

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORADO

IFT-D.010/02

**Gravitação Quadrática em $(2 + 1)D$ com
e sem Termo Topológico de Chern-Simons**

Abel Dionizio Azeredo

Orientador:

Prof. Dr. Antônio José Accioly

Novembro de 2002

Resumo

A gravitação quadrática em $(2 + 1)D$, ao contrário da gravitação tridimensional de Einstein, é localmente não trivial e possui um potencial extremamente bem comportado. Analisa-se esta teoria neste trabalho. Obtém-se a solução geral das equações de campo linearizadas numa versão tridimensional do gauge de Teysandier, e a partir desta encontra-se a solução geral no caso de uma fonte pontual estática. Esta métrica se assemelha bastante à métrica quadridimensional relativa a uma corda cósmica reta com simetria de gauge do tipo $U(1)$. Existe uma força gravitacional atuando sobre uma partícula teste movendo-se em baixa velocidade, o que não acontece no contexto da relatividade geral em $(2 + 1)D$, e raios luminosos sofrem deflexão gravitacional. Considera-se também as mudanças que ocorrem quando um termo topológico de Chern-Simons é adicionado à gravitação quadrática em $(2 + 1)D$. Acha-se que o inofensivo modo escalar massivo da última, dá origem a um problemático ghost massivo de spin 0, enquanto que o ghost massivo de spin 2 é substituído por duas partículas físicas massivas, ambas de spin 2.

Palavras-Chave: gravitação quadrática tridimensional, termo topológico de Chern-Simons, antigravidade, blindagem gravitacional.

Área do Conhecimento: 1.05.03.01-3

Abstract

Quadratic gravity in $(2 + 1)D$, unlike three-dimensional Einstein's gravity, is locally nontrivial and has an extremely well-behaved potential. Here we consider this theory. The general solution of the linearized field equations in a three-dimensional version of the Teyssandier gauge is obtained, and from that the solution for a static pointlike source is found. This metric greatly resembles the four-dimensional metric of a straight $U(1)$ -gauge cosmic string in the framework of linearized quadratic gravity. It is found that a gravitational force is exerted on a slowly moving test particle, a feature not present in general relativity in $(2 + 1)D$. The deflection of light rays is analyzed as well. We also consider the changes that occur when a topological Chern-Simons term is added to quadratic gravity in $(2 + 1)D$. It is found that the harmless massive scalar mode of the latter gives rise to a troublesome massive spin-0 ghost, while the massive spin-2 ghost is replaced by two massive particles both of spin-2.

Key Words: three-dimensional quadratic gravity, topological Chern-Simons term, antigravity, gravitational shielding.

Para
minha esposa Eliane,
pelo seu companheirismo,
amor e dedicação.

Agradecimentos

- (i) Ao meu orientador, Prof. Dr. Antonio Accioly, pela assistência e incentivo na elaboração deste trabalho e por auxiliar-me no começo de minha vida científica.
- (ii) Ao IFT-UNESP pelos recursos técnicos e à FAPESP pelo apoio financeiro.
- (iii) Aos colegas e amigos do IFT, pela convivência e pelos momentos de descontração.

Índice

Introdução	8
1 Propagador, Unitariedade em Nível de Árvore e Potencial Efetivo Não Relativístico	11
1.1 A Lagrangiana apropriada para o cômputo do propagador concernente à teoria de gravitação quadrática em D dimensões	14
1.2 O propagador para as teorias de gravitação de ordem mais alta em D dimensões .	16
A. A prescrição	16
B. O Propagador para a gravitação quadrática em D dimensões em um gauge não convencional	20
1.3 Um estudo sistemático da unitariedade em nível de árvore	23
1.4 Potencial efetivo não relativístico	26
1.5 Comentários	28
2 Gravitação Quadrática em $(2 + 1)D$	30
2.1 Aproximação linear	31
2.2 Causalidade e potencial efetivo não relativístico	32
2.3 Solução geral da equação de campo linearizada no gauge de Teyssandier	34
2.4 A métrica para uma fonte pontual, isolada e estática	36
2.5 Efeitos gravitacionais em $(2 + 1)D$	39
A. Aceleração gravitacional	39

B. Desvio da luz	40
2.6 Comentários	42
3 Gravitação Quadrática em $(2 + 1)D$ com Termo Topológico de Chern-Simons	43
3.1 O propagador de Feynman	44
3.2 Causalidade e potencial efetivo não relativístico	47
3.3 Unitariedade em nível de árvore	49
3.4 Comentários	51
Epílogo	52
A Equações de Campo para a Gravitação Quadrática	55
B Uma Importante Identidade Tensorial	59
Referências	61

Introdução

Apesar das equações de Einstein para a gravitação terem sido formuladas para serem aplicadas no espaço-tempo quadridimensional, elas podem também ser utilizadas igualmente bem no espaço-tempo tridimensional. No entanto, a natureza da gravitação neste caso é bastante diferente daquela do espaço-tempo quadridimensional[1]. De fato, a relatividade geral é dinamicamente trivial em três dimensões espaço-temporais: fora das fontes o espaço-tempo é plano[2]; todos os efeitos das fontes localizadas manifestam-se na geometria global, a qual é fixada pelas singularidades das linhas de universo das partículas[3]. Conseqüentemente não existem grávitons, e as forças não são mediadas pelas trocas gravitônicas; na verdade elas são de natureza geométrica/topológica, e tem sua origem em propriedades globais do espaço-tempo, que não é Minkowskiano em sua totalidade, mesmo quando ele é localmente plano[4, 5]. Uma outra peculiaridade da gravitação em $(2 + 1)D$ é não possuir um limite Newtoniano: seu potencial não relativístico é nulo, implicando em uma quebra na correspondência que se esperava haver entre ela e a teoria de Newton[1]. As investigações exaustivas das propriedades gravitacionais destas teorias realizadas nas duas últimas décadas[1–11] atestam, com certeza, o grande interesse dos físicos em melhorarem sua compreensão da relatividade geral quadridimensional via o estudo de teorias gravitacionais em dimensões mais baixas, as quais, pelo menos em princípio, espera-se serem renormalizáveis. Tal rota não é nova na física, e tem levado a bons resultados no âmbito da teoria quântica de campos. Acredita-se, com razão, que o grande entusiasmo despertado pela teoria gravitacional em $(2 + 1)D$ se deva em grande parte ao fato

dela ser localmente trivial e globalmente não trivial.

As considerações anteriores nos levam a uma indagação importante: Como construir uma teoria de gravitação em $(2 + 1)D$ que não seja dinamicamente trivial, possua potencial não relativístico bem comportado e tenha alguma chance de ser renormalizável? Uma maneira possível, pelo menos em princípio, seria incluir os termos com derivadas quárticas $\int R_{\mu\nu}^2 \sqrt{g} d^3x$ e $\int R^2 \sqrt{g} d^3x$ na ação tridimensional de Einstein. Assim procedendo chegaríamos a uma classe de modelos gravitacionais efetivos com massas múltiplas, os quais apresentam as excitações usuais não massivas de spin 2 do campo gravitacional tridimensional que, tal como estas, não se propagam, e excitações massivas tanto de spin 2 como de spin 0. Tal procedimento, porém, deve ser feito com muita cautela, uma vez que a presença de derivadas de ordem superior viola, em geral, a unitariedade.

O nosso primeiro objetivo neste trabalho é investigar esta classe de teorias de gravitação quadráticas tridimensionais[12, 13].

Sabe-se, por outro lado, que a topologia dos espaços tridimensionais permite a construção de teorias de gauge com propriedades novas e atraentes. Modelos vetoriais e tensoriais não abelianos acrescidos de uma estrutura topológica – a característica secundária de Chern-Simons[14] –, são exemplos comuns de tais teorias[15, 16]. Seria pois interessante analisar como as propriedades da gravitação quadrática em $(2 + 1)D$ seriam modificadas se acrescentássemos um termo topológico de Chern-Simons à Lagrangiana da teoria quadrática tridimensional. Nosso segundo objetivo neste trabalho é discutir tais modificações[17, 18].

Consideraremos inicialmente a teoria de gravitação quadrática em D dimensões[19, 20]. Este estudo tem duplo objetivo: (i) fornecer subsídios matemáticos gerais, tais como algoritmos para o cálculo do propagador e do potencial efetivo não relativístico, que se apliquem às teorias gravitacionais quadráticas em qualquer dimensão e (ii) responder certas indagações fundamentais sobre estas teorias, do tipo:

- Qual é a menor dimensão em que estas teorias têm sentido?

- Estas teorias são unitárias em nível de árvore?
- É a excitação sem massa um grau dinâmico de liberdade em qualquer dimensão?
- A teoria de gravitação quadrática em D dimensões concorda com a teoria de Newton no caso limite de movimento em baixa velocidade num campo gravitacional fraco?

Esta teoria em D dimensões será tratada no Capítulo 1.

No Capítulo 2 iremos construir as teorias gravitacionais quadráticas tridimensionais e estudar suas propriedades[12, 13]. Para tanto utilizaremos o arsenal matemático desenvolvido no Capítulo 1.

No capítulo 3 investigaremos as modificações sofridas pela gravitação quadrática tridimensional quando acrescentamos à mesma um termo topológico de Chern-Simons[17, 18].

Finalmente apresentaremos no Epílogo um sumário dos principais resultados obtidos, assim como uma discussão sobre possíveis extensões das idéias desenvolvidas no trabalho.

Mostraremos nos Apêndices[21] como obter as equações de campo para a gravitação quadrática.

Em nossa notação a assinatura da métrica é $(+ - \dots -)$. O tensor de curvatura é definido por $R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = -\partial_\delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \partial_\gamma\Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \Gamma^\rho_{\beta\gamma}\Gamma^\alpha_{\rho\delta} + \Gamma^\rho_{\beta\delta}\Gamma^\alpha_{\rho\gamma}$, o tensor de Ricci por $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\nu\alpha}$ e o escalar de curvatura por $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico. Utilizamos ao longo de todo o trabalho o sistema natural de unidades ($c = \hbar = 1$) e os termos gravitação quadrática e gravitação de ordem superior como sinônimos.

Capítulo 1

Propagador, Unitariedade em Nível de Árvore e Potencial Efetivo Não Relativístico para Teorias Gravitacionais de Ordem Superior em D Dimensões

Indubitavelmente, a teoria de campo de Einstein explica de maneira razoavelmente satisfatória os fenômenos gravitacionais conhecidos. No entanto, como uma teoria quântica ela é menos satisfatória: sua matriz S , que é finita em um loop[22], diverge em ordem de dois loops[23]. Isto não é de causar espécie, uma vez que uma das mais difíceis teorias de campo no que tange à quantização é certamente a teoria da própria estrutura do espaço-tempo. Na realidade não se sabe qual é a teoria correta para a gravitação quântica.

Como é bem conhecido, o espaço-tempo quadridimensional é o lugar mais problemático para uma teoria quântica de campos habitar. As teorias quânticas de campo se notabilizaram por serem mal definidas em quatro dimensões espaço-temporais, podendo porém em geral serem manuseadas em espaço-tempos com dimensionalidade mais elevada. A regularização dimensional é um exemplo comum de tal procedimento: resultados que são divergentes em quatro dimensões convergem para $D > 4$. As divergências da teoria quadridimensional são removidas quando se considera nosso espaço-tempo como o limite $D \rightarrow 4$ de espaço-tempos de dimensão mais alta[24]. No outro lado do espectro dimensional, existem teorias de campo em espaço-tempos com $2 \leq D < 4$. Em alguns casos, tais modelos são exatamente solúveis e fornecem

uma valiosa contribuição para a compreensão do mecanismo da teoria quântica de campos.

Vamos analisar neste Capítulo, em nível de árvore, as teorias gravitacionais com derivadas de ordem mais alta em D dimensões. Estas teorias compartilham alguns pontos básicos com a relatividade geral:

- (i) covariança geral;
- (ii) a ação é extremizada com relação a variações da métrica.

Entretanto, elas diferem da relatividade geral nos seguintes aspectos:

- (i) as equações de campo para a métrica são de quarta ordem;
- (ii) o espaço-tempo pode ter um número qualquer de dimensões, o que é uma condição absolutamente necessária no contexto da teoria de cordas.

A gravitação quadrática em quatro dimensões é um exemplo típico destas teorias[25-27]. Neste ponto é razoável que indaguemos: O que queremos especificamente saber a respeito dessas teorias quadráticas em D dimensões? Antes de respondermos a esta questão, façamos, de passagem, alguns comentários acerca de alguns resultados obtidos recentemente concernentes à gravitação quadrática em quatro dimensões. Mostrou-se, em uma série de artigos, que a propagação do fóton nas proximidades de um corpo massivo, ao contrário do que acontece na teoria de Einstein, é dispersiva[21, 28, 29]. Para ser mais específico, a gravitação quadrática produz espalhamento fotônico dependente da energia. Uma consequência interessante deste fato é que arco-íris gravitacionais e gravitação quadrática podem coexistir sem nenhum conflito[29]. Neste sentido, a gravitação quadrática está mais próxima da eletrodinâmica quântica que qualquer teoria gravitacional atualmente conhecida. De fato, a propagação dispersiva de fótons é um fenômeno trivial no contexto da QED. Baseado no fato de que o efeito arco-íris presente na gravitação quadrática é indetectável hoje em dia, é possível encontrar um novo vínculo para o valor da contribuição da parte quadrática. Este é um resultado muito importante dada a

escassez de vínculos observacionais para as teorias gravitacionais. Além disso, encontra-se que a deflexão gravitacional predita pela gravitação quadrática é sempre menor que a predita pela teoria de Einstein[21, 28, 29]. É importante mencionar que o setor R^2 da teoria de gravitação com derivadas de ordem superior não contribui para a deflexão gravitacional[30, 31]. Os resultados que acabamos de expor mostram claramente que a presença dos termos quadráticos R^2 e $R_{\mu\nu}^2$ é responsável pelo surgimento de novos e interessantes efeitos gravitacionais. Após esta digressão, retornemos à questão proposta anteriormente. Nossa motivação para o estudo das teorias de gravitação de ordem superior em D dimensões é tentar responder, entre outras coisas, as questões apresentadas na Introdução, que por razões didáticas transcrevemos novamente aqui:

- Qual é a menor dimensão em que estas teorias têm sentido?
- Estas teorias são unitárias em nível de árvore?
- É a excitação sem massa um grau dinâmico de liberdade em qualquer dimensão?
- A teoria quadrática em D dimensões concorda com a teoria de Newton no caso limite de movimento em baixa velocidade num campo gravitacional fraco?

Na Seção 1.1 vamos determinar a Lagrangiana apropriada para o cálculo do propagador concernente à teoria de gravitação quadrática em D dimensões. Na Seção 1.2 apresentaremos um algoritmo para o cálculo do propagador de Feynman para as teorias de gravitação de ordem mais alta em D dimensões baseado nos operadores de projeção de spin de Barnes-Rivers[32-36]. Usando esta prescrição obteremos o propagador de Feynman para as teorias de gravitação de ordem superior em D dimensões em um gauge não convencional. A partir deste resultado podemos obter o propagador, de maneira trivial, em uma série de gauges que reduzem-se quando $D = 4$ à resultados bem conhecidos e que são amplamente utilizados na literatura[37]. Na Seção 1.3 apresentaremos um estudo sistemático da unitariedade em nível de árvore das teorias de gravitação de ordem superior em D dimensões. Isto é, mostraremos

que para $D > 2$ a gravitação quadrática é não unitária em nível de árvore, ao passo que a teoria $R + R^2$ em D dimensões é unitária em nível de árvore para qualquer $D > 2$. Na Seção 1.4 obteremos o potencial efetivo não relativístico para a teoria de gravitação quadrática em D dimensões e mostraremos que o problema de se obter o limite Newtoniano para as teorias de gravitação em D dimensões se reduz a quadraturas.

1.1 A Lagrangiana apropriada para o cômputo do propagador concernente à teoria de gravitação quadrática em D dimensões [19]

A ação da gravitação quadrática em $D > 1$ dimensões é dada por

$$S = \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} \left[\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 + \frac{\gamma}{2} R_{\mu\nu\rho\sigma}^2 + \frac{\delta}{2} \square R \right] , \quad (1.1)$$

onde α, β, γ e δ são parâmetros com dimensão L^{4-D} e κ^2 é uma constante com dimensão L^{D-2} que em quatro dimensões é igual a $32\pi G$, sendo G a constante de Newton. O termo $\square R$ desta ação é manifestamente uma divergência total e pode ser ignorado. Para $D = 1$ o espaço é plano e os tensores $R_{\mu\nu\rho\sigma}, R_{\mu\nu}$ e R são identicamente nulos. Obviamente, não pode haver dinâmica em um espaço que não possua tanto uma dimensão do tipo tempo quanto uma dimensão do tipo espaço. A menor dimensão em que a teoria quadrática tem sentido é portanto $D = 2$.

Proposição 1: *Podemos omitir o termo proporcional a $R_{\mu\nu\rho\sigma}^2$ da Lagrangiana linearizada da gravitação com derivadas de ordem superior em qualquer dimensão maior ou igual a dois.*

Demonstração: Seja $\mathcal{L}^1(\mathcal{L}^2)$ a Lagrangiana correspondente à teoria de gravitação sem (com) o termo $R_{\mu\nu\rho\sigma}^2$, ou seja,

$$\mathcal{L}^1 \equiv \sqrt{(-1)^{D-1} g} \left[\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 \right] , \quad (1.2)$$

$$\mathcal{L}^2 \equiv \sqrt{(-1)^{D-1} g} \left[\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 + \frac{\gamma}{2} R_{\mu\nu\rho\sigma}^2 \right] . \quad (1.3)$$

Decompondo a métrica $g_{\mu\nu}$ como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} \quad , \quad (1.4)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e inserindo (1.4) em (1.2) e (1.3) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{lin}}^1 &= \frac{b}{4} \left[\square h_{\mu\nu} \square h^{\mu\nu} - \left(A^\mu{}_{,\mu} \right)^2 - F_{\mu\nu}^2 + (1 + 4c) (A_\alpha{}^{,\alpha} - \square\phi)^2 \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[h_{\mu\nu} \square h^{\mu\nu} + A_\nu^2 + (A_\nu - \phi_{,\nu})^2 \right] \quad , \\ \mathcal{L}_{\text{lin}}^2 &= \left(\frac{b}{4} + d \right) \left[\square h_{\mu\nu} \square h^{\mu\nu} - \left(A^\mu{}_{,\mu} \right)^2 - F_{\mu\nu}^2 \right] + \frac{b}{4} (1 + 4c) (A_\alpha{}^{,\alpha} - \square\phi)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[h_{\mu\nu} \square h^{\mu\nu} + A_\nu^2 + (A_\nu - \phi_{,\nu})^2 \right] \quad , \end{aligned} \quad (1.5)$$

onde $A^\mu \equiv h^{\mu\nu}{}_{,\nu}$, $\phi \equiv h$, $F_{\mu\nu} \equiv A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$, $b \equiv \frac{\beta\kappa^2}{2}$, $c \equiv \frac{\alpha}{\beta}$ e $d \equiv \frac{\gamma\kappa^2}{2}$. Os índices são abaixados (levantados) usando-se $\eta_{\mu\nu}$ ($\eta^{\mu\nu}$). \square

É importante mencionar que poderíamos ter chegado à conclusão que o termo $R_{\mu\nu\rho\sigma}^2$ não necessita ser considerado no cálculo do propagador simplesmente notando que o invariante linearizado de Gauss-Bonnet é uma derivada total em qualquer dimensão espaço-temporal, a restrição para $D = 4$ só acontece quando levamos em conta a estrutura não linear completa da teoria.

Chegamos assim à conclusão que a Lagrangiana apropriada para o cálculo do propagador concernente à gravitação quadrática em $D > 2$ é

$$\bar{\mathcal{L}} = \sqrt{(-1)^{D-1}g} \left[\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 \right] \quad . \quad (1.6)$$

Proposição 2: *Em duas dimensões*

$$\frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 + \frac{\gamma}{2} R_{\mu\nu\rho\sigma}^2 = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{4} + \frac{\gamma}{2} \right) R^2 \quad .$$

Demonstração: Em duas dimensões os tensores de Riemann e de Ricci podem ser expressos em termos do escalar de curvatura. De fato[38],

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} R (g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}) \quad ,$$

e

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad .$$

Portanto,

$$\frac{\alpha}{2}R^2 + \frac{\beta}{2}R_{\mu\nu}^2 + \frac{\gamma}{2}R_{\mu\nu\rho\sigma}^2 = \frac{\alpha}{2}R^2 + \frac{\beta}{2}\frac{R^2}{2} + \frac{\gamma}{2}R^2 = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{4} + \frac{\gamma}{2}\right)R^2 \quad .$$

□

Obviamente, para $D = 2$ a Lagrangiana apropriada para o cálculo do propagador concernente à teoria de gravitação quadrática é

$$\bar{\mathcal{L}} = \sqrt{-g} \left[\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2}R^2 \right] \quad .$$

Entretanto não vamos discutir esta teoria aqui. Vamos supor daqui em diante que $D > 2$.

1.2 O propagador para as teorias de gravitação de ordem mais alta em D dimensões[19]

Iniciamos apresentando uma prescrição para o cálculo do propagador das teorias de gravitação com derivadas de ordem superior em $D > 2$. O algoritmo é usado em seguida para obter o propagador da gravitação quadrática em D dimensões em um gauge não convencional. A partir deste resultado obtemos o propagador em uma série de outros gauges que quando $D = 4$ reduzem-se a resultados bastante usados na literatura[37].

A. A prescrição

Seja $\bar{\mathcal{L}}$ a Lagrangiana concernente à qualquer teoria métrica de gravitação com derivadas de ordem superior. Para calcular o propagador do gráviton precisamos da parte bilinear desta Lagrangiana. Esta é obtida decompondo a métrica $g_{\mu\nu}$, como em (1.4), e inserindo -a em $\bar{\mathcal{L}}$. Seja \mathcal{L}_g a Lagrangiana resultante. No caso específico de teorias invariantes de gauge, adicionamos a \mathcal{L}_g um termo de fixação de gauge \mathcal{L}_{fg} . Conseqüentemente, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_{fg}$ pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \mathcal{O}_{\mu\nu,\rho\sigma} h^{\rho\sigma} . \quad (1.7)$$

Na realização destes cálculos é extremamente conveniente trabalhar em termos dos operadores de Barnes-Rivers[32-36] no espaço dos tensores simétricos de segunda ordem. O conjunto completo destes operadores em D dimensões é dado por

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu,\rho\sigma}^1 &= \frac{1}{2} (\theta_{\mu\rho}\omega_{\nu\sigma} + \theta_{\mu\sigma}\omega_{\nu\rho} + \theta_{\nu\rho}\omega_{\mu\sigma} + \theta_{\nu\sigma}\omega_{\mu\rho}) , \\ P_{\mu\nu,\rho\sigma}^2 &= \frac{1}{2} (\theta_{\mu\rho}\theta_{\nu\sigma} + \theta_{\mu\sigma}\theta_{\nu\rho}) - \frac{1}{D-1} \theta_{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma} , \\ P_{\mu\nu,\rho\sigma}^0 &= \frac{1}{D-1} \theta_{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma} , \\ \bar{P}_{\mu\nu,\rho\sigma}^0 &= \omega_{\mu\nu}\omega_{\rho\sigma} , \\ \bar{\bar{P}}_{\mu\nu,\rho\sigma}^0 &= \theta_{\mu\nu}\omega_{\rho\sigma} + \omega_{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma} , \end{aligned}$$

onde $\theta_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$ são os operadores de projeção transversal e longitudinal usuais

$$\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} , \quad \omega_{\mu\nu} = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} ,$$

que satisfazem as relações

$$\theta_{\mu\rho}\theta_\nu^\rho = \theta_{\mu\nu} , \quad \omega_{\mu\rho}\omega_\nu^\rho = \omega_{\mu\nu} , \quad \theta_{\mu\rho}\omega_\nu^\rho = 0 .$$

Aqui k_μ é o momentum do gráviton trocado e $k^2 \equiv k_\mu k^\mu$.

O conjunto de operadores $\{P^1, P^2, P^0, \bar{P}^0\}$ é um conjunto completo de operadores de projeção para os tensores simétricos de ordem dois, ou seja, eles são idempotentes, mutuamente ortogonais e satisfazem à relação de completudeza

$$\left[P^1 + P^2 + P^0 + \bar{P}^0 \right]_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) \equiv I_{\mu\nu,\rho\sigma} .$$

No referencial de repouso de um campo tensorial massivo, a família de operadores $\{P^1, P^2, P^0, \bar{P}^0\}$ projeta as partes de spin 1, spin 2 e 2 spin 0 do campo. O operador $\bar{\bar{P}}^0$, por sua vez, nada mais é que a soma de dois operadores de transferência, ou seja,

$$\bar{\bar{P}}_{\mu\nu,\rho\sigma}^0 \equiv \left[P^{\theta\omega} + P^{\omega\theta} \right]_{\mu\nu,\rho\sigma} ,$$

sendo, $F_{\mu\nu,\rho\sigma}^{\theta\omega} \equiv \theta_{\mu\nu}\omega_{\rho\sigma}$, $P_{\mu\nu,\rho\sigma}^{\omega\theta} \equiv \omega_{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma}$. Sua tabuada é dada por

$$\begin{aligned}\bar{P}^0 P^1 &= P^1 \bar{P}^0 = \bar{P}^0 P^2 = P^2 \bar{P}^0 = O, \\ (\bar{P}^0)^2 &= (D-1)(P^0 + \bar{P}^0), \\ P^0 \bar{P}^0 &= \bar{P}^0 P^0 = P^{\theta\omega}, \\ \bar{P}^0 \bar{P}^0 &= \bar{P}^0 P^0 = P^{\omega\theta},\end{aligned}$$

onde O é o operador nulo.

A expansão do operador \mathcal{O} na base $\{P^1, P^2, P^0, \bar{P}^0, \bar{P}^0\}$ é trivialmente obtida usando-se as seguintes identidades tensoriais

$$\left. \begin{aligned}\frac{1}{2}(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) &= [P^1 + P^2 + P^0 + \bar{P}^0]_{\mu\nu,\rho\sigma}, \\ \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} &= [(D-1)P^0 + \bar{P}^0 + \bar{P}^0]_{\mu\nu,\rho\sigma}, \\ \frac{1}{k^2}(\eta_{\mu\rho}k_\nu k_\sigma + \eta_{\mu\sigma}k_\nu k_\rho + \eta_{\nu\rho}k_\mu k_\sigma + \eta_{\nu\sigma}k_\mu k_\rho) &= [2P^1 + 4\bar{P}^0]_{\mu\nu,\rho\sigma}, \\ \frac{1}{k^2}(\eta_{\mu\nu}k_\rho k_\sigma + \eta_{\rho\sigma}k_\mu k_\nu) &= [\bar{P}^0 + 2\bar{P}^0]_{\mu\nu,\rho\sigma}, \\ \frac{1}{k^4}(k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma) &= \bar{P}^0_{\mu\nu,\rho\sigma}.\end{aligned}\right\} \quad (1.8)$$

As identidades,

$$\left. \begin{aligned}P_{\mu\nu,\rho\sigma}^2 &= \frac{1}{2}(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) - \frac{1}{D-1}\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - \left[P^1 + \frac{D-2}{D-1}\bar{P}^0 - \frac{1}{D-1}\bar{P}^0\right]_{\mu\nu,\rho\sigma}, \\ P_{\mu\nu,\rho\sigma}^0 &= \frac{1}{D-1}\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - \frac{1}{D-1}[\bar{P}^0 + \bar{P}^0]_{\mu\nu,\rho\sigma},\end{aligned}\right\} \quad (1.9)$$

por sua vez, grandemente facilitam a tarefa de colocar o propagador numa forma onde os termos proporcionais ao momentum do gráviton são omitidos, o que na prática facilita enormemente os cálculos envolvendo correntes conservadas.

Não iremos apresentar as demonstrações de (1.8) e (1.9), uma vez que estas decorrem diretamente das definições dos operadores P^1, \dots, \bar{P}^0 .

Estamos agora prontos para obter o propagador \mathcal{O}^{-1} . Para tanto precisamos inverter o operador \mathcal{O} . Expandindo este último na base $\{P^1, P^2, P^0, \bar{P}^0, \bar{P}^0\}$, com auxílio das identidades

(1.8), obtemos

$$\mathcal{O} = x_1 P^1 + x_2 P^2 + x_0 P^0 + \bar{x}_0 \bar{P}^0 + \bar{\bar{x}}_0 \bar{\bar{P}}^0 .$$

Suponhamos então que $\mathcal{O}^{-1} = y_1 P^1 + y_2 P^2 + y_0 P^0 + \bar{y}_0 \bar{P}^0 + \bar{\bar{y}}_0 \bar{\bar{P}}^0$, onde $y_1, y_2, \dots, \bar{\bar{y}}_0$ são parâmetros a serem determinados. Já que $\mathcal{O}\mathcal{O}^{-1} = I$, obtemos de imediato o seguinte conjunto de equações simultâneas

$$\left. \begin{array}{rcl} x_1 y_1 & & = 1 \\ x_2 y_2 & & = 1 \\ x_0 y_0 & + & (D-1)\bar{x}_0 \bar{y}_0 = 1 \\ \bar{x}_0 \bar{y}_0 & + & (D-1)\bar{\bar{x}}_0 \bar{\bar{y}}_0 = 1 \\ \bar{\bar{x}}_0 \bar{\bar{y}}_0 & + & \bar{x}_0 \bar{y}_0 = 0 \\ \bar{\bar{x}}_0 \bar{y}_0 & + & x_0 \bar{\bar{y}}_0 = 0 \end{array} \right\} . \quad (1.10)$$

Antes de prosseguir precisamos de um lema.

Lema. *Se $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ e $[x_0 \bar{x}_0 - (D-1)\bar{\bar{x}}_0] \neq 0$, então (1.10) tem uma única solução.*

Demonstração: Reduzindo por linhas a matriz aumentada do sistema (1.10) à forma escalonada, resulta

$$\left[\begin{array}{cccccc} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x_0 & 0 & (D-1)\bar{x}_0 & 1 \\ 0 & 0 & \bar{x}_0 & 0 & \bar{x}_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{x}_0 & (D-1)\bar{\bar{x}}_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\bar{x}}_0 & x_0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccccc} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x_0 & 0 & (D-1)\bar{x}_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{x}_0 & (D-1)\bar{\bar{x}}_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [x_0 \bar{x}_0 - (D-1)\bar{\bar{x}}_0^2] & -\bar{\bar{x}}_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] .$$

□

Segue-se que o propagador é dado por

$$\mathcal{O}^{-1} = \frac{1}{x_1} P^1 + \frac{1}{x_2} P^2 + \frac{1}{x_0 \bar{x}_0 - (D-1) \bar{x}_0^2} \left[\bar{x}_0 P^0 + x_0 \bar{P}^0 - \bar{x}_0 \bar{\bar{P}}^0 \right] . \quad (1.11)$$

Em resumo, a prescrição para o cômputo do propagador consiste nos seguintes procedimentos.

1. Linearizar a Lagrangiana original usando (1.4).
2. Adicionar ao resultado anterior uma Lagrangiana conveniente de fixação de gauge. Obviamente, só fazemos isto no caso de teorias invariantes de gauge.
3. Colocar a Lagrangiana resultante na forma bilinear $\mathcal{L} = \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \mathcal{O}_{\mu\nu, \rho\sigma} h^{\rho\sigma}$.
4. Encontrar os coeficientes $x_1, x_2, \dots, \bar{x}_0$, expandindo o operador \mathcal{O} na base $\{P^1, P^2, P^0, \bar{P}^0, \bar{\bar{P}}^0\}$ com a ajuda das identidades (1.8).
5. Inserir estes coeficientes em (1.11).

B. O Propagador para a gravitação quadrática em D dimensões em um gauge não convencional

Determinemos então o propagador de Feynman usando a prescrição desenvolvida na Subseção A. É claro que a linearização de (1.6) leva a (1.5). Portanto, $\mathcal{L}_g \equiv \mathcal{L}_{lin}^1$. A Lagrangiana (1.5) é invariante por uma transformação infinitesimal de coordenadas $x^\mu \rightarrow x^\mu + \kappa \xi^\mu(x)$, onde $\xi^\mu(x)$ é um campo vetorial infinitesimal. Ela deve ser infinitesimal para evitar inconsistência com (1.4). Sob esta transformação obtemos usando (1.4)

$$h_{\mu\nu}(x) \rightarrow h_{\mu\nu}(x) - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} . \quad (1.12)$$

A presença da simetria de gauge local (1.12) exige à adição de um termo de fixação de gauge, \mathcal{L}_{fg} , na Lagrangiana (1.5). É uma prática comum escolher as funções de gauge como uma combinação

linear de A_μ e $\phi_{,\mu}$. Entretanto, examinando (1.5), vemos claramente a presença não só desta combinação linear, mas também de seu rotacional ($F_{\mu\nu}$) e de sua divergência ($A^\mu_{,\mu} - \square\phi$). Assim sendo, escolhemos a seguinte Lagrangiana de fixação de gauge não convencional

$$\mathcal{L}_{fg} = \lambda_1 (A_\nu - \lambda\phi_{,\nu})^2 + \frac{b}{4} \left[\lambda_2 (A^\mu_{,\mu} - \lambda\square\phi)^2 + \lambda_3 F_{\mu\nu}^2 \right] ,$$

onde $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ e λ_3 são parâmetros de gauge convenientes. Colocando a Lagrangiana, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_{gf}$, na forma bilinear $\mathcal{L} = \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \mathcal{O}_{\mu\nu,\rho\sigma} h^{\rho\sigma}$ e expandindo o operador \mathcal{O} na base $\{P^1, P^2, \dots, \bar{P}^0\}$ com o auxílio das identidades (1.8), obtemos

$$\mathcal{O} = x_1 P^1 + x_2 P^2 + x_0 P^0 + \bar{x}_0 \bar{P}^0 + \bar{\bar{x}}_0 \bar{\bar{P}}^0 ,$$

onde

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv \frac{b}{2} \left(\lambda_3 k^4 + \frac{2\lambda_1 k^2}{b} \right) , \\ x_2 &\equiv \frac{b}{2} \left(k^4 + \frac{2k^2}{b} \right) , \\ x_0 &\equiv \frac{b}{2} \left[Dk^4 - \frac{2(D-2)k^2}{b} + 4(D-1)k^4 c + (D-1)k^4 \lambda_2 \lambda^2 + \frac{4(D-1)k^2 \lambda_1 \lambda^2}{b} \right] , \\ \bar{x}_0 &\equiv \frac{b}{2} \left(k^4 \lambda_2 - 2k^4 \lambda \lambda_2 + \frac{4k^2 \lambda_1}{b} - \frac{8k^2 \lambda \lambda_1}{b} + k^4 \lambda_2 \lambda^2 + \frac{4k^2 \lambda_1 \lambda^2}{b} \right) , \\ \bar{\bar{x}}_0 &\equiv \frac{b}{2} \left(\frac{4k^2 \lambda_1 \lambda^2}{b} + k^4 \lambda_2 \lambda^2 - k^4 \lambda \lambda_2 - \frac{4k^2 \lambda \lambda_1}{b} \right) . \end{aligned}$$

O propagador, no espaço dos momentos, é dado por (1.11). A partir deste resultado podemos encontrar o propagador numa série de gauges interessantes, escolhendo apropriadamente os parâmetros $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ e λ_3 . Listamos abaixo os mais importantes gauges covariantes que resultam destas escolhas.

1. gauge de Julve-Tonin ($\lambda = 0$) [39]

$$\mathcal{L}_{fg} = \lambda_1 A_\nu^2 + \frac{b}{4} \left[\lambda_2 (A^\mu_{,\mu})^2 + \lambda_3 F_{\mu\nu}^2 \right] .$$

Propagador:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{-1} &= \frac{m_1^2}{k^2 (m_1^2 \lambda_1 - \lambda_3 k^2)} P^1 + \frac{m_1^2}{k^2 (m_1^2 - k^2)} P^2 \\ &+ \frac{\tilde{m}_0^2}{2k^2 \left[k^2 - \frac{(D-2)}{2} \tilde{m}_0^2 \right]} P^0 + \frac{m_1^2}{(2m_1^2 \lambda_1 - \lambda_2 k^2) k^2} \bar{P}^0, \end{aligned} \quad (1.13)$$

onde

$$\tilde{m}_0^2 \equiv \frac{2}{\frac{D\beta\kappa^2}{4} + (D-1)\kappa^2\alpha}, \quad m_1^2 \equiv -\frac{4}{\beta\kappa^2}.$$

A ausência de táquions no campo dinâmico exige $\beta < 0$ e $(D-1)\alpha + \frac{\beta D}{4} > 0$. Note que a escolha $\lambda = 0$ fornece um propagador que contém somente os operadores de projeção de spin, ou seja, P^1, P^2, P^0, \bar{P}^0 , e ela também nos dá um propagador onde todas as partes comportam-se como k^{-4} .

2. *gauge de de Donder* ($\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$)

$$\mathcal{L}_{gf} = \lambda_1 \left(A_\nu - \frac{1}{2} \partial_\nu \phi \right)^2.$$

Propagador:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{-1} &= \frac{1}{\lambda_1 k^2} P^1 + \frac{m_1^2}{k^2 (m_1^2 - k^2)} P^2 + \frac{\tilde{m}_0^2}{2k^2 \left[k^2 - \frac{(D-2)}{2} \tilde{m}_0^2 \right]} P^0 \\ &+ \left[\frac{2}{\lambda_1 k^2} + \frac{(D-1)\tilde{m}_0^2}{2k^2 \left[k^2 - \frac{(D-2)}{2} \tilde{m}_0^2 \right]} \right] \bar{P}^0 + \frac{\tilde{m}_0^2}{2k^2 \left[k^2 - \frac{(D-2)}{2} \tilde{m}_0^2 \right]} \bar{\bar{P}}^0. \end{aligned}$$

3. *gauge de Feynman* ($\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$)

$$\mathcal{L}_{gf} = \left(A_\nu - \frac{1}{2} \partial_\nu \phi \right)^2.$$

Propagador:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{-1} &= \frac{1}{k^2} P^1 + \frac{m_1^2}{k^2 (m_1^2 - k^2)} P^2 + \frac{\tilde{m}_0^2}{2k^2 \left[k^2 - \frac{(D-2)}{2} \tilde{m}_0^2 \right]} P^0 \\ &+ \left[\frac{2}{k^2} + \frac{(D-1)\tilde{m}_0^2}{2k^2 \left[k^2 - \frac{(D-2)}{2} \tilde{m}_0^2 \right]} \right] \bar{P}^0 + \frac{\tilde{m}_0^2}{2k^2 \left[k^2 - \frac{(D-2)}{2} \tilde{m}_0^2 \right]} \bar{\bar{P}}^0. \end{aligned}$$

1.3 Um estudo sistemático da unitariedade em nível de árvore[19]

Apresentamos agora um método para analisar a unitariedade em nível de árvore das teorias de gravitação de ordem superior em D dimensões.

Ghosts e táquions estão ausentes de uma dada teoria gravitacional de ordem mais alta quando o propagador da mesma tem somente pólos de primeira ordem em $k^2 - M^2 = 0$ com massas reais M (ausência de táquions) e com resíduos positivos (ausência de ghosts)[33, 40, 41]. Assim sendo, testamos a unitariedade em nível de árvore da teoria de gravitação quadrática em D dimensões (i) acoplando o seu propagador com correntes externas conservadas, $T^{\mu\nu}$, compatíveis com as simetrias da teoria e (ii) examinando os pólos da amplitude corrente-corrente resultante. A amplitude de transição, no espaço dos momentos, toma então a forma

$$\mathcal{A} = g^2 T^{\mu\nu} \mathcal{O}_{\mu\nu,\rho\sigma}^{-1} T^{\rho\sigma} \quad , \quad (1.14)$$

onde g é a constante de acoplamento efetiva da teoria. Note que os projetores de spin P^2 e P^0 serão os únicos a darem uma contribuição não nula à amplitude corrente-corrente, já que $k_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

Em seguida é preciso expandir as fontes em uma base conveniente. O conjunto de vetores independentes no espaço dos momentos,

$$k^\mu \equiv (k^0, \mathbf{k}) \quad , \quad \tilde{k}^\mu \equiv (k^0, -\mathbf{k}) \quad , \quad \varepsilon_i^\mu \equiv (0, \vec{\varepsilon}_i) \quad , \quad i = 1, \dots, D-2 \quad ,$$

onde $\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_{D-2}$ são vetores unitários mutuamente ortogonais e que são também ortogonais a \mathbf{k} , servem a esse propósito. Assim, o tensor de corrente simétrico $T^{\mu\nu}(k)$ pode ser escrito como

$$T^{\mu\nu} = a k^\mu k^\nu + b \tilde{k}^\mu \tilde{k}^\nu + c^{ij} \varepsilon_i^{(\mu} \varepsilon_j^{\nu)} + d k^{(\mu} \tilde{k}^{\nu)} + e^i k^{(\mu} \varepsilon_i^{\nu)} + f^i \tilde{k}^{(\mu} \varepsilon_i^{\nu)} \quad . \quad (1.15)$$

A conservação da corrente, $k_\mu T^{\mu\nu} = 0$, fornece as seguintes relações entre os coeficientes constantes a, b, d, e^i e f^i

$$a k^2 + (k_0^2 + \mathbf{k}^2) \frac{d}{2} = 0 \quad , \quad (1.16)$$

$$b(k_0^2 + \mathbf{k}^2) + d\frac{k^2}{2} = 0, \quad (1.17)$$

$$e^i k^2 + f^i(k_0^2 + \mathbf{k}^2) = 0. \quad (1.18)$$

Se saturarmos os índices de $T^{\mu\nu}$ com os momentos k_μ , obtemos a equação $k_\mu k_\nu T^{\mu\nu} = 0$, que leva à seguinte relação de consistência entre os coeficientes a , b e d

$$ak^4 + b(k_0^2 + \mathbf{k}^2)^2 + dk^2(k_0^2 + \mathbf{k}^2) = 0. \quad (1.19)$$

Calculemos então o resíduo de \mathcal{A} em cada pólo do propagador a fim de verificar se seu sinal é positivo.

Proposição 3. *A teoria de gravitação de ordem superior é não unitária em nível de árvore se $D > 2$. Se $\tilde{m}_0^2 > 0$ [$D\beta/4 + (D-1)\alpha > 0$] e $m_1^2 > 0$ ($-\beta > 0$), a teoria é não taquiônica e tem um modo normal sem massa correspondente à uma partícula de massa zero e spin 2, um modo massivo correspondente a um ghost de massa m_1 e spin 2 e um modo normal massivo correspondente à uma partícula de massa $\sqrt{(D-2)/2} m_0$ e spin 0. A excitação sem massa não é um grau dinâmico de liberdade em $D = 3$.*

Demonstração: De (1.14) e (1.13) obtemos prontamente

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= g^2 T^{\mu\nu} \left\{ \frac{m_1^2}{k^2(m_1^2 - k^2)} P^2 + \frac{\tilde{m}_0^2}{2k^2[k^2 - (D-2)\tilde{m}_0^2/2]} P^0 \right\} T^{\rho\sigma} \\ &= g^2 \left\{ \frac{T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} - T^2/(D-2)}{k^2} - \frac{T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} - T^2/(D-1)}{k^2 - m_1^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{T^2}{(D-1)(D-2)[k^2 - (D-2)\tilde{m}_0^2/2]} \right\}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

onde $T = \eta_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$. Portanto, temos 2 pólos no setor de spin 2, ou seja, $k^2 = 0$ e $k^2 = m_1^2$, e um pólo no setor de spin 0, ou seja, $k^2 = (D-2)\tilde{m}_0^2/2$. Determinemos então o sinal do resíduo em cada um destes pólos. Vamos supor que a gravitação quadrática em D dimensões é não taquiônica, o que implica em $\tilde{m}_0^2 > 0$ e $m_1^2 > 0$.

• *Pólo $k^2 = 0$.* De (1.16)–(1.18) e (1.20), obtemos que o resíduo de \mathcal{A} no pólo $k^2 = 0$ é

$$Res\mathcal{A} \Big|_{k^2=0} = g^2 \left[(c^{ij})^2 - \frac{(c^{ii})^2}{D-2} \right]_{k^2=0}.$$

Concluimos então que a excitação sem massa não é um grau dinâmico de liberdade em três dimensões. Para $D > 3$ o resultado acima nos mostra que $Res\mathcal{A} \Big|_{k^2=0} > 0$.

- Pólo $k^2 = (D-2)\tilde{m}_0^2/2$. Neste caso

$$Res\mathcal{A} \Big|_{k^2=(D-2)\tilde{m}_0^2/2} = \left[\frac{g^2 T^2}{(D-1)(D-2)} \right]_{k^2=(D-2)\tilde{m}_0^2/2},$$

implicando em que o resíduo da amplitude corrente-corrente no pólo $k^2 = (D-2)\tilde{m}_0^2/2$ é sempre positivo para $D > 2$. A partícula massiva escalar é portanto uma partícula física.

- Pólo $k^2 = m_1^2$. O resíduo da amplitude de transição no pólo $k^2 = m_1^2$ é dado por

$$\begin{aligned} Res\mathcal{A} \Big|_{k^2=m_1^2} &= -g^2 \left\{ ab(k_0^2 + \mathbf{k}^2)^2 + b^2 k^4 + bdk^2(k_0^2 + \mathbf{k}^2) + (c^{ij})^2 \right. \\ &\quad - \frac{1}{2}(k_0^2 + \mathbf{k}^2)e^i f^i - \frac{k^2}{2}(f^i)^2 \\ &\quad \left. - \frac{1}{D-1} [ak^2 + bk^2 - c^{ii} + d(k_0^2 + \mathbf{k}^2)]^2 \right\}_{k^2=m_1^2}, \\ &= -g^2 \left\{ [(a-b)k^2]^2 + (c^{ij})^2 + \frac{k^2}{2} [(e^i)^2 - (f^i)^2] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{D-1} [(b-a)k^2 - c^{ii}]^2 \right\}_{k^2=m_1^2}, \end{aligned}$$

onde usamos (1.16)–(1.19). Esta expressão pode ser escrita como

$$\begin{aligned} Res\mathcal{A} \Big|_{k^2=m_1^2} &= -g^2 \left\{ \frac{D-2}{D-1} [(a-b)k^2]^2 + \left[(c^{ij})^2 - \frac{(c^{ii})^2}{D-1} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{k^2}{2} [(e^i)^2 - (f^i)^2] - \frac{2}{D-1} (a-b)k^2 c^{ii} \right\}_{k^2=m_1^2}. \end{aligned}$$

Supondo agora que $T \geq 0$, obtemos $c^{ii} \leq 0$, o que implica em $Res\mathcal{A} \Big|_{k^2=m_1^2} < 0$ para $D > 2$. Temos então um ghost massivo de spin 2 (não taquiônico) no propagador da teoria de gravitação quadrática. Consequentemente a teoria de gravitação de ordem superior em D dimensões é não unitária em nível de árvore. \square

Corolário 1. *A teoria de gravitação $R + R^2$ em D dimensões é unitária em nível de árvore para $D > 2$. Em três dimensões a excitação sem massa não é um grau dinâmico de liberdade.*

1.4 Potencial efetivo não relativístico[18, 19]

Em princípio qualquer teoria de gravitação deveria concordar com a teoria de Newton no caso limite de movimento em baixa velocidade em um campo gravitacional fraco. Assim sendo, é importante saber se a teoria de gravitação quadrática linearizada em D dimensões leva no limite não relativístico à lei de Newton. Calculemos, com esse objetivo, o potencial não relativístico efetivo para a interação de dois bósons massivos de spin zero via a troca de um gráviton. A expressão para o potencial é

$$U(r) = \frac{1}{4m^2} \frac{1}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1}\mathbf{k} \mathcal{M}_{N.R.} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} , \quad (1.21)$$

onde $\mathcal{M}_{N.R.}$ é o limite não relativístico da amplitude invariante de Feynman para o processo $S + S \rightarrow S + S$, onde S representa um bóson de spin 0 e massa m . O diagrama de Feynman correspondente é mostrado na Fig.1.

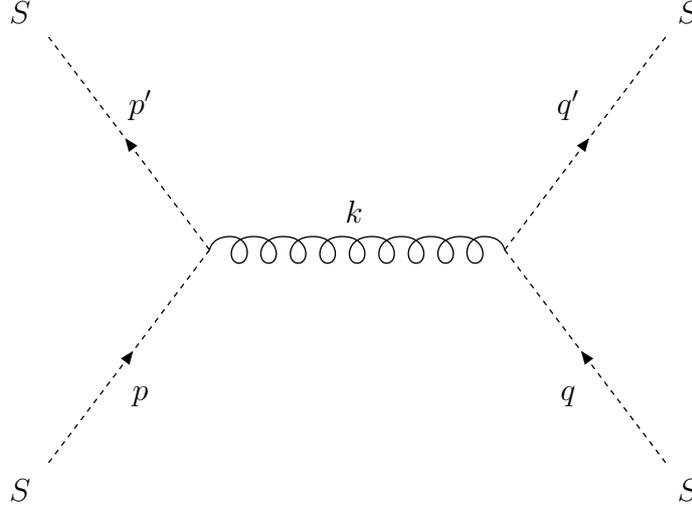


FIG. 1 . Contribuição tipo troca de um gráviton para o espalhamento de dois bósons massivos e idênticos de spin 0. S denota uma partícula escalar de massa m .

A Lagrangiana para a interação da gravitação com um campo escalar livre e massivo $\tilde{\phi}$, é

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\kappa h^{\mu\nu}}{2} \left[\partial_\mu \tilde{\phi} \partial_\nu \tilde{\phi} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial_\alpha \tilde{\phi} \partial^\alpha \tilde{\phi} - m^2 \tilde{\phi}^2) \right] .$$

Da expressão precedente, facilmente deduzimos a regra de Feynman para o vértice elementar (vide a Fig. 2). A amplitude invariante para o processo mostrado na Fig. 1 é

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \frac{m_1^2}{k^2(m_1^2 - k^2)} \frac{k^2}{2} \left\{ (p \cdot q)(p' \cdot q') + (p \cdot q')(p' \cdot q) + (p \cdot p')(m^2 - q \cdot q') + (q \cdot q')(m^2 - p \cdot p') \right. \\ & + \left. \frac{D}{2}(m^2 - p \cdot p')(m^2 - q \cdot q') - \frac{1}{2(D-1)} [Dm^2 - (D-2)p \cdot p'] [Dm^2 - (D-2)q \cdot q'] \right\} \\ & + \frac{\tilde{m}_0^2}{k^2 \left(k^2 - \frac{D-2}{2} \tilde{m}_0^2 \right)} \frac{k^2}{8(D-1)} [Dm^2 - (D-2)p \cdot p'] [Dm^2 - (D-2)q \cdot q'] . \end{aligned}$$

No limite não relativístico esta expressão se reduz a

$$\mathcal{M}_{N.R.} = -\frac{D-2}{D-1} \frac{\kappa^2 m^4 m_1^2}{\mathbf{k}^2 (\mathbf{k}^2 + m_1^2)} + \frac{\kappa^2 m^4 \tilde{m}_0^2}{2(D-1) \mathbf{k}^2 \left(\mathbf{k}^2 + \frac{D-2}{2} \tilde{m}_0^2 \right)} . \quad (1.22)$$

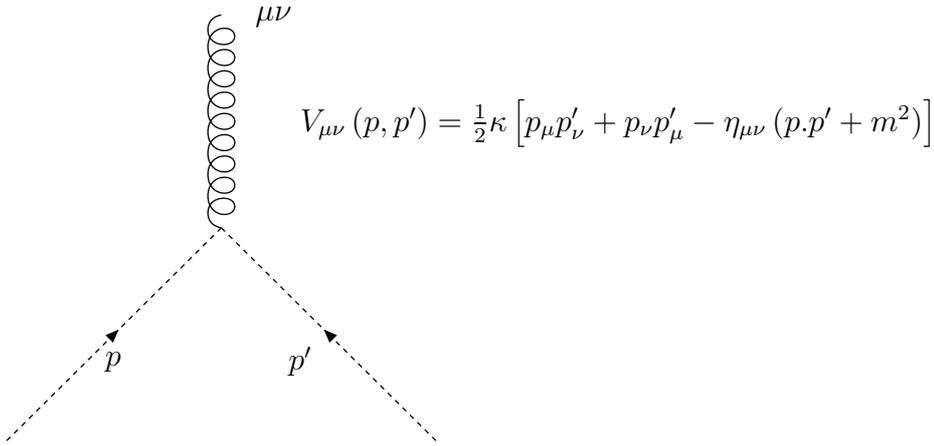


FIG. 2 . A regra de Feynman relevante para a interação bóson-bóson.

Substituindo (1.22) em (1.21), obtemos

$$U(r) = I_1 + I_2 ,$$

onde

$$I_1 \equiv -\frac{\kappa^2 m^2 m_1^2}{4(2\pi)^{D-1}} \frac{D-2}{D-1} \int_0^\infty \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2 (\mathbf{k}^2 + m_1^2)} |\mathbf{k}|^{D-2} d|\mathbf{k}| \right]$$

$$\left. \text{sen}^{D-3}\theta_{D-2}d\theta_{D-2}\dots\text{sen}^2\theta_3 d\theta_3 \text{sen}\theta_2 d\theta_2 d\theta_1 \right] , \quad (1.23)$$

$$I_2 \equiv \frac{\kappa^2 m^2 \tilde{m}_0^2}{8(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{D-1} \int_0^\infty \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2 \left(\mathbf{k}^2 + \frac{D-2}{2} \tilde{m}_0^2 \right)} |\mathbf{k}|^{D-2} d|\mathbf{k}| \right. \\ \left. \text{sen}^{D-3}\theta_{D-2} d\theta_{D-2}\dots\text{sen}^2\theta_3 d\theta_3 \text{sen}\theta_2 d\theta_2 d\theta_1 \right] . \quad (1.24)$$

Portanto, o problema do cálculo do potencial efetivo não relativístico foi reduzido a quadraturas. Vamos ilustrar a eficácia do método através de um exemplo: o cálculo do potencial efetivo não relativístico para a teoria de gravitação quadrática quadridimensional.

Neste caso o potencial efetivo é calculado como se segue:

$$U(r) = \frac{\kappa^2 m^2}{6(2\pi)^2} \int_0^\infty \left(\int_0^\pi e^{-i|\mathbf{k}|r \cos\theta} \text{sen}\theta d\theta \right) \left[-\frac{3}{4} \frac{1}{\mathbf{k}^2} + \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_1^2} - \frac{1}{4(\mathbf{k}^2 + \tilde{m}_0^2)} \right] \mathbf{k}^2 d|\mathbf{k}| \\ = \frac{\kappa^2 m^2}{6(2\pi)^2} \frac{1}{r} \text{Im} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} \left(-\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2 + m_1^2 r^2} - \frac{1}{4} \frac{x}{x^2 + \tilde{m}_0^2 r^2} \right) dx \right] . \quad (1.25)$$

A condição para a existência de integrais do tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \text{sen}x}{x^2 + a^2} (a \neq 0)$ é $a > 0$. Neste caso elas podem ser facilmente calculadas pelo método dos resíduos. Assim, supondo que $3\alpha + \beta > 0$ e $-\beta > 0$, o que corresponde a ausência de táquions no campo dinâmico da teoria, obtemos prontamente de (1.25)

$$U(r) = Gm^2 \left[-\frac{1}{r} + \frac{4}{3} e^{-m_1 r} - \frac{1}{3} e^{-\tilde{m}_0 r} \right] .$$

Logo, o potencial efetivo para a gravitação de ordem superior é dado pela expressão[21, 25]

$$V(r) = Gm \left[-\frac{1}{r} + \frac{4}{3} \frac{e^{-m_1 r}}{r} - \frac{1}{3} \frac{e^{-\tilde{m}_0 r}}{r} \right] , \quad (1.26)$$

que concorda assintoticamente com a lei de Newton. Na origem o potencial tende ao valor finito $Gm \left(\frac{\tilde{m}_0 - 4m_1}{3} \right)$.

1.5 Comentários

Uma de nossas motivações para estudar as teorias quadráticas de gravitação em D dimensões era responder as quatro indagações apresentadas na Introdução, que foram transcritas

no início deste Capítulo. Podemos agora responder em parte a estas questões:

- (i) a menor dimensão em que as teorias gravitacionais quadráticas têm sentido é $D = 2$;
- (ii) estas teorias não são unitárias em nível de árvore se $D > 2$;
- (iii) a excitação sem massa só não é um grau dinâmico de liberdade em $D = 3$;
- (iv) quando $D = 4$ a teoria de gravitação quadrática concorda assintoticamente com a lei de Newton.

Comentemos, de passagem, os resultados (ii) e (iv).

- *resultado (ii):*

Mostramos que a teoria quadrática é não unitária se $D > 2$. (O termo quadrático no tensor de Ricci, – o calcanhar de Aquiles da teoria –, é responsável pela presença de uma partícula massiva de spin 2 com resíduo negativo, ou seja, um ghost, no propagador nú). No entanto, esta pode ser uma conclusão um tanto quanto apressada. De fato, como Antoniadis e Tomboulis[35] demonstraram, esta excitação é instável em quatro dimensões. Talvez ela também seja instável em qualquer dimensão. Portanto, a teoria quadrática de gravitação em D dimensões é provavelmente uma teoria viável.

- *resultado (iv):*

Conforme demonstramos, o cálculo do potencial efetivo não relativístico para a gravitação quadrática em D dimensões reduz-se a quadraturas. Mostrou-se que quando $D = 4$, este potencial concorda assintoticamente com o potencial Newtoniano. No próximo Capítulo vamos mostrar que em $D = 3$, a usual correspondência existente entre o potencial não relativístico e o potencial Newtoniano é quebrada. Podemos concluir então que as teorias quadráticas em D dimensões não se reduzem obrigatoriamente à teoria de Newton no limite não relativístico.

Capítulo 2

Gravitação Quadrática em (2 + 1)D

Como é bem conhecido, a teoria da relatividade geral tridimensional não possui nenhum grau dinâmico de liberdade. Em outras palavras, o único modo presente na teoria, ou seja, o modo não massivo de spin 2, não se propaga. Para remediar tal situação vamos acrescentar à ação de Einstein-Hilbert os termos com derivadas quárticas $\int R_{\mu\nu}^2 \sqrt{g} d^3x$ e $\int R^2 \sqrt{g} d^3x$. Denominaremos esta classe de modelos efetivos com massas múltiplas de gravitação quadrática tridimensional. Ao longo deste Capítulo iremos analisar as modificações que estes termos com derivadas quárticas provocarão na teoria de Einstein em três dimensões.

Na Seção 2.1 estudaremos a teoria de gravitação quadrática tridimensional na aproximação linear. Na Seção 2.2 calcularemos o potencial efetivo não relativístico. Analisaremos também se a teoria é causal em nível de árvore. Na Seção 2.3 apresentaremos uma versão tridimensional do gauge de Teyssandier. Este gauge, ao contrário do gauge de de Donder, facilita enormemente o trabalho de achar a solução geral da versão linearizada da teoria quadrática. Determinaremos na Seção 2.4 a métrica, no gauge de Teyssandier, para uma partícula pontual de massa m localizada em $\mathbf{r} = 0$. De posse desta solução calcularemos na Seção 2.5 a aceleração gravitacional de uma partícula teste movendo-se em baixa velocidade num campo gravitacional fraco e o ângulo de deflexão gravitacional.

2.1 Aproximação linear[12]

A ação da teoria de gravitação quadrática em 2 + 1 dimensões é

$$S = \int d^3x \sqrt{g} \left[\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 - \mathcal{L}_M \right] ,$$

onde \mathcal{L}_M é a densidade de Lagrangiana da matéria e α e β são constantes com dimensão L e $\kappa^2 \sim L^{-1}$ não está necessariamente relacionada à constante de Einstein em $D = 4$. Variando a ação S com relação à métrica $g_{\mu\nu}$ (vide Apêndice A) obtemos a seguinte equação de campo

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\kappa^2} G_{\mu\nu} + \frac{\alpha}{2} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^2 + 2RR_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu \nabla_\nu R - 2g_{\mu\nu} \square R \right] \\ & + \frac{\beta}{2} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\rho\sigma}^2 + \nabla_\mu \nabla_\nu R + 2R_{\mu\rho\lambda\nu} R^{\rho\lambda} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square R - \square R_{\mu\nu} \right] + \frac{1}{2} T_{\mu\nu} = 0 . \end{aligned} \quad (2.1)$$

Para obtermos a aproximação linear, ou seja, a equação linear nas componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, primeiramente descartamos os termos quadráticos em $R_{\mu\nu}$ e R , bem como os termos $2RR_{\mu\nu}$ e $2R_{\mu\rho\lambda\nu} R^{\rho\lambda}$ em (2.1). Como consequência, (2.1) se torna

$$\frac{2}{\kappa^2} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + \frac{\alpha}{2} (2\nabla_\mu \nabla_\nu R - 2g_{\mu\nu} \square R) + \frac{\beta}{2} \left(\nabla_\mu \nabla_\nu R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square R - \square R_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{2} T_{\mu\nu} = 0 .$$

A partir deste ponto procedemos exatamente como na teoria de Einstein. Escrevemos

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} , \quad (2.2)$$

onde as componentes não nulas da métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ são tomadas como $\eta_{00} = 1$, $\eta_{ii} = -1$, $i = 1, 2$, e substituímos (2.2) na equação acima. Assim procedendo, obtemos

$$\left(\frac{2}{\kappa^2} - \frac{\beta}{2} \square \right) \left(\bar{R}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \frac{\bar{R}}{2} \right) - \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right) \left(\eta_{\mu\nu} \square \bar{R} - \bar{R}_{,\mu\nu} \right) = -\frac{1}{2\kappa} T_{\mu\nu} . \quad (2.3)$$

Aqui

$$\bar{R}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left(\gamma_{\mu\rho, \nu} + \gamma_{\nu\rho, \mu} \right) , \quad (2.4)$$

$$\bar{R} \equiv \frac{1}{2} \square h - \gamma^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} \quad (2.5)$$

$$\square \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu , \quad (2.6)$$

onde $\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$. Os índices são levantados (abaixados) usando-se $\eta^{\mu\nu}$ ($\eta_{\mu\nu}$). Note, entretanto, que $\bar{R}_{\mu\nu}{}^{,\nu} = \frac{1}{2}\bar{R}_{,\mu}$, o que nos permite concluir que

$$\left[\left(\frac{2}{\kappa^2} - \frac{\beta}{2}\square \right) \left(\bar{R}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \frac{\bar{R}}{2} \right) - \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right) \left(\eta_{\mu\nu} \square \bar{R} - \bar{R}_{,\mu\nu} \right) \right]^{,\nu} \equiv 0 .$$

Portanto as equações linearizadas (2.3) implicam em

$$T_{\mu\nu}{}^{,\nu} = 0 . \quad (2.7)$$

As equações (2.3) são as leis de conservação de energia-momentum da teoria da relatividade especial e implicam nas equações de movimento da relatividade restrita (as quais não contêm quaisquer interações gravitacionais).

2.2 Causalidade e potencial efetivo não relativístico[13]

No gauge de Julve-Tonin o propagador para a gravitação quadrática em (2 + 1)D pode ser escrito, como (vide Seção 1.2)

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{-1} &= \frac{m_1^2}{k^2 (m_1^2 \lambda_1 - \lambda_3 k^2)} P^1 + \frac{m_1^2}{k^2 (m_1^2 - k^2)} P^2 \\ &+ \frac{m_0^2}{k^2 (k^2 - m_0^2)} P^0 + \frac{m_1^2}{k^2 (2m_1^2 \lambda_1 - \lambda_2 k^2)} \bar{P}^0 , \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde P^1, P^2, P^0 e \bar{P}^0 são os operadores de projeção de spin usuais de Barnes-Rivers e λ_1, λ_2 e λ_3 são parâmetros de gauge. Aqui

$$m_0^2 \equiv \frac{1}{\kappa^2 \left[\frac{3}{4}\beta + 2\alpha \right]} , \quad m_1^2 \equiv -\frac{4}{\beta \kappa^2} .$$

Note que todos os termos do propagador acima comportam-se como k^{-4} . A ausência de táquions exige $\beta < 0$ e $\left(\frac{3}{4}\beta + 2\alpha \right) > 0$. Portanto, a gravitação quadrática tridimensional

é causal em nível de árvore quando m_0^2 e m_1^2 são positivos, o que admitiremos ser verdade a partir daqui.

Isto posto, vamos calcular o potencial efetivo não relativístico. Fazendo $D = 3$ nas expressões (1.23) e (1.24) obtemos

$$\begin{aligned} U(r) &= \frac{\kappa^2 m^2}{8(2\pi)^2} \int_0^\infty \left(\int_0^{2\pi} e^{-i|\mathbf{k}|r \cos\theta} d\theta \right) \left(\frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_1^2} - \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \frac{m_0^2}{2}} \right) |\mathbf{k}| d|\mathbf{k}| \\ &= \frac{\kappa^2 m^2}{16\pi} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_1^2} - \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \frac{m_0^2}{2}} \right) J_0(|\mathbf{k}|r) |\mathbf{k}| d|\mathbf{k}| \quad , \end{aligned}$$

onde J_0 é a função de Bessel de primeira espécie e ordem zero. Note, no entanto, que a integral $\int_0^\infty \frac{x J_0(ax)}{x^2 + b^2} dx$ só existe quando $a > 0$ e $Re b > 0$ [42]. Conseqüentemente, suporemos que $m_0^2 > 0$ ($\frac{3}{4}\beta + 2\alpha > 0$) e $m_1^2 > 0$ ($-\beta > 0$), o que nada mais é que a condição para ausência de táquions (tanto com energias positivas, quanto negativas) no campo dinâmico da teoria. Integrando, obtemos

$$U(r) = 2\bar{G}m^2 \left[\kappa_0(m_1 r) - \kappa_0(m_0 r/\sqrt{2}) \right] \quad ,$$

onde κ_0 é a função de Bessel modificada de ordem zero e $\bar{G} \equiv \frac{\kappa^2}{32\pi}$.

O potencial é dado então por

$$V(r) = 2\bar{G}m \left[\kappa_0(m_1 r) - \kappa_0(m_0 r/\sqrt{2}) \right] \quad . \quad (2.9)$$

Note que $V(r)$ comporta-se como $2\bar{G}m \ln \frac{m_0}{m_1 \sqrt{2}}$ na origem e como

$$2\bar{G}m \left[\sqrt{\frac{\pi}{2m_1 r}} e^{-m_1 r} - \sqrt{\frac{\pi}{m_0 r \sqrt{2}}} e^{-m_0 r/\sqrt{2}} \right]$$

assintoticamente[43].

Dois comentários se fazem apropriados aqui:

- i) diferentemente do potencial Newtoniano, $V_N = 2\bar{G}m \ln \frac{r_0}{r}$, que tem uma singularidade logarítmica na origem e não é limitado no infinito, o potencial referente à gravitação quadrática tridimensional é extremamente bem comportado: ele é finito na origem e zero no infinito;

- ii) $V(r) \rightarrow 0$ quando m_0 e $m_1 \rightarrow \infty$, confirmando assim o resultado bem conhecido que a correspondência padrão entre a teoria de Einstein tridimensional e a teoria de Newton é violada[1, 2].

2.3 Solução geral da equação de campo linearizada no gauge de Teyssandier[12]

Como é bem conhecido, se utilizarmos as assim chamadas condições de coordenadas harmônicas, as equações linearizadas de Einstein se simplificam enormemente. Isto não é verdade, entretanto, no caso das equações linearizadas da gravitação quadrática. Felizmente, Teyssandier[44] descobriu um gauge que, na aproximação de campo fraco, facilita bastante o estudo da gravitação de ordem superior. Apresentamos em seguida a versão tridimensional deste gauge.

Tomando o traço de (2.3) obtemos

$$-\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \square \bar{R} = -\frac{T}{4\kappa} + \frac{1}{4} \left(\frac{2}{\kappa^2} - \frac{\beta}{2} \square\right) \bar{R} . \quad (2.10)$$

Substituindo (2.10) em (2.3), podemos escrever

$$\left(\frac{2}{\kappa^2} - \frac{\beta}{2} \square\right) \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \left(\frac{2}{\kappa^2} - \frac{\beta}{2} \square\right) \eta_{\mu\nu} R + \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) R_{,\mu\nu} = \frac{T\eta_{\mu\nu}}{4\kappa} - \frac{T_{\mu\nu}}{2\kappa} .$$

Levando em conta (2.4), obtemos a seguinte expressão para as equações de campo linearizadas:

$$\left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4} \square\right) \left[-\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \bar{R}\right] + \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu,\nu} + \Gamma_{\nu,\mu}) = \frac{\kappa}{4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T\eta_{\mu\nu}}{2}\right) , \quad (2.11)$$

onde

$$\Gamma_{\mu} \equiv \left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4} \square\right) \gamma_{\mu\rho}{}^{,\rho} - \frac{\kappa^2}{2} \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \bar{R}_{,\mu} . \quad (2.12)$$

É interessante notar que quando $\alpha = \beta = 0$, (2.11) e (2.10) podem ser reescritas, respectivamente, como

$$\square \gamma_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\lambda}{}^{,\lambda}{}_{,\nu} - \gamma_{\nu\lambda}{}^{,\lambda}{}_{,\mu} + \gamma^{\lambda\rho}{}_{,\lambda\rho} \eta_{\mu\nu} = \frac{\kappa T_{\mu\nu}}{2} - \frac{\bar{R}}{2} \eta_{\mu\nu} + \frac{\kappa T \eta_{\mu\nu}}{4} , \quad (2.13)$$

$$\frac{\kappa T}{4} = \frac{\bar{R}}{2} . \quad (2.14)$$

Assim, na ausência de termos de ordem superior, as equações de campo (2.11) reduzem-se as equações de campo da teoria de Einstein, ou seja,

$$\square \gamma_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}{}^{,\lambda}{}_{,\lambda} - \gamma_{\nu\lambda}{}^{,\lambda}{}_{,\mu} + \gamma^{\lambda\rho}{}_{,\lambda\rho} \eta_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2} T_{\mu\nu} .$$

O gauge de Teyssandier é definido pela condição subsidiária $\Gamma_\mu = 0$ sobre os potenciais. Vamos mostrar então que esta condição pode ser implementada supondo inicialmente que $\Gamma \neq 0$. Obviamente, a equação de campo linearizada (2.11) é invariante sob a transformação infinitesimal de coordenadas $x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu = x^\mu + \kappa \Lambda^\mu$, onde $\Lambda^\mu(x)$ é um campo vetorial infinitesimal. Ela deve ser infinitesimal para evitar inconsistência com (2.2). Sob essa transformação, temos, de (2.2), $\Gamma_\mu(x) \rightarrow \bar{\Gamma}_\mu(x) = \Gamma_\mu(x) - \left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4} \square\right) \square \Lambda_\mu$. A condição para que $\bar{\Gamma}_\mu$ se anule pode agora ser implementada exigindo-se que $\Gamma_\mu = \left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4} \square\right) \square \Lambda_\mu$. Assim, o problema de se obter a solução das equações de campo no contexto da gravitação quadrática tridimensional é completamente equivalente àquele de se resolver o seguinte sistema de equações

$$\left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4} \square\right) \left[-\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \bar{R}\right] + \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu,\nu} + \Gamma_{\nu,\mu}) = \frac{\kappa}{4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu} T}{2}\right) , \quad (2.15)$$

$$0 = \Gamma_\mu \equiv \left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4} \square\right) \gamma_{\mu\lambda}{}^{,\lambda} - \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \frac{\kappa^2}{2} R_{,\mu} . \quad (2.16)$$

Seguindo passo a passo as instruções de Teyssandier dadas na Ref. [44], concluímos que a solução geral das equações de campo para a gravitação quadrática tridimensional no gauge de Teyssandier, ou seja, a solução do sistema de equações precedente, é dada por

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(E)} + \psi_{\mu\nu} - \Phi \eta_{\mu\nu} ,$$

onde $h_{\mu\nu}^{(E)}$, $\psi_{\mu\nu}$ e Φ satisfazem as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \square h_{\mu\nu}^{(E)} &= \frac{\kappa}{2} [T \eta_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}] , & \gamma_{\mu\nu}^{(E) \prime\nu} &= 0 , & \gamma_{\mu\nu}^{(E)} &= h_{\mu\nu}^{(E)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^{(E)} ; \\ (\square + m_1^2) \psi_{\mu\nu} &= \frac{\kappa}{2} \left[T_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu} T}{2}\right] , & \psi_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu} - \square \psi &= 0 ; \\ \left(\square + \frac{m_0^2}{2}\right) \Phi &= \frac{\kappa T}{4} . \end{aligned}$$

Três comentários são apropriados aqui:

- i) o gauge de Teyssandier envolve derivadas terceiras dos potenciais, enquanto que o gauge de de Donder envolve apenas derivadas primeiras dos mesmos potenciais;
- ii) m_0 e m_1 podem ser reais ou imaginários, dependendo dos sinais de $2\alpha + \frac{3}{4}\beta$ e β ;
- iii) a consistência do gauge de Teyssandier pode ser verificada facilmente mostrando-se que a solução geral das equações de campo linearizadas para a gravitação quadrática tridimensional satisfaz à condição subsidiária $\Gamma_\mu = 0$.

2.4 A métrica para uma fonte pontual, isolada e estática[12]

Vamos agora determinar a métrica para uma partícula pontual de massa m localizada em $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Neste caso o tensor de energia-momento tem a forma

$$T_{\mu\nu} = m \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} \delta^2(\mathbf{r}) .$$

Para obter $h_{\mu\nu}$ precisamos de $h_{\mu\nu}^{(E)}$, $\psi_{\mu\nu}$ e Φ . Calculemos então estas quantidades .

- *Obtenção de $h_{\mu\nu}^{(E)}$*

É trivial mostrar que as componentes não nulas de $h_{\mu\nu}^{(E)}$ são somente $h_{ii}^{(E)}$, $i = 1, 2$.

Estas satisfazem as equações

$$\nabla^2 h_{ii}^{(E)} = \frac{\kappa m}{2} \delta^2(\mathbf{r}) , i = 1, 2 . \quad (2.17)$$

Para resolver estas equações utilizaremos o método da transformada de Fourier. Primeiro definimos $\tilde{h}_{ii}^{(E)}(\mathbf{k})$ como se segue:

$$h_{ii}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int d^2\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{h}_{ii}^{(E)}(\mathbf{k}) , \quad (2.18)$$

$$\tilde{h}_{ii}^{(E)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \int d^2\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} h_{ii}^{(E)}(\mathbf{r}) , \quad (2.19)$$

onde $d^2\mathbf{k}$ e $d^2\mathbf{r}$ representam elementos de volume no \mathbf{k} -espaço bidimensional e no espaço de coordenadas bidimensional, respectivamente. Substituindo (2.18) em (2.17) e levando em conta que

$$\delta^2(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad ,$$

obtemos prontamente

$$\tilde{h}_{ii}^{(E)}(\mathbf{k}) = -\frac{\kappa m}{4\pi} \frac{1}{\mathbf{k}^2} \quad .$$

Mas,

$$h_{ii}^{(E)}(\mathbf{r}) = -\frac{\kappa m}{8\pi^2} \int d^2\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{\mathbf{k}^2} \quad .$$

Para evitar a presença de uma divergência infravermelha na integral acima, introduzimos na mesma um parâmetro extra a de modo que $\frac{1}{\mathbf{k}^2} \rightarrow \frac{1}{\mathbf{k}^2 + a^2}$. O limite $a \rightarrow 0$ é então tomado no final do cálculo. Como resultado, obtemos

$$\begin{aligned} h_{ii}^{(E)}(\mathbf{r}) &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[-\frac{\kappa m}{8\pi^2} \int d^2\mathbf{k} \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2 + a^2} \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[-\frac{\kappa m}{4\pi} \int_0^\infty \frac{J_0(|\mathbf{k}|r) |\mathbf{k}| d|\mathbf{k}|}{\mathbf{k}^2 + a^2} \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[-\frac{\kappa m}{4\pi} \kappa_0(ar) \right] \\ &= \frac{\kappa m}{4\pi} \ln r \quad , \end{aligned}$$

onde, para simplificar, omitimos uma constante aditiva. Esta solução satisfaz à condição subsidiária $\gamma_{\mu\nu}^{(E) \quad ;\nu} = 0$.

- *Obtenção de $\psi_{\mu\nu}$*

Neste caso vemos facilmente que as componentes não nulas de $\psi_{\mu\nu}$ são $\psi_{00} = \psi_{11} = \psi_{22}$. Elas obedecem à equação

$$\left(m_1^2 - \nabla^2\right) \psi = \frac{\kappa m}{4} \delta^2(\mathbf{r}) \quad , \quad \psi \equiv \psi_{00} = \psi_{11} = \psi_{22} \quad ,$$

cuja solução é dada por

$$\psi_{00} = \psi_{11} = \psi_{22} = \frac{\kappa m}{8\pi} \kappa_0 (m_1 |\mathbf{k}|) \quad .$$

- *Obtenção de Φ*

A equação que deve ser resolvida agora é

$$\left(\frac{m_0^2}{2} - \nabla^2 \right) \Phi = \frac{\kappa m}{4} \delta^3(\mathbf{r}) \quad .$$

O resultado é

$$\Phi = \frac{\kappa m}{8\pi} \kappa_0 \left(\frac{m_0}{\sqrt{2}} |\mathbf{k}| \right) \quad .$$

Note que havíamos suposto que m_0^2 e m_1^2 são reais de modo a evitar a presença de partículas taquiônicas no campo dinâmico da teoria. Neste caso a teoria possui um potencial efetivo bem comportado (vide a Seção 2.2).

A solução geral das equações de campo da gravitação quadrática em três dimensões no gauge de Teyssandier é então dada por

$$h_{00} = \frac{\kappa m}{8\pi} \left[\kappa_0 (m_1 |\mathbf{k}|) - \kappa_0 \left(\frac{m_0}{\sqrt{2}} |\mathbf{k}| \right) \right] \quad , \quad (2.20)$$

$$h_{11} = h_{22} = \frac{\kappa m}{8\pi} \left[2 \ln r + \kappa_0 (m_1 |\mathbf{k}|) + \kappa_0 \left(\frac{m_0}{\sqrt{2}} |\mathbf{k}| \right) \right] \quad . \quad (2.21)$$

Note que $\kappa h_{00} = 2V$ [vide (2.9)].

A solução acima tende a $h_{00} = 0$, $h_{11} = h_{22} = \frac{\kappa m}{4\pi} \ln r$, quando m_1 e $m_2 \rightarrow \infty$, que nada mais é que a solução das equações de campo linearizadas da teoria de Einstein tridimensional, no gauge de de Donder, gerada por uma fonte estática pontual[11]. É claro que (2.20) e (2.21) satisfazem à condição subsidiária $\Gamma_\mu = 0$.

A métrica que acabamos de obter grandemente se assemelha, *mutatis mutantis*, com a métrica da corda cósmica no gauge U(1) no contexto da gravitação quadrática linearizada obtida por Linet e Teyssandier[45]. Esta última, tal como nossa métrica, envolve uma combinação linear de K_0 's bem como uma combinação linear de K_0 's e \ln .

2.5 Efeitos gravitacionais em (2 + 1)D^[13]

Analisemos, pois, os efeitos gravitacionais devidos à métrica obtida na seção precedente. Vamos nos restringir ao estudo dos seguintes pontos:

- (i) força gravitacional exercida sobre uma partícula teste movendo-se em baixa velocidade num campo gravitacional fraco;
- (ii) desvio tridimensional da luz.

A. Aceleração gravitacional

Como é bem conhecido, na aproximação de campo fraco, a aceleração gravitacional $\gamma^k = dv^k/dt$ de uma partícula teste movendo-se em baixa velocidade neste campo gravitacional é dada por

$$\gamma^k = -\kappa \left[h^k_{0,0} - \frac{1}{2} h_{00}{}^{,k} \right] . \quad (2.22)$$

Como o nosso campo é independente do tempo, esta equação se reduz a

$$\gamma^k = -\frac{\kappa}{2} h_{00,k} . \quad (2.23)$$

Inserindo (2.20) em (2.23), obtemos

$$\gamma^k = -\bar{G}m \frac{x^k}{r} [m_0 K_1(m_0 r) - m_1 K_1(m_1 r)] , \quad (2.24)$$

onde $\bar{G}^2 \equiv \frac{\kappa^2}{32\pi}$.

Note que $xK_1(x)$ é uma função positiva monotonicamente decrescente no intervalo $0 \leq x < \infty$, já que $d[xK_1(x)]/dx = -xK_0(x)$ e $K_0(x) > 0$. Assim, a força gravitacional relacionada à equação anterior é sempre atrativa se $m_0 < m_1$, é repulsiva se $m_0 > m_1$ e se anula se $m_0 = m_1$ ($\beta + 2\alpha = 0$). Observe que esta força não existe no contexto da relatividade geral em (2 + 1)D. Esse é um resultado peculiar da gravitação quadrática em (2 + 1)D.

B. Desvio da luz

Consideremos inicialmente um raio luminoso no plano $x - y$ vindo do infinito, com um parâmetro de impacto b . A fonte do campo gravitacional é uma partícula pontual de massa m localizada em $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Se os raios de luz seguem geodésicas nulas, a correspondente equação de movimento é dada por

$$u^\beta u_{\alpha;\beta} = 0 \quad ,$$

onde $u^\nu = dx^\nu/d\lambda$ é o vetor tangente e λ um parâmetro afim. A equação precedente pode ser escrita mais convenientemente como

$$u^\beta u_{\alpha;\beta} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\alpha} u^\mu u^\nu \quad . \quad (2.25)$$

Vamos agora supor que na ausência do campo gravitacional o raio de luz seguiria a trajetória dada por

$$x^0 = a\lambda \quad , \quad x^1 = a\lambda \quad , \quad x^2 = b \quad , \quad (2.26)$$

onde a é uma constante. Na aproximação de campo fraco (2.25) se reduz, ao longo da trajetória (2.26), a

$$\frac{d}{d\lambda} (\delta u_\alpha) = \frac{\kappa}{2} h_{\mu\nu,\alpha} u^{(0)\mu} u^{(0)\nu} \quad ,$$

onde

$$u_\alpha = \eta_{\alpha\gamma} u^{(0)\gamma} + \delta u_\alpha \quad ,$$

$u^{(0)\gamma} = (a, a, 0, 0)$ é o vetor tangente ao longo da curva definida por (2.26) e δu_α é um termo linear em κ .

Consequentemente o ângulo de deflexão é dado por

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{a} [\delta u_2(\infty) - \delta u_2(-\infty)] \\ &= \frac{\kappa a}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dr} [h_{00} + h_{11}] \frac{b \, d\lambda}{\sqrt{b^2 + \lambda^2 a^2}} \\ &= \frac{m\kappa^2 ab}{4\pi} \int_0^\infty \left[\frac{1}{b^2 + \lambda^2 a^2} - \frac{m_1 K_1(m_1 \sqrt{b^2 + \lambda^2 a^2})}{\sqrt{b^2 + \lambda^2 a^2}} \right] d\lambda \quad . \end{aligned}$$

Mas[42],

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty K_\nu \left(\alpha \sqrt{x^2 + y^2} \right) \frac{x^{2\mu+1}}{\sqrt{(x^2 + z^2)^2}} dx \\ &= \frac{2^\mu \Gamma(\mu + 1)}{\alpha^{\mu+1} z^{\nu-\mu-1}} K_{\nu-\mu-1}(\alpha z) \quad (\alpha > 0, \operatorname{Re}\mu > -1), \\ & K_{\pm 1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \quad , \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad . \end{aligned}$$

Logo

$$\theta = 4\pi m \bar{G} \left[1 - e^{-m_1/b} \right] \quad .$$

Note que o inofensivo modo escalar massivo não contribui em nada para a deflexão da luz. Para explicar este fato, analisemos nossa métrica quando $m_1 \rightarrow \infty$. Neste caso ela pode ser reescrita como

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(E)} + f(r)\eta_{\mu\nu} \quad ,$$

onde

$$f(r) \equiv -\frac{\kappa m}{8\pi} K_0(mr) \quad .$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \left[h_{\mu\nu}^{(E)} + f(r)\eta_{\mu\nu} \right] \kappa + \eta_{\mu\nu} \\ &= g_{\mu\nu}^{(E)} + \kappa f(r)\eta_{\mu\nu} \\ &= (1 + \kappa f) g_{\mu\nu}^{(E)} \quad , \end{aligned}$$

onde o produto de $h_{\mu\nu}^{(E)}$ com f foi desprezado. Podemos então enunciar o seguinte resultado:
Se $1 + \kappa f > 0$, a teoria de gravitação linearizada $R + R^2$ em (2 + 1)D é conformemente relacionada à teoria de Einstein linearizada tridimensional.

Como as teorias estão relacionadas por um mapeamento conforme, e tal mapeamento preserva ângulos, chegamos à conclusão que o ângulo de deflexão para a gravitação linearizada

$R + R^2$ em $(2 + 1)D$ é exatamente o mesmo que aquele dado pela teoria de Einstein linearizada em $(2 + 1)D$. Chamamos atenção para o fato que a equivalência das teorias acima em $(3 + 1)D$ foi estudada classicamente por Whitt[48] e Teysandier[44] e, em nível de árvore, por Accioly *et al*[30, 31]

2.6 Comentários

Listamos abaixo os principais resultados provenientes de nossa investigação sobre as teorias quadráticas de gravitação em três dimensões:

- A teoria é causal em nível de árvore se admitirmos que m_0^2 e m_1^2 são positivos (ausência de táquions).
- Seu potencial não relativístico, ao contrário do potencial Newtoniano $V_N = 2\bar{G}m \ln \frac{r_0}{r}$ que apresenta uma singularidade logarítmica na origem e diverge no infinito, é extremamente bem comportado: ele é finito na origem e zero no infinito.
- Se $m_0 > m_1$ a força gravitacional exercida sobre uma partícula teste é repulsiva (“antigravidade”), enquanto que se $m_0 = m_1$ esta força é nula (“blindagem gravitacional”). Note que tais “fenômenos” não ocorrem no contexto da gravitação usual em $(2 + 1)D$.
- O inofensivo modo escalar massivo não fornece nenhuma contribuição para a deflexão da luz, uma vez que as teorias linearizadas tridimensionais de Einstein e $R + R^2$ são conformemente relacionadas.
- A teoria quadrática tridimensional não é dinamicamente trivial.

Capítulo 3

Gravitação Quadrática em $(2 + 1)D$ com Termo Topológico de Chern-Simons

Conforme vimos no Capítulo anterior, a gravitação quadrática tridimensional, ao contrário da relatividade geral em $(2 + 1)D$, é dinamicamente não trivial e tem um potencial não relativístico bem comportado. Neste Capítulo vamos analisar as mudanças que ocorrem quando um termo de Chern-Simons é adicionado à esta teoria.

Teorias de gauge topologicamente massivas em espaço tempos tridimensionais tem sido estudadas extensivamente desde a década de oitenta devido a sua estrutura dinâmica peculiar, bem como por sua conexão com o limite em altas temperaturas de teorias quadridimensionais[46]. Em geral, os termos topológicos de massa, que estão relacionados aos invariantes de Pontryagin quadridimensionais, afetam tanto o conteúdo dinâmico quanto o conteúdo de spin da teoria. Por exemplo, no caso de Yang-Mills, o número de graus de liberdade não se altera pela adição de um termo topológico massivo; no entanto, os geradores de gauge são modificados e ainda obedecem à mesma álgebra[47], enquanto que o conteúdo de spin muda de 0 para 1[15, 16]. A ação de Einstein-Hilbert, por outro lado, não possui nenhum grau de liberdade em três dimensões (vide Capítulo 2), no entanto quando adicionamos um termo topológico à mesma obtemos uma teoria, que conforme vamos mostrar na Seção 3.3, possui um único modo de propagação.

Na Seção 3.1 calcularemos o propagador de Feynman para a teoria quadrática tridi-

mensional com termo topológico, utilizando um algoritmo baseado na extensão dos operadores tridimensionais de Barnes-Rivers. O cálculo do potencial efetivo não relativístico bem como uma discussão em nível de árvore sobre a causalidade da teoria serão apresentados na Seção 3.2. Na Seção 3.3 analisaremos a questão da unitariedade em nível de árvore tanto da teoria tridimensional de Einstein-Chern-Simons como da teoria quadrática tridimensional com termo topológico.

3.1 O propagador de Feynman[17]

Seja $\bar{\mathcal{L}}$ a Lagrangiana relativa à qualquer teoria métrica de gravitação tridimensional com (sem) derivadas de ordem superior. Vamos supor que esta teoria é invariante de gauge. Seja $\mathcal{L}_{C.S.}$ a Lagrangiana topológica de Chern-Simons. Esta última pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{C.S.} &= \frac{1}{2\mu}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\left(R^\nu_{\beta\mu\nu}\Gamma^\beta_{\nu\lambda} - \frac{2}{3}\Gamma^\alpha_{\beta\mu}\Gamma^\beta_{\gamma\nu}\Gamma^\gamma_{\alpha\lambda}\right) \\ &= \frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu}}{\mu}\Gamma^\rho_{\sigma\lambda}\left(\partial_\mu\Gamma^\sigma_{\rho\nu} + \frac{2}{3}\Gamma^\sigma_{\omega\mu}\Gamma^\omega_{\nu\rho}\right),\end{aligned}\quad (3.1)$$

onde μ é um parâmetro adimensional. Aqui $\varepsilon^{012} = +1$. Para calcular o propagador do gráviton precisamos da parte bilinear da Lagrangiana $\bar{\mathcal{L}} + \mathcal{L}_{C.S.}$. Esta é obtida decompondo a métrica $g_{\mu\nu}$ como se segue

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski. Seja $\bar{\bar{\mathcal{L}}}$ a Lagrangiana obtida inserindo-se (3.2) em $\bar{\mathcal{L}} + \mathcal{L}_{C.S.}$. Sendo a teoria invariante de gauge, adicionamos a $\bar{\bar{\mathcal{L}}}$ uma Lagrangiana de fixação de gauge $\mathcal{L}_{g.f.}$. Assim, $\mathcal{L} = \bar{\bar{\mathcal{L}}} + \mathcal{L}_{g.f.}$ pode ser reescrita como $\mathcal{L} = h^{\mu\nu}\mathcal{O}_{\mu\nu,\rho\sigma}h^{\rho\sigma}$. Para obtermos o propagador, temos agora que inverter o operador \mathcal{O} . Este cálculo, entretanto, é bastante simplificado se expandirmos o operador \mathcal{O} numa base formada pelos operadores usuais de Barnes-Rivers tridimensionais (vide Seção 1.2)

$$P^1_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\rho}\omega_{\nu\sigma} + \theta_{\mu\sigma}\omega_{\nu\rho} + \theta_{\nu\rho}\omega_{\mu\sigma} + \theta_{\nu\sigma}\omega_{\mu\rho}),$$

$$\begin{aligned}
P_{\mu\nu,\rho\sigma}^2 &= \frac{1}{2} (\theta_{\mu\rho}\theta_{\nu\sigma} + \theta_{\mu\sigma}\theta_{\nu\rho} - \theta_{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma}) \ , \\
P_{\mu\nu,\rho\sigma}^0 &= \frac{1}{2}\theta_{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma} \ , \quad \bar{P}_{\mu\nu,\rho\sigma}^0 = \omega_{\mu\nu}\omega_{\rho\sigma} \ , \quad \bar{\bar{P}}_{\mu\nu,\rho\sigma}^0 = \theta_{\mu\nu}\omega_{\rho\sigma} + \omega_{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma} \ ,
\end{aligned}$$

onde $\theta_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$ são os operadores de projeção transversal e longitudinal,

$$\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \ , \quad \omega_{\mu\nu} = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \ ,$$

e k_μ é o momento do gráviton trocado, e pelo operador

$$\mathcal{P}_{\mu\nu,\rho\sigma} \equiv \frac{\square\partial^\lambda}{4} [\varepsilon_{\mu\lambda\rho}\theta_{\nu\sigma} + \varepsilon_{\mu\lambda\sigma}\theta_{\nu\rho} + \varepsilon_{\nu\lambda\rho}\theta_{\mu\sigma} + \varepsilon_{\nu\lambda\sigma}\theta_{\mu\rho}] \ , \quad (3.3)$$

que tem sua origem na linearização de (3.1), ou seja,

$$\mathcal{L}_{C.S.in} = \frac{1}{2} \frac{1}{M} h^{\mu\nu} \mathcal{P}_{\mu\nu,\rho\sigma} h^{\rho\sigma} \ ,$$

onde $M \equiv \frac{\mu}{\kappa^2}$. A tabuada de multiplicação destes operadores é mostrada na Tabela 1.

TABELA 1. Tabuada de multiplicação para os operadores tridimensionais $P^1, P^2, P^0, \bar{P}^0, \bar{\bar{P}}^0, P$. Aqui $P^{\theta\omega}_{\mu\nu,\rho\sigma} \equiv \theta_{\mu\nu}\omega_{\rho\sigma}$, $P^{\omega\theta}_{\mu\nu,\rho\sigma} \equiv \omega_{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma}$ e O é o operador nulo.

	P^1	P^2	P^0	\bar{P}^0	$\bar{\bar{P}}^0$	P
P^1	P^1	O	O	O	O	O
P^2	O	P^2	O	O	O	P
P^0	O	O	P^0	O	$P^{\theta\omega}$	O
\bar{P}^0	O	O	O	\bar{P}^0	$P^{\omega\theta}$	O
$\bar{\bar{P}}^0$	O	O	$P^{\omega\theta}$	$P^{\theta\omega}$	$2(P^0 + \bar{P}^0)$	O
P	O	P	O	O	O	$-k^6 P^2$

A expansão do operador \mathcal{O} na base $\{P^1, P^2, P^0, \bar{P}^0, \bar{\bar{P}}^0, P\}$ é trivialmente obtida usando-se as identidades tensoriais abaixo, que são obtidas a partir da própria definição dos operadores

$P^1, P^2, \dots, \bar{P}^0$ (vide Seção 2.1)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} (\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) &\equiv I_{\mu\nu,\rho\sigma} = [P^1 + P^2 + P^0 + \bar{P}^0]_{\mu\nu,\rho\sigma} , \\ \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} &= [2P^0 + \bar{P}^0 + \bar{\bar{P}}^0]_{\mu\nu,\rho\sigma} , \\ \frac{1}{k^2} (\eta_{\mu\rho}k_\nu k_\sigma + \eta_{\mu\sigma}k_\nu k_\rho + \eta_{\nu\rho}k_\mu k_\sigma + \eta_{\nu\sigma}k_\mu k_\rho) &= [2P^1 + 4\bar{P}^0]_{\mu\nu,\rho\sigma} , \\ \frac{1}{k^2} (\eta_{\mu\nu}k_\rho k_\sigma + \eta_{\rho\sigma}k_\mu k_\nu) &= [\bar{\bar{P}}^0 + 2\bar{P}^0]_{\mu\nu,\rho\sigma} , \\ \frac{1}{k^4} (k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma) &= \bar{P}^0_{\mu\nu,\rho\sigma} , \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

e a definição (3.3).

Expandindo o operador \mathcal{O} na base $\{P^1, P^2, P^0, \bar{P}^0, \bar{\bar{P}}^0, P\}$ com a ajuda das identidades (3.4) e da definição (3.3), obtemos

$$\mathcal{O} = x_1 P^1 + x_2 P^2 + x_0 P^0 + \bar{x}_0 \bar{P}^0 + \bar{\bar{x}}_0 \bar{\bar{P}}^0 + p P .$$

Agora, levando em conta que $\mathcal{O}\mathcal{O}^{-1} = I$, chegamos à conclusão que o propagador é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{-1} &= \frac{1}{x_1} P^1 + \frac{x_2}{x_2^2 - p^2 k^6} P^2 + \frac{\bar{x}_0}{x_0 \bar{x}_0 - 2\bar{\bar{x}}_0^2} P^0 + \frac{x_0}{x_0 \bar{x}_0 - 2\bar{\bar{x}}_0^2} \bar{P}^0 \\ &\quad - \frac{\bar{\bar{x}}_0}{x_0 \bar{x}_0 - 2\bar{\bar{x}}_0^2} \bar{\bar{P}}^0 - \frac{p}{x_2^2 - p^2 k^6} P . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Usando a prescrição acima vamos determinar o propagador da gravitação quadrática tridimensional aumentada por um termo de Chern-Simons. A Lagrangiana desta teoria é

$$\bar{\mathcal{L}} = -\frac{2R\sqrt{g}}{\kappa^2} + \frac{\varepsilon^{\mu\nu\lambda}}{\mu} \Gamma^\rho_{\sigma\lambda} \left(\partial_\mu \Gamma^\sigma_{\rho\nu} + \frac{2}{3} \Gamma^\sigma_{\omega\nu} \Gamma^\omega_{\nu\rho} \right) + \left(\frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 \right) \sqrt{g} , \quad (3.6)$$

onde α e β são constantes de acoplamento adimensionais. Inserindo (3.2) em (3.6) e adicionando ao resultado a Lagrangiana de fixação de gauge

$$\mathcal{L}_{g.f.} = -\lambda_1 A_\nu^2 - \frac{b}{4} \left[\lambda_2 (A^\mu_{,\mu})^2 + \lambda_3 F_{\mu\nu}^2 \right] ,$$

onde λ_1 , λ_2 e λ_3 são parâmetros de gauge, $A^\mu \equiv h^{\mu\nu}{}_{,\nu}$, $F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$ e $b \equiv \frac{\beta\kappa^2}{2}$, que corresponde ao gauge de Julve-Tonin, chegamos à conclusão que o operador \mathcal{O} tem a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{O} = & \left(-\lambda_1 k^2 - \lambda_3 \frac{b}{2} k^4 \right) P^1 + \left(k^4 \frac{b}{2} - k^2 \right) P^2 + \left(k^3 + \frac{3}{2} b k^4 + 4k^4 b c \right) P^0 \\ & + \left(-k^4 \frac{b}{2} \lambda_2 - 2\lambda_1 k^2 \right) \bar{P}^0 + \frac{P}{M} , \end{aligned}$$

e o propagador é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{-1} = & \frac{-2}{k^2 [2\lambda_1 + b\lambda_3 k^2]} P^1 + \left[-\frac{1}{k^2} + \frac{1}{1 + \frac{bM_2^2}{2}} \frac{1}{k^2 - M_2^2} + \frac{1}{1 + \frac{bM_1^2}{2}} \frac{1}{k^2 - M_1^2} \right] P^2 \\ & + \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - m^2} \right] P^0 - \frac{1}{k^2 [2\lambda_1 + \lambda_2 \frac{b}{2} k^2]} \bar{P}^0 \\ & - \left[\frac{4}{b^2 M (M_1^2 - M_2^2)} \left(\frac{1}{k^2 - M_1^2} - \frac{1}{k^2 - M_2^2} \right) \frac{1}{k^4} \right] P , \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde

$$\begin{aligned} M_1^2 & \equiv \left(\frac{2}{b^2 M^2} \right) \left[1 + bM^2 + \sqrt{1 + 2bM^2} \right] , \\ M_2^2 & \equiv \left(\frac{2}{b^2 M^2} \right) \left[1 + bM^2 - \sqrt{1 + 2bM^2} \right] , \\ m^2 & \equiv \frac{-1}{b \left(\frac{3}{2} + 4c \right)} . \end{aligned}$$

3.2 Causalidade e potencial efetivo não relativístico[18]

Se não queremos táquions no campo dinâmico podemos escolher, por exemplo, $b > 0$ e $\left(\frac{3}{2} + 4c \right) < 0$. Neste caso a teoria é causal em nível de árvore. Vamos supor então, a partir daqui, que m^2 , M_1^2 , M_2^2 e $M^2 > 0$.

O potencial efetivo não relativístico é dado por

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\tilde{m}^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{k} \mathcal{M}_{N.R.} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} , \quad (3.8)$$

onde $\mathcal{M}_{N.R.}$ é o limite não relativístico da amplitude invariante de Feynman para o processo $S + S \rightarrow S + S$, como está mostrado na Fig. 1 do Capítulo 1. Aqui S denota um bóson de massa \tilde{m} e spin 0. A amplitude invariante para este processo é dada por

$$\mathcal{M} = V^{\mu\nu}(p, -p') \mathcal{O}_{\mu\nu,\rho\sigma}^{-1} V^{\rho\sigma}(q, -q') \quad ,$$

onde

$$V_{\mu\nu}(p, p') = \frac{1}{2} \kappa \left[p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu - \eta_{\mu\nu} (p \cdot p' + \tilde{m}^2) \right]$$

é a função de vértice para o acoplamento trilinear $\mathbf{g}(k) - \phi(p) - \phi(p')$. Aqui todos os momentos são supostos incidentes. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \kappa^2 \left[-\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{bM_2^2 + 2} \frac{1}{k^2 - M_2^2} + \frac{1}{b^2M_1^2 + 2} \frac{1}{k^2 - M_1^2} \right] \\ &\times \left[(p \cdot q)(p' \cdot q') + (p \cdot q')(p' \cdot q) + p \cdot p' (\tilde{m}^2 - q \cdot q') + (\tilde{m}^2 - p \cdot p') q \cdot q' \right. \\ &+ \left. \frac{3}{2} (\tilde{m}^2 - q \cdot q') (\tilde{m}^2 - p \cdot p') - \frac{1}{4} (3\tilde{m}^2 - p \cdot p') (3\tilde{m}^2 - q \cdot q') \right] \\ &+ \frac{\kappa^2}{8} \left\{ (3\tilde{m}^2 - p \cdot p') (3\tilde{m}^2 - q \cdot q') \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - m^2} \right] \right\} \quad , \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{M}_{N.R.} = \kappa^2 \tilde{m}^4 \left[\frac{1}{2} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m^2} - \frac{1}{2 + bM_2^2} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + M_2^2} - \frac{1}{2 + bM_1^2} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + M_1^2} \right] \quad . \quad (3.9)$$

Inserindo (3.9) em (3.8) e efetuando a integração obtemos

$$U(r) = 2\tilde{m}^2 \bar{G} \left[K_0(rm) - \frac{1}{1 + \frac{bM_1^2}{2}} K_0(rM_1) - \frac{1}{1 + \frac{bM_2^2}{2}} K_0(rM_2) \right]$$

onde K_0 é a função modificada de Bessel de ordem zero.

Conseqüentemente, o potencial é dado pela expressão

$$V(r) = 2\tilde{m} \bar{G} \left[K_0(rm) - \frac{1}{1 + \frac{bM_1^2}{2}} K_0(rM_1) - \frac{1}{1 + \frac{bM_2^2}{2}} K_0(rM_2) \right] \quad .$$

Note que $V(r)$ comporta-se como

$$2\tilde{m}\bar{G} \ln \frac{M_1^{1+\frac{bM_1^2}{2}} M_2^{1+\frac{bM_2^2}{2}}}{m}$$

na origem e como

$$2\tilde{m}\bar{G} \left[\sqrt{\frac{\pi}{2mr}} e^{-rm} - \frac{1}{1+\frac{bM_1^2}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2M_1 r}} e^{-M_1 r} - \frac{1}{1+\frac{bM_2^2}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2M_2 r}} e^{-M_2 r} \right]$$

assintoticamente.

Dois comentários se encaixam aqui:

- i) ao contrário do potencial Newtoniano, $V_N = 2G\tilde{m} \ln \frac{r_0}{r_1}$, que tem uma singularidade logarítmica na origem e diverge no infinito, o potencial referente à gravitação quadrática tridimensional acrescida de um termo de Chern-Simons é extremamente bem comportado: ele é finito na origem e zero no infinito;
- ii) $V(r) \rightarrow 0$ quando α e $\beta \rightarrow 0$, o que mostra que a correspondência entre a teoria de gravitação de Einstein-Chern-Simons em 3D e a teoria de Newton é quebrada[22, 23].

Obviamente,

$$\kappa h_{00} = 2V \quad . \quad (3.10)$$

3.3 Unitariedade em nível de árvore

Usando as ferramentas desenvolvidas no Capítulo 1, vamos agora discutir a unitariedade em nível de árvore tanto da teoria tridimensional de gravitação de Einstein-Chern-Simons, como da teoria quadrática de gravitação em (2 + 1)D aumentada pelo termo topológico de Chern-Simons.

• Gravitação tridimensional de Einstein-Chern-Simons

Neste Caso

$$\mathcal{A} = g^2 \left[\frac{T^2 - T_{\mu\nu} T^{\mu\nu}}{k^2} + \frac{T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} - T^2/2}{k^2 - M^2} \right] \quad . \quad (3.11)$$

Temos portanto 2 pólos no setor de spin 2, ou seja, $k^2 = 0$ e $k^2 = M^2$. Porém,

$$Res \mathcal{A} \Big|_{k^2=0} = \mathbf{g}^2 \left[c^2 - c^2 \right]_{k^2=0} = 0 ,$$

enquanto que

$$Res \mathcal{A} \Big|_{k^2=M^2} = \mathbf{g}^2 \left\{ \frac{1}{2} [(a-b)k^2]^2 + \frac{1}{2}c^2 + \frac{k^2}{2} (e^2 - f^2)^2 - (a-b)k^2c \right\}_{k^2=M^2} . \quad (3.12)$$

Supondo então, como de praxe, que $T \geq 0$, obtemos que $c \leq 0$, o que implica em $Res \mathcal{A} \Big|_{k^2=M^2} > 0$. A teoria de Einstein-Chern-Simons é portanto unitária em nível de árvore. Esta teoria é causal e seu conteúdo de partícula abranje uma partícula massiva normal de spin 2 e uma partícula sem massa normal de spin 2. A excitação normal não é um grau dinâmico de liberdade. Deser, Jackiw e Templeton chegaram a esta mesma conclusão usando um enfoque completamente diferente[15, 16].

• Gravitação quadrática tridimensional com termo topológico

De (1.14) e (3.7) obtemos

$$\mathcal{A} = \mathbf{g}^2 \left[\frac{2}{b^2} \frac{bM_2^2 - 2}{(M_2^2 - M_1^2)M_2^2} \frac{T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}T^2}{k^2 - M_2^2} + \frac{2}{b^2} \frac{2 - bM_1^2}{(M_2^2 - M_1^2)M_1^2} \frac{T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}T^2}{k^2 - M_1^2} - \frac{\frac{1}{2}T^2}{k^2 - m^2} + \frac{4}{b^2 M_1^2 M_2^2} \frac{T^2 - T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}}{k^2} \right] ,$$

Assim, se $b > 0$ e $\frac{3}{2} + 4c < 0$ concluímos que $Res \mathcal{A} \Big|_{k^2=M_1^2} > 0$, $Res \mathcal{A} \Big|_{k^2=M_2^2} > 0$, $Res \mathcal{A} \Big|_{k^2=m^2} < 0$ e $Res \mathcal{A} \Big|_{k^2=0} = 0$.

Proposição 4. *A gravitação quadrática acrescida de um termo de Chern-Simons é não unitária em nível de árvore. Se $b > 0$ e $\frac{3}{2} + 4c < 0$ a teoria é não taquiônica e tem uma partícula normal sem massa de spin 2, uma partícula normal de spin 2 e massa M_2 , uma partícula normal de spin 2 e massa M_1 , e um ghost de spin 0 e massa m . A excitação sem massa não é um grau dinâmico de liberdade .*

Corolário 2. *A teoria de gravitação $R + R^2$ com um termo de Chern-Simons, ou seja, a teoria definida pela Lagrangiana $\mathcal{L} = -\frac{2R}{\kappa^2} \sqrt{g} + \frac{\varepsilon^{\mu\nu\lambda}}{\mu} \Gamma^\rho_{\sigma\lambda} \left(\partial_\mu \Gamma^\sigma_{\rho\nu} + \frac{2}{3} \Gamma^\sigma_{\omega\mu} \Gamma^\omega_{\nu\rho} \right) + \left(\frac{\alpha}{2} R^2 \right) \sqrt{g}$, é não unitária em nível de árvore. Se $\alpha < 0$, a teoria é causal e tem uma partícula física de spin 2 e massa 0, uma partícula física de spin 2 e massa M e um ghost de spin 0 e massa $m \equiv \sqrt{-1/2\alpha\kappa^2}$. A excitação sem massa não é um grau dinâmico de liberdade.*

Assim, chegamos à conclusão que tanto a gravitação quadrática, como a gravitação $R + R^2$ acrescidas de um termo de Chern-Simons, não são unitárias em nível de árvore.

3.4 Comentários

Uma comparação detalhada entre a gravitação quadrática tridimensional e a gravitação quadrática com termo topológico mostra claramente que o inofensivo modo escalar massivo da primeira torna-se um complicado ghost massivo de spin 0 no contexto da última, enquanto que o ghost massivo de spin 2 relacionado à gravitação quadrática tridimensional é agora substituído por duas partículas físicas massivas, ambas de spin 2. Por outro lado, se compararmos a gravitação $R + R^2$ tridimensional com a gravitação $R + R^2$ com termo de Chern-Simons, chegamos à conclusão que o termo gravitacional de Chern-Simons é responsável pela quebra de unitariedade da primeira.

Epílogo

Iniciamos este trabalho analisando as teorias quadráticas de gravitação em D dimensões. Esta investigação nos forneceu três resultados importantes:

(1) *um algoritmo para o cálculo do propagador;*

Este algoritmo converte a árdua tarefa de calcular o propagador em um simples exercício de álgebra.

(2) *uma prescrição para o estudo da unitariedade em nível de árvore;*

Este método permite analisar a unitariedade em nível de árvore de modo sistêmico.

(3) *uma expressão para o cômputo do potencial efetivo não relativístico.*

O cálculo do potencial efetivo é reduzido a quadraturas.

Utilizando estas ferramentas matemáticas chegamos a algumas conclusões interessantes sobre o comportamento destas teorias D -dimensionais no caso em que $D > 2$:

(i) *as teorias quadráticas não são unitárias em nível de árvore;*

(ii) *as teorias $R + R^2$ são unitárias em nível de árvore;*

(iii) *o modo não massivo não se propaga em $D = 3$;*

(iv) *o potencial não relativístico em $D = 4$ só concorda com o Newtoniano assintoticamente;*

(v) em $D = 3$ o potencial efetivo não se reduz ao Newtoniano; no entanto, ao contrário deste último, ele é extremamente bem comportado: é finito na origem e zero no infinito.

Comentemos, de passagem, sobre alguns desses resultados e, se for o caso, sobre suas extensões.

A não unitariedade da teoria quadrática é ainda uma questão em aberto. De fato, se os argumentos de Antoniadis e Tomboulis[35] estiverem corretos, o ghost que aparece no propagador nú em $D = 4$ é instável. Se isso for realmente verdade é de se esperar que este ghost seja instável em qualquer dimensão. Este é um ponto que merece uma investigação minuciosa. Talvez fosse mais fácil fazer esta análise primeiro em $D = 3$. Um outro ponto fundamental seria investigar a renormalizabilidade das teorias quadráticas. Stelle[34] mostrou que a gravitação quadrática é renormalizável em $D = 4$. Seria ela renormalizável em $D = 3$? E em $D > 4$? A teoria $R + R^2$, por sua vez, é unitária em nível de árvore. No entanto ela não é renormalizável em $D = 4$ [34]. É bastante provável que ela também não o seja em outras dimensões. É importante frisar que nossa análise se restringiu a teorias que são obtidas variando-se a ação com respeito à métrica. Talvez existam combinações unitárias mais ricas em dimensões mais elevadas oriundas de variações independentes da métrica e da conexão. Se este for o caso, estas teorias merecem ser amplamente pesquisadas. Seria também bastante interessante estudar a gravitação quadrática em $D = 2$.

A teoria quadrática possui, pelo menos em $D = 3$, potencial não relativístico bem comportado que, no entanto não reproduz o potencial Newtoniano correspondente. Consequentemente, ao contrário da crença vigente, uma “boa teoria de gravitação” não precisa necessariamente se reduzir a lei de Newton em dimensão diferente de quatro. Note que em $D = 3$ o potencial Newtoniano apresenta uma divergência logarítmica na origem e diverge no infinito.

Após analisarmos as teorias quadráticas em D dimensões, estudamos em detalhe as teorias gravitacionais quadráticas tridimensionais. Listamos abaixo os resultados principais encontrados:

- (i) *não trivialidade dinâmica;*
- (ii) *versão tridimensional do gauge de Teyssandier;*
- (iii) *solução geral das equações de campo linearizadas na versão tridimensional do gauge de Teyssandier;*
- (iv) *solução geral destas equações no caso de uma fonte pontual estática;*
- (v) *expressão para o ângulo de deflexão de raios luminosos;*
- (vi) *“antigravidade” e “blindagem gravitacional”;*
- (vii) *causalidade da teoria.*

Possíveis extensões destas investigações seriam:

- (1) análise Hamiltoniana completa, tanto da teoria original, quanto de sua versão linearizada, via formalismo de vínculos de Dirac;
- (2) investigação sobre a possibilidade dos universos de Gödel serem causais no contexto destas teorias quadráticas tridimensionais.;
- (3) possibilidade de propagação fotônica dispersiva no contexto da gravitação quadrática tridimensional semiclássica.

Encerramos nossa investigação, acrescentando um termo topológico de Chern-Simons à gravitação quadrática tridimensional com o intuito de obtermos uma teoria unitária em nível de árvore. A teoria resultante, porém, é não unitária: o modo escalar massivo da teoria não topológica torna-se um ghost massivo de spin 0 na teoria topológica, enquanto que o ghost massivo de spin 2 da teoria não topológica dá origem a duas partículas massivas, ambas de spin 2, no caso da teoria topológica. É interessante notar que a adição do termo de Chern-Simons à teoria tridimensional $R + R^2$, que é unitária em nível de árvore, viola a unitariedade da mesma.

Apêndice A

Equações de Campo para a Gravitação Quadrática[21]

As equações de campo da gravitação com derivadas de ordem superior em D dimensões podem ser derivadas da ação $S = S_G - S_M$, onde

$$S_G \equiv \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} \left[\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 \right] ,$$
$$S_M \equiv \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} \mathcal{L}_M ,$$

e \mathcal{L}_M é a densidade de Lagrangiana da matéria.

A variação da ação S com relação à métrica $g_{\mu\nu}$ nos dá as equações de campo. Vamos então determinar as fórmulas variacionais das integrais

$$\int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} R \quad , \quad \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} R^2 \quad \text{e} \quad \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} R_{\mu\nu}^2 .$$

(i) *Variação de $R^\rho_{\mu\nu\lambda}$*

Em um sistema geodésico, $R^\rho_{\mu\nu\lambda} = -\Gamma^\rho_{\mu\nu,\lambda} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda,\nu}$, onde a quantidade $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$, ou seja, o símbolo de Christoffel, é definido como: $\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} [g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}]$.

Logo,

$$\delta R^\rho_{\mu\nu\lambda} = -\nabla_\lambda \delta \Gamma^\rho_{\mu\nu} + \nabla_\nu \delta \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \quad ,$$
$$\delta \Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} [\nabla_\nu \delta g_{\mu\sigma} + \nabla_\mu \delta g_{\nu\sigma} - \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu}] \quad .$$

Como consequência, obtemos

$$\begin{aligned} \delta R^\rho_{\mu\nu\lambda} &= \frac{1}{2} [g^{\rho\sigma} (\nabla_\nu \nabla_\lambda - \nabla_\lambda \nabla_\nu) \delta g_{\mu\sigma} + g^{\rho\sigma} (\nabla_\nu \nabla_\mu \delta g_{\lambda\sigma} - \nabla_\lambda \nabla_\mu \delta g_{\nu\sigma}) \\ &+ \nabla_\lambda \nabla^\rho \delta g_{\mu\nu} - \nabla_\nu \nabla^\rho \delta g_{\mu\lambda}] . \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

(ii) *Variação de $R_{\mu\nu}$*

É claro,

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= \delta R^\rho_{\mu\nu\rho} \\ &= \frac{1}{2} [-\nabla^\lambda \nabla_\nu \delta g_{\mu\lambda} - \nabla^\lambda \nabla_\mu \delta g_{\nu\lambda} + g^{\rho\sigma} \nabla_{(\mu} \nabla_{\nu)} \delta g_{\rho\sigma} + \square \delta g_{\mu\nu}] , \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde $\nabla_{(\mu} \nabla_{\nu)} \equiv \frac{1}{2} (\nabla_\mu \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla_\mu)$.

(iii) *Variação de R*

Já que $\delta R = \delta (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu})$, obtemos prontamente

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \nabla^\mu \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \square \delta g_{\mu\nu} .$$

Agora, levando em conta que $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta g_{\rho\sigma}$, chegamos à conclusão que

$$\delta R = [-R^{\mu\nu} - \nabla^\mu \nabla^\nu + g^{\mu\nu} \square] \delta g_{\mu\nu} . \quad (\text{A.3})$$

(iv) *Variação de $\int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} R^2$*

Notando que

$$\delta \sqrt{(-1)^{D-1} g} = \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^{D-1} g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} , \quad (\text{A.4})$$

obtemos

$$\begin{aligned} \delta \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} R &= \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} \left[\frac{R g^{\mu\nu}}{2} - R^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} \\ &+ \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} g^{\mu\nu} \square \delta g_{\mu\nu} - \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} \nabla^\mu \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} . \end{aligned}$$

Porém,

$$\int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} g^{\mu\nu} \square \delta g_{\mu\nu} = \int d\tau_\rho \sqrt{(-1)^{D-1} g} g^{\mu\nu} \nabla^\rho \delta g_{\mu\nu} \quad ,$$

e

$$\int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} \nabla^\mu \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} = \int d\tau_\rho \sqrt{(-1)^{D-1} g} g^{\rho\mu} \nabla^\mu \delta g_{\mu\nu} \quad .$$

Vamos supor que $\delta g_{\mu\nu}$ e $\nabla^\rho \delta g_{\mu\nu}$ anulam-se na fronteira da região de integração . Teremos então

$$\delta \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} R = \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} \left[\frac{R g^{\mu\nu}}{2} - R^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} \quad . \quad (\text{A.5})$$

(v) *Variação de* $\int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} R^2$

Usando as equações (A.3) e (A.4), encontramos

$$\begin{aligned} & \delta \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} R^2 \\ &= \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} \left[\frac{g^{\mu\nu} R^2}{2} - 2R R^{\mu\nu} - 2\nabla^\mu \nabla^\nu R + 2g^{\mu\nu} \square R \right] \delta g_{\mu\nu} \quad . \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

(vi) *Variação de* $\int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} R_{\mu\nu}^2$

Obviamente,

$$\begin{aligned} \delta \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} &= \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} R_{\rho\sigma}^2 \frac{g^{\mu\nu}}{2} \delta g_{\mu\nu} \\ &+ \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} 2R^{\mu\nu} \delta R^{\mu\nu} - \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} 2R^{\mu\rho} R_\rho{}^\nu \delta g_{\mu\nu} \quad . \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} & \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} 2R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \\ &= \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} \left[-2\nabla_\lambda \nabla^\nu R^{\mu\lambda} + g^{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla_\sigma R^{\rho\sigma} + \square R^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} . \end{aligned}$$

No Apêndice B é mostrado que

$$\nabla_\lambda \nabla^\nu R^{\mu\lambda} = \frac{1}{2} \nabla^\mu \nabla^\nu R + R^{\mu\rho\lambda\nu} R_{\rho\lambda} - R^{\mu\rho} R_{\rho}{}^\nu , \quad \nabla_\sigma R^{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \nabla^\rho R .$$

Como consequência,

$$\begin{aligned} \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} 2R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} \left[-\nabla^\mu \nabla^\nu R - 2R^{\mu\rho\lambda\nu} R_{\rho\lambda} \right. \\ &\quad \left. + 2R^{\mu\rho} R_{\rho}{}^\nu + \frac{g^{\mu\nu}}{2} \square R + \square R^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} . \end{aligned}$$

Assim, a forma explícita da variação de $\int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} R_{\mu\nu}^2$ é

$$\begin{aligned} & \delta \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} R_{\mu\nu}^2 \\ &= \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} \left[R_{\rho\sigma}^2 \frac{g^{\mu\nu}}{2} - \nabla^\mu \nabla^\nu R - 2R^{\mu\rho\lambda\nu} R_{\rho\lambda} + \frac{g^{\mu\nu}}{2} \square R + \square R^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

(vii) *As equações de campo*

Juntando todas as peças, e levando em conta que

$$\delta S_M \equiv \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} \frac{T^{\mu\nu}}{2} \delta g^{\mu\nu} ,$$

encontramos que as equações de campo referentes à gravitação quadrática são dadas pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\kappa^2} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) + \frac{\alpha}{2} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^2 + 2R R_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu \nabla_\nu R - 2g_{\mu\nu} \square R \right] \\ & + \frac{\beta}{2} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\rho\sigma}^2 + \nabla_\mu \nabla_\nu R + 2R_{\mu\rho\lambda\nu} R^{\rho\lambda} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square R - \square R_{\mu\nu} \right] + \frac{1}{2} T_{\mu\nu} = 0 . \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

Apêndice B

Uma Importante Identidade Tensorial[21]

Uma identidade útil envolvendo derivadas segundas de um tensor contravariante de ordem dois é

$$A^{\alpha\beta}{}_{;\nu\mu} - A^{\alpha\beta}{}_{;\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\rho\mu\nu}A^{\rho\beta} + R^{\beta}{}_{\rho\mu\nu}A^{\alpha\rho} \quad ,$$

que pode ser reescrita como

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]A^{\alpha\beta} = R^{\alpha}{}_{\rho\mu\nu}A^{\rho\beta} + R^{\beta}{}_{\rho\mu\nu}A^{\alpha\rho} \quad .$$

Para demonstrar este resultado, notemos que num sistema geodésico são válidas as seguintes relações:

- (1) $R^{\rho}{}_{\lambda\mu\nu} = -\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu,\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu,\mu} \quad ;$
- (2) $A^{\alpha\beta}{}_{;\mu\nu} = (A^{\alpha\beta}{}_{;\mu})_{,\nu} = A^{\alpha\beta}{}_{,\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\rho\mu,\nu}A^{\rho\beta} + \Gamma^{\beta}{}_{\rho\mu,\nu}A^{\alpha\rho} \quad ;$
- (3) $A^{\alpha\beta}{}_{;\nu\mu} = A^{\alpha\beta}{}_{,\nu\mu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\rho\nu,\mu}A^{\rho\beta} + \Gamma^{\beta}{}_{\rho\nu,\mu}A^{\alpha\rho} \quad .$

Portanto,

$$A^{\alpha\beta}{}_{;\nu\mu} - A^{\alpha\beta}{}_{;\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\rho\mu\nu}A^{\rho\beta} + R^{\beta}{}_{\rho\mu\nu}A^{\alpha\rho} \quad .$$

Esta equação é covariante, e portanto válida em todos os sistemas de coordenadas.

Usando a identidade precedente, podemos mostrar facilmente que $R^{\mu\lambda;\nu}_{\lambda}$ pode ser escrito como

$$R^{\mu\lambda;\nu}_{\lambda} = R^{\mu\lambda; \nu}_{\lambda} + R^{\mu\rho\lambda\nu} R_{\rho\lambda} - R^{\mu\rho} R_{\rho}{}^{\nu} \quad .$$

Mas, como é bem conhecido,

$$\left(R^{\mu\lambda} - \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} R \right)_{;\lambda} = 0 \quad ,$$

o que implica em

$$R^{\mu\lambda}_{;\lambda} = \frac{1}{2} R^{;\mu} \quad .$$

Consequentemente,

$$R^{\mu\lambda;\nu}_{\lambda} = \frac{1}{2} R^{;\mu\nu} + R^{\mu\rho\lambda\nu} R_{\rho\lambda} - R^{\mu\rho} R_{\rho}{}^{\nu} \quad ,$$

que é a identidade que estávamos procurando. A partir deste resultado vemos que $R^{\mu\lambda;\nu}_{\lambda}$ é simétrico na troca de μ por ν , como esperado.

Referências

- [1] S. Giddings, J. Abott e K. Kuchär, *Gen. Rel. Grav.* **16**, 751 (1984).
- [2] A. Staruszkiewicz, *Acta Physica Polonica* **24**, 735 (1963).
- [3] R. Jackiw, *Nucl. Phys. B* **252**, 343 (1985).
- [4] S. Deser, R. Jackiw e G. t'Hooft, *Ann. Phys. (N.Y.)* **152**, 220 (1984).
- [5] P. Gerbert and R. Jackiw, *Commun Math. Phys.* **124**, 229 (1989).
- [6] J. Gott, III e M. Alpert, *Gen. Rel. Grav.* **16**, 243 (1984).
- [7] M. Bañados, C. Teitelboim e J. Zanelli, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1849 (1992).
- [8] S. Deser e A. Steif, *Class. Quantum Grav.* **9**, L153 (1992).
- [9] R. Cai e J. Griffiths, *J. Math. Phys.* **40**, 3465 (1999).
- [10] S. Deser e R. Jackiw, *Ann. Phys. (N. Y.)* **153**, 405 (1984).
- [11] S. Deser, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 611 (1990).
- [12] A. Accioly, A. Azeredo e H. Mukai, *Higher-derivative theory of (2 + 1)-dimensional gravity*, *Phys. Lett. A* **279**, 169-174 (2001).
- [13] A. Accioly, A. Azeredo e H. Mukai, *Quadratic Gravity in (2 + 1)D*, *Mod. Phys. Lett. A* **16**, 1449-1456 (2001).

- [14] S. Chern, *Complex Manifolds without Potential Theory*, segunda edição, Springer, Berlin, 1979.
- [15] S. Deser, R. Jackiw e S. Templeton, Phys. Rev. Lett. **48**, 975 (1982).
- [16] S. Deser, R. Jackiw e S. Templeton, Ann. Phys. (N.Y.) **140**, 372 (1982).
- [17] A. Accioly, H. Mukai e A. Azeredo, *Propagator, tree-level unitarity and effective nonrelativistic potential for three-dimensional higher-derivative gravity theories augmented by a gravitational Chern-Simons term*, Phys. Lett. B **495**, 394-400 (2000).
- [18] A. Accioly, H. Mukai e A. Azeredo, *Quadratic gravity in $(2 + 1)D$ with a topological Chern-Simons term*, J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 7213-7219 (2001).
- [19] A. Accioly, A. Azeredo e H. Mukai, *Propagator, tree-level unitarity and effective nonrelativistic potential for higher-derivative gravity theories in D dimensions*, J. Math. Phys. **43**, 473-491 (2002).
- [20] A. Accioly, H. Mukai e A. Azeredo, *Effective non-relativistic potential for higher-derivative gravity in D dimensions*, Class. Quantum Grav. **18**, L31-L36 (2001).
- [21] A. Accioly, A. Azeredo, H. Mukai, e E. de Rey Neto, *Scattering of Photons by an External Gravitational Field in the Framework of Higher-Derivative Gravity*, Prog. Theor. Phys. **104**, 103-122 (2000).
- [22] G.'t Hooft e M. Veltman, Ann. Inst. Henri Poincaré **20**, 69 (1974).
- [23] M. Goroff e A. Sagnotti, Phys. Lett. B **160**, 81 (1985).
- [24] G.'t Hooft e M. Veltman, Nucl. Phys. B **44**, 189 (1972).
- [25] K. Stelle, Gen. Rel. Grav. **9**, 353 (1978).
- [26] A. Accioly e A. Gonçalves, J. Math. Phys. **28**, 1547 (1987).

- [27] A. Accioly e G. Matsas, Phys. Rev. D. **38**, 1083 (1988).
- [28] A. Accioly, H. Mukai e H. Blas, Nuovo Cimento B **115**, 1235 (2000).
- [29] A. Accioly e H. Blas, Phys. Rev. D **64**, 067701 (2001).
- [30] A. Accioly, A. Azeredo, E. de Rei Neto e H. Mukai, *Bending of Light in the Framework of $R + R^2$ Gravity*, Braz. Jour. of Phys. **28**, 496-504 (1998).
- [31] A. Accioly, S. Ragusa, E. de Rey Neto e H. Mukai, Nuovo Cimento B **114**, 595 (1999).
- [32] R. Rivers, Nuovo Cimento **34**, 387 (1964).
- [33] P. van Nieuwenhuizen, Nucl. Phys. B **60**, 478 (1973).
- [34] K. Stelle, Phys. Rev. D **16**, 953 (1977).
- [35] I. Antoniadis e E. Tomboulis, Phys. Rev. D **33**, 2756 (1986).
- [36] J. Alonso, F. Barbero, J. Julve, e A. Tiemblo, Class. Quantum Grav. **11**, 865 (1994).
- [37] A. Accioly, S. Ragusa, H. Mukai, and E. de Rey Neto, Int. J. Theor. Phys. **39**, 1601 (2000).
- [38] L. Eisenhart, *Riemannian Geometry* (Princeton U. P., Princeton, New Jersey, 1949), pag. 92.
- [39] J. Julve and M. Tonin, Nuovo Cimento B **46**, 137 (1978).
- [40] F. Nunes e G. Pires, Phys. Lett. B **301**, 339 (1993).
- [41] C. Pinheiro, G. Pires, e F. Rabelo de Carvalho, Braz. J. Phys. **27**, 14 (1997).
- [42] I. Gradshteyn e I. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, 1994), quinta edição.
- [43] A. Tikhonov e A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics* (Dover, New York, 1990).

-
- [44] P. Teyssandier, *Class. Quantum Grav.* **6**, 219 (1989).
- [45] B. Linet e P. Teyssandier, *Class. Quantum Grav.* **9**, 159 (1992).
- [46] T. Appelquist e R. Pisarki, *Phys. Rev. D* **23**, 2291 (1981).
- [47] D. Evens e G. Kunstatler, *Phys. Rev. D* **37**, 435 (1987).
- [48] B. Whitt, *Phys. Lett. B* **145**, 176 (1984).