. O Livro VII da coleção de Pappus, a mais importante literatura sobre o método de análise, não impressionou o matemático jesuíta que, provavelmente, seguiu uma tradição do século XVI, uma tendência em adotar a análise lógica revelada por Aristóteles nos *Analíticos Segundos*. Muitos escolásticos e humanistas seguiram essa linha, ao tentarem restaurar o clássico método de análise.

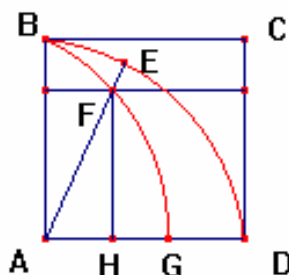
Em sua *Geometria Practica*, o final do livro VIII é dedicado às técnicas de resolver problemas matemáticos. No começo do livro afirma que se inspira em vários exemplos da coleção de Pappus. No problema de dividir um ângulo em três partes iguais, apresenta mais uma vez o método sintético, reduzindo o problema da trissecção do ângulo ao da descrição da curva chamada a concóide de Nicomedes (c. 250)<sup>25</sup>. Na sua *Geometria Practica*, Clavius tomou muitos exemplos e problemas de Pappus, mas sem tocar no método analítico.

No livro IV, da segunda edição de *Os Elementos*, Clavius trata da quadratriz que é obtida por dois movimentos, veja figura 3. Consideremos um quadrado ABCD e um arco circular BED com centro em A. Considere, em seguida, os movimentos contínuos do ponto

---

<sup>25</sup> Dada uma reta qualquer e O um ponto não pertencente a essa reta. Seja Q um ponto qualquer sobre a reta e P um ponto sobre a reta OQ de modo que  $QP = k$ . O lugar geométrico dos pontos determinado quando Q se move ao longo da reta é um ramo da concóide para o polo O e a constante k. O outro ramo pode ser determinado pelo lugar dos pontos R a uma distância k na direção oposta à de Q. Segundo Pappus, Nicomedes descreveu um instrumento para traçar concóides que podia facilmente trissecionar qualquer ângulo.

B, ao longo do arco BED e da linha BC, para baixo e paralela a AD. As duas linhas AB e BC se interseccionam, sempre, em um ponto que chamaremos de F. As duas linhas AB e BC, no final, coincidirão com a linha AD. A curva descrita por F é a quadratriz.



**Figura 3**

Seus extensos comentários sobre essa curva foram originados de sua leitura do Livro IV da Coleção de Papus. De acordo com Papus, Sporus de Nicaea (segunda metade do século III) estava insatisfeito com essa curva, a quadratriz, pois para realizar a sua construção, era necessário saber, inicialmente, a razão entre as velocidades dos dois movimentos, um ao longo de um segmento de reta e, o outro, ao longo da circunferência, que é igual a razão da linha AB para a circunferência BED e, portanto, era necessário conhecer o valor de  $\pi$ , antes de tudo. Sporus e Papus baniram a quadratriz do reino da Geometria ordinária que se restringia às construções com régua e compasso. Essa questão será retomada por Descartes.

Clavius acreditava na legitimação das construções ponto a ponto e afirmou que a quadratriz poderia ser geométrica, de uma certa forma apenas, como as descrições das seções cônicas, que são também construídas por pontos e chamadas geométricas, como é explicado por Apolônio de Perga.

A forma de construir curvas parece ter deixado uma certa marca em Descartes o que indica que lera os comentários de Clavius sobre o livro VI de *Os Elementos* de Euclides, cuidadosamente, e que tinha uma atitude crítica pela maneira de Clavius construir a quadratriz. Segundo Descartes, alguns pontos não podem ser traçados pelo método de Clavius, e ela não poderia ser aceita como geométrica, contrário à opinião de Clavius. Em *A Geometria* de 1637, Descartes assumiu que construções ponto a ponto são válidas para curvas algébricas e são proibidas para curvas mecânicas que não são representáveis em equações algébricas, conforme discutiremos pormenorizadamente no Capítulo III.

Clavius insistiu que não existia separação entre as seções cônicas de Apolônio e a quadratriz porque todas são geométricas no sentido de poderem ser construídas marcando pontos.

Podemos concluir que o estilo de Clavius era dedutivo em geral e que a *Geometria Practica* não menciona métodos analíticos claramente. Descartes irá refutar esse estilo bem como a Filosofia Escolástica, mas isto será tratado posteriormente quando analisaremos *As Regras* e *A Geometria*.

### 1.3.3 A influência de *A Aritmética* de Diofanto nos trabalhos Clavius

A Álgebra dos modernos foi uma componente essencial que Descartes empregou na formação de seu método. Nesse sentido, a *Álgebra* de Clavius foi importante e Descartes conheceu, por meio dela, várias ferramentas para resolver problemas matemáticos. O objetivo da Álgebra, para Clavius, era resolver equações, considerando a arte de resolver equações nem restrita a números (Aritmética), nem a magnitudes (Geometria), mas, de uma certa forma, pertencendo aos vários ramos da Matemática, uma disciplina unindo Aritmética e Geometria, diferentemente do posicionamento dos gregos que consideravam Geometria e Álgebra como independentes.

No capítulo I da *Álgebra* de Clavius que fala sobre a invenção e o nome da Álgebra, ele chama essa arte por vários nomes tais como *Ars maior*, *Regula census et rei*, *Regula radicis et quadrati*, *Regula cosa ou della cosae*, e *Álgebra et almuchabala*. Clavius traduziu *Álgebra e almuchabala* (nome árabe) para o latim como *restauratio e oppositio*, respectivamente. *Regula census et rei* ou *regula cosae* são também de origem árabe. Sua Álgebra pertencia à tradição da Álgebra *cossist* que floresceu especialmente na Itália e Alemanha, durante a Idade Média e Renascença. As fontes de seu livro texto são *A Aritmética* de Diofanto de Alexandria, *Libri de numeris* de Jordanus de Nemore (c.1220), Girolando Cardano (1501-1576), Niccolò Tartaglia (1499[1500]-1557), Rafael Bombelli (1526-1572), *Libro de Álgebra en arithmetica y geometria*, publicada na Antwerp, em 1567, por Pedro Nuñez Salasience.

No capítulo XII, “*On the extractor of roots which the rule of Álgebra is concerned with*” (Sobre a extração de raízes com que a regra da Álgebra está

interessada), ao discutir as equações cúbicas, que na nossa simbologia atual seriam escritas na forma  $x^3 = 4x^2 + 16$  e  $x^3 = 10x + 24$ , Clavius comenta sobre a história da solução das equações cúbicas mencionando os nomes de Cardano, Tartaglia e Bombelli. Clavius também tinha conhecimento sobre o método de Viète, provavelmente desenvolvido na *De numerosa potestatum ad exegesis resolutione*. O tratado de Viète sobre soluções numéricas das equações cúbicas e biquadradas foi publicado em 1600 sob os cuidados de Marino Ghetaldi (1566[68?]-1626), um discípulo de Clavius e de Viète. Clavius mencionou o matemático alexandrino Diofanto, quando citou um discurso de Regiomontanus sobre o astrônomo Judeu al-Farghañi, entregue em 1464 na Universidade de Pádua. Regiomontanus tentou elevar o status da Álgebra para o nível das clássicas disciplinas Matemáticas: Aritmética e Geometria.

Bombelli foi o primeiro a tornar conhecido o trabalho de Diofanto<sup>26</sup> na Europa. O livro de Bombelli introduz uma nova simbologia em contraste com a Álgebra *cossist* e uma contribuição para a solução das equações cúbicas e biquadradas. A Álgebra de Clavius tinha características similares com a Álgebra do livro de Bombelli, ambos consideraram a Álgebra como uma disciplina teórica, e utilizaram muitos problemas de A Aritmética de Diofanto para dar exemplos de seus métodos de resolver problema. O livro de Clavius reflete o esforço em posicionar a arte da Álgebra em iguais condições com a Geometria e a Aritmética.

O simbolismo adotado por Clavius em sua Álgebra é o mesmo de Michael Stifel (c.1487-1567) em *Arithmetica Integra* (1544), a simbologia *cossist*, que determinava símbolos específicos, por exemplo, um símbolo específico era usado para uma constante, um símbolo específico para a quantidade variável, um para o quadrado, um para o cubo, um para o quarta potência, um para a quinta potência, etc..

Usando essa simbologia Clavius resolve o problema 1, do capítulo 29, que é equivalente aos seguintes problemas: I,1 de A Aritmética de Diofanto; I,1 *De Numeris datis* de Jordanus de Nemore e ao Problema III,1 da Álgebra de Bombelli, que pode ser enunciado como segue. Dividir um número em duas partes de modo que a diferença entre

---

<sup>26</sup> Trataremos da Aritmética de Diofanto posteriormente, aqui é suficiente notarmos que essa obra foi muito influente no mundo ocidental, pois trouxe muitas novidades: a simbologia, a aplicação da análise, a desvinculação da geometria, ou seja, os problemas tratados por Diofanto são, na sua maioria, algébricos.

eles seja dada. Clavius resolve o problema propondo os números 100 e 40, respectivamente, como o número dado e o excesso, seguindo seus predecessores Diofanto, Jordanus, Cardano, Stifel, Bombelli. Todo número, exceto as variáveis expressas pelos símbolos *cossist*, são sempre representados por números específicos. Esta é uma das mais significantes diferenças entre os algebristas de Diofanto até Bombelli e os modernos analistas que seguiram Viète. Em sua *Zetetica*, Viète resolveu o mesmo problema de Diofanto, expressando-o, totalmente, em termos geométricos. O método de Clavius é quase geral em comparação ao de Viète, embora não possa ser comparado ao método analítico de Viète.

O capítulo 29, do livro de Clavius, estuda as equações com dois termos. O capítulo 30, estuda as equações com três termos. No capítulo 31, *Various Problems of Numbers Connected to Material Things Shown with Several Examples Pertaining to the Second Root* (Vários problemas de números conectados a coisas materiais mostradas com vários exemplos que pertencem à equação do segundo grau), introduz um novo simbolismo, mas ainda seguindo Stifel. Clavius entendia que para trabalhar com Álgebra era necessário conhecer as clássicas disciplinas Matemáticas: Aritmética e Geometria. A *Álgebra* de Clavius posicionou-se no ponto de intersecção da tradição da Álgebra *cossist* e de *A Aritmética* de Diofanto.

Descartes, por muito tempo, seguiu a simbologia *cossist*, mostrando-se claramente influenciado pela *Álgebra* de Clavius. Essa influência ocorre principalmente na fase inicial de seus estudos, onde constatamos a presença dessa simbologia. Somente numa fase posterior é que Descartes substituirá essa simbologia por uma moderna, uma das suas contribuições à Matemática.

Como vimos, nas páginas precedentes, o grande mentor do currículo matemático nos colégios jesuítas esteve profundamente envolvido com a Matemática de seu tempo. Descartes questionará a Matemática imposta nos colégios jesuítas e fará uma reforma profunda no cenário científico da Europa. A base dessa mudança será a adaptação do método de análise e síntese dos antigos. Contrariamente a Clavius que em seus trabalhos valorizou excessivamente o modo sintético, Descartes valorizará também o processo heurístico. Clavius se mostrou muito influenciado por Euclides. Descartes, ao contrário, se mostrará muito influenciado por Papus e Diofanto.

Comprovaremos a influência de Clavius dentro das escolas jesuítas também quando estudarmos a sua influência sobre os professores de Matemática da ordem jesuíta. Especificamente, o caso que nos interessa é o do professor de Matemática do colégio jesuíta La Flèche no período em que Descartes ali estudou. Essa é a nossa próxima abordagem.

#### 1.4 Algumas concepções Matemáticas do professor de Descartes em La Flèche

O primeiro professor de Matemática em La Flèche foi o Padre Jacques Guernisac (1568-1634), no período de 1606 a 1610. De 1610 até 1611 foi Nicholas Laplace (1579-1617), aluno do segundo ano de Teologia. De 1611 a 1612 não encontramos nenhum relato. De 1612 até 1616, Jean François (1582-1668) ensinou Matemática enquanto estudante de Teologia. De 1616 a 1617, Jean François ensinou Teologia e de 1617 a 1620 ensinou lógica, Física e Metafísica, incluindo Aritmética, Geometria, Música e Astronomia, portanto, foi professor de Matemática de Descartes, em La Flèche.

François escreveu diversos livros que eram, com poucas exceções, relacionados à Matemática, especialmente às Ciências matemáticas práticas como Cosmologia, Geografia, Hidrografia, Cronometria e Astrologia. A sua obra *L'arithmetique et la geometrie pratique* (A Aritmética e a Geometria Prática) de 1563, fortalece a impressão de que François era particularmente interessado na parte prática da Matemática. A obra de François era constituída de duas monografias: *L'arithmétique ou L'art de compter toute sorte de nombre avec la plume et les jettons* e *La géométrie pratique ou L'art de mesures tant de loing que près toute sorte de lignes, de surface e de corps*.

O primeiro tratado, publicado em Roma, 1593, pertence à categoria da Aritmética prática, que relembra *Epitome arithmeticae practical* de Clavius, é dividido em quatro capítulos. O capítulo I aborda os princípios da Aritmética, explicando os números inteiros. O capítulo II, é sobre operações: adição, subtração, multiplicação e divisão, principalmente para números inteiros. O capítulo 3, ensina como usar números racionais. O capítulo 4, aborda a teoria de proporção, e as várias regras práticas da Aritmética.

Todas essas regras Aritméticas estão contidas em *Epitome arithmeticae practical* de Clavius, embora fossem comuns na tradição da Aritmética prática dos séculos XVI e

XVII. Devido a grande influência de Clavius dentro da Ordem Jesuíta e às características de sua obra, tudo indica que François seguiu a mesma linha adotada por Clavius na obra *Epitome* e, certamente, foi influenciado por ela.

O segundo tratado sobre Geometria prática é um manual essencialmente sobre medidas de figuras geométricas sólidas e planas. O conteúdo é elementar no sentido de que o autor transmite o conhecimento da tradicional Geometria prática da Idade Média e do Renascimento, tal como Clavius. O que indica que François inspirou-se na parte inicial da *Geometria Practica* de Clavius.

Segundo Sasaki (2003, p. 88), François publicou, em 1655, uma monografia filosófica sob o título *Traité de la quantité considérée absolument et en elle-mesme[...]relativement et en ses rapport matériellement et en ses plus nobles sujets, pour servir d'introduction aux sciences et arts mathématiques et aux disputes philosophiques de la quantité*, inspirado em Aristóteles. François tinha interesse em assuntos científicos de sua época e era fiel à doutrina dominante dentro da ordem jesuíta.

Depois de terminar a sua formação acadêmica em La Flèche, em 1614, Descartes muda-se para uma casa próxima a Paris. De 1615 a 1616 cursa Direito e, provavelmente, Medicina, na Universidade de Poitiers, obtendo o seu bacharelado e a sua licenciatura em Direito Civil e Canônico. De 1616 a 1618 permaneceu em Paris e no verão de 1618 parte para Holanda, alista-se no exército de Maurício de Nassau e em novembro do mesmo ano conhece Isaac Beeckman<sup>27</sup>, iniciando, juntos, uma série de estudos. Nosso próximo objetivo é estudar a influência de Beeckman sobre Descartes.

## 1.5 Uma nova Ciência: os fundamentos matemáticos de Descartes

Em 1619 Descartes admite ter sido estimulado por Beeckman a expressar seu próprio programa para reorganizar a Matemática. Beeckman estudou em Leiden de 1607

---

<sup>27</sup> Isaac Beeckman(1588-1637) era natural de Middelburg. Estudou Teologia em Leiden entre os anos de 1607 e 1610. Em 1618 já era formado em medicina pela Universidade de Caen. Nunca exerceu essa profissão. Dedicou-se ao Magistério na Escola de Latim de Utrecht, a partir de 1618, depois na Escola de Latim de Rotterdam e, por fim, em Dordrecht. Em 1613 formulou uma lei da inércia que superou, em muitos aspectos, a lei da inércia corrente. Em 1628 montou a primeira estação meteorológica da Europa. Descartes aprendeu com Beeckman os fundamentos da teoria microcorpuscular da mecânica.

até 1610 e foi orientado por Rudolph Snel van Royen (1546-1613) e seu filho Willebrord (1580-1626), de 1607 a 1610. Rudolph Snel recomendou a Beeckman: Ramus, Euclides e Herão (c.62) em Geometria; Ramus, Boecius (c.480-524/525) e Euclides em Aritmética; Ramus, Clavius e outros autores em Aritmética Prática; Ptolomeu (c.100-c.170) e Copérnico (1473-1543), em Astronomia; Herão, Commandino e Papus em Mecânica; e vários outros em Astrologia, Óptica, Música e outras disciplinas da Matemática Aplicada. Beeckman foi um homem que manteve contato com os melhores autores gregos e era principalmente interessado com Filosofia Natural. Convém ressaltar que Beeckman estudou em um ambiente onde o calvinismo holandês estava profundamente enraizado e, nesse ambiente, as idéias de Petrus Ramus já eram bastante influentes.

As realizações de Descartes e Beeckman são melhores entendidas através das notas do diário de Beeckman que cobriram os anos de 1604 a 1634. Esse diário foi descoberto por Cornelis de Waard em 1905 na Provincial Library of Zeeland e publicado em quatro volumes, entre 1939 e 1953. Nele, Beeckman faz referência aos trabalhos de Euclides, Ramus e aos trabalhos de Clavius: *Geometria Practica* e a *Álgebra*. Clavius foi um matemático influente nos países baixos também.

O interesse de Beeckman, antes de tudo, era em Matemática Prática e Filosofia Natural. Era partidário da hipótese de Copérnico<sup>28</sup> e foi um dos primeiros a formular o princípio da inércia. Descartes e Beeckman foram colaboradores mútuos e mantiveram uma estreita relação de amizade, o que pode ser confirmado pelas correspondências que mantiveram. Embora Descartes tivesse talento para Matemática, foi Beeckman quem o inspirou e o motivou, ainda na sua juventude, para novas descobertas Matemáticas e a pensar na reforma da Ciência e da Matemática tradicional daquele período. Isso foi mesmo confessado pelo próprio Descartes. No que segue, abordaremos um pouco dos temas trabalhados pelos dois, a fim de melhor configurar o ambiente em que Descartes esteve envolvido.

---

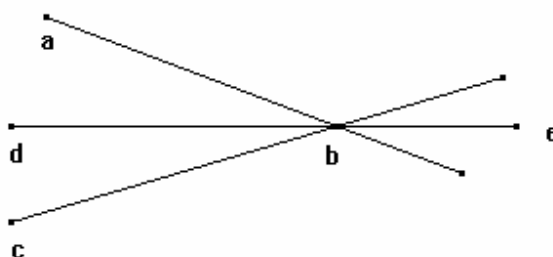
<sup>28</sup> No mundo antigo e medieval considerava-se que o mundo era limitado. O mundo era constituído por sete esferas concêntricas. No centro das esferas estava a Terra, os planetas, o sol e a lua que eram considerados planetas. Tudo girava em torno da terra. O sistema era chamado geocêntrico. Em 1543, Copérnico publicou a obra *Das revoluções dos orbes celestes* demonstrando que o sistema geocêntrico não dava conta de explicar o movimento dos corpos celestes e de outros fenômenos. Copérnico propõe então que o sol é quem deveria estar no centro, imóvel que, por sua vez, foi contestado posteriormente.

Em 11 de novembro de 1618 Descartes provou, segundo o diário de Beeckman, que um ângulo é, de fato, nada. Beeckman diz que o argumento de Descartes é por redução ao absurdo. Em resumo, Descartes toma o ângulo  $abc$ , veja figura 4 abaixo, e as linhas  $ab$  e  $bc$  com o ponto  $b$  em comum. O ângulo ficará dividido em duas partes pela linha  $de$ , que também dividirá o ponto  $b$ , mas um ponto não pode ser dividido segundo a definição de Euclides, portanto, o ângulo é, de fato, nada.

*Angulū nullū esse male probavit Des Cartes*

Ontem, que foi 10 de novembro de 1618, em Breda, um francês do Pointou tentou provar o seguinte: “Na verdade, não existem ângulos”. Este foi seu raciocínio: “Um ângulo é o ponto de encontro de duas linhas num ponto, de modo que a linha  $ab$  e a linha  $cb$  se encontram no ponto  $b$ . Mas se cortarmos o ângulo  $abc$  com a linha  $de$ , dividimos o ponto  $b$  em duas partes, de modo que metade dele é acrescentado à linha  $ab$  e a outra metade à linha  $bc$ . Mas isso contradiz a definição de ponto, pois um ponto não tem tamanho. Ângulo, portanto, é algo que não existe. (ACZEL, 2007, p.41-2)

Descartes apresenta um argumento que conduz a um sofisma, Beeckman o rebateu argumentando que um ponto não é uma magnitude substancial e que o erro de Descartes consistia em dizer que o ponto poderia ser dividido em duas partes. Questões envolvendo Filosofia e Matemática eram estudadas desde a Antigüidade e, em 1618, Descartes tinha interesse nesse tipo de problema, tendo, portanto, consciência do tipo de argumentação apresentada.



**Figura 4**

Entre 23 de novembro e 26 de dezembro de 1618, Beeckman, em seu Diário, resolve um problema proposto por Descartes: encontrar um quadrado igual a raiz de outro quadrado. A solução apresentada equivale a extração da raiz quadrada usando a proporção contínua.

A maioria dos tópicos discutidos no diário era sobre a teoria matemática musical e a formulação matemática da lei de queda livre. No começo de 1619, Descartes escreve o *Compendium musicae*<sup>29</sup> e o apresenta a Beeckman.

Em uma carta datada de 26 de março de 1619, da cidade de Breda para Beeckman, Descartes revelou alguns dos conteúdos concretos de seu projeto reformador pela primeira vez. Ele confessa que, em pouco tempo trabalhando com Beeckman, tinha descoberto quatro novas e distintas demonstrações com a ajuda do compasso. A primeira demonstração é o problema de dividir um ângulo em qualquer número de partes iguais e as outras são relativas às equações cúbicas e quadráticas. Ele diz ter encontrado treze diferentes espécies de equações cúbicas e três de equações comuns, isto é, quadráticas. Graukoger descreve a carta de Descartes a Beeckman:

Passei seis dias aqui e cultivei as Musas com mais assiduidade do que nunca. Neste breve período, de fato, descobri quatro demonstrações extraordinárias e completamente novas por meio de meus compassos. A primeira concerne ao famoso problema de dividir um ângulo em tantas partes iguais quantas se queira[ o tradicional problema da “trisseção” do ângulo]. As outras três relacionam-se com três classes de equações de terceiro grau: a primeira classe com um número inteiro, raízes e cubos [  $x^3 = \pm a \pm bx$  ]; a segunda, com um número inteiro, quadrados e cubos [  $x^3 = \pm a \pm bx^2$  ]; e a terceira, com um inteiro, raízes, quadrados e cubos [  $x^3 = \pm a \pm bx \pm cx^2$  ]. Descobri três demonstrações para essas classes, cada uma das quais deve abranger os termos variáveis, por causa das mudanças nos sinais + e -. Ainda não

---

<sup>29</sup> O *Compendium Musicae* foi oferecido a Beeckman como um presente de ano novo, no primeiro dia de 1619. Consiste num pequeno tratado de cerca de trinta páginas. É possível que tivesse sido iniciado antes de Beeckman e Descartes se conhecerem, porém não antes do verão de 1618, e é certo que foi concluído em dezembro de 1618. Apesar de estar familiarizado com pouco mais do que o canto nas igrejas congregacionalistas, Beeckman tinha um vivo interesse pelos aspectos mais científicos da teoria da harmonia e da acústica. Na década de 1610, havia elaborado uma teoria corpuscular do som e uma teoria sobre a transmissão dele pela vibração; fora o primeiro a fornecer uma prova geométrica da proporcionalidade inversa entre comprimento das cordas e a frequência (1614/1615); e havia oferecido uma explicação engenhosa e complexa para a consonância, em “termos” de sua teoria corpuscular do som, afirmando que os “glóbulos” sonoros só eram emitidos pelas cordas vibratórias em caráter intermitente, e que os períodos de som e silêncio só coincidiam quando se tocavam notas de uma mesma frequência(tom) simultaneamente, tornando-se esses dois períodos menos regulares em relação um ao outro conforme os intervalos entre as duas notas se deslocavam ao longo do espectro, indo da consonância à dissonância. Descartes, por outro lado, era uma espécie de novato nessa área. Tal como Beeckman, é provável que suas aptidões musicais práticas não fossem muito grandes. Essas aptidões costumavam ser adquiridas nos estudos de canto coral, mas o La Flèche não dispunha de um coro, pois os jesuítas o haviam dispensado em suas escolas, ainda que a missa solene dos domingos e dos dias santos fosse cantada. Posteriormente Descartes afirmou não saber distinguir uma oitava de uma quinta, o que constitui uma deficiência musical de certo porte. No que diz respeito a teoria musical, ele certamente a havia estudado um pouco na escola, como parte dos estudos matemáticos do segundo ano do currículo filosófico, e estava familiarizado com o livro de Zarlino. (GAUGROKER, 2002, p. 106)

fornecei uma explicação para tudo, mas creio que será fácil aplicar, aos demais casos, o que descobri num deles. Com esses recursos, será possível resolver um número quatro vezes maior de problemas, e muito mais difíceis, do que se consegue com a Álgebra comum. Reconheço treze tipos diferentes de equações cúbicas, ao passo que existem apenas três das equações comuns [isto é, de segundo grau], a saber, entre  $1z$  e  $Ok + ON$  [ $x^2 = ax + b$ ], ou  $Ok - ON$  [ $x^2 = ax - b$ ], ou, por fim,  $ON - Ok$  [ $x^2 = b - ax$ ]. Estou agora à procura de alguma coisa diferente, a fim de extrair as raízes da soma de quantidades incomensuráveis entre si. Se vier a encontrá-la, como é minha esperança, porei a Ciência toda em ordem, desde que consiga superar minha preguiça natural e que o destino me conceda o tempo livre. Aliás, para que não fiques em dúvida quanto ao objetivo de meu projeto, o que eu gostaria de apresentar ao público não é a *Ars brevis* de Lull, mas uma Ciência de bases inteiramente novas, que nos permita responder a qualquer pergunta que se possa formular sobre qualquer espécie de quantidade, seja ela contínua ou descontínua, cada qual de acordo com sua natureza. Na Aritmética, certas questões podem ser resolvidas por meio de números racionais, outras usando irracionais; outras, enfim, podem ser imaginadas, mas não solucionadas. Desse modo, espero demonstrar que, no caso das quantidades contínuas, alguns problemas podem ser resolvidos apenas com retas e círculos; outros só podem ser resolvidos com curvas que não sejam círculos, mas que possam ser geradas por um único movimento [contínuo] e, portanto, desenhadas com o uso de um novo compasso, que não creio ser menos exato do que o compasso comum usado para desenhar círculos, e que é tão geométrico quanto ele; e por último, outros problemas só podem ser resolvidos com curvas geradas por movimentos que não estejam subordinadas uns aos outros, curvas que com certeza são apenas imaginárias, como a quadratriz, que é bastante conhecida. Não creio que se possa imaginar nada que não seja resolúvel em moldes semelhantes: na verdade, espero mostrar que determinados tipos de questão podem ser resolvidos de um modo e não de outro, para que quase nada mais reste a descobrir em Geometria. A tarefa é infundável e não pode ser realizada por uma única pessoa. É tão incrível quanto ambiciosa. Mas vi uma certa luz no caos tenebroso dessa Ciência, graças à qual é possível desfazer o mais denso nevoeiro. (GAUKROGER, 2002, p.129).

Na primavera de 1619, Descartes tentou realizar a unificação da Aritmética com a Geometria usando os compassos, avançando além da *Álgebra* de Clavius. O compasso desempenhou uma importante função no desenvolvimento científico do século XVI e XVII, isso é muito claro em Descartes e aprofundaremos no tema quando analisarmos as *Cogitationes Privatae*, mas seu uso já era comum desde os gregos. Na época de Descartes, por exemplo, Galileu procurou uma aproximação via compassos mecânicos para problemas matemáticos práticos. Galileu e Descartes acreditavam que os compassos poderiam fornecer

as bases para o desenvolvimento e unificação da Aritmética e da Geometria. Uma importante diferença entre os dois é que Descartes tentou prover seu compasso com fundamentos teóricos, por meio de considerações algébricas.

Nessa citação, Descartes diz que resolveu o clássico problema grego da trissecção de um ângulo usando compassos. Discutiremos a questão da trissecção ou a divisão de um ângulo em tantas partes quanto se queira, com mais profundidade, mais à frente, nas *Cogitationes Privatae*, onde Descartes mostra efetivamente como fez isso.

Sobre a solução das equações cúbicas resolveu, usando compassos, os seguintes tipos:

$$(1) \pm a \pm bx = x^3, (2) \pm a \pm bx^2 = x^3, (3) \pm a \pm bx \pm cx^2 = x^3,$$

onde  $a, b, c$  são constantes positivas e os três casos  $-a -bx = x^3$ ,  $-a-bx-cx^2 = x^3$  foram excluídos, pois toda raiz é, para Descartes, considerada positiva. Classificou as equações quadráticas em três espécies:  $(1)x^2 = ax + b$ ;  $(2)x^2 = ax - b$ ;  $(3)x^2 = b - ax$ , excluindo o caso  $x^2 = -ax - b$  como impossível. Descartes classificou treze diferentes tipos de equações cúbicas e três tipos de equações quadráticas.

Ainda na mesma carta quando diz *Estou agora à procura de alguma coisa diferente, a fim de extrair as raízes da soma de quantidades incomensuráveis entre si*, refere-se, segundo interpretação de Sasaki (2003, p. 101), a extração de raízes compostas de várias denominações  $a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \dots$  [sic] que pode ter sido inspirada pela *Álgebra* de Clavius, capítulo 28: *On the Extraction of Roots from Binomials and Apotemes, Wherewith Incidentally on the Other Irrational Lines on Which Euclides Discusses in Book 10* (Sobre a Extração de Raízes de Binômios e Apótemas, por meio de Outras Linhas Irracionais Que Euclides Discute no Livro 10).

Além dos compassos, outra motivação para a reforma da Matemática parece ter vindo da história geral das idéias. Na carta de 26 de março de 1619 Descartes refere-se a *Ars brevis* de Ramon Lull<sup>30</sup> afirmando que pretendia criar uma nova Ciência ao invés de algo similar à arte de Lull, não expressando opiniões adicionais sobre o lullismo.

---

<sup>30</sup> Ramon Lull (c. 1235-1315) nasceu em Palma de Maiorca. Foi um importante escritor, filósofo, poeta e teólogo da língua catalã. Dominava a língua árabe e o latim e publicou obras nestas línguas. Escreveu aproximadamente 260 livros, entre eles, *Ars brevis* (Arte breve)

Em uma outra carta de 29 de abril de 1619 para Beeckman, Descartes falou mais sobre a arte de Lull. Na ocasião, perguntou se Beeckman tinha, em Madelburg, uma cópia do comentário de Agrippa sobre *Ars brevis* de Lull. Beeckman responde em uma carta, datada de 6 de maio de 1619, dizendo que na obra citada não existia tais chaves que Descartes e o velho homem desejavam saber (referindo-se a alguém com quem Descartes debatera a arte de Lull, citado em uma carta datada de 29 de abril de 1619, de Descartes para Beeckman) e ele fornece a Descartes os pontos essenciais da arte de Lull:

[...] e este, que havia lido algumas obras de Lull, explicou-lhe que o maiorquino inventara uma roda em que nove letras B, C, D, E, F, G, H, J e K eram arrançadas. Essas nove letras representavam atributos da criação (aparentados aos dez atributos de Deus, o *Sefirof* na cabala judaica). Produzindo permutações dessas letras mediante o uso de círculos que giravam dentro de outros círculos num dispositivo geométrico, era possível deduzir novos conceitos. (ACZEL, 2007, p. 44)

Combinando a memória com os símbolos das cartas e usando a imaginação, uma pessoa pode ser capaz de argumentar por muitas horas.

Em maio de 1619, Beeckman lembrou de um memorando no seu diário com o título: *Lull's art compared with Logic* (A arte de Lull comparada à lógica). Por lógica Beeckman entendia a de Petrus Ramus. De acordo com ele, Ciências particulares ficam na posição da arte de Lull, mas a arte de Lull não pode, evidentemente, ficar no lugar da lógica. Beeckman não era simpático à arte de Lull como era à lógica de Ramus. Descartes também era antipático a arte de Lull, no Discurso do Método fala sobre a técnica para falar sem julgamento sobre assuntos do qual uma pessoa não conhece<sup>31</sup>. Em 1619, Descartes rejeitou, sem hesitar, o naturalismo renascentista do qual um dos representantes foi Henry Cornelius Agrippa (1486-1535), um comentador da arte de Lull. Essa antipatia foi incentivada dentro da ordem jesuíta e a investigação sobre a arte de

---

<sup>31</sup> No *Discurso do método* Descartes refere-se a Arte de Lull. Mais jovem, eu estudava um pouco, entre os ramos da Filosofia, a Lógica, e, entre as Matemáticas, a Análise dos geômetras e a Álgebra, três artes ou ciências que pareciam dever contribuir em algo para o meu projeto. Mas, examinando-as, notei que, quanto a Lógica, seus silogismos e a maior parte de seus demais preceitos servem para explicar a outrem as coisas que já se sabem, ou mesmo, como a arte de Lull, para falar, sem julgamento, daquelas que se ignoram, do que para aprendê-las. E, embora a Lógica contenha, com efeito, uma porção de preceitos verdadeiros e muitos bons, há todavia outros tantos misturados de permeio que são nocivos ou supérfluos, sendo quase tão difícil separá-los quanto tirar uma Diana ou uma Minerva de um bloco de mármore que nem sequer está esboçada (DESCARTES, 1989, p. 43).

Lull é uma tentativa em rever o escolasticismo dos jesuítas para determinar a sua própria forma de pensar. Dois fatos se destacam. Primeiro, por seu contato com a arte de Lull notou a importância do simbolismo para reformar a Matemática, especialmente a Álgebra. A arte de Lull e a lógica de Petrus Ramus pretendiam reorganizar as Ciências por uma ênfase mnemônica, Descartes admitiu a importância do simbolismo na Matemática nas *Regulae ad directionem ingenii*. Segundo, a arte de Lull foi importante para Descartes como um símbolo pansófico<sup>32</sup> e à unificação da Ciência Matemática. No século XVI, o lullismo era considerado o ideal simbólico para a unificação das Ciências e, como aparece na Renascença, tem duas características essenciais. A primeira é que pretende ser uma Ciência geral e universal que, lidando com certos princípios absolutos e provas infalíveis, tornam possível estabelecer um critério absoluto de verdade; a segunda é que, concebida como a Ciência da Ciência, oferece uma explicação para a ordem exata e racional de todo conhecimento, cujos vários aspectos são todos atingidos e verificados.

Em seu encontro com Beeckman, Descartes estabelece a importância da Matemática para estudar a Filosofia Natural e a idéia de unificar as disciplinas Matemáticas. Mas ele ainda teria de percorrer um longo caminho até encontrar a nova Ciência.

### 1.5.1 A Matemática nas *Cogitationes Privatae*

Durante o período de 1619 a 1621 Descartes escreveu um manuscrito que tem importância fundamental para entendermos como e o que ele trabalhava naquele período. O manuscrito foi copiado por Leibniz, em 1 de junho de 1676, naquela época interessado pelos trabalhos de Descartes. Após a morte de Leibniz, a cópia foi arquivada na Royal Library of Hanover (*Livraria Real de Hanover*) e publicada pela primeira vez em 1859, segundo o título *Cartesii Cogitationes Privatae*, pelo Francês Foucher de Careil, no primeiro volume de *OEuvres inédites de Descartes*. O trabalho continha muitos erros e, posteriormente, foi melhorado e republicado no décimo volume de *OEuvres de Descartes* de Adam-Tannery.

---

<sup>32</sup> Relativo à pansofia: ciência universal, todo saber humano.

Como vimos, no início de 1619 Descartes estudou os compassos proporcionais e começou a formular uma teoria das grandezas proporcionais, o que acabaria por conduzi-lo a Álgebra. Várias anotações, desse período, foram coligidas no texto das *Cogitationes Privatae*. Na parte inicial desse texto, Descartes deixa em evidência que planejava escrever um livro, *Thesaurus mathematicus*, usando o pseudônimo Polybius Cosmopolitanus, onde pretendia expor a construção de sua nova Ciência. Nas *Cogitationes Privatae* existe apenas uma passagem relacionada a esse livro, cujo objetivo era mostrar o verdadeiro método científico que seria capaz de resolver todas as dificuldades nas Ciências Matemáticas.

#### TESOURO MATEMÁTICO DE POLYBIUS, O COSMOPOLITA

Fornecer ao leitor os verdadeiros meios de resolver todas as dificuldades desta ciência; está demonstrado que, sobre essas dificuldades, o espírito humano nada mais pode descobrir. Isso para calar a tagarelice vã e rejeitar a irresponsabilidade de alguns que promoveram demonstrar novos milagres em todas as ciências[...][...]Oferecido, uma vez mais, aos estudiosos eruditos de todo mundo, especialmente a G. F. R. C. (ACZEL, 2007, p.17)

Descartes pretendia dedicar esse trabalho aos eruditos que anunciaram mostrar as descobertas milagrosas de todas as Ciências, mas que até então nada tinham realizado nesses assuntos, denunciando assim o vazio de afirmações e de suas vaidades. Um outro objetivo era libertar os homens que procuravam um novo método científico e que tinham grandes dificuldades nas suas pesquisas. Finalmente, Descartes dedicou o livro aos homens sábios de todo mundo, especialmente aos irmãos Rosa Cruz na Alemanha.

Em 1619 o movimento Rosa Cruz se tornou bastante conhecido na Alemanha, com a eclosão da guerra dos 30 anos, em 1618. Esse era um movimento bastante místico que, algumas vezes, prometeu apresentar uma nova Ciência ou o saber verdadeiro.

Na carta datada de 26 de março de 1619 a Beeckman, já citada anteriormente, Descartes expõe um pouco do conteúdo da sua nova Ciência. De acordo com ela, tinha encontrado quatro demonstrações com a ajuda do compasso: a divisão de um ângulo em qualquer número de partes iguais, as soluções das equações cúbicas  $\pm a \pm bx = x^3$ ,

$\pm a \pm bx^2 = x^3$ ,  $\pm a \pm bx \pm cx^2 = x^3$  e resolveu tais problemas com a ajuda do *mesolábio*<sup>33</sup>. Nas *Cogitationes Privatae* Descartes mostra, efetivamente, como construiu e usou diversos desses instrumentos, apresentando as principais idéias descritas na carta citada realizando-as com a ajuda dos compassos.

A partir do *mesolábio*<sup>34</sup>, da figura 5, obtemos as seguintes proporções, devido a semelhança de triângulos:

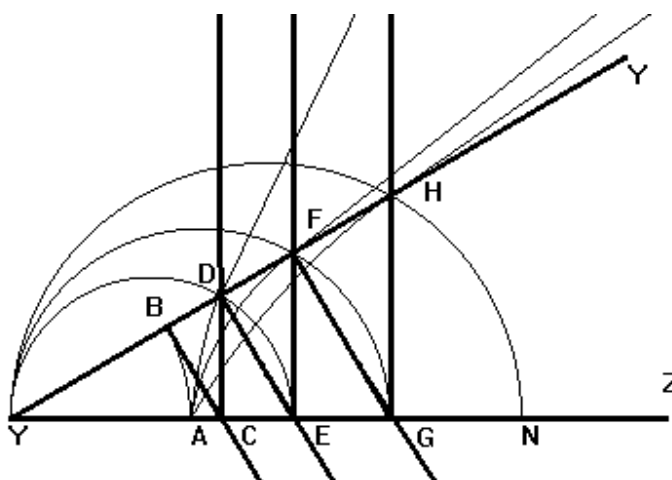


Figura 5

$$\frac{YB}{YC} = \frac{YC}{YD} = \frac{YD}{YE} = \frac{YE}{YF} = \frac{YF}{YG} = \frac{YG}{YH} = \dots$$

Fazendo  $YB = YA = 1$ , e  $YC = x$ , obtemos a proporção:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} = \frac{x^3}{x^4} = \dots$$

Nas *Cogitationes Privatae*, usou a figura 6, para resolver a equação cúbica  $x^3 = x + 2$ , do seguinte modo. Por meio da semelhança de triângulos, obtemos as seguintes proporções:

<sup>33</sup> O mesolábio, um instrumento inventado pelo matemático e astrônomo alexandrino Eratóstenes, foi usado por Descartes encontrar as médias proporcionais entre duas linhas. Eratóstenes usou o mesolábio para resolver o problema da duplicação do cubo.

<sup>34</sup> Esse mesolábio é um instrumento que gera várias curvas que são obtidas pelo movimento do eixo YY. O movimento faz com que as intersecções das retas deslizantes BC, DE, FG, etc com o eixo YY descrevam as curvas AB, AD, AF, etc. Essa estrutura será utilizada por Descartes em *A Geometria*.

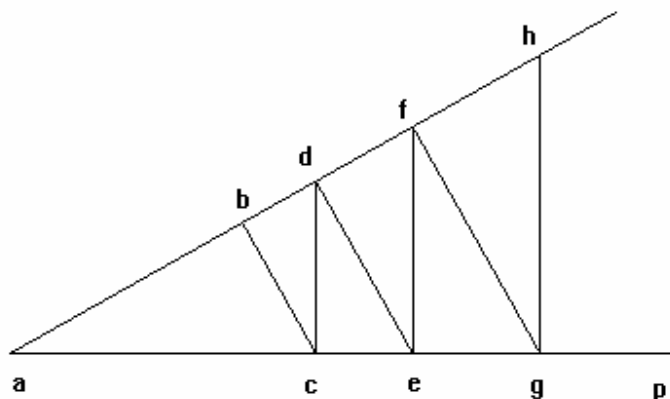


Figura 6

$$\frac{ab}{ac} = \frac{ac}{ad} = \frac{ad}{ae} = \frac{ae}{af} = \frac{af}{ag} = \frac{ag}{ah}, \quad \frac{ad^2}{ac} = \frac{ac^3}{ab^2}$$

$$\frac{ac^3}{ab^2} = ae, \quad \frac{ac^2}{ab} = ad, \quad \frac{ad^2}{ac} = ae, \quad \frac{ae^2}{ad} = af, \quad \frac{af^2}{ae} = ag, \quad \frac{ag^2}{af} = ah$$

Como  $ce = ae - ac = \frac{ac^3}{ab^2} - ac$ , fazendo  $ab$  uma unidade, isto é  $ab=1$ , e  $ac=x$ , segue que  $ce = x^3 - x$ , ou seja,  $x^3 = x + ce$ . Conseqüentemente, abrindo o compasso de forma que o valor de  $ce$  seja exatamente igual a dois, obtemos  $ac=x$  como uma raiz positiva da equação cúbica  $x^3 = x + 2$ .

Na seqüência, Descartes discute a equação cúbica do tipo  $\pm a \pm bx \pm cx^2 = x^3$ , sem o uso do compasso. Usou como exemplo a equação  $x^3 = 6x^2 - 6x + 56$ , com dois coeficientes opostos, como modelo, reescrevendo-a como  $x^3 = 3x^2 - 3x + 28$ . Escreve  $x^3$  ao invés de  $\frac{x^3}{2}$ .

Não sabemos se Descartes cometeu um engano ou não, ou se estava apenas rascunhando algo, pensando vagamente sobre essas questões. Mas continuando a completar o cubo:

$$(x-1)^3 = 28-1, \text{ ou } x^3 = (\sqrt[3]{28-1}+1)^3. \text{ Descartes, depois a reescreve } \frac{1}{2}x^3 = (\sqrt{28-1}+1)^3.$$

Posteriormente, Descartes considera a equação cúbica em que os coeficientes de  $x^2$  e  $x$  não são iguais, como no caso anterior, escreve no lugar de  $\frac{1}{4}x^3$ ,  $x^3$ .

O último exemplo que Descartes discute é a equação cúbica  $x^3 = -3x^2 - 3x + 26$ . Neste caso, adicionou e subtraiu uma unidade, completando o cubo e transformou a equação dada em  $(x+1)^3 = 27$ . Conseqüentemente,  $x = \sqrt[3]{26+1} - 1$  e  $x^3 = (\sqrt[3]{26+1} - 1)^3$ .

As equações cúbicas restantes são do tipo  $\pm a \pm bx^2 = x^3$  e foram trabalhadas com a ajuda do *mesolábio*, apresentando, especificamente, a solução da equação cúbica  $x^3 = x^2 + b$ . A figura 6 é usada para resolver a equação  $x^3 = x^2 + 2$ , a resolução apresentada aqui é uma possível reconstrução, segundo Sasaki (2003, p. 117), sugerida por Eneström (1852-1923) em uma nota de rodapé da edição de Adam-Tannery, As Obras Completas de Descartes. Primeiro fazemos  $ab=1$ ,  $ac = \sqrt{x}$ ,  $fg = b$ ; usando a semelhança de triângulos, temos:

$$ad = \frac{ac^2}{ab} = x, \quad ae = \frac{ad^2}{ac} = \frac{x^2}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}}, \quad af = \frac{ae^2}{ad} = \frac{x^3}{x} = x^2, \quad ag = \frac{af^2}{ae} = \frac{x^4}{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{5}{2}},$$

$ah = \frac{ag^2}{af} = \frac{x^5}{x^2} = x^3$ , e como,  $ah = af + fh$ , segue que,  $x^3 = x^2 + fh$ . Conseqüentemente, substituindo o valor de  $fh$  por  $b$ , abrindo ou fechando o ângulo  $bac$ , temos  $ad$  como uma raiz positiva da equação cúbica  $x^3 = x^2 + b$ .

Descartes conclui sua explicação sobre as equações cúbicas expressando sua convicção de que as equações  $x^3 = x^2 - b$  e  $x^3 = b - x^2$  poderiam ser resolvidas por um processo similar. Posteriormente, considerou o caso geral  $\pm a \pm bx \pm cx^2 = x^3$ , descrevendo o procedimento para eliminar o coeficiente da variável do segundo grau pela substituição de uma raiz, reduzindo a equação cúbica original à forma,  $\pm a \pm bx = x^3$ , que é um dos primeiros casos que resolveu com a ajuda de seu compasso. Assim, acreditou que tinha resolvido todos os tipos de equações cúbicas.

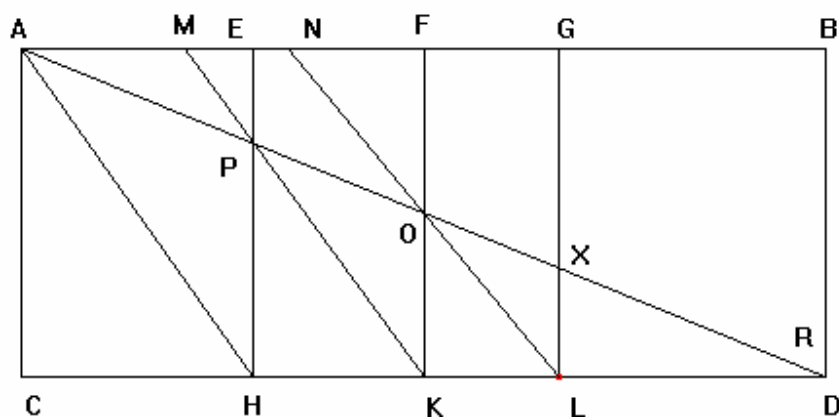
Segundo Sasaki, na Antigüidade o *mesolábio* designava um instrumento matemático atribuído a Eratóstenes (c.276-195 a. C.) para encontrar, mecanicamente, duas médias proporcionais. Pappus, na primeira metade do século IV de nossa era, forneceu uma explicação sobre esse compasso no Livro III, Capítulo VII, de *A Coleção*, mencionando os nomes de ambos, o instrumento e seu inventor. Na tradução latina de Commandino de 1588, o nome do matemático e seu invento aparecem como o *mesolábio* de Eratóstenes: *in Eratosthenis mesolabo*. No comentário sobre o livro II de Arquimedes, *On the Sphere*

*and Cylinder*, Eutocius de Ascalon, que viveu por volta de 480 de nossa era, afirmou que Eratóstenes resolveu a duplicação do cubo mecanicamente, inventando um dispositivo para encontrar duas médias proporcionais, entre dois segmentos de reta dados. Mas não fornece o nome do dispositivo. Em sua versão da obra de Papus, Commandino não esqueceu de fazer menção ao comentário de Eutocius sobre Arquimedes. Além da explicação de Papus e Eutocius, Vitruvius (25 a. C.) em seu *Architectura* usou a palavra latina *mesolabius* para denotar o instrumento de Eratóstenes, sem qualquer explicação Matemática detalhada.

O dispositivo de Eratóstenes era usado, segundo a explicação de Papus, em Commandino, para encontrar duas médias proporcionais, em proporção contínua, quando duas linhas retas são dadas. A construção leva em consideração o dispositivo indicado pela figura 7. Os triângulos AEH, MFK e NGL são retângulos, com ângulos retos em E, F e G. O triângulo AEH é fixado, enquanto os outros dois movem-se ao longo de AB e CD. As duas médias proporcionais entre AC e XL são encontradas deslizando-se MFK e NGL, de tal modo que P e O, nas linhas EH e FK respectivamente, fiquem alinhados com A e X. Usando a semelhança, obtemos as proporções:

$$\frac{AC}{PH} = \frac{AR}{PR} = \frac{AH}{PK} = \frac{HR}{KR} = \frac{PH}{OK} = \frac{PR}{RO} = \frac{PK}{OL} = \frac{KR}{LR} = \frac{OK}{XL}, \text{ e portanto } \frac{AC}{PH} = \frac{PH}{OK} = \frac{OK}{XL}. \text{ Assim}$$

PH e OK são as médias proporcionais entre AC e XL.



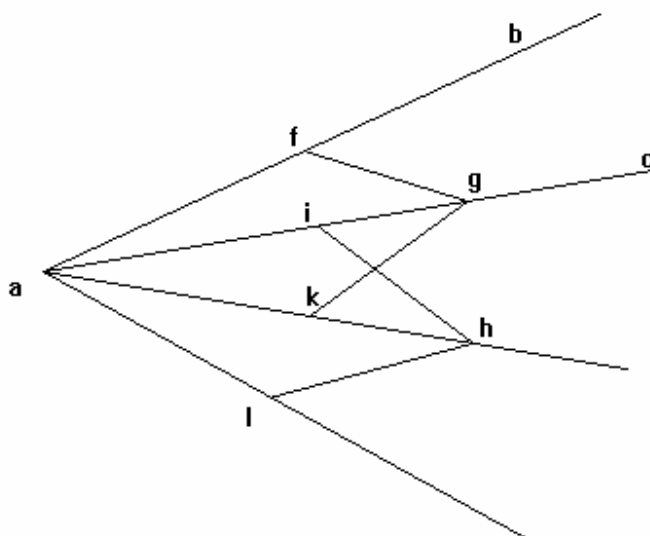
**Figura 7**

Este problema era importante, pois permitia duplicar o cubo. De fato, se  $x$  e  $y$  são duas médias proporcionais entre as duas linhas retas (segmentos de retas) com medidas

dadas  $a$  e  $b$ , isto é, se  $a:x = x:y = y:b$ , então  $x^2 = ay$ ,  $y^2 = bx$ ,  $xy = ab$ , e  $x^3 = a^2b$ . Se  $b = 2a$ , obtemos uma equação representando o problema de duplicar o cubo:  $x^3 = 2a^3$ .

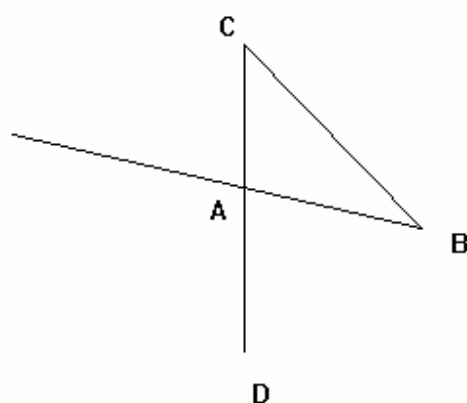
Segundo Sasaki, existe uma certa semelhança entre o mesolábio de Descartes, usado nas *Cogitationes Privatae*, e o de Eratóstenes para encontrar duas médias proporcionais. Clavius também discutiu o problema de encontrar duas médias proporcionais no livro VI, problema 10 (proposição 15) de sua *Geometria Practica*. Talvez tenha sido o Livro III da coleção de Pappus que inspirou Descartes a inventar o seu próprio compasso matemático para encontrar médias proporcionais e para resolver a equação cúbica. Mas existem outras possibilidades; por exemplo, matemáticos do século XVI e XVII conheciam e usavam o mesolábio por meio das várias edições renascentista de Arquimedes, com os comentários de Eutocius. Descartes certamente leu o livro de Arquimedes *On the sphere and cylinder* (Sobre a esfera e o cilindro); não sabemos se antes ou depois de 1619, o que se sabe é que ele era bem informado sobre a construção e o uso do dispositivo mecânico de Eratóstenes.

As *Cogitationes privatae*, posteriormente, mostram que Descartes inventou um dispositivo mecânico para dividir um ângulo em um número qualquer de partes iguais, o compasso trisector, também citado na carta de 26 de março de 1619. Sua construção é tal que, quando o compasso é aberto, os ângulos entre eles se mantêm iguais. Nele devemos considerar  $af = ai = ak = al$  e os aros  $fg = gk = kh = hl$  com mesmo comprimento que  $af$  e que giram em torno dos pontos  $f, g, i, h, k$  e  $l$  e deslizam sobre  $g$  e  $h$ . Para trissecionar um ângulo basta aplicar-lhe o compasso. Veja figura 8.

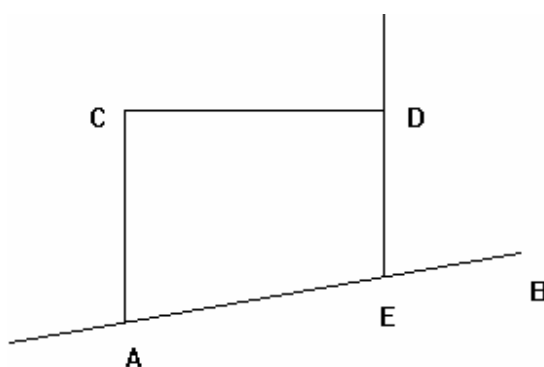


**Figura 8**

O interesse de Descartes em compassos foi além do mesolábio e do compasso da trisseção, sugerindo ainda vários outros compassos. Por exemplo, para descrever uma seção cônica basta aplicar o compasso construído da seguinte maneira, seja DC um segmento na vertical e AB uma superfície plana oblíqua. BC gira em torno do eixo CA imóvel e sobre o plano oblíquo AB, veja figura 9 abaixo. CB, ao girar em torno de CA, pode subir ou descer, ajustando-se à inclinação do plano AB. A seção cônica descrita pelo ponto B é idêntica àquela descrita pela intersecção do cone da geratriz CB e eixo CA, com o plano AB.

**Figura 9**

Um outro compasso sugerido por Descartes é descrito pela figura 10 abaixo que tem um eixo CA imóvel, um braço constante CD, e um suporte DE que pode descer ou subir, de acordo com o plano AB. O ponto E descreve uma curva em AB, que é a intersecção do cilindro gerado por DE com o plano inclinado AB.

**Figura 10**

Descartes sugere também um compasso constituído de um suporte com duas articulações para transferir figuras. Ainda cita outro compasso, o pantógrafo<sup>35</sup>, inventado entre 1603 e 1605 pelo astrônomo jesuíta alemão Christoph Scheiner<sup>36</sup>(1573-1650).

Outros instrumentos indicados por Descartes:

Um outro [instrumento] é também para descrever todas as horas, o qual eu mesmo posso inventar. O terceiro é para medir ângulos sólidos. O quarto é de prata para medir figuras e planos. O outro mais bonito é para transferir figuras. Um outro é fixado sobre uma tábua de um orador para medir momentos[tempo]. Um outro é para desenvolver artilharia de guerra. – Petrus Roth, *Arithmetica philosophica*.- Benjamim Bramer. (SASAKI, 2003, p. 124-tradução nossa)

Petrus Roth que prosperou por volta de 1617, mencionado no fim dessa citação, é autor de *Arithmetica philosophica* (1608) que pertencia à tradição *cossist* da Álgebra alemã. Descartes pode ter se interessado em Petrus Roth por ele discutir a equação cúbica, seguindo o modelo de Cardano, ou talvez porque Roth calculou números poligonais e piramidais seguindo os exemplos do matemático de Ulm, J. Faulhaber (1580-1635). Os números poligonais e piramidais foram tratados no *De Solidorum Elementis* de Descartes, trataremos deste assunto nas próximas seções. Benjamim Bramer (1588-1652), também citado no fim, foi um matemático prático alemão que inventou diversos instrumentos matemáticos, talvez por isso Descartes o mencionou.

Os matemáticos práticos, em sua maioria, tenderam a negar o desenvolvimento teórico da Matemática, mas Descartes seguiu a direção oposta e nunca esqueceu de traduzir o significado de figuras geométricas, expressas pelos compassos, em uma linguagem algébrica que tinha previamente aprendido.

---

<sup>35</sup> Aparelho constituído de paralelogramos articulados com o qual se pode transferir figuras com a proporção desejada.

<sup>36</sup> Cristoph Scheiner nasceu em Wald (Suábia) em 1575 e faleceu em Neiss em 1650. Astrônomo suíço ingressou na ordem jesuíta em 1595, estudou na Alemanha e em Roma. Foi professor de Matemática em Ingolstadt, Friburgo e Roma. Foi reitor do Colégio de Neiss (Silésia) e professor do duque Maxiliano. Publicou várias obras, entre elas: *Pantographice seu ars delineandi* (Roma, 1631).

### 1.5.2 Os números figurados, a extensão do teorema de Pitágoras (580-500 a. C.) e outros resultados

Nas *Cogitationes Privatae*, Descartes escreveu sobre uma vasta gama de assuntos: música, queda livre, hidrostática, teoria dos números e gnômica, além de seu interesse por compassos e estava profundamente envolvido com as questões relacionadas a sua reforma da Ciência. Tanto que, nesta época, ao ser indagado por Isaac de Middelburg se uma corda ACB, fixada em dois pregos A e B, poderia descrever uma parte de uma cônica, simplesmente respondeu que não teria tempo livre para examiná-lo pormenorizadamente.

Entre os problemas que Descartes estava preocupado, nas *Cogitationes Privatae*, aparece nas notas sobre os compassos matemáticos o seguinte:

Se o quadrado de um número triangular é subtraído do quadrado do número triangular subsequente, o que permanece é um cubo. Por exemplo, 10, 15; remova 100 de 225. Permanece 125. Da progressão 1|2|4|8|16|32| |, os números perfeitos 6, 28 e 496 são obtidos. (SASAKI, 2003, p. 128-tradução nossa).

O conceito de números figurados, segundo Heath (p. 76-77), foi provavelmente descoberto por Pitágoras. Os números triangulares podem ser representados pela fórmula

$\left\{ \frac{n(n+1)}{2}, n = 1, 2, 3, \dots \right\}$ . A primeira afirmação pode ser confirmada facilmente, pois:

$$\frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4} - \frac{n^2 (n+1)^2}{4} = (n+3)^3.$$

Segundo Boyer (p. 39), os números perfeitos são também atribuídos aos pitagóricos. Esses números são apresentados na definição 22, livro VII, de Euclides. Um número perfeito é aquele que é igual a soma de seus divisores, excluindo-se dos divisores o próprio número. Há também um teorema geral sobre números perfeitos em Euclides IX, 36. Em notação moderna, pode ser reescrito como segue: se a soma de qualquer número de termos da série  $1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}$  ( $=S_n$ ) é prima, então  $S_n \cdot 2^{n-1}$  é um número perfeito. O caso de Descartes, nas *Cogitationes Privatae*, é mais simples e pode ser obtido quando  $n = 2, 3, 5$ ,

pois, para esses valores, obtemos os seguintes números perfeitos:  $6=1+2+3$ ,  $28=1+2+4+7+14$ ,  $496=1+2+4+8+16+31+62+124+248$ .

No fim das *Cogitationes Privatae*, Descartes começa a descrever seus cálculos sobre o tetraedro retangular que é definido como tendo cada um dos três ângulos do vértice igual a um ângulo reto. Em outras palavras, o tetraedro pode ser obtido cortando um paralelepípedo retangular próximo a um canto com um plano. À afirmação de que no tetraedro retangular, o quadrado da área da base (oposta ao ângulo sólido reto) é igual a soma dos quadrados das áreas das outras três faces, Descartes oferece o seguinte exemplo: se os três lados da base são  $\sqrt{8}, \sqrt{20}, \sqrt{20}$ , os três lados acima da base são 4, 2, 2, a área da base é 6. A área das três faces serão: 2, 4, 4, das quais, os quadrados são 36, 4, 16, 16 e daí segue o resultado. Essa relação vem dos pitagóricos e Descartes tenta estendê-la para objetos equivalentes da quarta dimensão, onde o enunciado seria: o quadrado do sólido oposto ao ângulo sólido reto é igual a soma dos quadrado dos outros quatro sólidos. No espaço tridimensional teríamos  $A^2+B^2+C^2=D^2$ , onde  $A, B, C$  são as áreas das três faces laterais e  $D$  a área da face oposta ao ângulo reto. Em quarta dimensão o resultado seria  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = \varepsilon^2$ , onde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  são os volumes dos quatro sólidos e  $\varepsilon$  é o volume do sólido oposto ao ângulo sólido reto.

Se os lados da base de um tetraedro retangular são dados, os lados sobre a base são facilmente encontrados. Descartes oferece um exemplo idêntico ao segundo do parágrafo precedente. Os lados da base são os números  $\sqrt{13}, \sqrt{20}, 5$ . Descartes coloca um dos lados desconhecidos como  $x$  e os outros dois lados são calculados como  $\sqrt{13-x^2}$  e  $\sqrt{20-x^2}$  aplicando o teorema de Pitágoras. Usando o teorema de Pitágoras novamente no triângulo retângulo, obtemos:  $(13-x^2) + (20-x^2) = 33-2x^2 = 25$ , isto é,  $2x^2 = 8$ . Tomando a raiz positiva, obtemos 2 para o primeiro lado.

Descartes procede com cálculos gerais sobre o tetraedro retangular, a base do qual tendo lados  $\alpha, \beta, \gamma$ . Os três lados sobre a base calculados por Descartes são:

$$\sqrt{\frac{1}{2}\alpha\gamma + \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\beta\gamma}, \quad \sqrt{\frac{1}{2}\alpha\gamma + \frac{1}{2}\beta\gamma - \frac{1}{2}\gamma}, \quad \sqrt{\frac{1}{2}\beta\gamma + \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\alpha\gamma}$$

Chamando os três lados procurados de  $x$ ,  $y$  e  $z$  e aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos as igualdades:  $y^2 + z^2 = \alpha^2$ ,  $z^2 + x^2 = \beta^2$ ,  $x^2 + y^2 = \gamma^2$ . Assim,  $2x^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2$ ,  $2y^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2$ ,  $2z^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2$ , obtemos o resultado de Descartes que escreve  $\alpha q$  em lugar de  $\alpha^2$ , seguindo uma simbologia alternativa de Clavius para indicar uma variável ao quadrado. Em seguida calcula a área das três laterais, a área da base, e finalmente o volume do tetraedro retangular usando a fórmula  $\frac{xyz}{6}$ . Descartes apresenta um exemplo onde os três lados da base são  $\sqrt{13}$ ,  $\sqrt{20}$ , 5. Primeiro calcula:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 29, (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \gamma^2 = 29 - 13 = 16 = x^2;$$

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \beta^2 = 29 - 20 = 9 = y^2, (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2 = 29 - 25 = 4 = z^2.$$

Assim,  $x^2 y^2 z^2 = 576$  e  $xyz=24$ . Finalmente, obtém o volume  $xyz/6=4$  da pirâmide. Este é o último resultado que Descartes registra nas *Cogitationes Privatae*.

Segundo Sasaki (p. 132), tentativas similares foram encontradas na obra *Miracula arithmetica* (1622) de Johannes Faulhaber. O cálculo de Descartes sobre tetraedro retangular é interessante: apresenta a simbologia obtida a partir da Álgebra *cossist* de Clavius, em uma forma mais adequada.

As *Cogitationes Privatae* mostram que Descartes avançou além da *Algebra* de Clavius, na simbologia e, principalmente, na resolução das equações cúbicas. Outro aspecto importante é a tentativa de Descartes em estender o teorema de Pitágoras à Geometria Sólida.

## 1.6 A Matemática do *De Solidorum Elementis* – Sobre Elementos Sólidos

Segundo Sasaki, Descartes esboçou um pequeno fragmento que Charles Adam (1857-1940) datou como sendo do período de 1619 a 1621. Na opinião de Milhaud (1858-1918), a data provável é o verão de 1619-1620, quando se supõe que Descartes visitou Falhauber. Federico sugere o ano de 1630. Em seu recente estudo sobre Descartes, entretanto, Sasaki sugere o período entre 1619 e 1623.

Seja como for, em 1676, Leibniz (1646-1717) copiou esse manuscrito, até então nas mãos de Clerselier (1614-1684). O título dado por Leibniz ao manuscrito foi *Progymnasmata de solidorum elementis excerpta ex manuscripta cartesiani* (Exercícios preliminares sobre elementos sólidos extraído do manuscrito de Descartes). Felizmente, o manuscrito de Leibniz ainda existe na biblioteca de Niedersächsische Landesbibliothek em Hanover. Dois estudos significativos sobre ele apareceram: Pasquale J. Federico (1902-1982), *Descartes on polyhedra - a study of the Solidorum elementis* e *Descartes exercises pour les éléments des solides-Essai en complément d'Euclide*, editado e traduzido por Pierre Costabel (1912-1989). O trabalho póstumo de Federico fornece preciosos e precisos comentários matemáticos. A monografia de Costabel é quase completa e definitiva, principalmente a discussão sobre a Geometria Sólida de Descartes. O estudo sobre esse trabalho cartesiano aqui leva em consideração o estudo de Pascale J. Federico.

### 1.6.1 Geometria sólida

O estudo de Federico é dividido em três partes. Na Parte I, Federico faz uma introdução, em seguida trata da história do manuscrito e, finalmente, apresenta o *fac-símile* copiado por Leibniz e a transcrição do manuscrito para a língua inglesa. A Parte II é sobre os elementos de Geometria sólida. Inicialmente, aborda alguns fundamentos geométricos necessários ao entendimento do texto, depois traduz e comenta as passagens do manuscrito e aborda alguns artigos de Euler (1707-1783) do período de 1750 e 1751. A Parte III é sobre números poliédricos, aborda os números figurados dos gregos, apresenta a tradução e os comentários necessários ao entendimento do texto e faz os comentários gerais, uma espécie de fechamento. Mas aqui dividimos *De solidorum elementis* em duas partes. A primeira parte é sobre Geometria Sólida e a segunda é sobre números poliédricos.

Na Parte I são apresentadas seis proposições que apresentaremos a seguir e começa com a definição de ângulo sólido reto e a afirmação de um teorema.

Um ângulo sólido reto é o que compreende a oitava parte da esfera, embora não seja formado por três ângulos planos retos. Mas todos os

ângulos dos planos pelos quais é limitado, tomados juntos, são iguais a três ângulos retos. (FEDERICO, 1982, p. 43-tradução nossa)

Federico oferece o seguinte comentário interpretativo:

A primeira sentença define a unidade de medida de ângulos sólidos, o ângulo sólido reto, que intercepta na esfera um oitavo de sua área total. O octante da esfera, formado por três planos mutuamente perpendiculares com cada ângulo da face sendo um ângulo plano reto, é o ângulo sólido unidade. Mas um ângulo sólido medindo uma unidade não precisa ser formado por três ângulos planos retos; ele pode ser formado por três ângulos planos, não necessariamente retos, ou por mais do que três ângulos planos, desde que a área interceptada sobre a esfera seja um oitavo da área total. (FEDERICO, 1982, p. 43-tradução nossa)

Sobre a segunda sentença, Federico acrescenta:

[...] é claramente falso que todos os ângulos da face limitando um ângulo sólido reto somem três ângulos retos. [...] sua soma deve ser igual a três ângulos retos se o ângulo sólido medir um ângulo reto no caso de um ângulo triedral. [...] Para o caso geral, as fórmulas na página 39 mostram que a soma é  $(2n-3)\Delta$ <sup>37</sup>, onde  $n$  é o número de lado do ângulo sólido. (FEDERICO, 1982, p. 43-tradução nossa)

A área de um triângulo esférico ABC mede o ângulo sólido OABC e é igual a soma de seus três ângulos menos dois ângulos retos, ou seja,  $\alpha + \beta + \gamma - 2\Delta$ . Generalizando-a para um polígono com  $n$  lados que pode ser dividido em  $n-2$  triângulos esféricos. A área desse polígono é a medida do ângulo sólido correspondente que pode ser determinada somando-se os triângulos esféricos assim obtidos. A área é então a soma de seus ângulos menos  $2(n-2)$  ângulos retos, ou seja,  $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon \dots - 2(n-2)\Delta$ . No caso da esfera unitária, esses ângulos  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots$  são iguais aos ângulos centrais correspondentes, portanto, a soma dos ângulos centrais menos  $2(n-2)\Delta$  dá a medida do ângulo sólido. No caso desse ângulo sólido medir uma unidade, isto é,  $\Delta$ , a soma dos ângulos planos seria igual a  $(2n-3)\Delta$ .

Descartes, na sequência, afirma o seguinte teorema que Federico chama de proposição I:

Como em uma figura plana todos os ângulos externos, tomados juntos, são iguais a quatro ângulos retos, assim em um corpo sólido que todos os ângulos sólidos externos, tomados juntos, são iguais a oito ângulos sólidos

<sup>37</sup>  $\Delta$  representa o ângulo de  $90^\circ$ .

retos. Por ângulo sólido externo quero dizer a dobra mutua ou inclinação dos planos, que é para ser medido com a ajuda dos ângulos planos que compreendem o ângulo sólido. Pois a parte pela qual a soma de todos ângulos planos formando um ângulo sólido é menor do que quatro ângulos retos que formam um plano, designa o ângulo sólido exterior. (FEDERICO, 1982, p. 44-tradução nossa)

Sobre esse teorema, Federico tece o seguinte comentário:

A proposição da primeira sentença foi uma novidade com Descartes. É afirmada por analogia às figuras planas (polígonos convexos) e, sem dúvida, Descartes a descobriu pelo argumento da analogia. Para o polígono, a soma dos ângulos externos é igual a quatro ângulos retos ( $4\Delta$ ), o círculo todo; assim também para o corpo sólido (poliedro convexo) a soma dos ângulos externos é igual a oito ângulos retos ( $8\Delta$ ), a esfera toda. Nenhuma prova é dada no manuscrito; [...] (FEDERICO, 1982, p. 44-tradução nossa)

Descartes primeiro define o ângulo sólido reto e, então, afirma a proposição que a soma de todos os ângulos sólidos externos de um poliedro convexo é igual a oito ângulos sólidos retos, mas não fornece uma prova para esse teorema.

Outra afirmação, chamada de proposição II por Federico, nos diz que se multiplicarmos quatro ângulos planos retos pelo número de ângulos sólidos e do produto subtrairmos oito ângulos planos retos o que permanece será a soma de todos os ângulos planos que estão na superfície do corpo sólido. Usaremos a seguinte simbologia, de acordo com Federico: S para o número de ângulos sólidos, F para para o número de faces, P para o número de ângulos planos,  $\Sigma$  para a soma das medidas de todos os ângulos planos e  $\Delta$  para o ângulo  $\pi/2$  ou  $90^0$ , então a proposição pode ser escrita como  $\Sigma = (4S - 8) \Delta$ .

Nenhuma demonstração é dada por Descartes, mas Federico a deduz: primeiro, explica que a medida do ângulo sólido externo é igual a  $4\Delta$  menos a soma dos ângulos faces do ângulo sólido dado, depois, observando que cada um dos ângulos sólidos externos pode ser obtido do mesmo modo, ou seja, é igual a quatro ângulos retos menos a soma dos ângulos planos daquele ângulo sólido dado e, como todos os ângulos sólidos possuem uma tal propriedade, somando então todos os ângulos externos e usando a primeira proposição que diz que a soma de todos os ângulos externos é  $8\Delta$  e como teremos 4  $\Delta$  vezes o número de ângulos sólidos, menos a soma de todos os ângulos planos no poliedro, então,  $8\Delta = 4\Delta S - \Sigma$ .

Na próxima seção, Descartes apresenta duas desigualdades, chamadas de proposição III, por Federico, a saber,  $2(S-2) \geq F$  e  $S/2 + 2 \leq F$ , a primeira das desigualdades pode ser deduzida observando que cada uma das faces têm no mínimo três ângulos e, portanto, a soma dos ângulos deve ser maior ou igual que  $2\Delta$ , a soma dos ângulos de um triângulo. Portanto, a soma total para as  $F$  faces deve ser igual ou maior que  $2F\Delta$ ,  $\Sigma \geq 2F\Delta$ , agora usando a equação  $\Sigma = (4S - 8) \Delta$ , obtemos  $(4S - 8) \Delta \geq 2F\Delta$ , ou  $2S - 4 \geq F$ . A segunda desigualdade também é obtida a partir da equação  $\Sigma = (4S - 8) \Delta$ , mas antes de passarmos a explicação desse resultado, por Federico, é melhor atentarmos à explicação da quinta proposição, pois é utilizada na explicação da segunda parte da III e da IV. A quinta proposição afirma que o número de ângulos planos, de faces, e a soma dos ângulos planos podem ser relacionados pela fórmula  $P = (4F + \Sigma/\Delta)/2$  ou  $\Sigma = (2P - 4F) \Delta$ . Esta fórmula pode ser obtida da seguinte forma: seja  $n$  o número de ângulos planos de uma face, a soma dos ângulos internos dessa face é  $2(n-2) \Delta = 2n\Delta - 4\Delta$ . Existem  $F$  (números de faces de um poliedro) de tais expressões e adicionando-as obtemos que  $\Sigma$  é igual a  $2\Delta$  vezes os  $n$  ângulos internos ou  $2P\Delta$ , onde  $P$  é o total de números de ângulos planos, menos 4 vezes o número de faces  $F$ , ou seja,  $\Sigma = (2P - 4F) \Delta$ . Voltando à desigualdade  $F \geq (S + 4)/2$ . Como  $P \geq 3S$ , pois cada ângulo sólido deve ter três ou mais ângulos planos, o número de ângulos planos deve ser no mínimo três vezes o número de ângulos sólidos. Assim, podemos escrever  $4F + \Sigma/\Delta \geq 6S$ , substituindo nessa equação  $\Sigma = (4S - 8) \Delta$ , obtemos  $4F + 4S - 8 \geq 6S$  ou  $2F - 4 \geq S$ .

No parágrafo seguinte, Descartes argumenta que não existem mais do que cinco poliedros regulares platônicos. Essa é a proposição IV, segundo Federico.

Como segue é provado que não pode existir mais do que cinco corpos[poliedros] regulares: uma vez que se toma  $\alpha$  para o número de ângulos sólidos,  $\varphi$  para o número de faces, pode-se dividir  $(2\alpha - 4)/1\varphi$  e  $(2\varphi - 4)/1\alpha$  de modo que não ocorra fração; caso contrário, é certo e evidente que em um corpo regular não é possível. Mas isto é assim se  $\alpha$  for 4, 6, 8, 12 e 20 e, respectivamente,  $\varphi$  for 4, 8, 6, 20 e 12 pelos quais são gerados os cinco corpos regulares. (FEDERICO, 1982, p. 50-tradução nossa)

As duas fórmulas da citação são escritas por  $\frac{2S-4}{F} = a$ ,  $\frac{2F-4}{S} = b$ , onde  $a$  e  $b$  são inteiros positivos. As duas equações são obtidas a partir da equação  $\Sigma = (4S - 8) \Delta$  e

das propriedades dos corpos regulares. A primeira é obtida notando que todas as faces dos corpos regulares têm um número igual de ângulos, que se designa por  $n$ , a soma dos ângulos para cada face é dada por  $2(n-2)\Delta$  e para todas as faces  $F$  a soma total é  $\Sigma = 2(n-2)F\Delta$ , mas, por outro lado, já que  $\Sigma = (4S - 8)\Delta$  e assim  $\frac{2S-4}{F} = n-2 = a$ . A segunda equação é obtida notando que todos os ângulos sólidos têm o mesmo número de ângulos planos que designaremos por  $m$  e portanto  $P = mS$ , substituindo na equação  $\Sigma = (2P - 4F)\Delta$ , obtemos  $\frac{\Sigma}{\Delta} = 2mS - 4F$ . Comparando com a outra equação  $\Sigma = (4S - 8)\Delta$ , obtemos  $2mS - 4F = 4S - 8$  ou  $\frac{2F-4}{S} = m-2 = b$ . Agora as duas equações são lineares em  $S$  e  $F$  e podem ser resolvidas em função de  $a$  e  $b$ ,  $S = \frac{8+4a}{4-ab}$ ,  $F = \frac{8+4b}{4-ab}$ . Portanto o produto  $ab$  deve ser menor que 4 e maior que zero. As possíveis combinações para  $a$  e  $b$  são  $(a,b)$ :  $(1,1)$ ,  $(1,2)$ ,  $(2,1)$ ,  $(1,3)$  e  $(3,1)$ , conseqüentemente, os resultados possíveis para  $(S, F)$  são respectivamente  $(4,4)$ ,  $(6,8)$ ,  $(8,6)$ ,  $(12,20)$  e  $(20,12)$ . Assim o número de ângulos (lados) em cada face ( $n$  acima) e o número de ângulos planos em cada ângulo sólido acima ( $m$  acima) podem então ser determinados e os cinco corpos construídos.

Obtemos a conclusão de Descartes que não existe mais do que cinco corpos regulares. Tal resultado era conhecido na Grécia antiga, por exemplo, o encontramos em *Os Elementos* de Euclides, Livro XIII, proposição 8. A argumentação de Descartes sugere uma dedução de um ponto de vista algébrico, pois seu argumento usa o fato de que a divisão não pode ser uma fração.

A proposição VI, segundo Federico, é a fórmula relacionando o número de ângulos planos, faces e ângulos sólidos, a saber  $P = 2F + 2S - 4$ . Esse tópico está relacionado ao teorema atribuído a Leonhard Euler, a saber:  $S - A + F = 2$ , onde  $S$  é o número de vértice (ângulo sólido),  $A$  é o número de arestas, e  $F$  é o número de faces de um poliedro convexo. Segundo Sasaki, Costabel concluiu, categoricamente, que Descartes descobriu essa relação, mas, infelizmente, em nenhuma parte do *Solidorum Elementis* existe uma afirmação explícita da relação  $F+S=A+2$  que Costabel afirmou existir no texto. Descartes afirma, no manuscrito, que “Existem sempre duas vezes tantos ângulos planos como lados sobre a superfície de um corpo sólido; pois um lado é sempre comum a duas faces.” (Federico,

1982, p. 54). Se combinarmos isto com a afirmação de que o número de ângulos planos é  $2\phi + 2\alpha - 4$  ou  $P = 2F + 2S - 4$ , certamente obtemos a fórmula de Euler.

Sobre essa questão Lakatos (1922-1974) em uma nota de rodapé de seu livro faz o seguinte comentário:

Observado pela primeira vez por Euler[1758 a]. Seu problema original era a classificação de poliedros, cuja dificuldade foi acentuada no sumário editorial: “Enquanto em Geometria plana os polígonos (*figurae rectilineae*) podiam ser classificados muito facilmente de acordo com o número de lados, o qual é evidentemente sempre igual ao número de seus ângulos, em estereometria a classificação dos poliedros (*corpora hedris planis inclusa*) representa problema muito mais difícil, visto que somente o número de faces é insuficiente para esse fim.”

A chave para o resultado de Euler foi a invenção dos conceitos de vértice e aresta: foi ele quem primeiro observou que, além do número de faces, o número de pontos e linhas na superfície do poliedro determina o seu caráter (topológico). É interessante que ele tenha estado ansioso por acentuar a novidade de sua estrutura conceitual, e que tenha inventado os termos “*acie*” (arestas) em vez do antigo “*latu*” (lado), visto que *latus* era um conceito poligonal, ao passo que ele queria um conceito poliedral. Por outro lado, mantinha o termo “*angulus solidus*” para os seus vértices em formato de pontas. Tem sido recentemente admitido que a prioridade do resultado cabe a Descartes. A base para isso é um manuscrito de Descartes [c.1639] copiado por Leibniz, em Paris, do original em 1675-6, redescoberto e republicado por Foucher de Careil em 1860. A prioridade não deve ser atribuída a Descartes sem restrições. É certo que Descartes declara que o número de ângulos planos iguala  $2\phi + 2\alpha - 4$  em que por  $\phi$  ele entende o número de faces e por  $\alpha$  o número de ângulos sólidos. Certo é também que ele declara haver duas vezes mais ângulos planos que arestas (*latera*). Essas declarações conjuntas, evidentemente dão a fórmula de Euler. Mas Descartes não chegou a esse ponto, visto que pensava ainda em termos de ângulos (planos e sólidos) e faces, e não fez uma alteração revolucionária consciente dos conceitos de vértices não dimensionais, arestas unidimensionais, e faces bidimensionais como base necessária e suficiente para a plena caracterização topológica de poliedros. Euler testou a conjectura a fundo pelas conseqüências. Conferiu-a para prismas, pirâmides, etc. Podia ter acrescentado que a proposição de que existem apenas cinco corpos regulares é também conseqüência da conjectura. Outra conseqüência suspeitada é a proposição até aqui corroborada de que quatro cores são suficientes para colorir um mapa.(LAKATOS, 1978, p. 20).

Se Descartes viu ou não a relação, é difícil afirmar, mesmo com a argumentação a favor de Euler feita por Lakatos. Seja como for, a afirmação de Lakatos é como a metáfora que Bicudo faz entre o historiador e o equilibrista.

E o historiador, então, assemelha-se a um equilibrista que andasse em corda bamba, presa a dois altíssimos pólos distantes, sem ter por baixo a rede protetora que lhe amortecia a possível queda. Esse é o risco que assume ao tratar de encaixar os cubos certos que fazem gravuras na história, com os poucos fragmentos que o tempo, esse deus voraz, não consumiu. (BICUDO, 2004, p.58)

Voltando agora para a proposição VI:  $P = 2F + 2S - 4$ . Ela pode ser obtida combinando as duas equações:  $(4F + \Sigma/\Delta)/2 = P$  e  $\Sigma = (4S-8) \Delta$ .

Podemos afirmar, do exposto até agora sobre geometria sólida, que Descartes tinha um bom conhecimento da Geometria Sólida, embora muitos resultados discutidos por ele já fossem conhecidos pelos gregos. Mas, mesmo assim, como vimos, o teorema sobre soma dos ângulos externos de um poliedro convexo é uma novidade apresentada, embora não apresente uma demonstração desse fato. Em contra partida, Descartes apresenta-o sob o argumento da comparação, tal como a soma dos ângulos externos de um polígono convexo. Nota-se também, a partir desse exemplo e de outros que serão apresentados, que Descartes, em muitos casos, tenta generalizar os resultados, partindo do simples para o complexo. Não se deve deixar de mencionar que no caso dos cinco poliedros de Platão o argumento cartesiano é algébrico e abstrato. O ponto fundamental do raciocínio é pensar que as divisões devem resultar em inteiros positivos o que lhe permite obter o resultado desejado. Passaremos agora a segunda parte do *De solidorum elementis* que trata dos números figurados.

A meta da parte dois do *De Solidorum Elementis* é mostrar como calcular números poliédricos e estudar suas propriedades. Mas Descartes primeiro mostra como encontrar números poligonais.

Sólidos<sup>38</sup> são antes de tudo formado por superposição de gnomos tendo sempre um ângulo vago, e dos quais a figura toda pode ser decomposta em triângulos. Do que é facilmente reconhecido que os pesos[número de pontos] de todos os polígonos são obtidos pela multiplicação dos triangulares pelos números 2, 3, 4, 5, 6, etc. e subtraindo do produto 1, 2, 3,

---

<sup>38</sup> “A sentença está corretamente traduzida, de acordo com o manuscrito, mas apresenta uma dificuldade no significado. Isto é por causa da palavra “solida” (sólidos) que faz a frase de abertura inconsistente com o resto da sentença e do parágrafo, que é sobre triângulos e polígonos. A dificuldade desaparece se é assumido que “solida” é um erro de cópia para “plana”(planos) no manuscrito original, e esta posição é tomada aqui para o propósito de simplificação das explicações. (FEDERICO, 1982, p. 93).

4 raízes[número de lado do polígono], etc. (FEDERICO, 1982, p. 92-tradução nossa)

Números poligonais são calculados, de acordo com a orientação dada por Descartes, adicionando pontos sobre os gnomos (que constituem uma progressão aritmética) ou dividindo o dado polígono em triângulos. Os números pentagonais, por exemplo, consistem de 3 (5-2) números triangulares, mas 2 (5-3) lados comuns são contados duas vezes. Assim, o número de pontos é 3 vezes o número de pontos do número triangular correspondente, menos duas vezes o número de pontos no lado comum. Generalizando esse procedimento para o n-ésimo a-gonal número  $p(a,n)$ . Federico fornece a fórmula  $p(a,n) = (a-2)p(3,n) - (a-3)n$ . Os números triangulares são calculados por meio da seguinte fórmula:  $p(3,n) = n(n+1)/2$ . A palavra raiz no texto significa  $n$  na fórmula acima. Descartes refere-se ao número de pontos como o peso.

Números poligonais podem ser divididos em números triangulares assim como um poliedro pode ser dividido em pirâmides. Descartes se mostra bem habituado com números piramidais e como são obtidos.

O poliedro é dividido em pirâmides, como os polígonos são divididos em triângulos, para obter seus pesos. Isto é portanto necessário para obter as fórmulas (pesos) para cada série de números piramidais. O método de Descartes de obtenção desses pesos, como descrito no parágrafo 30, 31, e 32, é feito em duas etapas. (1) adicione  $n/2$  à fórmula do polígono da base, (2) multiplique o resultado por  $(n+1)/3$ . Afirmado como uma fórmula, isto é,

$$P(a,n) = \left(p(a,n) + \frac{n}{2}\right) \cdot \frac{(n+1)}{3},$$

onde  $a$  é o número de lados da base. Como Descartes chegou nesta expressão para a fórmula geral para um número piramidal não é evidente. (FEDERICO, 1982, p. 99-tradução nossa)

Assim, o procedimento de Descartes para calcular os números piramidais é dado pela fórmula a seguir, mas sem nenhuma explicação adicional.

$$P(a,n) = \left(p(a,n) + \frac{n}{2}\right) \cdot \frac{(n+1)}{3}$$

Os números piramidais já eram conhecidos pelos gregos e por alguns matemáticos do fim do século XVI e início do século XVII, como Johannes Faulhaber e Petrus Roth. Tudo indica que Descartes foi inspirado pelos trabalhos desses dois últimos, segundo Aczel, documentos recentes comprovam que Descartes manteve contato com pelo menos um deles, Faulhaber.

*De Solidorum Elementis* também sugestiona que houve, por parte de Descartes, uma tentativa em algebrizar a Geometria Sólida, embora não temos mais nenhuma comprovação ou relatos sobre Geometria Sólida nas suas obras posteriores.

Sob o ponto de vista metodológico, Descartes já tinha anunciado ter o projeto para reformar as Ciências, algumas técnicas apresentadas são interessantes e podem ser conectadas com seu método, como é o caso do raciocínio por dedução e analogia que foi empregado na argumentação da propriedade de que a soma dos ângulos externos de um poliedro convexo é  $8\Delta$ . Foi com base no resultado equivalente para polígonos convexos que Descartes chegou a esse resultado. Em seus escritos é comum usar a indução bem como a analogia para explicar fatos científicos. Nesse exemplo de raciocínio, Descartes parte, em muitos casos, do mais simples para o mais complexo. Descartes parte dos números figurados para construir os números poliédricos, embora já fossem conhecidos pelos gregos. Basicamente, como seu método indica, devemos partir de idéias claras e distintas e depois por dedução atingir idéias mais complexas, ou seja do simples para o mais complexo.

Depois do *De Solidorum Elementis*, Descartes engajou-se no projeto que chamou de *Álgebra*, que incorporou a idéia de reforma da Ciência anunciada em 1619. Descartes foi amadurecendo o seu pensamento, paulatinamente, e as principais idéias foram reunidas na sua principal obra, *O Discurso do Método*, em 1637. A *Álgebra* de Descartes contém traços perceptíveis no *Discurso* e nos ensaios.

## 1.7 A Velha Álgebra

Em outubro de 1628, Descartes visitou Isaack Beeckman em Dordrecht e nesse encontro, segundo anotações de Beeckman, Descartes fez referência a um manuscrito

intitulado *Álgebra*<sup>39</sup>, onde incorporou o seu projeto de 1619 para reformar toda a Matemática da época. Beeckman tomou nota das palavras de Descartes e, posteriormente, as publicou em seu diário com o título: *A Certain Especimen of Descartes's Álgebra* (Uma certa espécie da Álgebra de Descartes), neste encontro, Descartes, agora com 33 anos, fala de suas atividades durante o período de 1619 a 1628 correspondente ao período que passou viajando e diz ter alcançado um conhecimento perfeito em Geometria e Aritmética que poderia, eventualmente, abranger todo o conhecimento humano.

Depois de tecerem elogios mútuos, a nota mostra a tentativa de Descartes em superar o problema da dimensionalidade e unificar a Aritmética e a Geometria, propondo três diferentes formas para representar quantidades algebricamente :

[...]As três maneiras dependem de como a unidade é representada. (1) Se pensamos a unidade como tendo comprimento e largura, a representamos por meio de um quadrado  $\square$ ; (2) Por um ponto, . , se a consideramos como sendo uma quantidade numérica discreta; (3) Por uma linha, - , se a vemos como tendo somente comprimento[...] (SASAKI, 2003, p. 163-tradução nossa)

Nota-se que o caminho tomado por Descartes, para superar a questão da dimensionalidade, foi transcorrido lentamente, já que essa concepção de unidade será repetida na Regra XV das *Regras para a Direção do Espírito*, de uma forma mais clara. Mas em *A Geometria*, Descartes adota como unidade, o segmento unitário que associada com certas mudanças estruturais permitirão superar a questão com sutileza.

Em seguida, segundo Beeckman, Descartes tenta dar sentido a dimensões maiores que três.

Para realizar isto, ele primeiro identifica um cubo ordinário de três dimensões com um cubo de madeira. Em seguida, ele identifica quatro dimensões com um cubo de pedra, cinco dimensões com um cubo de ferro e assim sucessivamente. Quanto maior o número de dimensões do objeto, mais peso o objeto ganha. (SASAKI, 2003, p. 164-tradução nossa)

Com isso ele pretendia dar à questão da dimensão um significado concreto.

---

<sup>39</sup> De acordo com o inventário de Stockholm, o manuscrito *Álgebra* tinha 155 páginas e tratava dos fundamentos da álgebra. Segundo avaliação de Sasaki, a velha álgebra tinha outras questões Matemáticas, além daqueles contidos nos fragmentos de Beeckman. Não há uma data precisando o ano que a obra fora escrita.

Na sequência, Beeckman apresenta como Descartes resolveu a equação quadrática, tomando como exemplo a equação:  $x^2 = 6x + 7$ . O método apresentado é muito restrito, na verdade, é equivalente ao método de completar os quadrados, limitando-se à análise das raízes positivas. O método era ineficaz quando a equação possuía raízes irracionais. Segundo Beeckman, Descartes tinha consciência da limitação de seu método. Os números irracionais, naquele momento, eram concebidos por Descartes como números escritos na forma  $\sqrt{a}$ , onde  $a$  é um número racional que não é um quadrado perfeito. Assim, um número irracional  $b = \sqrt{a}$  pode ser reescrito como  $b^2 = a$ , assim, representava os números irracionais por meio de uma parábola, Descartes refere-se a esses números como números surdos. Os números positivos eram chamados verdadeiros (*verus*), os negativos de implícitos (*implicitus*) e para os imaginários (*imaginarius*) não havia outra notação. Descartes, segundo Beeckman, refere-se também a regra que posteriormente seria chamada de “a regra dos sinais de Descartes”. Esses fragmentos foram melhorados e apresentados em uma forma consistente em *A Geometria* de 1637, conforme apresentaremos no Capítulo III.

Em *A Velha Álgebra*, Descartes ainda permanece usando a simbologia *cossist*, mas abandonou os compassos presentes nas *Cogitationes Privatae*.

No encontro com Beeckman, Descartes discutiu outros temas como música e óptica. Várias páginas do diário de Beeckman foram dedicadas aos assuntos: *Angle of Refraction Explained by Descartes* (Ângulo de refração explicado por Descartes), *The Ratio of Thickness of Musical strings* (A razão da espessura das cordas musicais), e *To Burn Very Remote places by Solar Rays* (Queimar lugares muito remotos através de raios solares).

Há outros fragmentos do período que poderiam fazer parte da velha Álgebra, a saber: *An Ellipse in Which All Parallel Rays Converge in Point of a Denser Medium* (Uma elipse na qual todos os raios paralelos convergem em um ponto de um meio mais denso), *A Hyperbola through Which Rays Converge into One Point* (Uma hipérbole pela qual os raios convergem em um único ponto) e *The Part of the Ellipse through Which Rays in the Air Exactly Converge* (A parte da elipse em que os raios no ar convergem exatamente).

Beeckman escreve em seu diário uma nota intitulada *A hyperbola through which rays Converge into one point* (Uma hipérbole em que os raios convergem em um único ponto): “Em 1 de fevereiro de 1629 em Dordrecht M. Descartes tinha deixado esta

proposição sobre hipérbole sem demonstração e pediu-me para demonstrá-la; como eu a descobri, ele ficou agradecido e julgou que ela era autêntica.” Sasaki (2003, p. 167). A demonstração de Beeckman, segundo Sasaki (2003, p. 169), foi incorporada no discurso VIII de *A Dióptrica* de Descartes. A solução de tal problema permitirá Descartes construir o espelho hiperbólico que reflete os raios incidentes paralelos ao eixo sobre o foco.

Nas notas de Beeckman, para o período de 1628-1629, há outros fragmentos sobre Matemática: *It is demonstrated that one can find two mean proportionals by means of a parabola* (É demonstrado que se pode encontrar duas médias proporcionais por meio de uma parábola) e como resolver uma equação quadrática com a ajuda de uma parábola. O primeiro problema está intimamente relacionado com o da duplicação do cubo e foi um desafio para os matemáticos do século XVI e XVII. Mersenne foi informado sobre a solução de Descartes no verão de 1625 e a incorporou em *Harmonicorum libri* publicada em Paris, em 1636. De acordo com Mersenne (1588-1648), Descartes resolveu esse problema por meio da intersecção de uma parábola e um círculo. A solução de Descartes foi comunicada à vários matemáticos por Mersenne. Claude Mydorge (1585-1647) foi um dos que responderam apresentando uma solução mais geral e mais completa do que a de Descartes. Em síntese, Mydorge constrói uma parábola e um círculo e chega na proporção contínua,  $BG : ED = ED : AE = AE : BH$ . Descartes reescreve a solução de Mydorge em uma simples fórmula algébrica e a incorpora no Livro III da *Geometria* de 1637.

No segundo problema, Descartes resolve equações do tipo  $z^4 = \pm az^2 \pm bz + c$ . Essa idéia foi desenvolvida e, posteriormente, incorporada em *A Geometria*, em uma longa seção no Livro III. Segundo Beeckman, Descartes considera essa descoberta a mais importante de sua carreira (até aquele momento) e que ninguém tinha, até então, descoberto algo tão notável. Em *A Geometria* de 1637, ele afirma que essa regra é tão e tão completa como se poderia explicitar.

Muitos desses tópicos foram melhoradas e coligidos em *A Geometria* e em *A Dióptrica* de 1637. No fim de 1628, Descartes já possuía: as regras básicas aplicáveis a quantidades algébricas e geométricas, a teoria matemática da refração por lentes com a forma de seção cônica, o método para encontrar duas médias proporcionais por meio de uma parábola, o método para resolver equações cúbicas e quadráticas por meio de uma parábola. As anotações de Beeckman sobre Descartes comprovam que quando Descartes

escreveu *O Discurso do Método* e os seus ensaios, boa parte do seu conteúdo tinha sido pensado. Podemos encontrar esses traços principalmente em *A Dióptrica* e em *A Geometria*.

### 1.8 Descartes: um homem e seu tempo

Nas páginas anteriores procuramos mostrar a influência dos antigos e dos seus contemporâneos sobre a formação inicial de Descartes e que o ambiente em que Descartes prosperou foi fundamental para que conhecesse os tipos de problemas que estavam sendo estudados, além de adquirir uma gama de conhecimento por intermédio de seus contatos com eruditos em La Flèche, com as obras de obras de inestimável valor científico como *Os Elementos* de Euclides, *O Tesouro da Análise* de Pappus, *A Aritmética* de Diofanto, as obras de Aristóteles, de Arquimedes, de Clavius, entre outras, e de seu contato com Beeckman, entre vários sábios de seu tempo.

Foi assim que Descartes obteve a sua formação inicial, vivendo num período marcado por fortes transformações nos diversos níveis do saber, além de transformações sociais e econômicas que culminaram na hegemonia europeia perante o mundo, também contribuiu para a derrocada de velhos paradigmas: a Ciência aristotélica, a simbologia algébrica, a Geometria grega e, ao mesmo tempo, instalou seu projeto, inovando em diversas áreas do conhecimento, especialmente Filosofia Natural e Matemática, conforme mostraremos isso nos próximos capítulos.

Sobre o ensino em La Flèche o próprio Descartes, posteriormente, deu opinião sobre a sua formação e encontramos algumas citações em suas obras que demonstram a sua impressão sobre o ensino que recebera. Em *O Discurso do método* faz referências explícitas sobre o ensino em La Flèche e a primeira delas ressalta a sua decepção com o ensino das humanidades.

Entretanto, ele relata a importância do ensino em La Flèche à sua formação, demonstrando ter uma consciência bastante abrangente da importância da questão da herança cultural, da Teologia, da Filosofia, Jurisprudência, Medicina e outras Ciências, mas, ao mesmo tempo, não escondia que era necessário modificá-las. Entretanto, segundo ele, foi necessário conhecer novas culturas para melhorar o seu julgamento, continua relatando que

apreciava a eloquência e era apaixonado pela poesia, mas o domínio dessas artes eram dom do espírito.

Descartes demonstra insatisfação também com algumas áreas do currículo de La Flèche, principalmente com as humanidades. Mas sua insatisfação vai além e afirma admirar as Matemáticas, mas, segundo ele, elas não apresentam utilidades práticas e, desse modo, era um conhecimento estéril, sem utilidade, mas que gozava da regra da certeza. Essa certeza o inspirará e associada com o método analítico colocará o seu projeto a frente de seu tempo, incorporando a certeza do argumento matemático ao método para construir os fundamentos de uma nova Ciência. Assim, parte em uma viagem solitária e irá buscar no mundo e, em si, respostas às dúvidas que a Ciência tradicional não conseguia responder.

Constatamos também que, nessa fase inicial, Descartes desenvolveu algumas atividades importantes que serão consolidadas nos períodos seguintes e apareceram de forma madura na sua primeira obra oficial, *O Discurso do método*. Durante essa fase inicial, Descartes resolveu muitos problemas, principalmente aqueles relacionados a luz e suas propriedades.

## **CAPÍTULO II: O MÉTODO DE ANÁLISE E SÍNTESE DOS ANTIGOS GEÔMETRAS GREGOS**

Neste capítulo mostraremos que Descartes foi um usuário do método de análise e síntese dos antigos geômetras gregos, estabelecendo-o na base de seu sistema filosófico/científico. Descartes readapta e apresenta o método como uma ferramenta capaz de abordar os problemas científicos de sua época. Mostra-se também que o método de análise e síntese dos antigos geômetras gregos é a principal influência da Matemática sobre o seu pensamento.

O método de análise e síntese, concebido na Grécia antiga, revelou-se, ao longo da história da Ciência e da Filosofia, uma poderosa ferramenta para resolver problemas, principalmente nas Ciências Matemáticas. Encontramos aplicações e descrições do método nas obras dos principais matemáticos e filósofos gregos, como Arquimedes, Herão, Pappus, Diofanto, Aristóteles e Platão.

No mundo islâmico, continuando a tradição grega, o método foi importante às atividades de pesquisa, mas com modificações relevantes.

No princípio da Matemática moderna destaca-se François Viète que reconstruiu o método para descobrir e provar proposições Matemáticas introduzindo, assim, uma reforma radical na Matemática de sua época.

É nas *Regras* que Descartes expõe o seu projeto reformador da Ciência, apresentando o método de análise e síntese dos antigos geômetras gregos para resolver problemas, então em aberto, afirmando que iria estendê-lo a outros campos do conhecimento humano, além da Matemática. Desse modo, o método é apresentado como método geral. Ele menciona que não pretende repetir os velhos cálculos dos aritméticos e dos geômetras, observando que a forma com que a Aritmética e a Geometria eram expostas, na Antiguidade e em seus dias, não ofereciam nada de novo aos eruditos e até assustavam aqueles que não conseguiam apreendê-las. Mas Descartes reconhece que foi necessário, na Antiguidade, para se estudar Filosofia, estudar Matemática concomitantemente, pois, os antigos tratavam uma Matemática muito diferente daquela de seus dias. De fato, a Matemática grega estava fortemente ligada a Geometria e os antigos geômetras gregos utilizavam o método de análise e síntese aplicando-o a Geometria. A Matemática de seus dias era bem diferente, pois os modernos, a partir de Viète, dedicaram-se a outros temas, entre eles a análise algébrica. Descartes afirma, nas *Regras* e no *Discurso*, que rudimentos dessa arte, o método de análise e síntese, poderiam ser encontradas em Papus e Diofanto e ainda menciona que, em sua época, o método estaria sendo ressuscitado por alguns homens talentosos. O principal personagem responsável por isso é, sem dúvida, François Viète. Mas, diversos outros matemáticos, segundo Sasaki, estiveram envolvidos no projeto de ressuscitar o método analítico nesse período, entre eles Petrus Ramus, Willebrol Snell, Marino Ghethaldi, Jean Beaugrand (c. 1595-c.1640).

A contra-partida dos modernos começa com a Ciência e a Filosofia gregas, isto é, analisando a produção grega e as novas necessidades exigidas, as questões a serem resolvidas indicavam que a Ciência devia seguir um novo curso. Quanto a Filosofia, em sua época, os ideais aristotélicos estavam presentes em quase todas as áreas do saber, o currículo das escolas jesuítas era fortemente embasado por esses ideais, como discutido anteriormente. Mas Descartes irá refutar esses ideais aristotélicos.

Descartes se contrapõe a Geometria grega euclidiana, pois enquanto Euclides se preocupa com o rigor da demonstração no estilo sintético, ele se preocupa com a heurística, a análise, para depois estabelecer a síntese. A metodologia de Descartes é muito diferente de Euclides, para se ter uma idéia. não encontramos nas obras matemáticas cartesianas nenhum teorema demonstrado no estilo euclidiano, pois o que fez foi estabelecer um método que, associado com novos conceitos, permitiu-lhe avançar além da matemática grega, embora tenha usado pressupostos da própria Ciência grega.

Como Descartes se diz um usuário do método de análise e síntese dos antigos geômetras gregos, propomo-nos, nas páginas seguintes, fazer uma discussão sobre esse método, a partir dos gregos até Descartes, passando pela interpretação de François Viète. Com efeito, inicia-se avaliando os trabalhos de Papus de Alexandria, e Diofanto de Alexandria. De fato, nestes notáveis geômetras encontra-se vestígios desse método, e em Papus, a sua mais clara descrição. Com isso, pretendemos mostrar que existe uma ligação direta entre os trabalhos desses autores, culminando na criação da análise álgebra cartesiana.

Apresentamos também uma discussão moderna sobre esse método, pois ela esclarece, e praticamente define, uma interpretação às diversas versões e desentendimentos, suscitadas a partir da descrição de Papus. Essa discussão foi amplamente divulgada e diversos artigos publicados, cada qual tentando dar sua interpretação desse método e apontando certos erros em outras interpretações. A discussão foi praticamente encerrada com a publicação do trabalho de Hintikka e Remes, *The Method of Analysis* ( O método de análise).

Há vestígios do método de análise e síntese nos trabalhos de Bacon (1561-1626), Galileu, Newton (1642-1727), Leibniz e Kant (1724-1804), chegando até nossos dias através dos trabalhos do matemático húngaro Polya (1887-1985). Começamos o estudo sobre o método analítico avaliando a sua concepção em Papus.

## 2.1 Uma síntese do Livro VII de A Coleção Matemática de Papus de Alexandria

A Idade de Ouro da Geometria grega, dominada pelos grandes geômetras, como Euclides, Arquimedes e Apolônio de Perga, entrou em declínio no início da era cristã. Lentamente, as obras desses geômetras perderam prestígio, embora outros geômetras continuassem a manter viva a tradição da Geometria grega. No começo da era cristã, estabelece-se uma tradição cultural diferente, exceto em esférica e Astronomia, com Menelau e Ptolomeu, respectivamente, a produção Matemática, segundo Heath, passa a ser limitada à produção de alguns poucos livros de qualidade duvidosa. O estudo das geometrias superiores enfraqueceu ou até ficou em desuso. Mas Papus, que viveu no fim do século III de nossa era, revive o interesse pelo assunto. A importante tarefa que se propôs, Papus, a fazer foi restabelecer a Geometria grega em seu plano mais elevado. Nesse sentido, seu trabalho *A Coleção Matemática*, tem um inestimável valor acadêmico, científico e histórico, constituindo, ao lado dos grandes clássicos, a mais importante de nossas fontes sobre a Antigüidade.

*A Coleção Matemática*, segundo Heath, constitui-se um manual à Geometria grega e foi planejada para ser lida juntamente com os trabalhos originais. Nos trabalhos incluídos no Livro VII, *O Tesouro da Análise*, existe uma introdução geral, seguida por uma breve descrição dos conteúdos, com lemas, designados para facilitar a leitura dos tratados. Onde a história de um assunto é dada, como o problema da duplicação do cubo ou de encontrar duas médias proporcionais, as várias soluções são reproduzidas, presumivelmente porque não eram facilmente acessíveis; na melhor das hipóteses tinham que ser coletadas de várias fontes. Quando é descrito um resultado clássico, usa-se a oportunidade para dar métodos alternativos, ou para fazer melhorias nas demonstrações e até generalizá-las. Papus demonstra uma completa compreensão sobre todos os assuntos tratados e sobre a técnica aplicada. O estilo é conciso e claro e na opinião de muitos autores, Papus coloca-se como um matemático realizado e versátil, um representante digno da clássica Geometria grega.

Uma característica interessante na obra de Papus é a imensa lista de autores mencionados no curso do livro. Euclides, Arquimedes e Apolônio são constantemente citados, outros são mencionados por alguma realização particular, e, em muitos casos, a menção de um nome por Papus é tudo que sabemos sobre aquele geômetra ou filósofo.

Para os objetivos deste trabalho, o Livro VII é o mais importante e é considerado também como a melhor fonte descrita dos livros antigos formando o que era chamado *O Tesouro da Análise*. Desse modo, dedicamos a próxima seção a uma análise mais profunda sobre o método de análise e síntese, começando com a descrição de Papus. Antes porém, faremos um apanhado geral do Livro VII.

O Livro VII começa definindo a análise e síntese dos geômetras gregos, arrola os trabalhos pertencentes ao tesouro da análise, descreve os tratados, a antecipação do teorema de Guldin (1577-1643), apresenta os lemas para os diferentes tratados, lemas para Seção Determinada de Apolônio, lemas sobre as Inclinações de Apolônio, lemas sobre *Os Contatos* de Apolônio, lemas para os locais planos de Apolônio, lemas para *Os Porisms* de Euclides, lemas para *As Cônicas* de Apolônio, lemas para o lugar de superfície de Euclides e um lema sem conexão com os anteriores.

Papus fala sobre uma passagem de *As Cônicas* de Apolônio, a saber: o lugar geométrico de um ponto em relação a três ou quatro retas. Dadas três ou quatro retas e a partir de um ponto são traçadas retas fazendo ângulos fixos com as retas dadas, ao mover o ponto, mantendo os ângulos fixos, o que se obtém é uma cônica. Papus prossegue afirmando que podemos ter o local com referência a cinco ou seis retas ou até mais retas. Supondo que existam cinco ou seis retas e que  $p_1, \dots, p_5$  ou  $p_1, \dots, p_6$  sejam os comprimentos das retas traçadas de um ponto para se encontrarem com as cinco ou seis retas em ângulos dados. Então, no primeiro caso teremos  $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = k \cdot p_4 \cdot p_5$ , e no segundo caso  $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = k \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot p_6$ ,  $k$  é um fator de proporcionalidade. O lugar do ponto é, em cada caso, uma certa curva dada em posição. Segundo Papus, a relação não deve ser da mesma maneira se existisse mais de seis retas, pois existem somente três dimensões em Geometria, embora certos escritores falem de um retângulo multiplicado por um quadrado ou um triângulo sem dar qualquer explicação de como isso pode ser realizado, aludindo-se à prova de Herão para a área do triângulo em termos de seus lados. Mas o sistema de proporção composta possibilita o resultado qualquer que seja o número de retas. A investigação dessas curvas não tinha atraído a atenção de homens brilhantes, como os velhos geômetras e os melhores escritores. Por esse relato de Papus, notamos claramente que a não aceitação de dimensões superiores a três impediram os gregos de avançarem, teoricamente, rumo à construção de uma Matemática mais poderosa. Esse problema foi

importante para Descartes, pois por sua resolução, adquiriu confiança no seu método e anunciou que, pela Geometria, o seu método poderia ser melhor entendido, conforme mostraremos. Convém salientarmos que o problema de Papus para três e quatro retas foi resolvido pelos gregos.

## 2.2 Uma discussão moderna

O chamado *O Tesouro da Análise* tem suas fontes básicas nos trabalhos de Euclides, Aristeu o velho e Apolônio. O livro é dedicado a seu filho Hermodoro e direcionado aos estudantes mais avançados, aqueles que já possuem uma certa familiaridade com os elementos comuns e que agora pretendem aprofundar seus conhecimentos:

O chamado “Tesouro da Análise”, meu filho Hermodoro, em resumo, é uma matéria particular para os que querem, depois da produção dos elementos comuns, tomar a si a faculdade inventiva, (de resolver) nas linhas, os problemas apresentados a eles, e sendo útil para isso apenas. E foi escrita por três homens, Euclides, o autor dos Elementos, e Apolônio de Perga, e Aristeu, o mais velho, a abordagem sendo segundo a análise e a síntese. (BALIEIRO, 2004, p. 66 )

Em seguida, Papus começa a descrição do método:

A análise, com efeito, é o caminho a partir do que é procurado, como aceito, através das suas sucessivas conseqüências<sup>40</sup>, até algo aceito pela síntese. (BALIEIRO, 2004, p. 66 )

Podemos interpretar o que está descrito aqui como um processo de supor o resultado desejado como verdadeiro e buscar, através de suas implicações, algo admitido como verdadeiro ou válido, podendo ser um teorema já conhecido ou um axioma.

*Re sultado*  $\rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \dots \rightarrow Pr emissã$  .

---

<sup>40</sup> Através de suas sucessivas conseqüências. Muitas vezes essa é traduzida por seus concomitantes, por exemplo, Hintikka e Remes(p. 29). Como veremos, reside aí o motivo de muitas interpretações discordantes sobre o método.

A síntese, revertendo a ordem das implicações, deve chegar no resultado desejado. Supondo que os passos da cadeia de raciocínio sejam reversíveis, o resultado segue:

$$\text{Resultado} \leftarrow A \leftarrow B \leftarrow C \dots \leftarrow \text{Pr emissa}$$

A próxima descrição, entretanto, parece indicar que não são conseqüências do resultado desejado que se procura, mas seus possíveis antecedentes:

Pois na análise, tendo (nós) estabelecido a coisa procurada como acontecida, consideramos isso a partir do qual esta resulta, e, de novo, o precedente daquela, até que, assim voltando sobre nossos passos, cheguemos a alguma das coisas já conhecidas ou que tem a ordem dos primeiros princípios; e essa abordagem chamamos análise, como solução em sentido contrário. Enquanto que, na síntese, ao contrário, supondo o que foi deixado, por último, na análise, já acontecido, e tendo arranjado como conseqüências as coisas então precedentes, segundo sua natureza, e tendo adicionado uma às outras, chegamos por fim, à construção da coisa procurada; e chamamos isso síntese. (BALIEIRO, 2004, p.66 )

A passagem parece indicar que, estabelecendo o resultado desejado como verdadeiro, deve-se procurar uma proposição que poderia implicar o resultado e depois encontrar outra proposição que implicasse a anterior e assim, sucessivamente, até chegarmos num resultado conhecido como verdadeiro, um axioma ou um teorema, a síntese segue a seqüência:

$$\text{Resultado} \leftarrow A \leftarrow B \leftarrow C \dots \leftarrow \text{Premissa}$$

A passagem deu margens a diversas interpretações, é de fato complicada e deu início a um longo debate. Antes nos deteremos um pouco mais nas descrições oferecidas no Livro VII.

Papus descreve, posteriormente, a lista dos trabalhos no tesouro da análise:

E dos livros antes do tesouro da análise, o arranjo é como segue. Um livro dos *Data* de Euclides, dois da Seção de uma Razão de Apolônio, dois de Seção de Área, dois de Seção Determinada, dois do Contato, três dos Porisms de Euclides, dois das Inclinações de Apolônio, dois dos Lugares Planos do mesmo, oito das Cônicas, cinco dos Lugares Sólidos de Aristeu, dois dos Lugares à Superfície de Euclides, dois Acerca das Médias de Eratóstenes. São 33 livros, dos quais te expus, para exame, os conteúdos

até das Cônicas de Apolônio, e a multitude dos Lugares e das condições de possibilidade e dos casos, segundo cada livro, mas também os lemas procurados e nenhum inquérito no tratamento dos livros deixei para trás, como pensava. (BALIEIRO, 2004, p.67 )

Cita também os livros com assuntos pertinentes à análise:

Os livros com assuntos pertencentes ao campo da análise apresentam-se na seguinte ordem: o livro único dos *Data* de Euclides; os dois livros da Secção da Razão, os dois da Secção da Área, os dois livros da Secção Determinada e os dois livros de Contatos de Apolônio; os três livros dos Porisms de Euclides; os dois livros de Inclinações de Apolônio; os dois livros dos Lugares Planos e os oito livros das Cônicas do mesmo; os cinco livros dos Lugares Sólidos de Aristeu; os dois livros dos Lugares à Superfície de Euclides e os dois livros das Médias de Eratóstenes. (BALIEIRO, 2004, p. 68)

Segundo Balieiro, após a análise:

[...]utilizando a síntese para expor o que se encontrou para solucionar um problema ou demonstrar um teorema, os antigos geômetras dividiam o problema (ou teorema) e sua solução (ou demonstração) em seis partes a saber, protasi, ekthasis, diorismos, kataskeu, apodeixis e sumperasma. 1. Protasis – é o enunciado da proposição. 2. Ekthasis – é o que é dado no enunciado da proposição. 3. Diorismos – é o que se pede no enunciado da proposição. 4. Kataskeue – é a construção geométrica da proposição. 5. Apodeixis- é a demonstração da proposição. 6. Sumperasmas – é conclusão da proposição. (BALIEIRO, 2004, p. 74)

A tradução do texto, em relação a descrição do método de análise e síntese, ofereceu diversas interpretações modernas e deu início a um longo debate; por exemplo, segundo Robinson, em seu artigo *A Análise na Geometria Grega*, Cornford sustenta que a interpretação correta seria dada pela seguinte descrição:

O método de análise não se inicia, como os historiadores afirmam, pela busca do que é implicado por (1). Começa perguntando o que poderia implicar (1). Se descubro que (2) poderia implicar (1), indago a mim mesmo se sei que dois é verdadeira. Se sei que é, a análise está concluída; mas se não, devo dar um segundo passo. E, como antes, esse segundo passo não será perguntar o que é implicado por (2), mas o que implicaria (2). O processo deve continuar até que eu alcance algo que de fato conheço. Digamos que isso seja (5). Terei então concluído a análise, podendo fazer minha síntese: “(5) é verdadeira e implica (4), (4) implica

(3), (3) implica (2), e (2) implica (1) que, por sua vez, é o que devo provar”. Segundo esse relato, a análise não é um processo de dedução. Não deduzo (2) a partir de (1). É só quando procedo na direção contrária, ao fazer a síntese, que executo uma inferência. Na análise, a atividade de minha mente não é de demonstração, mas de intuição. O geômetra que se utiliza da análise adivinha a premissa (2) de que se segue a conclusão (1). [...] Segundo tal descrição, as implicações com que a análise trabalha não seriam necessariamente recíprocas. Poderia não existir qualquer consequência necessária na direção de (1) para (5). A análise percorreria na contra-mão uma via de mão única, e a síntese seria o retorno, na direção correta. (ROBINSON, 1983, p.8)

Robinson avalia que essa interpretação é insustentável. O argumento de Robinson é realizado olhando a prática dos geômetras gregos. Se a interpretação de Cornford fosse correta, então estaria em contradição com a prática dos geômetras gregos e com os relatos dos historiadores da Matemática, pois estes consideraram o método de análise e síntese como tratando de implicações reversíveis e embora nem toda proposição geométrica seja reversível e, nem em toda proposição a reciprocidade das afirmações seja direta. Os exemplos tomados de Arquimedes e Pappus, por exemplo, são suficientes, segundo Robinson, para refutar a tese de Cornford, pois eles apresentam resoluções de problemas, onde consideram a análise e síntese de acordo com a sua interpretação, e é a comumente aceita pela comunidade dos matemáticos; cita Hankel, Cantor (1845-1918) e Heath que a interpretam desta forma:

Suponhamos que se deseje demonstrar, caso seja possível, a proposição (1). Se pretendo trabalhar pelo método da análise, devo proceder como segue: Primeiramente assumo que (1) é verdadeira, ou seja, assumo o que de fato desejo demonstrar. A seguir considero o que se segue de (1). Digamos que descobro que (1) implica (2). Em seguida, considero o que se segue de (2). Digamos que (2) implica (3). Sigo desse modo até alcançar uma proposição que já sei ser verdadeira. Digamos que (5) seja essa proposição. Não importa como (5) é conhecida, desde que seja conhecida, e conhecida independente de (1). Pode se tratar de um axioma, de um teorema anteriormente demonstrado ou de um elemento da construção. Quando se encontra uma proposição desse tipo, a análise está concluída e a síntese pode, então, ser iniciada. A síntese consiste em percorrer os mesmos passos na ordem inversa: “uma vez que se sabe que (5) é verdadeira, então (4) é verdadeira e, por conseguinte, (3), (2) e, finalmente, (1), que era o que se pretendia demonstrar”. (ROBINSON, 1983, p. 6)

Assim, para que o método funcione, segundo esse autor, as implicações devem ser recíprocas e a síntese comprovará a análise. A síntese serve então a dois propósitos: para demonstrar um resultado e para verificar a sua validade.

Desse modo, continua Robinson:

*A reduction ad absurdum* é um caso especial do método de análise. Se (5) é falsa, então (1) é falsa; e se (1) é falsa, a contraditória de (1) é verdadeira. Podemos, portanto, provar a contraditória de (1) assumindo (1) e mostrando que ela acarreta (5), que é um absurdo e, como tal, independente conhecida como falsa. (ROBINSON, 1983, p. 6).

Segundo Robinson, a aplicação do método de análise e síntese na resolução de problemas é semelhante, referindo-se a seguinte passagem de Papus que classifica duas categorias de análise e síntese:

Duplo é o gênero da análise, um a pesquisa do verdadeiro, o qual é chamado teórico, o outro capaz de dizer o que foi proposto, o qual é chamado problemático. Enquanto que, no gênero teórico, tendo estabelecido o que é procurado como existente e verdadeiro, em seguida, por meio das conseqüências sucessivas como verdadeiras, e como existem segundo a hipótese, tendo avançado até algo admitido, caso, por um lado, fosse verdadeiro aquilo admitido, será verdadeiro também o procurado, e a demonstração é uma inversão da análise; caso, por outro lado, encontramos falso o admitido, falso também será o procurado. No gênero problemático, tendo estabelecido o que foi proposto como conhecido, em seguida, por meio das conseqüências sucessivas, como verdadeiras, tendo avançado até algo admitido, caso, por outro lado, o admitido seja possível é obtível, o que os matemáticos chamam dados, possível também será o proposto, e, de novo, a demonstração é uma inversão da análise; caso, por outro lado, encontramos impossível o admitido, impossível será também o problema. (BALIEIRO, 2004, p. 67)

As teses de Conford e de Robinson foram contestadas por Gulley em seu artigo *A Análise Geométrica Grega* que propõe uma outra interpretação da passagem de Papus, segundo a qual, Papus está mencionando dois processos de análise e síntese. Gulley busca evidências externas para demonstrar a sua tese afirmando que nos trabalhos de Aristóteles e de Platão as duas versões do método, como descritas por Robinson e Conford, são encontradas. A interpretação de Gulley implica em um questionamento das interpretações anteriores, pois se fosse correta, por sua vez, implicaria numa inconsistência das duas

anteriores e, então, as duas anteriores, deveriam ser revistas. Assim as interpretações de Cornford e Robinson à passagem de Papus seriam inconsistentes e Papus, um grande geômetra, estaria enganado em relação a descrição do método de análise e síntese geométrica. Esse é o grande problema da interpretação de Gulley, acusar Papus de escrever algo incompatível com a prática real. Isso é problemático, pois Papus se mostrou, em seus escritos, consciente da cultura Matemática grega. Desse modo, todas essas interpretações devem ser revistas.

Hintikka e Remes praticamente encerram a discussão sobre a interpretação do método de análise e síntese, partindo da inconsistência dessas interpretações. A princípio, a fonte do problema direcional, para esses autores, é a má interpretação dos termos *akólouthēin* e *akólouthon* que foram traduzidos por através de suas sucessivas consequências. Nos relatos onde o método é entendido como movimento descendente, esses termos são geralmente compreendidos e traduzidos como consequências lógicas. Segundo Hintikka e Remes, esses termos são sempre usados por Papus quando está falando do percurso que parte da conclusão desejada para as premissas e nunca quando descreve o percurso inverso. Nessas passagens, são usados os termos *apódeixis*, *hepómena* e *syμβáínein*. A solução seria traduzir os termos *akólouthēin* e *akólouthon* pelos termos alternativos “concomitantes” ou “o que vai junto de”. Hintikka e Remes buscam evidências externas para sustentarem a sua interpretação, a saber, em Platão e em Aristóteles, e também mostram diversas evidências internas ao texto de Papus onde ocorrem o termo e que seria impossível traduzi-lo por “através de suas sucessivas consequências”, mas ao contrário, é perfeitamente cabível o “concomitante” ou “o que vai juntamente com”, isso praticamente garante a veracidade de sua tradução.

A principal evidência interna ao relato de Papus à interpretação de Hintikka e Remes é quando descreve a análise teórica, onde, se assumimos a passagem como “através de suas consequências” não seria necessário apelar para que as consequências fossem também assumidas como verdadeiras e existente em virtude de nossa hipótese, pois a inferência dedutiva preserva a verdade. Segundo Hintikka e Remes existem diversas passagens no texto de Papus que corroboram esta interpretação. O que devemos notar aqui é que, uma vez sustentada essa interpretação de Hintikka e Remes, implicará abandonar a análise descendente e a suposta contradição no texto de Papus fica superada.

Mas, as últimas palavras de Pappus parecem contradizer a interpretação de Hintikka e Remes, a saber, na análise teórica, caso, por outro lado, encontramos falso o admitido, falso também será o procurado e na análise problemática caso, por outro lado, encontramos impossível o admitido, impossível será também o problema. Isso parece indicar que a verdade do teorema ou a possibilidade da construção do problema fosse uma consequência do que se procura e nos levaria, de volta, ou a interpretar a análise como movimento descendente, agora descartada, ou a supor que os passos da análise sejam reversíveis.

Desse modo, Hintikka e Remes propõem que devemos interpretar o método como um único método, a parte analítica e a parte sintética como sendo inseparáveis. Esse método deve ser encarado como geométrico, os antigos estão situados no domínio da Geometria, isto quer dizer, entre outras coisas, que as proposições estão hierarquicamente ordenadas e que se uma proposição implica outra, não necessariamente significa que o inverso é verdadeiro. O geômetra, depois de visualizada a análise, deveria provar a convertibilidade das proposições na síntese. O aspecto direcional, para Hintikka e Remes, não tem muita importância, e a ênfase dada a ele, pelos vários intérpretes, revela que outros aspectos do método não estavam sendo considerados, como é o caso do aspecto da sua lógica, o papel das construções auxiliares. Ou seja, se faz necessário um estudo complementar sobre a lógica do método de análise e de seu aspecto configuracional.

Estudaremos agora *A Aritmética* de Diofanto, um dos mais influentes trabalhos na Europa. Sua avaliação é importante para nós, pois, tanto Viète quanto Descartes foram, nas suas próprias palavras, influenciados por ela.

### **2.3 Uma síntese da obra *A Aritmética* de Diofanto**

Assim como Pappus, Diofanto ocupa, sem dúvida, um lugar único na galeria dos grandes matemáticos, e para notarmos suas contribuições à arte algébrica devemos estudar sua obra, *A Aritmética*, bem como avaliarmos a influência dessa obra nos trabalhos de gerações posteriores. Estamos particularmente interessados nessa influência sobre Viète e Descartes.

Hoje sabe-se que tanto a Álgebra quanto a Geometria gregas têm suas origens na Babilônia e no Egito. Encontramos elementos da Aritmética egípcia e babilônica refletidos em muitos trabalhos gregos. Por exemplo, os cálculos egípcios chamados Hau-Calculations (método de escrever e calcular com frações), que são equivalentes as soluções de equações simples com uma variável, estão presentes em *A Aritmética* de Diofanto. Por exemplo, as equações:

$$(1/7)x + x = 19, \quad (2/3)x + (1/2)x + (1/7)x + x = 33, \quad (x + (2/3)x) - (1/3)(x + (2/3)x) = 10,$$

do Papiro de Rhind, são equações típicas do trabalho de Diofanto.

Muitos problemas encontrados nos Papiro de Rhind e no Papiro de Berlim, assim como muitos epigramas aritméticos encontrados na *Antologia Grega*<sup>41</sup>, aparecem na obra de Diofanto.

Nos Papiro de Rhind e de Berlim encontramos exemplos que ilustram um método favorito de Diofanto, a saber, o da falsa posição. Heath (p. 441) ilustra esse método com dois exemplos. O primeiro é dividir 100 pães entre 5 pessoas em uma tal forma que as partes estejam em progressão aritmética e  $1/7$  da soma das três primeiras divisões seja igual a soma das outras duas. Se  $a + 4d$ ,  $a + 3d$ ,  $a + 2d$ ,  $a + d$  e  $a$  são as partes, então,  $3a + 9d = 7(2a + d)$ , ou  $d = (11/2)a$ . A resolução prossegue fazendo  $a=1$  e em seguida escrevendo a série: 23,  $35/2$ , 12,  $13/2$ , 1, cuja soma é 60. Como 100 é  $1\frac{2}{3}$  vezes 60, então

$1\frac{2}{3}$  é multiplicado por cada termo da série e obtém-se os valores corretos  $38\frac{1}{3}$ ,  $29\frac{1}{6}$ , 20,  $10\frac{2}{3}$ ,  $1\frac{2}{3}$ .

O segundo exemplo de Heath é retirado do Papiro de Berlim, a saber, resolver o sistema:

---

<sup>41</sup> A Antologia Grega ou Antologia Palatina é uma reunião de epigramas do século V da nossa era. O Livro XV é constituído de problemas aritméticos, oráculos e enigmas. A maioria desses problemas são resolvidos usando-se cálculos com frações. Os problemas são sobre torneiras, divisão de herança, divisão de nozes e maçãs, etapas da vida, pesos de estátuas, tempo e espaço, problemas envolvendo número de pessoas e animais.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ \frac{x}{y} = 1 : \frac{3}{4} \end{cases}$$

Fazendo  $x = 1$  na segunda equação obtemos  $y = \frac{3}{4}$  e, portanto,  $x^2 + y^2 = \frac{25}{16}$ , para que  $x^2 + y^2$  se torne igual a 100, é necessário multiplicar  $\frac{25}{16}$  por 64 ( $8^2$ ). O valor de  $x$  deve ser multiplicado por 8, portanto  $y = 8$  e, conseqüentemente,  $y = 6$ .

Muitos epigramas encontrados na *Antologia Grega* são resolvidos por meio da técnica egípcia e muitos podem ser convertidos em equações simples. Vários deles são problemas de dividir um certo número de objetos da mesma espécie entre um determinado número de pessoas. Vinte e três desses problemas são equações em uma variável, um deles é um epigrama sobre a idade de Diofanto. Doze são de equações simultâneas com duas variáveis que podem ser reduzidos a simples equações com uma variável, por meio de uma simples eliminação. Seis são problemas do tipo: um canudo enche um vaso em um dia, um segundo em dois dias e um terceiro em três dias, os três juntos demoraram quantos dias para encher o vaso? Outros problemas, do mesmo tipo, são sobre fabricantes de tijolos. A *Antologia* contém duas equações indeterminadas do primeiro grau que podem ser resolvidas nos inteiros positivos em um número infinito de formas; a primeira é a distribuição de maçãs,  $3x$  no total, em partes satisfazendo a equação  $x - 3y = y$ , onde  $y$  é maior ou igual a dois, a segunda trata de equações com quatro variáveis  $x + y = x_1 + y_1$ ,  $x = 2y_1$ ,  $x_1 = 3y$ , cuja solução geral é  $x = 4k$ ,  $y = k$ ,  $x_1 = 3k$  e  $y_1 = 2k$ . Essas equações são solucionadas assumindo  $x + y = 100$ . Esses problemas são tratados por Diofanto, mas de uma forma abstrata.

Muitos problemas em Diofanto recaem em equações indeterminadas do segundo grau, por exemplo, o problema de dividir um número quadrado em dois quadrados ou encontrar um triângulo retângulo com lados racionais. Os pitagóricos foram os primeiros a descobrirem uma fórmula geral para encontrar tais triângulos, a saber,

$$n^2 + \left\{ \frac{1}{2}(n^2 - 1) \right\}^2 = \left\{ \frac{1}{2}(n^2 + 1) \right\}^2,$$

onde  $n$  é qualquer número impar. Platão exibiu a fórmula

$$(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1)^2,$$

onde  $n$  é um natural qualquer. Euclides deu a fórmula mais geral

$$(mnpq)^2 = \left(1/2(mnp^2 + mnq^2)\right)^2 - \left(1/2(mnp^2 - mnq^2)\right)^2.$$

Os pitagóricos resolveram outro problema indeterminado descobrindo as soluções inteiras sucessivas da equação  $2x^2 - y^2 = \pm 1$ . Diofanto sabia encontrar qualquer número de soluções quando uma das variáveis era conhecida.

Alguns problemas de *A Métrica* de Herão, segundo Heath, estão também refletidos na obra de Diofanto. Por exemplo, o problema de encontrar dois retângulos de modo que o perímetro do segundo seja três vezes o do primeiro e a área do primeiro seja três vezes a do segundo. O número três simplesmente ilustra um caso particular, o problema geral é o seguinte: resolver o sistema formado pelas duas equações  $u + v = n(x + y)$  e  $x.y = n.u.v$ . A solução dada é equivalente a fazer  $x = 2n^3 - 1, y = 2n^3, u = n(4n^3 - 2), v = n$ . Outro problema, similar ao primeiro, equivale ao sistema formado pelas duas equações:  $x + y = u + v, xy = n . uv$ . A solução dada é  $x + y = u + v = n^3 - 1, u = n - 1, v = n(n^2 - 1), x = n^2 - 1, y = n^2(n - 1)$ . Convém mencionar o problema de encontrar um triângulo retângulo com lados racionais e com área 5. Existem outros problemas que são casos particulares do problema de encontrar triângulos retângulos racionais de modo que suas áreas e seus perímetros sejam dados.

Diofanto provavelmente viveu por volta de 250 d. C. Na *Antologia* encontramos o seguinte epigrama sobre a sua idade: sua infância durou um sexto de sua vida, sua barba cresceu após um duodécimo, casou-se após um sétimo mais, e seu filho nasceu cinco anos depois; o filho viveu até a metade da idade de seu pai, e o pai morreu após quatro anos. A descrição nos dá a seguinte equação:

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x,$$

onde  $x$  é a idade de Diofanto, portanto morreu com 84 anos.

As obras de Diofanto são *A Aritmética*, originalmente em treze livros e um tratado sobre números poligonais. Seis livros de *A Aritmética* sobreviveram e um fragmento do último. Alusões em *A Aritmética* indicam a existência de uma coleção de proposições sob o título de *Porisms*; em três proposições (3, 5, 16) do livro V, Diofanto

cita, como conhecidas, certas proposições na teoria dos números a partir dos *Porisms*. A *Moriastica* pode ser um trabalho separado de Diofanto fornecendo regras para operar com frações.

Nenhum dos manuscritos que possuímos contém mais do que seis livros de *A Aritmética*, a única variação sendo que poucos dividem os seis livros em sete, enquanto outros dão o fragmento sobre números poligonais como o VIII. Evidências demonstram que os livros foram perdidos antes do século X.

### 2.3.1 Notações e definições

Segundo Nesselmam (1811-1881) apud (Heath, p. 455), há três estágios na evolução da Álgebra. O primeiro é chamado Álgebra retórica ou cálculo por meio de frases. Este estágio é caracterizado pela ausência completa de símbolos, os cálculos são realizados por meio de palavras e formando prosa contínua. Este primeiro estágio é representado por escritores como Iamblichus, todos os algebristas árabes, os velhos algebristas italianos e seus seguidores. O segundo estágio é a Álgebra sincopada que é também um estilo literário, mas marcado pelo uso de abreviações simbólicas para quantidades e operações. A este estágio pertence Diofanto e, após ele, todos os europeus até aproximadamente o meio do século XVII (com exceção de Viète, que foi o primeiro a estabelecer, segundo o nome logística especiosa, como distinta de logística numerosa, um sistema regular de calcular com letras denotando magnitudes como também números). O terceiro estágio, que Nesselmann dá o nome de Álgebra simbólica, usa um sistema completo de notação por sinais não tendo conexão visível com palavras ou coisas que elas representam, uma linguagem completa de símbolos, que suplanta totalmente o sistema retórico, sendo possível trabalhar sem usar uma simples palavra da linguagem ordinária com a exceção de uma ou duas palavras conectando aqui e ali, usadas para darem clareza. A esse estágio pertence, sem dúvida, Descartes. É importante ressaltar que é com Diofanto que o desenvolvimento algébrico começa a se estabelecer, conforme os esclarecimentos a seguir.

Ainda, segundo Heath (p. 457), Diofanto usava a seguinte simbologia abreviativa. A constante era representada por  $\overset{o}{M}$  que é a abreviatura da palavra grega monades

(ΜΟΝΑΔΕΣ). A variável era denotada por um símbolo parecido com ζ, a origem dessa notação pode ser a contração das duas primeiras letras da palavra grega ἀριθμός (número). Quanto aos nossos  $x^2, x^3, x^4, x^5, x^6$  eram representados respectivamente por  $\Delta^Y, K^Y, \Delta^Y \Delta, \Delta K^Y, K^Y K$ . Diofanto não vai além da sexta potência.  $\Delta^Y$  é a abreviatura das duas primeiras letras da palavra grega dunamis (ΔΥΝΑΜΙΣ), que significa potência.  $K^Y$  é abreviatura das duas primeiras letras da palavra grega kubos (ΚΥΒΟΣ) que significa cubo.  $\Delta^Y \Delta$  é a quarta potência da variável.  $\Delta K^Y$  é a quinta potência da variável e  $K^Y K$  é a sexta potência da variável. A potência inversa  $1/x$  era representada por ζ<sup>χ</sup>,  $1/x^2$  por  $\Delta^Y \chi$  e assim sucessivamente. As primeiras nove letras do alfabeto grego α, β, γ, δ, ε, um símbolo parecido com ζ, ζ, η, θ, representam 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e ι, κ, λ, μ, ν, ξ, ο, π e ο (em desuso Koppa) representam 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90. O coeficiente de cada termo em  $x, x^2, \dots$  ou  $1/x, 1/x^2, \dots$  é expresso pelo numeral ordinário imediatamente seguinte,  $\Delta K^Y \kappa \zeta = 26 x^5$ ,  $\Delta^{YX} \sigma \nu = 250/x^2$ . A adição é indicada por mera justaposição, por exemplo:  $\kappa^Y \alpha \Delta^Y \iota \gamma \zeta \epsilon$  corresponde a  $x^3 + 13x^2 + 5x$ . Quando existem unidades na adição, são indicadas pela abreviação  $\overset{o}{M}$ , por exemplo,  $\kappa^Y \alpha \Delta^Y \iota \gamma \zeta \epsilon \overset{o}{M} \beta$  corresponde a  $x^3 + 13x^2 + 5x + 2$ .

Diofanto usa o sinal  $\text{Λ}$ , possivelmente formado pelas letras Λ e I da palavra leipsis (ΛΕΙΨΙΣ), para o nosso menos. Como Diofanto não usa o sinal de mais, agrupa todos os termos positivos e negativos, os negativos após o sinal de menos, por exemplo  $x^3 - 5x^2 + 8x - 1$  ele escreve  $x^3 + 8x - (5x^2 + 1)$ , ou na simbologia diofantina  $\kappa^Y \alpha \delta \text{Λ} \Delta^Y \epsilon \overset{o}{M} \alpha$ .

Quanto as frações, quando o numerador e denominador consistem de expressões em variáveis, Diofanto coloca o numerador seguido por μορίου ou ἐν μορίῳ e em seguida o denominador.

### 2.3.2 A Aritmética de Diofanto

Em *A Aritmética*, Diofanto só admite como soluções das equações os números racionais, excluindo as raízes irracionais, imaginárias e negativas. A equação  $4 = 4x + 20$  é, para Diofanto, absurda. Os artifícios usados nos diferentes problemas são variados. Ele resolve equações do primeiro e segundo grau sem dificuldades enquanto a equação do terceiro grau só há um relato.

Segundo Boyer (p. 123-4), a obra diofantina dedica-se, exclusivamente, a resolução de equações determinadas e indeterminadas. As últimas passaram a ser conhecidas como análise indeterminada ou análise diofantina e seu conteúdo é parte comum dos curso de Teoria dos Números e não da Álgebra Elementar.

*A Aritmética*, que está repleta da simbologia sincopada, não é uma apresentação sistemática sobre operações algébricas ou sobre funções algébricas ou sobre resolução de equações algébricas. Apresenta, aproximadamente, 150 problemas específicos estudados em termos de soluções numéricas. Não desenvolve um sistema postulacional como fizera Euclides, mas Diofanto esforça-se para encontrar todas as soluções possíveis. Nas equações quadráticas que apresentam duas raízes positivas é apresentada apenas a maior e as negativas são desconsideradas.

Apresentamos alguns problemas ilustrativos do método diofantino. O primeiro é encontrar dois números tais que cada um somado com o quadrado do outro dá um quadrado perfeito. A solução apresentada por Diofanto equivale a chamar os números de  $x$  e  $2x + 1$ . Notemos que  $x^2 + (2x + 1)$ , isto é, o quadrado do primeiro mais o segundo é sempre um quadrado perfeito, ou seja, neste caso, qualquer valor que atribuimos a  $x$  nos dará um quadrado. Diofanto exige, em seguida, que  $(2x+1)^2 + x$  seja um quadrado perfeito. Ao invés de apresentar as várias possibilidades, Diofanto apenas escolhe um caso particular, a saber,  $(2x-2)^2$ , ou seja,  $(2x+1)^2 + x = (2x-2)^2$ . A equação reduz-se a uma do primeiro grau e a solução é  $x = 3/13$ . Poderíamos usar expressões semelhantes, do tipo  $(2x-3)^2$ ,  $(2x-4)^2$ , e encontrar outros números. Com esse procedimento, Diofanto evita tratar o problema com duas variáveis reduzindo-o a uma única. Outro problema ilustrativo aparece no problema que pede para encontrar dois números de modo que a soma seja 20 e a soma de seus quadrados seja 208. Os números são designados por  $10 + x$  e  $10 - x$  e assim

$(10+x)^2 + (10-x)^2 = 208$ , ou seja,  $x = 2$ ; portanto os números procurados são 8 e 12. Um outro problema seria encontrar dois números cuja soma seria 10 e a soma de seus cubos seja igual 370. Os dois últimos problemas são determinados, enquanto que o primeiro é um problema indeterminado.

As chamadas equações de Pell, as do tipo  $x^2 = 1 + py^2$ , são tratadas por Diofanto pelos exemplos  $x^2 = 1 + 30y^2$  e  $x^2 = 1 + 26y^2$ , mas ele dá apenas uma solução. Esses são também exemplos de equações indeterminadas.

### 2.3.3 Uma análise contextual das obras de Papus e Diofanto

Neste ponto é importante avaliarmos as obras de Papus e de Diofanto sob o ponto de vista de suas realizações e avanços teóricos e conceituais e, desse modo, tentar entender porque estes autores foram tão influentes no ocidente. Minha avaliação será direcionada aos objetivos dessa pesquisa. Começo com a obra de Papus que, como vimos, é um guia para se estudar a Geometria grega e traz informações importantes sobre a cultura Matemática grega. Um dos fatos marcantes na obra de Papus é, sem dúvida, a descrição do método de análise e síntese em *O Tesouro da Análise* acompanhada de vários exemplos que aplicam essa metodologia. Ali encontramos a descrição mais abrangente do método. Evidentemente, como já descrevemos, sob o olhar da modernidade, essa descrição pareceu, por algum tempo, confusa. O método também é descrito por outros autores como Herão, Arquimedes, Apolônio, Euclides, e até mesmo por fontes mais antigas. Além das descrições, encontramos nas obras de alguns desses autores diversos problemas e teoremas resolvidos usando esse método. Os exemplos dos autores antigos, juntamente com a descrição de Papus, permitiram aos modernos uma interpretação definitiva do método. Foram a partir das traduções latinas que os matemáticos dos séculos XV, XVI e XVII reinterpretaram o método analítico e notaram a sua grande eficácia na resolução de problemas matemáticos. Viète, Descartes e outros autores contribuíram para uma expansão do método. É desse modo que podemos notar a influência de Papus sobre os modernos, especificamente a técnica de análise e síntese. Isto é mesmo declarado abertamente nas obras de Descartes e de Viète, conforme ficará esclarecido posteriormente.

Quanto a Diofanto, sua obra *A Aritmética* traz inovações importantes. A primeira delas é a desvinculação com as amarras da Geometria grega, isto é, Diofanto se desprende do fato puramente geométrico e promove uma ruptura com a tradição geométrica e um avanço rumo a procedimentos algébricos. Embora seja difícil apurar a técnica diofantina, pelo menos alguns traços são marcantes.

A segunda inovação importante é a presença de uma simbologia que permite Diofanto traduzir os problemas em uma forma algébrica sincopada; isso é um avanço significativo, pois, como veremos, é a partir dos fundamentos da Álgebra, que será posteriormente desenvolvida, que será fundada uma nova concepção científica. Ainda dentro dessa característica, convém mencionar que o conceito de equação surge com força em Diofanto e, a partir desse conceito, a técnica diofantina de resolver equações com a possibilidade de ser aplicada tanto a objetos geométricos como a problemas aritméticos. Convém ressaltar que, apesar das novidades incorporadas, essa Álgebra ainda apresenta dificuldades que só serão superadas posteriormente. Uma delas é o fato de a variável ainda não ser representada por um único símbolo, o que certamente impede, por exemplo, a generalização de muitos resultados e complica muito o manuseio simbólico na resolução de problemas mais difíceis. Além disso, como vimos, Diofanto não vai além da sexta potência em seus problemas.

A terceira característica da obra de Diofanto é a técnica que apresenta para resolver problemas. As soluções dadas aos problemas são variadas e demonstram o caráter inventivo de seu pensamento. Em alguns exemplos, vale ressaltar, a técnica é quase geral, isto é, pode ser aplicada a todos os problemas daquela mesma espécie, como é o caso do problema de dividir um número dado em duas partes, cuja diferença é um número dado. Esse problema e a técnica resolutiva aplicada são encontrados em autores do porte de Clavius, Jordano, Bombelli e Viète, o que demonstra a influência desse autor sobre os algebristas europeus posteriores. Vale aqui apresentar a solução dada por Diofanto para esse problema, a fim de ilustrar sua técnica e exemplificar sua estratégia analítica. Começa fazendo a soma dos números igual a 100 e a diferença 40; esse recurso, o de reduzir o problema para dois números específicos, foi amplamente usado pelos algebristas da Europa, após Diofanto. A menor parte é identificada como  $x$ , em nossa linguagem moderna. O maior número é identificado com  $100 - x$  e, em seguida, uma equação

envolvendo esses números deve ser estabelecida. Assim, se subtraímos a menor parte da maior, 40 deve ser a diferença; adicionando  $2x$  a ambos os lados teremos uma igualdade entre 100 e  $40 + 2x$ , ou seja, uma equação fica estabelecida e, subtraindo 40 a ambos os lados, teremos uma igualdade entre 60 e  $2x$ . Assim, finalmente, 60 dividido por 2, nos dá 30 como a menor parte e, portanto, a maior parte será  $30 + 40$ , ou  $100 - 30$ . A abrangência da técnica é clara: poderíamos aplicá-la se outros números fossem mencionados no lugar de 100 e 40. Essa característica está presente nas obras dos principais algebristas europeus, mas tanto em Viète como em Descartes ela assumirá novos traços.

A quarta característica, talvez a mais importante, é o seu caráter analítico/heurístico. A concepção de números dados e números procurados, dentro de um problema e de sua possível tradução em uma linguagem algébrica, envolve uma concepção ampla de entidades Matemáticas, naquela época bastante rara, pois a cultura Matemática grega era predominante geométrica. Como mostrado no exemplo anterior, a técnica diofantina pressupõe a presença da característica analítica. A primeira etapa do processo resolutivo corresponde a concepção do problema, ou a célebre frase: “considere o problema dado”. Nela, considera-se todos os elementos e possibilidades que o problema pode nos oferecer, o conhecido, o desconhecido e as possíveis relações entre eles são avaliadas. É necessário, a seguir, através da nomeação dos elementos conhecidos e desconhecidos, estabelecer uma relação entre eles, no caso uma equação deve ser estabelecida. Depois que a equação é estabelecida, procede-se à resolução, isso pode ser feito pelas regras da Álgebra, já bastante conhecidas e difundidas naquela época. Trata-se de uma regressão na análise, reduzindo o problema, etapa por etapa, para equações cada vez mais simples. Uma vez resolvida a equação passa-se a uma interpretação da resposta e à busca das soluções pretendidas. Em outros problemas, na maioria deles, Diofanto não está interessado em dar métodos gerais, mas apenas resolver os problemas usando alguma espécie de truque apropriado àquela problema específico, como mostramos anteriormente. Podemos dar mais um exemplo: resolver a equação  $Ax^2 + C = y^2$ , quando  $A$  é positivo e um quadrado. Fazemos  $A = a^2$ ,  $y = ax \pm m$  e  $a^2x^2 + c = (ax \pm m)^2$ , donde  $x = \pm (c - m^2)/2ma$ ,  $m$  é escolhido de modo que  $x$  seja positivo. Aqui o problema é muito específico, a solução está associada aos coeficientes da equação, isso ocorre em muitos outros caso. Podemos entender também o caráter inventivo de sua técnica, ou seja, não há um objetivo geral a ser preenchido, mas

um fim específico, a solução é surpreendente, relaciona-se com os objetos dados, isto é, associa-se o segundo membro com as variáveis e os coeficientes do primeiro membro. Não há por parte de Diofanto preocupação com o modelo sintético e nem mesmo de generalizar resultados, embora na sua obra encontramos também resultados teóricos interessantes e que vieram mesmo a influenciar diversos matemáticos da era moderna, como Fermat, principalmente quando fala de alguns resultados aritméticos.

No princípio da era moderna, concatenado com os trabalhos de Papus e Diofanto, está o trabalho de Viète que reinterpreto esses autores e estabeleceu uma novidade permitindo avançar consideravelmente na busca de uma nova Ciência: a análise algébrica.

## 2.4 A arte analítica de Viète

Os trabalhos de Viète são reflexos da nova concepção de Ciência do fim do século XVI e princípio do século XVII. Viète tinha um interesse especial pela cosmografia e pela Astronomia. Klein (1963, p. 151) afirma isso.

A *Aritmética* de Diofanto está refletida na principal obra de Viète: *Isagoge in artem analyticam* (Introdução a arte analítica). Outro autor visivelmente inspirador para Viète é Papus de Alexandria. Já na abertura da *Isagoge* a análise e síntese é citada, com alguma novidade, interpretada como a arte analítica, e é estabelecida na base de seu sistema, evidenciando assim a íntima relação com a obra de Papus. Começa estabelecendo as definições básicas de sua nova arte:

Em Matemática existe um caminho certo para buscar a verdade, um caminho que Platão é dito o primeiro a ter descoberto, e que foi chamado “análise” por Theon<sup>42</sup> e foi definida por ele como “tomando a coisa procurada como concedida e procedendo por meio do que segue para uma verdade que é incontestável; então, por outro lado, a “síntese” é “tomando a coisa que é concedida e procedendo por meio do que segue para a conclusão e compreensão da coisa procurada”. (KLEIN, 1963, p. 320-tradução nossa)

---

<sup>42</sup> Theon de Alexandria(335? – 405? D. C.), pai de Hypatia. Autorizou uma edição de *Os Elementos* de Euclides incluindo a definição do método de análise e síntese que não foi escrita por Euclides, mas provavelmente, foi inserida por escritores posteriores que copiaram de outros textos antigos da época de Euclides.

A semelhança com o texto de Papus, nessa citação, é nítida e não carece de maiores comentários.

Viète, em seguida, nos diz que os antigos dividiram a análise em duas, a zetética e a porística, e que seria apropriado introduzir uma terceira espécie, a análise rética ou exegetica. Nisso introduz uma novidade à interpretação grega:

[...] de modo que existe uma arte zetética pela qual é encontrada a equação ou proporção entre a magnitude que está sendo procurada e aquelas que são dadas; uma arte porística pela qual da equação ou proporção a verdade do teorema configurado é investigada, e uma arte exegetica pela qual da equação ou proporção configurada será produzida a própria magnitude que está sendo procurada. E então, toda a arte analítica triplicada, reinvidica para si mesmo este ofício, pode ser definida como a Ciência de encontrar corretamente em Matemática. Agora o que verdadeiramente pertence à arte zetética é estabelecido pela arte da lógica através dos silogismos e entimemas, os fundamentos das quais são aquelas estipulações(símbolos) apropriadas pelas quais equações e proporções são construídas, e tais estipulações devem ser derivadas das noções comuns assim como dos teoremas que são demonstrados pelo poder da própria análise. Na arte zetética, contudo, a forma de proceder é peculiar a própria arte, tanto quanto a arte zetética não emprega sua lógica sobre números – o que foi o aborrecimento dos antigos analistas – mas usa sua lógica por uma logística que em uma nova forma tem a ver com espécies. Essa logística é muito mais eficaz e poderosa do que aquela numérica para comparar magnitudes com uma outra em equações, uma vez que a lei de homogeneidade tenha sido estabelecida; assim fica configurado para tal propósito uma série ou escala, consagrada pelo costume, de magnitudes ascendentes ou descendentes pela própria natureza delas, gênero a gênero, pela qual escala os graus e gêneros de magnitudes em equações podem ser designados e distinguidos. (KLEIN, 1963, p. 322-tradução nossa).

A zetética pretende então traduzir o problema, aritmético ou geométrico, à linguagem Matemática, isto é, em uma ou mais equações, em uma ou mais variáveis. Para compor uma equação ou uma proporção estipulará o conhecido e o não conhecido no problema dado, por meio da sua simbologia. Usando a lei de homogeneidade, que pressupõe ainda um apego a questão da dimensionalidade dos gregos, escreve todas as potências adequadamente ordenadas. Podemos comparar somente termos homogêneos. Assim, em uma equação, os monômios que a compõem devem ter os mesmos graus. Isto quer dizer que os monômios compondo uma equação devem ser todos da mesma espécie, conforme explicação abaixo. A exegetica, por sua vez, é a transformação, a partir da

proporção ou equação configurada, buscando definir a solução do problema. A arte porística, por fim, é a fase intermediária do processo analítico e envolve técnicas de transformar igualdades e proporcionalidades algébricas.

Viète estabelece as regras governando as equações e as proporções, que são as mesmas encontradas em *Os Elementos*. São propriedades básicas sobre como operar com equações e proporções, como as que conhecemos hoje.

O sistema formal de Viète tem algumas características importantes. A lei da homogeneidade fala sobre os graus e os gêneros que são comparados como a suprema e perpétua lei das equações e proporções que será, em Viète, uma tentativa de superação do obstáculo dimensional dos antigos geômetras gregos e é inspirada no produto de magnitudes geométricas como designado pelos gregos que diziam que o produto de dois segmentos dava uma área, o produto de um segmento e uma área dava um volume. Em resumo, somente magnitudes de mesma espécie, isto é de mesma dimensão, podem ser adicionadas, subtraídas (a menor da maior) e comparadas. Viète generaliza a idéia introduzindo dimensões superiores a três. Assim, dentro de uma escala de magnitudes, existe o elemento chamado lado ou raiz que ao ser multiplicado por ele mesmo gera magnitudes de todas as dimensões dentro da escala, ou seja, podemos enumerar as dimensões como graus ou potências sucessivas da raiz. Dentro de uma escala de magnitudes, duas magnitudes quaisquer podem ser multiplicadas obtendo uma magnitude cuja dimensão é a soma das dimensões das magnitudes envolvidas no produto. A divisão de uma magnitude por outra magnitude de menor dimensão dá, como quociente, uma magnitude cuja dimensão é a diferença das duas anteriores, a maior menos a menor. A multiplicação é comutativa e distributiva em relação a adição. Duas magnitudes de mesma dimensão podem ser postas em razão, satisfazendo as regras usuais de razão e proporção. As proporções podem ser transformadas em igualdades, por exemplo,  $a/b = c/d$  equivale a  $ad = bc$ . Convém ressaltar que uma razão, em Viète, não é uma magnitude mas uma relação, ou seja, a razão não é vista como uma divisão de elementos da mesma dimensão, mas uma relação que uma tem com a outra, por exemplo, quantas vezes uma cabe dentro da outra. Viète indicou as sucessivas potências das raízes pelos termos quadrados, cubo, quadrado-quadrado, quadrado-cubo, etc. As magnitudes indeterminadas da

mesma dimensão que o lado, que o quadrado, cubo, etc., eram chamadas comprimento ou largura, plano, sólido, plano-plano, plano-sólido, etc.

Ao compor uma equação a lei deve ser levada em conta. Assim, uma equação do tipo  $x^3 + ax = b$ , não tem significado a menos que  $x$  represente algum comprimento,  $a$  represente uma área e  $b$  um volume. Desse modo, os três componentes ficam reduzidos à objetos de mesma espécie, um volume.

Viète aborda os preceitos dos cálculos por espécies, as regras da logística simbólica, afirmando que a logística numérica opera com números e que a logística especiosa opera com espécies ou com “as formas das coisas”, por exemplo, com letras do alfabeto. Em seguida, apresenta os quatro preceitos para se calcular com espécies. São regras básicas para operar com magnitudes e a simbologia apropriada para realizar essas operações. Por exemplo, se  $A$  e  $B$  são magnitudes homogêneas simples, isto é, se indicam um comprimento ou uma largura, então a adição será indicada  $A$  ‘mais’  $B$ . Se correspondem a termos mais altos, são indicados, por exemplo,  $A^2 + B^p$ , ou  $A^3 + B^s$ , e assim sucessivamente e o analista escreve  $+$  para indicar a realização da operação de adição. A subtração será indicada por  $A$  ‘menos’  $B$ , se estão representando simplesmente comprimento ou largura. Para potências mais altas são designadas, por exemplo,  $A^2$  ‘menos’  $B^p$  ( $A^2$  ‘minus’  $B^p$ ),  $A^3$  ‘menos’  $B^s$  ( $A^3$  ‘minus’  $B^s$ ) e assim sucessivamente. Em seguida, Viète apresenta regras básicas para tratar a subtração; por exemplo, se  $B$  mais  $D$  deve ser subtraído de  $A$ , então é o mesmo que  $A$  menos  $B$  menos  $D$ . Outros exemplos são:  $A - (B - D) = A - B + D$ . Viète diz que, geralmente, o analista indica a subtração com o sinal  $-$ . Agora se não é afirmado qual é o termo maior e qual é o menor, então a diferença será designada por  $=$  e, desse modo,  $A^2 = B^p$ , indica a diferença de dois termos desconhecido. Para o sinal de igual Viète usava a palavra *aequatur*.

A multiplicado por  $B$  é indicado por  $A$  em  $B$ ,  $A^2$  multiplicado por  $B$  é indicado  $A^2$  em  $B$ . Viète apresenta a regra de sinal para multiplicação e também explica o produto de potências de mesma base. Por exemplo, se “ $A=B$ ” é multiplicado por “ $D=G$ ” obteremos  $DA - DB - GA + GB$ .

Se queremos dividir  $B$  plano pelo comprimento  $A$ , indicamos  $B^p/A$  que representa a largura que resulta da divisão.  $B^3/A^p$  indica o comprimento que resulta da divisão. Não há nenhuma diferença para binômios e para polinômios. Em seguida, Viète apresenta as

regras básicas para potências de mesma base na divisão, por exemplo  $x^6$  dividido por  $x^2$  produz  $x^4$ , um plano-plano-sólido dividido por um sólido produz um plano-plano, um sólido-sólido dividido por um plano produz um plano-plano. Complementando essas regras, temos as seguintes:  $BA/B$  é igual a  $B$ ,  $BA^p/B$  é igual a  $A^p$ . Se queremos adicionar  $Z$  a  $A^p/B$ , então a soma será  $(A^p + ZB)/B$ . Assim,  $Z^2/G + A^p/B = (GA^p + BZ^2)/BG$ .  $Z - A^p/B = (A^p - ZB)/B$ . E assim sucessivamente.

Ao anunciar as leis da zetética<sup>43</sup>, Viète diz que, na resolução de um problema, usando a Álgebra, a equação pode não ser encontrada imediatamente, a partir das condições dadas. Desse modo, para facilitar a tarefa, devemos atribuir ao termo desconhecido do problema uma variável, estabelecer uma equação entre os termos dados e os termos desconhecidos e aplicar as regras da Álgebra para chegar na solução.

Na investigação de teoremas por meio da arte porística, depois de terminar a zetética, o analista move-se da hipótese à tese, apresentando o teorema obtido a partir de sua descoberta. Embora o teorema tenha sido demonstrado pela zetética ainda será sujeito às regras da síntese, que é considerada a forma lógica de demonstração. Se confirmado, as etapas da análise serão então retraçadas na síntese, mas também no sentido de uma análise, o que é possível graças a nova logística simbólica. Se alguma coisa

---

<sup>43</sup> 1. Se é um comprimento que está sendo procurado e existe uma equação ou proporção oculta nos termos propostos, faça  $x$  ser aquele comprimento. As regras dois e três são similares bastando trocar o comprimento por plano e sólido. 4. Faça as magnitudes que são dadas, serem assimiladas e comparadas (de acordo com a condição dada pelo problema) adicionando, subtraindo, multiplicando, e dividindo, as leis constantes de homogeneidade sendo observadas em todo lugar. No final obteremos a magnitude procurada ou uma potência dela. 5. Na quinta lei Viète estabelece a sua escolha para distinguir e designar variáveis e magnitudes dadas. As variáveis são designadas pelas vogais A, E, I, O, Y, U e as magnitudes dadas serão designadas pelas consoantes, B, G, ou D, ou uma outra consoante qualquer. 6. Produtos compostos totalmente de magnitudes dadas podem ser adicionadas, subtraídas de acordo com o sinal de suas conjunções e podem combinar em um produto que deverá ser o elemento homogêneo da equação e deverá constituir um lado da equação, por exemplo  $x^2 = ab + cd$ . 7. Do mesmo modo  $ax^2 + bx^2$  ou  $ax^2 - bx^2$  são elementos em conjunção que devem ser os elementos homogêneos que serão conjugáveis com  $x^3$ . 8. Em moderna notação, nos garante que, por exemplo,  $x^3 + ax^2 - bx^2 = cd + e$ , onde  $c$  é um plano,  $a$  é comprimento,  $d$  é um comprimento e  $e$  sólido. 9. Podemos transpor os elementos de uma equação. Por exemplo,  $x^3 + ax^2 - bx^2 - cd + ef = g$  podemos escrever  $x^3 + ax^2 - bx^2 = cd - ef + g$ , onde  $c$  e  $e$  são planos e  $g$  um sólido. Após a nona regra vem algumas proposições. Proposição I: uma equação não é modificada por transposição. Por exemplo  $x^2 - d = y^2 - bx$  é equivalente a  $x^2 + bx = y^2 + d$ , basta adicionar a ambos os lados  $d + dx$ , onde  $d$  é um plano. Em seguida Viète apresenta a proposição II, a saber: uma equação não é modificada quando é dividida por uma variável. Por exemplo,  $x^3 + bx^2 = cx$  é equivalente a  $x^2 + bx = c$ . A proposição III é semelhante a anterior e diz que uma equação não é modificada se for dividida, ambos os lados, por uma quantidade conhecida. Por exemplo,  $bx^2 + cx = d$  é equivalente a  $x^2 + cx/b = d/b$ , onde  $c$  é plano e  $d$  é sólido. 12. Dada a equação  $A$  quadrado +  $B$  em  $A$  é igual a  $C$  em  $D + C$  em  $E$ , então  $A$  está para  $C$  como  $D + E$  está para  $A + B$ . 13. Finalmente, quando a equação estiver ordenada, ou a proporção estiver ordenada, então a zetética realizou a sua função. Uma proporção ordenada é do tipo  $(x^2 + ax)/b = c/(d + x)$  que dá a equação  $x^3 + dx^2 + adx + ax^2 = bc$ , isto é, uma proporção ordenada dá uma equação em uma variável.

estranha ocorrer, devemos então apelar à arte porística para depois retornarmos à síntese. Exemplos disso, segundo Viète, podem ser encontrados em Theon, Apolônio, Arquimedes.

A função da arte exegetica ou rética é, segundo Viète, encontrar números se o problema é sobre uma magnitude numérica e encontrar comprimentos, superfícies ou sólidos se a magnitude for geométrica. No último caso, o analista opera como um geômetra, executando a construção retificada, imitando a solução analítica. No outro caso, como um aritmético, opera como um lógico resolvendo qualquer potência que tenha sido apresentada numericamente, simples ou conjugada. Como nem toda solução é válida para certos problemas específicos, o geômetra, como um analista instruído, oculta as soluções incoerentes, apresenta e explica sua solução na forma sintética, como se estivesse pensando simplesmente na demonstração.

#### **2.4.1 Considerações sobre a arte analítica de Viète**

Existem três fatores provenientes dos antigos geômetras gregos que influenciaram a nova concepção de Viète: a simbologia e a técnica diofantina, a primeira, a teoria das proporções de Eudoxo e a concepção de análise e síntese de Papus aplicada a problemas geométricos. Assim, a sua nova concepção então pretendia, como a de Eudoxo, fornecer um método geral tanto para os problemas geométricos, estudados por Papus, quanto para os problemas aritméticos estudados por Diofanto. As dificuldades encontradas por Diofanto são superadas por Viète quando introduz a sua nova concepção simbólica, que o permite generalizar as soluções dos problemas e dos teoremas, além disso, as equações, em relação a notação diofantina, são bastante simplificadas, pois passa a designar a variável e suas potências usando apenas uma variável, pois, Diofanto utilizava diversos símbolos numa mesma equação. Outro avanço de Viète, em relação a Diofanto, é a ampliação do campo de aplicação, as equações são usadas tanto para magnitudes algébricas quanto para magnitudes geométricas, enquanto que em Diofanto o campo de aplicação era quase exclusivamente aritmético. Essa é a grande realização da logística especiosa de Viète, sua linguagem simbólica. Relembramos que o desejo de conceber uma nova Álgebra estava presente também nas idéias de Petrus Ramus, o influente pedagogo francês que escreveu livros textos de Matemática. Com efeito, é de Ramus a tentativa de se fazer uma leitura

algébrica de *Os Elementos* de Euclides. Mas essa ambição foi realizada com sucesso por Viète ao mostrar que sua arte aplica-se tanto a Geometria quanto a Álgebra e, desse modo, pôde transformar a arte resolver problemas matemáticos.

Para finalizar, é importante apresentar um exemplo ilustrativo da arte analítica. Sssim, tomaremos o exemplo de Diofanto, já abordado anteriormente, para mostrar a sua técnica analítica: encontrar dois números cuja soma e cuja diferença fossem dada. Diofanto adota algumas estratégias. Primeiro tomou a soma como 100 e a diferença como 40. Em seguida, chama de  $x$  o menor dos números e o maior será uma variável mais 40 unidades. Em seguida, Diofanto compõe a equação que pode ser escrita na forma  $100 = 2x + 40$ , em nossa simbologia atual. Esse processo que permite Diofanto encontrar a equação é o que Viète chamou de a arte zetética. Na sequência, depois de estabelecer a equação pela arte zetética, Diofanto procede a resolução da equação, primeiro subtraindo 40 de ambos os lados e a equação resultante será  $60 = 2x$ . A partir daí, deduz que a menor variável vale 30 e o maior é 70, isso é a arte exegética de Viète. Finalmente, diz Diofanto para finalizar o problema que dos números exigidos o menor será 30 unidades e o maior será 70 unidades e a prova disso é clara. Em outras palavras, a prova é deixada para o leitor e essa prova, que não foi dada, é a arte porística ou a confirmação de que os números obtidos são realmente válidos.

Viète, sem qualquer sombra de dúvida, ocupa um lugar de destaque dentro do cenário da construção do conhecimento matemático e seu pojetto era de fato inovador, Bos define bem a postura de Viète nesse itinerário:

A inspiração de Viète foi Diofanto, cujo uso de variáveis em *A Aritmética* ele viu como a chave para um método geral de análise, que, ele pensou, tinha sido conhecido pelos matemáticos clássicos e foi perdido, mas poderia ser restaurado. Ele expôs sua reconstrução desta análise em uma série de tratados, juntos formando o que ele chamou O Livro da análise matemática restaurada ou *A nova álgebra* e cujo princípio esboçou no primeiro desses tratados, *Introdução a arte analítica (In artem analyticen isagoge)* de 1591(a quem eu me refiro *Isagoge*). A *Isagoge* fechou com uma afirmação arrogante: Finalmente a arte analítica, dotada, afinal, com suas três formas zetética, porística and exegética, reivindica para si o maior de todos os problemas, que é NÃO DEIXAR NENHUM PROBLEMA SEM RESOLVER. (BOS, 2001, p. 146-tradução nossa)

Seguindo a linha cronológica estabelecida pode-se passar à concepção de Descartes sobre o método de análise e síntese e avaliar sua interpretação nesse itinerário histórico. Assim, pode-se, posteriormente, comparar a concepção cartesiana com a de Viète. De fato, isso se faz necessário, uma vez que Descartes, segundo Sasaki (2003), foi acusado de plagiar a arte analítica de Viète.

## **2.5 A influência da Matemática nas *Regulae ad Directionem Ingenii* – Regras para a Direção do Espírito**

Descartes estudou em uma escola onde Clavius, um erudito, foi muito influente e foi bastante influenciado pelos matemáticos gregos: Euclides, Diofanto e Papus. Convém ressaltar que Clavius estudou as obras traduzidas por Commandino e por Maurolico, dois importantes tradutores daquele período, dentre elas, as obras de Euclides, Arquimedes, Apolônio, Ptolomeu e Papus. Essa influência dos antigos está presente em Descartes, mas ele buscou algo diferente, uma Ciência diferente. Nessa parte do trabalho abordaremos a estrutura da Ciência cartesiana.

Descartes cita, nas *Regras* e em *O Discurso* e nas suas correspondências, os grandes matemáticos gregos: Arquimedes, Papus, Apolônio, Euclides, Diofanto. Neste período, os estudiosos fizeram uma releitura das obras gregas, e dentre as várias questões suscitadas a do método foi a mais importante e Descartes foi também profundamente influenciado por ela. Sem dúvida, ele buscou, por um longo tempo, um método. Na verdade, retomou e transformou o método dos antigos geômetras gregos, assim como fizera Viète.

Devemos compreender agora, de uma forma mais profunda, como Descartes reinterpreto esse método e que novos elementos foram incorporados. Para tanto, é necessário estudar primeiramente as *Regras*, onde o método é apresentado pela primeira vez.

O reconhecimento público de seu pensamento filosófico deu-se, pela primeira vez, no palácio de Paris do Núncio Papal, provavelmente no fim de 1627. Foi a primeira ocasião em que Descartes revelou ao público seu método natural, fundamentado essencialmente por estudos matemáticos. Na reunião, o cardeal de Berulle, o fundador do

oratório Francês, ficou impressionado pelas respostas de Descartes a Chandoux e o incentivou a estabelecer sua própria Filosofia, fundamentada no método natural. Chandoux, um alquimista especializado em metais não preciosos que, mais tarde, foi executado por falsificação, buscava uma nova Filosofia Alquimista e era crítico da fundamentação aristotélica, estabelecida nesse período.

Nas *Regulae ad Directionem Ingenii* obtemos boas informações sobre como o método cartesiano foi formado e em que consistia. Convém ressaltar que o próprio Descartes diz, no fim da Regra XII, que as *Regulae* consistiam em três partes.

Com relação as questões, umas são compreendidas completamente, ainda que se ignore sua solução e destas unicamente trataremos nas doze regras que se seguem; outras, enfim, são compreendidas imperfeitamente, e reservamo-la para as últimas doze regras. Esta divisão, nós a fizemos com um propósito: para não sermos obrigados a dizer algo que pressuponha o conhecimento do que se segue, e para ensinarmos, antes de mais nada, o que pensamos ser prioritário ao cultivo do espírito. (DESCARTES, 2002, p. 116)

Desse modo, para uma interpretação atual, para os conjuntos destas Regras, tem-se: a Parte I é sobre a teoria do conhecimento em geral (Regras I-XII) que pode ser subdividida em três seções. As primeiras quatro regras falam da Ciência em geral e são uma introdução as quatro Regras que vêm logo a seguir. As Regras V, VI, VII, VIII falam sobre o método cartesiano e são consideradas a espinha dorsal da obra. As Regras IX, X, XI, XII pretendem treinar o nosso espírito para que possamos aplicar o método com eficiência. A parte II é sobre Matemática (regra XIII-XXI), mas ficou incompleta, nela Descartes revela como pretende aplicar a metodologia em assuntos matemáticos, mostrando total consciência sobre temas que estavam em voga em sua época. A parte III, sobre Filosofia Natural, nunca foi escrita. As principais idéias da obra serão reunidas, posteriormente, em *O Discurso do Método* e seus três ensaios.

### 2.5.1 As Regras I-IV

A principal meta das *Regulae* é reorganizar as Ciências e estabelecer um método eficiente para buscar o verdadeiro conhecimento. Nelas, o critério mais importante estabelecido por Descartes, que um conhecimento deve satisfazer, para ser admitido como

conhecimento verdadeiro, é a certeza, nesse aspecto, a Matemática é a sua principal fonte de inspiração, pois suas demonstrações gozavam dessa certeza. No que segue se mostra de que forma as idéias Matemáticas o influenciaram.

A primeira regra já adverte sobre a generalidade e a unicidade da concepção científica de Descartes. Propõe que devemos pensar a Ciência de uma forma abrangente, pois acreditava que sua metodologia pudesse ser aplicada à todos os assuntos científicos. Essa noção científica cartesiana era incomum naquele período. Os sábios dedicavam-se ao estudo dos mais variados problemas e a Ciência era dividida por temas, a noção cartesiana pretendia unificá-la:

É preciso, pois, acreditar que de tal modo as Ciências estão todas entrelaçadas entre si, que é muito mais fácil apreendê-las todas ao mesmo tempo do que separá-las umas das outras. Se alguém quiser seriamente investigar a verdade das coisas, não deve escolher alguma Ciência particular, porque todas têm conexão entre si e mútua dependência; mas pense apenas em aumentar a luz natural da razão, não para resolver esta ou aquela dificuldade da escola, e sim para escolher; e bem depressa se maravilhará de haver feito progresso, muito maior que aqueles que se dedicaram a estudos particulares, e, ainda, de haver alcançado não só tudo aquilo que os demais desejavam, como também coisas mais elevadas do que esperavam. (DESCARTES, 2002, p. 74)

A busca pelo método científico era um ideal comum naquele período. Como se descreveu, a *Quaestio* estava envolvida com a questão da metodologia científica e iniciou-se com Piccolomini que insinuou que a Matemática não se enquadrava nos idéias científicos aristotélicos. A *Quaestio* e relacionava-se com o ideal científico que surgia que tinha como fundamento a Matemática. Os defensores da exclusão da Matemática do reino das Ciências aristotélicas eram professores de Filosofia Natural que tinham como base os pressupostos aristotélicos. Assim, a tentativa de excluir a Matemática do reino das Ciências aristotélicas evidencia a tentativa de manter a velha Filosofia Natural aristotélica na linha de frente das questões científica. Mas os resultados obtidos, a partir da fundação da nova concepção baseada na Matemática, praticamente expulsa a metodologia aristotélica de Ciência e introduz métodos matemáticos na base do pensamento científico. Unir as Ciências significa, na passagem citada, muní-las de um único método capaz de ser aplicado a todos os campos de investigação. Diversos cientistas tentaram estabelecer uma tal ferramenta metodológica. Assim como Bacon, Galileu, Descartes e outros, usaram o

método de análise e síntese dos antigos geômetras. É por esse método que Descartes tentará unir as Ciências de seu tempo.

Na Regra II, Descartes começa dizendo que toda Ciência deve ser um conhecimento certo e evidente e que devemos rejeitar todos os conhecimentos duvidosos. Mas, segundo Descartes, somente a Aritmética e a Geometria são redutíveis a essas observações, ou seja, gozam da regra da certeza e que, até agora, os homens têm caminhado sem direção nas questões científicas. Em seguida, compara as duas disciplinas, a dialética ou lógica e a Matemática, como se elas reunissem a regra da certeza. Segundo ele, a dialética segue a tradição medieval e renascentista como método de filosofar e um provável silogismo, exercitando a mente do jovem, estimulando-a com uma certa rivalidade. A emulação ou disputa era uma das características da educação jesuíta que pretendia buscar o aperfeiçoamento do discurso e do convencimento.

Não condenamos por isso aquela maneira de filosofar seguida até agora, nem aquela dos escolásticos – a maquinaria dos silogismos prováveis, tão adequadas às suas disputas –, posto que exercitam e fomentam, por meio de certa emulação, o espírito dos jovens; é muito melhor formá-los com tais opiniões, ainda que pareçam incertas, já que são controvertidas entre eruditos, do que os abandonar livremente a si próprios, pois, enquanto se preocupam em seguir as pegadas de seus mestres, mesmo que alguma vez se afastem da verdade, estarão, entretanto, num caminho mais seguro, pelo menos no sentido de que tenha sido já calculado por outros mais prudentes. (DESCARTES, 2002, p. 76).

Entretanto, ridiculariza a certeza da dialética e elogia a certeza da Matemática. Usando a dialética pode-se não adquirir qualquer conhecimento e até mesmo aumentar o número de dúvidas. A crítica aos dialéticos é tema frequente nas *Regulae* e Descartes declara que a Aritmética e a Geometria são livres de qualquer defeito de falsidade ou incerteza e satisfazem o critério da verdade buscado por ele, afirmando a razão porque essas duas Ciências são mais certas do que as outras. Toda Ciência, para ser reorganizada, deve conquistar o mesmo plano de certeza que as demonstrações da Matemática pura, ou seja, pretende estabelecer, para as outras Ciências, o mesmo grau de certeza. Para alcançá-lo propõe treinar nossa mente ou, mais precisamente, nossa inteligência, para formar julgamentos verdadeiros.

[...]entre as disciplinas conhecidas só a Aritmética e a Geometria estão isentas de todo o engano ou incerteza, vamos examinar com maior cuidado a razão disto, observando que podemos chegar ao conhecimento das coisas por dois caminhos, a saber a experiência e a dedução. Além disso, deve-se notar que as experiências das coisas são, com frequência, enganadoras, mas a dedução, ou seja, a simples inferência de uma coisa a partir de outra, pode, sem dúvida, ser omitida se não é vista, mas nunca pode ser malfeita pelo entendimento, ainda o menos racional. (DESCARTES, 2002, p. 76)

Descartes pretende transportar o método de demonstrar da Geometria e da Álgebra para outros domínios científicos, pois sabe que os primeiros princípios das Ciências Matemáticas são claros e evidentes e, por isso, a cadeia de inferência das demonstrações Matemáticas são sempre verdadeiras. Ele pretende prover sua metodologia científica com algo equivalente. O problema então é garantir premissas claras e evidentes para que o processo de inferência nos conduza a um conhecimento indubitável a partir delas. A experiência proverá nossa intuição com os primeiros princípios e a dedução nos conduzirá a novos conhecimento. Mas a condução a novos conhecimentos, conforme esclarecimentos posteriores, será realizada usando-se o método analítico. O processo não é partir das premissas verdadeiras ou primeiros princípios e chegar em novos conhecimentos, mas, a partir de um problema dado, chegar nesses princípios e, então, revertendo os passos, sintetizar o resultado.

Descartes, na sequência dessa Regra, fala sobre o problema das premissas verdadeiras, voltando a tecer críticas ao conhecimento através da dialética, o erro dos dialéticos é partir de premissas obtidas de experiências mal compreendidas e, a partir daí, chega-se a resultados pouco confiáveis:

Para conseguir isto, parece-me que são pouco úteis aqueles vínculos com que os dialéticos pensam governar a razão humana; se bem que possam servir para outros casos. Com efeito, todo erro em que podem cair os homens (não me refiro aos tolos) não provém nunca de uma inferência errada, mas apenas de se partir de certas experiências pouco compreendidas, ou, possivelmente, porque se emitiram juízos temerários e sem fundamento. (DESCARTES, 2002, p. 76-77).

Esses princípios iniciais devem ser estabelecidos tão claramente quantos os primeiros princípios da Geometria e da Álgebra dos antigos, essa última é uma alusão a Aritmética. O que Descartes propõe então é um método baseado nas demonstrações Matemáticas, ou seja, o modelo científico será baseado na certeza das demonstrações

Matemáticas e seguirá uma cadeia análoga, agora adotado para outras áreas, além da Matemática. A Álgebra e a Geometria estão livres de engano, pois o seu objeto de estudo é livre da experiência, são os mais puros e simples possíveis, um conjunto de conseqüências deduzidas pelo raciocínio lógico a partir de postulados e axiomas fundamentais. Essas Ciências têm, para Descartes, o objetivo buscado por ele, suas estruturas lógico-formais impedem o erro.

De tudo o que procede, a conclusão que se deve tirar é que não se deve aprender apenas a aritmética e a geometria, como também os que buscam o reto caminho da verdade não se devem ocupar de nenhum objeto acerca do qual não possam ter uma certeza igual à das demonstrações da aritmética e da geometria. (DESCARTES, 2002, p. 77)

Assim, passará a descrever como obter os primeiros princípios de modo claro e distinto. Na Regra III, analisa o ato de nosso intelecto por meio do qual nos tornamos hábeis para chegar ao conhecimento verdadeiro e não em prováveis conjecturas, admite somente dois atos intelectuais para tal fim: intuição e dedução.

Para não cair desde já no mesmo erro, vamos enumerar aqui todos os atos de nossos entendimentos por meio dos quais podemos chegar ao conhecimento das coisas, sem receio de engano; não se admitem mais que dois, a saber, a intuição e a dedução. (DESCARTES, 2002, p. 78)

Por meio da intuição, segundo Descartes, todos podem, mentalmente, intuir que existem, que estão pensando, que um triângulo é limitado por apenas três linhas, e uma esfera por uma simples superfície e outras coisas semelhantes. O ato de intuir permitirá a Descartes estabelecer os primeiros princípios. Mas o que significa intuir dentro desse contexto cartesiano?

Entendo por intuição, não o testemunho flutuante dos sentidos, nem o juízo enganador de uma imaginação de composições inadequadas, mas o conceito do espírito puro e atento, tão fácil e distinto, que não fique absolutamente dúvida alguma a respeito daquilo que compreendemos, ou o que é a mesma coisa, o conceito do espírito puro e atento, sem dúvida possível, que nasce apenas da luz da razão, e que, por ser mais simples, é mais certo que a mesma dedução, a qual, todavia, não pode ser malfeita pelo homem, conforme vimos acima. (DESCARTES, 2002, 78-9)

Desse modo, tem-se aqui a base da teoria da aprendizagem cartesiana. Descartes fornece um exemplo matemático para esclarecer a passagem. Se sabemos que  $2+2=3+1$  é preciso intuir que  $2+2=4$  e  $3+1=4$  e que dessas segue que  $2+2=3+1$ . Notemos que, nesse simples exemplo, podemos ver o raciocínio cartesiano para obtermos novos conhecimentos. Se desejamos provar que  $2+2=3+1$ , decompos o problema em  $2+2=4$  e  $3+1=4$  e é preciso ter certeza intuitiva dessas igualdades, saber que são verdades indubitáveis e, a partir daí, deduzir, pelo princípio que diz que coisas iguais a uma mesma coisa são iguais entre si, que  $2+2=3+1$ . A certeza da intuição será necessariamente exigida para o estabelecimento dos primeiros princípios, mas também para qualquer cadeia de silogismos.

Mas o que garante que ao intuir os objetos a nossa volta estamos, de fato, extraindo primeiros princípios inabaláveis? Por exemplo, ao observar o sol, ao entardecer, como saber se ele está muito distante de um morro, pois a impressão que temos é que são dois objetos próximos. Isso é resolvido, segundo Descartes, pela intervenção da razão. Assim, devemos verificar o fato, por exemplo, caminhar até a morro e constatar o fato. A partir daí podemos estabelecer um primeiro princípio, claro e evidente. Mas resta algumas dúvidas, pois existem também as noções que se estabelecem em nossas mentes pela imposição cultural, como é o caso do conceito de Deus, amor, verdade, Matemática, entre outros. Como posso garantir que o que penso sobre essas entidades é verdadeiro? Para Descartes, todo problema pode ser decomposto pela luz da razão. A concepção de Deus, por exemplo, é fundamental para Descartes, o seu ponto de partida. Mas a explicação de um fato requer concepções a partir de uma visão de alguém inserido numa determinada cultura. Talvez, foi por isso que Descartes procurou viajar, conhecer novas culturas, para desenvolver bem a sua noção de luz natural da razão. Mas, as suas viagens estavam todas dentro dos limites da cultura européia, assim podemos considerar que Descartes pressupõe, talvez inconscientemente, que o ato de intuir de sua cultura é o que deve ser adotado como básico. Devemos salientar que o processo de obter os primeiros princípios por intuição não é posteriormente examinado no texto das *Regulae*.

Por dedução Descartes descreve o processo pelo qual entendemos a inferência de alguma coisa como seguindo necessariamente de algumas outras proposições que são conhecidas com certeza. O modelo de Descartes do qual os dois conceitos são derivados é

a prova sintética da Matemática, ou seja, a partir dos primeiros princípios devemos estabelecer uma cadeia de silogismos, onde cada etapa é deduzida da anterior. Para avançar, na seqüência, devemos ter certeza da etapa anterior, como uma demonstração geométrica. Mas não devemos perder de vista que essa dedução não é a primeira parte do processo, antes devemos do problema dado tentar determinar esses primeiros princípios.

Sobre os dois processos Descartes faz a seguinte observação:

Mas assim se procede porque muitas coisas se conhecem com certeza, ainda que não sejam em si evidentes, contanto que sejam deduzidas de princípios verdadeiros e já conhecidos com certeza, por um movimento contínuo e ininterrupto do pensamento, que intui nitidamente cada coisa particular. De outro modo, não saberíamos que o último elo de uma cadeia está em conexão com o primeiro, ainda que não apreendamos intuitivamente, com um só golpe de vista, todos os elos intermediários dos quais depende aquela conexão; basta que os tenhamos percorrido sucessivamente e nos recordemos que, desde o primeiro até o último, cada um está unido a seu vizinho imediato. Distinguimos portanto, aqui, a intuição intelectual da dedução certa pelo fato de que nesta se concebe certo movimento ou sucessão, mas na outra, não; além disso, para a dedução não é necessária a evidência atual, ao passo que a intuição recebe melhor da memória sua certeza; de onde resulta que se pode dizer que aquelas proposições que se seguem imediatamente dos primeiros princípios são conhecidas por um ponto de vista diferente, ora por intuição, ora por dedução; mas os princípios só se conhecem por intuição e, ao contrário, as conclusões remotas unicamente por dedução. (DESCARTES, 2002, p. 79-80).

Nesta citação, percebemos que Descartes tenta esclarecer o papel das duas operações mentais. A dedução conduz a novos conhecimentos, a partir de premissas verdadeiras e, essas, por sua vez, são obtidas por intuição. A dedução é uma cadeia silogística, que, por meio dela, conduz-se a premissas maiores. A intuição atua também nessas cadeias silogísticas, mas sua função é, em cada etapa, averiguar os novos princípios obtidos, gastando neles o tempo que for necessário. Se forem princípios aceitáveis devemos seguir a seqüência e, se não, devemos buscar alternativas. Mas um fato, uma vez deduzido e absorvido por nossas mentes, e que pode ser entendido de uma só vez, passará a ser considerado um fato intuído, um primeiro princípio.

Descartes define o que significa o método na regra IV. Começa, para justificá-lo, dizendo que o conhecimento obtido, até agora, tem se dado por sorte, sem método. Em seguida, afirma o que entende por método.

Entendo por método regras certas e fáceis, graças às quais o que se observa exatamente não tomará nunca o falso por verdadeiro e chegará, sem gastar esforço inutilmente, ao conhecimento verdadeiro de tudo aquilo que seja capaz. (DESCARTES, 2002, p. 81)

O que chama a atenção na descrição dada é a preocupação com a simplicidade que o método deve ter. Mas essa simplicidade deve garantir a veracidade do conhecimento alcançado, bastando, para tanto, que não se tome princípios falsos. Essa concepção de simplicidade metodológica será incorporada nos quatro preceitos de seu método e será novamente anunciada em *O Discurso do Método*.

Para não tomar o falso por verdadeiro e chegar ao conhecimento genuíno, é necessário então atentar para os dois preceitos fundamentais de nossas mentes. De fato, é somente pela intuição e pela dedução que o conhecimento verdadeiro pode ser alcançado.

Mas se o método nos dá uma explicação perfeita do uso da intuição intelectual para não cairmos no erro contrário à verdade, e do meio de encontrar deduções para chegar ao conhecimento de todas as coisas, nada mais se requer, parece-me, para que seja completo; pois não se pode obter Ciência alguma, como já disse, se não é por intuição ou dedução. Não se pode estender o método até ensinar como se deve fazer essas operações, porque são as mais simples e primeiras de todas, de sorte que, se nosso entendimento não puder utilizar-se delas, não poderia compreender nenhum preceito, por fácil que fosse, do mesmo método. Quanto às outras operações do espírito que a dialética pretende dirigir com a ajuda destas primeiras, são aqui inúteis, ou melhor, devem contar-se entre os obstáculos, porque nada pode acrescentar-se à pura luz da razão, que de alguma maneira não a obscureça. (DESCARTES, 2002, p. 81).

Descartes, na seqüência, acusa os antigos geômetras gregos de negligenciarem o método de resolver problemas, não o comunicando a posteridade. Alias, diga-se de passagem, no fim do século XVI e princípio do século XVII, acreditava-se que os antigos esconderam seus métodos e foi comum, naquele período, entre os filósofos, buscar redescobri-los.

Segundo Descartes, em seus dias, começa a florescer uma espécie de Álgebra, que faz para os números o que a análise dos antigos fazia para figuras e diz estar exibindo uma disciplina que deve conter os primeiros rudimentos da razão humana que, se desenvolvida, poderia abranger todas as áreas do conhecimento. Nesse ponto, Descartes

começa a incorporar o elemento fundamental de sua Ciência, pensando na generalidade de seu método, inspira-se no método de análise e síntese dos antigos geômetras gregos. Ele continua acrescentando em seu discurso a inutilidade e a superficialidade da Aritmética e da Geometria que chegara até ele e de suas demonstrações, mas, ao mesmo tempo reconhece a necessidade das demonstrações Matemáticas para superar as desordens. O que está aí criticado nas Ciências Matemáticas é o seu restrito campo de aplicação. Ele diz que os antigos conheceram uma Matemática bem diferente da de seu tempo. Certamente, essa referência diz respeito à metodologia que os gregos utilizavam para descobrir as demonstrações apropriadas de seu teoremas e para resolverem os seus problemas geométricos. Os geômetras antigos, depois de descobrirem a demonstração de um teorema ou de resolver algum problema, apresentavam o resultado sinteticamente, não mencionando o processo criativo.

Estou persuadido, porém, que as primeiras sementes da verdade depositadas pela natureza no espírito humano, e por nós abafadas em razão de lermos e ouvirmos cotidianamente tantos e tão diversos erros, tiveram tanta força naquela rude e simples Antigüidade, que, pela mesma luz intelectual que lhes fazia ver que se deve preferir a virtude ao prazer, o honesto ao útil, se bem que ignorassem porque era assim, também chegaram a conhecer as idéias verdadeiras da Filosofia e da Matemática, ainda que não tivessem podido alcançar perfeitamente essas Ciências. Parece-me, em verdade, que alguns vestígios desta verdadeira Matemática se vêem em Pappus e Diofanto [*sic*], os quais viveram, ainda que não nos primeiros tempos, pelo menos muitos séculos antes de nossa era. Inclino-me a crer que depois os próprios escritores a suprimiram por certa astúcia perniciosa, pois, assim como é certo que o fizeram muitos artifícios em relação a seus inventos, assim eles recearam, talvez, que por causa da sua grande facilidade e simplicidade, ficasse diminuída depois de divulgada e, para que os admirássemos, preferiram apresentar-nos, em seu lugar, como produtos de seu método, algumas verdades estéreis demonstradas com um sutil rigor lógico, a nos ensinar o próprio método que faria desaparecer por completo a admiração. Há, finalmente, alguns homens de grande talento que neste século se têm esforçado por ressuscitar esta arte, pois este método que com o nome estrangeiro chamam Álgebra não é outra coisa senão que possa desembaraçar das múltiplas cifras e inexplicáveis figuras de que esta sobrecarrega, a fim de que não lhe faltem aquela clareza e facilidade que supomos que devam existir na verdadeira Matemática. (DESCARTES, 2002, p. 83-84).

Finalmente, ainda na regra IV, Descartes anuncia a sua Matemática universal:

[...] E, refletindo mais atentamente, pareceu-me óbvio relacionar com a Matemática tudo aquilo em que apenas se examinam a ordem e a medida, não importando se tal medida se há de buscar em números, figuras, astros, sons, ou qualquer outro objeto, e portanto que deve haver uma Ciência geral que explique tudo aquilo que se pode perguntar acerca da ordem e da medida, não agregado a nenhuma matéria especial, e que essa Ciência, não com vocábulo caprichosamente adotado, mas antigo e aceito pelo uso, é chamada Matemática universal, porque nela se encerra tudo aquilo pelo que outras Ciências se chamam partes da Matemática. A Matemática universal suplanta em facilidade e utilidade todas as outras Ciências que lhe estão subordinadas; isto se vê claramente pelo fato de conter os mesmos objetos que estas e, ademais, muitos outros; e também porque suas dificuldades, se é que contêm algumas, existem igualmente nestas Ciências, com outras ainda provenientes dos seus objetos particulares, que ela não tem. (DESCARTES, 2002, p. 84)

Nessa passagem, Descartes demonstra o quanto deseja que sua metodologia seja estendida às Ciências que tem como fundamento a Matemática. A passagem mostra a forte influência da Matemática sobre a Ciência cartesiana. Assim, tal concepção está em consonância com os ideais de Clavius. Pois, como vimos, Clavius elevou o status da Matemática, estabelecendo-a como a essência para que se possa entender as outras Ciências, para evitar os erros nas Ciências e, até mesmo, para compreender outras áreas como a Filosofia. Isto também era um fundamento da Matemática medieval. A Matemática era ensinada nas instituições medievais para permitir um melhor entendimento das Ciências e das Filosofias. Na época de Descartes, existia a intenção de explicar o mundo físico via Matemática e Descartes foi um dos que incorporou esse procedimento em sua Filosofia Natural. Nos trabalhos posteriores, efetivamente, incorpora esse ideal, exemplo disso é *O Discurso do Método*, onde começa a estabelecer os princípios da sua Metafísica por essa via.

É necessário fazer algumas observações sobre o que se expôs até o parágrafo anterior, relativo sobre as Regras cartesianas. Com efeito, Descartes pretende buscar o conhecimento científico inspirado na cultura Matemática, mas não seguirá aqueles princípios euclidianos, isto é, como base lógica para erguer, com segurança, sua Geometria, adotou Euclides três grupos, bem distintos de proposições: as definições, os axiomas e os postulados, constrói uma Geometria plana e espacial usando a idéia cartesiana, Suponhamos, que usando a idéia cartesiana, desejamos explicar um certo problema de qualquer natureza. Então se deve supô-lo resolvido e, assim, se deve desconstruí-lo, reduzindo-o a proposições

mais simples até chegarmos numa proposição que se aceita como verdadeira, isto é, algo aceito por nossa intuição. Então, a partir desses primeiros princípios, retrocedendo essas etapas, usando a dedução, chegar-se-á na explicação do problema.

As quatro regras a seguir esclarecem com mais eficácia a re-interpretação do método de análise e síntese dos antigos por Descartes.

### **2.5.2. O método de análise e síntese nas *Regras***

As Regras V, VI, VII e VIII podem ser consideradas, em conjunto, os pontos fundamentais para se entender como o método de análise e síntese foi interpretado por Descartes. Nelas, podemos detectar a forte presença do método de análise e síntese e compreender como Descartes aplica-o, estudando um exemplo dado na obra as *Regras*, o da linha anaclástica, que consiste em determinar uma curva capaz de refletir todos os raios paralelos ao eixo da curva para um único ponto.

A Regra V anuncia que se reduzirmos gradualmente as proposições complicadas e obscuras a proposições mais simples, etapa por etapa, e depois partindo da intuição das mais simples, tentar ascender, pelas mesmas etapas, ao conhecimento de todas as coisas, poderemos obter o conhecimento verdadeiro. Uma primeira análise da Regra V já indica uma semelhança com a descrição do método de análise e síntese. Nela, podemos detectar a característica regressiva da análise e o seu reverso, a síntese. Nesta, Descartes compara seu método ao fio de Ariadne que ajudou Teseu a sair do labirinto. Dividir o problema gradualmente, em proposições mais simples, nos dá a mesma impressão do raciocínio empregado na Matemática, descrita pelos geômetras antigos, por exemplo, quando se aplica a análise, assumindo o problema como resolvido e buscando por antecedentes chegar em algo aceito pela intuição, no caso da Matemática isto pode ser um postulado ou um axioma, no caso da Ciência cartesiana, um primeiro princípio claro e evidente. Essa é a etapa analítica do processo. A segunda etapa é a sintética que indica que se deve tomar o caminho inverso da análise para recompor a demonstração do problema.

Na parte analítica, devemos, como Teseu fez para não se perder no labirinto, ir penetrando nas possibilidades proporcionadas pela consideração do problema dado, mas ao ir penetrando nessas possibilidades, para não se perder no caminho, deve-se anotar as

novas passagens (possibilidades) que surgem até chegar ao centro do labirinto, o primeiro princípio. Para retornar basta seguir o caminho inverso, a partir desse primeiro princípio. O fio de Ariadne serve então para não se perder no caminho, isto é, a enumeração completa desse processo. A etapa sintética seguirá, portanto, o caminho inverso, isto é, o caminho seguido por Teseu para sair labirinto

Desse modo, não se tem uma idéia muito precisa do método cartesiano, pois a prática pode ser bem diferente do discurso, mas a medida que Descartes explica as Regras VI, VII e VIII e, finalmente, aplica a metodologia na resolução de dois problemas ilustrativos, o método se torna mais compreensível e se percebe, com mais clareza, o seu significado e a sua semelhança com o método geométrico dos antigos geômetras.

O método adotado por Descartes pode agora ser melhor caracterizado. Pois trata-se de um único método concebido em duas partes. A primeira parte é o procedimento heurístico, a busca da verdade por meio da análise, decompõe-se o problema em etapas necessárias e reduz essa etapa para premissas cada vez mais simples, até obter uma proposição, de fato, conhecida como verdadeira, um princípio intuitivamente certo. Desse modo, tem-se a síntese, revertendo as etapas analíticas, é a solução propriamente dita, ou a construção. A síntese também serve para confirmar os passos da análise.

A Regra VI, segundo Descartes, é a mais importante do método. Em suas palavras, contém o segredo do método e se a Regra anterior nos diz que se deve decompor o problema para depois reconstruí-lo, o fundamento dessa última é ensinar como obter os primeiros princípios. Assim, a Regra propõe que se deve, na busca dos primeiros princípios, distinguir as coisas mais simples das mais complicadas. O critério de identificação é baseado na concepção do mais absoluto. Numa série há os termos mais absolutos e há os relativos. O absoluto é, na decomposição do problema investigado, o último estágio, quando se chega em algo do qual tenho certeza absoluta da sua veracidade. O absoluto é portanto o que causa, o mais simples, independente, universal, uno, igual, semelhante, reto, etc., para usar os termos do próprio Descartes. Mas não se deve esquecer que o absoluto, em uma questão, pode ser relativo em uma outra. O relativo, por sua vez, é o que participa da decomposição, mas diferentemente do absoluto, não permite ainda concluir a proposição investigada. Não é, portanto, um primeiro princípio e não é ainda uma verdade clara e distinta. É, como diz Descartes, o que é dependente, composto,

particular, múltiplo, desigual, dissemelhante, oblíquo, etc. A Regra pretende então ensinar a identificar essas relações e observar a ordem natural para se, partindo da questão proposta, chegar na mais absoluta na série, o que praticamente resolve a questão. Devemos, como escreve Descartes nessa Regra, buscar-se, com todo cuidado e zelo, em todas as coisas, o que há de mais absoluto. Essa é a essência da Regra

Assim, Deve-se, na busca dos mais absolutos, notar que o conceito pode ser relativo, quando depende da categoria de problema que se está trabalhando. De qualquer modo, a causa é o que há de mais absoluto na série, ou seja, é a causa que se deve buscar e assim, depois de descobri-la, deve-se partir dessa para o efeito.

Descartes sabe que existem princípios simples que são obtidos pela experiência ou que são inatos. Esses, uma vez analisados, com muito cuidado, é que nos permitirão conhecer os outros, por meio da dedução. Esse processo de passar do conhecimento das proposições mais simples para as mais complexas deve ser enumerado, para que se possa visualizar o quanto as proposições, na série, estão mais ou menos afastadas do mais absoluto.

Ainda, no exame da questão, não se deve iniciar pelas mais difíceis, mas antes, tomar todas sem distinção. Desse modo, há algumas questões que aparecem espontaneamente, e é a partir dessas que se deve começar para depois ascender a outras mais complexas. Nesse processo, encontra-se questões de todas as naturezas, mais difíceis, mais fáceis. É preciso, portanto, fazer a escolha adequada, essa escolha vai depender do tipo de questão que se está querendo resolver, ou demonstrar, ou descobrir a verdade. Para esclarecer melhor, Descartes propõe o exemplo de uma progressão geométrica ou proporção contínua. No exemplo dado, ao determinar uma proporção contínua, a partir do número três, cuja razão é dois, obtem-se a proporção 3, 6, 12, 24, etc. A lição que se deve retirar desse exemplo é a conceituação que se pode retirar da questão para aplicá-la em outras questões da Matemática. Ou seja, as noções simples, permitem-nos chegar em um conhecimento mais complexo. Ainda explorando esse exemplo, Descartes esclarece que é mais fácil, dadas as grandezas 3 e 6, obter uma terceira em proporção contínua do que a partir das grandezas 3 e 12 obter a média proporcional 6. Uma questão mais difícil do que as anteriores seria encontrar um dos meios proporcionais entre 3 e 24. O grau de dificuldade aumentaria, ainda mais, se fosse proposto encontrar uma das três médias

proporcionais entre 3 e 48. Mas essas dificuldades podem ser reduzidas para questões mais simples. Por exemplo, poderia encontrar a única média entre 3 e 48 que é 12, e assim obter as demais.

Há de se considerar também que, na busca de um questão, existem, às vezes, várias vias, umas mais fáceis do que outras, o mesmo exemplo anterior é sugerido por Descartes. Assim, ele escreve, é muito fácil obter a proporção contínua 3, 6, 12 e 24 a partir de dois deles, 3 e 6 por exemplo, e essa dificuldade é examinada diretamente e se nos propusermos a encontrá-la a partir de dois alternados, então a dificuldade é da primeira forma. Se tentarmos encontrá-la a partir dos dois extremos a dificuldade é da segunda forma.

O propósito desses exemplos é mostrar que algumas dificuldades são obtidas diretamente e outras não, mas as que não são obtidas diretamente passam a sê-las, bastando refletir atentamente o que se investiga.

Depois de tudo isto, observo também como se pode buscar o conhecimento de uma mesma coisa por caminhos diferentes, dos quais um é mais difícil e obscuro que o outro. Assim, para encontrar estes quatro números em proporção contínua, 3, 6, 12, 24, se se dão dois dados seguidos, a saber, 3 e 6, ou 6 e 12, ou 12 e 24, a fim de encontrar por eles os demais, a coisa será muito fácil de fazer; então diremos que a proporção que se há de achar é examinada diretamente. Mas se supusermos dois alternados, 3 e 12, ou 6 e 24, para por eles encontrar os demais, então diremos que a dificuldade é examinada da primeira forma. O mesmo ocorre se se supõe os dois extremos, a saber, 3 e 24, para deduzir deles os intermediários, 6 e 12. A dificuldade será então examinada indiretamente da segunda maneira. Desse modo, poderia ir mais longe e deduzir muitas outras coisas, só deste exemplo, mas as expostas bastarão para que o leitor compreenda o que pretendo dizer, quando declaro que uma proporção está deduzida direta ou indiretamente, e saiba que, graças ao conhecimento das coisas mais fáceis e que se conhecem em primeiro lugar, podem ser descobertas muitas coisas ainda nas outras disciplinas por aquele que reflete atentamente e investiga com argúcia. (DESCARTES, 2002, p. 89-90)

Na Regra VII, Descartes propõe que somente através de um movimento contínuo e ininterrupto do pensamento podemos perceber a totalidade do objeto estudado. Essa Regra complementa as demais, pois pretende recapitular e rever os procedimentos realizados nas Regras V e VI. As três, em conjunto, definem a estrutura fundamental do método.

O cumprimento do que aqui se propõe é necessário para admitir como certas aquelas verdades que, segundo dissemos mais acima, não se deduzem imediatamente dos primeiros princípios e em si mesmos conhecidos. Às vezes se faz esta dedução por um encadeamento tão cheio de conseqüências, que quando chegamos a elas não recordamos facilmente todo o caminho que até aí nos conduziu; e por isso dizemos que é preciso remediar a fraqueza da memória por um movimento contínuo do pensamento. (DESCARTES, 2002, p. 90).

Na citação acima “Remediar a fraqueza da memória por um movimento contínuo do pensamento” consiste em passar pelas cadeias estabelecidas, quantas vezes for necessário, para que, no final, tenhamos uma apreensão total da questão. Ao apreender intuitivamente cada objeto particular da cadeia e passar imediatamente para outros seremos capazes de absorver a questão. Depois que a recapitulamos várias vezes, passará a ser então clara em nossas mentes. Em outras palavras, a Regra pretende que muitos processos dedutivos passem a ser intuitivo para nós, o fio de Ariadne.

Essa Regra deve ser uma enumeração e uma intuição tão cuidadosa sobre uma problemática que nada ficará por descobrir sobre a questão proposta exaurindo todas as possibilidades da questão.

Caso não se consiga reduzir uma questão a uma intuição simples deve-se então enumerá-la, quando se percorre a cadeia estabelecida várias vezes e se consegue, logo a seguir, entender toda a questão, então se pode dizer que a questão foi reduzida a uma intuição. Se as cadeias são muito longas e não conseguimos intuir, em um só golpe toda a questão, então recorreremos a enumeração que garantirá a percepção dos elos estabelecidos.

A tarefa da enumeração também é estabelecer uma boa ordem na questão. Assim, há algumas questões que a ordem é estabelecida linearmente, enquanto há outras que não. Desse modo, a enumeração pode ser, às vezes, em duplo sentido. Por exemplo, na sequência que vai do problema dado para o termo mais absoluto podemos encontrar, em alguma

passagem, um obstáculo que impede aquela trajetória dedutiva linear. Nesse instante, devemos mudar a linha de raciocínio e tentar outros caminhos, em outras direções. É como se estivéssemos caminhando em linha reta e encontramos pelo caminho um obstáculo que impedisse a passagem. Devemos buscar alternativas e procurar outras formas de transpor o obstáculo. Nesse sentido, a enumeração poderá se dar tanto no sentido horizontal quanto no sentido vertical.

Na Regra VIII, Descartes proporá um exemplo que permite entendermos melhor o significado não só da Regra VII, mas o propósito das Regras V, VI e VII, que, conforme ele, não podem ser olhadas separadamente, ou seja, a descoberta se dá pela atuação das três juntas. Descartes escreve que só devemos ir além quando tivermos uma sólida apreensão intuitiva da proposição anterior. Isso garante uma continuidade da certeza metodológica. O exemplo ilustrativo é o da linha anaclástica. Na resolução da questão podemos perceber a atuação de todas as Regras precedentes. Como se observa, Descartes já havia estudado esse problema e aqui serve para descrever como aplica o seu método pela primeira vez. Em *A Dióptrica*, essa idéia será fundamental à construção de lentes.

[...]Se alguém que estude somente Matemática procura essa linha que em Dióptrica se chama anaclástica, e na qual os traços paralelos se refratam de tal modo que depois da refração só tem um ponto de intersecção, facilmente se dará conta, segundo as regras quinta e sexta, que a determinação dessa linha depende da proporção que guardam os ângulos de refração com os ângulos de incidência; mas como não será capaz de procurar minuciosamente esta relação, visto não pertencer à Matemática, mas à Física, ver-se-á obrigado a deter-se no limiar e nada conseguirá em querer aprender dos filósofos ou obter da experiência o conhecimento desta verdade, pois pecaria contra a terceira regra. Além disso, esta proporção é relativa e composta; e só das coisas puramente simples e absolutas se pode ter experiência certa. Em vão, suporá também entre tais ângulos uma proporção que ele acreditará mais verdadeira que todas; porque então não buscaria mais a anaclástica, mas somente uma linha que seria a consequência lógica da sua suposição. (DESCARTES, 2002, p. 94)

A proporção que os ângulos de incidência e de refração devem ter é fundamental para que os raios refratados na superfície convirjam para um único ponto. Esse fato é demonstrado minuciosamente em *A Dióptrica*.

A passagem nos diz que se o investigador for um matemático, então a investigação será interrompida, pois a propriedade seria do domínio da Física. Ao dizer

que o matemático nada conseguirá aprender de outros ou da experiência, pois pecaria contra a terceira regra, é porque Descartes pressupõe, na terceira regra, que não devemos investigar o que outros pensaram, mas, em contra partida, devemos investigar o objeto e a partir dessa investigação obter uma idéia clara e distinta. A passagem ainda ilustra o poder da Regra VII, pois aqui a decomposição do problema, para problemas mais simples, deixa de ser linear, pois o investigador sendo um matemático e ao encontrar um obstáculo não pertencente a sua área específica de conhecimento deverá procurar enumerar alternativas para transpô-lo.

Em contra partida, continua Descartes,

[...]alguém que não se dedique somente às Matemáticas, seguindo a primeira regra, investigar a verdade sobre tudo o que lhe apresente, cair na mesma dificuldade, irá mais longe e encontrará que a relação entre os ângulos de incidência e os ângulos de refração depende da variação desses mesmos ângulos, em virtude da diferença de meios; que esta variação, por sua vez, depende do modo como o raio penetra em todo o corpo transparente; e que o conhecimento da propriedade de penetrar um corpo supõe igualmente conhecida a natureza da ação da luz e que, enfim, para compreender a ação da luz é preciso saber que é em geral uma potência natural e esta última é, em toda série, a mais absoluta. Depois, portanto, de ter feito claramente e em pormenor esse exame, por meio da intuição intelectual, voltará a passar pelos mesmos graus, segundo a regra quinta; e, se ao chegar ao segundo grau, não puder conhecer a natureza da ação da luz, enumerará, segundo a sétima regra, todas as potências naturais a fim de que, graças ao conhecimento de algumas delas, a compreenda também pelo menos pela analogia da qual logo falarei; feito isto, indagará de que maneira o raio penetra por todo o corpo transparente e assim percorrerá o resto por ordem, até chegar na própria anaclástica. Esta, até hoje, constitui o objeto de muitas investigações; todavia, nada vejo que possa impedir alguém de empregar com perfeição nosso método e chegue a conhecê-la de maneira evidente. (DESCARTES, 2002, p. 94-95)

Podemos interpretar o problema da linha anaclástica, segundo a metodologia cartesiana, da seguinte maneira. Considere o problema dado,  $P_1$ : Investigar o problema da anaclástica, uma curva tal que os raios paralelos por ela refratados convergem em um único ponto. Esse problema será reduzido para um outro mais simples, a saber,  $P_2$ : a determinação da anaclástica depende da proporção que guardam os ângulos de refração com os ângulos de incidência. Neste ponto, Descartes diz que se quem investiga é um matemático, então não conseguirá ir mais longe, pois, para prosseguir será necessário ter um conhecimento mais abrangente, entender certas propriedades da luz, em particular que

aqueles ângulos variam com o meio. Assim, deverá buscar em outras áreas subsídios que o permita avançar. Sendo um físico, por exemplo, poderá reduzir  $P_2$  para uma terceira proposição.  $P_3$ : a relação entre os ângulos de incidência e os ângulos de refração depende da variação desses ângulos, em virtude da diferença do meio, por exemplo, o índice de refração, quando a luz passa do ar para a água, é um e do ar para outros meios outro, isto é, o índice depende dos dois meios. Assim,  $P_3$  pode ser reduzida a  $P_4$ : que esta variação, por sua vez, depende do modo como o raio penetra em todo o corpo transparente. Dessa forma, esta será reduzida a  $P_5$ : o conhecimento da propriedade de penetrar um corpo supõe igualmente conhecida a natureza da ação da luz. Por conseguinte,  $P_5$  finalmente será reduzida a  $P_6$ : para compreender a ação da luz é preciso saber que é em geral uma potência natural. Portanto,  $P_6$  é a redução mais absoluta da série e encerra o processo analítico da descoberta. Depois de chegar na última etapa, inicia-se o processo sintético, deve-se reverter o processo e chegar na linha anaclástica, neste caso, o processo é basicamente a ordem inversa da análise. Na última etapa, Descartes chega em um primeiro princípio, a luz é uma potência natural. Com efeito, tal concepção se justifica porque, num período anterior, Descartes estudou profundamente a luz e suas propriedades refletoras e refratárias e anunciou que para entendermos a luz devemos concebê-la como uma certa ação pronta para o movimento instantâneo. Portanto, estava seguro de que a luz era um primeiro princípio, uma idéia clara e distinta.

Assim, podemos observar que a concepção cartesiana do método de análise e síntese tem traços semelhantes com concepção de Papus e da prática geométrica dos antigos geômetras. Mas em Descartes o método é utilizado para resolver um problema que não pertence a Geometria. Descartes começa decompondo o problema, tentando reduzi-lo para outros mais simples, até alcançar um primeiro princípio, algo reconhecido pela luz natural da razão. Depois disso, revertendo os passos anteriores, reconstrói o problema e para entendê-lo bastará seguir o caminho estipulado por último, na síntese, em suma, de um princípio claro e distinto até a completa concepção do problema. Isso, como já tinha sido sugerido pelo próprio Descartes, efetivamente confirma que ele foi um seguidor do método dos antigos geômetras gregos. A passagem testemunha também tratar-se de um único método. O método é entendido, por ele, como constituído de duas etapas inseparáveis, análise e síntese, como a abordagem de Hintikka e Remes.

Então, podemos dizer que Descartes, inspirado por esse método geométrico, fará a transposição metodológica das Ciências exatas para outras áreas do conhecimento. De fato, isso indica que o ideal metodológico grego será retomado, mas agora com um grande diferencial, está voltado para questões mais amplas.

Apresentado e exemplificado o método analítico, Descartes propõe, em seguida, treinar a mente para melhor aplicar sua metodologia, o que é apresentado nas quatro regras seguintes.

### **2.5.3 Como aplicar as Regras anteriores**

Nas Regras IX, X, XI, XII, Descartes esclarece melhor como devemos treinar nossas mentes para não cometermos erros durante o processo de descoberta. No transcorrer de suas explicações parece repetir algumas das Regras anteriores.

Na Regra IX, Descartes chama atenção para a forma com que admitimos os primeiros princípios, advertindo que devemos dar atenção especial aos mais simples e fáceis e gastar neles o tempo necessário para analisá-los e extrair a verdade de modo claro e distinto. Com isso, tenta desenvolver as duas faculdades principais do método: a intuição e a dedução, ou nas próprias palavras de Descartes: a perspicácia, tendo a intuição clara de cada coisa; e a sagacidade, deduzindo habilmente uma das outras.

Na Regra X, Descartes observa que é necessário partir das coisas mais simples e fáceis para progredir para fatos mais gerais, usando caminhos claros e conhecidos. Assim, construiremos um conhecimento deduzido a partir de princípios evidentes e muitas proposições complicadas serão resolvidas por essa via. O conhecimento progressivo é uma característica desse método. Não poderemos mesmo obter todo conhecimento de uma só vez. É necessário construí-lo, pouco a pouco, pois as proposições descobertas e aceitas como verdadeiras, em um processo investigativo anterior, serão novas premissas adquiridas e servirão de base para outras investigações futuras.

[...]Convém, pois exercitar-nos primeiro nestas coisas mais fáceis, porém com método, a fim de nos acostumarmos a penetrar sempre na íntima verdade das coisas por caminhos claros e conhecidos, pois assim experimentaremos, pouco a pouco e em menos tempo do que se pode esperar, que nós também, com igual facilidade, podemos deduzir, de

princípios evidentes, muitas proposições que pareciam muito difíceis e complicadas. (DESCARTES, 2002, p. 101)

Na Regra XI, Descartes retoma as Regras terceira e sétima e explicita intuição intelectual, inferência, dedução, intuição e enumeração ou indução. A intuição intelectual exige duas condições:

[...]que a proposição seja compreendida clara e distintamente, e além disso, que seja compreendida, em seguida, toda ao mesmo tempo, e não sucessivamente. Mas a dedução, se atendermos à maneira de fazê-la como na regra terceira, não parece que se faça toda de uma vez, mas que implica certo movimento no nosso espírito que deduz uma coisa de outra; por isso, ali, com razão, a distinguimos da intuição. Se a considerarmos, porém já feita, como no que disse na regra sétima, então não designa movimento algum, mas o fim de um movimento, e por isso supomos que é vista por intuição quando é simples e clara, e não quando é múltipla e obscura. A esta damos o nome de enumeração ou indução, porque nesse caso não pode ser compreendida toda ao mesmo tempo pelo entendimento, e sua certeza depende, de certo modo, da memória, na qual se devem conservar os juízos emitidos sobre cada uma das partes enumeradas, para coligir de todas elas uma única conclusão.( DESCARTES, 2002, p. 102-3).

Para esclarecer melhor Descartes explica, por meio de um exemplo, que se estabelecemos uma relação entre dois objetos, depois uma entre o segundo objeto e um outro e assim sucessivamente até estabelecermos uma relação entre o penúltimo e o último e não lembrando de todos os passos da cadeia silogística, ou seja, não lembrando o que conecta a primeira com a última, então é necessário percorrê-la repeditamente com o pensamento até apreendermos toda ela sem o auxílio da memória, parecendo que percorremos tudo de uma única vez. Assim, nesta Regra fica evidente que há um retorno a Regra VII, com o intuito de complementar ou reforçar o método para a busca da verdade, não deixando nada sem investigar.

[...] Com efeito, a memória, da qual se disse que depende a certeza das conclusões, por ser fugaz e fraca, deve ser renovada e fortalecida por esse contínuo e repetido movimento do pensamento; assim, se por várias operações, tenho descoberto primeiro a relação que existe entre uma primeira e uma segunda grandeza, depois entre a segunda e a terceira, a seguir, entre a terceira e a quarta, e, finalmente, entre a quarta e a quinta, não vejo por isso qual seja a relação entre a primeira e a quinta grandeza, nem posso deduzi-la das já conhecidas, a não ser que me lembre

de todas elas. Eis por que me é necessário percorrê-las repetidamente com o pensamento, até que passe tão depressa da primeira à última, sem deixar nenhum papel à memória, parecendo que percebeu tudo de uma vez. (DESCARTES, 2002, p. 103)

Enfim, o que Descartes pretende com essa Regra é treinar a nossa intuição, a nossa dedução e a nossa enumeração, ou seja, essa Regra reavalia e revisa as anteriores. Assim, a intuição de algo deve ser concebida clara e distinta na nossa mente e a dedução, depois de realizada, deve se tornar tão clara quanto uma intuição. A enumeração, por sua vez, quando não puder ser concebida como uma dedução, e, conseqüentemente, como uma intuição, descreverá um conhecimento mais complexo, uma vez que não possa ser absorvido, de uma só vez, pela nossa mente, deverá ser retomado várias vezes até se tornar algo claro e distinto.

Na última regra do Livro I, Regra XII, Descartes salienta a importância dos vários recursos que o homem tem a seu dispor para obter o conhecimento verdadeiro, a saber: a inteligência, a imaginação, os sentidos e a memória. Através da inteligência, concebem-se as coisas que existem e as relações entre elas. Pela imaginação, pode-se comparar, conservar, reproduzir, dissociar e combinar. Pelos sentidos, podemos receber as impressões externas por meio da audição, olfato, tato, visão e o paladar. Pela memória, conservam-se e evocam-se os conhecimentos adquiridos. Mas as principais idéias da Regra XII são: estabelecer a noção mais primitiva dos corpos, a extensão e a forma; tudo que existe de perceptível, segundo essa Regra, pode ser representado como extensão e forma.

Na introdução da Regra, Descartes diz que essa resume tudo o que foi dito anteriormente e que ensina, em geral, o que se devia explicar em particular. Na verdade, Descartes tenta estabelecer uma estreita relação entre o sujeito e o objeto do conhecimento. O segundo parágrafo da Regra XII é explícito quanto a essa relação.

No que diz respeito ao conhecimento, duas coisas são necessárias ter em conta, a saber, nós, que conhecemos, e as coisas a conhecer. Em nós, apenas há quatro faculdades que nos podem servir para esse objetivo, quais sejam, o entendimento, a imaginação, os sentidos e a memória. Só o entendimento é capaz de perceber a verdade, mas deve ser ajudado pela imaginação, os sentidos e a memória, para não omitirmos nenhum dos meios postos ao nosso alcance. Pelo lado das questões, basta examinar esses três aspectos: primeiro, o que se apresenta espontaneamente; depois,

como uma coisa é conhecida por outra; e finalmente, que deduções se pode tirar de cada um. Esta enumeração me parece completa, nada omitindo do que se pode alcançar a capacidade humana. (DESCARTES, 2002, p. 105).

Descartes usa, para definir essa relação, a cognição obtida via percepção dos objetos garantida pela fisiologia óptica e pela Filosofia Natural mecanicista. Primeiro, quanto a nós, podemos chegar ao conhecimento via percepção sensorial, pois tudo que percebemos pode ser representado por formas. A natureza é composta de magnitudes, a imagem retiniana é bidimensional e, assim, tudo pode ser representado em nossas mentes por figuras planas e ser reduzido a uma noção muito simples, o segmento.

Segundo, quanto aos objetos do conhecimento são dotados de forma, são corpóreos e possuem extensão. Essas características são tão claras que podem ser considerados princípios absolutos, são idéias claras e distintas. Não podem, portanto, serem divididas em outras. O que une o mundo corpóreo a nós é a faculdade que temos de incorporá-lo, via percepção, e representá-lo em nossas mentes como idéias claras e distintas, os segmentos.

Mas surgem questões naturais. Por exemplo, como podemos representar as cores em nossas mentes. Para Descartes essas características são inerentes aos objetos, como o peso. São características reconhecidas pelo nosso intelecto, não necessitando de nada mais, não precisam ser representados por uma extensão.

Por fim, o silogismo é o que une os dois mundos, permitindo-nos construir o conhecimento.

#### **2.5.4 A Matemática nas Regras**

Na obra Regras para a direção do espírito, Descartes dedica a segunda parte à Matemática. Embora tenha ficado incompleta, podemos detectar o esforço de Descartes numa tentativa de incorporar a linguagem algébrica à geométrica. Para tanto, reformulou e introduziu alguns conceitos fundamentais, como é o caso do conceito de unidade e homogeneidade, mas o que se observa ainda não são idéias precisas. De todo modo, essa parte é interessante, pois permite-nos notar o seu esforço em superar algumas idéias que há muito tempo perseguia e perceber a sua evolução conceitual.

As Regra XIII e XIV ensinam-nos que uma vez que entendemos um problema devemos analisá-lo dividindo-o em partes mais simples e depois expressá-lo em termos não ambíguos. A Regra XIII é enunciada como se segue: “Se compreendemos perfeitamente uma questão, devemos abstraí-la de todo conceito supérfluo, reduzi-la a maior simplicidade e dividi-la em partes tão pequenas quanto seja possível, enumerando-as.” (Descartes, 2002, p. 117).

No início da explicação compara a sua técnica com a dos dialéticos:

[...] na exposição das formas dos silogismos, supõem [os dialéticos] conhecidos os seus termos ou a matéria, assim também supomos que a questão é perfeitamente compreendida. Não distinguimos, porém, como eles, dois extremos e o meio. Consideramos o assunto desta forma: primeiramente é necessário que em toda questão haja algo desconhecido, pois do contrário, a investigação seria vã; em segundo lugar, esse incógnito deve ser designado de alguma maneira, pois do contrário não estaríamos determinados a investigar isso melhor que qualquer outro objeto; em terceiro lugar, só pode ser designado mediante algo que já seja conhecido. (DESCARTES, 2002, p. 117)

A demonstração do dialéticos considerava três proposições, a saber: a premissa maior, a premissa menor e a conclusão. Mas Descartes pretende mudar essa estrutura. O que manterá é o fato de que devemos considerar a questão e compreendê-la completamente. Depois identificar o que devemos descobrir e designá-lo de alguma forma, um símbolo breve, e assim estabelecer uma relação entre o desconhecido e o conhecido do problema. Certamente, isso é uma alusão a forma algébrica de trabalhar um problema. No transcorrer da Regra XIII acrescenta ainda que a dificuldade deve ser reduzida à maior simplicidade possível. O procurado, por sua vez, deverá ser designado de forma precisa e nada é mais preciso do que um símbolo algébrico. Concluindo a Regra XIII, Descartes afirma que a única coisa importante é percorrer ordenadamente tudo o que está dado em um problema, deixando o que se vê claramente e abstraindo o necessário e submetendo o que é duvidoso a um exame mais atento e preciso.

Na parte introdutória da regra XIV afirma o seguinte:

Para utilizar a imaginação deve-se notar que, sempre que deduzimos uma coisa desconhecida de outra já conhecida, não encontraremos nisso algum novo gênero de ser. Acontece apenas um alargamento do nosso conhecimento que nos faz compreender que a coisa procurada participa

de um e outro modo da natureza das que estão dadas na questão. (DESCARTES, 2002, p. 122)

Descartes discute, nesse parágrafo, como investigar o que não conhecemos a partir do que já sabemos, sugerindo em seguida que o procedimento heurístico é realizado por meio de várias espécies de comparação.

Deve-se notar também que as comparações só se chamam simples e clara quando o que se procura e o que é dado participam igualmente de certa natureza. Quanto às outras comparações, necessitam de preparação por este motivo: porque aquela natureza comum não está igualmente nas duas, senão segundo certas proporções em que está envolvida, e que a maior parte do trabalho humano consiste em reduzir estas proporções de modo que se veja claramente a igualdade entre o que se procura e o que se conhece. (DESCARTES, 2002, p. 123).

Assim, para investigar algo desconhecido devemos estabelecer uma proporção entre o que é procurado e o que é dado, depois, abstraindo os termos das proporções, escrevendo-os em linguagem de magnitudes, devemos expressá-los em forma de igualdade. A terminologia de Descartes aqui é a mesma da teoria das proporções ou teoria de equações. Com efeito, nessa passagem podemos fazer uma analogia com as passagens já expostas anteriormente em Diofanto, Papus e Viète.

Na Regra XV, Descartes mostra a importância de se utilizar representações, para que possamos abstrair melhor os objetos em nossa imaginação. Nela, Descartes descreve formas de representar a unidade, para superar o obstáculo da dimensionalidade, mas o que a regra descreve é praticamente o mesmo que foi dito na “Velha Álgebra”, como já foi enfatizado anteriormente. Descartes ainda se mostra confuso quanto ao conceito de unidade:

Representaremos primeiro, a unidade de três maneiras: por um quadrado  $\square$ , se a consideramos como comprida e larga; ou por uma linha  $\text{—}$ , se a consideramos só enquanto comprida, ou finalmente, por um ponto  $\cdot$ , se apenas pretendemos com ela formar a quantidade; mas, de qualquer maneira que seja representada e concebida, compreenderemos sempre que é um objeto extenso em todos os sentidos e capaz de infinitas dimensões. Assim também os de uma proposição, se for necessário atender a duas de suas grandezas diferentes, apresentar-se-ão aos nossos sentidos por um retângulo, cujos dois lados serão as grandezas propostas da seguinte maneira: se forem incomensuráveis com a unidade  $\square$ ; ou desta  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$ , ou

esta outra  $\text{⋮⋮}$  se forem comensuráveis; e sem nada mais, se só estiver em questão uma pluralidade. Se enfim atendemos a uma só de suas grandezas, representá-la-emos ou por um retângulo no qual um dos lados seja a grandeza proposta, e o outro a unidade, deste modo  $\square$ , o que se faz sempre que é preciso compará-la com uma superfície; ou por um só comprimento, desta forma  $\text{—}$ , se se considera apenas como comprimento incomensurável; ou então, deste modo, se se trata de uma pluralidade. (DESCARTES, 2002, p. 131)

Em *A Geometria*, a unidade será designada por um segmento de reta e todas as grandezas serão reduzidas a segmentos, isso permitirá Descartes avançar, consideravelmente, em relação a seus contemporâneos e aos antigos geômetras gregos, mas aqui, se mostra confuso, apresentando duas possibilidades para a unidade.

Na Regra XVI, Descartes afirma que devemos utilizar a escrita para não sobrecarregarmos a memória, deixando-a livre para contemplar outras idéias:

De resto, como dissemos que não se devia contemplar numa mesma intuição, intelectual ou visual, mais de duas dimensões diferentes dentre as inumeráveis que se podem representar em nossa fantasia, é importante reter todas as outras, de modo que se nos apresentem quando forem necessárias. E foi para este fim que a natureza parece ter instruído a memória. Mas como esta faculdade é muitas vezes fugaz, e para não nos vermos obrigado a gastar parte de nossa atenção para reavivá-la, enquanto estamos ocupados com outros pensamentos, inventou-se muito a propósito o uso da escrita, e, fortalecidos por esta ajuda, não confiaremos aqui mais nada à memória senão que deixando livre toda nossa fantasia, totalmente entregue às idéias presentes, representaremos no papel as coisas que devem ser retidas, e isto por meio de sinais brevíssimos, a fim de que depois de haver examinado distintamente cada coisa em particular, segundo a regra nona, possamos com o teor da undécima, percorrer todas com movimento muito rápido do pensamento e contemplar intuitivamente, a um só tempo, o maior número possível de objetos. (DESCARTES, 2002, p. 132)

Descartes continua justificando a importância de se usar a unidade e de usar sinais breves para vencer as dificuldades no tratamento das questões Matemáticas. Anuncia que usará as primeiras letras do alfabeto, em minúsculas, para as grandezas conhecidas e as maiúsculas, para as grandezas desconhecidas. Essa simbologia será modificada em *A Geometria*, nesse texto utilizará as letras minúsculas do fim do alfabeto: x, y, z, para as variáveis e as letras do início do alfabeto, também minúsculas: a, b, c para os parâmetros conhecidos, coeficientes das equações. Descartes mostra-se bastante consciente da

importância da simbologia para superar as dificuldades nas Ciências Matemáticas. A citação a seguir mostra essa preocupação.

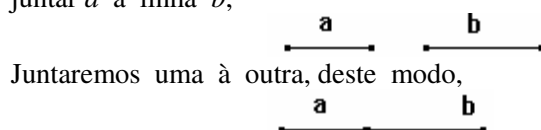
Desse modo, tudo o que for necessário considerar como uma unidade para a solução de uma dificuldade, designaremos com um só sinal que se pode representar como se queira. Para maior facilidade, utilizaremos as letras  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , etc., para expressar grandezas conhecidas e  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , para as desconhecidas, às quais anteporemos freqüentemente os números 1, 2, 3, etc., para explicar a pluralidade; e, por outra parte, posporemos estes mesmos números para explicar o número de relações que nelas deverão ser compreendidas; assim, se escrevo  $2a^3$ , será o mesmo que dizer o dobro da grandeza designada pela letra “a” que contém três relações. Com este ardil, não só economizaremos um grande número de palavras, mas, o que é mais importante, apresentaremos os fins das dificuldades sob uma forma tão pura e tão clara que, sem omitir nada de útil, não se encontre nada de supérfluo e que ocupe inutilmente a capacidade do espírito, enquanto a mente tenha de abarcar várias coisas de uma só vez. (DESCARTES, 2002, p. 132-3).

A regra XVII diz que devemos, em uma investigação direta do problema a ser resolvido, desconsiderando o fato que alguns de seus termos são conhecidos e outros desconhecidos, e intuindo por uma série de argumentos sólidos, estabelecer a dependência de um termo com o outro. Descartes está particularmente interessado na complicada questão de discernir certas proposições intermediárias da inferência dedutiva que permite relacionar a primeira e a última proposição. Neste caso, devemos seguir a ordem invertida ou indireta do processo dedutivo usual, apresentando a chave para resolver tais problemas:

[...] Como, porém, não nos ocupamos aqui senão de questões complicadas, nas quais se conhecem os extremos e se deve chegar a conhecer certos intermediários, no meio de uma ordem invertida, todo artifício aqui consistirá em, supondo por conhecido o que é desconhecido, poder desta forma nos apresentar um caminho fácil e direto de investigação, mesmo nas dificuldades mais emaranhadas. Nada impede que isso aconteça; supusemos já no início deste capítulo poder reconhecer que as coisas desconhecidas em uma questão estão em tal dependência das que são conhecidas que por estas estão completamente determinadas. Assim, se refletirmos sobre elas, pois são as que primeiramente nos ocorrem, enquanto reconhecemos esta determinação, e se as considerarmos conhecidas, embora sejam desconhecidas, para então deduzirmos pouco a pouco e por meio de raciocínios verdadeiros todas as coisas, mesmo as conhecidas, como se fossem desconhecidas, teremos cumprido tudo o que esta regra prescreve. (DESCARTES, 2002, p. 136)

Na Regra XVIII, apresenta as quatro operações básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão, afirmando que qualquer magnitude deve ser representada por superfícies ou linhas:

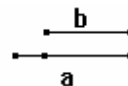
Se for preciso fazer uma adição ou uma subtração, concebemos o objeto sob a forma de uma linha ou sob a forma de uma grandeza extensa, na qual não se deve considerar mais que o comprimento, pois, se for preciso juntar  $a$  à linha  $b$ ,



Juntaremos uma à outra, deste modo,

se obtém  $c$

Se, pelo contrário, a menor tiver de ser tirada da maior, isto é  $b$  de  $a$

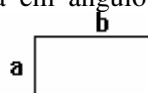


Colocaremos uma sobre a outra desta maneira,

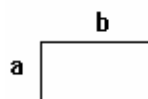
E assim se obtém a parte da maior que não pode ser coberta pela menor, a saber:

Na multiplicação, concebemos também as grandezas dadas em forma de linhas; porém imaginando que formam um retângulo, pois se multiplicarmos

$a$  por  $b$ , adaptamos uma à outra em ângulo reto desta maneira,



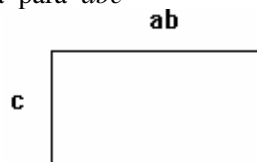
e se obtém o retângulo



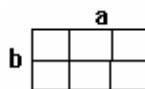
Se queremos ainda multiplicar  $ab$  por  $c$ ,

Convém imaginar  $ab$  como linha, a saber:  $ab$

De modo que resulta para  $abc$



Finalmente, na divisão em que o divisor está dado, imaginamos que a grandeza a ser dividida é um retângulo em que um dos lados é o divisor e o outro o quociente; assim por exemplo, se ao de dividir o retângulo  $ab$  por  $a$



Tira-se a longitude  $a$  e fica  $b$  por quociente

$b$

Ou ao contrário, se se divide o mesmo retângulo por  $b$ , tira-se a altura  $b$  e o quociente será  $a$

$a$

Quanto às divisões em que não está dado o divisor, mas apenas designado por alguma relação como quando se diz que vai extrair a raiz quadrada ou cúbica, etc., deve se notar então que o dividendo e todos os outros termos devem sempre ser concebidos como linhas existentes em uma série de proporções contínuas, das quais a primeira é a unidade, e a última, a grandeza a dividir. Quanto ao modo de encontrar entre esta unidade tantas médias proporcionais quantas quisermos, será explicado em seu devido lugar. (DESCARTES, 2002, p. 140)

Aqui, Descartes aplica os dois conceitos de unidade: um segmento unidade, denotado aqui por  $e$ , e um retângulo unidade, com um lado medindo um segmento unidade. Assim, pretendia representar magnitudes como segmento ou como retângulo de modo que o segmento de medida  $l$  e o retângulo de comprimento  $l$  e largura  $e$  fossem, de certa forma, equivalentes. A adição e a subtração podem ser realizadas por justaposição e por remoção, respectivamente, de um segmento (ou um retângulo) com o outro. Na multiplicação com dois fatores  $a$  e  $b$ , obteríamos um retângulo de comprimento  $a$  e largura  $b$ , de área  $ax$  que poderia ser transformado em um retângulo de comprimento  $c=axb$  e largura  $e$ . Na divisão, o dividendo deveria ser interpretado como um retângulo e o divisor como um segmento. Assim, para dividir  $d$  por  $f$ ,  $d$  e  $f$  segmentos, primeiro formamos o retângulo  $dxe$ , depois transformamos esse retângulo em um de área igual e largura  $f$ ; o outro lado  $g$  deste retângulo seria o quociente  $d/f$ , ou seja, a divisão é obtida a partir da igualdade das áreas  $dxe = fxg$ .

Na parte final da citação acima, Descartes interpreta a extração da raiz  $n$ -ésima de um segmento de linha como a primeira  $(n-1)$  média proporcional entre a unidade  $e$  e  $a$ . Se a raiz é  $x$ , então:

$$e:x = x:x^2 = \dots = x^{n-1}:a, \text{ assim } x^n = ae.$$

No caso da raiz quadrada, bastaria considerar  $e:x = x:a$ , ou seja, a extração da raiz era considerada uma espécie de divisão em que o divisor não era dado. De certa forma,

Descartes indica que a extração da raiz é a solução de uma equação que pode ser reduzida a uma espécie de divisão. Muitos autores, por exemplo Bos e Gaukroger, apontam que é justamente nesse ponto que as Regras são interrompidas, pois Descartes percebeu que a extração de certas raízes seria impossível de ser construída com régua e compasso.

Com a definição de uma unidade e com as operações definidas como acima, Descartes pretendia construir a ligação entre a Geometria e a Álgebra. Mas esse projeto teria de esperar mais nove anos. Somente em *A Geometria* isso será realizado com sucesso. Como podemos ver, pela citação acima, Descartes se mostra ainda confuso com relação a representação das operações. Por exemplo, às vezes o produto de duas variáveis pode ser representado por um retângulo. Em outro momento pode ser representado por um segmento de reta. Em *A Geometria* as operações geométricas serão todas reduzidas a segmentos de retas, isso com outras mudanças conceituais permitirá Descartes avançar bastante, dando contribuições importantes à Geometria.

As Regras XIX, XX, XXI são apenas enunciadas sem maiores comentários. Regra XIX: “Por este método de raciocínio, importa buscar tantas grandezas expressas de dois modos diferentes, quanto os termos desconhecidos que supomos como conhecidos para encontrar diretamente a dificuldade; assim obter-se-ão outras tantas comparações entre duas coisas iguais”. Regra XX: “Uma vez resolvida as equações, se hão de efetuar as operações que deixamos de lado, não usando nunca da multiplicação enquanto haja lugar para a divisão”. Regra XXI: “Se tivermos diversas equações destas, devem ser reduzidas a uma única, qual seja, àquela cujos termos ocupem o menor número de graus na série das grandezas continuamente proporcionais, segundo a qual os mesmos termos devem ser dispostos.” (DESCARTES, 2002, pp. 141-142).

Finalmente, antes de falar da principal obra cartesiana, menciono uma análise realizada por Gaukroger (2002, pp. 228-229), segundo a qual, Descartes deixou de completar as Regras porque percebeu que esse projeto não teria sucesso. Elas tratam de problemas que deveriam ser expressos por meio de diversas equações com diversas incógnitas que deveriam ser apresentados algebricamente, mas não podiam ser legitimadas pelo método proposto. Por último, Gaukroger argumenta que foi justamente na resolução da equação  $x^2 = 6x + 7$ , apresentada em seu reencontro com Beeckman, em 1628, que Descartes percebeu o quanto restrito era o seu método. O método funciona bem nos casos em que

as raízes são racionais (quadrados perfeitos), entretanto, quando as raízes são irracionais, as construções podem se tornar muito complexas e não podem, às vezes, sequer serem representadas, isso iria abalar o critério das verdades claras e distintas e por isso Descartes deixou as Regras inacabadas.

Passaremos agora à principal obra cartesiana, *O Discurso do Método*. Nessa obra encontramos o seu método anunciado oficialmente pela primeira vez.

### CAPÍTULO III: O DISCURSO DO MÉTODO E OS ENSAIOS

Muitas idéias apresentadas em *O Discurso do Método* foram inspiradas pelas que comõem a obra *Regras para a Direção do Espírito* e em escritos anteriores. Com efeito, ao lê-lo notamos isso nitidamente, embora o tom do *Discurso* seja bem mais consistente.

Descartes publicou *O Discurso do Método para Bem Conduzir a Razão e Procurar a Verdade nas Ciências* como uma introdução a três ensaios, a saber: *A Geometria*, *A Dióptrica* e *A Metereologia*, em 8 de junho de 1637, em Leyden, com o título: *Discours de la methode pour bien conduire as raison, et chercher la vérité dans les sciences. Plus La Diòprique, Les Météores, Et La Geometrie. Qui son des essais de cette Méthode*. O livro foi publicado anonimamente, em francês, embora toda comunidade acadêmica soubesse o nome do autor. Na parte final da obra, justifica porque escreveu em francês<sup>44</sup>:

E, se escrevo em francês, que é a língua do meu país, e não em latim, que é a de meus preceptores, é porque espero que aqueles que usam apenas sua razão natural inteiramente pura julgarão melhor minhas opiniões do que aqueles que só acreditam nos livros antigos. E quanto aos que unem o bom-senso ao estudo, os únicos que desejo para meus juízes, tenho certeza de que não serão, de modo algum, tão parciais em favor do latim que recusem ouvir minhas razões, só porque as explico em língua vulgar. (DESCARTES, 1989, p. 92).

---

<sup>44</sup> Nesse período as obras científicas e filosóficas eram quase todas escritas em latim que era uma espécie de imposição literária, como o inglês é nos nossos dias. *O Discurso do Método* de Descartes é a primeira desse gênero escrita em francês, isso expande consideravelmente o número de leitores, uma vez que somente os doutos conheciam bem o latim.

Posteriormente, em 1644, em Amsterdam, foi publicado uma tradução latina do Discurso e dos ensaios, mas *A Geometria* foi excluída.

Nos três ensaios, Descartes pretendia ilustrar o seu método, aplicando-o às questões científicas abordados naquela época, com as quais existia uma preocupação com os problemas relacionadas à Filosofia Natural ou Física. A busca de explicações para problemas da natureza, via Matemática, estava em voga e Descartes viveu intensamente essa tendência, talvez seja por isso que os três ensaios foram interessantes para o público em geral daquele período, mais até do que o próprio *Discurso*. Esse é um fato notável, com o passar do tempo tivemos uma situação completamente diferente. *O Discurso do Método* tornou-se a parte principal e a mais lida pelo público, passando a ser, inclusive, separada dos ensaios e, os ensaios, separados entre si, tornaram-se praticamente esquecidos. Com efeito, em língua portuguesa, inglesa, espanhola e francesa, encontramos uma grande variedade de traduções e estudos de *O Discurso do Método*, mas dos três ensaios existem poucas traduções e estudos. Em língua portuguesa, não existe traduções de *Os Meteoros* e nem de *A Dióptrica* e apenas uma tradução para o português de Portugal de *A Geometria*. Talvez, o real motivo tenha sido a superação ou a evolução das idéias científicas que vieram depois de Descartes e que ofuscaram completamente esses tratados. Não podemos esquecer que, logo a seguir, os fundamentos da Física moderna seriam construídos e a Física se tornaria um campo teórico bem elaborado pelas leis de Newton, que explicaram diversos fenômenos naturais, incluindo os abordados por Descartes.

Hoje, é comum historiadores, filósofos e estudiosos das Ciências em geral adotarem o critério de estudar o método cartesiano, de fazer Filosofia e Ciência, em trabalhos como *As Regras*, *O Discurso* (exceto os ensaios) e *As Meditações*, em lugar de nos três ensaios científicos. Pode-se dizer que isso é um erro, se desejarmos mostrar a influência das idéias Matemáticas sobre a Filosofia e a Ciência cartesianas, pois ao estudarmos a metodologia cartesiana, sem estudar os três ensaios, a imagem obtida é bastante diferente daquela quando consideramos o conjunto da obra, pois nesses ensaios encontramos exemplos práticos da aplicação do método cartesiano. Relembramos que o próprio Descartes escreveu, certa vez, que a sua metodologia seria melhor entendida nos três ensaios que seguiam *O Discurso*. Desse modo, neste capítulo, analisaremos a obra como um todo para

tentar mostrar essa interação e a forte influência da Matemática, tanto na parte introdutória quanto nos ensaios científicos, oferecendo uma interpretação, no mínimo, mais abrangente. O próprio Descartes escreveu, em uma carta a Mersenne, que a parte introdutória da obra descrevia a sua metodologia, mas que não pretendia ensiná-la, apenas falar sobre ela, que o método é mais prático do que teórico, e que os conteúdos dos ensaios só foram descobertos pelo uso desse método. Assim, ao ler os ensaios, poderemos entender melhor como aplicava a sua metodologia.

Assim, começaremos abordando algumas considerações sobre *O Discurso do Método*, dando especial atenção à segunda parte, onde é anunciado o método cartesiano. Depois abordaremos os três ensaios.

### **3.1 A estrutura de *O Discurso do Método***

*O Discurso do Método* é fundamental para entendermos como Descartes filosofava. Nele, é abordado, mais uma vez, o método que Descartes supõe aplicável a toda Ciência. A questão do método é importante, pois, para o filósofo, é o ponto de partida, a base de seu sistema, isto é, a partir do método que explicará seus modelos filosóficos e científicos.

É sugerido, pelo próprio Descartes, que o *Discurso*, para melhor ser entendido, para que a leitura não se torne excessivamente longa e cansativa, seja dividido em seis partes. Na primeira, sempre com perfeito domínio da eloquência, o discurso de Descartes avisa que pretende explicar os fatos como uma experiência pessoal, uma autobiografia, a história solitária de um pensador que, quem sabe, possa inspirar outras pessoas. Aliás, a autobiografia era um gênero literário desde épocas mais antigas, um relato moral. Foi utilizado por diversos escritores como Santo Agostinho, Cardano e Montaigne, etc.. Além de gênero literário, era uma espécie de introdução, um pré-requisito do saber, onde o escritor buscava convencer outros a respeito de suas idéias. Em seu relato, Descartes se define como um indivíduo de espiritualidade não superior aos demais; entretanto, aprendera desde cedo a trilhar certos caminhos que o conduziram, gradativamente, a um alto conhecimento e, modestamente admite, não teria conseguido êxito se não fosse por essa via.

Desse modo, Descartes supõe ser importante descrever sua caminhada. Começa elogiando a educação que recebera no Colégio La Flèche, onde, como vimos, estudou latim, grego, história, poesia, moral, Teologia, Filosofia. No relato de sua trajetória, falando de sua formação acadêmica, demonstra a influência da Matemática na formação de seu pensamento posterior a sua formação em La Flèche, mas, ao mesmo tempo, não deixa de descrever a decepção do ensino que recebera.

Desde a infância nutri-me das letras[gramática, história, poesia, retórica], e por me haver persuadido de que por meio delas se podia adquirir um conhecimento claro e seguro de tudo o que é útil a vida, sentia um imenso desejo de aprendê-las. Mas, logo que terminei todos esses anos de estudos (ao cabo dos quais se costuma ser recebido na classe dos doutos), mudei inteiramente de opinião. Achava-me com tantas dúvidas e indecisões, que me parecia não ter obtido outro proveito, ao procurar instruir-me, senão o de ter revelado cada vez mais a minha ingnorância. E, no entanto, eu estudara numa das mais célebres escolas da Europa, onde pensava existir homens sábios se é que existiam em algum lugar da Terra. Aprendera aí tudo o que os outros aprendiam, e, inclusive, não contente com as Ciências que nos ensinavam, percorrera todos os livros que tratavam daquelas consideradas as mais curiosas[magia, astrologia] e mais raras, com as quais tive contato. (DESCARTES, 1989, p. 33).

Descartes continua dizendo que apreciava os exercícios da escola, pois isso lhe permitiu conhecer o valor de cada disciplina e de não ser enganado por elas. Assim, diz que as línguas, latim e grego, eram necessárias ao entendimento dos livros antigos. As fábulas motivam o espírito. As ações memoráveis da história ajudam a formar o juízo. As leituras dos livros antigos era uma conversação com os homens sábios do passado, embora só revelem o melhor de seu pensamento, por exemplo, os geômetras gregos são acusados de esconderem o verdadeiro método de descoberta. A eloquência é dotada de força e beleza. A poesia de encantamentos doces e delicados. A Matemática satisfazia aos curiosos e facilitava as artes técnicas, como a mecânica. A Teologia ensinava a atingir o céu. A Filosofia permitia falar sobre todas as coisas. A jurisprudência, a medicina e outras Ciências, conferem honras e riquezas aqueles que as cultivam. Mas como dedicou tempo demais a esses estudos, achou que era conveniente conhecer outros costumes para julgar os de seus contemporâneos corretamente.

Mesmo estudando em uma das melhores escolas, julgou necessário viajar para observar novas culturas e adquirir novos conhecimentos, conversar com outros sábios

daquela época para complementar sua educação, libertando-se dos erros que obscurecem a razão humana. Mas acima de tudo, era em si mesmo que buscava as soluções dos problemas que o incomodavam.

Como tinha o dom do discurso, uma das características da educação que recebera em La Flèche, depois de tecer elogios à educação jesuíta, no que segue, tece críticas contundentes. Assim, diz que o mesmo que ler livros antigos é viajar. As fábulas não mostram as reais circunstâncias e acabam por nos induzir a concepções irreais. Afirma que era apaixonado pela eloquência e pela poesia, mas que essas eram dons pessoais e serviam apenas para persuadir os mais fracos de espíritos. Uma pessoa pode ser excelente na arte de expressar uma poesia, sem nada entender da arte poética. Quanto a Matemática, ninguém tinha ainda revelado o seu real valor. A Teologia não seria submetida a sua argumentação analítica, pois a Teologia estava acima da fragilidade de seus raciocínios, assim evitando polemizar com as autoridades eclesiásticas. Quanto à Filosofia, embora fosse cultivada pelos sábios, tudo nela era discutível e duvidoso, e a Filosofia Escolástica só chegava ao verossímil e não ao certo e verdadeiro. Sobre as Ciências em geral, como são concebidas a partir da Filosofia, nada de sólido se poderia construir sobre os seus frágeis fundamentos. Quanto às más doutrinas não passam de jactâncias. Essas são as razões apresentadas por Descartes para buscar construir uma nova Ciência.

No grande livro do mundo, busca complementar a sua formação e a lição que tira das suas andanças é não aceitar e nem confiar em nada obtido pelo exemplo e pelo hábito, livrando-se dos erros que poderiam ofuscar a voz da razão. Mas entende, por fim, que foi nele mesmo, ao si estudar, que encontrou respostas às suas dúvidas, mais do que nas suas andanças e nas leituras dos livros.

Porém não deixou de expressar o valor da Matemática que aprendera em La Flèche, apreciava a certeza das demonstrações Matemáticas, embora pensasse na época que o seu campo de aplicação fosse ainda muito restrito.

Comprazia-me, sobretudo, com as Matemáticas, por causa da certeza e da evidência de suas razões, mas não percebia ainda seu verdadeiro uso e, acreditando que serviam somente às artes mecânicas, surpreendiam-me que, embora fossem firmes e sólidos seus fundamentos, nada de mais elevado se tivesse edificado sobre eles. (DESCARTES, 1989, p. 35).

Assim formulará sua metodologia, baseando-se na razão humana e inspirando-se na certeza das demonstrações Matemáticas no método de análise e síntese dos antigos. Com efeito tal tópico será explicitado posteriormente.

Na segunda parte do *Discurso*, o seu método é apresentado, constituindo-se de quatro preceitos fundamentais, o “coração” de sua Filosofia. Como poderemos observar, as quatro regras mencionadas, estão em linha direta com as regras V, VI, VII e VIII das *Regras para a Direção do Espírito*, agora expostas de uma maneira concisa e precisa. Antes de anunciar os quatro preceitos de sua Filosofia, Descartes, como fizera nas *Regras*, mostra a sua concepção científica. A Ciência deve ser pensada para envolver todos os campos investigativos, para dizer isso, faz uso de um recurso bastante explorado em seus escritos, a construção de imagens ou a comparação. Descartes diz que teve tempo suficiente para pensar sobre a questão da Ciência.

[...] Entre eles[seus pensamentos], um dos primeiros foi que me ocorreu de considerar que, com frequência, não há tanta perfeição nas obras compostas de várias peças, e realizadas pela mão de diversos mestres, quanto naquelas em que um só trabalhou. Assim, vê-se que os edifícios projetados e concluídos por um único arquiteto são habitualmente mais belos e harmônicos do que aqueles que muitos procuraram reformar, aproveitando velhas paredes construídas para outros fins. (DESCARTES, 1989, p. 38).

A passagem nos diz que Descartes pretende mesmo subverter a ordem estabelecida pelos escolásticos que queriam a Ciência compartimentalizada. Isto é, a Escolástica estabelecia que para as diversas Ciências eram necessários diversos métodos. Essa idéia deriva da concepção de Ciência aristotélica que foi cultuada pela Escolástica, implantada nas instituições acadêmicas. Desse modo, Descartes, contrariando isso, irá propor um único método capaz de aplicar-se a todos os ramos científicos, como se observa nas *Regras*.

Descartes afirma, humildemente, que não começaria rejeitando todas as opiniões que lhe foram ensinadas, a não ser que encontrasse uma que as substituíssem. E continua explicando um pouco mais sobre a origem de seu método, fazendo uma referência à sua juventude, à educação recebida em La Flèche e às disciplinas fundamentais que o ajudaram na sua formação intelectual. Assim, diz que enquanto jovem, a lógica da Filosofia e da Matemática, a análise e síntese antigos e a Álgebra, eram três artes ou Ciências que

deveriam contribuir para o seu projeto. Mas quanto à lógica tece os seguintes comentários, como fizera também nas *Regras*, onde criticou severamente a dialética:

Mas, examinando-as, notei que quanto à Lógica, seus silogismos e a maior parte de seus demais preceitos servem mais para explicar a outrem as coisas que já se sabem, como a arte de Lúlio, para falar, sem julgamento, daquelas que se ignoram, do que para aprendê-las. E, embora a lógica contenha, com efeito, uma porção de preceitos verdadeiros e muitos bons, há todavia outros tantos misturados de permeio que são nocivos ou supérfluos, sendo quase tão difícil separá-los quanto tirar uma Diana ou uma Minerva de um bloco de mármore que nem sequer está esboçado. (DESCARTES, 1989, p. 43).

Quanto à análise dos antigos escreve que é tão restrita as figuras geométricas ao ponto de inibir a imaginação. De fato, a análise e síntese dos antigos, segundo Hintikka e Remes, era restrita a configurações geométricas, ou seja, o campo de aplicação da análise era muito restrito. Quanto à Álgebra dos modernos, está tão limitada a regras e a uma simbologia difícil que leva à confusão. A Álgebra ainda carecia de uma simbologia mais adequada e a sua aplicação era como um receituário, não dando liberdade ao algebrista, não lhe permitindo avançar neste campo de investigação. Por isso, era necessário um método alternativo, definido a partir dessas três artes ou Ciências, usando somente as suas vantagens e refutando os seus defeitos. Como se observou, François Viète tinha já exposto a sua reforma Matemática, mas a simbologia apresentada ainda era limitada e, além disso, os objetivos dos dois eram diferentes, pois Descartes buscava uma reforma mais ampla que envolveria todos os campos do saber.

Por esta razão, pensei ser necessário procurar algum outro método que, reunindo as vantagens desses três, fosse isento de seus defeitos. E, como a multiplicidade de leis freqüentemente oferece desculpas aos vícios, de modo que um Estado é mais bem dirigido quando, embora tendo muito poucas leis, são elas estritamente cumpridas; assim, em lugar desse grande número de preceitos de que se compõe a Lógica, julguei que me bastariam os quatro a seguir, desde que eu tomasse a firme e constante resolução de jamais deixar de observá-los. (DESCARTES, 1989, p. 44).

O melhor da análise geométrica é a sua estrutura metodológica, o seu caráter heurístico, que será adotado como um dos preceitos fundamentais de seu método. Com efeito, tal preceito será conjugado com o melhor da lógica, o seu caráter dedutivo, e com o mais significativo da Álgebra, a sua especificidade simbólica e poder de atuação.

Em seguida, expõe os quatro preceitos fundamentais do seu método. O primeiro preceito é a regra da evidência, significa não aceitar nada por verdadeiro, a não ser que seja evidente. A evidência, por sua vez, é a intuição intelectual das idéias claras e distintas, isto é, perceber todos os seus elementos e não os confundir com nenhuma outra.

O primeiro preceito era o de jamais aceitar alguma coisa como verdadeira que não soubesse evidentemente como tal, isto é, de evitar cuidadosamente a precepitação e a prevenção, e de nada incluir em meus juízos que não se apresentasse tão clara e tão distintamente a meu espírito que eu não tivesse nenhuma chance de colocar dúvida. (DESCARTES, 1989, p. 44).

O segundo preceito é a decomposição, ou a análise. Não é simplesmente a decomposição de uma idéia complexa em uma idéia simples, mas uma redução do desconhecido para o conhecido, do qual depende. Esse preceito, juntamente com o próximo, revela o caráter analítico do método, a influência da análise dos antigos geômetras se apresenta nesta regra.

O segundo, o de dividir cada uma das dificuldades que eu examinasse em tantas partes quantas possíveis e quantas necessárias fossem para melhor resolvê-las. (DESCARTES, 1989, p. 44).

O terceiro preceito parte do simples para o composto, ou seja parte da última etapa analítica e, através da dedução, soluciona o problema ou demonstra a proposição, mantendo a ordem lógica deixada na etapa analítica. Aqui constatamos o reverso da análise: a síntese. Além disso, notamos que a concepção metodológica cartesiana é constituída de duas partes inseparáveis. Uma parte, a analítica, é o processo heurístico; a segunda parte, a síntese, é a resolução do problema, tal método deve ser chamado método de análise-síntese.

O terceiro, o de conduzir por ordem meus pensamentos, a começar pelos objetos mais simples e mais fáceis de serem conhecidos, para galgar, pouco a pouco, como que por graus, até o conhecimento dos mais complexos e, inclusive, pressupondo uma ordem entre os que não se precedem naturalmente uns aos outros. (DESCARTES, 1989, p. 45).

A quarta regra é chamada de enumeração, mostra a ligação entre as proposições usadas na solução do problema ou demonstração da proposição estudados e evita o uso da memória, o que pode conduzir ao erro. Assim, essa regra permite Descartes percorrer

toda a cadeia obtida na resolução e, por meio dela, perceber que o problema foi completamente exaurido, não restando mais nada a declarar ou investigar sobre ele.

E o último, o preceito de fazer em toda parte enumerações tão completas e revisões tão gerais que eu tivesse a certeza de nada ter omitido. (DESCARTES, 1989, p. 45).

Descartes, em seguida, faz diversas observações que demonstram de que forma a Geometria o inspirou na formação do método:

Essas longas cadeias de razões, todas simples e fáceis, de que os geômetras costumam se utilizar para chegar às demonstrações mais difíceis, haviam-me dado a oportunidade de imaginar que todas as coisas passíveis de cair sob o domínio do conhecimento dos homens seguem-se umas às outras da mesma maneira e que, contanto que nos abstenhamos somente de aceitar por verdadeira alguma que não o seja, e que observemos sempre a ordem necessária para deduzí-las umas das outras, não pode haver, quaisquer que sejam, tão distantes às quais não se chegue por fim, nem tão ocultas que não se descubram. (DESCARTES, 1989, p. 45).

Em outras palavras, anuncia nesse parágrafo, que todo conhecimento verdadeiro pode ser obtido por meio da técnica geométrica de demonstrar. Não devemos esquecer que os geômetras antigos usavam também o método analítico para descobrir as demonstrações. Ou seja, definitivamente, a Matemática é a sua musa inspiradora. Desse modo, transplantará o método em outras áreas do conhecimento, além dos domínios da Geometria, como salientamos nas *Regras*.

Já que o método é geométrico, decide começar pela Matemática, pois só os matemáticos puderam encontrar algumas demonstrações ou razões certas e evidentes. Descartes estudou tenazmente os problemas físicos, mas pressupondo sempre que a Matemática era capaz de dar-lhe a sustentação necessária. A metodologia cartesiana é realmente bem aplicada às questões geométricas, conforme demonstraremos posteriormente.

E não me foi muito penoso procurar por quais devia começar, pois já sabia que haveria de ser pelas mais simples e pelas mais fáceis de se conhecer; e, considerando que, entre todos os que anteriormente buscavam a verdade nas Ciências, só os matemáticos puderam encontrar algumas demonstrações – isto é, razões certas e evidentes –, não duvidei de modo algum que não fosse pelas mesmas que eles examinaram, embora não

esperasse disso nenhuma outra utilidade, exceto que a de que meu espírito se habituaria a se alimentar de verdades e a não se contentar com falsas razões. Mas, para tanto, não tive a intenção de aprender todas essas Ciências particulares a que se chamam comumente Matemáticas; e, constatando que, embora seus projetos sejam diferentes, não deixam de concordar todas entre si – pelo fato de não atribuírem a esses objetos senão as diversas relações ou proporções que neles se encontram –, pensei que fosse melhor examinar somente estas proporções em geral, supondo-as apenas nos temas que servissem para me tornar o seu conhecimento mais fácil; mesmo assim, sem de modo algum restringi-las, em seguida, a todos os outros objetos a que conviessem. (DESCARTES, 1989, p. 46)

Descartes não estudou todas as disciplinas chamadas Matemáticas que englobam as chamadas Matemáticas puras (Aritmética e Geometria) e as Matemáticas mistas (Música, Astronomia), mas aplicará as regras gerais das proporções para facilitar o seu entendimento a certos temas, mas que pretende estendê-las a todas as questões que lhe conviessem encontrando uma variedade de opções para aplicar a sua metodologia, pois, como é sabido, quase todos os aspectos científicos até então necessitavam de modificações profundas. A Geometria não foge a regra e foi nesse campo que obteve os melhores resultados.

Para começar pela Matemática seria necessário então definir a linha reta ou o segmento de reta como o objeto geométrico fundamental e, a partir daí, definir uma simbologia, a mais simples possível, tomando o melhor da Álgebra, e aplicá-los, usando os fundamentos da análise geométrica. Para isso, o melhor da Álgebra seria a sua concisão simbólica, o poder de representar objetos por símbolos adequados, juntamente com a interpretação das operações fundamentais: adição, subtração, divisão, multiplicação, extração da raiz quadrada, de uma forma simplificada, mas de tal modo que as operações Matemáticas produzam segmentos de retas. A análise geométrica atuará concomitante com a Álgebra, desse modo, deixará de atuar somente sobre objetos geométricos específicos, generalizando-se, passará a ser uma ferramenta que transformará esse campo investigativo e outros. O melhor da análise geométrica é a sua filosofia, é o seu ideal heurístico que será transportado para outros campos do conhecimento. Assim, uma complementar a outra, obtendo-se, no fim, uma ideal científico capaz de superar muitas dificuldades ainda tidas como obstáculos intransponíveis.

Tendo notado que, para conhecê-las, teria necessidade de algumas vezes de considerá-las cada uma em particular, e em outras vezes somente de reter

ou de compreender várias em conjunto, pensei que, para melhor considerá-las em particular, deveria supô-las em linhas, porque não encontraria nada mais simples, nem que pudesse representar mais claramente à minha imaginação e aos meus sentidos; mas que, para reter ou compreender várias em conjunto, seria necessário que eu as designasse por alguns símbolos, os mais simples possíveis, e que, por esse meio, tomaria de empréstimo o melhor da análise geométrica e da Álgebra, e corrigiria todos os defeitos de uma pela outra. (DESCARTES, 1989, p. 46)

Essa nova concepção conceitual deu a Descartes muita satisfação, pois percebia a facilidade de lidar com muitas questões difíceis, até mesmo resolver questões que os antigos deixaram sem resolver ou não resolveram satisfatoriamente, por exemplo, o caso do problema de Pappus ilustra bem essa situação. Ao aplicar o seu método foi capaz de, em poucos dias, resolvê-lo completamente. Isso deu-lhe a auto confiança para avançar para outros casos. A nova concepção permitiu-lhe avançar das questões mais simples, gradativamente, para as mais complexas e, até mesmo, julgar os limites do seu conhecimento matemático.

E como, efetivamente, ousou dizer que a exata observação desses poucos preceitos que eu escolhera me deu tal facilidade de deslindar todas as questões às quais se estendem essas duas Ciências que, nos dois ou três meses que passei examinando-as – tendo começado pelas mais simples e mais gerais, e constituindo cada verdade que eu encontrava uma regra que me servia posteriormente para encontrar outras – não só consegui resolver muitas que antes julgava muito difíceis, como me pareceu também, perto do fim, que podia determinar, mesmo naquelas que ignorava, por quais meios e até onde seria possível resolvê-las. (DESCARTES, 1989, p. 46.)

Então, confirma a eficiência do método de análise-síntese oriundo da Geometria grega. O seu método matemático, ao mesmo tempo que contém todas as regras da Álgebra, também contém a certeza do conhecimento adquirido por meio da nova simbologia e do poder heurístico desse método.

Pois, enfim, o método que ensina a seguir a verdadeira ordem e a enumerar exatamente todas as circunstâncias daquilo que se procura contém tudo quanto dá certeza às regras da Aritmética. (DESCARTES, 1989, p. 47)

Mas a satisfação com o método não estava restrita a sua feliz aplicação no contexto geométrico-álgebrico. Descartes está disposto a aplicá-lo às dificuldades encontradas em outras Ciências, mas ordenadamente, pois pressentia, ao praticá-lo, que

estava usando toda a sua razão. O método permite descobrir as verdades, mas isso deve ser realizado progressivamente, pois a metodologia requer, acima de tudo, ordem na obtenção do conhecimento.

Mas o que mais me satisfazia nesse método era o fato de que, por ele, estava seguro de usar em tudo minha razão, se não perfeitamente, pelo menos da melhor forma que eu pudesse; além disso, sentia, ao praticá-lo, que meu espírito se acostumava pouco a pouco a conceber seus objetos de forma mais nítida e mais distinta, e que, não o tendo submetido a qualquer matéria particular, prometia a mim mesmo aplicá-lo tão utilmente às dificuldades das outras Ciências como fizera com as da Álgebra. Não que, para isso, tivesse a coragem de empreender primeiramente o exame de todas as que se me apresentassem, pois isso seria contrário à ordem que ele prescreve. (DESCARTES, 1989, p. 47)

No fim da segunda parte, Descartes escreve que pretendia levar, antes de tudo, o método à Filosofia, onde não existia nenhum preceito que fosse certo. Mas antes, esperou amadurecer-se, livrando seu espírito das opiniões incertas e acumulando experiências para posteriores aplicações. Já se observou que o método fora pensado num período anterior, em 1619 para ser certo, como escreveu a Beeckman certa vez, e que foi oficialmente declarado em *O Discurso*.

Entretanto, tendo notado que seus princípios deviam ser todos tomados à Filosofia, na qual não encontrava ainda nenhum que fosse certo, pensei que seria mister, antes de tudo, procurar ali estabelecê-los; e que, sendo isso a coisa mais importante do mundo, e onde a precipitação e a prevenção eram de recear, não devia empreender sua realização antes de atingir uma idade bem mais madura, do que dos vinte e três anos que eu então contava, e antes de ter despedido muito tempo em preparar-me para isso, tanto desenraizando de meu espírito todas as más opiniões que nele se aninharam até essa época quanto acumulando muitas experiências, para servirem mais tarde de matéria para raciocínios, e exercitando-me sempre no método que me prescrevera, a fim de me firmar nele cada vez mais. (DESCARTES, 1989, p. 47)

A Filosofia era a base das outras Ciências que eram pensadas separadamente e o fundamento da prática científica era a Filosofia aristotélica. Uma teoria poderia ser confirmada se fosse possível reunir diversos autores renomados que a comprovasse. O conhecimento obtido dessa maneira, bem como o conhecimento acumulado, não serão aceitos por Descartes. Desse modo, a idéia é partir de princípios claros e evidentes e então obter as verdades científicas.

Na terceira parte, Descartes anuncia quatro máximas que serão capazes de lhe permitir uma moral provisória. Descartes se mostra cauteloso, pois estava apresentando um método que recomendava a dúvida como ponto de partida e era um risco ser acusado de subverter a ordem social, como acontecera com Galileu. As três primeiras máximas, juntas, revelam a total adesão de Descartes as convenções sociais e morais. São elas:

1. Obedecer às leis e os costumes de seu país, preservando constantemente a religião, acatando as opiniões mais moderadas e mais distantes dos excessos.
2. Ser, em suas ações, o mais firme e resoluto que puder, pois as ações da vida não podem ser adiadas e é necessário conduzi-las mesmo que nos pareçam incertas.
3. Esforçar-se mais por vencer a si mesmo do que à sorte e por modificar seus desejos mais do que a ordem do mundo. Assim, Descartes assegura para si uma certa tranquilidade interior, afastando o sofrimento que advém de desejos irrealizáveis.

A quarta máxima é uma afirmação autobiográfica.

4. Passar o resto da vida cultivando a razão e aprofundando-se no conhecimento da verdade.

Desse modo, ele faz um “pacto” com o mundo, as autoridades sociais, a religião e a conduta prática de sua vida. Permitindo-lhe, em fim, encarar o que constitui o essencial de sua tarefa, ou seja, o problema metafísico, o fundamental da Filosofia.

Na quarta parte, Descartes revela por onde se deve começar, estabelecendo o seu axioma básico, a dúvida céptica, para rejeitar tudo o que é incerto. Posso duvidar do que penso e até mesmo das cadeias de raciocínios matemáticos. Mas, ao duvidar, reconheço o meu próprio pensar. Se tenho dúvida é porque penso e, se penso, é porque existo, ou seja: “penso, logo existo”. Esse é o ponto de partida de Descartes. De onde poderá conceber como claro e distinto os primeiros princípios de cada problema, ou seja, uma verdade concebida por mim, segundo minha opinião, é de fato um primeiro princípio universal, pois Deus, que é bondoso, não está me enganando. O que vejo, o que sinto, o que conheço são coisas verdadeiras, segundo esse princípio.

Em seguida, parte para a prova da existência de Deus baseando-se no primeiro princípio “penso, logo existo”. Este pressuposto é proveniente de uma dúvida. Ter dúvida é um sinal de imperfeição, mas se tenho a idéia de imperfeição é porque tenho a idéia do

perfeito, que não está em mim, logo é preciso reconhecer a existência verdadeiramente perfeita, Deus.

A existência de Deus é usada para provar a existência do mundo físico que é absorvido por nós pelo uso dos nossos sentidos. Por isso a evidência não pode ser usada. O mundo externo será então obtido por um tipo de aproximação. Primeiro, Deus que é onipotente, é o criador do mundo externo. Outro elemento a favor da existência do mundo externo é a idéia de extensão que temos no pensamento. A extensão nos dá a idéia de grandeza e forma, características do ideal geométrico que torna provável a existência dos corpos. Se temos a idéia clara de extensão impressa em nossas mentes, então há uma realidade extensa correspondente a ela, no mundo externo. A conclusão de que o mundo externo de fato existe deve-se ao fato da bondade divina, Deus não está nos enganando. O que vemos racionalmente na natureza é de fato algo que existe. Assim, Deus é o elo ligando o pensamento ao mundo externo. Desse modo, Descartes define duas substâncias distintas, o pensamento e o mundo externo, o corpo e alma.

A parte V, apresenta um resumo da obra *Traité du Monde* que era para ser publicada anteriormente ao *Discurso*, entretanto, devido a condenação de Galileu, em 1633, Descartes abandonou o projeto com medo de sofrer as mesmas censuras que Galileu sofrera, ou seja, ter todos os seus escritos desaprovados e queimados. Na obra cartesiana *Traité du monde*, Descartes também adotaria praticamente as mesmas concepções científicas de Galileu, a principal é que a terra se move. Descartes, em uma carta a Mersenne, segundo Kaugroker, se diz tão contrariado com a condenação de Galileu que pensara em queimar seus escritos ou não permitir que ninguém os vejam e que, se a tese de Galileu estiver errada, então todo o seu sistema filosófico também estaria, pois é possível provar a sua Filosofia a partir desse pressuposto. O *Traité du Monde* só foi publicado depois de sua morte, mas boa parte das idéias do tratado foram coligidas no *Discurso*, especialmente nesta quinta parte, onde escreve sobre as leis do movimento, segundo a qual, Deus criou uma matéria, uma extensão geométrica e por isso matematizável, isto é, Deus estabeleceu certas regras Matemáticas no mundo material que podem ser descritas ou explicadas matematicamente, é a noção mecanicista do mundo. No decorrer da quinta parte, Descartes passa então a explicar o movimento do coração que se

comporta como matéria e movimento, assim é a sua Física. Segundo sua visão, os animais são meras máquinas, pois são incapazes de pensar.

Na sexta e última parte, Descartes explica as razões que levaram-lhe a publicar *O Discurso do Método*. A principal é a sua contribuição para a evolução das idéias científicas para o bem da humanidade, a medicina principalmente, além de oferecer uma introdução aos ensaios científicos que permitem a possibilidade de entendermos como aplica seu método analítico para resolver problemas físicos e matemáticos.

Dedico aos ensaios um tempo maior para melhor compreendê-los, uma vez que neles encontraremos exemplos de sua metodologia aplicada e, desse modo, avaliar o tratado como um todo. Desse modo, devemos agora, para entender o método cartesiano, seguir o conselho do próprio Descartes, para comprovar o objetivo desta pesquisa, avaliar os ensaios científicos do *Discurso*. Ele chegou mesmo a afirmar a Mydorge que pretendia exemplificar que seu método é melhor que os demais através de *Os Meteoros* e de *A Dióptrica*, mas que em *A Geometria* foi onde obteve mais sucesso. Desse modo, começamos justamente pela ensaio *A Geometria*. Primeiramente, faço um estudo da obra e, observamos as evidências referentes a aplicação do método. Mas não limitaremos somente a aplicação metodológica, também apresentaremos outros estudos que, do ponto de vista da Matemática são interessantes, e merecem ser abordados e estudados.

### 3.2 A *Geometria* de Descartes

Como já observado, *A Geometria* de Descartes foi publicada, inicialmente, como um apêndice *O Discurso do Método*, em 1637. Depois, em 1649, *A Geometria* foi traduzida para o latim, por F. van Shooten, com notas dele e de F. de Beaune. Uma segunda edição, em latim, foi publicada em 1659-61 e continha contribuições de De Witt, Hudde, Van Heuraet, Bartholinus e van Shooten. Seu conteúdo pode ser dividido em três partes ou em três livros. Livro primeiro: Dos problemas que se podem construir sem empregar mais do que círculos e linhas retas<sup>45</sup>. Livro segundo: Da natureza das linhas curvas. Livro terceiro: Da construção dos problemas sólidos ou mais que sólidos.

---

<sup>45</sup> Segmentos de retas

### 3.2.1 Livro I

Na abertura do Livro I de *A Geometria* Descartes faz umaarrojada afirmação: “Todos os problemas da Geometria podem reduzir-se facilmente a termos tais que é desnecessário conhecer de antemão mais do que o comprimento de algumas linhas rectas para construí-los”(Descartes, 2003, p. 3). Os segmentos de retas eram os pressupostos básicos a partir dos quais Descartes pretendia construir toda a sua Geometria e para realizar isso, começa apresentando a relação entre as operações algébricas com as operações geométricas, onde mostra como superar o obstáculo da dimensionalidade, agora reduzindo todas as grandezas a um segmento de reta. Isso deve ser, adequadamente, associado com a sua moderna simbologia, uma característica extraordinária e inovadora da obra, e a seu método de resolver problemas, o método analítico-sintético, agora apresentado e adaptado a problemas geométricos de uma forma impressionante, pois, em resumo, todas as regras são substituídas por apenas três, a saber: nomear, equacionar e construir. Primeiro, consideramos o problema dado como se já fosse resolvido como a primeira etapa do método, em seguida, nomeamos, usando a nova simbologia cartesiana, todos os entes dados no problema, depois estabelecemos uma equação envolvendo esses entes geométricos agora representados algebricamente. Por fim, devemos construir a solução geometricamente.

No Livro I, Descartes mostra como as operações Aritméticas se relacionam com operações geométricas, ilustrando como realizar a multiplicação, a divisão e a extração da raiz quadrada geometricamente, isto é, com o uso de régua e compasso apenas, para tanto, introduz o segmento unitário, idéia fundamental para o desenvolvimento da Geometria. Mostra como empregar letras em Geometria e como resolver problemas geométricos ou o método de Descartes em Geometria, explica, em seguida, quais são os problemas planos e como resolvê-los. Resolve o problema de Pappus para quatro linhas aplicando o seu método pela primeira vez, nesta obra. A seguir analisamos essas passagens pormenorizadamente.

### 3.2.2 Como utilizar-se letras em Geometria.

Para os geômetras, dos gregos até Viète, a variável representava um comprimento, o produto de duas variáveis a área, o produto de três variáveis o volume. Já o produto de quatro ou mais variáveis não tinha significado específico. Em uma passagem, Gaukroger expressa bem a concepção grega de número relacionado a questão dimensional:

[...]Na Matemática antiga, a Aritmética era uma forma de Geometria métrica. Isso se evidencia na tentativa de Aristóteles de fornecer uma base conceitual e Metafísica para a concepção de número que vigorava em sua época. Ele entendia os números como segmento de reta (puramente intelectuais), sujeitos, em sua manipulação, a todas as restrições da manipulação dos segmentos de reta concretos. Aliás, quando Aristóteles e os matemáticos gregos e alexandrinos, de modo geral, falavam de números unidimensionais, de números planos (bidimensionais) e de números sólidos (tridimensionais), era exatamente isso o que pretendiam dizer. A Geometria não fornece apenas uma notação à Aritmética, e nenhum autor grego ou alexandrino jamais falou dos números como sendo apenas geometricamente representados. Esse tipo de interpretação geométrica do número fica claro na prática Matemática grega e Alexandrina. As proposições Aritméticas (vejam-se, por exemplo, os Livros 7 e 9 dos *Elementos* de Euclides) são formuladas em termos de segmentos de retas, não porque seja essa a forma como os números são representados, mas porque é isso que eles são. A prova mais marcante dessa idéia encontra-se na maneira como eram efetuadas as operações Aritméticas. Consideremos, por exemplo, o caso da multiplicação. Nela, multiplicam-se segmentos de retas por segmentos de retas, por exemplo,  $axb$  será um retângulo com lados de comprimentos  $a$  e  $b$ , enquanto  $axbxc$  será uma figura Sólida de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Embora lidemos com números abstratos, estamos sempre multiplicando números de algo por números de algo e, por conseguinte, há uma mudança dimensional na multiplicação, o que é indicado pelo fato de não podermos multiplicar mais de três números ao mesmo tempo, uma vez que o produto de três números (lineares) é um sólido, o que esgota o número de dimensões disponíveis. Por fim, essa concepção extraordinariamente restritiva da Aritmética do número encontrava um paralelo numa concepção igualmente restritiva da Aritmética e da Geometria, segundo a qual a finalidade do exercício era calcular um determinado número ou construir uma determinada figura, respectivamente. Para os matemáticos da Antigüidade, o problema só estava resolvido quando alguém conseguia calcular ou construir esse número ou essa figura determinados. E, no caso da Aritmética, apenas os números naturais eram admissíveis como soluções: os números negativos, em particular, não o eram, sendo vistos como números “impossíveis”. (GRAUKROGER, 2002, p. 122-3)

Como mostramos, nas discussões anteriores, Descartes desenvolveu o seu pensamento matemático em um longo período de aproximadamente nove anos. Ele

demorou para desenvolver as idéias principais de seu projeto reformador. Dois casos são evidentes para mostrar o seu empenho: a superação do obstáculo da dimensionalidade e a adaptação do método de análise e síntese como sua principal ferramenta para resolver problemas.

A questão da dimensionalidade era levada muito à sério pelos gregos, como mostra a citação de Gaukroger e impediu aos gregos de avançarem em muitos problemas, o caso do problema de Pappus é um exemplo claro dessa afirmação. Existem diversas passagens, já relatadas, nas obras cartesianas, que demonstram o seu esforço em superar o obstáculo da dimensionalidade. A primeira vez que Descartes mencionou essa questão foi quando se encontrou com Beeckman, em Dordrecht, 1628, mas é possível que essa questão já tivesse sido pensada num período anterior, pois em 1619, disse que já possuía os fundamentos da nova Ciência e, certamente, para renovar a Ciência de sua época seria necessário mudar o conceito da dimensionalidade, pois isso impedia a própria Matemática de avançar nos problemas que estavam sendo estudados. Depois, em 1628, propõe três formas de representar quantidades algebricamente, dependendo de como a unidade é representada. Se a unidade tem comprimento e largura, a representamos por meio de um quadrado; por um ponto, se a consideramos como sendo uma quantidade numérica discreta; por uma linha, se a vemos como tendo somente comprimento. Em seguida, tenta justificar como representar quantidades com dimensão superior a três, primeiro identificando um cubo ordinário de três dimensões com um cubo de madeira, um de quatro dimensões com um cubo de pedra, um de cinco dimensões com um cubo de ferro e assim sucessivamente. Quanto maior a dimensão do objeto, mais pesado o objeto é. Com isso, ele pretendia dar a questão da dimensionalidade um significado concreto.

Nas *Regulae*, Descartes volta a confirmar a importância em reinterpretar a questão da dimensionalidade, mas tratando-a, praticamente, como no relato de Beeckman.

A Regra XVI toca na questão mencionando primeiro a importância da concepção de unidade e de uma simbologia adequada para o desenvolvimento da Ciência, explicando como superar o obstáculo da dimensionalidade e como seria importante uma simbologia apropriada para tratar das questões Matemáticas, mostrando a concisão de sua simbologia e suas vantagens sobre a forma tradicional de tratar as questões Matemáticas:

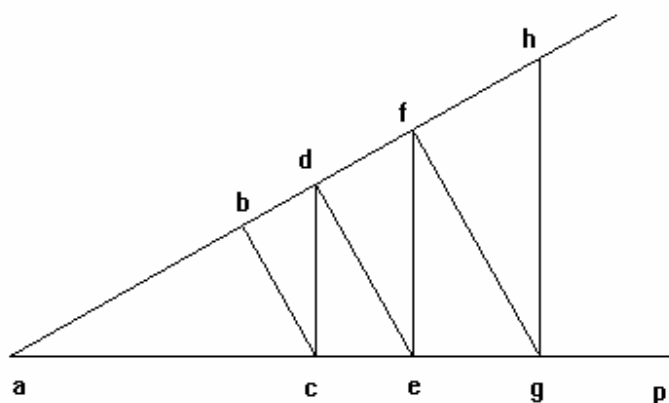
Para compreender tudo isto, deve-se advertir, em primeiro lugar, que os calculadores[os aritméticos] têm o costume de designar cada grandeza por várias unidades, ou por um número qualquer; mas nós, neste lugar, abstraímos cada grandeza das figuras geométricas de qualquer outra coisa. E fazemos isto não só para evitar o aborrecimento de um cálculo longo e inútil, mas sobretudo para que as partes do objeto que constituem a natureza da dificuldade fiquem sempre distintas e não carregadas de números inúteis; assim, por exemplo, se se procura a base de um triângulo retângulo, cujos lados dados sejam 9 e 12, dirá o calculador que ela é igual à  $\sqrt{225}$  ou 15; porém nós, em lugar de 9 e 12, poremos  $a$  e  $b$  e acharemos que a base[hipotenusa] do triângulo é igual a  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , e as duas partes  $a^2$  e  $b^2$ , que no número estão confusas, estas permanecerão distintas.( DESCARTES, 2002, p. 133)

Nessa passagem, Descartes argumenta contra o caráter restritivo das operações Matemáticas, interpretada, até aquele momento, segundo a idéia geométrica e propõe, em contra partida, abstrair as grandezas das figuras geométricas para descarregar o cálculo de elementos inúteis apresentando os símbolos que permitirão tratar a questão de uma forma ampla e geral. Com mais clareza ele adverte:

Deve-se advertir também que por número de relações se devem entender as proporções que se seguem em ordem contínua, proporções que na Álgebra comum se pretende explicar por várias dimensões e figuras das quais chamam à primeira raiz; à segunda quadrado, à terceira, cubo; à quarta bi-quadrado, etc. Confesso que esses nomes enganaram-me por muito tempo, pois depois da linha e o quadrado, nada mais claro me parecia poder ser proposto à minha imaginação do que o cubo e outras figuras semelhantes, e com sua ajuda eu resolvia grande número de dificuldades. Mas depois de muitas experiências me dei conta de que por meio deste modo de conceber as coisas não havia descoberto nada que não pudera conhecer mais e distintamente, sem ela; e devem ser rejeitados totalmente tais nomes para que não perturbem o conceito, porque, mesmo que uma grandeza possa se chamar cubo ou bi-quadrado, não se deve representa-la na imaginação de outro modo senão como uma linha ou uma superfície conforme a regra anterior. Assim pois há de notar-se que a raiz, o quadrado, o cubo, etc., não são outra coisa que grandezas em proporção contínua que se supunham sempre precedidas por aquela unidade fictícia de que já falamos mais acima. É esta unidade que a primeira grandeza proporcional se refere imediatamente por uma só relação; e a segunda mediante a primeira e, portanto, por duas relações; a terceira, por meio da primeira e da segunda, e por três relações, etc. (DESCARTES, 2002, p. 133).

Descartes demonstra, claramente, uma consciência que a superação do obstáculo da dimensionalidade seria fundamental para que pudesse progredir em seu projeto reformador

das Ciências de então. Assim, propõe reinterpretar as operações, especificamente, nesse parágrafo, refere-se a multiplicação, abstraindo-a da Geometria plana e espacial. A alternativa proposta por Descartes está vinculada a noção de proporção contínua, já discutida anteriormente nas *Cogitationes Privatae*, quando usou o compasso proporcional na tentativa de reformar a Matemática. A partir da figura abaixo podemos esclarecer melhor essa passagem. Nela, aplicando a semelhança de triângulos, obtemos a seguinte proporção contínua:



**Figura 15**

$$\frac{ab}{ac} = \frac{ac}{ad} = \frac{ad}{ae} = \frac{ae}{af} = \frac{ad^2}{ac} = \frac{ac^3}{ab^2}$$

Fazendo  $ab=1$ ,  $ac=x$ , obtemos  $ad=x^2$ ,  $ae=x^3$ , e assim sucessivamente. Essa interpretação permite pensar as operações em termos de segmentos de retas, pois uma vez estabelecido um segmento unidade  $ab$ ,  $x^3$  passa a representar a medida de um segmento, neste caso, o segmento  $ae$ , e não o volume de um cubo. Desse modo, o cálculo fica desvinculado da concepção geométrica.

Passaremos a estudar essas concepções em *A Geometria* que pode ser considerada o último estágio de seu desenvolvimento matemático. De fato, depois de sua publicação, Descartes perdeu o interesse pela Matemática e passou a preocupar-se com as questões metafísicas.

Em *A Geometria* Descartes introduz o segmento unitário que permite-lhe interpretar o símbolo  $a^2$  como o comprimento de um segmento e não como área, como era tradição naquela época, e, do mesmo modo, faz para as outras potências  $a^3, a^4, a^5, etc.$  Isso, juntamente com outras observações, e uma nova simbologia permite um avanço considerável no campo da Álgebra. Escreve  $aa$  ou  $a^2$ ,  $a^3$  ou  $aaa$ , indistintamente, e assim para as outras potências. Escreve  $a+b$  para a soma de dois segmentos de comprimentos  $a$  e  $b$ ,  $a-b$  para a diferença,  $ab$  para o produto,  $a/b$  para o quociente,  $\sqrt{a^2+b^2}$  para a raiz quadrada de  $a^2+b^2$  e  $\sqrt{C.a^3-b^3+ab^2}$  para a raiz cúbica de  $a^3-b^3+ab^2$ , onde o  $C$  indica que trata-se de uma raiz cúbica. Justifica que  $a^3$  tem tantas dimensões quanto  $abb$  e para se extrair a raiz cúbica de  $aabb-b$  deve-se considerar que  $aabb$  está dividida uma vez pela unidade e  $b$  multiplicada duas vezes pela unidade, desse modo, os monômios ficam reduzidos ao mesmo grau, segundo seu critério.

### 3.2.3 O método de Descartes na Geometria

Descartes estabelece o seu método analítico que, segundo ele, resolve todos os problemas em Geometria que pode ser resumidamente dividido em três partes, a saber: nomear, equacionar, construir. Esses três preceitos representam uma adaptação do método apresentado anteriormente no *Discurso*, contemplando aqueles quatro fundamentos essenciais.

Nomear consiste em supor que o problema já está resolvido e, a partir daí, dar nomes, usando variáveis, a todos os segmentos conhecidos e desconhecidos necessários à resolução do problema.

Equacionar é estabelecer uma equação envolvendo essas variáveis.

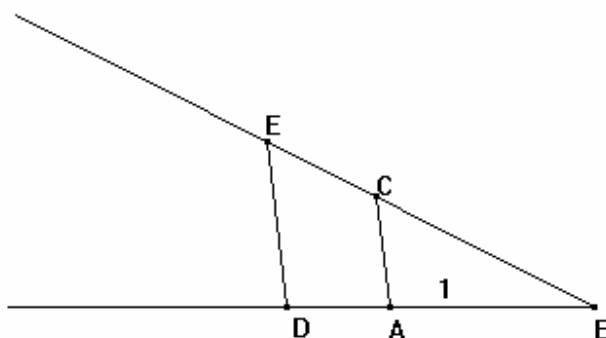
Construir, depois de o problema ser reduzido para uma equação, equivale a representar as soluções geometricamente. Por exemplo, se considerarmos problemas que usam régua e compasso apenas, então, no final serão reduzidos a uma equação do segundo grau. A etapa final é então construir as suas raízes.

Além da metodologia e a nova simbologia, Descartes introduz uma nova interpretação das operações geométricas e esses três componentes permitiram-lhe tratar os

problemas geométricos de uma forma algébrica. Passemos então ao entendimento das operações.

### 3.2.4 As operações

Para fazer o produto de  $a$  por  $b$ , Descartes toma duas semi-retas com mesma origem  $B$  e marca em uma delas o segmento unitário  $AB$  ( veja figura 16 ). Em seguida, marca nessa mesma semi-reta um segmento  $BD$  de medida  $a$  e, na outra semi-reta, o segmento  $BC$  de medida  $b$ . Traça um segmento de  $A$  até  $C$  e, em seguida, partindo de  $D$ , traça um outro segmento paralelo a  $AC$  que encontra a outra semi-reta em  $E$ , determinando o segmento  $DE$ . Usando a semelhança ou o Teorema de Tales conclui que  $BE$  mede  $ab$ , ou seja, o produto dos dois segmentos é um novo segmento e não uma área.

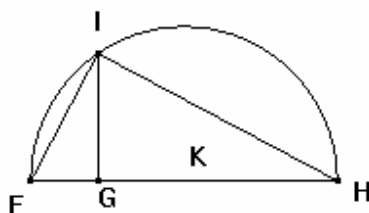


**Figura 16**

Para fazer a divisão toma duas semi-retas, como anteriormente, e marca o segmento unitário  $AB$  em uma delas ( veja figura 1). Na outra semi-reta marca os segmentos  $BC$  e  $BE$ , medindo respectivamente  $a$  e  $b$ ,  $a < b$ . Liga  $C$  a  $A$  por um segmento e depois traça um segmento paralelo a este segmento partindo de  $E$  até  $D$ , determinando  $b/a$ . Mas em *Geometria* não faz isso explicitamente.

Para extrair a raiz quadrada constrói um segmento unitário  $FG$  acrescentando na sua extremidade o segmento de medida  $K$ ,  $GH$ . Determina a circunferência cujo centro é o

ponto médio do segmento determinado pela unidade e por  $GH$  (veja figura 2). Em seguida, constrói o triângulo retângulo levantando uma altura a partir do ponto  $G$  até  $I$ , ponto que está sobre a circunferência do círculo construído, e usando a relação  $GI^2 = GH \times FG = GH$ , obtém a raiz quadrada.



**Figura 17**

### 3.2.5 Problemas planos

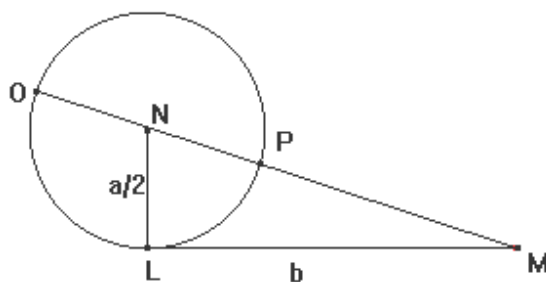
Descartes define problemas planos como sendo aqueles que podem ser resolvidos sem utilizar mais que linhas retas e segmentos circulares traçados sobre uma superfície plana, equivalentemente, são os problemas que se reduzem a uma equação do segundo grau<sup>46</sup>  $z^2 - az = \pm b^2$ . As raízes negativas dessas equações eram chamadas de falsas e as positivas de verdadeiras.

### 3.2.6 Resolução de tais problemas

As resoluções da equação  $z^2 = az + b^2$  desempenham uma função importante na Geometria, pois são pré-requisitos que serão utilizados posteriormente na obra. No problema de Pappus, no final da resolução, Descartes apenas indica que a construção pode facilmente ser realizada e isso corresponderá à parte sintética do processo de resolução do problema. Mas a parte sintética do problema de Pappus, a construção do problema, será totalmente exaurida na parte dois da obra.

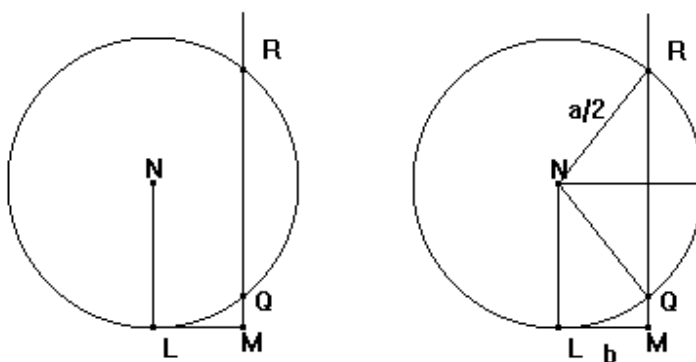
<sup>46</sup> A simbologia cartesiana para esta equação era da forma  $z^2 - az \propto \pm b^2$

Passemos a resolução. Seja  $z$  o termo ou segmento desconhecido. Primeiro, constrói o triângulo retângulo  $NLM$ , com  $LM = b$  e  $LN = a/2$ , depois constrói o círculo de centro  $N$  e raio  $NL$  ( veja figura 18). Prolongando  $MN$ , base<sup>47</sup> do triângulo  $LMN$  até  $O$ , de modo que  $NO$  seja igual a  $NL$ , então a linha  $MO$  é o segmento  $z$ .



**Figura 18**

A equação  $z^2 = az - b^2$ . Descartes constrói o círculo de centro  $N$  e raio  $NL$ , onde  $NL = a/2$ ,  $LM = b$  ( veja figura 19 ).



**Figura 19**

<sup>47</sup>Seguindo a tradição grega Descartes chama de base a hipotenusa do triângulo retângulo, pois os gregos construíam o triângulo retângulo apoiado sobre a hipotenusa. A palavra grega “hypoteínousa” ( que dá a nossa hipotenusa ) significa “a que se estende sob” ( o ângulo reto).

Constrói em seguida  $LM$  perpendicular a  $NL$ . Traça a partir de  $M$  uma paralela a  $NL$  que corta o círculo em  $Q$  e  $R$ . O segmento  $z$  será  $MQ$  ou  $QR$ . Se a paralela não corta o círculo, o problema não tem solução.

Descartes enfatiza que essas construções podem ser obtidas por diversos outros meios e que os antigos não possuíam esse método, caso contrário, argumenta, não teriam escritos livros tão volumosos que compilaram velhos problemas já resolvidos.

Passemos então ao problema de Papus, um ponto importante do trabalho de Descartes. Primeiro, porque, em *A Geometria*, é onde aplica a sua metodologia pela primeira vez e, segundo, porque podemos fazer uma comparação com o método de análise e síntese dos antigos geômetras gregos. Por último, destacamos que essa passagem é considerada uma mudança de paradigma, a transformação efetiva de um modo de pensar, é possível notar claramente o poder do método e da ferramenta criada por Descartes.

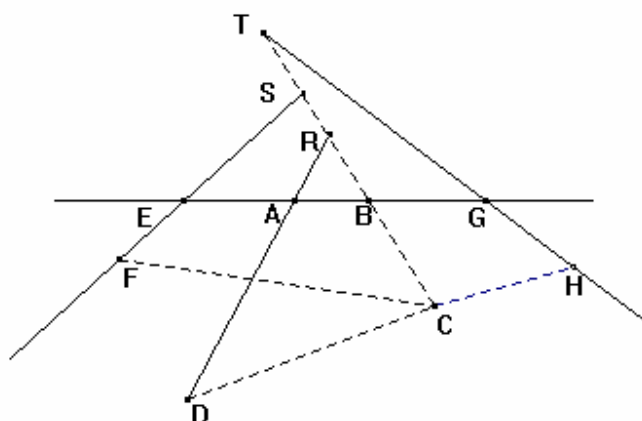
O problema de Papus foi proposto a Descartes e Mydorge em 1631 e foi o matemático Jacob Golius (1596-1667) quem o propôs. Descartes aplicou seu método de análise algébrica em problemas geométricos e ganhou a auto confiança necessária para supor que seu método matemático era superior aos dos antigos e aos métodos conhecidos em sua época. Vamos agora a análise da resolução apresentada por Descartes.

### 3.2.7 O problema de Papus para quatro linhas

Antes de apresentar sua metodologia na resolução do problema de Papus, Descartes faz considerações importantes a fim de mostrar que o problema era, de fato, um exemplo paradigmático. Assim, por meio de citações, mostra que os gregos foram incapazes de resolvê-lo em toda sua generalidade e que os principais pontos que impediram o avanço dos gregos foram o obstáculo dimensional e a completa falta de ligação entre Álgebra e Geometria. O problema foi conhecido pelos antigos geômetras gregos, Euclides o resolveu para três e quatro retas; Apolônio, segundo Papus, deu uma solução para o problema com referência a três ou quatro retas no Livro III de *As Cônicas* e Papus de Alexandria o generalizou para um número arbitrário de retas.

Devemos esclarecer que embora os gregos não admitissem dimensão superior a três, mesmo assim, Papus avançou na resolução do problema tentando dar a ele uma nova interpretação.

Passaremos agora à descrição do Problema de Papus. Sejam dadas as quatro linhas<sup>48</sup>  $AB, AD, EF, GH$ . Encontrar um ponto  $C$  tal que, dados os ângulos  $\alpha, \beta, \phi, \theta$ , linhas possam ser traçadas de  $C$  até  $AB, AD, EF, GH$  fazendo ângulos  $\alpha, \beta, \phi, \theta$ , respectivamente, tal que  $CB \cdot CF = CD \cdot CH$  (figura 20). Mais ainda, traçar e conhecer a curva contendo tais pontos. Descartes inova no tratamento desse problema, reduzindo-o a duas variáveis, o que permite, atribuindo-se valores a uma delas, determinar os valores correspondentes da outra e, a partir daí, conhecer o lugar geométrico dos pontos.



**Figura 20**

Primeiro Descartes faz algumas observações de como os gregos encararam esse problema, começando por explicar como Papus resolveu o problema para três e quatro linhas retas e que Papus, em ambos os casos, conclui que o local é uma das seções cônicas.

Esse lugar de três ou quatro linhas, a propósito do qual Apolônio se jacta e gaba das suas achegas, ainda que devesse estar reconhecido ao primeiro que o tratou, é o seguinte: Se, dadas as posições de três rectas, se traçam, a partir de um ponto, outras três rectas que formem com aquelas ângulos conhecidos, e se se dá a relação entre o rectângulo[produto]

<sup>48</sup> Retas.

formado por duas destas rectas com o quadrado da terceira (se há três), o ponto encontrar-se-à sobre um lugar sólido, dado em posição, quer dizer, sobre uma das três cônicas. Se as rectas dadas são quatro, e se [a partir de um ponto] se traçam outras quatro formando com aquelas ângulos dados, e se conhece a relação do rectângulo [produto] de duas das distâncias com o [produto] das outras duas, o ponto encontrar-se-à igualmente sobre uma secção cônica.

Se as rectas são apenas duas, está estabelecido que o lugar é plano; mas se há mais de quatro, o lugar do ponto não já desses conhecidos; é dos que se chamam simplesmente linhas (sem nada se saber de antemão sobre sua natureza ou as suas propriedades) e não se fez ainda a síntese de nenhuma destas linhas nem se demonstrou a sua aplicação a esses lugares; nem tão pouco à que parece ser a primeira e a mais indicada. Eis aqui como se apresentam esses lugares:

Se de um ponto se traçam para cinco rectas dadas outras rectas que formam com elas ângulos dados, e se dá a relação entre o paralelepípedo rectângulo formado por três das linhas e o paralelepípedo formado pelas outras duas e por outra linha dada, o ponto encontrar-se-à sobre uma certa linha.

Se as linhas dadas forem seis, e se dá a relação do sólido formado por três das distâncias ao sólido formado pelas outras três, o ponto encontrar-se-à igualmente sobre uma certa linha.

Se forem mais de seis rectas, já não pode dizer-se que se dá a relação entre um objeto compreendido por quatro rectas e outro formado pelas outras, pois não existe nada que esteja formado por mais de três dimensões. (DESCARTES, 2003, p. 15)

Claramente vemos que as dificuldades enfrentadas por Papus, segundo Descartes, as quais pudemos confirmar, estão localizadas no fato de Papus, assim como os gregos, não interpretar o produto para mais de três magnitudes geométricas e também da ausência de ferramentas algébricas. Mesmo para os casos de cinco ou seis retas não há nenhuma classificação significativa. Papus, segundo Descartes, tenta superar as dificuldades usando as razões compostas:

No entanto, os que antes de nós trataram este assunto (que não é possível imaginar uma figura que tenha mais de três dimensões), acordaram em falar sem designar qualquer figura concreta (dizendo apenas: ‘o compreendido por tais rectas em relação ao quadrado de tal recta, ou ao compreendido por tais outras’).

E é fácil, por meio das relações compostas, enunciar e demonstrar em geral as proposições antes citadas e as que seguem. Eis aqui como:

Se, a partir de um ponto, se traçam sobre rectas dadas, outras rectas que formem com elas ângulos dados e se dá a relação composta de uma das traçadas com outra delas; e, havendo um total de sete rectas, se dá a de um segundo par, a de um terceiro, enfim, a da última com outra dada; ou havendo oito, a relação das duas últimas, o ponto encontrar-se-à sobre uma determinada linha. Pode dizer-se o mesmo, qualquer que seja o número de rectas, par ou impar; mas, como disse, para qualquer desses

lugares que excedem o correspondente a quatro rectas, não existe uma síntese já feita que permita conhecer a linha. (DESCARTES, 2003, p. 15)

As citações de Papus, sobre as dificuldades enfrentadas pelos antigos, caem como uma luva para Descartes demonstrar a utilidade e a superioridade da sua metodologia. A construção do discurso cartesiano se baseia, primeiramente, em demonstrar as dificuldades dos antigos, a ausência de ferramentas apropriadas e também de um aparato conceitual adequado. Depois, em demonstrar como sua nova idéia é melhor, resolvendo o problema em toda a sua generalidade. Por isso, não é de se estranhar, em certas passagens, o discurso arrojado de Descartes, mas não devemos esquecer de mencionar que mesmo não conseguindo resolver o problema completamente, Papus mostrou a intenção de buscar a solução usando as razões compostas, o que pode ter sugerido a Descartes a existência de outros mecanismos que o capacitaria a resolver as dificuldades.

Na resolução, podemos, de início, constatar a presença da velha tática dos geômetras antigos para resolver problemas: considere o problema dado. Aliás essa deve ser considerada uma etapa fundamental do método, pois permite a concepção de todos os elementos necessários à resolução do problema. Mas, agora, Descartes tem um conjunto de ferramentas melhor e isto o fará progredir bastante. Assim, Descartes descreve a solução do problema de Papus pelo seu método:

Primeiro suponho o problema resolvido e, para sair da confusão de todas estas linhas, considero uma das dadas e uma das que há que encontrar, por exemplo, AB e CB, como as principais, às quais trato de referir todas as outras. Designe  $x$  o segmento da linha AB compreendido entre os pontos A e B; e seja CB designado por  $y$ ; e prolonguem-se todas as demais linhas até que cortem também estas duas, prolongadas se necessário e se não lhes são paralelas; como se vê elas cortam a linha AB nos pontos A, E, G e a linha BC nos pontos R, S, T. Ora bem, como todos os ângulos do triângulo ARB são dados, a proporção que há entre os lados AB e RB é também dada, e indico-a como de  $z$  para  $b$ ; de maneira que representando AB por  $x$ , RB será  $\frac{bx}{z}$  e a linha total CR será  $y + \frac{bx}{z}$ , pois o ponto B cai entre C e R; se R caísse entre C e B seria  $CR = y - \frac{bx}{z}$  e se caísse entre B e R, seria  $CR = -y + \frac{bx}{z}$ . Analogamente, os três ângulos do triângulo DRC são dados e, por conseguinte, também a proporção que há entre os lados

CR e CD, que indico como  $z$  para  $c$ , de modo que sendo  $CR = y + \frac{bx}{z}$ , será

$$CD = \frac{cy}{z} + \frac{bcx}{z^2}. \text{ Após isto, como as linhas AB, AD e EF são dadas em posição,}$$

a distância entre os pontos A e E também é dada e, designando-a por  $k$ , ter-se-á EB igual a  $k+x$ ; que seria  $k-x$  se o ponto B caísse entre E e A; e  $-k+x$  se E caísse entre A e B. E como todos os ângulos do triângulo ESB são dados, e estabelecendo que BE está para BS assim como  $z$  está para  $d$ , tem-se:

$$BS = \frac{dk + dx}{z} \text{ e a linha CS é } \frac{zy + dk + dx}{z}. \text{ Se o ponto S caísse entre B e C}$$

seria  $CS = \frac{zy - dk - dx}{z}$ ; e quando C cai entre B e S teremos

$$CS = \frac{-zy + dk + dx}{z}. \text{ Além disso os três ângulos do triângulo FSC também são}$$

conhecidos, e portanto é dada a proporção de CS para CF, que é como  $z$  para  $e$ , e

será  $CF = \frac{ezy + dek + dex}{z^2}$ . Analogamente, AG ou  $l$  é dada e BG é  $l-x$ , pois que

no triângulo BGT é também conhecida a proporção BG:BT= $z:t$ , teremos:

$$BT = \frac{fl - fx}{z}, \text{ sendo } CT = \frac{zy + fl - fx}{z}. \text{ Agora, como a proporção de TC para}$$

CH está dada pelo triângulo TCH, fazendo-a como  $z$  para  $g$ , tem-se

$$CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{z^2}. \text{ (DESCARTES, 2003, p. 21)}$$

Substituindo em  $CB.CF=CD.CH$ , obtemos uma equação do segundo grau em  $x$  e  $y$ . Atribuindo um valor a uma das variáveis encontramos a segunda. Como isso pode ser feito indefinidamente encontraremos uma infinidade de pontos e, a partir deles, poderemos construir a curva que representa o lugar geométrico. A resolução do problema de Papus, dada por Descartes, é reconhecida como a base para o desenvolvimento da Geometria Analítica. Reduzindo o problema a duas retas e ao graduá-las, constrói-se o sistema de coordenadas.

Podemos então caracterizar a metodologia aplicada por Descartes na Geometria, inspirado no exemplo que acabamos de ver. De fato, podemos notar a forte influência do método de análise e síntese da Geometria antiga e a junção da Álgebra com a Geometria. A primeira etapa do método cartesiano referido no Discurso é não aceitar como verdadeiro o que não for claro e evidente, este é o caso do problema de Papus, assim

devemos considerá-lo como algo a investigar e, a partir do seu enunciado, detectar o que é dado e o que é pedido.

A parte analítica, o segundo preceito do método, começa considerando o problema resolvido, isso permitirá, em primeiro lugar, decompor o problema, atribuindo nomes a todos os elementos envolvidos ou dados no enunciado do problema e que são importantes à sua resolução, nesse caso os segmentos. Descartes define por  $x, y$ , os dois segmentos principais e  $a, b, c, \dots$  os outros segmentos que serão dados em função destes. Em seguida, estabelece equações para os segmentos envolvidos no enunciado. Várias equações são encontradas. E, finalmente, reduz todas as equações a uma única e a mais simples possível, o que determina o fim da etapa analítica.

A parte sintética consiste em uma avaliação da equação encontrada, o que é feito por meio das ferramentas disponíveis e, depois, a construção do lugar geométrico utilizando-se a construção das raízes. Como o que foi obtido é uma equação do segundo grau em duas variáveis  $x$  e  $y$ , atribuindo valor a uma delas, por exemplo  $y$ , reduzimos a equação a uma do segundo grau, cuja construção das raízes e a validade da construção foi sugerida anteriormente. Posteriormente, no Livro II, após falar da classificação das curvas, uma passagem importante de *A Geometria* que será tratada depois, Descartes retornará ao problema de Papus. Dessa vez, para dar a classificação geral, ou melhor, explorar todas as possibilidades que a equação do segundo grau, obtida a partir do problema de Papus, com duas variáveis pode fornecer, esclarecendo quais são os lugares geométricos possíveis de se obter. Isto é, claramente, uma continuação da resolução do problema, ou melhor da parte sintética. Sabemos que toda equação geral do segundo grau, em duas variáveis, representa uma seção cônica ou as suas degenerações. Isso é o que Descartes concluirá.

Finalmente, a enumeração é realizada observando as passagens mencionadas, neste caso, seguindo a cadeia lógica estabelecida, podemos constatar de uma única só vez a firmeza dos elos estabelecidos. Assim, percorre todas as etapas do método. No final, temos a imagem total da resolução do problema, foi completamente exaurido e não há mais nada a declarar sobre ele.

Concluindo, podemos dizer que, no caso de *A Geometria*, a exemplo do problema de Papus, a metodologia cartesiana é diferente da apresentada pelos geômetras antigos, em

alguns aspectos. A análise cartesiana é algébrica, enquanto a dos antigos é geométrica, isto é, análise de figuras. O que permitiu Descartes unir a Geometria e a Álgebra e superar as dificuldades de seus antecessores foi a introdução de importantes mudanças conceituais, além da mudança metodológica.

A *Geometria* é, como se vê por meio do exemplo de Papus e de outros, uma obra inovadora no campo da Matemática, onde encontramos mudanças conceituais importantes. Outros conceitos importantes são introduzidos por Descartes quando fala das curvas que devem ser aceitas em Geometria. Neste caso, tenta estabelecer os limites da Geometria. Esse é o nosso próximo objetivo.

### 3.3 Livro II

O segundo livro pode ser dividido em quatro partes: a primeira apresenta a classificação de curvas de Descartes, a segunda parte contém uma análise completa das curvas necessárias para resolver o problema de Papus para quatro retas e para um caso especial de cinco retas, a terceira seção apresenta o método da normal ou da tangente e a quarta seção mostra como aplicar a Geometria para resolver problemas em *A Dióptrica*, especificamente problemas relacionados com as ovas. O Livro II também contém exemplos importantes da aplicação do método cartesiano à matemática, além disso, ilustra que o propósito de Descartes, ao escrever esse tratado científico, é mais do que a aplicação de sua metodologia, Descartes pretendia estabelecer os limites da Geometria, em outras palavras, o início e o fim da Geometria. Essa idéia ocorre quando é dado os conceitos de curvas geométricas e de curvas mecânicas, pois esses conceitos delimitam as curvas que devem pertencer ao reino da Geometria e as que não são.

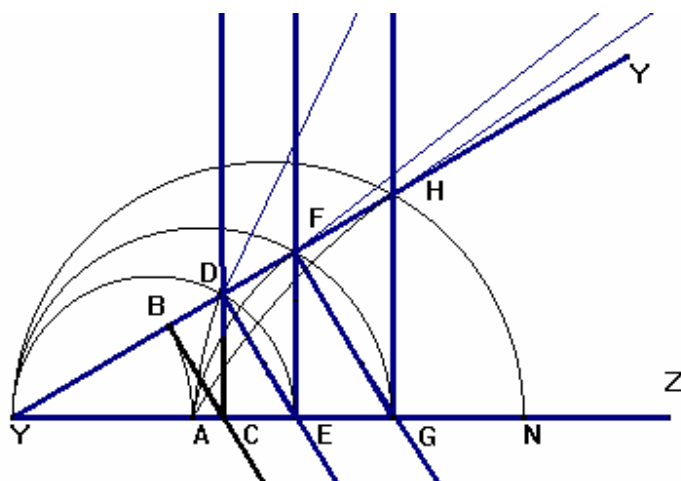
#### 3.3.1 Curvas geométricas e curvas mecânicas

Descartes faz a seguinte distinção entre curvas geométricas e curvas mecânicas, no início do Livro II.

[...] por geométrico é o que preciso e exato, e por mecânico o que não o é, e considerando a Geometria como uma Ciência que ensina geralmente a conhecer as medidas de todos os corpos, não devem excluir-se as linhas por composta que sejam, enquanto possam imaginar-se descritas por um movimento contínuo, ou por vários que se sucedem, e em que os últimos estão inteiramente regidos pelos que os precedem; pois por este meio se pode sempre ter um conhecimento exato da sua medida. (DESCARTES, 2003, p.29).

Descartes admite como curvas geométricas aquelas geradas por um movimento contínuo e regulado, aquele gerado por uma espécie de máquina, como a da figura 21, abaixo.

As curvas mecânicas são as curvas que não podem ser descritas por uma equação algébrica, mais tarde, Leibniz chamou-as transcendentais, curvas descritas por dois movimentos separados, somente pontos especiais podem ser construídos, curvas que algumas vezes são linhas retas e algumas vezes são linhas curvas, pois a proporção entre linhas retas e linhas curvas não era conhecida. Exemplos de curvas mecânicas: a quadratriz, a espiral, a hélice. Exemplos de curvas geométricas, as seções cônicas.



**Figura 21**

O que Descartes está admitindo como curvas geométricas são aquelas definidas por equações algébricas, uma vez que todas as curvas obtidas, a partir da figura 21, podem

ser dadas nessa forma<sup>49</sup>. Descartes ainda admitiu outro tipo de curva na Geometria, as que podem ser construídas ponto a ponto, como é notado claramente na resolução do problema de Papus, onde ele diz, após obter a equação fundamental que resolve o problema, que deveria construir a solução, etapa final de seu método, atribuindo valores a uma das variáveis para construir a outra, geometricamente, e, a partir daí, obter uma infinidade de pontos que permitirão traçar a curva.

Mas, segundo Descartes, nem toda curva construída ponto a ponto poderá ser admitida em Geometria, o exemplo é o da quadratriz. Descartes bane a quadratriz do reino das curvas geométricas, fato já conhecido pelos antigos geômetras gregos, por ela não poder ser construída ponto a ponto. Na verdade, nem todo ponto é possível de se obter. Entretanto, Mancosu sugere, argumentando convincentemente, que o motivo pode ter sido impulsionado por outras questões. Descartes bane a quadratriz do reino da Geometria, pois ela era usada, desde a Antigüidade, para quadrar o círculo, o que era impossível usando régua e compasso. Devemos explicar um pouco mais.

Na Geometria, os exemplos sobre curvas mecânicas são limitados e Descartes oferece como exemplos apenas a quadratriz e a espiral. Elas são rejeitadas porque são descritas por dois movimentos separados entre os quais nenhuma proporção pode ser medida exatamente. Mas, segundo Mancosu (1996, p. 77), Descartes estudou pelo menos uma outra curva antes de 1637, a saber, a hélice cilíndrica e a rejeitou como geométrica. Descartes oferece outro critério para rejeitar curvas mecânicas, a saber, as construções por fio que às vezes fornecem curvas constituídas de linhas retas e linhas curvas, pois, para ele, a proporção entre curvas e retas era impossível. Esse critério nos remete à Física de Aristóteles ou ao dogma de Aristóteles, segundo o qual, não existe proporção entre curvas e retas. A primeira retificação de curvas ocorreu em 1650, o que poderia ter abalado a estrutura da Geometria, mas esse não é caso, pelo menos não há relatos sobre isso naquela época. Mancosu sugere que o motivo é que a quadratura do círculo é impossível geometricamente e exhibe uma carta de Descartes para Mersenne, de 13 de novembro de 1629, para confirmar a sua suposição. Na carta, Descartes dá várias razões para excluir

---

<sup>49</sup> Considere, na figura,  $YA=YB=a$ ,  $YC=x$ ,  $YD=z$ , assim usando a semelhança de triângulos, obtemos  $z:x = x:a$ , ou  $z = x^2:a$ . Por Pitágoras  $z^2 = x^2 + y^2$ , a equação de AD será  $x^4 = a^2(x^2 + y^2)$ . Do mesmo modo, fazendo  $YA=YB=a$ ,  $YE=x$ ,  $EF=y$ ,  $YF=z$ , obtemos  $YD = x^2:z$  e  $x:YD = YD:YC$ , e portanto  $YC = x^3:z^2$ . Como  $YD:YC=YC:a$ ,  $ax^2:z = (x^3:z^2)^2$ , e  $z^2 = x^2 + y^2$ , obtemos finalmente AF:  $x^8 = a^2(x^2 + y^2)^3$ , e assim sucesivamente podemos obter as outras curvas. AH seria  $x^{12} = a^2(x^2 + y^2)^5$ .

curvas como a quadratriz e a hélice do domínio da Geometria, argumentando que apenas alguns pontos podem ser construídos. A quadratriz, adiciona, só pode ser gerada por dois movimentos independentes e a hélice é gerada por uma linha (fio). Descartes as excluem porque, ambas, permitem quadrar o círculo e trisseccionar o ângulo, não nos dando nada de novo em Geometria. Na Antigüidade, para quadrar o círculo, eram usadas a quadratriz, a hélice cilíndrica e a espiral. Para finalizar o seu argumento, Mancosu cita outra carta de Descartes a Mersenne, de 31 de março de 1638, segundo a qual, Descartes diz que é contra a natureza dos geômetras adiantar problemas que eles não podem resolver e, além do mais, alguns problemas são impossíveis, como a quadratura do círculo. Assim ele unificou esse critério de não existir nenhuma relação entre linhas curvas e linhas retas com o critério da impossibilidade de quadrar o círculo. Segundo Mancosu, isso foi realizado devido ao conhecimento de Descartes da obra de Arquimedes, onde a quadratura do círculo é equivalente a retificação da circunferência.

### 3.3.2 Uma análise completa das curvas necessárias para resolver o problema de Papus para quatro linhas e para o caso especial de cinco linhas

Nesta parte, Descartes explora todas as possibilidades do problema de Papus, quando proposto para quatro e três retas, mostrando que não obteremos mais que as seções cônicas. Essa parte corresponde a finalização do procedimento do estudo do problema de Papus. O caso para três retas é realizado considerando a terceira e quarta retas coincidentes e, nesse caso, a proporção fica  $CB.CF=CD.CD$ . O caso especial para cinco retas é quando tomamos quatro delas paralelas e a quinta perpendicular as essas quatro. A estratégia básica é a mesma usada anteriormente. A generalização do problema de Papus consiste em notar, como fez, que a distância de  $C$  a cada reta é uma expressão com duas variáveis do tipo  $ax + by + c$ . Ao substituir na condição dada, teremos um produto, em cada membro, com  $n$  fatores para o caso de  $2n$  ou  $2n-1$  retas.

### 3.3.3 O método da normal ( ou tangente ) de Descartes

Esse é também um exemplo valioso da metodologia cartesiana, não apenas do ponto de vista de verificar como o método cartesiano se aplica à Matemática, mas também de verificar qual a concepção Matemática de reta tangente em Descartes. Não devemos esquecer que o cálculo diferencial e integral foi fundamentado num período que viria logo a seguir, por Leibniz e Newton, e que as idéias precedentes à descoberta devem ter sido importantes. Nesse sentido, é conveniente exemplificar, mais uma vez, como ele usa o seu método para resolver problemas em Geometria. O exemplo é o da normal (ou da tangente) à elipse. Antes de dar exemplos às curvas específicas, Descartes ensina, de forma geral, como proceder em relação a uma curva arbitrária.

A primeira etapa do método aplicado à Geometria é nomear. Consideremos então o problema de obter a normal a uma curva dada, CE. Tomamos o problema como resolvido e nomeamos os segmentos necessários à sua resolução. Em seguida, aplicamos a segunda





redução de todos esses problemas ao da trissecção de um ângulo ou da construção dos meios proporcionais, e por fim, a construção das raízes de quinto e sexto grau (problemas supersólidos). Embora o Livro III não traga inovações conceituais importantes, como os Livros I e II, por meio dele, podemos obter uma visão panorâmica da Matemática daquela época e constatar que a simbologia algébrica permitiu à Descartes tratar, com flexibilidade, muitos resultados relacionados às equações algébricas, e também, avaliar o projeto cartesiano à Matemática mais profundamente.

### 3.4.1 Análise completa das raízes de Equações

O Livro III começa estabelecendo um critério de simplicidade para as curvas geométricas. Assim, escreve Descartes:

[...] não pode dizer que seja lícito servir-se da primeira [equação] que se encontra para a construção de cada problema, pois é necessário ter o cuidado de escolher sempre a mais simples que permita resolvê-lo. E é ainda necessário observar que devem entender-se por mais simples não as que possam ser mais facilmente traçadas, nem as que tornam a construção ou a demonstração do problema mais fácil, mas principalmente as que, sendo da classe mais simples, possam servir para determinar a grandeza que se busca. (DESCARTES, 2003, p. 99).

O critério de simplicidade que, na opinião de Descartes, todo método deve ter é exigido aqui e esse critério será útil quando Descartes abordar as construções das raízes dos polinômios de grau 3, 4, 5, 6, etc.. Para esclarecer essa noção de simplicidade que as curvas devem ter apresenta, em seguida, o processo de contruir os meios proporcionais, uma vez que isto é bastante importante na sua teoria de resolução de problemas sólidos. Para Descartes, o meio mais fácil de construir meios proporcionais é utilizando-se do mesolábio. As curvas obtidas por essa engrenagem são as chamadas gemétricas, as aceitas no reino da Geometria. Mas Descartes argumenta que as seções cônicas, que são curvas pertencentes a primeira classe, podem ser usadas para cosntruir os meios proporcionais, enquanto que a curva mais simples obtida do mesolábio é de segunda classe, insinuando, neste caso específico, que devemos sempre tomar a curva com equação de grau menor. A construtibilidade das curvas de grau dois foram apresentadas no Livro I.

Mas, como a linha AD é da segunda classe (pp.31/35), e podem encontrar-se dois meios proporcionais pelas seções cônicas, que são do primeiro; e como também se podem encontrar quatro ou seis meios proporcionais por meio de linhas que não são de uma classe tão elevada como o são AF e AH, seria um erro empregá-las em Geometria. E constitui também um erro, por outro lado, trabalhar inutilmente querendo construir algum problema por uma classe de linhas curvas mais simples do que a sua natureza permite. (DESCARTES, 2003, p. 101).

Descartes substitui o critério geométrico por um critério algébrico e isso o permitirá obter construções mais simples ou reduzir os problemas para construções padrões, o que é feito depois de apresentar as propriedades das equações aceitas em Geometria. Convém lembrar que o critério de obter curvas via mesolábio era antigo e foi usado por Descartes quando resolveu algumas equações de segundo e terceiro grau sugeridas em uma carta a Beeckman. Mas agora tem a álgebra como um novo modelo e certamente percebeu que o novo critério poderia facilitar as construções mais complexas, reduzindo-as para equações modelos.

O Livro III pode ser entendido como o fechamento de um propósito, no fim dele, Descartes irá estabelecer critérios de construtibilidade, ou seja, irá estabelecer uma teoria das construções geométricas para as equações das curvas aceitas em Geometria. Relembremos que no Livro I Descartes estabeleceu critérios de construtibilidade para as equações do segundo grau. Esses critérios serão retomados agora para curvas de equações com grau superior a dois. As equações resultante dos problemas investigados deveriam ser construídas geometricamente, mas antes de serem efetuadas, as equações deveriam ser simplificadas para uma forma irreduzível, um modelo ou forma padrão já conhecido. Para realizar isso, Descartes propõe as propriedades das equações polinomiais, isto é, várias técnicas para realizar as transformações necessárias que podem ser resumidas em três temas: raízes de equações, transformação de equação por substituição linear e as reduções.

### 3.4.2 As propriedades

Depois dessas considerações iniciais, Descartes apresenta as propriedades das equações polinomiais com coeficientes reais e suas raízes. Chama as raízes reais e

positivas de verdadeiras e as negativas, de falsas. A variável é chamada de quantidade desconhecida e o coeficiente da variável, de quantidade conhecida. A ausência de um termo da equação é indicada por um asterisco (\*). O grau da equação é, para Descartes, a dimensão. As propriedades apresentadas em *A Geometria* são, em muitos casos, parecidas com aquelas que encontramos nos livros do terceiro ano do ensino médio de nossos dias e entre essas propriedades está a regra do sinal de Descartes. A importância dessas propriedades é que elas são usadas, por ele, para resolver problemas de *A Geometria* que recaem em equações algébricas. Vamos às propriedades.

A quantidade de raízes de uma equação pode ser igual a dimensão da equação, isto é, a sua maior potência. Isto sugere que ele já conhecia ou desconfiava do resultado que viria a ser conhecido como teorema fundamental da Álgebra, embora em *A Geometria* não apareça nenhum comentário adicional sobre isto.

Para diminuir a dimensão de uma equação, conhecendo-se uma de suas raízes,  $a$ , basta dividir a equação pelo binômio  $x - a$ , onde  $x$  é a quantidade desconhecida. Para saber se o valor  $a$  é a raiz de uma equação, procede dividindo o polinômio pelo binômio  $x - a$ . Se a divisão for exata, então o valor  $a$  é uma raiz.

A Regra do Sinal de Descartes é apresentada tomando o exemplo dado em *A Geometria*, quando fala das raízes da equação:  $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ .

A saber: podem existir tantas verdadeiras como de vezes os sinais + e - se encontrem trocados; e tantas falsas como de vezes se encontrem dois sinais + ou dois sinais - seguidos. Assim, na última, depois de  $+x^4$  segue  $-4x^3$ , há uma variação de sinal de + para -; e depois de  $-19x^2$  segue-se  $+106x$  e depois de  $+106x$  vem  $-120$ , o que corresponde a outros dois câmbios, donde se conclui que há três raízes verdadeiras; e uma falsa, em virtude dos dois sinais seguidos que antecedem  $4x^3$  e  $19x^2$ . (DESCARTES, 2003, p.105).

Para transformar as raízes falsas em verdadeiras e as verdadeiras em falsas, basta trocar os sinais + e - que estão nas posições pares sem trocar os das posições ímpares. Por exemplo, a equação  $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$  possui como raízes 2, 3, 4 e -5. Depois de aplicar a técnica mencionada, ela passa a ser  $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$ , que possui raízes -2, -3, -4 e 5.

Para aumentar o valor das raízes basta fazer a substituição da variável  $x$  por outra do tipo  $y-a$ , ou  $y+a$  para diminuir. Na equação:  $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$ , querendo aumentar o valor das raízes de 3 unidades, basta fazer a substituição  $y = x+3$  e teremos  $y^4 - 8y^3 - y^2 + 8y = 0$ , cujas raízes são  $1, 0, -1$  e  $8$ .

Aumentando as raízes verdadeiras, diminuem-se as falsas, e inversamente, o que é obvio a partir do exemplo anterior.

Para anular o segundo termo de uma equação basta diminuir as raízes verdadeiras da quantidade conhecida deste segundo termo dividida pelo número de dimensões do primeiro, se estes dois termos tiverem sinais opostos; ou, tendo o mesmo sinal, aumentando as raízes da mesma quantidade. Assim, para anular o segundo termo da equação  $y^4 + 16y^3 + 71y^2 - 4y - 420 = 0$  tendo dividido 16 por 4, em virtude das 4 dimensões do termo  $y^4$ , obtêm-se, pelo que se faz  $z - 4 = y$ , e se escreve  $z^4 - 25z^2 - 60z - 36 = 0$ .

Para transformar as raízes falsas em verdadeiras sem que as verdadeiras se transformem em falsas, basta aumentar o valor das verdadeiras de um valor que seja superior ao de qualquer uma de todas as falsas.

Para transformar todos os termos de uma equação em termos significativos, por exemplo:  $x^5 - a^5 - b = 0$ , multiplicando  $a$  por  $x$  teremos  $x^6 - bx = 0$ , substituindo  $y-a = x$ , obteremos  $y^6 - 6ay^5 + 15a^2y^4 - 20a^3y^3 + 15a^4y^2 - (6a^5 + b)y + a^6 + ab = 0$ .

Para multiplicar (ou dividir) as raízes sem conhecê-las por um número  $k$  basta multiplicar (ou dividir) o segundo termo por  $k$ , o terceiro por  $k^2$ , o quarto por  $k^3$ , e assim sucessivamente.

Para reduzir os coeficientes quebrados<sup>51</sup> de uma equação em números inteiros, por exemplo:  $x^3 - \sqrt{3}x^2 + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0$ . Fazendo  $y = x\sqrt{3}$ , e substituindo na equação anterior, teremos  $y^3 - 3y^2 + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} = 0$ . Depois fazendo  $z = 3y$ , e mais uma vez substituindo, resulta

---

<sup>51</sup> O termo indica tanto os decimais racionais quanto os decimais irracionais, esses últimos são também chamados surdos.

$z^3 - 9z^2 + 26z - 24 = 0$ , cujas raízes são 2, 3 e 4, as anteriores são  $\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}$  e as primeiras  $\frac{2\sqrt{3}}{9}, \frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{9}$ .

Para transformar uma quantidade conhecida de qualquer termo em outra quantidade qualquer dada, por exemplo  $x^3 - b^2x + c^2 = 0$ , para trocar  $b^2$  por  $3a^2$  fazemos  $y = x \sqrt{\frac{3a^2}{b^2}}$  e obtemos  $y^3 - 3a^2y + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} = 0$ .

Segundo Descartes, podem existir raízes imaginárias positivas e negativas, como no exemplo  $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ . Dois é uma raiz, mas as outras serão sempre imaginárias, ele diz: podem ser imaginárias falsas ou verdadeiras.

Para dividir uma equação por um binômio que contém a sua raiz, aplica, basicamente, o mesmo critério de divisão de polinômios que usamos hoje, apenas inverte, começando do último termo.

Descartes diz que para um problema ser sólido, a cúbica não pode ser divisível por nenhum binômio, ou seja, deve envolver uma cônica ou uma curva mais elevada.

À transformação das equações do tipo  $x^4 + px^2 + qx + r = 0$  em  $y^6 + 2py^4 + (p^2 + 4r)y^2 - q^2 = 0$ , usa a identidade  $x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 - yx + s)(x^2 + yx + t)$ . A partir daí, pode-se tentar encontrar  $y^2$  e, não sendo possível, o problema é sólido. Descartes usa essas propriedades para resolver o problema da convergência ou da inclinação, apresentado e também resolvido por Pappus.

Em seguida, dá a regra geral para reduzir as equações de grau superior ao quadrado do quadrado. Diz que não sendo possível obtê-las por multiplicação de outras duas de grau inferior, se a quantidade desconhecida tem 3 ou 4 dimensões, o problema é sólido; se tem 5 ou 6, o problema é de grau mais elevado, e assim sucessivamente.

Estabelece a forma geral de construir todas os problemas sólidos reduzidos a uma equação de três ou quatro dimensões. Se o problema é sólido podemos sempre encontrar

a raiz por qualquer das secções cônicas, mas Descartes demonstra que é possível encontrar todas por meio de uma parábola.

Explica a invenção dos meios proporcionais que é realizada através de construções envolvendo parábolas e círculos e como trisseccionar um ângulo.

Em seguida, demonstra que todos os problemas propostos podem ser reduzidos ao problema da trissecação do ângulo e da construção dos meios proporcionais.

Finalizando, explica como expressar todas as raízes das equações cúbicas e todas as que não chegam mais que ao quadrado do quadrado. Por que razão os problemas sólidos não podem ser construídos sem as secções cônicas, nem os que são mais compostos, sem algumas linhas mais compostas. Apresenta a forma geral de construir todos os problemas reduzidos a uma equação que não tem mais de seis dimensões.

Convém assinalarmos alguns fatos importantes nessa teoria das equações polinomiais apresentadas por Descartes. Na obra, elas têm uma função especial, o interesse nas raízes relaciona-se com as construções obtidas, geralmente, interseccionando duas curvas, onde as raízes eram construídas de acordo com os pontos de intersecção e o sinal da raiz era determinado pela posição delas em relação aos eixos ordenados. No caso do exemplo da equação do sexto grau as raízes eram todas positivas e reais. As transformações lineares eram importantes, pois mostravam como uma equação poderia ser reduzida à forma padrão. As técnicas buscavam detectar se certas equações eram redutíveis ou para detectar se problemas planos conduziam a equações de grau maior que dois ou se problemas sólidos conduziam a equações maiores que 4, etc. Descartes apresentou as propriedades relacionando os graus, os coeficientes e as raízes, não demonstrando nenhuma delas, simplesmente afirmou que um leitor atento seria capaz de entendê-las com facilidade. Tudo indica que Descartes baseou suas afirmações no princípio de que:

$$ax^n + a_1x^{n-1} + \dots + a = a(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

Quanto a equação do segundo grau não era necessário fazer considerações adicionais, pois, no Livro I, Descartes apresentou os critérios de construção das raízes reais da equação do segundo grau. As equações do terceiro e do quarto grau deveriam ser

redutíveis à forma  $x^4 = \pm px^2 \pm qx \pm r$ , com  $x^3$  ausente e  $p, q, r$  positivos. As equações de sexto e quinto grau deveriam ser reduzidas para  $x^6 - px^5 + qx^4 - rx^3 + sx^2 - tx + v = 0$ , os coeficientes são alternados, positivos e  $q$  é maior que o quadrado de  $p/2$ .

A maioria das substituições era do tipo  $x = bx + a$  e pretendia-se com elas transformar as raízes verdadeiras em falsa e vice versa, além de aumentar ou diminuir as raízes. Já a transformação  $x = y \pm a/n$  eliminava o segundo termo da equação polinomial, usada para obter a forma padrão do terceiro e quarto grau e também para checar a redutibilidade da equação do quarto grau.

A transformação  $x = y - a$  tornava as raízes falsas em verdadeiras e as verdadeiras continuavam verdadeiras, se a constante fosse escolhida maior do que a maior das falsas. Descartes ainda anunciou que, depois de fazer a transformação, na equação resultante, nenhum coeficiente sucessivo tinha o mesmo sinal e que, se  $a$  fosse escolhido suficientemente grande, o coeficiente  $p$  e  $q$  da equação  $y^n - p y^{n-1} + q y^{n-2} - \dots + a_0 = 0$  satisfaria  $q > (p/2)^2$ . Esse procedimento permitiria Descartes chegar na equação modelo do sexto grau. Esse tipo de transformação, de uma forma ou de outra, fazia com que todos os coeficientes da equação fossem não nulos. Em particular, Descartes mencionou que o termo constante de uma equação poderia ser não nulo, a equação do sexto grau pressupõe essa exigência. Neste ponto, Descartes também observa que uma equação de grau  $n-1$  poderia ser transformada em uma equação de grau  $n$  bastando multiplicá-la por  $x$ . As duas técnicas foram importantes, pois dada uma equação do quinto grau ela poderia ser transformada em uma do sexto grau, multiplicando-a por  $x$  e, depois, por  $x = y - a$ , obteria uma equação do sexto grau com o termo constante diferente de zero.

As substituições do tipo  $x = ay$  e  $x = y/c$  serviam para multiplicar e dividir raízes sem conhecê-las, eliminar os coeficientes fracionários e em alguns casos os coeficientes irracionais, como mostra o exemplo dado mais acima. Essa técnica também foi usada para transformar um dado coeficiente em um outro escolhido previamente, mantendo o primeiro coeficiente igual a 1. Mas essa técnica, em muitos casos, não reitira os fatores irracionais.

Quando apresentou seu método Descartes ensinou como reduzir problemas para uma equação em uma variável, seguindo o modelo cartesiano a equação deveria ser do tipo  $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a = 0$ . A escolha de uma variável em um problema era importante,

pois, dependendo da escolha, obteríamos equações diferentes, com graus diferentes. Assim, de acordo com a escolha, o geômetra poderia resolver um dado problema plano usando uma técnica inapropriada, pois poderia interpretá-lo como não sendo um problema plano. Descartes concluiu que se ao resolver um problema plano o geômetra encontrasse uma equação de grau maior que dois, então esta equação seria redutível a uma do segundo grau. Desse modo, um teste seria necessário para evitar escolhas indevidas de formas de construção sobre as bases do grau da equação.

Quanto a redutibilidade Descartes considerava uma equação redutível quando podia ser escrita como produto de dois polinômios, de grau menor, com coeficientes que poderiam ser construídos com segmentos de retas e círculos a partir dos coeficientes do primeiro polinômio. Assim, como as raízes reais das equações do segundo grau, mostradas no Livro I, eram sempre construtíveis, elas eram redutíveis.

O estudo da redutibilidade das equações do terceiro e quarto grau foram tratadas no fim do Livro III e Descartes estudou a redução da equação cúbica quando o problema é plano, quais problemas são sólidos quando a equação é cúbica, a redução de equações com quatro dimensões quando o problema é plano e quais são os que são sólidos.

Para equações do terceiro grau Descartes primeiro aplicava as técnicas de substituição e outras técnicas que tinha explicado anteriormente para reduzir uma equação a uma com coeficientes não racionais. Se a equação do terceiro grau fosse redutível uma de suas raízes era um fator do termo constante, se nenhum dos fatores fosse uma raiz o polinômio era irredutível. Nesse ponto, Descartes explica como dividir dois polinômios.

Para equações do quarto grau Descartes sugeriu a mesma técnica de verificar os fatores dos termo constante para encontrar raízes construtíveis e reduzir a equação para grau três ou menor que três e também apresentou a decomposição de um polinômio em fatores quadráticos. Para fazer isso primeiro reduzia a equação do quarto grau à forma  $x^4 + Px^2 + Qx + R = 0$ . Em seguida passou a considerar a equação cúbica em  $y^2, y^6 + 2Py^4 + (P^2 - 4R)y^2 - Q^2 = 0$ . Se esta equação fosse redutível então qualquer um dos fatores  $S$  de  $Q^2$  era raiz da equação e portanto  $y_1 = \sqrt{S}$  era raiz da equação, nesse caso a equação poderia ser reescrita como produto de dois fatores quadráticos:

$$x^4 + Px^2 + Qx + R = (x^2 - y_1x + 1/2y_1^2 + 1/2P + Q/(2y_1)) (x^2 + y_1x + 1/2y_1^2 + 1/2P - Q/(2y_1))$$

assim o problema era chamado plano, pois  $y_1$  era construtível. Se a equação em  $y^6$  não fosse redutível o problema não era plano, mas sólido. A partir dos exemplos, podemos constatar que Descartes obteve a equação em  $y^6$  pelo método dos coeficientes indeterminados, decompondo  $x^4 + Px^2 + Qx + R = (x^2 - yx + u)(x^2 + yx + v)$  e eliminando  $u$  e  $v$  pela comparação dos coeficientes chegamos nas equações. Esse argumento é conssoante com aquele de agrupar curvas em classes com graus 3-4, 5-6, e assim sucessivamente. Para os graus mais altos Descartes apenas sugeriu que poderia ser realizado do mesmo modo e apresentou diversos exemplos numéricos para transformar as equações e apenas um exemplo com coeficientes indeterminados, a saber:

$$x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - c^2)x^2 - 2a^3x + a^4 = 0$$

Com a substituição  $x = z + a/2$  a equação passa ser

$$z^4 + (1/2 a^2 - c^2)z^2 - (a^3 + ac^2)z + 5a^4/16 - a^4c^2/4 = 0$$

Que era transformada na equação

$$y^6 + (a^2 - 2c^2)y^4 + (c^4 - a^4)y^2 - a^6 - 2a^4c^2 - a^2c^4 = 0$$

Descartes tinha usado essa equação antes para ilustrar o método de encontrar fatores lineares de um polinômio cúbico verificando os fatores do termo constante.

$$a^6 + 2a^4c^2 + a^2c^4 = a^2(a^2 + c^2)^2$$

Descartes mostrou que  $a^2 + c^2$  era uma raiz da equação da equação cúbica em  $y^2$  e isso o permitiu chegar na equação em  $z^4$ , usando a regra para decompor polinômios em dois polinômios quadráticos,

$$z^2 - z\sqrt{a^2 + c^2} + 3a^2/4 - a\sqrt{a^2 + c^2}/2 = 0 \text{ e } z^2 + z\sqrt{a^2 + c^2} + 3a^2/4 + a\sqrt{a^2 + c^2}/2 = 0$$

As duas raízes são

$$z = \sqrt{a^2 + c^2}/2 \pm \sqrt{a^2/2 + c^2/4 + a\sqrt{a^2 + c^2}/2}$$

Essa equação foi escolhida pois na resolução do problema sobre inclinação de Pappus, ela seria fundamental.

Podemos finalizar o Livro III afirmando que o propósito de Descartes era estabelecer uma teoria da construção, isto é, estabelecer critérios para reduzir determinadas equações a outras cujas construções eram conhecidas. A construção de uma equação era importante na obra, pois constituía a etapa final do método de análise e síntese, ou seja, a síntese propriamente era a construção da equação.

Devemos agora tratar de uma outra questão importante, a saber, como Descartes aplicou sua metodologia nas Ciências Físicas.

Os ensaios destinados ao estudo dos fenômenos físicos deixam-nos notar como Descartes aplicou sua metodologia nas Ciências Físicas e quanto seu projeto era mais amplo que o de seus predecessores. Começaremos com *A Dióptrica*, onde buscaremos abordar algumas partes mais importantes da obra como a explicação das propriedades da luz e a lei de refração e as construções de lentes. Essas partes serão necessárias ao entendimento de um exemplo fundamental de *Os Meteoros*, que será explicado pela sua metodologia, o fenômeno do arco-íris.

### 3.7. A Dióptrica

O ensaio, *A Dióptrica*, pretendia ser um tratado geral sobre a Óptica que estudava questões relacionadas tanto a Dióptrica, o estudo da refração da luz, quanto a Catóptrica, o estudo da reflexão da luz. *A Dióptrica* é então uma tradução literal, pois deveria ser Optica. O objetivo principal da obra é ensinar como fabricar instrumentos ópticos, como os

telescópios, que poderiam melhorar a visão. Não devemos esquecer que o interesse pelos telescópios foi intensamente estimulado pelas descobertas de Galileu e Descartes viu neles a possibilidade de aumentar o conhecimento humano. A *Dióptrica* é então um ensaio prático, pretende ensinar como construir tais lentes, mas com um fundamento científico, por isso explicará as propriedades da luz pormenorizadamente.

O ensaio é dividido em dez discursos e, já no início do primeiro discurso, Descartes explica que a confecção desses instrumentos depende da habilidade dos artesãos, que são geralmente homens incultos, e, por isso, pretende ser o mais claro possível, explicando todos os pormenores, não sendo necessário conhecer nada de outras Ciências, ou seja, sua explicação pretende ser auto suficiente. No início também resume a *Dióptrica*:

Por isso começarei com a explicação da luz e de seus raios; depois, tendo dado uma breve descrição das partes do olho, direi especificamente como a visão é causada; e então, tendo levado em conta todas as coisas capazes de melhorá-la, ensinarei como elas podem ser auxiliadas pelas invenções que descreverei. (DESCARTES, 2001, p.66-tradução nossa)

No primeiro discurso, Da luz, explica as propriedades da luz, mas não fornece nenhuma explicação da causa da luz e também não explica a sua natureza verdadeira, pois isso está além de seus interesse nesse ensaio:

Assim, não tendo aqui qualquer outra ocasião para falar da luz além da explicação de como seus raios entram no olho, e como podem ser desviados pelos diferentes corpos que eles encontram, não preciso me propor a explicar sua natureza verdadeira. E acredito que bastará que eu faça uso de duas ou três comparações que auxiliarão a concebê-la de modo que me parece a mais conveniente para explicar todas as suas propriedades com que a experiência nos familiariza, e para deduzir posteriormente todas as outras que não podem ser tão facilmente observadas; imitando nisto os astrônomos, que, embora suas hipóteses sejam quase todas falsas ou incertas, ainda assim, porque suas hipóteses referem-se a diferentes observações que eles fizeram, nunca deixam de extrair muitas conclusões verdadeiras e muito seguras a partir delas. (DESCARTES, 2001, p. 66-tradução nosaa)

Descartes propõe fazer uso de comparações, aliás esse recurso permite a construção de diversas imagens que, embora pareçam incoerentes entre si, permitem um claro entedimento da concepção da estrutura física da luz sob o ponto de vista cartesiano. As comparações exercem uma função didática e permitem ao leitor entender a estrutura

da luz de uma forma mais prática. A primeira metáfora apresentada é a do cego que tateia os objetos a sua volta com o auxílio de uma bengala.

Às vezes certamente aconteceu a você, enquanto caminhando na noite sem uma luz pelos lugares que são um pouco difíceis, que tornou-se necessário usar uma bengala a fim de guiá-lo; e você pôde assim ser capaz de perceber o que você sentiu, por meio deste bengala, os diversos objetos posicionados a sua volta, e que você foi até mesmo capaz de falar se eles eram árvores, ou pedras, ou areia, ou água, ou grama, ou lama, ou qualquer outra coisa semelhante. Verdade, este tipo de sensação é mais confusa e obscura nesses que não têm muita prática com ela; mas considere-a nesses que, nascidos cegos, fizeram uso dela em toda sua vida, e você irá achá-la tão perfeita e tão exata que se poderá quase dizer que eles enxergam com suas mãos, ou que a sua bengala é o órgão de algum sexto sentido dado a eles no lugar da visão. (DESCARTES, 2001, p. 67-tradução nossa)

A intenção desta primeira metáfora é demonstrar que a velocidade da luz é infinita. A transmissão imediata do toque da bengala sobre um objeto, de uma extremidade a outra, é usada para definir a luz como um certo movimento ou ação, embora a bengala seja muito curta, a imagem pretende dizer que a luz chega a nossos olhos, a partir da fonte, instantaneamente:

E a fim de deduzir disso uma comparação, desejo que você considere a luz como nada mais, nos corpos que chamamos luminosos, que um certo movimento ou ação, muito rápido e muito vivo, que passa em direção aos nossos olhos por meio do ar e outros corpos transparentes, da mesma maneira que o movimento ou resistência dos corpos que este cego encontra é transmitido às suas mãos por meio de sua bengala. O que o impedirá primeiramente de achar estranho que esta luz possa estender seus raios em um instante do sol até nós; porque você sabe que a ação com que se move de uma extremidade de uma bengala deve assim passar em um instante de uma extremidade a outra e que ela deveria passar do mesmo modo, ainda que haja mais distância que ali, da terra aos céus. (DESCARTES, 2001, p. 67-tradução nossa)

O ar é comparado com a bengala que faz com que a luz se propague com velocidade infinita e Descartes chega mesmo a dizer que se a velocidade da luz não for infinita toda a sua Filosofia estaria errada.

Ainda, usando a metáfora do cego com a bengala, explica a sensação das diferentes cores que recebemos por meio da luz. As cores, para Descartes, nada mais são que as diferentes formas pelas quais os corpos recebem a luz e refletem-na. Uma

explicação complementar às cores é dada mais adiante quando fala da lei de refração, mas, é nos Meteoros que Descartes explicará melhor como as cores se originam, recorrendo a concepção de que a luz é constituída de dois movimentos, um retilíneo e outro giratório, onde Descartes usa outro recurso metafórico, comparando a luz, novamente, com a bola de tênis. Essa metáfora é usada aqui também quando fala das propriedades refletoras e refratoras da luz e dos dois movimentos que a constitui, o movimento retilíneo a impulsiona em uma certa direção e o movimento giratório, faz a bola girar em torno de si. Mas aqui, em *A Dióptica*, Descartes explica como vemos as cores assim:

Nem acharia estranho que por meio dela [a luz] podemos ver todos os tipos de cores; e você pode mesmo estar preparado a acreditar talvez que essas cores são nada mais, nos corpos que chamamos coloridos, que as diversas formas com que esses corpos recebem a luz e refletem-na contra nossos olhos: se você somente considerar que as diferenças que um cego nota entre árvores, rochas, água, e coisas semelhantes pela extremidade de sua bengala não parece menos a ele que aquelas entre o vermelho, o amarelo, o verde, e todas as outras cores parecem a nós; e que contudo estas diferenças são nada mais, em todos esses corpos, que as diversas formas de movimento, ou de resistir ao movimento deste bengala. (DESCARTES, 2001, p. 67-tradução nossa)

Na interpretação cartesiana, não existe algo que passa do objeto para os nossos olhos para que possamos notar as diferentes cores e não existe também algo similar nesses objetos que sejam semelhantes as idéias ou as sensações que temos dele. A metáfora do cego com a bengala é utilizada mais uma vez.

Em consequência do que você terá ocasião de julgar que não existe necessidade para supor que algum material passa dos objetos para os nossos olhos para fazer-nos ver as cores e a luz, nem mesmo que existe alguma coisa nesses objetos que seja similar as idéias ou às sensações que temos deles: da mesma maneira que nada sai dos corpos que um cego sente, que será transmitido por toda extensão de sua bengala em sua mão; e como a resistência ou o movimento desses corpos, que é a única causa das sensações que ele tem deles, é nada semelhante as idéias que ele forma deles. (DESCARTES, 2001, p. 68-tradução nossa)

A idéia do cego com sua bengala deve fazer com que deixemos de pensar que a imagem do objeto viaja, a partir do objeto até nossos olhos. Há uma ação dupla, do objeto até nossos olhos e dos nossos olhos até o objeto.

Pois, da mesma maneira que nosso cego pode sentir os corpos que estão a volta dele, não somente pela ação desses corpos quando eles movem-se contra o sua bengala, mas também pela da mão dele, quando eles estão simplesmente resistindo-a, assim afirmamos que os objetos da visão podem ser sentidos, não somente por meio da ação que, estando neles, tendem em direção aos nossos olhos, mas também por meio daquilo que, estando nos olhos, tende na direção deles. (DESCARTES, 2001, p. 68-tradução nossa)

Segundo Descartes, o homem comum não pode ver essa dupla ação. Só sentimos a sensação do objeto até nós e não o contrário. A ação contrária é percebida, por exemplo, nos olhos dos animais, ou melhor, de um gato, quando estão na escuridão da noite.

Contudo, porque esta ação é nada mais que luz, devemos notar que ela é somente aquela que podemos ver durante a escuridão da noite, tal como gatos, em cujos olhos esta ação é encontrada; e que, como para o homem comum, ele vê somente pela ação que vem dos objetos. Pois a experiência nos mostra que esses objetos devem ser luminosos ou iluminados afim de serem vistos, e não que nossos olhos devem ser luminosos ou iluminados afim de vê-los. (DESCARTES, 2001, p. 68-tradução nossa)

Para explicar como a luz se propaga através do ar e através dos meios transparentes, Descartes faz uso de outra analogia, a de um barril de vinho contendo uvas esmagadas. Dessa comparação, extrai a concepção geométrica da luz, além de ser um movimento ou uma ação instantânea, seu percurso é retilíneo. Para tanto, no fundo do barril faz dois orifícios A e B. Na explicação fala brevemente sobre a matéria sutil. O universo físico, segundo Descartes, é constituído de três tipos de “elementos”. O nosso sol e as demais estrelas são constituídos do primeiro elemento que consiste em partículas muito pequenas e velozes, que são muito agitadas ao ponto de se dividirem em partículas de “indefinida pequenez”, quando se chocam com outros corpos. O segundo elemento é composto de partículas esféricas ligeiramente maiores, mas ainda diminutas e imperceptíveis, assim é a matéria que preenche todo o espaço entre as estrelas e os planetas, não há vácuo na concepção cartesiana. O terceiro elemento é constituído de partículas mais volumosas, com forma menos adequada ao movimento, constituindo a Terra e os outros planetas. Basicamente, essa é a mesma concepção dos escolásticos que era

baseada nos quatro elementos: fogo, ar, terra e água. Descartes funde os dois últimos. A matéria sutil é então constituída do primeiro elemento.

Essa matéria muito sutil será comparada com o vinho no tonel, as partes menos fluídicas do ar e dos outros corpos transparentes serão comparados com os cachos de uvas misturados no vinho. Por meio da abertura dos orifícios A e B, demonstra o percurso retilíneo seguido pela luz. A estratégia é nos convencer que ao abriremos os orifícios A e B, na base do barril, qualquer ponto na superfície seguirá em linha reta para baixo, sem que a ação realizada em um dos dois orifícios interfira no outro, isto é, os pontos que são atraídos pela abertura de um orifício seguirão, em linha reta, sem mudar de direção. A conclusão é a mesma para a matéria sutil que está a nossa frente, quando tocada pelo sol tende em linha reta na direção de nossos olhos, no mesmo instante que são abertos. Descartes conclui que a luz só pode viajar em linha reta, justificando que devemos notar a diferença entre movimento e ação ou inclinação para o movimento. Alguém pode pensar que as partículas que estão na superfície do vinho ao tenderem para A e B, um movimento afetará o outro, ao mesmo tempo, mas esse não é o caso. Elas movem-se exatamente em linha reta, embora os cachos atrapalhem esses movimentos. O que deve ser concebido é que existe uma infinidade de pontos sobre a superfície do vinho que tenderam para o orifício A e outra infinidade que tenderá para o orifício B, mas que essa tendência é realizada de forma retilínea e independente e essa é a mesma relação que existe entre os corpos luminosos e iluminados.

Para falar da propriedade refletora da luz, introduz a terceira metáfora, a da bola de tênis, sujeitando a luz às leis do movimento corpuscular:

Além disso, esses raios devem sempre ser imaginados como sendo exatamente retos, quando atravessam somente um corpo transparente que é uniforme por todas as partes; mas quando eles encontram certos outros corpos estão sujeitos a serem desviados por eles, ou desfalecidos, da mesma forma como o movimento de uma bola ou de uma pedra atirada no ar é desviada por aqueles corpos que ela encontra. Pois é muito fácil acreditar que a ação ou a inclinação para mover que eu disse que deve ser tomada para a luz, deve seguir nisto as mesmas leis que o movimento. (DESCARTES, 2001, p. 70-tradução nossa)

A propriedade refletora depende das propriedades dos corpos que a luz encontra em seu trajeto, se os corpos são macios, então interrompem o movimento da luz, do mesmo modo, quando a bola encontra um lençol de linho. Se os corpos são duros, então refletem-na em outras direções e de várias formas, conforme as características da superfície: áspera, polida, plana, desigual, curva, etc.

Descartes sugere, em seguida, que além do movimento retilíneo da bola que a conduz de um lugar a outro, contém ainda um movimento que a faz girar em torno de si e que esse movimento giratório tem muitas relações com o retilíneo. Essa concepção explicará, segundo Descartes, a origem das cores e as diversas formas da luz se refletir e se refratar, dependendo dos corpos que a luz encontra. Assim, se a superfície é completamente lisa e igual, as bolas serão desviadas ou refletidas uniformemente e na mesma ordem. Se a superfície é plana, a reflexão mantém o mesmo ângulo de incidência e se a superfície é curva, a reflexão é arbitrária. No momento da reflexão a bola ganha o movimento em torno de si perdendo parte do movimento retilíneo, de acordo com a superfície que ela encontra e Descartes enfatiza que essa idéia pode ser facilmente concebida por aqueles que jogam tênis..

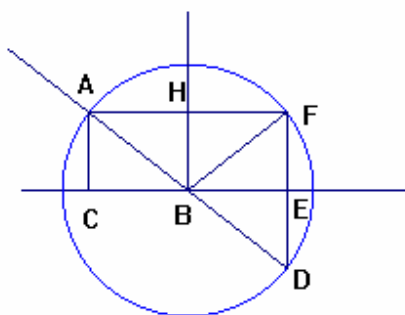
Agora, se a bola encontra pela frente uma superfície líquida será desviada e mudará o seu percurso ao penetrá-la, constituindo o fenômeno da refração. Os dois fenômenos, a refração e a reflexão, serão explicados no segundo Discurso. Agora, é importante atentarmos à explicação de como vemos as cores por meio da reflexão.

Os raios, ao incidirem sobre os corpos, serão refletidos em todas as direções e, com o fenômeno da luz concebido como constituído de duas partes, Descartes explicará a origem das cores do seguinte modo. Enxergamos o preto porque o corpo, ao receber a luz, separa os seus raios tomando toda a sua potência. Os corpos brancos refletem os raios da luz sem causar qualquer mudança na sua ação. O amarelo, o vermelho, o azul são obtidos por mudanças muito leves como quando tocamos uma bola de tênis levemente de raspão. A explicação da concepção das cores será retomada depois em *Os Meteoros*, quando da explicação do fenômeno do arco-íris. O raio de luz, ao ser refletido, terá alterado o seu movimento, a bola girará em diferentes velocidades provocando as cores.

Passaremos agora ao segundo Discurso, onde Descartes anuncia a lei de refração. A explicação das cores e das leis de refração e de reflexão serão úteis quando do estudo do fenômeno do arco-íris.

O segundo Discurso começa por uma exposição da determinação do raio de luz no movimento de uma posição A para uma posição B, para tanto, comparará o movimento do raio de luz com o da bola de tênis. A bola contém duas determinações para o movimento, uma descendente e outra horizontal. A união das duas determinações faz então a bola mover do ponto A para o ponto B, portanto, o encontro com um piso interrompe somente uma das determinações: a descendente e a permanência da determinação horizontal fará com que a bola continue o movimento da esquerda para a direita, mantendo a mesma velocidade, se for uma superfície sólida e bem polida.

Para explicar a direção em que a bola deve ser refletida, Descartes constrói um círculo de centro B, passando por A, veja figura 23 abaixo, e supõe que o tempo gasto no trajeto de A até B deve ser o mesmo de B para um certo ponto na circunferência deste círculo, digamos F, pois somente a determinação vertical do movimento da luz é interrompido. Assim propõe encontrar o ponto onde a bola retornará, depois de passar por B, em sua palavras, anuncia a propriedade refletora da luz.



**Figura 23**

Para saber precisamente onde a bola retornará, depois de passar pelo ponto B, centro do círculo, Descartes constrói três retas paralelas AC, HB e FE perpendiculares a CE de forma que AC e FE sejam equidistantes de HB. O movimento da bola, neste caso, ao ser interrompido em uma de suas determinações, a descendente, manterá o movimento no sentido da esquerda pra direita e mantendo a mesma velocidade. Desse modo, a bola

alcançará o segmento vertical FE, depois de passar por B, no mesmo intervalo de tempo que gastou de AC até B. Assim, a única possibilidade é a bola atingir o ponto F.

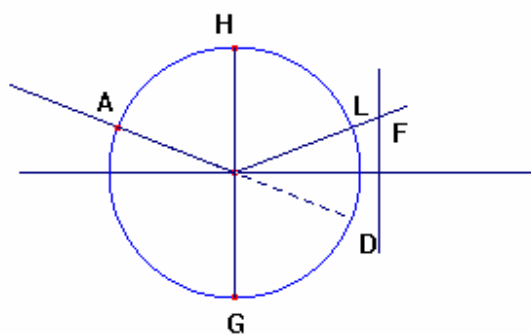
[...] pois qualquer ponto desta linha FE está tão distante de HB nesta direção quanto está qualquer outra, e tão longe quanto estão aqueles da linha AC; e também a bola está tão determinada a avançar para aquele lado quanto ela estava até agora. Então que não pode ao mesmo tempo chegar tanto a um certo ponto da linha FE quanto a um certo ponto da circunferência do círculo AFD, a menos que esteja no ponto D ou no ponto F, considerando que existem somente dois pontos onde a circunferência e a linha interseccionam-se; de modo que, como o piso impede a bola de passar na direção de D, devemos concluir que ela deve infalivelmente ir na direção de F. E assim você pode facilmente ver como a reflexão ocorre, a saber de acordo com o ângulo que é sempre igual ao ângulo que chamamos ângulo de incidência; da mesma forma que se um raio, vindo do ponto A, cai no ponto B sobre a superfície do espelho plano CBE, é refletido na direção de F de uma tal maneira que o ângulo de reflexão FBE nem é maior e nem é menor que aquele do ângulo de incidência ABC. (DESCARTES, 2001, p. 77-tradução nossa)

Depois de explicar a reflexão, Descartes busca explicar a refração. A explicação começa supondo novamente o movimento da bola constituindo-se das duas componentes mencionadas anteriormente. A primeira explicação limita-se a estudar o fenômeno quando a bola incide sobre a superfície de um tecido frouxo que a bola tem a capacidade de romper completamente, perdendo metade de sua velocidade, mas mantendo a possibilidade de movimento. Neste caso, a determinação de fazer a bola tender para baixo é alterada, a velocidade para baixo fica reduzida à metade, quando esta choca-se com o tecido e que a determinação de tender para à direita é mantida, o tecido não se opõe a esta tendência. A explicação leva em consideração a figura 24 abaixo.

A distância entre a perpendicular FE e HB é o dobro da distância entre AC e HB. A bola irá na direção do ponto I, pois perdendo metade de seu movimento que a impulsiona para baixo, descera metade da distância sob a superfície, então a única possibilidade é o ponto I.

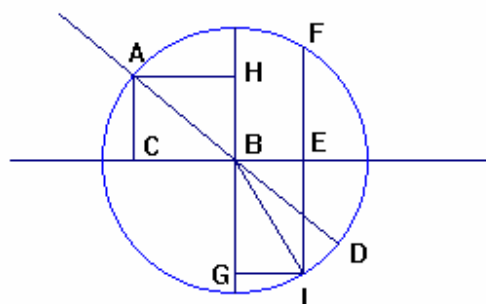
Assim, tendo descrito a partir do centro B do círculo AFD, e traçado em ângulos retos a CBE as três linhas retas AC, HB, FE de um tal modo que existam duas vezes mais distância entre FE e HB quanto entre HB e AC, veremos que esta bola deve tender na direção do ponto I. Pois, como ela perde metade de sua velocidade passando pelo tecido CBE, deve levar





**Figura 25**

Depois disso, supõe que a bola, após ser impulsionada de A até B, sofre um novo impulso em B com uma intensidade que aumenta sua força em um terço e passando a cobrir em dois momentos a distância que antes era coberta em três. O motivo dessa suposição, segundo a concepção cartesiana, é que a luz, ao passar de um meio para outro mais denso, no caso do ar para água, aumenta sua velocidade. A proximidade das partículas permite à luz se propagar mais rapidamente do que nos corpos que têm menos densidade, enquanto que nos corpos com densidades inferiores as partículas, mais afastadas, impedem a rápida propagação da luz. Assim, segue a sua explicação, fazendo algumas suposições que serão necessárias na explicação da lei de refração. O impulso dado pela raquete, em B, que aumenta sua força em um terço, corresponde a maior facilidade da luz se propagar na água. Se consideramos BE igual a dois terço de BC, veja figura 26 abaixo, então a perpendicular FE intersecciona o círculo em I, determinando o ponto onde o raio refratado deve passar.



**Figura 26**

Isto terá o mesmo efeito como se a bola estivesse encontrando, no ponto B, um corpo de uma tal natureza que poderia passar pela superfície CBE um terço novamente mais facilmente do que pelo ar. E segue obviamente

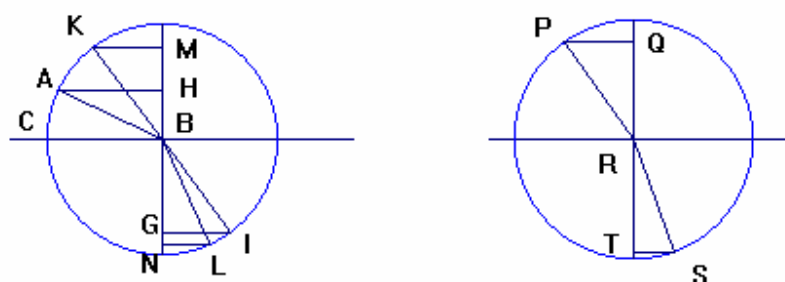
do que já tinha sido demonstrado que se descrevemos o círculo AD como antes, e as linhas AC, HB, FE de uma tal maneira que exista um terço menos distância entre FE e HB do que entre HB e AC, o ponto I, onde a linha reta FE e a circular AD interseccionam-se, designará o lugar na direção do qual esta bola, estando no ponto B, deve ser desviada. (DESCARTES, 2001, p. 79-0-tradução nossa)

Com relação a inclinação do raio é necessário tomar o devido cuidado para que seja medida pela linhas (segmentos) CB ou AH e EB ou IG comparando-as, e não pelos ângulos ABH ou GBI, nem mesmo por DBI, que é chamado o ângulo de refração.

Somente é necessário tomar cuidado para que esta inclinação seja medida pela quantidade das linhas retas, tais como CB ou AH, e EB ou IG, e as semelhantes, comparada uma com a outra; não por aquelas dos ângulos como ABH ou GBI, nem menos por essas, como DBI, que chamamos ângulos de refração. Pois a razão ou proporção entre esses ângulos varia com todas as diferentes inclinações dos raios; enquanto que entre as linhas AH e IG, ou outras semelhantes, permanecem a mesma em todas refrações causadas pelos mesmos corpos. (DESCARTES, 2001, p. 80-tradução nossa)

E continua explicando, esclarecendo mais sobre a razão entre os segmentos determinados no círculo.

Assim, por exemplo, se um raio passando pelo ar de A para B encontra a superfície da lente CBR no ponto B e é desviado na direção de I nesta lente, e se um outro vindo do ar de K para B é desviado para L, e um outro vindo de P para R e é desviado para S, deve existir a mesma razão entre as linhas KM e LN ou PQ e ST, como entre AH e IG; mas não a mesma razão entre os ângulos KBM e LBN, ou PRQ e SRT, como entre ABH e IBG. (DESCARTES, 2001, p.81-tradução nossa)



### Figura 27

E anuncia a lei de refração:

Desse modo, se desejamos conhecer a quantidade daqueles que estão sobre a superfície CBR que separa o ar AKP da lente LIS, somente temos de colocá-la para o teste na refração do raio ABI, procurando pela razão entre as linhas AH e IG. Assim, se tememos falhar neste experimento, é então necessário colocá-lo para o teste em alguns outros raios, tal como KBL ou PRS, e achar a mesma razão entre KM e LN, e PQ e ST, como entre AH e IG, não teremos mais razão para duvidar da verdade. (DESCARTES, 2001, p. 81-tradução nossa)

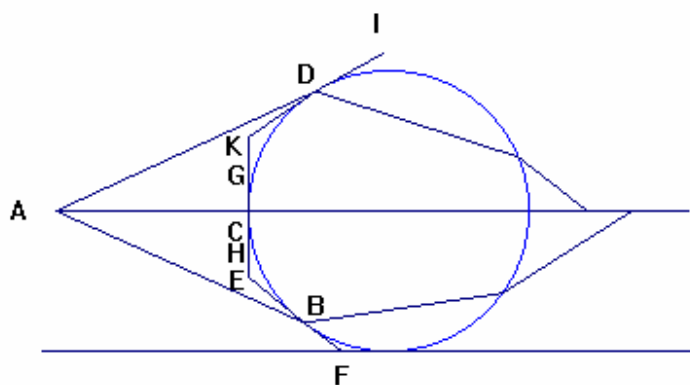
De fato, a razão entre AH e IG é a mesma que KM e LN, pois  $\sin i = AH/AB$  e  $\sin r = GI/BI$ , como  $AB = BI = 1$ , temos a lei da refração,  $i$  indica o ângulo de incidência e  $r$ , o ângulo de refração.

Descartes explica porque, ao fazer as experiências, ficamos surpresos ao ver que os raios de luz são mais inclinados no ar do que na água e ainda mais na água que no vidro, que é o oposto do comportamento de uma bola, cuja refração é mais inclinada na água do que no ar e não pode passar pelo vidro.

Porque, por exemplo, se é uma bola que, sendo impulsionada no ar de A para B, encontra no ponto B a superfície da água CBE, será desviada de B para V; e se é um raio, irá, totalmente ao contrário, de B na direção de I. Entretanto, você deixará de achar isto estranho se você recordar a natureza que eu atribui a luz, quando disse que ela era nada mais que um certo movimento ou uma ação, recebida em um material muito sutil que preenche os poros de outros corpos; e você deve considerar que, a medida que uma bola perde muito mais de sua agitação ao incidir contra um corpo macio que contra um que é duro, e quando rola menos facilmente sobre um tapete que sobre uma mesa totalmente lisa, assim a ação deste material sutil pode ser muito mais impedida pelas partículas de ar, que sendo macias e mal reunidas, não oferecendo a ela muito mais resistência, que por aquelas da água que oferece a ela muito mais; e ainda mais por aquelas da água que por aquelas do vidro, ou do cristal. De modo que, as mais duras e mais firmes são as menores partículas de um corpo transparente, as que mais facilmente permitirem a luz passar: pois esta luz não tem que dirigir nenhuma delas para fora de seus lugares, como uma bola deve expelir aquelas da água, a fim de encontrar passagem entre elas. (DESCARTES, 2001, p. 82-tradução nossa)

A partir da concepção da refração e da reflexão, suas causas e como ocorrem nos corpos transparentes poderá vislumbrar como ocorrerá a refração em corpos que não têm a superfície plana. Descartes descreve que podem existir diversos corpos no céu em que a refração não ocorre da mesma forma que descreveu. Mas que as três comparações que desenvolveu são suficientes, pois que todas as propriedades encontradas nelas são válidas também para a luz, mas que em *A Dióptrica* explicou só as de maior referência. Por exemplo, se os raios de luz incidem sobre um espelho esférico, a reflexão se dará do mesmo modo que quando imaginamos um espelho plano tangenciando-o em algum ponto.

Como, por exemplo, a refração dos raios AB, AC, AD, que, vindo da chama A, incidem sobre a superfície curva da bola de cristal BCD, deve ser considerada da mesma forma como se AB incidisse sobre a superfície plana EBF, e AC sobre GCH, e AD sobre IDK, e assim com as outras. Do que você pode ver que esses raios podem ser diversamente reunidos ou dispersados, de acordo com que eles incidem em superfícies que sejam diferentemente curvadas. (DESCARTES, 2001, p. 83-tradução nossa)



**Figura 28**

Assim, Descartes encerra a discussão sobre as propriedades refletoras e refratoras da luz e como já tinha também explicado outras propriedades como a da velocidade infinita e definido a luz como uma certa ação ou inclinação para o movimento, considera que o assunto está completamente exaurido. Desse modo, pode passar à explicação das estruturas do olho humano. A intenção é entender como os raios penetram no olho e causam a sensação da visão.

Nos quatro Discursos seguintes Descartes vai dissertar sobre a visão: no terceiro Discurso descreve a anatomia do olho, o Discurso IV fala sobre os sentidos em geral, o

Discurso V é sobre as imagens que formam no fundo olho e o Discurso VI é sobre a visão.

O Discurso VII fala sobre os meios de aperfeiçoar a visão. Esse capítulo liga a descrição cartesiana da visão aos instrumentos óticos, necessários ao seu aperfeiçoamento, que é o principal objetivo do tratado. Há três coisas, segundo Descartes, que são fundamentais sobre a visão e devem ser levadas em consideração, a saber: que a visão depende dos objetos externos, dos órgãos internos que recebem os impulsos desses objetos, e dos órgãos externos que dispõe estes impulsos para serem recebidos apropriadamente. Os objetos externos sabemos que são manipuláveis e podemos alterar a sua posição, aumentar ou diminuir a sua distância, aumentar ou diminuir a sua luminosidade. Quanto aos órgãos internos, não podem ser corrigidos, não há como fazer novos órgãos, embora, segundo Descartes, em alguns casos os médicos podem auxiliar. Quanto ao terceiro elemento, o olho, Descartes descreverá as suas partes transparentes e os dispositivos que podem melhorá-lo, ou seja, descreverá os instrumentos que podemos interpor entre o olho e o objeto.

Para esses órgãos externos da visão, Descartes acha que o nível ótimo pode ser alcançado quando ocorrerem os quatro pontos.

A primeira é que todos os raios viajando na direção de cada uma das extremidades do nervo óptico deve vir, tanto quanto possível, de apenas uma simples parte do objeto, e que não deve sofrer mudança no espaço entre eles: pois se não fosse assim, as imagens que eles formam devem ser nem muito similar a seu original, nem muito distinta. A segunda provisão é que essas imagens são muito grandes; não na extensão do espaço que elas ocupam – pois elas poderiam ocupar somente o pequeno espaço no fundo do olho – mas na extensão de seus alinhamentos ou de suas linhas, pois é certo que quanto maior elas são, mais fácil elas serão de discernir. A terceira provisão é que os raios formando-as sejam suficientemente fortes para mover as pequenas fibras do nervo óptico, e por este meio sejam sentidos, mas que não sejam tão fortes para danificar a visão. E a quarta, que existam tantos objetos quanto possíveis cujas imagens formam no olho ao mesmo tempo, a fim de que possamos ver tanto quanto possível deles em um simples olhar. (DESCARTES, 2001, p. 114-tradução nossa)

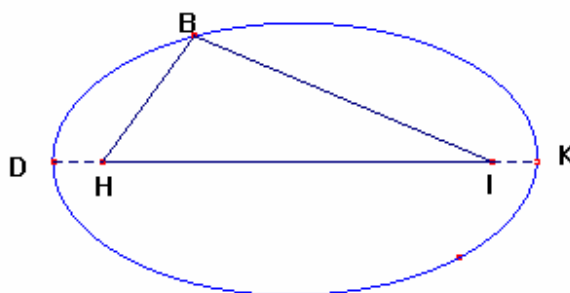
Descartes explicará como corrigir certos problemas do olho. O primeiro problema, até certo ponto, é corrigido por meio das lentes curvas e convexas. O segundo, é resolvido por meio de um efeito telescópico. Ao discutir o terceiro problema, Descartes revela

diversas propriedades dos telescópios e formas de aperfeiçoá-los. A quarta condição não pode ser atendida por nenhum instrumento ótico.

O Discurso VIII mostra quais são as formas possíveis para cortar os materiais para que a visão seja melhorada por meio deles. Descartes demonstra que as curvas hipérboles e elipses são as ideais. Expõe as propriedades dessas e a forma correta de cortá-las. Do ponto de vista da Matemática, o Discurso VIII é interessante, uma vez que Descartes usa essas curvas para resolver problemas físicos. Ou seja, mais uma oportunidade para mostrar que a Matemática podia ajudar na construção da Física. Por ser assim, deter-nos-emos um pouco mais nesse Discurso e descreveremos como Descartes atua de forma mais evidente.

Descartes, no início, diz que será suficientemente claro para aqueles que aprenderam pelo menos os primeiros elementos dessa Ciência, a Geometria. As figuras básicas exigidas para construir os instrumentos serão as elipses ou hipérboles, círculos ou linhas retas.

Descartes começa pela elipse, dizendo que as elipses foram descritas na antiguidade através do corte do cone ou de um cilindro por um plano, mas também a encontramos na forma que os jardineiros, algumas vezes, constroem seus canteiros, quando fincam duas estacas no chão e amarram as duas extremidades de uma corda nessas estacas e depois, esticando a corda com o dedo, conduzem-na esticada em volta dessas duas estacas, assim obtendo a elipse. Vários tipos de elipses podem ser construídas, por exemplo, se reduzimos a distância dessas duas estacas obteremos uma elipse de outra espécie. Se a distância entre as duas estacas são reduzidas até uma sobrepor a outra, obteremos um círculo. Se encurtarmos o comprimento da corda na mesma proporção que reduzimos a distância das estacas, obteremos elipses da mesma espécie.



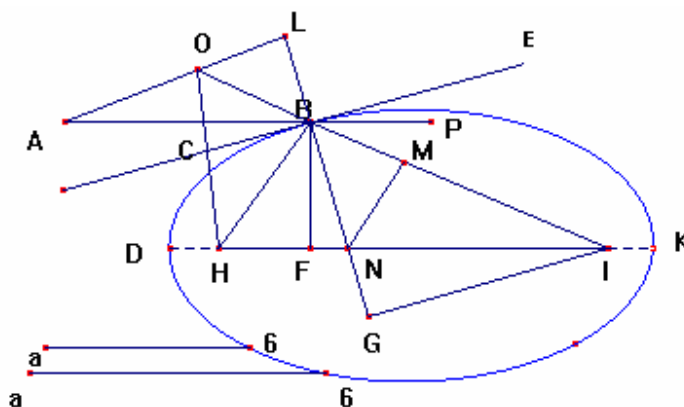
**Figura 29**

Descartes anuncia a propriedade da elipse que diz que a soma das distâncias de um ponto qualquer da elipse aos focos é igual ao comprimento do diâmetro maior, depois esclarece a sua nomenclatura que será usada no curso do ensaio. Os focos são chamados pontos ardentes.

E por causa de uma certa propriedade desses pontos H e I, que você ouvirá depois, iremos chamá-los os pontos ardentes, o primeiro interior o segundo exterior: isto é, se os relacionarmos com a metade da elipse que está na direção de D, I será externo; e se os relacionamos com a outra metade que está na direção de K, estará no interior; e quando falamos sem distinção do ponto ardente, estaremos sempre falando do exterior. (DESCARTES, 2001, p. 128-9-tradução nossa)

Em seguida, Descartes também anuncia uma propriedade importante da elipse, comum em nossos livros didáticos de Geometria Analítica.

Além disso, você precisa saber que se pelo ponto B traçarmos as duas linhas retas LBG e CBE, que se cruzam em ângulos retos, e das quais uma, LG, divide a ângulo HBI em duas partes iguais, então a outra, CE, tocará aquela elipse neste ponto B sem cortá-la. (DESCARTES, 2001, p. 129-tradução nossa)



**Figura 30**

A demonstração dessa propriedade não é dada. Descartes afirma que essa era uma propriedade bem conhecida pelos geômetras e que a sua demonstração seria muito entediante para aqueles que não são matemáticos. Em toda a sua obra Matemática Descartes não se preocupa em dar demonstrações, muitas vezes oferece argumentos comparativos a fim de que seus leitores possam entender os resultados de uma forma

mais intuitiva. Essa lei será exigida na demonstração da principal propriedade refratora da elipse que é dada a seguir.

Mas o que pretendo explicar aqui particularmente é que se traçarmos novamente deste ponto B, afastando-se da elipse, a linha reta BA paralela ao diâmetro maior DK, e se, tendo a feito igual a BI, dos pontos A e I traçarmos sobre LG as duas perpendiculares AL e IG, essas duas últimas, AL e IG, terão entre elas a mesma razão que DK e HI. De modo que, se a linha AB for um raio de luz, e se esta elipse DBK estiver sobre a superfície de um corpo sólido completamente transparente pelo qual, seguindo o que se disse acima, os raios passam mais facilmente do que pelo ar, na mesma proporção que a linha DK é maior do que a linha HI, este raio AB será desviado no ponto B pela superfície do corpo transparente, de modo que irá dali na direção de I. E porque este ponto B é tomado ao acaso na elipse, tudo que é dito aqui do raio AB deveriam ser geralmente entendido de todos os raios paralelos ao eixo DK, que incidem sobre algum ponto desta elipse; isto é, serão todos desviados de uma tal maneira que irão dali na direção do ponto I. (DESCARTES, 2001, p. 129-tradução nossa)

A propriedade indica que os raios paralelos ao diâmetro maior da elipse, ao incidirem sobre a curva elíptica, serão desviados para o ponto ardente ou foco da elipse, desde que esta seja construída mantendo-se a proporção indicada na propriedade. Descartes apresenta a seguinte demonstração.

Ora isto é demonstrado como segue: primeiro, se traçarmos do ponto B a linha BF perpendicular a KD, e se do ponto N, onde LG e KD se interseccionam, também traçarmos a linha NM perpendicular a IB, encontraremos que AL está para IG como BF está para NM. Pois, por um lado, os triângulos BFN e BLA são semelhantes, porque são ambos retângulos e porque, como NF e BA são paralelos, os ângulos FNB e ABL são iguais; e por outro lado, os triângulos NBM e IBG são também semelhantes, porque são retângulos e porque o ângulo em B é comum a ambos. E além disso, os dois triângulos BFN e BMN têm a mesma relação entre eles como têm os dois ALB e BGI, porque como as bases destes, BA e BI, são iguais, assim BN, que é a base do triângulo BFN, é igual a si a medida em que é também a base do triângulo BMN. Do que obviamente segue que, como BF está para NM, assim AL, o lado do triângulo ALB que é análogo a BF no triângulo BFN (i.e., que é a base do mesmo ângulo), está para IG, o lado do triângulo BGI que é análogo ao lado NM do triângulo BNM. Assim BF está para NM como BI está para NI, porque os dois triângulos BIF e NIM, sendo retângulos e tendo o mesmo ângulo em I, são semelhantes. Além do mais, porque tanto quanto as linhas AB e NI, bem como AL e GI, são paralelas, os triângulos ALB e IGN são semelhantes; portanto segue que AL está para IG como AB está

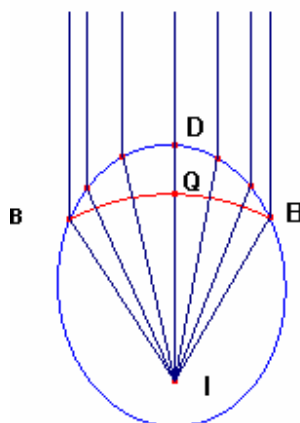
para NI; ou ainda, porque AB e BI são iguais, como BI está para NI. Então, se traçarmos HO paralelo a NB e se prolongarmos IB até O, veremos que BI está NI como OI está para HI, porque os triângulos BNI e OHI são semelhantes. Finalmente, como os dois triângulos HBG e GBI são iguais por construção, HOB, que é igual a GBI, é também igual a OHB, porque o último é igual a HBG; e como resultado o triângulo HBO é isósceles, e como a linha OB é igual a HB, toda a linha OI toda é igual a DK, considerando que as duas linhas HB e IB juntas são iguais a ela. E assim para rever do primeiro ao último, AL está para IG como BI está para NI, e BI para NI como OI para HI, e OI é igual a DK; assim AL está para IG como DK está para HI. (DESCARTES, 2001, p.129-0-tradução nossa)

Podemos resumir a demonstração. Se BA é traçado paralelo ao eixo DK e igual a BI, e se de A e de I traçarmos as perpendiculares AL e IG ao segmento BG, que é bissetriz de HBI, então teremos  $AL : IG = DK : HI$ . Como os triângulos ALB, FBN são semelhantes, então  $AL : AB = BF : BN$ , ou  $AL : BI = BF : BN$ . Ora  $IG : BI = NM : BN$ , portanto,  $AL : IG = BF : NM$ . Mas  $BF : NM = BI : NI$ , e é igual a  $IO : IH$ . Como  $IO = IB + BH = DK$ , temos o resultado.

Para traçar uma elipse com a propriedade assinalada devemos seguir a demonstração da propriedade, isto é, a elipse DBK deve ser traçada de modo que as linhas DK e HI estejam na mesma proporção que AL e IG, a lei de refração deve prevalecer, ou seja,  $\text{sen } i : \text{sen } r = AL : IG = DK : HI$ , onde  $i$  é o ângulo de incidência ABL e  $r$  é o ângulo de refração GBI. A superfície elíptica que se pretende construir, a partir dessa propriedade, deve obedecer a esse critério e é obtida quando tomamos uma elipse e a giramos em torno do seu eixo maior, obtendo um elipsóide de revolução que tem a mesma propriedade, isto é, todos os raios paralelos ao eixo maior do elipsóide serão refratados para o ponto ardente.

Este princípio permitirá Descartes pensar na construção de diversos tipos de lentes elípticas. Por exemplo, se do ponto ardente I, exterior, traçarmos um círculo qualquer com centro I, cujo raio seja menor do que ID, onde D é o vértice pertencente ao eixo maior da elipse, mais próximo do ponto ardente interior do que de I, a lente obtida girando a figura DBQ em torno do eixo ID terá a propriedade de convergir todos os raios paralelos vindos do ar para o ponto ardente I, veja figura 31. Reciprocamente, os raios saindo de I serão convertidos em raios paralelos ao passarem pela lente assim construída. Aqui,

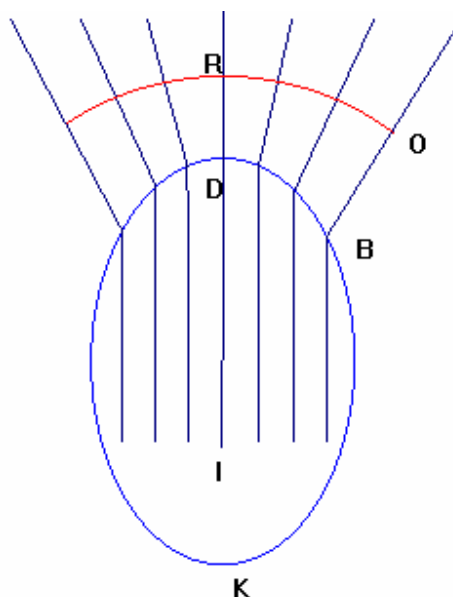
Descartes usa uma outra propriedade que diz que os raios incidentes, perpendicularmente a um círculo, convergem para seu centro, sem sofrer refrações.



**Figura 31**

Além do mais, porque todos os raios que tendem na direção do centro do círculo ou de um globo, incidindo perpendicularmente sobre sua superfície não devem sofrer ali quaisquer refração, se do centro I fazer um círculo a qualquer distância que desejamos, contanto que passe entre D e I, como BQB, as linhas DB e QB, girando em torno do eixo DQ, descreveram a forma de uma lente que trará juntos no ar para o ponto I todos os raios que por outro lado também no ar, eram paralelos a este eixo: e reciprocamente esta lente fará com que todos aqueles que vierem do ponto I resultarão paralelos do outro lado. (DESCARTES, 2001, p. 131-tradução nossa)

Se o raio do círculo for maior que a distância ID, veja figura 32, e tomarmos um ponto arbitrário B sobre a elipse, de modo que esteja mais próximo de D do que do outro vértice K da elipse e traçarmos, em seguida, a reta OB, na direção de I, e se girarmos a figura DBOR, em torno do eixo RD, obteremos uma lente que faz com que todos os raios paralelos vindos do interior da elipse, ao passarem pela lente, se convertam em raios divergentes do de fora da elipse.

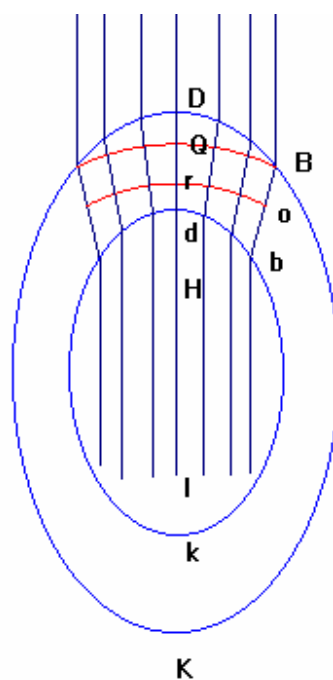


**Figura 32**

E se do mesmo centro I descrevermos o círculo RO, a qualquer distância que desejarmos do o outro lado do ponto D; e se tendo tomado o ponto B ao acaso sobre a elipse – contanto sempre que ele não esteja mais afastado de D do que de K – traçarmos a linha reta BO de modo que tenda para I; as linhas RO, OB, e BD, movidas circularmente em volta do eixo DR, descreveram a forma de uma lente que levará os raios que, do lado da elipse, estavam paralelos a este eixo, a espalharem-se aqui e lá do outro lado, como se todos viessem do ponto I. Pois é óbvio que, por exemplo, o raio PB deve ser tanto desviado pela superfície oca da lente DBA, como AB deve ser pela superfície convexa da lente DBK, e como um resultado que BO deve estar na mesma linha reta como BI, pois PB está na mesma linha como BA; e assim com os outros. (DESCARTES, 2001, p. 131-2-tradução nossa)

Combinando as duas lentes descritas anteriormente podemos obter um terceiro tipo que é construída descrevendo uma elipse da mesma espécie dentro da elipse DBK, a qual designaremos por dbk, veja figura 33. Devemos tomar o cuidado para que o ponto ardente I das duas elipses coincidam e que os outros focos H e h estejam na mesma linha reta DH. Tomando B, como no caso anterior, traçamos a linha reta Bb na direção do foco I, isto é, se prolongada passaria por I. Se giramos as linhas DB, Bb, bd em torno do eixo Dd obteremos uma lente que faz com que os raios paralelos, ao atravessarem a lente,

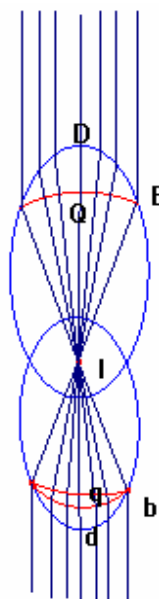
continuam paralelos, mas reunidos mais próximos, ocupando menos espaço do lado interno da elipse menor.



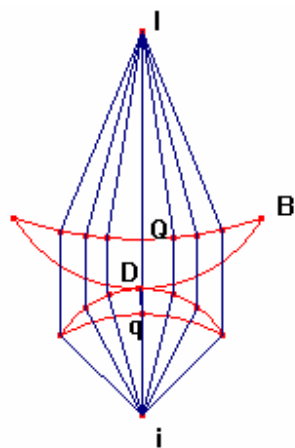
**Figura 33**

A fim de separar as lentes e torná-las menos espessas o que, por sua vez, permitirá combiná-las de outras formas, cortamos as duas lentes robd e DBQ, mantendo-se a mesma posição, o efeito obtido é o mesmo do caso anterior.

Podemos fazer diversas outras combinações, por exemplo, se colocarmos duas lentes semelhantes, como DBK e dbk da figura 34 abaixo, de tamanhos diferentes, com o ponto ardente I comum às duas, mas com os outros focos diametricalmente opostos, obteremos duas lentes que farão os raios paralelos, que passam pela lente maior, convergirem para o ponto ardente I, e a partir daí, ao passar pela lente menor, tornar-se-ão novamente paralelos, mas agora mais próximos.

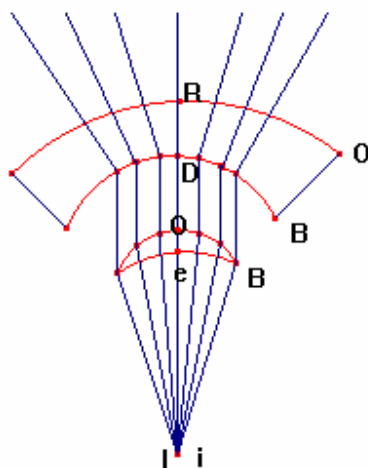
**Figura 34**

Se colocarmos essas duas lentes frente a frente, de modo que os vértices do eixo maior das duas sejam o ponto de tangência e que os pontos ardentes fiquem na mesma reta, então os raios, saindo de um dos pontos ardentes, convergirão, depois de passar pelas duas lentes, para o outro ponto ardente e vice-versa.

**Figura 35**

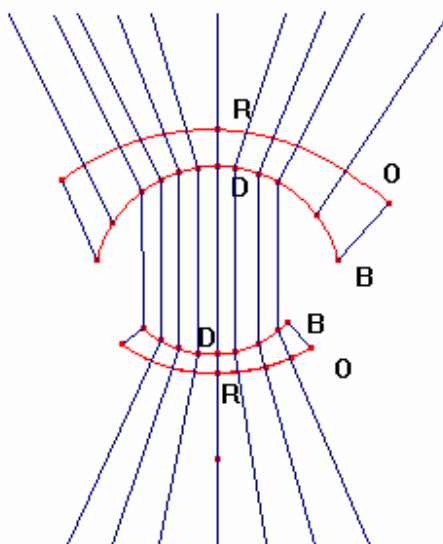
Se combinarmos as duas primeiras lentes que descrevemos aqui, de modo que aquela que tem um segmento de círculo interno seja a menor e a que tem um segmento circular externo a maior e que os pontos ardentes sejam os mesmos, então os raios

divergentes, como na figura 36, ao passarem pela primeira, tornar-se-ão paralelos entre si e, finalmente, ao passarem pela segunda, convergirão para o ponto ardente I.



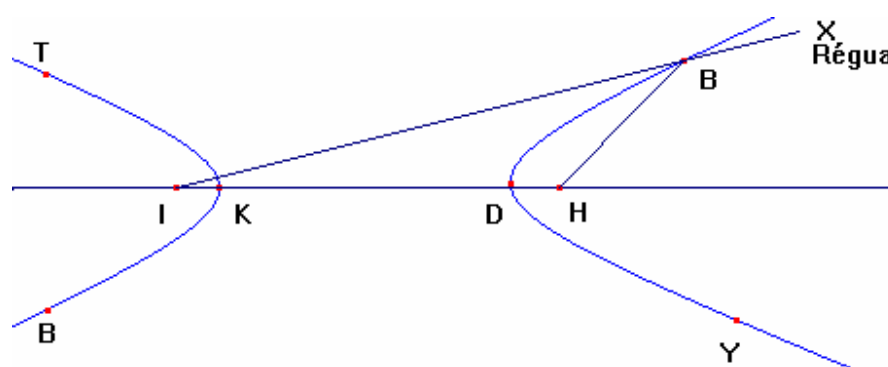
**Figura 36**

Finalmente, se combinarmos duas lentes, da mesma espécie, obtidas pelo círculo externo, como a segunda que descrevemos aqui, de forma que fiquem frente a frente uma com a outra, isto é, os segmentos elípticos fiquem frente a frente, então os raios vindos de uma fonte externa, ao passarem pela primeira, se tornarão paralelos, e depois de passarem pela segunda se tornarão, novamente divergentes, veja figura 37.



**Figura 37**

O passo seguinte é desenvolver um estudo semelhante na hipérbole. As mesmas observações são feitas sobre a hipérbole. Como no caso das elipses, Descartes escreve que a hipérbole foi estudada pelos antigos usando as seções de um cone ou cilindro. Mas uma vez, evoca o modelo do jardineiro, que consiste em fincar duas estacas H e I, onde, em I, prende uma grande régua por um orifício aberto em uma das suas extremidades, veja figura 38.



**Figura 38**

Na outra extremidade da régua amarra-se uma corda, um pouco menor que a régua, que também é amarrada na outra estaca. Colocando-se o dedo no ponto X, que une a régua e a corda, e movendo-o de todas as formas para baixo até D, sempre mantendo a corda esticada, descrevemos uma parte da hipérbole. Repetindo o processo para a parte inferior, obteremos a outra parte do ramo da hipérbole, completando-a. Mudando a configuração de lugar, passando para a outra estaca, obteremos a outra parte da hipérbole, tendo-a completamente. Se aumentarmos ou diminuirmos o comprimento da corda e, ao mesmo tempo, mantivermos as estacas como antes, obteremos hipérboles de outras espécies. Se mantivermos o tamanho da corda e mudarmos as estacas de lugar, obteremos também hipérboles de espécies diferentes. Se a corda tiver o mesmo comprimento da régua, obteremos em vez de uma hipérbole, uma reta. Se mudarmos a distância das estacas na mesma proporção que o tamanho da corda, obteremos hipérboles de mesma espécie. Descartes chama a atenção para o fato de que tanto a elipse como a hipérbole podem ser obtidas por uma régua ou por uma reta. Vale notar que em *A Geometria* todas as curvas geométricas podem ser geradas a partir de segmentos de reta, o elemento mais simples de sua Geometria.

Depois de descrever o processo de obter os vários tipos de hipérboles, anuncia propriedades interessantes da hipérbole, pois essas propriedades são, como as da elipse, a base para a produção das lentes, o fundamento necessário para a construção de telescópios, objetivo principal de seu trabalho em óptica. A primeira propriedade é aquela que nos livros didáticos de hoje é apresentada como a definição da hipérbole.

E, em adição, [você pode ver] que se de um ponto tal como B, tomado ao acaso em uma delas[um dos ramos da hipérbole], traçarmos duas retas na direção dos dois pontos, como H e I, em que as duas estacas devem ser fincadas a fim de descrevê-la, e que podemos chamar novamente os pontos ardentes, a diferença destas duas linhas, HB e IB, será sempre igual a linha DK, que marca a distância entre as hipérboles opostas. Isto acontece porque BI é maior do que BH, na mesma extensão que a régua foi medida para ser maior do que a corda, e também porque DI é que é mais longa do que DH. Pois, se encurtarmos essa distância DI, por [o comprimento de] KI, que é igual a DH, devemos ter DK como sua diferença. (DESCARTES, 2001, p. 137-tradução nossa)

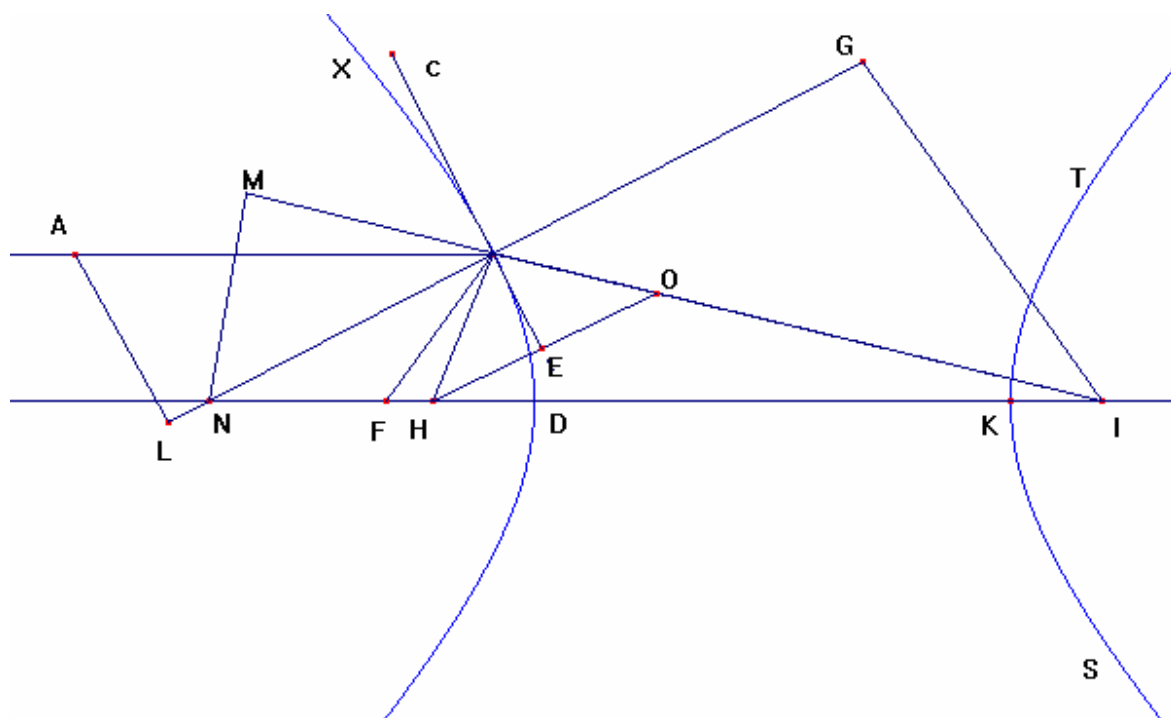
A segunda observação fala de duas propriedades importantes das hipérboles e está direcionada ao tema que Descartes pretende abordar de forma mais prática, a construção de lentes. Fala da propriedade refletora da hipérbole e das hipérboles de mesma espécie.

E finalmente, você pode ver que as hipérboles que descrevemos sempre mantendo a mesma proporção entre KD e HI são todas do mesmo tipo. Assim, além disso, você deve saber que se pelo ponto B, tomado ao acaso em uma hipérbole, traçarmos a linha reta CE, que divide o ângulo HBI em duas partes iguais, esta mesma linha CE tocará esta hipérbole neste ponto B, sem cruzá-la; os geômetras sabem a demonstração disto suficientemente bem. (DESCARTES, 2001, p. 137-tradução nossa)

A terceira observação é o que permite Descartes construir os vários tipos de lentes hiperbólicas.

Daqui pra frente desejo mostrar-lhe que se deste mesmo ponto B traçarmos a linha reta BA na direção interior da hipérbole e paralelo a DK, e se também traçarmos pelo mesmo ponto B a linha LG que corta CE em ângulos retos, então, tendo tomado BA como igual a BI, se estiverem traçados sobre LG, dos pontos A e I, as duas perpendiculares AL e IG, as duas últimas, AL e IG, terão entre elas a mesma proporção que as duas linhas DK e HI. E então, se dermos a forma desta hipérbole a um corpo de vidro em que as refrações são medidas pela razão entre as

linhas DK e HI, esta hipérbole induzirá todos os raios paralelos a seu eixo nesta lente a convergirem externamente no ponto I, pelo menos se esta lente for convexa; e se ela for côncava, os induziram a desviarem pra lá e pra cá, como se viessem daquele ponto I. (DESCARTES, 2001, p. 137-tradução nossa)

**Figura 39**

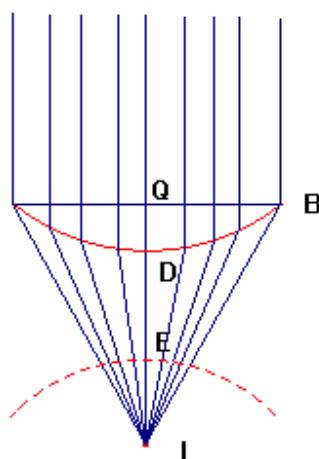
Descartes continua, agora demonstrando a propriedade:

Isto pode ser demonstrado como segue: antes de tudo, se traçarmos do ponto B a linha BF perpendicular a KD(estendida tanto quanto for necessário), e do ponto N, onde LG e KD interseccionam-se, a linha NM perpendicular a IB(também prolongada), encontraremos que AL está para IG como BF está para NM. Pois por um lado, os triângulos BFN e BLA são semelhantes porque ambos são retângulos e, porque os ângulos IBG e NBM são iguais. E também, além disso, como o mesmo BN serve como a base dos dois triângulos BFN e NMB, então BA, a base do triângulo ALB, é igual a BI, a base do triângulo IGB; do qual segue que os lados do triângulo BFN estão para esses do triângulo NMB como aqueles do triângulo ALB estão para esses do triângulo IGB. E BF está para NM como BI está para NI, porque os dois triângulos BIF e NIM, sendo retângulos e tendo o mesmo ângulo em I, são semelhantes. Assim, se traçarmos HO paralelo a LG, veremos que BI está para NI como OI está para HI, porque os triângulos BNI e OHI são semelhantes. Finalmente, como os dois ângulos EBH e EBI são iguais por construção, e desde que HO, que é paralelo a LG, corta a linha CE em ângulos retos, os dois

triângulos BEH e BEO são totalmente iguais. E assim, como BH, a base do primeiro, é igual a BO, a base do outro, resta OI como a diferença entre BH e BI, e dissemos que esta diferença é igual a DK. De modo que AL está para IG como DK está para HI. (DESCARTES, 2001, p. 137-8-tradução nossa)

Em resumo se AB é traçada paralela a DK, LBG perpendicular a CE, e se BA é igual a BI e, além do mais, as perpendiculares  $AL : IG = DK : HI$ . Se  $HI/DK$  mede o índice de refração então os raios paralelos aos eixos da hipérbole convergirão para o ponto ardente I.

A primeira lente que será descrita é aquela obtida quando construimos uma hipérbole com as proporções sugeridas na propriedade demonstrada acima. Assim, bastará que tomemos a porção da hipérbole DB, tão grande quanto queiramos, e de B traçarmos uma perpendicular ao eixo da hipérbole em Q. Se giramos as linhas DB, QB, em torno do eixo DQ, obteremos uma superfície que tem a propriedade de tomar os raios paralelos, vindos do ar em direção a superfície plana, e transformá-los em raios convergentes ao ponto ardente I da hipérbole. E reciprocamente, os raios a partir de I, ao passarem pela lente se tornarão paralelos ao saírem dela.

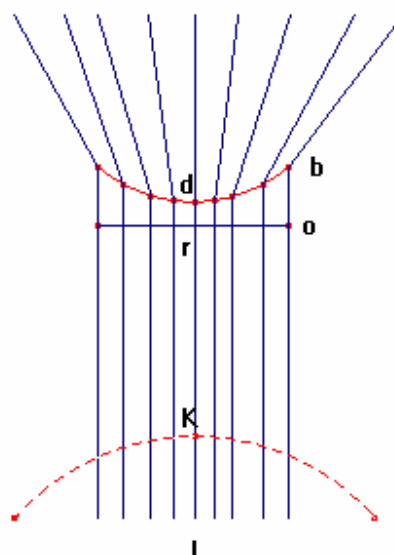


**Figura 40**

Em seguida, Descartes descreverá vários outros tipos de lentes que podem ser obtidas usando hipérboles com as propriedades refratárias já mencionadas.

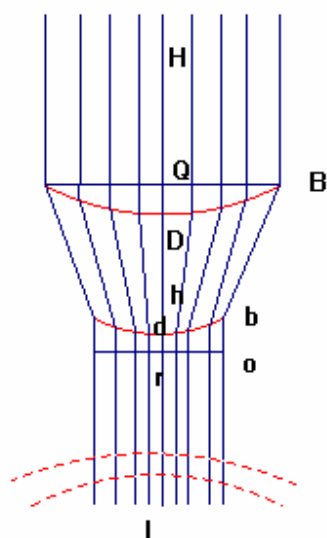
A segunda lente consiste em tomarmos uma hipérbole db construída de modo a satisfazer as propriedades descritas anteriormente. Se traçarmos uma linha reta *ro*

perpendicular ao eixo  $dK$  da hipérbole, então a superfície obtida, girando as linhas  $ro$ ,  $ob$ ,  $db$  em torno do eixo  $dK$ , descreverá uma lente que tem a propriedade de transformar todos os raios paralelos ao eixo  $dk$ , vindos do lado da reta, em raios divergentes do lado da hipérbole.



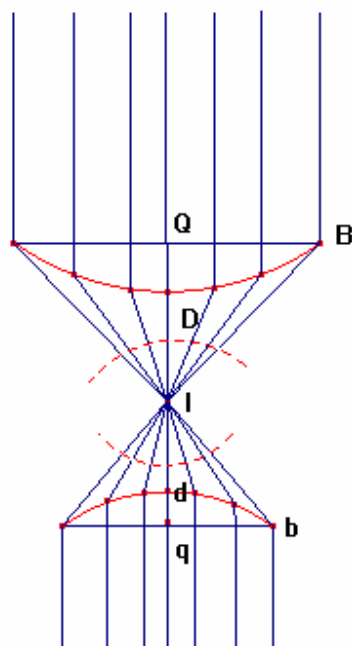
**Figura 41**

Uma outra lente é proposta para transformar os raios paralelos, vindos do ar, em raios paralelos, mas mais próximos entre si. A lente consiste em tomar a linha  $hI$  mais curta para traçar a hipérbole  $robd$  do que a da lente  $DBQ$ . As duas lentes devem estar dispostas de uma tal maneira que os eixos  $DQ$  e  $rd$  estejam na mesma reta e os dois pontos ardentes coincidentes e marcados em  $I$ .



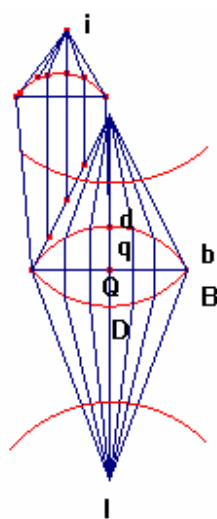
**Figura 42**

Se colocarmos, frente a frente, duas hipérboles semelhantes DBQ e dbq, desiguais em tamanho, de tal modo que os seus eixos sejam coincidentes e os seus pontos ardentes coincidam, então os raios vindo do ar na direção da maior serão convertidos para o ponto ardente I e, em seguida, se forem refletidos, e, ao passarem pela segunda lente menor, serão novamente paralelos, mas agora ocuparão menos espaço.



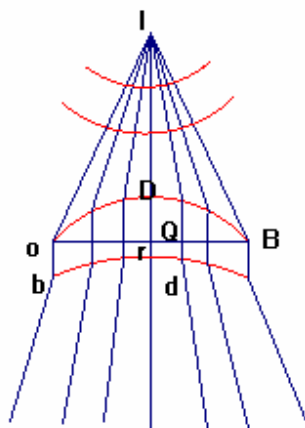
**Figura 43**

Se colocarmos as superfícies planas dessas lentes, do caso anterior, frente a frente, ou em qualquer distância uma da outra, não necessitando que seus eixos coincidam, os raios vindos de um dos pontos ardentes convergirão, ao passar por essas lentes, para o outro ponto ardente, da outra lente.



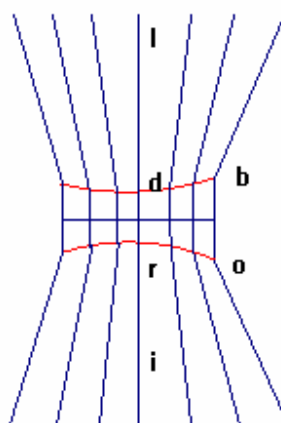
**Figura 44**

Compondo as duas lentes, DBQ e robd, com as partes planas frente a frente uma com a outra, então os raios que vêm do ponto ardente I serão refratados como se viessem do ponto ardente i.



**Figura 45**

Por fim, se compusermos as duas lentes robd, veja figura 45, frente a frente uma com a outra, de modo que a parte plana toque uma na outra, os raios vindos do ar, na direção do ponto ardente I, serão refratados como se estivessem vindos do ponto ardente i.



**Figura 45**

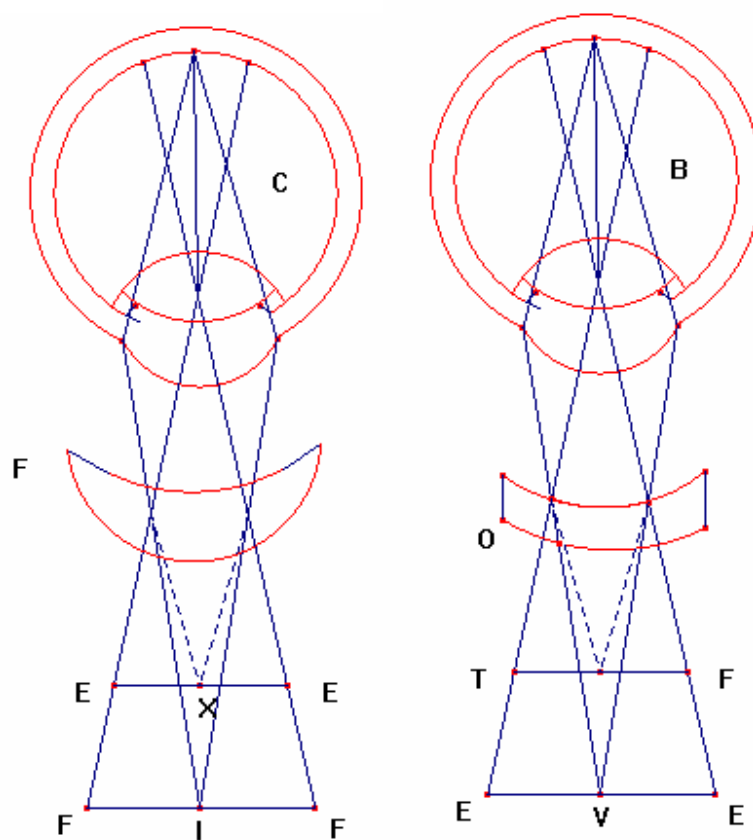
Descartes poderia combinar, de diversas formas, as lentes elípticas com as lentes hiperbólicas e obter outros tipos não especificados de lentes, mas acredita que as descrições dadas sejam suficientes para o seu propósito.

Na sequência, argumentará a favor das elipses e das hipérboles, como sendo as curvas mais apropriadas para desenhar lentes. As mais simples são as que são compostas de linhas retas e hipérboles e, depois, as que são compostas de elipses e linhas circulares.

A tarefa que resta é investigar de que forma devemos compor cada um dos tipos de telescópios para torná-los tão perfeitos quanto possível. O nono Discurso tem esse propósito, ou seja, descreverá os telescópios. Antes de tudo, é preciso escolher o material para compô-los, que deve ser transparente, fácil de cortar, suficientemente duro e causar poucas reflexões. O vidro é o material mais perfeito, segundo Descartes, principalmente os feitos de cinzas muito finas, melhor até do que a pedra de cristal, pois o cristal provoca mais reflexões.

Uma vez escolhido o material apropriado, devemos, para corrigir os defeitos da visão, escolher as formas hiperbólicas. Essas formas podem corrigir as dificuldades de se enxergar objetos distantes e objetos próximos. Descartes explicará minuciosamente como fazê-lo.

Por exemplo, se o olho B ou C está colocado a fazer com que todos os raios vindos do ponto H ou I convergirem exatamente no centro de sua base, e não os do ponto V ou X, a fim de fazê-lo ver o objeto próximo V ou X distintamente, é necessário posicionar as lentes O ou P entre os dois, cujas superfícies, uma convexa e a outra côncava, têm as formas traçadas por duas hipérboles que são tais que H ou I é o ponto ardente da superfície côncava, que deve ser virada na direção do olho, e V ou X a da convexa. (DESCARTES, 2001, p. 151-tradução nossa)



**Figura 46**

O décimo Discurso explica como cortar as lentes, especificando o método de como as lentes hipérbólicas devem ser traçadas.

Para finalizar essa parte sobre o ensaio *A Dióptrica* convém ressaltarmos que não encontramos nele nenhuma aplicação do método de análise e síntese propriamente. Como sabemos, e isso foi discutido anteriormente, a maioria das idéias desse ensaio foram concebidas por Descartes num período anterior. Por exemplo, sabemos que a linha anaclástica foi apresentada via metodologia cartesiana nas *Regras*, mas fora pensada num período anterior. Ou seja, podemos afirmar que muitos problemas já tinham sido efetivamente resolvidos e que Descartes apresenta, nesse tratado, o resultado de vários anos de pesquisas, apresentando os resultados de uma forma concisa não se preocupando em apresentar a forma como eles foram descobertos.

Se não encontramos, nesse ensaio, o método aplicado, todavia encontramos vestígios do método. Isso é visível quando Descartes, no primeiro discurso, adota, desde o

início, o critério de simplicidade, anunciando que seria muito claro, pois sabia que os homens que trabalhavam com o vidro eram práticos e que não seria necessário recorrer a outro estudo, ou seja, além de claro nas suas afirmativas também pretendia exaurir os temas discutidos, não deixando nada sem resolver. Outro exemplo, na explicação das propriedades da luz usa várias metáforas. A nosso ver, essas metáforas são formas de decompor a questão simplificando-a a fim de nos mostrar as propriedades com mais eficácia. No fim de cada discurso ficamos com a sensação que o tema foi tratado em sua totalidade.

Mas se a metodologia não aparece nitidamente, em contra partida, algumas idéias Matemáticas aparecem como sustentação nítida dos argumentos cartesianos. Isso é muito claro em todo o ensaio, mas principalmente, quando explica as curvas ideais à construção das lentes e por conseguinte a construção dos telescópios. São as cônicas que têm as propriedades ideais para a construção das lentes e Descartes demonstra muito claramente isso argumentando, convincentemente, que as propriedades das cônicas permitiriam a construção de lentes ideais. Ou seja, a Matemática serviu como o elemento modelador das construções das lentes. Tudo isso, ao nosso ver, demonstra o quanto a Matemática foi importante para o desenvolvimento da Física Natural cartesiana, tanto no aspecto metodológico quanto no aspecto modelador.

Passaremos agora ao último ensaio do Discurso do método, *Os Meteoros*. Se em *A Dióptrica* não encontramos exemplos ilustrativos da metodologia cartesiana claramente em *Os Meteoros* encontramos, no oitavo discurso, um claro exemplo de sua metodologia. Vamos a ele.

### 3.6 Os Meteoros

Dos três ensaios, Descartes pretendia que *Os Meteoros* fosse adotado como livro didático nos colégios jesuítas, o que não ocorreu. O ensaio é dividido em dez discursos, a saber: a natureza dos corpos terrestres, vapores e exalações, sal, ventos, nuvens, neve, chuva e granizo, tempestades, relâmpagos e todos os outros fogos que queimam no ar, o arco-íris, as cores das nuvens e os círculos ou coroas que algumas vezes vemos ao redor dos corpos celestes, a aparição dos vários sois.

Como se vê, pelos títulos de cada discurso, o ensaio trata da explicação dos fenômenos atmosféricos ou sublunares. Muitas questões metereológicas, naquela época, ainda eram tratadas com explicações sobrenaturais e religiosas. As explicações científicas, para fenômenos metereológicos e tantos outros, eram abordadas segundo a interpretação da filosofia aristotélica. Nesse sentido, Descartes pôde desenvolver explicações alternativas a esses fenômenos, baseando-se na sua concepção mecanicista e na sua metodologia.

Dentre todos os discursos, o oitavo, que versa sobre o arco-íris, é o mais importante, pelo menos sob dois aspectos. O primeiro é que Descartes desenvolve uma explicação razoável do fenômeno e, nessa explicação, inova ao desenvolver experimentos bem elaborados para entender o fenômeno, bem como explicações teóricas. O segundo é que o próprio Descartes declara que no estudo do arco-íris a sua metodologia pode ser melhor observada a fim de notarmos a sua eficiência e isto alinha-se diretamente com o propósito deste trabalho.

O arco-íris é um tal fenômeno notável da natureza, e sua causa foi tão meticulosamente procurada depois de mentes pesquisando por todas as épocas, que não poderia escolher um assunto mais apropriado para demonstrar como, com o método que estou usando, podemos chegar ao conhecimento não possuído de modo algum por esses cujos escritos nos estão disponíveis. (DESCARTES, 2001, p. 332-tradução nossa)

Passemos, de agora em diante, a tarefa de investigar como é aplicada a metodologia cartesiana no estudo desse fenômeno.

A primeira etapa é a da descoberta, a etapa analítica e Descartes se propõe a decompor o fenômeno, para tanto, fará comparações, lançará mão de fatos já conhecidos, conhecimentos anteriores que são considerados corretos por ele, desenvolverá experimentos, efetuará cálculos, enfim, tudo que for possível para esclarecer as causas do fenômeno. A etapa analítica nos conduzirá do efeito à causa, isto é, a partir da concepção do fenômeno, seguindo as etapas do método, alcançaremos verdades claras e evidentes, primeiros princípios, que permitirão entender o fenômeno a partir deles e, em seguida, iniciar a etapa sintética, a demonstração do fenômeno.

Devemos notar que no caso do arco-íris, diferentemente de um problema matemático, onde a primeira etapa do método seria considerar o problema resolvido,

devemos considerar o problema dado pela natureza, isto é, ele existe de fato na natureza e ela fornece tudo aquilo que possibilita a sua existência. Essas possibilidades devem ser entendidas para que o fenômeno seja desvendado, explicado totalmente.

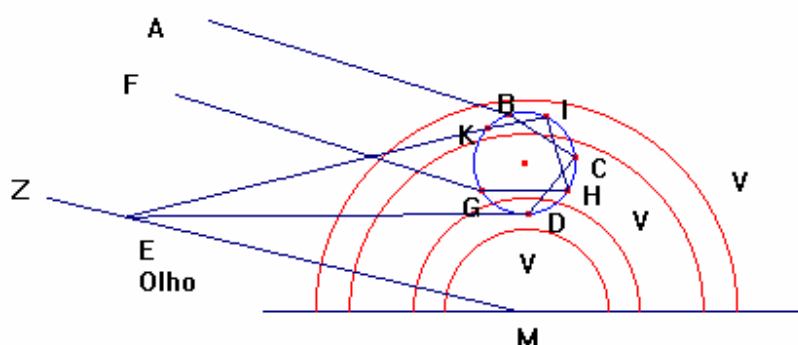
A primeira tarefa de Descartes é retirar do arco-íris o caráter sobrenatural, para tanto, menciona que esse fenômeno pode ser facilmente encontrado nas fontes próximas a nós, como a experiência nos mostra, e que pode mesmo ser reproduzido artificialmente e sua causa inicial é a incidência dos raios do sol sobre as gotas de água.

Primeiro, considero que este arco pode aparecer não somente no céu, mas também no ar próximo de nós, sempre que existam muitas gotas de água no ar iluminadas pelo sol, como a experiência nos mostra em certas fontes; desse modo foi fácil para mim julgar que veio meramente da forma que os raios de luz agem contra essas gotas, e dali tendem na direção de nossos olhos. Então, sabendo que essas gotas são redondas, como foi provado acima [em um outro discurso], e vendo que seu ser maior ou menor não muda a aparência do arco, então pus-me na minha cabeça para tomar uma muito grande, pra examiná-la melhor. (DESCARTES, 2001, p. 332-tradução nossa)

Descartes, nesta passagem, nos diz que o estudo do arco-íris pode ser reduzido ao estudo de uma grande gota de vidro redonda, o tamanho não importa. A afirmação de que as gotas de chuva são redondas já fora provada anteriormente nesse ensaio. Assim, propõe-se a construir uma grande gota e o problema será estudado experimentalmente. Desse modo, terá um maior controle sobre o fenômeno, podendo, inclusive, realizar experimentos com ela. A grande gota, ao ser manipulada, permitiu a Descartes obter resultados inovadores, como a determinação dos ângulos ideais ao aparecimento do arco. Ainda, merece ser dito, que com essas observações o arco-íris passa a ser um fenômeno que não necessita da presença de nuvens. Na Filosofia aristotélica, o arco-íris era explicado pela presença das nuvens, ou melhor, pela reflexão da luz do sol nas nuvens, algumas reflexões definiam as cores e outras a forma do arco.

Descartes, depois de construir a grande gota, pôde então mudá-la de lugar, alterar os ângulos de incidência, girá-la e ao mesmo tempo mantendo os ângulos, enfim, pode fazer diversos experimentos. A partir dessas experiências consegue notar que há um ângulo ideal para o aparecimento das cores e, conseqüentemente, do arco-íris. Assim, continua:

E para este propósito preenchi um grande frasco transparente e perfeitamente redondo com água e descobri que, por exemplo, quando o sol vem da seção do céu marcada em AFZ[veja figura abaixo], e meu olho estava no ponto E, então quando ponho esta bola na localização BCD, sua parte D aparece-me completamente vermelha e incomparavelmente mais brilhante que o resto; e descobri que se a aproximasse ou a afastasse dele, e se a colocasse à direita ou à esquerda, ou mesmo a fizesse girar em volta da minha cabeça, contanto que a linha DE sempre tenha um ângulo de aproximadamente  $42^{\circ}$  com a linha EM, que deve ser imaginada estender do centro do olho para o do sol, esta parte D sempre apareceu igualmente vermelha. Mas a medida que fiz este ângulo DEM tornar-se levemente maior, esta cor vermelha desapareceu. E se fiz o ângulo ligeiramente menor, a cor não desapareceu toda de uma vez, mas antes primeiro dividiu-se em duas partes brilhantes, em que se viu o amarelo, o azul, e outras cores. Depois, também olhando na parte desta bola que está marcada em K, percebi que se fizesse o ângulo KEM ao redor de  $52^{\circ}$  esta parte K apareceria vermelha também, mas não tão brilhante quanto em D; e que se fizesse levemente maior, outras cores mais fracas apareceriam. (DESCARTES, 2001, p. 332-tradução nossa)



**Figura 47**

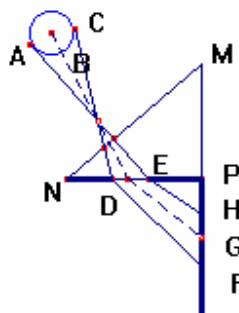
A definição dos ângulos ideais permitirá Descartes tirar a conclusão de que o arco, no céu, é formado devido a conjunção de diversas gotas que definem os mesmos ângulos, como explicado na citação acima. A experiência mostra também a região ou o ângulo de formação dos dois arcos: o arco principal será visto sob um ângulo de  $42^{\circ}$  e o secundário sob um ângulo de  $52^{\circ}$ .

Entendi claramente a partir disto que se todo o ar na direção de M fosse preenchido com tais bolas, ou em seu lugar gotas de água, ali deveria aparecer um ponto muito vermelho e brilhante em cada uma dessas gotas a partir das quais as linhas traçadas na direção do olho E fazem um ângulo de aproximadamente  $42^{\circ}$  com EM, como supus no caso desses

marcados R; e que se esses pontos são olhados todos juntos, sem notarmos qualquer coisa sobre sua posição exceto que o ângulo segundo o qual são vistos, devem aparecer como um círculo contínuo da cor vermelha. Da mesma forma devem existir pontos nessas gotas marcadas S e T das quais as linhas traçadas em direção a E fazem ângulos ligeiramente mais agudos com EM, e estes pontos compõem círculos de cores mais fracas; e nisto consiste o arco-íris primário e principal. Então, de novo, achei que se o ângulo MEX fosse de  $52^{\circ}$ , um círculo vermelho deve aparecer nas gotas marcadas X, e outros círculos de cores mais fracas nas gotas marcadas Y, e que nisto consiste o arco-íris secundário e menos importante. E finalmente, em todas as outras gotas, marcadas V, nenhuma cor pode aparecer. (DESCARTES, 2001, p. 333-tradução nossa)

Em seguida, Descartes explica que o arco-íris primário é provocado pelos raios solares depois que sofrem duas refrações e uma reflexão. Já o arco-íris secundário é causado pelos raios que sofrem duas refrações e duas reflexões. As duas refrações enfraquecem o fenômeno. Tudo isso, diz Descartes, foi obtido avaliando cuidadosamente a grande gota. Para constatar essas reflexões e refrações Descartes colocou um corpo opaco, em algum lugar nas linhas AB, BC, CD ou DE e isso fez com que a cor vermelha desaparecesse. Também constatou que se cobrisse a bola toda, mas deixando os pontos B e D descobertos a cor vermelha voltava a aparecer.

O passo seguinte, segundo Descartes, é explicar a maior dificuldade, a saber: o motivo de existir muitos raios que tendem ao nosso olho após duas refrações e uma ou duas reflexões, quando a bola está em outra posição, não fazem as cores aparecer, ou seja, somente aquelas descritas anteriormente é que fazem as cores aparecer. Para explicar isso, Descartes fará uso de uma outra comparação, usará um prisma de cristal, veja figura abaixo, que sabia-se decompunha os raios solares nas cores do arco-íris.



**Figura 48**

Descartes passa então a estudar o prisma de cristal MNP que possui suas duas superfícies completamente planas MN e NP e formando ângulo de  $30^0$  ou  $40^0$  entre si, de modo que os raios do sol ABCD, cruzando a superfície MN em ângulos retos ou quase retos, não sofrerão refração considerável, mas haverá uma refração considerável ao sair através de NP. Descartes então observa que se cobrisse uma das superfícies com um corpo escuro, mas deixando uma abertura estreita DE, então os raios passando por essa abertura eram sempre refratados para os pontos FGH, colorindo ali com todas as cores do arco-íris. Sempre a cor vermelha aparecia em F e o azul e o violeta em H.

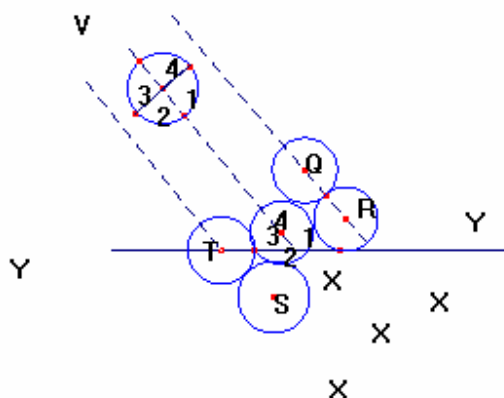
A partir disto aprendi, primeiro, que as superfícies das gotas de água não necessitavam ser curvadas a fim de produzir estas cores, pois aquelas deste cristal são totalmente planas, nem o ângulo sob o qual apareciam necessitava ser de qualquer tamanho particular, pois pode ser modificado aqui sem mudá-las. E embora possamos fazer os raios indo para F curvarem algumas vezes mais ou algumas vezes menos do que esses indo para H, todavia sempre colorem de vermelho, e aqueles indo para H sempre colorem de azul; nem é a reflexão necessária, pois não existe dela aqui; nem finalmente necessitamos uma pluralidade de refrações, pois existe apenas uma delas aqui. Mas julguei que deve existir ao menos uma refração, e mesmo uma tal que seu efeito não foi destruído por uma outra, pois o experimento mostra que se as superfícies MN e NP fossem paralelas, os raios, estando em linha reta tanto naquela quanto eram curvadas na outra, não produziram estas cores. Também não tenho dúvida que a luz era necessária, pois sem ela nada devemos ver. E observei, além disso, que a sombra, ou a limitação desta luz, era necessária, pois se removemos o corpo negro sobre NP, as cores FGH deixam de aparecer; e se fazemos a abertura DE suficientemente maior, o vermelho, o laranja, e o amarelo em F não estendem adiante por causa daquilo que faz o verde, o azul, e o violeta em H – ao invés, todo o espaço extra entre os dois em G permanece branco. (DESCARTES, 2001, p. 335-tradução nossa)

O experimento do prisma permite Descartes estabelecer que o aparecimento das cores não depende da forma redonda da superfície, pois no prisma as superfícies são planas. Assim, se os raios incidentes sobre o prisma não provocam uma refração acentuada atravessando a pequena abertura DE na face escura inferior NP as cores aparecem na parede PHGF, o vermelho aparece em F e o azul ou o violeta em H. Descartes também estabelece que só é necessário uma refração e nenhuma reflexão, pois colocando as duas superfícies planas paralelas entre si, não haverá refração e as cores desapareceram completamente. Outro fato destacado por Descartes é que se a abertura DE for grande demais as cores apareceram apenas nas bordas enquanto que a parte central ficará branca

e que a luz é necessária, pois sem ela, nada teríamos. Outro fato obtido experimentalmente através do prisma é a importância da presença da sombra. Ao retirar o corpo negro as cores desaparecem e ao aumentar a abertura DE as cores permaneciam na mesma posição já indicada, mas o espaço G permanecia com a cor branca e agora com uma extensão maior.

Na sequência, Descartes explicará a diferença das cores presentes nos pontos PHFG, para tanto, utilizará o modelo das pequenas partículas esféricas que transmitem a pressão do sol. Começa lembrando a descrição feita em *A Dióptrica* que a luz nada mais é do que uma ação ou um certo movimento de um certo material muito fino cujas partículas podem ser representadas como bolas pequeninas que rolam nos poros dos corpos terrestres. As bolas, segundo Descartes, podem girar de várias maneiras de acordo com as várias causas que as determinam e que as refrações, que ocorrem do mesmo lado, as fazem girar na mesma direção.

Podemos resumir o modelo cartesiano para explicar as cores: as esferas inicialmente são providas de apenas um tipo de movimento, o de translação. Ao colidirem-se com uma superfície oblíqua, por exemplo um lago, a colisão fará com que as pequenas esferas ganhem velocidades giratórias no mesmo sentido. As bolas podem ter velocidades iguais ou diferentes. As esferas vizinhas podem alterar ou não a velocidade da esfera, veja figura abaixo.



**Figura 49**

A fim de explicar melhor o seu modelo, consideraremos a figura acima, onde uma bola 1234 é impulsionada de V para X, viajando em linha reta e que os lados 1 e 3

tenham velocidades iguais e ao atingir a superfície YY, o lado 3 que encontra essa superfície primeiro é retardado, enquanto o lado 1 ainda continua com a mesma velocidade, uma vez que ainda não tocou a superfície da água, o que faz a bola se mover no sentido 123, horário. O movimento giratório é então consequência da passagem da luz de um meio para outro. Como a figura mostra, imagine ainda quatro bolas que circundam 1234: Q, R, S, T, das quais, Q e R movem-se com mais força do que T e S, pois Q e R são consideradas ainda não em contato com a água, enquanto 1234 está iniciando o seu contato e T e S já estão em contato, por isso suas velocidades são menores. Desse modo, o contato com essas bolas vizinhas aumentará a velocidade giratória dessa bola 1234, pois Q pressiona a parte 1 e S retém a 3 e assim aumenta a velocidade giratória de 1234. Neste modelo, consideraremos que T e S representaram a sombra e Q e R um outro raio paralelo a 1234. Isso explica a ação do raio DF. No outro extremo, o raio EH é descrito invertendo o raciocínio.

É claro disso que Q, pressionando a parte da bola marcada 1, e S, retendo a marcada 3, aumenta sua rotação; e que R e T não a impedem, porque R está disposta a mover para X mais rápido que 1234 a segue, e T não está disposta a seguir 1234 tão rapidamente quanto 1234 a precede. Isto explica a ação do raio DF. Assim, ao contrário, se Q e R tendem mais lentamente que 1234 para X, e S e T tendem mais rapidamente para lá, R impede a rotação da parte marcada 1, e T aquela da parte 3, sem as duas outras, Q e S, nada fazendo. Isto explica a ação do raio EH. (DESCARTES, 2001, p. 336-7-tradução nossa)

Desse modo, Descartes se sentiu capacitado a resolver o mais difícil dos problemas na explicação do fenômeno do arco-íris, a aparição das cores. A natureza das cores que aparecem em F consiste somente do fato que as partículas da matéria fina, que transmitem a ação da luz, têm uma tendência mais forte a girarem-se do que moverem-se em linha reta provocando a cor vermelha, ou seja, a cor vermelha que aparece em F é devido ao fato que o movimento giratório é mais forte que o movimento em linha reta. A luz que tem a tendência em linha reta um pouco mais forte que o movimento giratório provoca o amarelo. As cores que são visíveis em H é devido ao fato que as partículas não giram tão rapidamente quanto geralmente fazem quando não existe causa particular que as dificulte nisto. O verde aparece onde giram um pouco mais devagar e o azul onde giram muito lentamente. E em tudo isto, continua Descartes,

[...] a explicação concorda tão perfeitamente com a experiência que não creio possível, após se ter estudado ambos cuidadosamente, duvidar que o assunto é como tenho a pouco explicado. Pois se é verdade que a sensação que temos da luz é causada pelo movimento ou inclinação para o movimento de algum material que toca nossos olhos – como muitas outras coisas que atestam – é certo que os diferentes movimentos desse material devem causar diferentes sensações em nós. E como não pode existir variação nestes movimentos diferentes que o primeiro que mencionei, assim não encontramos qualquer variação pela experiência, nas sensações que temos deles, diferentes daquela das cores. E não é possível encontrar uma única coisa no cristal MNP que pode produzir cores, exceto o modo como manda as pequenas partículas da matéria fina na direção da linha FGH, e daí para nossos olhos. A partir disso, parece-me, ser muito óbvio que não devemos procurar nada além nas cores exibidas pelos outros objetos; pois a experiência ordinária mostra que a luz ou o branco, e a sombra ou o preto, junto com as cores do arco-íris que foram explicado aqui, basta para compor todas as outras. E não posso aprovar a distinção feita pelos filósofos quando dizem que existem algumas cores verdadeiras, e outras que são somente falsas ou aparentes. Pois porque toda natureza verdadeira das cores consiste apenas em sua aparência, parece para mim ser uma contradição dizer que são falsas, e que aparecem. (DESCARTES, 2001, p. 337-8-tradução nossa)

Assim termina a etapa analítica do método e começa a etapa sintética, com uma preocupação, a saber, se no caso do arco-íris também aparecerá as sombras que foram detectadas no prisma. Se isso for comprovado, bastará que retrocedamos, basicamente no caminho inverso da análise, para concebermos completamente o fenômeno do arco-íris. Descartes se propõe então a fazer os cálculos, pois duvidou inicialmente que no arco-íris o fenômeno ocorreria da mesma forma que no prisma, pois não notara nada no arco-íris que interrompesse a luz e também porque só aparecia sob certos ângulos. Os cálculos de Descartes então indicam a existência de uma sombra interrompendo a passagem da luz e também intervalos mais apurados sob os quais o arco primário e o secundário poderiam aparecer.

[...] mesmo no arco-íris, duvidei a princípio se as cores eram produzidas ali inteiramente do mesmo modo como no cristal MNP; pois não notei qualquer sombra que interrompa a luz, nem ainda entendi porque apareceram somente sob certos ângulos, até ter tomado a minha pena e calculado pormenorizadamente todos os raios que incidem sobre os vários pontos de uma gota de água, a fim de ver sob quais ângulos poderiam vir para os nossos olhos após duas refrações e uma ou duas reflexões achei que depois de uma reflexão e duas refrações, muito mais delas podem ser vistas sob o ângulo de  $41^0$  a  $42^0$  do que sob qualquer um menor; e que

nenhum deles podem ser visto segundo um ângulo maior. Depois também achei que após duas reflexões e duas refrações, muito mais delas vêm para o olho sob um ângulo de  $51^0$  a  $52^0$ , que sob qualquer um maior, e nenhum desses raios vêm sob um menor. De modo que existe uma sombra em ambos os lados, interrompendo a luz que, após ter passado por uma infinidade de pingos de chuva iluminados pelo sol, vem para o olho sob o ângulo de  $42^0$  ou um pouco menos, e então causa o arco-íris primário e mais importante. E existe também uma sombra impedindo a luz vindo sob o ângulo de  $51^0$  ou um pouco mais, que faz o arco-íris exterior; pois não recebendo raios de luz em seus olhos, ou recebendo notavelmente menos deles a partir de um objeto que de um outro que está próximo a ele, é a mesma coisa como ver a sombra. Isto claramente mostra que as cores desses arcos são produzidas pela mesma causa como são essas que aparecem com a ajuda do cristal MNP, e que o raio do arco interior não deve ser maior que  $42^0$ , nem aquele do exterior menor que  $51^0$ . E finalmente, mostra que a superfície exterior do arco-íris primário deve ser muito mais limitada do que a interior, e vice-versa para o secundário, como pode ser visto por experimento. Mas afim de que esses que sabem Matemática que podem ver se o cálculo que tenho feito desses raios é suficientemente exato, é necessário que o explique aqui. (DESCARTES, 2001, p. 339-tradução nossa)

Descartes confirma então que nos dois casos do arco-íris existe uma sombra, tal como no prisma. Em seguida, para sanar todas as dúvidas, se propõe então a efetuar os cálculos necessários para verificar todos os raios que chegam aos nossos olhos após duas refrações e uma ou duas reflexões. A conclusão, para o arco primário, é que a maior parte pode ser vista no intervalo angular de  $41^0$  a  $42^0$  do que num ângulo menor e nenhum em ângulos maiores. Para o arco secundário o intervalo angular será de  $51^0$  a  $52^0$ . A outra conclusão é que dos dois lados há uma sombra que bloqueia a luz que, depois de atravessar uma infinidade de gotas de chuva, iluminadas pelo sol, chega aos nossos olhos sob um ângulo de  $42^0$ , ou um pouco menor. As mesmas observações são aplicadas ao arco secundário.

Os cálculos dependem de um conhecimento prévio sobre o índice de refração do ar para a água que Descartes diz ser de 250/187 e levam também em consideração a análise do trajeto de um raio como na figura 48 abaixo, onde considera que o raio FE incide sobre a superfície da gota AFD.



|                |              |                                             |                                              |                                            |                                             |
|----------------|--------------|---------------------------------------------|----------------------------------------------|--------------------------------------------|---------------------------------------------|
|                |              |                                             |                                              |                                            |                                             |
| 3000<br>4000   | 2244<br>2992 | 145 <sup>0</sup> 4′<br>132 <sup>0</sup> 50′ | 154 <sup>0</sup> 4′<br>145 <sup>0</sup> 10′  | 17 <sup>0</sup> 56′<br>22 <sup>0</sup> 30′ | 136 <sup>0</sup> 8′<br>122 <sup>0</sup> 4′  |
| 5000<br>6000   | 3740<br>4488 | 120 <sup>0</sup><br>106 <sup>0</sup> 16′    | 136 <sup>0</sup> 4′<br>126 <sup>0</sup> 40′  | 27 <sup>0</sup> 52′<br>32 <sup>0</sup> 56′ | 108 <sup>0</sup> 12′<br>93 <sup>0</sup> 44′ |
| 7000<br>8000   | 5236<br>5984 | 91 <sup>0</sup> 8′<br>73 <sup>0</sup> 44′   | 116 <sup>0</sup> 51′<br>106 <sup>0</sup> 30′ | 37 <sup>0</sup> 26′<br>40 <sup>0</sup> 44′ | 79 <sup>0</sup> 25′<br>65 <sup>0</sup> 46′  |
| 9000<br>100000 | 6732<br>7480 | 51 <sup>0</sup> 41′<br>0                    | 95 <sup>0</sup> 22′<br>83 <sup>0</sup> 10′   | 40 <sup>0</sup> 57′<br>13 <sup>0</sup> 40′ | 54 <sup>0</sup> 25′<br>69 <sup>0</sup> 30′  |

Por esta tabela pôde constatar que qualquer que seja o raio ele sairá formando com o ângulo inicial um ângulo de não mais do que 40<sup>0</sup>57′ e que existe uma concentração de raios que tornam o ângulo ONP próximo a 40<sup>0</sup> do que menor e também uma concentração deles que fazem SQR próximo a 54<sup>0</sup> do que maior.

Mas Descartes, para chegar a valores mais precisos, fornece uma segunda tabela, onde trabalha com valores concentrados no intervalo de 8000 a 9800 para HF.

| Linha HF     | Linha CI     | Arco FG                                    | Arco FK                                     | Ângulo ONP                                 | Ângulo SQR                                 |
|--------------|--------------|--------------------------------------------|---------------------------------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|
| 8000<br>8100 | 5984<br>6058 | 73 <sup>0</sup> 44′<br>71 <sup>0</sup> 48′ | 106 <sup>0</sup> 30′<br>105 <sup>0</sup> 25 | 40 <sup>0</sup> 44′<br>40 <sup>0</sup> 58′ | 65 <sup>0</sup> 46′<br>64 <sup>0</sup> 37′ |
| 8200<br>8300 | 6133<br>6208 | 69 <sup>0</sup> 50′<br>67 <sup>0</sup> 48′ | 104 <sup>0</sup> 20′<br>103 <sup>0</sup> 14 | 41 <sup>0</sup> 10′<br>41 <sup>0</sup> 20′ | 63 <sup>0</sup> 10′<br>62 <sup>0</sup> 54′ |
| 8400<br>8500 | 6283<br>6358 | 65 <sup>0</sup> 44′<br>63 <sup>0</sup> 34′ | 102 <sup>0</sup> 9′<br>101 <sup>0</sup> 2   | 41 <sup>0</sup> 26′<br>41 <sup>0</sup> 30′ | 61 <sup>0</sup> 43′<br>60 <sup>0</sup> 32′ |
| 8600<br>8700 | 6432<br>6507 | 61 <sup>0</sup> 22′<br>59 <sup>0</sup> 4′  | 99 <sup>0</sup> 56′<br>98 <sup>0</sup> 48′  | 41 <sup>0</sup> 30′<br>41 <sup>0</sup> 28′ | 58 <sup>0</sup> 26′<br>57 <sup>0</sup> 20′ |
| 8800<br>8900 | 6582<br>6657 | 56 <sup>0</sup> 42′<br>54 <sup>0</sup> 16′ | 97 <sup>0</sup> 40′<br>96 <sup>0</sup> 32   | 41 <sup>0</sup> 22′<br>41 <sup>0</sup> 12′ | 56 <sup>0</sup> 18′<br>55 <sup>0</sup> 20′ |
| 9000<br>9100 | 6732<br>6806 | 51 <sup>0</sup> 41′<br>49 <sup>0</sup>     | 95 <sup>0</sup> 22′<br>94 <sup>0</sup> 12′  | 40 <sup>0</sup> 57′<br>40 <sup>0</sup> 36′ | 54 <sup>0</sup> 25′<br>53 <sup>0</sup> 36′ |
| 9200<br>9300 | 6881<br>6956 | 46 <sup>0</sup> 8′<br>43 <sup>0</sup> 8′   | 93 <sup>0</sup> 2′<br>91 <sup>0</sup> 51′   | 40 <sup>0</sup> 4′<br>39 <sup>0</sup> 26′  | 52 <sup>0</sup> 58′<br>52 <sup>0</sup> 25′ |
| 9400<br>9500 | 7031<br>7106 | 39 <sup>0</sup> 54′<br>36 <sup>0</sup> 24′ | 90 <sup>0</sup> 38′<br>89 <sup>0</sup> 26′  | 38 <sup>0</sup> 38′<br>37 <sup>0</sup> 32′ | 52 <sup>0</sup><br>51 <sup>0</sup> 54      |
| 9600<br>9700 | 7180<br>7255 | 32 <sup>0</sup> 30′<br>28 <sup>0</sup> 8′  | 88 <sup>0</sup> 12′<br>86 <sup>0</sup> 58′  | 36 <sup>0</sup> 6′<br>34 <sup>0</sup> 12   | 52 <sup>0</sup> 6′<br>52 <sup>0</sup> 46   |
| 9800         | 7330         | 22 <sup>0</sup> 57′                        | 85 <sup>0</sup> 43′                         | 31 <sup>0</sup> 31′                        | 54 <sup>0</sup> 12′                        |

Nesta tabela, Descartes pôde constatar que o maior ângulo para ONP é 41<sup>0</sup>30′, e o menor para SQR é 51<sup>0</sup>54′, aos quais, adicionando ou subtraindo aproximadamente 17

minutos para o raio do sol, teremos  $41^{\circ}47'$  para o raio maior do arco-íris interno, e  $51^{\circ}37'$  para o raio menor do arco externo.

No que segue Descartes explicará as variações possíveis desses ângulos e outros casos de arco-íris. Por exemplo, se a água está aquecida sua refração é um pouco maior do quando está fria. Isso alteraria os cálculos anteriores. Aumentaria apenas o raio do arco interior em um ou dois graus, no máximo e o raio do arco exterior será aproximadamente duas vezes.

Descartes supõe então que os cálculos realizados e o índice de refração suposto por ele revelam a precisão de suas conclusões. E Descartes aproveita-se da ocasião para, mais uma vez, se vangloriar dos cientistas anteriores.

Vale a pena notar por que por isso podemos demonstrar que a refração da água pode dificilmente ser menos ou mais do que supus. Pois se fosse um pouco maior, deveria fazer o raio do arco-íris interior menor do que  $41^{\circ}$ , enquanto pela crença comum damos a ele  $45^{\circ}$ ; e se o supomos muito pequeno para torná-lo verdadeiramente  $45^{\circ}$ , acharemos que o raio do arco exterior é também dificilmente mais do que  $45^{\circ}$ , enquanto que para o olho parece muito maior do que o interior. E Maurolicus, que é, creio, o primeiro que determinou o de  $45^{\circ}$ , determina o outro ser perto de  $56^{\circ}$ , que mostra como pouca fé podemos ter nas observações que não são acompanhadas por razão verdadeira. (DESCARTES, 2001, p. 342-tradução nossa)

Descartes então prossegue explicando porque o vermelho aparece no lado externo do arco interior e porque está no lado interno do arco exterior.

Para o resto, não tenho tido qualquer dificuldade de entender por que o vermelho está no lado externo do arco interior, nem porque está sobre o lado interno no exterior; pois o mesmo fator que o faz estar perto de  $F^2$  antes do que de H, quando aparece por meio do cristal MNP, também causa, que, se olharmos no cristal quando o olho está na localização da tela branca FGH, vermos o vermelho na direção da sua parte mais espessa MP, e o azul na N, porque o raio de tom vermelho que vai na direção de F vem de C, a parte do sol que está mais próxima a MP. E este mesmo fator também faz acontecer que quando o centro das gotas de água (e como um resultado sua partes mais espessa) estão sobre o externo, com relação aos pontos coloridos formando o arco-íris interno, o vermelho deve aparecer lá fora; e que quando estão do lado interno com relação a esses que formam o arco-íris exterior, o vermelho deve também aparecer do lado interno. (DESCARTES, 2001, p. 342-3-tradução nossa)

Para Descartes pouca coisa permanece sobre o assunto e a fim de liquidar a questão termina o oitavo discurso falando de alguns casos espetaculares de arco-íris. Por exemplo, quando o arco não é exatamente redondo ou quando o seu centro não está em linha reta com o olho e o sol. Isso pode acontecer, diz Descartes, se os ventos mudam a forma das gotas de chuvas.

Há ainda o arco-íris invertido. Segundo Descartes, esse arco é devido a reflexão dos raios do sol sobre a superfície do mar ou de um lago. Os raios diretos são impedidos por uma nuvem e esse é um fenômeno muito raro.

Também Descartes menciona que um terceiro arco pode aparecer, acima dos dois arcos primários e secundários, muito mais fraco do que esses dois e tão distante do segundo quanto este é do primeiro. Segundo Descartes, isso é devido aos grãos ou pedras de gelo, muito redondos e transparentes, misturados na água da chuva em que a refração é notavelmente maior do que da água pura.

Descartes por fim ainda sugere meios de fabricar arco-íris observando a variedade de substâncias que temos que possuem índice de refração diferente e maior do que a água. Desde que a questão foi totalmente explicada por ele, poderemos construir um arco-íris usando uma fonte.

Por exemplo, se a água saindo dos pequenos orifícios ABC saltam suficientemente alto e expande no ar em todas as direções para R, e se o sol está na direção de Z, de modo que, desde que ZEM é uma linha reta, o ângulo MER pode estar perto de  $42^{\circ}$ , o olho E não falhará em ver perto de R um arco-íris exatamente como o que aparece no céu. A isto é agora necessário adicionar que existem óleos, humores, e outros líquidos, em que a refração é notavelmente maior ou menor do que na água comum, e que não são menos claro e transparente por causa daquilo. De modo que deveríamos ser capazes de dispor de muitas fontes a fim de, nas quais, tendo várias destes líquidos ali, deveríamos ver pelo seus meios uma grande parte do céu cheio das cores do arco-íris: isto deveria ser realizado fazendo os líquidos cuja refração era a maior para ser a mais próxima aos expectadores, e não deixando-as subir tão alto que escondam a visão daqueles que deveriam estar atrás deles. Assim, porque fechando uma seção dos orifícios ABC podemos fazer qualquer partes do arco-íris RR que desejamos desaparecer sem remover os outros, é fácil entender que da mesma forma, abrindo e fechando aproximadamente os orifícios destas várias fontes, deveríamos ser capazes de fazer aquilo que parecerá colorido ter a forma de uma cruz, ou uma coluna, ou alguma outra tal coisa que dá a causa para o espanto. Mas admito que a destreza e muito trabalho deveria ser necessário a fim de proporcionar essas fontes, e fazer

os líquidos ali saltarem tão alto que essas figuras poderiam ser vistas de uma distância por uma nação inteira, sem o truque ser descoberto. (DESCARTES, 2001, p. 344-5-tradução nossa)

Isso encerra a discussão do fenômeno do arco-íris e Descartes se dá por satisfeito com a relação as suas explicações. Podemos agora resumir o método de análise e síntese aplicado na explicação do arco-íris.

A etapa analítica começa com o problema,  $P_1$ : estudar o fenômeno do arco-íris, como ele é dado na natureza. Descartes percebe que o fenômeno também ocorre próximo a nós, nas fontes, devido a incidência dos raios solares sobre as gotas, então surge a possibilidade de manipulação do fenômeno e a redução do problema a um outro, mais fácil.  $P_2$ : Redução do fenômeno à uma grande gota de vidro cheia de água. A redução do problema à grande gota de água permite Descartes tirar importantes conclusões que ajudarão a explicar o fenômeno. A manipulação da gota permite definir os ângulos sob os quais as diversas cores do arco-íris aparecem. Assim o problema será reduzido a  $P_3$ : No arco principal, a cor vermelha aparece quando o ângulo é de  $42^\circ$ , as demais cores quando o ângulo é um pouco menor. No arco secundário, a cor vermelha aparece sob um ângulo de aproximadamente  $52^\circ$ , as demais cores sob um ângulo ligeiramente menor. Para valores maiores que  $42^\circ$  e  $52^\circ$  as cores não aparece. Constatados os ângulos que permitem a formação do arco-íris devemos investigar qual a causa das cores. Como Descartes sabe que o mesmo fenômeno ocorre no prisma, então a explicação será reduzida a  $P_4$ : Assim, volta-se para estudar a origem das cores no prisma, ou seja, o que provoca o aparecimento das cores? A explicação do aparecimento das cores no prisma finaliza a etapa analítica. E, então começa a etapa sintética que consiste em, praticamente, percorrer o caminho inverso deixado pela análise.

Convém salientarmos que Descartes não apresenta a etapa sintética e também não escreve sobre nada ela. Mas, vimos, na parte dois de *O Discurso do Método*, quando definiu a sua metodologia, que devemos, depois da análise, construir a explicação do fenômeno, etapa por etapa. Exposto isso, não podemos duvidar então que devemos seguir o caminho deixado pela análise para explicarmos o problema. Devemos também salientar que, depois da parte analítica, a imagem que obtemos é nítida. Parece mesmo indicar que devemos retroceder o caminho inverso para compreendermos todo o fenômeno.

Por fim, Descartes explica todos os casos possíveis do fenômeno do arco-íris que ocorrem na natureza. Deixando claro que a explicação que deu para o caso mais comum serve de fundamento para os outros casos, bastando fazer apenas algumas considerações complementares, ou seja, a questão fica assim completamente exaurida e não há mais nada a fazer

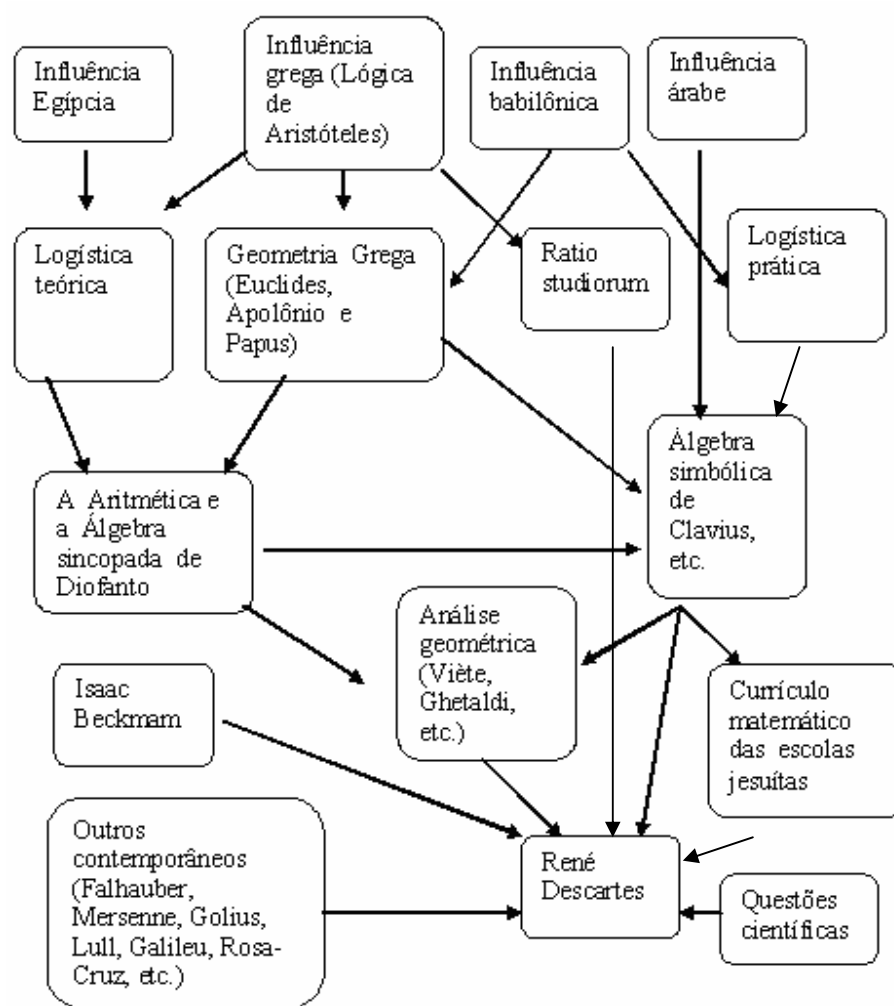
## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A meta desse trabalho era estabelecer a influência da Matemática sobre a Filosofia de Descartes, limitando a discussão, que foi feita em um sentido cronológico, até a principal obra de Descartes *O Discurso do Método* e seus três ensaios.

Para tanto, optamos por fazer uma pesquisa levando em consideração os estudos iniciais de Descartes em La Flèche e depois as influências externas de seus contatos, para mostrar que o ambiente que Descartes prosperou foi de fundamental importância para seu projeto. Foi em La Flèche que Descartes assimilou a cultura Escolástica dominante dentro das escolas jesuítas, a cultura Matemática e a cultura filosófica dos gregos. A partir dos livros de Clavius, de Falhauber, Roth, Viète, entre outros escritores, conheceu a Ciência de sua época e pensou em reformá-la. Como mostramos, a formação científica de Descartes não começou e nem terminou no ambiente escolar, mas foi complementada a partir dos contatos com diversos filósofos de vários lugares. As viagens de Descartes objetivavam o conhecimento, meta principal de seu projeto, que fez um pacto consigo mesmo, o de passar o resto de seus dias pesquisando. Assim, conscientizou-se dos problemas de sua época e buscou, como outros de seu tempo, resolvê-los.

A busca foi intensa e durante aproximadamente nove anos Descartes, que anunciou ter o projeto para reformar a Ciência em 1619, foi aprimorando suas idéias até chegar num estágio que considerou maduro para publicação. Neste ínterim, Descartes se envolveu profundamente com a Matemática e a Física e as idéias principais foram incorporadas em *O Discurso do Método*, mas na obra *Regras para a Direção do Espírito*, elaborada num período anterior, pudemos vislumbrar o projeto cartesiano, ainda numa forma inicial, mas com informações importantes sobre sua pretensa reforma da Ciência. Também nas obras *Solidorum Elementis*, *Cogitationes Privatae* e nas anotações do diário

de Beeckmam pudemos constatar o envolvimento de Descartes com a Matemática, que foi paulatinamente amadurecendo até sua principal obra Matemática, *A Geometria*. O fluxograma abaixo ajuda a sintetizar essas idéias.



Para mostrar a influência da Matemática sobre o projeto cartesiano nos concentramos nas *Regras para a Direção do Espírito* e em *O Discurso do Método*, com os três ensaios. As *Regras* mostram os passos que devem ser dados na busca da verdade nas Ciências e, a Matemática, sem dúvida, é o modelo escolhido por Descartes que deve ser estendido para outras áreas científicas. Isso é evidente quando Descartes descreve, na Regra IV, sua *Mathesis Universalis*, onde mostramos que sua idéia era tomar a

Matemática como a base das Ciências como Astronomia, Música, Óptica, Mecânica, entre outras. O mundo físico poderia ser entendido a partir da Matemática, ou seja, o universo poderia ser descrito por leis matemáticas, a exemplo das leis de Kepler. A idéia central desse projeto consistia em traduzir os problemas dessas Ciências à Matemática, reduzindo-os a problemas envolvendo magnitudes. A Geometria então seria fundamental, pois é a Ciência que lida com extensões e medidas. A representação do mundo físico, em nossas mentes, deveria ser realizada notando que, em nossa imaginação, o objeto mais simples possível de se representar era o segmento de reta, o elemento fundamental, característica comum nos objetos espaciais do mundo físico. Assim, as quantidades discretas tinham uma representação plana em nossas mentes e as grandezas contínuas eram representadas por extensão e área.

A pretensão científica de Descartes aparece nas regras anteriores a quarta, a ciência deve ser única, essas regras ensinam também como obter o conhecimento verdadeiro através da intuição e da dedução, isto é, a Ciência cartesiana deve partir de idéias claras e distintas, os primeiros princípios devem ser estabelecidos pela intuição e, a partir delas, segundo Descartes, podemos deduzir outras verdades usando a indução, mas antes, devemos usar o processo da descoberta, a análise. Assim, temos outro ingrediente da Ciência cartesiana abordado nas quatro regras seguintes, usado pelos geômetras antigos, o método de análise e síntese. O exemplo da linha anaclástica mostra com clareza como Descartes aplicava sua metodologia, inspirada no método de análise e síntese e confirma a influência desse método sobre sua Filosofia Natural nas *Regras para Direção do Espírito*. As primeiras doze regras terminam com explicações adicionais para treinar nossas mentes para aplicar bem as anteriores.

As próximas regras visam especificamente as ciências matemáticas. Assim, nas Regras XIII-XV, Descartes ensina como dar um tratamento adequado para um problema eliminando os elementos supérfluos para encontrar e enumerar as partes constituintes mais simples e depois reduzi-lo a um problema sobre magnitudes geométricas, usando, se necessário, figuras para representá-lo em nossas mentes. Da Regra XVI até a XXI, Descartes descreve técnicas para se traduzir um problema a uma equação. Na Regra XVI, propõe que usemos símbolos breves para indicar os elementos de um problema o que facilita sua representação em nossas mentes. A Regra XVII pede para considerarmos os

termos desconhecidos e os termos conhecidos como dados e estabelecer uma relação entre eles. A Regra XVIII diz que devemos usar as operações elementares e estabelecer equações envolvendo os termos de um problema. A Regra XIX diz que devemos buscar tantas equações quanto for o número de variáveis. A Regra XX diz que devemos usar a divisão sempre que possível no lugar da multiplicação. Regra XXI diz que devemos reduzir as equações a mais simples possível e de grau mais baixo.

Bos (2001) e Gaukroger (2002) afirmam que Descartes abandonou as últimas doze Regras porque elas estavam destinadas ao estudo das operações que deveriam ser realizadas no nível geométrico, enquanto as doze anteriores no plano aritmético. No plano geométrico, por exemplo, algumas raízes poderiam ser construídas usando segmentos de retas e círculos, mas outras não. O projeto de construir as raízes de uma equação geometricamente foi retomado por Descartes no Livro III de *A Geometria*.

Em *O Discurso de Método* e seus três ensaios pudemos visualizar o projeto cartesiano com mais clareza. Na parte dois, Descartes estabelece os quatro preceitos fundamentais de seu método claramente inspirado pelo método de análise e síntese dos antigos. Nesta obra também apresenta a concepção de Ciência única e os dois fundamentos a partir dos quais podemos obter conhecimento científico, a intuição e a dedução, onde a intuição ajuda a estabelecer os primeiros princípios e a dedução para obter novos princípios, como no caso das Regras é necessário realizar a análise primeiro.

Nos três ensaios pudemos constatar de que forma a Matemática influenciou seu pensamento. Em *A Geometria* encontramos uma riqueza de exemplos da aplicação do método de análise e síntese e também as mudanças conceituais importantes introduzidas por Descartes que são significantes avanços na área da análise algébrica e mostra o quanto Descartes estava envolvido com a Matemática.

Descartes ampliou consideravelmente as realizações de seus predecessores, transpondo muitos obstáculos que os impediram de avançarem nas Ciências. A Geometria Analítica, concebida como eixos de referência e coordenadas, de fato, começa a partir das realizações de Descartes, pois além de tratar as curvas usando duas variáveis, adequando-se ao uso de sistemas de coordenadas, tentou estabelecer as bases conceituais dessa nova Ciência. Do que argumentamos, acredito que podemos consagrar Descartes como uma espécie de libertador da Geometria, pois, a partir dele, essa Ciência se desenvolveu, mas

não podemos atribuir a Descartes o título de O Pai da Geometria Analítica, pelo que foi apresentado, podemos dizer que a criação dessa Ciência é um exemplo de colaboração entre as várias gerações. Os progressos dados, em certos períodos de tempo, são fontes de inspiração para gerações posteriores. Na criação da análise algébrica podemos notar isso nitidamente, as idéias foram desenvolvidas a passos lentos, percorrendo um longo caminho, a partir dos gregos, passando pelo mundo árabe, retornando à Europa Ocidental e culminando nos trabalhos de Viète e de Descartes, entre outros.

Meneghetti resume bem as realizações cartesianas na Matemática, acordando com nossas observações.

Descartes, em particular, apresentou uma inovação no pensar matemático: proporcionou um poder de generalização e, conseqüentemente, de ampliação, à ciência Matemática. Um avanço muito grande em relação aos seus predecessores, no que diz respeito à álgebra simbólica e às interpretações geométricas da álgebra. A álgebra formal, que vinha progredindo desde a renascença, tem seu ponto culminante em sua obra "*La Géométrie*". Com tal obra, Descartes proporcionou uma simplificação e racionalização nas notações e nos símbolos. Também rompeu com a tradição grega em diversos pontos. Em tal tradição, a aplicação do cálculo à geometria já era utilizada no estudo das propriedades das figuras geométricas e soluções dos problemas derivados dessas, porém isto era feito somente para determinar magnitudes, áreas e volumes e estabelecer proporções entre eles. (MENEGETTI, p. 34, 2001)

De todo modo, a Geometria Analítica, como a concebemos hoje, teve de esperar um pouco mais e foge aos objetivos de nosso trabalho descrever a sua formalização completa depois de Descartes.

Em *A Dióptrica*, não encontramos exemplos da aplicação de seu método diretamente, mas encontramos vestígios dele, a exemplo do primeiro discurso Da Luz. De todo modo, notamos claramente que Descartes usa a Matemática como um elemento modelador. Ao estudar as propriedades refletoras das cônicas percebeu que poderia usá-las na construção das lentes dos telescópios. Mas devemos lembrar, mais uma vez, que num período anterior a publicação desse ensaio, Descartes estudou a Óptica profundamente, conseguindo determinar a linha anaclástica pelo método de análise e síntese que nas *Regras para a Direção do Espírito* é apresentada como um claro exemplo do método. Desse modo, a descoberta da forma ideal de polir uma curva por seu método deu-lhe os subsídios para construir as lentes usando as seções cônicas como modelo, pois como se

sabia, essas curvas tinham as propriedades ideais requeridas por Descartes à construção das lentes telescópicas. Concluimos que foi o método analítico que permitiu a Descartes compreender bem as questões relacionadas a Óptica.

Em *Os Metereos* Descartes, ao estudar o emblemático problema do arco-íris, aplica seu método novamente, inclusive, trazendo inovações importantes. Mas como no caso de *A Dióptrica*, não há outros exemplos contudentes de sua metodologia, mas, como no caso de *A Dióptrica*, Descartes tinha pensado nas questões anteriormente.

Acreditamos, a partir do exposto, não restar dúvidas de que a Matemática realmente inspirou Descartes e de que forma se deu essa influência. Em resumo, podemos dizer que foi a maneira de demonstrar dos geômetras, através do processo dedutivo, o método de análise e síntese dos geômetras gregos e a Matemática como elemento modelador, como fez em *A Dióptrica*.

Depois de *O Discurso do Método*, Descartes perdeu o interesse pela Matemática e dedicou-se a questões mais gerais, a saber, a Metafísica que foi uma questão tratada superficialmente até *O Discurso*, transpondo seu método para além dos limites da Matemática, mostrando o quanto seu projeto era mais amplo do que o de seus contemporâneos.

## BIBLIOGRAFIA

- ACZEL, A. D. **O caderno secreto de Descartes**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2007.
- ARISTÓTELES. Poética; Órganon; Política; Constituição de Atenas. **In: Os pensadores**. São Paulo, Editora Nova Cultura, 2004.
- BALIEIRO, I. F. F. **Arquimedes, Papus, Descartes e Polya-Quatro episódios da história da heurística**. Rio Claro, UNESP, 2004. Tese de Doutorado.
- BARKER, S. F. **Filosofia da Matemática**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar editor, 1976.
- BATTISTI, C. A. **O método de análise em Descartes. Da resolução de problemas à constituição do sistema do Conhecimento**. São Paulo: USP, 2000. Tese de doutorado.
- BERGGREN, J.L.; BRUMMELEN, G.V. The role and development of geometric analysis and synthesis in Ancient Greece and Medieval Islam. **In: Ancient and Medieval traditions in the exact science: essays in memory of Wilbur Knorr**: Edited by Patrick Suppes, Julius M. Moravcsik and Herry Mendel. Stanford California: CSLI Publications, 2000.
- BICUDO, I. Platão e a Matemática. **In: Revista Letras Clássicas 2**: 301-315. São Paulo. 1998.
- \_\_\_\_\_. Peri apodeixeos/de demnstratione. **In: Educação matemática pesquisa em movimento**. Maria Aparecida Viggiane Bicudo, Marcelo de Carvalho Borba (orgs.). São Paulo: Cortez, 2004.
- BOS, H. J. M. **Redefining geometrical exactness: Descartes' transformation of the early modern concept of construction**. New York. Spring. 2001.
- BOYER, C. B.. **História da Matemática**. São Paulo: Ed. Edgard Blücher LTDA, 1996.
- CERQUEIRA, L. A. (org.). **Aristotelismo e Antiaristotelismo - Ensino de Filosofia**. Rio de Janeiro: Editora Ágora da Ilha, 2000.
- CHAUI, M. **Convite a Filosofia**. São Paulo: Editora Afiliada, 2004.
- COTTINGHAN, J. A **Filosofia de Descartes**. Lisboa : Ed. 70, 1989.
- DESCARTES, R. A **Geometria**. Lisboa: Editorial Prometeu, 2003.
- \_\_\_\_\_. **Discurso do Método**. Editora Universidade de Brasília. São Paulo. Ática. 1989.
- \_\_\_\_\_. **Discourse on Method, Optics, Geometry, and Metereology**. Indianapoles: Hackett Publishing Company Inc. 2001. Trad. Para o inglês de Paul J. Olscamp.

\_\_\_\_\_. **Discurso do Método, Regras para a Direção do Espírito.** São Paulo: Ed. Martin Claret, 2002.

\_\_\_\_\_. **Discurso do Método; Meditações; Objeções e Respostas; As Paixões da Alma.** In: Os pensadores. São Paulo: Editora nova cultura, 2004.

FEDERICO, P. J. **Descartes on polyhedra: a study of the solidorum elementis.** New York, Spring – Verlag, 1982.

FELLER, W. **Descartes e as Humanidades.** Campinas: Unicamp. 1989, tese de doutorado.

FORBES, E. G. Descartes and the birth of analytic geometry. In: **História Mathematica.** 1977, n.4, pp 141-151.

FRANCA, L. **O Método Pedagógico dos Jesuítas.** Rio de Janeiro: Editora Agir, 1952.

HEATH, T. L., **A History of Greek Mathematics.** New York. Dover Publications. 1981.

GAUKROGER, S. **Descartes uma Biografia Intelectual.** Rio de Janeiro: Eduerj, 2002.

GULLEY, N. A análise geométrica grega. In: **Cadernos de História e Filosofia da Ciência.** Campinas; CLE, 1983, n. 4, pp. 16-27.

HINTIKKA. A análise geométrica antiga e a lógica moderna. In: **Cadernos de história e Filosofia da Ciência.** Campinas: CLE, 1983, n. 4, pp. 28-47.

JUNIOR, C. P. **O que é Filosofia.** São Paulo, Editora brasiliense, 2003.

KLEIN, J. **Greek Mathematical Thought and the Origin of Álgebra.** Annapolis, Maryland: The M. I. T. Press. 1972.

KNORR, W. R. **The Ancient Tradition of Geometric Problems.** Boston: Birkhäuser Boston, 1986.

KOBAYASHI, M. **A Filosofia Natural de Descartes.** Lisboa: Instituto Piaget, 1993.

LAKATOS, I. **A Lógica do Descobrimento Matemático: Provas e Refutações.** Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

LEE, H. D. P. Geometrical Method and Aristotle's account of first principle. In: **The Classical Quarterly.** Vol. 29, N. 2. 1935. pp. 113-124.

LOPARIC, Z. **Descartes Heurístico.** Campinas: IFCH/UNICAMP, 1997. Republicação dos artigos sobre Descartes.

\_\_\_\_\_. Paradigmas Cartesianos. **In: Cadernos de História e Filosofia da Ciência.** Campinas: CLE, 1988, série 2, v. 1, n.2, pp. 67-83.

\_\_\_\_\_. Sobre o método de Descartes. **In: Cadernos de História e Filosofia da Ciência.** Campinas: CLE, out., 1991, v. XIV, n.2, pp.93-112.

MANCOSU, P. **Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century.** New York: Oxford University Press, 1996.

MENEGHETTI, R. C. G. **O Intuitivo e o Lógico no Conhecimento Matemático: uma análise à luz da história e da filosofia da matemática.** Rio Claro, UNESP, 2001. Tese de Doutorado.

NASCIMENTO, C. A. **O que é Filosofia Medieval.** São Paulo: Editora brasiliense, 2004.

PEREIRA, O. P. **Ciência e Dialética em Aristóteles.** São Paulo: Editora da Unesp, 2001.

PÓLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas.** Rio de Janeiro: InterCiência, 1978.

ROBINSON, R. A análise na Geometria grega. **In: Cadernos de história da Filosofia da Ciência.** Campinas: CLE, 1983, n.4, pp. 5-15.

RUSSELL, B. **A Filosofia de Leibniz.** São Paulo, Editora Nacional, 1968.

SASAKI, C. **Descartes's Mathematical Thought.** Boston, Kluwer academic publishers, 2003.

SCHOLZ, H. A axiomática dos antigos. **In: Cadernos de história e Filosofia da Ciência.** 1980, pp 5-20.

SOUZA, R. L. O método de análise da Geometria grega: a questão do justificacionismo na interpretação dos historiadores da Matemática. **In: Cadernos de história e Filosofia da Ciência.** Campinas: UNICAMP/CLE, 1990, série 2, v. 2, n.1, pp 67-83.

\_\_\_\_\_. **Sobre o problema da interpretação do método de análise - da concepção tradicional à visão de Hintikka e Remes.** Campinas. UNICAMP, 1985. Dissertação de Mestrado.

SPINOSA, B. **Ética Demonstrada à Maneira dos Geômetras.** In: Coleção obra prima de cada autor. São Paulo, Editora Martin Claret, 2003.

VAZ, D. A. F. A Geometria de Descartes. **In: Bolema - Boletim de Educação Matemática.** Rio Claro, 2005, n. 23, pp 113-122.