

ÉRIKA PATRÍCIA DANTAS DE OLIVEIRA

Ciclos Limites de Campos de Vetores Polinomiais Cúbicos e Quadráticos

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Sistemas Dinâmicos junto ao programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva
Professor Doutor
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Maurício Firmino Silva Lima
Professor Doutor
Universidade Federal do ABC

Prof^a. Dr^a. Luci Any Francisco Roberto
Professor Doutor
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 05 de março de 2009.

Aos meus pais,
Manoel Fabricio de
Oliveira e Maria Antonia
Dantas de Oliveira,
dedico.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por me conceder a graça de concluir mais esta jornada, por ter me fortalecido nos momentos em que mais precisei e pelas pessoas que colocou em meu caminho, que com certeza, foram fundamentais para esta conquista. Em especial, quero deixar meus sinceros agradecimentos:

A minha família, meus pais, Manoel e Maria, a meu irmão Rafael e a meu namorado Jorge por serem meu porto seguro durante esta fase difícil e, ao mesmo tempo, maravilhosa. Amo todos vocês.

Obrigada, Prof. Dr. Paulo Ricardo, pela orientação e acolhida, pela paciência e amizade durante este período, por todo aprendizado e conselhos acadêmicos, profissionais e humanos.

Agradeço à banca examinadora: Prof. Dra. Luci Any Francisco Roberto e Prof. Dr. Maurício Firmino Silva Lima pela disponibilidade.

Aos professores do IBILCE/UNESP - São José do Rio Preto, em especial ao professor Dr. Cláudio Aguinaldo Buzzi, pelos primeiros contatos.

Aos professores do Departamento de Matemática da FCT/UNESP - Presidente Prudente, pela minha formação, em especial ao professor Dr. José Roberto Nogueira.

Aos amigos da pós-graduação, Marisa, Ana Paula, Carol, Neila, Ruidson, Oyrán, Rodiak, Lucas e Jairo, pela agradável convivência.

À FAPESP, pelo apoio financeiro.

A todos que de alguma forma contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Que Deus os abençoe.

Resumo

Apresentamos dois critérios para estudar a não-existência, a existência e a unicidade dos ciclos limites dos campos de vetores planares. Aplicamos estes critérios para algumas famílias de campos de vetores polinomiais quadráticos e cúbicos, e computamos uma fórmula explícita para o número de ciclos limites que bifurcam a partir do centro $x' = -y$, $y' = x$, quando tratamos do sistema $x' = -y + \varepsilon \sum_{i+j=1}^n a_{ij} x^i y^j$, $y' = x + \varepsilon \sum_{i+j=1}^n a_{ij} x^i y^j$. Além disso, usando o segundo critério, apresentamos um método para obter a forma do ciclo limite bifurcado a partir do centro.

Abstract

We present two new criteria for studying the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles of planar vector fields. We apply these criteria to some families of quadratic and cubic polynomial vector fields, and to compute an explicit formula for the number of limit cycles which bifurcate out of the linear centre $x' = -y$, $y' = x$, when we deal with the system $x' = -y + \varepsilon \sum_{i+j=1}^n a_{ij}x^i y^j$, $y' = x + \varepsilon \sum_{i+j=1}^n a_{ij}x^i y^j$. Moreover, by using the second criterion we present a method to derive the shape of the bifurcated limit cycles from a centre.

Sumário

1	Introdução e apresentação dos principais resultados	7
2	Resultados Preliminares	15
2.1	Aplicação de Poincaré	16
2.2	Os Teoremas de Poincaré e Bendixson	24
3	Primeiro critério	40
4	Ciclos limites de sistemas quadráticos	43
5	Ciclos limites dos sistemas de Vorobev	56
6	O fator de integração inverso	68
6.1	Sistemas Hamiltonianos	68
6.2	O segundo critério para existência de ciclos limite	73
7	Bifurcações de ciclos limites a partir de centros	78
8	Apêndice: Órbitas periódicas no $\mathbb{R}^3$	94
	Referências Bibliográficas	106

Capítulo 1

Introdução e apresentação dos principais resultados

No presente trabalho, estudamos sistemas de equações diferenciais polinomiais no $\mathbb{R}^2$

$$x' = \sum_{i+j=0}^n a_{ij} x^i y^j, \quad y' = \sum_{i+j=0}^n b_{ij} x^i y^j$$

onde $x = x(t)$, $y = y(t)$, e a_{ij} , b_{ij} são constantes reais. Será dada ênfase aos sistemas polinomiais de graus $n = 2$ e $n = 3$.

W. A. Coppel, em 1966, em seu artigo sobre os sistemas com $n = 2$, denominou tais sistemas por *sistemas quadráticos*. Desde então, refere-se desta maneira a tais sistemas. Além disso, os sistemas polinomiais com $n = 3$ serão denominados *sistemas cúbicos*.

Na teoria qualitativa das equações diferenciais, as pesquisas sobre *ciclos limites* são uma parte difícil e interessante. A noção de ciclo limite para campos vetoriais planares foi introduzida por Poincaré. No fim da década de 1920, van der Pol, Liénard e Andronov provaram que uma trajetória fechada de uma oscilação contínua ocorrida em um circuito tubular à vácuo era um ciclo limite como havia idealizado Poincaré.

Após tal verificação, matemáticos e físicos estudaram extensivamente a não-existência, a existência e a unicidade e outras propriedades de ciclos limites. Recentemente, também tem sido alvo de estudos de químicos, biólogos e economistas.

O método de Bendixson-Dulac é o mais conhecido para provar a não-existência de ciclos limites em uma região conexa simples, além de algumas variações deste. Veja o

Capítulo 2.

Em geral, para um dado sistema, o problema da unicidade de um ciclo limite é mais difícil que o problema da existência.

Alguns critérios para a unicidade de ciclos limites podem ser dados usando a estabilidade ou instabilidade do ciclo limite. Para a unicidade, existem métodos desenvolvidos por Poincaré, Andronov, Cherkas, Levinson, Leontovich, Liénard, Massera, Sansone, Zhang Zhifen e muitos outros. Mas, em geral, as condições suficientes desses métodos são muito restritivas.

Isto pode ser observado nos teoremas provados por Liénard, em 1928, e por N. Levinson (1914-1975) e O. K. Smith, em 1942, há um único ciclo limite assintoticamente estável no retrato de fase do sistema

$$x' = y, \quad y' = -F(x)y - G(x)$$

se as funções $F(x)$ e $G(x)$ satisfazem as seguintes condições:

1. Ambas as funções são continuamente diferenciáveis para todo x ;
2. $G(x)$ é uma função ímpar;
3. $G(x) > 0$ para todo $x > 0$;
4. $F(x)$ é uma função par;
5. A função $H(x) = \int_0^x F(s)ds$ deve ter uma raiz positiva em $x = a$, negativa para $0 < x < a$, positiva e não decrescente para $x > a$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = +\infty$

Observação 1. Na verdade, Liénard estudou o caso $G(x) = x$.

Um dos melhores métodos para estudar a não-existência, a existência e a unicidade de ciclos limites é uma análise da *aplicação de primeiro retorno de Poincaré* definida em uma seção transversal do fluxo planar. Em geral, tal análise não é fácil.

Problemas mais difíceis aparecem quando um sistema planar tem mais do que um ciclo limite e quando tentamos compreender suas distribuições no plano. De fato, o problema

sobre ciclos limites mais famoso é devido à Hilbert: “Qual é o número máximo de ciclos limites de um campo vetorial polinomial de grau menor que n e quais são suas posições relativas?” Tal problema foi proposto no Congresso Internacional de Matemática de Paris em 1900.

Outros problemas interessantes para estudar são o número de ciclos limites que bifurcam de um ponto crítico, de um gráfico de separatrizes (linha que divide o retrato de fase em duas regiões de comportamento assintótico distinto) ou de um centro.

O principal objetivo deste trabalho é apresentar dois novos critérios para estudar a não-existência, a existência e a unicidade dos ciclos limites de campos vetoriais planares. Aplicaremos estes dois critérios para estudar algumas famílias de campos vetoriais de polinômios quadráticos e cúbicos.

Estudaremos também o número de ciclos limites que bifurcam de um centro linear $X(x, y) = (-y, x)$ quando o perturbamos por um campo vetorial polinomial de grau n da seguinte maneira:

$$X(x, y) = \left(-y + \varepsilon \sum_{i+j=1}^n (a_{ij}x^i y^j), x + \varepsilon \sum_{i+j=1}^n (b_{ij}x^i y^j)\right).$$

Mostraremos, também, como usar o segundo critério para encontrarmos a forma do ciclo limite bifurcado.

Consideramos apenas aplicações V , de classe C^1 , definidas em $\mathcal{U}$, um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^2$, tal que o conjunto $\Sigma = \{(x, y) \in \mathcal{U} : V(x, y) = 0\}$ é localmente uma variedade unidimensional a menos de um conjunto de medida zero.

Seja (P, Q) um campo de vetores polinomial definido em $\mathcal{U}$. Um método padrão para determinar uma solução explícita do campo (P, Q) é encontrar uma solução $V = V(x, y)$, de classe C^1 , da equação diferencial parcial linear

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = RV, (x, y) \in \mathcal{U} \quad (1.1)$$

para alguma aplicação $R = R(x, y)$, de classe C^1 . A curva $V(x, y) = 0$ é formada por trajetórias do campo (P, Q) . De fato, se $V(x, y) = 0$ então

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \Rightarrow (P, Q) \perp \nabla V(x, y).$$

Temos que $\nabla V(x, y)$ é perpendicular as curvas de nível. Logo, (P, Q) é tangente à curva $V(x, y) = 0$.

Muitos autores usam a equação (1.1) para encontrar soluções algébricas do campo de vetores (P, Q) . Enquanto outros tem usado a equação (1.1) quando RV não muda de sinal para encontrar uma orientação ou uma função de Liapunov para obter informações sobre o conjunto limite de órbitas.

No primeiro critério, nosso próximo teorema, usamos a equação (1.1) para estudar as soluções periódicas do campo de vetores (P, Q) .

Teorema 1.0.1 (Primeiro Critério). *Sejam (P, Q) um campo de vetores polinomial definido no subconjunto aberto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$, $(u(t), v(t))$ uma solução periódica de (P, Q) de período T , $R : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação C^1 tal que $\int_0^T R(u(t), v(t))dt \neq 0$ e $V = V(x, y)$ uma solução de classe C^1 da equação diferencial parcial linear (1.1). Então, a trajetória fechada $\gamma = \{(u(t), v(t)) \in \mathcal{U} : t \in [0, T]\}$ está contida em $\Sigma = \{(x, y) \in \mathcal{U} : V(x, y) = 0\}$ e γ não está contida em um período anular de (P, Q) . Além disso, γ é um ciclo limite.*

Veja o Capítulo 3 para definições e a prova do Teorema 1.0.1.

Observe que, ao conhecermos uma solução da equação (1.1), o Teorema 1.0.1 nos fornece informações sobre as soluções periódicas de (P, Q) , pois se γ é uma trajetória fechada, então γ está contida em Σ ou $\int_\gamma Rdt = 0$.

Nos Capítulos 4 e 5, mostraremos como determinar a não existência, a existência e a unicidade de ciclos limites para várias famílias de campos de vetores polinomiais quadráticos e cúbicos, respectivamente, usando o Teorema 1.0.1.

Atualmente, tem-se estudado extensivamente os ciclos limites de campos de vetores polinomiais.

Embora alguns exemplos de retrato de fase de sistemas quadráticos podem ser encontrados no trabalho de Poincaré, o primeiro artigo exclusivamente sobre estes sistemas foi publicado em 1904 por Büchel, ver [2], ainda que tenha sido principalmente uma coleção de exemplos.

Somente a partir da década de 1950 é que houve um grande desenvolvimento da teoria qualitativa para campos de vetores polinomiais quadráticos. De fato, aproximadamente oito por cento dos artigos científicos matemáticos tem sido publicados sobre este assunto.

No fim do século 20 houve um crescimento na produção de artigos sobre o tema conforme se verifica no gráfico apresentado na Figura (1.1).

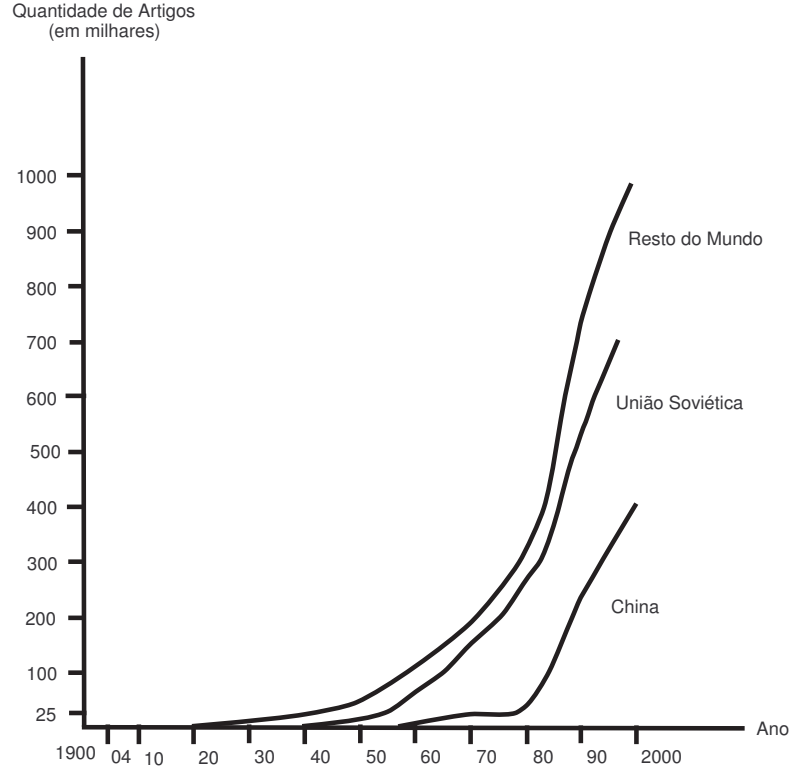


Figura 1.1: Número acumulado de artigos sobre sistema quadráticos

A existência e a não-existência de ciclos limites é a principal dificuldade de compreender os campos de vetores polinomiais quadráticos.

Segundo [17], os sistemas quadráticos

$$X(x, y) = (\delta x - y + lx^2 + mxy + ny^2, x(1 + ax + by))$$

podem apresentar ciclos limites nos seguintes casos:

- Família I: $a = b = 0$;
- Família II: $a \neq 0$ e $b = 0$;
- Família III: $b \neq 0$.

As seguintes proposições e o corolário serão provados no Capítulo 4, utilizando o Teorema 1.0.1.

Proposição 1.0.2. *Suponha que para o sistema quadrático*

$$x' = \delta x - y + lx^2 + mxy + ny^2, \quad y' = x + bxy$$

com $l \cdot n \geq 0$ e $l^2 + n^2 > 0$, exista um polinômio $V(x, y)$ que satisfaz a equação (1.1), para algum $R = \alpha x + \beta y$, com $\beta \neq 0$. Se este sistema quadrático tem trajetórias fechadas, então elas estão contidas em

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : V(x, y) = 0\}.$$

Corolário 1.0.3. *O sistema quadrático*

$$x' = \delta x - y + x^2 + mxy + ny^2, \quad y' = x + bxy$$

com

$$b = \frac{(1+n)^2 + \delta(m+mn+\delta n)}{\delta^2 n}$$

onde $\delta n(1+n) \neq 0$ e $n > 0$, não tem trajetórias fechadas.

Proposição 1.0.4. *Seja (P, Q) um campo de vetores quadráticos. Se existe uma cônica $P(x, y) + \lambda_0 Q(x, y) = 0$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ com traço vazio ou com somente um único ponto, então o campo de vetores quadráticos (P, Q) não tem trajetórias fechadas.*

Proposição 1.0.5. *Considere o sistema quadrático*

$$x' = \delta x - y + lx^2 + mxy + ny^2, \quad y' = x(1 + ax + by)$$

com $\delta^2 - 4 < 0$ e γ uma trajetória fechada deste sistema. Se

$$R = \frac{\delta(x^2 - \delta xy + y^2) + (2l - \delta a)x^3 + (2(m + a) - \delta(b + l))x^2y + (2(n + b) - \delta m)xy^2 - \delta ny^3}{x^2 - \delta xy + y^2}$$

então $\int_{\gamma} R dt = 0$.

Veja os comentários sobre a Proposição 1.0.5 no Capítulo 4.

No Capítulo 5, estudaremos os ciclos limites de uma família de campo de vetores polinomiais cúbicos dependendo de dois parâmetros, ver Proposição 5.0.18. Esta família foi considerada por Vorobev.

O próximo teorema nos dá o segundo critério para estudar os ciclos limites. Uma primeira versão heurística deste resultado para campos de vetores planares analíticos é devida a Giacomini e Viano, ver [8]. A demonstração que apresentamos aqui generaliza a prova segundo Françoise, a qual é válida para o caso analítico.

Teorema 1.0.6 (Segundo Critério). *Seja (P, Q) um campo de vetores polinomial definido no subconjunto aberto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$. Seja $V = V(x, y)$ uma solução, de classe C^1 , da equação diferencial parcial linear*

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V. \quad (1.2)$$

Se γ é um ciclo limite de (P, Q) , então γ está contida em

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathcal{U} : V(x, y) = 0\}.$$

Observação 2. Note que o Primeiro Critério, dado pelo Teorema 1.0.1, é sobre trajetórias fechadas, enquanto que o Segundo Critério, dado pelo Teorema 1.0.6, é sobre ciclos limites.

O Segundo Critério está provado no Capítulo 6. A função V é chamada de *fator de integração inverso*.

Finalmente, no Capítulo 7, estudaremos a bifurcação de ciclos limites do centro $X(x, y) = (-y, x)$, quando o perturbamos por um campo de vetores polinomial de grau n tendo a origem como um ponto singular. Mais concretamente, consideramos o sistema perturbado

$$X(x, y) = \left(-y + \varepsilon \sum_{i+j=1}^n (a_{ij} x^i y^j), x + \varepsilon \sum_{i+j=1}^n (b_{ij} x^i y^j) \right)$$

e definimos o polinômio de $(m+1)$ -ésimo grau

$$p(\rho) = \sum_{j=0}^m p_j \rho^{j+1}$$

onde

$$p_j = \frac{1}{2^j (j+1)!} \sum_{k=0}^j (2j+1-2k)!! (2k-1)!! (a_{2j+1-2k, 2k} + b_{2k, 2j+1-2k})$$

e $n = 2m+1$ se n é ímpar ou $n = 2m+2$ se n é par.

Definição 1.0.7. *Se r é um número natural ímpar, então o fatorial duplo $r!!$ é definido por*

$$r!! = r(r-2)(r-4) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1.$$

Além disso convencionamos que

$$(-1)!! = 1.$$

Para tal sistema perturbado usando o Segundo Critério podemos provar o seguinte resultado:

Teorema 1.0.8. *Dado ε suficientemente pequeno, se $p(\rho)$ tem h raízes reais positivas simples, $\rho = r_i^2$ (com $0 \leq h \leq m$, $i = 1, 2, \dots, h$) e $\rho = 0$ é uma raiz simples, então o sistema*

$$X(x, y) = (-y + \varepsilon \sum_{i+j=1}^n (a_{ij}x^i y^j), x + \varepsilon \sum_{i+j=1}^n (b_{ij}x^i y^j))$$

tem no máximo h ciclos limites que são assintóticos aos círculos de raio r_i , centrados na origem, quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

O Teorema 1.0.8 é provado no Capítulo 7. Neste capítulo, veremos que nosso método de provar o Teorema 1.0.8 (baseado no Segundo Critério) também pode dar a forma global da bifurcação de ciclos limites em função de x , y e ε (veja a Proposição 7.0.8 para mais detalhes). Esta forma global não pode ser obtida pelos métodos usuais aplicados para o estudo das bifurcações dos ciclos limites de trajetórias fechadas adjacente ao centro, como os métodos baseados na Aplicação do Retorno de Poincaré, na Integral de Poincaré-Melnikov ou na Integral Abelianas.

Do Teorema 1.0.8, podemos obter como corolários alguns resultados sobre os sistemas de Liénard obtidos por [11] e [1], ver Capítulo 7.

Finalizamos este capítulo introdutório observando que os resultados principais são válidos para campos de vetores de classe C^1 . Por simplicidade, nos restringimos a classe dos campos polinomiais.

Capítulo 2

Resultados Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e alguns resultados elementares sobre órbitas periódicas e ciclos limites.

Seja $\mathcal{U}$ um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^2$. Um campo de vetores polinomial (P, Q) definido em $\mathcal{U}$ é uma aplicação que associa para cada ponto $(x, y) \in \mathcal{U}$ um vetor $(P(x, y), Q(x, y))$ em $\mathbb{R}^2$, onde

$$P(x, y) = \sum_{i+j=0}^n a_{ij}x^i y^j, \quad Q(x, y) = \sum_{i+j=0}^n b_{ij}x^i y^j$$

são polinômios de duas variáveis.

Definição 2.0.9. *O sistema*

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y) \tag{2.1}$$

é chamado de sistema diferencial associado ao campo de vetores (P, Q) , onde $(x, y) \in \mathcal{U}$.

Definição 2.0.10. *Se a solução $x = u(t)$, $y = v(t)$ do sistema (2.1) é uma função periódica não constante de t , ela é dita periódica. O lugar geométrico desta solução em U é uma trajetória fechada do sistema (2.1).*

Definição 2.0.11. *Se a trajetória fechada do sistema (2.1) é isolada no conjunto de todas trajetórias fechadas do sistema (2.1), dizemos que a trajetória fechada do sistema (2.1) é um ciclo limite.*

Definição 2.0.12. Um período anular para o sistema (2.1) é um anel fechado folheado por trajetórias fechadas do sistema (2.1)

Definição 2.0.13. Sejam $X = (P, Q) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo polinomial planar no aberto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ e $x \in \mathcal{U}$, com trajetória definida em $[0, \infty)$. O conjunto ω -limite do ponto $x \in \mathcal{U}$ é o conjunto $\omega(x)$ dos pontos $y \in \mathcal{U}$ para os quais existe uma seqüência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que

$$\varphi(t_n, x) \rightarrow y.$$

Analogamente, para um ponto $x \in \mathcal{U}$ com trajetória definida em $(-\infty, 0]$, definimos o conjunto α -limite como sendo o conjunto $\alpha(x)$ dos pontos $y \in \mathcal{U}$ para os quais existe uma seqüência $t_n \rightarrow -\infty$ tal que

$$\varphi(t_n, x) \rightarrow y.$$

Notação: O conjunto $\omega(x)$ é também denotado por $L_\omega(x)$. Analogamente, o conjunto $\alpha(x)$ é também denotado por $L_\alpha(x)$.

Observação 1. Dado $x \in \mathcal{U}$, $\varphi_x : I(x) \rightarrow \mathcal{U}$ denotará a trajetória maximal de X por x , com $I(x) = (\alpha, \beta)$. Convencionamos que, ao usarmos $\omega(x)$, temos que $[0, +\infty) \subseteq I(x)$. Denotamos por $\mathcal{O}^+(x)$ a semi-órbita positiva de X por x , isto é, $\{\varphi_x(t) : 0 \leq t \leq \beta\}$.

2.1 Aplicação de Poincaré

Nesta seção, apresentaremos a aplicação de Poincaré, que é uma das principais ferramentas para estudar o comportamento das órbitas do campo na vizinhança de uma órbita periódica.

Seja $X = (P, Q)$ um campo de vetores polinomial definido em um aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ com fluxo $\phi_t : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ definido para cada $t \in \mathbb{R}$, ou seja, para cada $x \in \mathcal{U}$, a solução de (P, Q) , $x(0) = x$ está definida para todo tempo t .

Definição 2.1.1. Seja $0 \in I(x)$, onde $I(x)$ é um intervalo máximo. Se existir $t \in \mathbb{R}$, tal que $t \in I(x)$ para cada $x \in \mathcal{U}$, dizemos que o fluxo no tempo t associado ao campo de vetores (P, Q) em $\mathcal{U}$ é a aplicação

$$\phi_t : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

definida da seguinte maneira: dado $x \in \mathcal{U}$, tomamos a solução máxima $x : I(x) \rightarrow \mathcal{U}$ de (P, Q) , com $x(0) = x$ e então definimos

$$\phi_t(x) = x(t).$$

Observação 1. Dizemos que a solução no intervalo máximo é a solução máxima do campo (P, Q) por x_0 , ou seja, a trajetória do campo (P, Q) por x_0 .

Observação 2. Enquanto a trajetória $x(*)$ descreve a posição da solução em função da variável temporal t para $x = x(0)$ fixado, o fluxo $\phi_t(*)$ no tempo t , por outro lado, exerce um papel inverso: fixado t , descreve a posição das soluções em função da condição inicial x , ou seja, diz onde se encontra a trajetória (que começam em x no tempo 0) depois de passado o tempo t .

H é uma seção transversal de X em $X(x_0)$ se H for uma reta passando por x_0 na direção $v \in \mathbb{R}^2$ e tal que $X(x_0) \notin [v]$. Definição análoga pode ser dada para campos em dimensões maiores. As Figuras (2.1) e (2.2) mostram o que ocorre em dimensões 2 e 3, respectivamente.

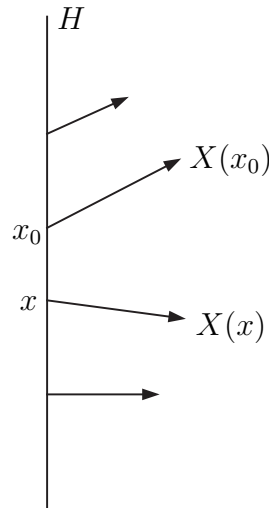


Figura 2.1: Seção transversal no plano.

Note que $X(y) \notin [v]$ para y suficientemente próximo de x devido a continuidade do campo. Assim, obtemos o conceito de seção transversal local.

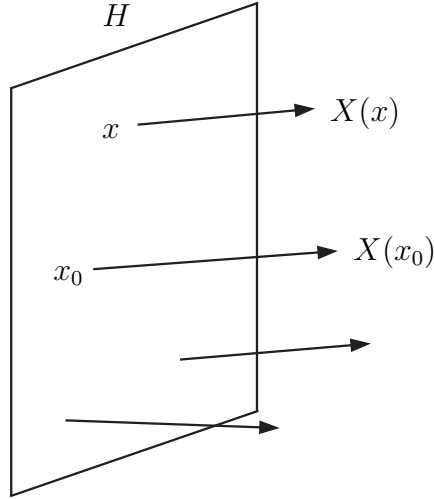


Figura 2.2: Seção transversal no espaço.

Definição 2.1.2. *Uma seção transversal local, ou simplesmente, uma seção local do campo X num ponto $x \in \mathcal{U}$ é um conjunto $S = H \cap W \subseteq \mathcal{U}$ obtida pela intersecção de uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^2$ de x em $\mathcal{U}$ com uma reta H por x tal que, para cada $y \in S = H \cap W$, colocando a origem do vetor $X(y)$ no ponto y , temos $X(y) \notin H$.*

Observe que sempre existe uma seção local de X por qualquer ponto não singular do campo. E mais, se S é uma seção local de X em x , então $X(y) \neq 0$ para cada $y \in S$. Veja as Figuras (2.1) e (2.2), onde ilustramos o comportamento básico das seções locais de campos no plano e no espaço.

Consideremos uma órbita periódica $\gamma \subset \mathcal{U}$ de X com período t_0 , um ponto $x \in \gamma$ e uma seção local $S = H \cap W$ de X por x . A trajetória $\phi_t(x)$ de X por x retorna a x para $t = t_0$ de modo que o difeomorfismo ϕ_{t_0} carrega, junto com x , todos os pontos da seção local S de volta para S . A imagem $\phi_{t_0}(S)$ de S por ϕ_{t_0} não precisa coincidir com S , mas certamente é tangente a S em x , já que a aplicação derivada de ϕ_{t_0} em x leva $X(x)$ em $X(\phi_{t_0}(x)) = X(x)$.

Note que as trajetórias por pontos de S próximos de x levam um tempo não necessariamente igual a t_0 para voltar à seção local, mas apenas aproximadamente igual a t_0 , pela continuidade do fluxo.

Podemos projetar $\phi_{t_0}(S)$ utilizando um fluxo tubular, em x sobre H ao longo das

trajetórias de X e, assim, obter uma aplicação π de S em H . A aplicação $\pi : S \rightarrow H$ associa, a cada ponto $y \in S$, o ponto $z = \pi(y) = \phi_t(y) \in H$ tal que $t > 0$ é o menor valor positivo de t para o qual $\phi_t(y) \in H$. Em particular, $\pi(x) = \phi_{t_0}(x) = x$ é um ponto fixo da aplicação π . Como $\phi_t(x)$ é uma aplicação contínua em t e em x , obtemos que π está bem definida numa pequena vizinhança de x na seção local S que, sem perda de generalidade, podemos supor que é a própria seção local S . Mais do que isso, $\pi : S \rightarrow H$ é uma aplicação bijetora sobre a imagem $\pi(S) \subseteq H$ pela unicidade de soluções e, pela continuidade do fluxo, até um homeomorfismo.

A aplicação $\pi : S \rightarrow H$ é denominada *aplicação de primeiro retorno* ou *aplicação de Poincaré* de (P, Q) na seção local S e é a principal ferramenta para estudar o comportamento das órbitas do campo na vizinhança de γ .

As trajetórias de (P, Q) na vizinhança de γ possuem vários comportamentos, todos refletidos no comportamento da aplicação de Poincaré. Por exemplo, se $\pi(y) = y$ para todo $y \in S$, então todas as órbitas de (P, Q) que passam por S são periódicas, não necessariamente de mesmo período, veja a Figura (2.3).

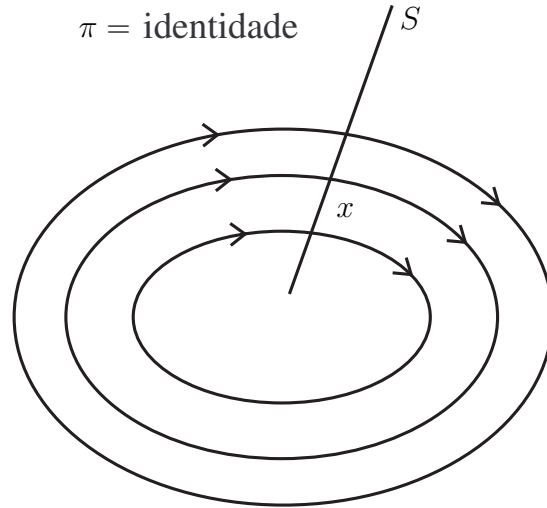


Figura 2.3: Um fluxo que preserva área.

A única coisa que não pode ocorrer numa seção local é o exemplificado na Figura (2.4), no caso bidimensional, pois os vetores do campo sempre devem apontar para o mesmo lado da seção local. Isto decorre da continuidade de X e da definição de seção local: se

o campo em $x_1 \in S$ e em $x_2 \in S$ apontassem para lados distintos da seção S , então, por continuidade, deveria haver um ponto num caminho ligando x_1 a x_2 em S , no qual o campo é tangente a S , o que não é permitido.

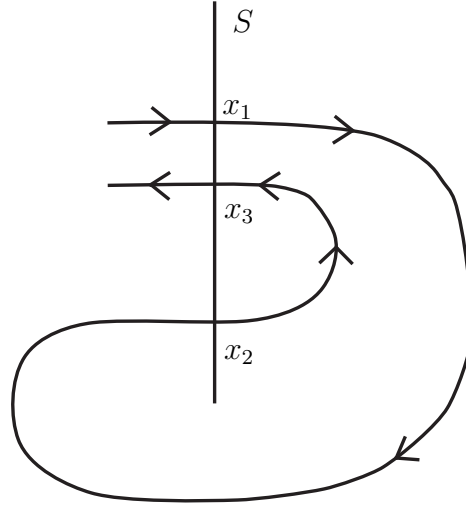


Figura 2.4: O que não pode ocorrer com uma seção local.

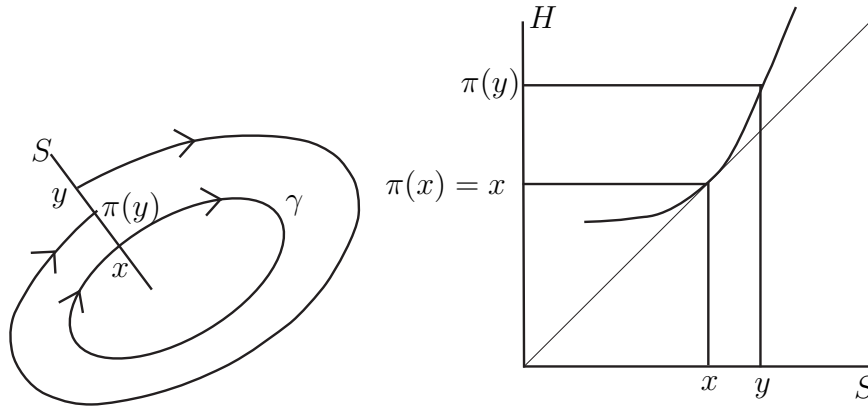


Figura 2.5: Uma seção local e sua aplicação de Poincaré.

Exemplo 1. Seja γ uma órbita periódica de um campo de vetores definido no plano com a aplicação de Poincaré correspondente, veja a Figura (2.5). A seção transversal H é, portanto, unidimensional e a seção local é um pequeno intervalo S que contém x em seu interior. Obtemos algumas possibilidades de comportamento das trajetórias vizinhas a γ .

Na Figura (2.6), as trajetórias em torno de γ tendem a se aproximar de γ , enquanto que, na Figura (2.7), as trajetórias em torno de γ tendem a se afastar de γ . $\square$

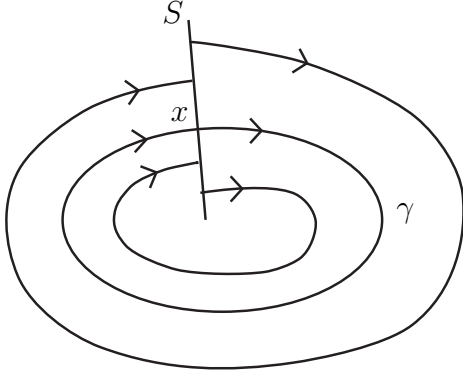


Figura 2.6: Uma órbita periódica atratora.

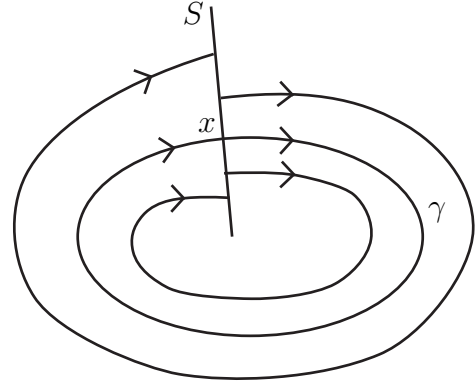


Figura 2.7: Uma órbita periódica repulsora.

Dizemos que a trajetória periódica é um ciclo limite, atrator no primeiro caso e repulsor no segundo. Este comportamento é obtido pela aplicação de primeiro retorno π e, na Figura (2.8), ilustramos esta aplicação nos casos das órbitas periódicas dadas nas Figuras (2.6), (2.7) e (2.9), respectivamente.

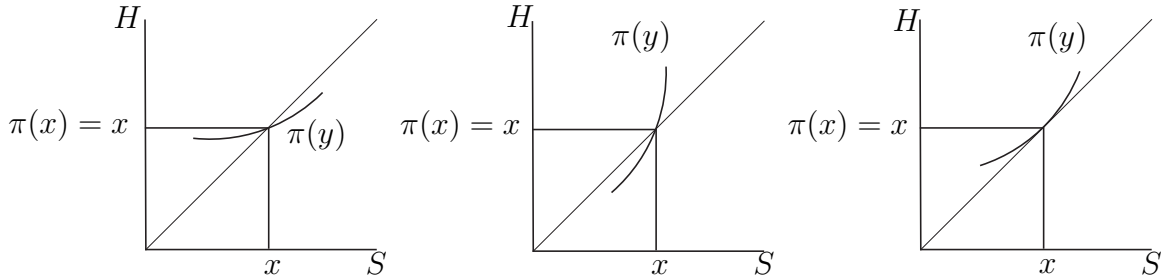


Figura 2.8: Três aplicações de Poincaré.

A terceira aplicação de Poincaré, na Figura (2.8), reflete o comportamento de um campo, veja a Figura (2.9), no qual as trajetórias em torno de γ tem uma tendência de se afastarem de γ por um lado, e de se aproximarem de γ pelo outro lado. Observe a tangência do gráfico π com a diagonal no terceiro gráfico da Figura (2.8).

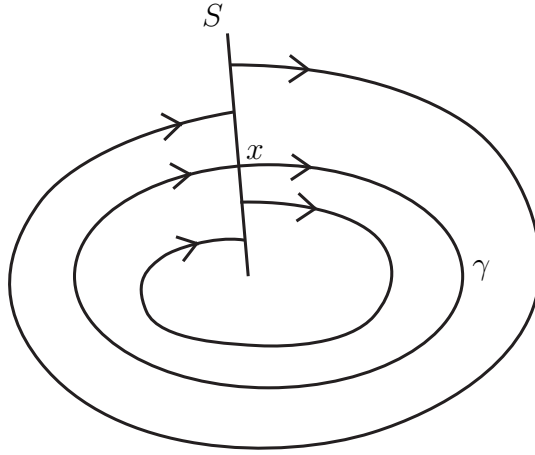


Figura 2.9: Uma órbita periódica semi-atratora.

A partir do gráfico de π no último caso ilustrado na Figura (2.8), deduzimos que as trajetórias de (P, Q) , perto de γ , se aproximam por um lado de γ e se afastam pelo outro. Temos que a órbita γ é o conjunto ω -limite das trajetórias que estão do lado de fora (e próximas), bem como o conjunto α -limite das trajetórias que estão dentro (e próximas), obtemos tudo isso apenas da análise da aplicação de primeiro retorno na seção local.

Precisamos falar na derivada de π e, assim, analisar melhor a aplicação π . Mas aqui introduziremos apenas uma definição com tal expressão, utilizando a Fórmula de Liouville. Para melhor compreender tal construção veja [6].

Definição 2.1.3. *Definimos a derivada da aplicação de primeiro retorno $\pi : S \rightarrow H$ por*

$$\pi'(x) = \det D\phi_t(x) = \exp \int_0^t \text{tr} DX(\phi_s(x)) ds .$$

Prova-se que a aplicação de Poincaré é um difeomorfismo de classe C^1 e, para estudar o comportamento assintótico das trajetórias vizinhas a γ , estudamos o comportamento das iteradas de π . A aplicação de Poincaré $\pi : S \rightarrow H$ pode ser iterada colocando $\pi^0(y) = y$, $\pi^1(y) = \pi(y)$ e, em geral, $\pi^{n+1}(y) = \pi(\pi^n(y))$, para $n \geq 0$, pelo menos enquanto $\pi^n(y) \in S$.

Se a derivada $\pi'(x)$ no ponto fixo x da aplicação de primeiro retorno π definida na seção local S da órbita γ tem módulo menor do que 1, dizemos que a órbita γ é uma órbita periódica atratora. Para maiores detalhes, veja [6].

Observação 3. Notemos que, se a derivada $\pi'(x)$ no ponto fixo x da aplicação de primeiro retorno π definida na seção local S da órbita γ tem módulo maior ou menor do que 1, segue que $\int_0^t \text{tr}DX(\phi_s(x))ds$ é maior ou menor que 0, respectivamente. Tomemos $I = \int_0^t \text{tr}DX(\phi_s(x))ds = \int_0^t \text{div} X(\phi_s(x))ds$. Assim, se $I \neq 0$, dizemos que $\gamma(t)$ é um ciclo limite hiperbólico e concluímos que, se I maior ou menor que 0, então $\gamma(t)$ é repulsor ou atrator, respectivamente.

Definição 2.1.4. Dizemos que um conjunto $C \subseteq \mathcal{U}$ é invariante pelo fluxo se $\phi_t(C) \subseteq C$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Mais precisamente, dizemos que C é positivamente invariante se $\phi_t(C) \subseteq C$ para todo $t \geq 0$ e que é negativamente invariante se $\phi_t(C) \subseteq C$ para todo $t \leq 0$.

Teorema 2.1.5. Sejam X um campo de vetores polinomial no aberto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$, $x \in \mathcal{U}$ um ponto de uma órbita periódica γ e S uma seção local de (P, Q) em x com aplicação de Poincaré π . Se γ é atratora, então existe uma vizinhança de γ que é positivamente invariante e todas órbitas por pontos nesta vizinhança tendem a γ , no seguinte sentido: as iteradas $\pi^n(y)$ dos pontos $y \in S$ suficientemente próximo de x convergem ao ponto fixo x com $n \rightarrow \infty$.

Demonstração do Teorema 2.1.5. Por hipótese, γ é atratora, ou seja, podemos escolher $0 < c < 1$ tal que $\|\pi'(x)\| \leq c < 1$. Segue, do Teorema do Valor Médio, que a restrição de π a uma pequena vizinhança compacta de x é uma contração. Como uma contração de um espaço métrico completo possui um único ponto fixo, que é necessariamente atrator, devido ao Teorema de Ponto Fixo de Contrações, segue que para $y \in S$ suficientemente próximo de x temos que $\pi^n(y) \rightarrow x$ com $n \rightarrow \infty$. ■

Pelo teorema acima, as órbitas das soluções do campo X que cortam S se aproximam de γ . Se $\pi'(x) < 1$, então podemos dizer que γ se comporta como uma espécie de poço (em analogia com os pontos de equilíbrio do tipo poço), atraindo as trajetórias (em tempo crescente) com condições iniciais em uma vizinhança aberta da órbita. Uma tal órbita γ é um exemplo trivial do que se denomina um conjunto atrator em Sistemas Dinâmicos.

Se a derivada $\pi'(x) > 1$ no ponto fixo x da aplicação de primeiro retorno π definida

na seção local S da órbita γ , dizemos que a órbita γ é uma órbita periódica repulsora.

Neste caso, as órbitas das soluções do campo (P, Q) que cortam S se afastam de γ com tempo crescente e podemos dizer que γ se comporta como uma espécie de fonte (em analogia com os pontos de equilíbrio do tipo fonte), repelindo as trajetórias (em tempo crescente) com condições iniciais em uma vizinhança aberta da órbita. Uma tal órbita γ é um exemplo do que se denomina um conjunto repulsor em Sistemas Dinâmicos.

Assim, a dinâmica de $\phi_t(x)$ em torno de γ pode ser analisada pela dinâmica das iteradas de π na seção local. No Capítulo 8, exemplificamos o comportamento das trajetórias de um campo na vizinhança de uma órbita periódica em $\mathbb{R}^3$.

O papel da seção local é discretizar o tempo. Uma outra maneira de discretizar o tempo é considerar o fluxo $\phi_1(y)$, onde $\phi_1(y)$ é um difeomorfismo e podemos obter várias propriedades do fluxo $\phi_t(x)$ a partir das iteradas $\phi_1^n(x) = \phi_n(x)$.

Este ponto de vista, de analisar a dinâmica de um campo vetorial através de uma seção local $\pi(y)$ ou de um difeomorfismo $\phi_1(y)$ que transforma o tempo de uma variável contínua em uma variável discreta, tem produzido uma série de resultados importantes na Teoria dos Sistemas Dinâmicos.

2.2 Os Teoremas de Poincaré e Bendixson

Nesta seção, consideraremos apenas campos de vetores no plano, também denominados campos planares. No que segue, $X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um campo polinomial no aberto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que todas as soluções do campo (P, Q) estão definidas para todo tempo real.

Nosso primeiro objetivo nesta seção é demonstrar o Teorema de Poincaré-Bendixson, que é um dos poucos resultados gerais sobre existência de órbitas periódicas de campos não lineares, classificando os possíveis conjuntos ω -limite de uma trajetória limitada de um campo planar com um número finito de singularidades no fecho.

Teorema 2.2.1 (Teorema de Poincaré-Bendixson). *Os únicos conjuntos ω -limite compactos, não-vazios e sem singularidades de um campo planar são as órbitas periódicas da campo.*

Um resultado análogo evidentemente vale para os conjuntos α -limite. Reforçamos que o teorema é enunciado para campos planares, não sendo válido em $\mathbb{R}^m$ com $m > 2$. A restrição tampouco é somente dimensional, pois embora o resultado seja válido para campos de vetores na esfera bidimensional, não vale no toro bidimensional, veja a Figura (2.10). O ingrediente essencial para a validade do Teorema de Poincaré-Bendixson é a cisão do domínio do campo em duas componentes por qualquer curva fechada simples, o que ocorre no plano. Este ingrediente é o famoso Teorema da Curva de Jordan.

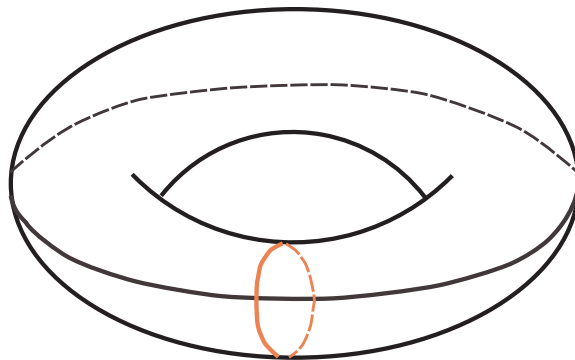


Figura 2.10: O toro.

Definição 2.2.2. *Uma curva fechada é a imagem do círculo unitário $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ e uma curva fechada sem auto-intersecções, também denominada uma curva fechada simples, é a imagem homeomorfa do círculo unitário $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$; finalmente, dizemos que uma curva fechada simples no plano é uma curva de Jordan.*

Teorema 2.2.3 (Teorema da Curva de Jordan). *O complemento no plano de uma curva fechada e sem auto-intersecções tem duas componentes conexas abertas disjuntas, uma limitada e a outra ilimitada, cuja fronteira comum é a curva.*

As duas componentes conexas do complementar de uma curva de Jordan garantidas pelo Teorema da Curva de Jordan, a limitada e a ilimitada, são denominadas, respectivamente, o interior da curva e o exterior da curva.

A afirmação do Teorema da Curva de Jordan é intuitivamente óbvia para curvas de Jordan visualmente elementares. No entanto, a afirmação do Teorema da Curva de Jordan não é elementar.

Se uma órbita $\gamma \subset \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ de um campo é periódica, então γ é uma curva de Jordan e, portanto, o interior e o exterior de γ estão sempre bem determinadas pelo Teorema da Curva de Jordan.

Passemos, agora, ao Teorema de Poincaré-Bendixson, que é um dos poucos resultados gerais sobre a existência de órbitas periódicas de campos não-lineares, classificando os possíveis conjuntos ω -limite de uma trajetória limitada de um campo planar que não possui singularidades em seu fecho.

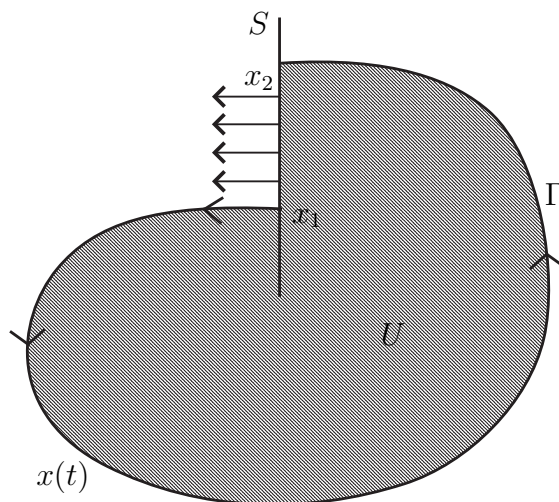


Figura 2.11: O interior U de uma curva de Jordan Γ .

Recorde que, para qualquer vetor $v \in S$ numa seção transversal local S de X , todos os vetores $X(v)$ sempre apontam para um mesmo lado de S . Assim, as trajetórias do campo de vetores X que batem na seção S entram sempre todas pelo mesmo lado e saem todas pelo outro lado. A Figura (2.11) descreve o que deve ocorrer entre duas batidas subsequentes da trajetória $x(t)$ de X na seção transversal S . Mais exatamente, o que não pode ocorrer é algo do tipo descrito pela Figura (2.4), pois, por continuidade do campo, haverá um ponto no segmento S em que o campo ou é tangente ou é nulo, de modo que aquele segmento não é, realmente, uma seção transversal.

Também é fácil ver que nenhuma órbita de um campo pode retornar a uma seção local do campo em tempos arbitrariamente pequenos, ou seja, a cada batida de uma trajetória numa seção local transcorre um tempo positivo mínimo, como podemos constatar tomando

uma caixa de fluxo tubular num ponto da seção local, veja a Figura (2.12).

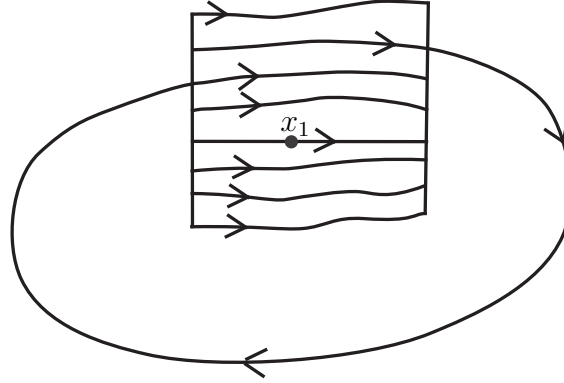


Figura 2.12: Uma caixa de fluxo tubular.

A utilidade do Teorema da Curva de Jordan é fundamental para o que segue e pode ser ilustrada pela Figura (2.11), onde a curva definida por um segmento de S e um trecho da trajetória $x(t)$ determinam duas componentes conexas no plano, uma das quais denotaremos por U . Observe que o aberto U não precisa estar todo contido no domínio $\mathcal{U}$ de X .

Lema 2.2.4 (Lema das Sequências Monótonas). *Seja $x \in S$ um ponto da seção transversal local S definida. Se a trajetória $x(t) = \phi_t(x)$ de X por x volta em S para tempos crescentes $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, então a sequência de pontos $x_n = \phi_{t_n}(x)$ é monótona em S , no seguinte sentido: no segmento S , x_n sempre está entre x_{n-1} e x_{n+1} . Além disto, existem $t_n < t_{n+1}$ tais que $x_n = x_{n+1}$ se, e somente se, a trajetória de X por x é periódica.*

Demonstração do Lema das Sequências Monótonas. Note que, sempre que a trajetória $x(t) = \phi_t(x)$ bate de novo em S , as batidas subsequentes determinam uma sequência monótona, devido ao comentário acima e pela Figura (2.13). De fato, note que a trajetória $x(t) = \phi_t(x)$, após bater pela enésima vez em $x_n = \phi_{t_n}(x) \in S$ com $t_n > 0$, não pode mais sair do interior U da curva de Jordan Γ determinada pela trajetória e pela seção transversal, pois, pela unicidade, a trajetória não pode cortar a trajetória nem pode cruzar a seção (onde o campo aponta para dentro de U). Sendo assim, as subsequentes batidas

formam uma sequência monótona em S , ou seja, x_n está sempre entre x_{n-1} e x_{n+k} em S , para qualquer $k \geq 1$.

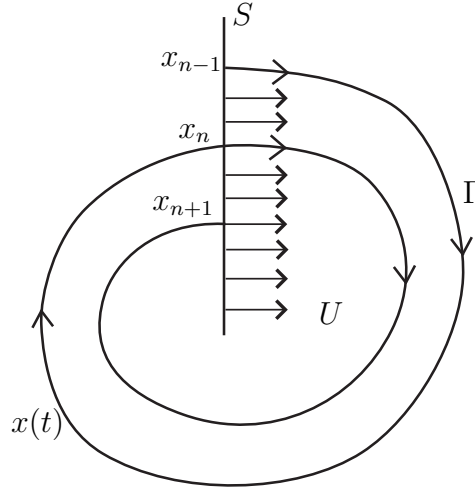


Figura 2.13: A sequência monótona dos retornos.

Além disto, se duas batidas distintas da trajetória de X por x em S coincidem, então a trajetória é periódica (por definição) e se duas batidas são distintas, então a trajetória não pode ser periódica, pois como podemos ver na Figura (2.13), uma vez entrando em U , a trajetória nunca mais pode voltar ao ponto de partida x_{n-1} . ■

Para demonstrar o Teorema de Poincaré-Bendixson destacamos mais dois resultados preliminares.

Corolário 2.2.5. *A trajetória de um campo planar por um ponto de um conjunto ω -limite não pode cruzar uma seção local do campo em mais do que um ponto.*

Demonstração do Corolário (2.2.5). Sejam S uma seção local do campo $X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $y \in S$ tal que $y \in L_\omega(x)$ para algum $x \in \mathcal{U}$. Então, existe uma sequência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que $x_n = \phi_{t_n}(x) \rightarrow y$. Como $y \in S$, podemos supor que também $x_n \in S$, projetando pelo fluxo, se necessário.

Assim, temos duas possibilidades: a trajetória de X por x é periódica ou a trajetória de X por x não é periódica.

Afirmção: Se a órbita de X por x é periódica, então $L_\omega(x)$ é a própria órbita periódica. De fato, supondo que a órbita γ de X por x é periódica de período t_0 , temos $\phi_{nt_0}(x) = x$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, pois $\phi_{t_0}(x) = x$ e $\phi_{nt_0}(x) = (\phi_{t_0} \circ \dots \circ \phi_{t_0})(x)$. Em particular, como $nt_0 \rightarrow +\infty$, x está no seu conjunto ω -limite e, portanto, $L_\omega(x) \subseteq \gamma$, já que γ é fechado e invariante. Se $y = \phi_t(x)$ (para t fixo) é um ponto qualquer na órbita periódica γ , então $\phi_{t+nt_0}(x) = \phi_t(\phi_{nt_0}(x)) = y$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, de modo que $y \in L_\omega(x)$, pois $t + nt_0 \rightarrow +\infty$. Logo, $\gamma \subseteq L_\omega(x)$ e, concluímos, que $\gamma = L_\omega(x)$. Daí, decorre que $L_\omega(x) \cap S = \{y\}$ é um único ponto.

Suponhamos que a trajetória de X por x não é periódica. Logo, os x_n são pontos distintos de $\gamma \cap S$ que convergem a $y \in S$. Pelo Lema das Sequências Monótonas, a sequência $\gamma \cap S$ é uma sequência monótona e sabemos que sequências monótonas só podem ter, no máximo, uma subsequência convergente. Isto significa que $L_\omega(x) \cap S = \{y\}$ é um único ponto, pois qualquer outro ponto de $L_\omega(x) \cap S$ produziria uma outra subsequência de $\gamma \cap S$ que convergiria a um outro limite. ■

Note que, na situação do corolário acima, uma trajetória de um ponto num conjunto ω -limite poderia até bater repetidamente numa mesma seção local, mas sempre baterá no mesmo ponto da seção, que é o que ocorre com trajetórias periódicas.

Proposição 2.2.6. *Se o conjunto ω -limite de um ponto de um campo planar é compacto e contém uma órbita periódica, então este conjunto ω -limite coincide com a órbita periódica.*

Demonstração da Proposição (2.2.6). Sejam x e y tais que $L_\omega(x)$ é compacto, a órbita γ de X por y é periódica e $\gamma \subseteq L_\omega(x)$. Queremos mostrar que também $L_\omega(x) \subseteq \gamma$, de modo que $L_\omega(x) = \gamma$ é uma órbita periódica.

Suponhamos que $L_\omega(x) \not\subseteq \gamma$, ou seja, que $L_\omega(x) - \gamma \neq \emptyset$. Por ser compacto, o conjunto ω -limite $L_\omega(x)$ é conexo e, como γ é um conjunto fechado, resulta que o complementar não-vazio $L_\omega(x) - \gamma$ de γ em $L_\omega(x)$ não pode ser fechado e portanto existem um ponto $y_0 \in \gamma$ e uma sequência $y_k \in L_\omega(x) - \gamma$ tais que $y_k \rightarrow y_0$, com $n \rightarrow +\infty$.

Como $y_0 \in \gamma$, temos $X(y_0) \neq 0$ e, dessa forma, podemos tomar uma seção local de X em y_0 ; projetando pelo fluxo, se necessário, podemos supor também que $L_\omega(x) \cap S$ consiste de, no máximo, um único ponto. Como $y_k \in L_\omega(x) \cap S$ para cada k , resulta que

a sequência y_k é constante e, como $y_k \rightarrow y_0$, decorre que $y_k = y_0 \in \gamma$. Isto contradiz o fato que $y_k \notin \gamma$ e portanto estabelece que $L_\omega(x) \subseteq \gamma$. ■

A seguinte proposição é necessária na demonstração do Teorema de Poincaré-Bendixson.

Proposição 2.2.7. *Se a semi-órbita $\{\phi_t(x) : t \geq 0\}$ de X por x é limitada, então o conjunto $L_\omega(x)$ é não-vazio.*

Demonstração da Proposição (2.2.7). Por hipótese, a sequência $x_n = \phi_n(x)$ é limitada e, assim sendo, possui uma subsequência convergente, cujo limite é um ponto de $L_\omega(x)$. ■

Com estes resultados preliminares, podemos demonstrar o Teorema de Poincaré-Bendixson.

Demonstração do Teorema de Poincaré-Bendixson. Vamos provar que os únicos conjuntos ω -limite compactos, não-vazios e sem singularidades de campos planares são as órbitas periódicas. Para isto, fixamos um campo planar $X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ e um ponto $x \in \mathcal{U}$ quaisquer tais que $L_\omega(x) \neq \emptyset$ é compacto e $X(y) \neq 0$ para cada $y \in L_\omega(x)$. Queremos mostrar que $L_\omega(x)$ é uma órbita periódica.

Seja $y \in L_\omega(x)$, daí, $L_\omega(y) \subseteq L_\omega(x)$. Pela Proposição (2.2.6), basta mostrar que a trajetória γ de X por y é periódica, pois, então $\gamma = L_\omega(y) \subseteq L_\omega(x)$, e decorre que $L_\omega(x) = \gamma$ é uma órbita periódica.

Ora, por hipótese, $L_\omega(x)$ é compacto, de modo que $L_\omega(x) \neq \emptyset$ pela Proposição (2.2.7), ou seja, podemos tomar um ponto $z \in L_\omega(y)$. Por hipótese, z não pode ser uma singularidade de X , pois $z \in L_\omega(y) \subseteq L_\omega(x)$. Podemos, então, tomar uma seção local S de X por z .

Como $z \in L_\omega(y)$, temos uma sequência $y_k = \phi_{t_k}(y) \rightarrow z$ com $t_k \rightarrow +\infty$ e, podemos projetar pelo fluxo, se necessário, e supor que todos $y_k \in S$. Por outro lado, sabemos que $L_\omega(x) \cap S$ é, no máximo, um único ponto, pelo Corolário (2.2.5). Como cada $y_k \in L_\omega(x)$, decorre que todos y_k coincidem, ou seja, a trajetória de X por y é periódica. ■

Observação 1. Tudo que foi dito até aqui para conjuntos ω -limite vale também para conjuntos α -limite, de maneira óbvia: basta lembrar que $\omega^{-X}(x) = \alpha^X(x)$, ou seja, o conjunto α -limite de x para o campo de vetores X é o conjunto ω -limite de x para o campo de vetores oposto $-X$. Assim, temos que o Teorema de Poincaré-Bendixson também classifica os conjuntos α -limite.

Exemplo 1. Considere o sistema cúbico

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = -x_2(2x_1^2 + x_2^2 - 2) - x_1$$

e o anel $\Omega = \{(x_1, x_2) : 1 < x_1^2 + x_2^2 < 3\}$, veja a Figura (2.14).

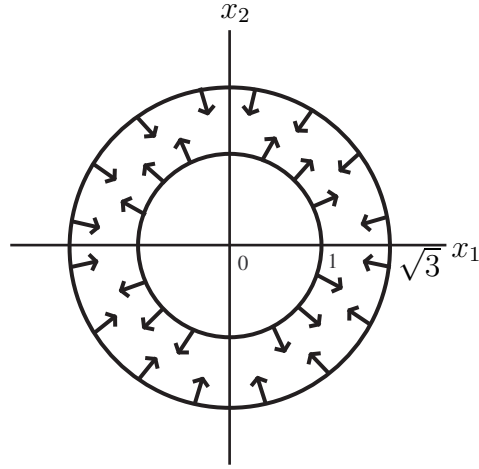


Figura 2.14: Comportamento do sistema

A única singularidade do sistema é $(0, 0)$.

Daí, em Ω não temos singularidades. Note que o anel Ω é invariante pelo fluxo do sistema. De fato,

$$\frac{d(x_1^2 + x_2^2)}{dt} = 2x_1 \frac{dx_1}{dt} + 2x_2 \frac{dx_2}{dt} = -2x_2^2(2x_1^2 + x_2^2 - 2).$$

Daí,

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \Rightarrow -2x_2^2(2x_1^2 + x_2^2 - 2) = 2x_2^4 > 0$$

e

$$x_1^2 + x_2^2 = 3 \Rightarrow -2x_2^2(2x_1^2 + x_2^2 - 2) = -2x_2^2(x_1^2 + 1) < 0.$$

Logo, considerando $p \in \Omega$, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson $\omega(p)$ é uma órbita periódica. $\square$

Corolário 2.2.8. *Um conjunto compacto, não-vazio e invariante por um campo planar contém pelo menos uma singularidade ou uma órbita periódica.*

Demonstração do Corolário (2.2.8). Seja C um conjunto compacto, não-vazio e invariante por um campo planar. Como C é invariante por X , temos $L_\omega(x) \subseteq C$ para cada $x \in C$. Se não existem pontos de equilíbrio em C , então não existem pontos de equilíbrio em $L_\omega(x)$ e portanto, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson, $L_\omega(x) \subseteq C$ é uma órbita periódica. $\blacksquare$

Observe que, quando o compacto invariante é determinado por uma órbita periódica junto com seu interior, podemos ser mais precisos: o interior de toda órbita sempre contém pelo menos uma singularidade do campo. Isto pode ser visto no Corolário (2.2.13) adiante.

Nosso segundo objetivo nesta seção é estudar dois outros resultados relativos a campos planares, o primeiro dos quais é um outro Teorema de Bendixson e o segundo um outro Teorema de Poincaré.

Seja γ uma órbita periódica de um campo $X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ polinomial definido no aberto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$. Como já vimos, γ é uma curva de Jordan e, dessa maneira, o interior e o exterior de γ estão bem determinados pelo Teorema da Curva de Jordan. O interior de γ pode estar todo contido em $\mathcal{U}$ ou não, o que não afetou a prova do Teorema de Poincaré-Bendixson. Um caso em que o interior de γ está todo em $\mathcal{U}$ é quando $\mathcal{U}$ não tem buracos, isto é, é simplesmente conexo. Dizemos que um conjunto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ é simplesmente conexo se o interior de cada curva de Jordan contida em $\mathcal{U}$ está inteiramente contida em $\mathcal{U}$; visualmente, isto significa que $\mathcal{U}$ não tem buracos. Por exemplo, $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$, ou qualquer aberto convexo, como uma bola.

Quando o domínio $\mathcal{U}$ do campo é simplesmente conexo, o clássico Teorema de Green dá uma restrição sobre o tipo de campo de vetores que podem ter uma órbita periódica. Para enunciar este resultado lembramos que o divergente do campo X é a função $\operatorname{div} X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$

definida em cada ponto $(x_1, x_2) \in \mathcal{U}$ pelo traço da matriz jacobiana de X , ou seja, por

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} = \operatorname{tr} DX.$$

Proposição 2.2.9 (Teorema de Bendixson). *Se o campo polinomial $X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido no aberto simplesmente conexo $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ tem uma órbita periódica, então ou $\operatorname{div} X$ é identicamente nulo ou troca de sinal em $\mathcal{U}$.*

Demonstração do Teorema de Bendixson. Uma órbita periódica γ de X é parametrizada pela solução (x_1, x_2) de X por um ponto qualquer de γ , de modo que $dx_1 = Pdt$ e $dx_2 = Qdt$ garantem que

$$Pdx_2 - Qdx_1 = (-Q, P) \cdot (dx_1, dx_2) = (-Q, P) \cdot (P, Q)dt = 0.$$

Assim,

$$\int \int_R \operatorname{div} X dA = \int \int_R \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} \right) dA = \pm \oint_{\gamma} Pdx_2 - Qdx_1 = 0,$$

onde R é o interior de γ , contido em $\mathcal{U}$, e a segunda igualdade é garantida pelo Teorema de Green.

Como X é polinomial, o divergente de X é contínuo, e portanto, a igualdade $\int \int_R \operatorname{div} X dA = 0$ garante que $\operatorname{div} X$ é identicamente nulo ou troca de sinal em R . ■

Exemplo 2. O campo $X(x_1, x_2) = (x_2 - x_1^3, -x_1^3)$ tem $\operatorname{div} X(x_1, x_2) = -3x_1^2$, que não troca de sinal nem é identicamente nulo em conjuntos abertos de $\mathbb{R}^2$, assim X não possui órbita periódica alguma. Observe, pela Figura (2.15), que isto não é de todo óbvio, haja vista que o campo X tem jeito de centro não linear. □

Observe também que o campo acima não é gradiente, e nem é um campo linear hiperbólico, que são os dois casos gerais que sabemos que nunca possuem órbitas periódicas. Assim, o Teorema de Bendixson pode ser interpretado como dando uma condição independente que proíbe a existência de órbitas periódicas.

O segundo resultado que queremos apresentar envolve o conceito de índice de uma singularidade de um campo, devido a Poincaré.

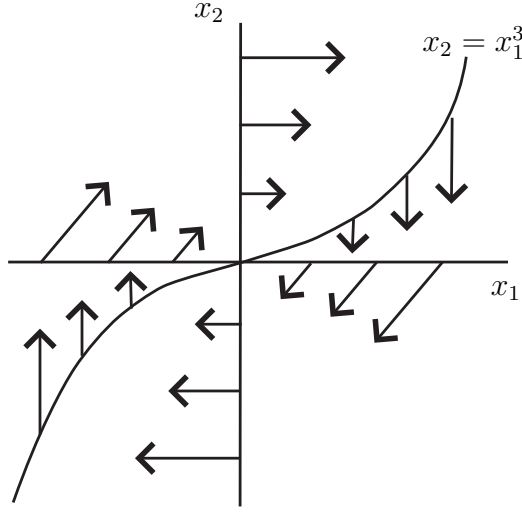


Figura 2.15: Campo de vetores do exemplo 2.

Definição 2.2.10. *Seja $x_0 \in \mathcal{U}$ uma singularidade do campo polinomial $X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ no aberto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$. Se a derivada $A = DX(x_0) \in M(2)$ de X em x_0 é inversível, então dizemos que a singularidade x_0 é simples. Dizemos que o índice $I(X, x_0)$ de x_0 em relação a X é $+1$ se $\det A > 0$, em outras palavras, se o isomorfismo $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ preserva a orientação canônica de $\mathbb{R}^2$ e é -1 se $\det A < 0$, ou seja, se A inverte a orientação de $\mathbb{R}^2$.*

O índice de x_0 também pode ser dado por $(-1)^\sharp$, onde $\sharp$ indica o número de autovalores de A com parte real negativa, estabelecendo uma relação com o índice de estabilidade de um campo linear hiperbólico.

Exemplo 3. Em $\mathbb{R}^2$, temos $I(X, 0) = 1$ se $X(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ e $I(X, 0) = -1$ se $X(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$. Estes campos lineares mostram a caracterização geométrica do índice: observe que a transformação identidade $X(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ leva a base canônica $\{(1, 0), (0, 1)\}$ nela mesmo enquanto que a reflexão pelo eixo x_2 dada por $X(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$ leva a base canônica positiva na base negativa $\{(-1, 0), (0, 1)\}$.

Mais geometricamente, vejamos a imagem do círculo unitário S^1 parametrizado por $r(t) = (\cos t, \sin t)$, com $0 \leq t < 2\pi$ (que percorre o círculo no sentido anti-horário, que é positivo), pelos dois isomorfismos. A identidade leva o círculo em si mesmo, dando uma volta completa no sentido positivo em torno da origem. O isomorfismo $X(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$ leva o círculo unitário no círculo unitário percorrido no sentido horário, dando uma volta completa em torno da origem no sentido negativo.

Assim, o índice da origem pode ser visto como o número de voltas que a curva imagem do círculo unitário positivo dá em torno da origem. Note que o mesmo ocorre com qualquer círculo em torno da origem e com qualquer matriz invertível em $M(2)$. $\square$

Além do índice de uma singularidade, em $\mathbb{R}^2$ podemos definir o índice de uma curva fechada em relação a um campo de vetores, desde que a curva evite todas as singularidades do campo, como o número líquido de voltas completas que a curva imagem pela aplicação definida pelo campo dá em torno da origem, como segue.

Definição 2.2.11. *Fixemos um campo polinomial $X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ no aberto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$. Dada uma curva fechada $C \subseteq \mathcal{U}$ qualquer, tal que $X(x) \neq 0 \in \mathbb{R}^2$ para cada $x \in C$, dizemos que o índice de C em relação a X é o número de voltas inteiras positivas menos o número de voltas inteiras negativas que o vetor $X(x)$ descreve enquanto x percorre C uma vez no sentido positivo, ou anti-horário.*

Como $X(x)$ volta para a posição inicial, o resultado líquido é sempre um número inteiro, que é denominado o índice de C em relação a X , ou mais precisamente, o índice de Poincaré de C em relação a X denotado por $I(X, C)$.

Para visualizar o índice, convém ver $X(x)$ não como um vetor de um campo de vetores, mas sim como um vetor na origem. Como X não se anula em C , é melhor ainda observar o vetor $X(x)$ normalizado na origem.

Exemplo 4. Pelo visto acima, o índice do círculo unitário S^1 em relação ao isomorfismo $X(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ é 1, que é o índice da origem em relação a X , isto é, $I(X, S^1) = 1 = I(X, 0)$. Analogamente, $I(X, S^1) = -1 = I(X, 0)$ para o isomorfismo $X(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$. Resumindo, o sinal do determinante de um isomorfismo dá ambos

índices da origem e do círculo unitário. Observe que o mesmo ocorre com qualquer círculo em torno da origem e com qualquer matriz invertível em $M(2)$. $\square$

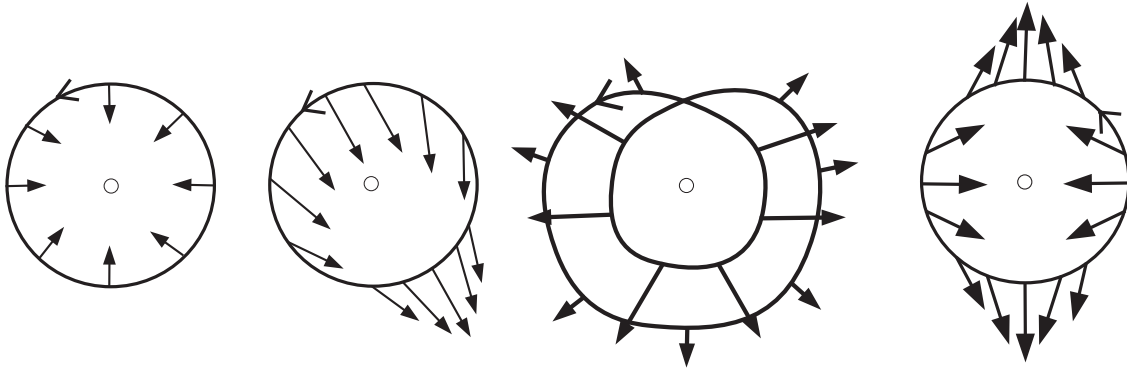


Figura 2.16: O índice de curvas em torno de singularidades.

Exemplo 5. Na Figura (2.16), esboçamos quatro curvas com vetores de um campo de vetores, onde os índices são 1, 0, 2 e -1, respectivamente. $\square$

Formalizando um pouco mais a nossa definição de índice, podemos tomar uma parametrização qualquer $r(t)$, $a \leq t \leq b$, de classe C^1 da curva C no sentido positivo e observar que $X(r(t))$ define um caminho de classe C^1 de $[a, b]$ em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ que pode ser decomposto numa única função-ângulo $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que

$$\frac{1}{|X(r(t))|} X(r(t)) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$$

para cada $t \in [a, b]$. Como $X(r(b)) = X(r(a))$, a diferença $\theta(b) - \theta(a)$ é um múltiplo inteiro de 2π e resulta que

$$I(X, C) = \frac{1}{2\pi} [\theta(b) - \theta(a)]$$

é o índice de Poincaré da curva C em relação ao campo X .

Prova-se que este número independe da parametrização escolhida e, mais que isso, é invariante por deformações contínuas da curva (homotopias), por maiores que sejam, desde que evitem singularidades de X . Por outro lado, como é intuitivamente claro, o índice não é alterado por pequenas variações do campo.

Agora, se $x_0 \in \mathcal{U}$ é uma singularidade simples de X e C é uma curva de Jordan em $\mathcal{U}$, tal que x_0 é a única singularidade de X em seu interior, temos os índices de x_0 e de C em relação a X . Como $I(X, C)$ não muda encolhendo C , podemos tomar C bem perto de x_0 , de tal modo que $I(X, C) = I(A, C)$ com $A = DX(x_0)$, já que em x_0 o campo X é uma pequena variação do campo linear dado pela derivada. Se A é inversível, então, como vimos no exemplo 4, $I(A, C) = I(A, x_0) = \pm 1$ de acordo com o sinal do determinante de $A = DX(x_0)$.

Assim, estabelecemos a relação local $I(X, C) = I(X, x_0)$ entre os dois conceitos de índice, de curva e de singularidade. Observe que desta maneira podemos estender o conceito de índice a qualquer singularidade isolada de X , não necessariamente simples. No entanto, a contagem por autovalores só faz sentido em singularidades simples.

Exemplo 6. Os índices de uma fonte, sela e poço, veja a Figura (2.17), são $+1$, -1 e $+1$, respectivamente. O de um centro também é $+1$. $\square$

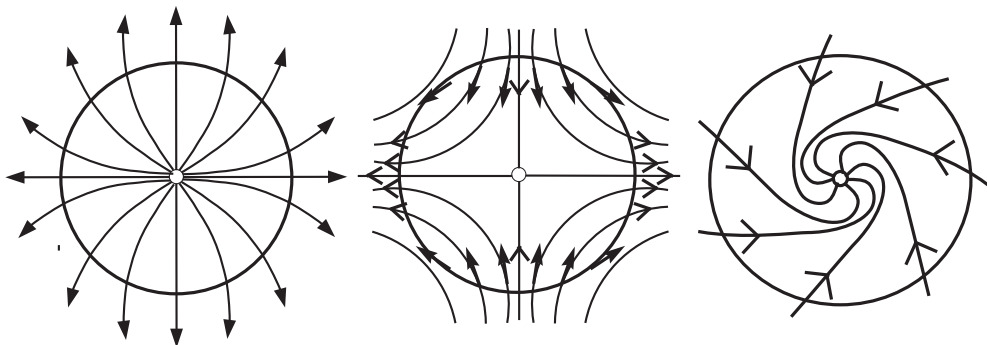


Figura 2.17: O índice de singularidades hiperbólicas.

Vejamos algumas relações globais entre os dois conceitos de índice. O primeiro resultado abaixo é imediato tomando curvas cada vez menores e observando que o índice de uma curva num fluxo tubular do campo é nulo, como na segunda curva da Figura (2.16). O segundo resultado crucial a seguir, embora bastante simples de comprovar, não é de modo algum fácil de provar.

Teorema 2.2.12. *Sejam $C \subseteq \mathcal{U}$ uma curva de Jordan qualquer no aberto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ e $X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo polinomial em $\mathcal{U}$ que não se anula nos pontos de C .*

1. $I(X, C) = 0$ se X não tem singularidades no interior de C .
2. $I(X, C) = 1$ se $C = \gamma$ é uma órbita periódica de X .

Juntando as duas afirmações do teorema, obtemos imediatamente o próximo corolário, que é um poderoso teorema de existência de singularidade de campos planares.

Corolário 2.2.13. *Seja $X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo planar com uma órbita periódica γ cujo interior U está todo contido em $\mathcal{U}$. Então, existe pelo menos uma singularidade do campo em U .*

Existem várias consequências profundas do teorema acima, como o Teorema Fundamental da Álgebra, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o Critério de Routh-Hurwitz sobre o índice de estabilidade, mas aqui queremos chamar a atenção somente para o seguinte resultado .

Teorema 2.2.14 (Teorema de Poincaré). *Se C é uma curva de Jordan cujo interior U está contido no domínio aberto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ de um campo de vetores polinomial $X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que não se anula nos pontos de C e se $x_1, x_2, \dots, x_n$ são as únicas singularidades de X em U , então*

$$I(X, C) = \sum_{i=1}^n I(X, x_i),$$

ou seja, o índice de C em relação a X é a soma dos índices das singularidades de X no interior de C .

Da segunda afirmação do Teorema (2.2.12) acima decorre o resultado seguinte.

Corolário 2.2.15. *Seja $X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe C^1 no aberto simplesmente conexo $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que todas suas singularidades são simples.*

1. *Se todas singularidades de X são selas, então X não possui órbitas periódicas.*
2. *Se γ é uma órbita periódica então em seu interior existe um número ímpar $2n + 1$ de singularidade, das quais n são selas e $n + 1$ são fontes, poços ou centros.*

Para finalizar, observamos que o índice de singularidades e curvas é um conceito geométrico que é invariante por mudanças de coordenadas. Assim, podemos falar em índice de singularidades de campos definidos em superfícies.

Capítulo 3

Primeiro critério

Neste capítulo, vamos demonstrar nosso primeiro critério para localização de ciclos limite, isto é, provaremos o Teorema 1.0.1.

Demonstração do Teorema 1.0.1.

Consideremos (P, Q) um campo de vetores polinomial definido no subconjunto aberto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ solução periódica de (P, Q) de período T , $R : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação C^1 tal que $\int_0^T R(u(t), v(t))dt \neq 0$ e $V = V(x, y)$ uma solução de classe C^1 da equação diferencial parcial linear (1.1), isto é,

$$P \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) + Q \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = RV(x, y).$$

Queremos provar que $V(\gamma(t)) = 0$ e que γ é um ciclo limite.

Denotemos $R(t) = R(\gamma(t))$ e $V(t) = V(\gamma(t))$ e tomemos a equação diferencial

$$z' = R(t) \cdot z.$$

Fixada a condição inicial $z(0)$ temos que a solução para tal equação diferencial é

$$z(t) = z(0) \cdot \exp \left(\int_0^t R(s)ds \right).$$

Como, $V(x, y)$ é uma solução da equação diferencial parcial (1.1) e $\gamma(t)$ é uma solução periódica de (P, Q) , ou seja,

$$u'(t) = P(u(t), v(t)), \quad v'(t) = Q(u(t), v(t)),$$

segue que $z = V(t)$ é uma solução de $z' = R(t) \cdot z$. De fato,

$$R(t)z = R(t)V(t) = P(t)\frac{\partial V}{\partial u}(t) + Q(t)\frac{\partial V}{\partial v}(t) = u'(t)\frac{\partial V}{\partial u}(t) + v'(t)\frac{\partial V}{\partial v}(t) = V'(t) = z'(t).$$

Assim,

$$V(t) = V(0) \cdot \exp\left(\int_0^t R(s)ds\right).$$

Além disso, como $\gamma(t)$ é uma solução periódica de período T , então obtemos

$$V(T) = V(\gamma(T)) = V(\gamma(0)) = V(0).$$

Daí, e como $\int_0^T R(t)dt \neq 0$, obtemos que

$$0 = V(T) - V(0) = V(0) \cdot \exp\left(\int_0^T R(s)ds\right) - V(0) = V(0) \cdot \left(\exp\left(\int_0^T R(s)ds\right) - 1\right).$$

Logo, $V(0) = 0$ ou $\int_0^T R(t)dt = 0$.

Portanto, $V(0) = 0$ e, conseqüentemente, $V(t) = 0$ para $t \in [0, T]$. Logo,

$$\gamma \subset \Sigma = V^{-1}(0).$$

Suponhamos, por absurdo, que γ esteja contida em um período anular, veja a Figura (3.1). Então, existe uma vizinhança anular fechada A contendo γ e folheada por trajetórias fechadas. Note que γ pode estar na fronteira de A .

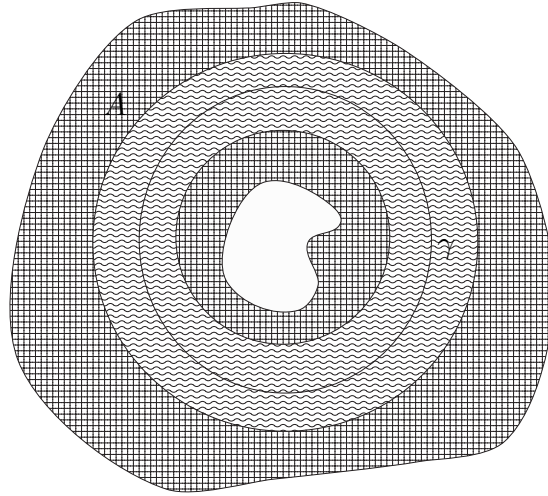


Figura 3.1: Período Anular.

Como $\int_{\gamma} R(t)dt \neq 0$, temos, por continuidade da aplicação R , que se A é suficientemente pequeno, então para toda trajetória fechada γ' em A temos

$$\int_{\gamma'} R(t)dt \neq 0.$$

Assim, γ' está contida em Σ . Portanto,

$$A \subset \Sigma = \{(x, y) \in \mathcal{U} : V(x, y) = 0\}.$$

Isto é uma contradição, pois Σ é localmente uma curva regular, a menos de um conjunto de medida zero. Portanto, γ não está contida em um período anular.

Concluimos que γ é um ciclo limite, pois a segunda possibilidade não pode ocorrer. ■

Capítulo 4

Ciclos limites de sistemas quadráticos

Neste capítulo, provaremos as Proposições 1.0.2, 1.0.4, 1.0.5 e o Corolário 1.0.3 aplicando o Teorema 1.0.1 para sistemas quadráticos.

Demonstração da Proposição 1.0.2. Consideremos o sistema quadrático

$$x' = \delta x - y + lx^2 + mxy + ny^2, \quad y' = x + bxy. \quad (4.1)$$

com $l \cdot n \geq 0$ e $l^2 + n^2 > 0$. Suponhamos que, para algum $R = \alpha x + \beta y$ com $\beta \neq 0$, existe um polinômio $V(x, y)$ que satisfaz a equação (1.1). Queremos provar que se $\gamma(t) = (u(t), v(t)) \in \mathcal{U}, t \in [0, T]$ é uma trajetória fechada do sistema, então $V(\gamma(t)) = 0$.

Suponhamos, por absurdo, que γ não está contida em $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : V(x, y) = 0\}$. Dessa forma, pelo Teorema 1.0.1, obtemos que

$$\int_0^T R(u(t), v(t)) dt = 0$$

isto é, $\int_0^T (\alpha u + \beta v) dt = 0$.

Logo, temos duas situações (devido a Yanquian):

- $b = 0$.

Daí, o sistema (4.1) torna-se

$$x' = \delta x - y + lx^2 + mxy + ny^2, \quad y' = x.$$

Como $v' = u$, segue que

$$\int_{\gamma} u dt = 0.$$

Com efeito,

$$v' = u \Rightarrow \int_{\gamma} u dt = \int_{\gamma} v' dt = v(T) - v(0) = 0.$$

Como $0 = \int_{\gamma} (\alpha u + \beta v) dt$ e $\beta \neq 0$, então,

$$0 = \int_{\gamma} v dt.$$

Também temos que

$$\int_{\gamma} uv dt = 0.$$

De fato,

$$\int_{\gamma} uv dt = \int_{\gamma} v' v dt \stackrel{\omega=v(t)}{=} \int_{v(0)}^{v(0)} \omega d\omega = 0.$$

Agora, integrando a equação diferencial correspondente a u' , obtemos que

$$0 = \int_0^T u' dt = l \int_0^T u^2 dt + n \int_0^T v^2 dt.$$

Daí, elevando ambos os lados ao quadrado, temos que

$$l^2 \left(\int_0^T u^2 dt \right)^2 + n^2 \left(\int_0^T v^2 dt \right)^2 + 2ln \int_0^T u^2 dt \int_{\gamma} v^2 dt = 0,$$

o que contradiz o fato de $l^2 + n^2 > 0$ e $ln \geq 0$. Portanto, γ está contida em Σ .

- $b \neq 0$.

Como

$$v' = u + buv = u(1 + bv)$$

então o segmento $1 + bv = 0$ é invariante pelo fluxo do sistema quadrático (4.1), pois $v = -\frac{1}{b}$ é constante. Logo, γ não intercepta $1 + bv = 0$. De fato, se para algum $t \in \mathbb{R}$ tivéssemos $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ satisfazendo que $1 + bv(t) = 0$, então a invariância do

fluxo no segmento $1 + bv = 0$ implicaria que $1 + bv(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Daí, $\gamma(t)$ estaria contida num segmento, o que é impossível já que $\gamma(t)$ é uma órbita periódica.

Temos que

$$v'(t) = u(t)(1 + bv(t)) \Rightarrow \frac{v'(t)}{1 + bv(t)} = u(t).$$

Logo,

$$\int_{\gamma} u(t) dt = \int_{\gamma} \frac{v'(t) dt}{1 + bv(t)} = \int_0^T \frac{v'(t) dt}{1 + bv(t)} = \star$$

e considerando a mudança de coordenada $\omega = 1 + bv(t)$ temos que

$$\star = \int_{\omega(0)}^{\omega(0)} \frac{d\omega}{b\omega} = 0.$$

Por hipótese, $\int_{\gamma} R dt = 0$ e $\beta \neq 0$. Daí

$$0 = \int_0^T (\alpha u(t) + \beta v(t)) dt = \alpha \int_0^T u(t) dt + \beta \int_0^T v(t) dt = \beta \int_0^T v(t) dt$$

e portanto

$$\int_0^T v(t) dt = 0.$$

Como $v'(t) = u(t) + bu(t)v(t)$ segue, repetindo o argumento usado na seção anterior, que

$$0 = v(T) - v(0) = \int_{\gamma} v'(t) dt = \int_{\gamma} u(t) dt + b \int_{\gamma} u(t)v(t) dt$$

e, assim,

$$\int_{\gamma} u(t)v(t) dt = 0.$$

Agora, integrando a equação diferencial referente a $u'(t)$ obtemos que

$$0 = \int_0^T u' dt = l \int_0^T u^2 dt + n \int_0^T v^2 dt.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado,

$$l^2 \left(\int_0^T u^2 dt \right)^2 + n^2 \left(\int_0^T v^2 dt \right)^2 + 2ln \int_0^T u^2 dt \int_{\gamma} v^2 dt = 0,$$

o que contradiz o fato de $l^2 + n^2 > 0$ e $ln \geq 0$. Portanto, γ está contida em Σ . ■

Demonstração do Corolário 1.0.3. Consideremos o sistema quadrático

$$x' = P(x, y) = \delta x - y + x^2 + mxy + ny^2, \quad y' = Q(x, y) = x + bxy \quad (4.2)$$

com

$$b = \frac{(1+n)^2 + \delta(m + mn + \delta n)}{\delta^2 n}$$

onde $\delta n(1+n) \neq 0$ e $n > 0$. Queremos provar que o sistema acima não tem trajetórias fechadas.

Suponhamos, por absurdo, que $\gamma = (u(t), v(t)) \in \mathcal{U}$, $t \in [0, T]$ é uma trajetória fechada do sistema quadrático (4.2). Tomemos

$$V(x, y) = 1 + 2\frac{1+n}{\delta}x - 2ny + \left(\frac{1+n}{\delta}x - ny\right)^2.$$

Um cálculo trivial mostra que, tomando $R(x, y) = 2\left(x - \frac{1+n}{\delta}y\right)$, temos que V é uma solução da equação diferencial (1.1), ou seja,

$$P\frac{\partial V}{\partial x} + Q\frac{\partial V}{\partial y} = RV.$$

Como $n > 0$ segue que $n \neq -1$ e portanto R satisfaz a hipótese da Proposição 1.0.2. Logo, se γ é uma órbita fechada ela deve estar contida no conjunto

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathcal{U} : V(x, y) = 0\}.$$

Mas temos

$$\begin{aligned} V = 0 &\iff 1 + 2\frac{1+n}{\delta}x - 2ny + \left(\frac{1+n}{\delta}x - ny\right)^2 = 0 \iff \\ &\left(\left(\frac{1+n}{\delta}x - ny\right) + 1\right)^2 = 0 \iff \left(\frac{1+n}{\delta}x - ny\right) + 1 = 0 \iff y = \frac{1}{n} + \frac{1+n}{n\delta}x. \end{aligned}$$

Assim, obtemos que o lugar geométrico dos pontos (x, y) que satisfazem $V(x, y) = 0$ não é uma elipse. Logo, o sistema (4.2) não tem trajetória fechada. ■

Os seguintes exemplos de campos de vetores quadráticos ilustram sistemas que não possuem trajetórias fechadas, por consequência do Corolário 1.0.3, do Teorema 1.0.1.

Mas, isso não é facilmente observado, como se verifica nos seus respectivos campos de direções.

Exemplo 1. Considere o sistema quadrático

$$x' = x - y + x^2 + xy + y^2, \quad y' = x + 7xy.$$

Verifica-se facilmente que o sistema acima satisfaz as hipóteses do Corolário 1.0.3. Logo, tal sistema não tem trajetórias fechadas, cujo comportamento é ilustrado na Figura 4.1.

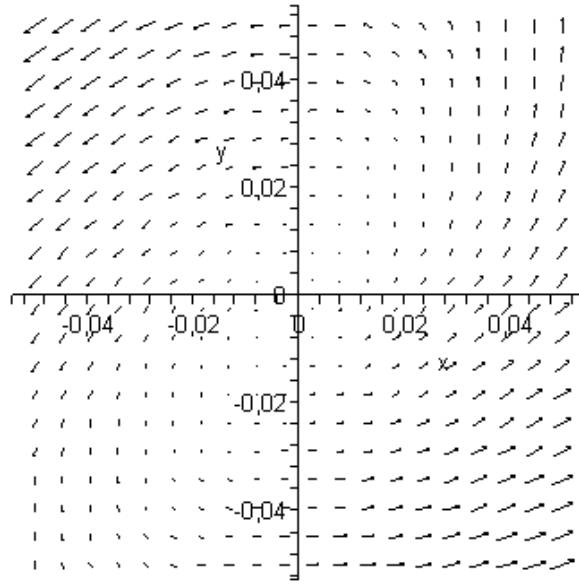


Figura 4.1: Campo de direções do sistema $x' = x - y + x^2 + xy + y^2, y' = x + 7xy$.

Como pode-se observar não é óbvio a não existência de trajetórias fechadas. $\square$

Exemplo 2. Considere o sistema quadrático

$$x' = x - y + x^2 + 2xy + 4y^2, \quad y' = x + 9,75xy.$$

Note que o sistema acima satisfaz as hipóteses do Corolário 1.0.3. Portanto, não tem trajetórias fechadas. A Figura 4.2 ilustra o comportamento de tal sistema, onde é possível verificar que não é óbvio a não existência de trajetórias fechadas. $\square$

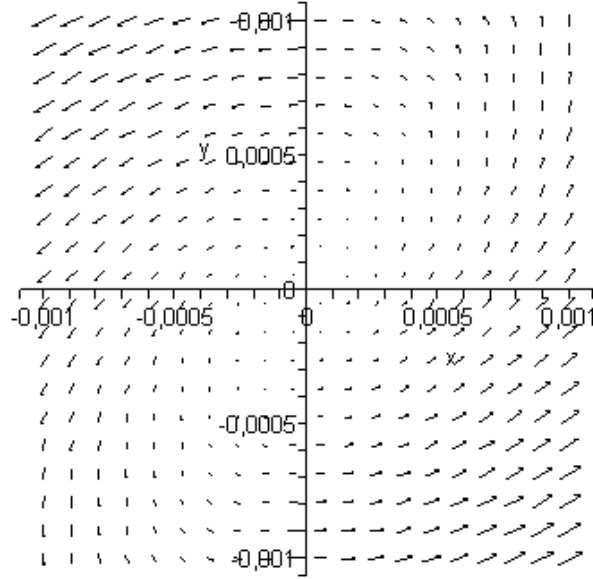


Figura 4.2: Campo de direções do sistema $x' = x - y + x^2 + 2xy + 4y^2$, $y' = x + 9,75xy$.

Exemplo 3. O sistema quadrático

$$x' = 2x - y + x^2 + xy + y^2, \quad y' = x + 3xy$$

satisfaz as hipóteses do Corolário 1.0.3. Assim, não tem trajetórias fechadas. O comportamento de tal sistema é ilustrado na Figura 4.3.

Note que não é óbvio a não existência de trajetórias fechadas. □

Exemplo 4. O sistema quadrático

$$x' = 3x - y + x^2 + xy + 2y^2, \quad y' = x + 2xy$$

satisfaz as hipóteses do Corolário 1.0.3. Assim sendo, não tem trajetórias fechadas.

Observe que não é óbvio a não existência de trajetórias fechadas como se verifica na Figura 4.4, que ilustra o comportamento do sistema. □

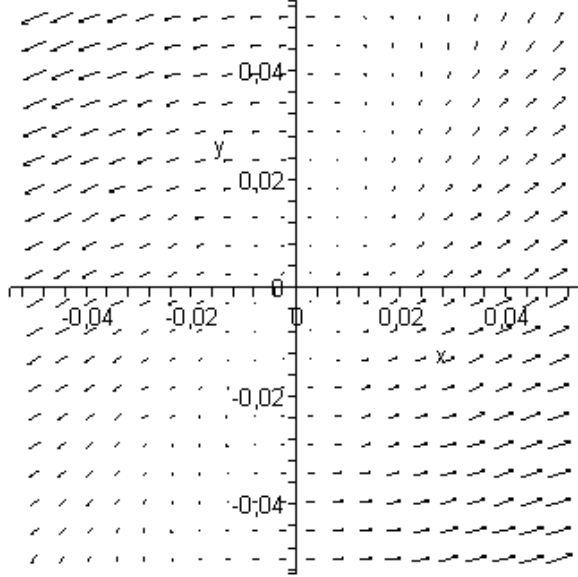


Figura 4.3: Campo de direções do sistema $x' = 2x - y + x^2 + xy + y^2, y' = x + 3xy$.

Demonstração da Proposição 1.0.4. Consideremos (P, Q) um campo de vetores quadráticos. A nossa hipótese garante que existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $R = P + \lambda_0 Q$ é o vazio ou um único ponto. Então, podemos assumir que

$$R = P(x, y) + \lambda_0 Q(x, y) \geq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Queremos provar que o campo de vetores quadráticos (P, Q) não tem trajetórias fechadas.

Suponhamos, por absurdo, que $\gamma(t) = (u(t), v(t)) \in \mathcal{U}$, $t \in [0, T]$ é uma trajetória fechada do sistema quadrático (P, Q) .

Tomemos

$$V(x, y) = \exp(x + \lambda_0 Q(x, y)).$$

Observe que V é uma solução da equação diferencial (1.1), isto é,

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = R \cdot V$$

com $R = P + \lambda_0 Q$. Note que $R \geq 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

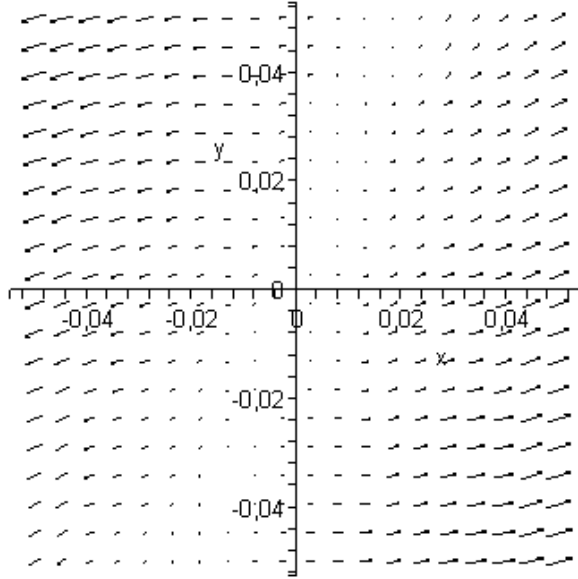


Figura 4.4: Campo de direções do sistema $x' = 3x - y + x^2 + xy + 2y^2, y' = x + 2xy$.

Como nenhuma trajetória fechada γ está contida em $R = 0$ e $R \geq 0$ temos então que

$$\int_{\gamma} R dt > 0.$$

Logo, pelo Teorema 1.0.1, segue que $\gamma \subset \Sigma$. Contudo, note que

$$V(x, y) = \exp(x + \lambda_0 Q) > 0.$$

Portanto, o sistema (P, Q) não tem trajetórias fechadas. ■

Exemplo 5. Consideremos o sistema quadrático

$$x' = x^2 - y^2 - x + y + 1, \quad y' = y^2 - y + 1.$$

Tomando $\lambda_0 = 1$, segue que $R = P + \lambda_0 Q = x^2 - x + 2$. Observe que $x^2 - x + 2 \geq 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e mais, o lugar geométrico dos pontos (x, y) que satisfazem $R = 0$ é o vazio. Portanto, pela Proposição (1.0.4), o sistema dado não tem trajetórias fechadas.

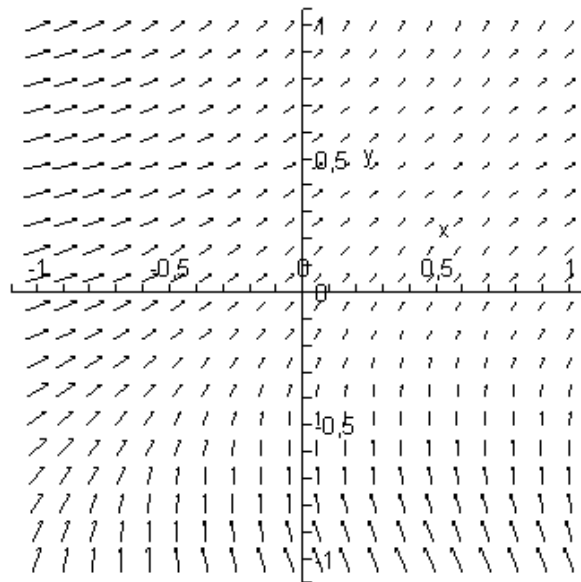


Figura 4.5: Campo de direções do sistema $x' = x^2 - y^2 - x + y + 1, y' = y^2 - y + 1$.

Veja a Figura (4.5) que esboça o comportamento do sistema acima. $\square$

Exemplo 6. O sistema quadrático

$$x' = 3x^2 + 2y^2 - x - 2y, \quad y' = x^2 + y^2 - y - 1$$

não tem trajetórias fechadas, pois tomando $\lambda_0 = -2$, obtemos que $R = P + \lambda_0 Q = x^2 - x + 2 \geq 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e o lugar geométrico dos pontos (x, y) que satisfazem $R = 0$ é o vazio. Portanto, satisfaz a Proposição (1.0.4). Isto pode ser observado na Figura (4.6) que esboça o comportamento do sistema dado. $\square$

Exemplo 7. Consideremos o sistema quadrático

$$x' = -x^2 + 4x - y + xy - 1, \quad y' = 2x^2 - 2x + y - xy + 3.$$

Tomando $\lambda_0 = 1$, obtemos $R = P + \lambda_0 Q = x^2 + 2x + 2 \geq 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e o lugar geométrico dos pontos (x, y) que satisfazem $R = 0$ é o vazio. Portanto, pela

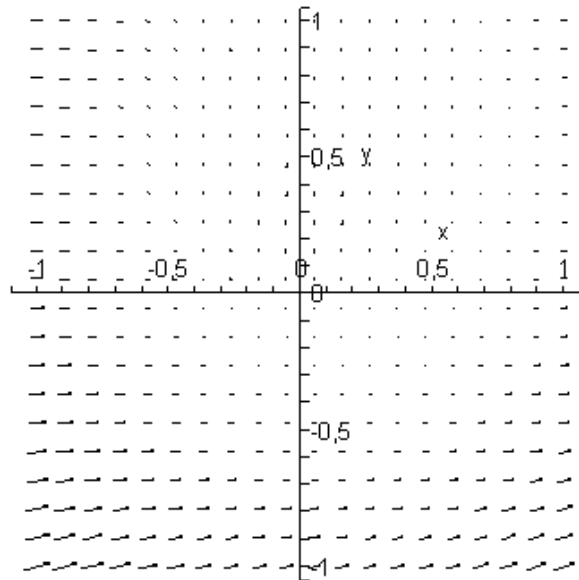


Figura 4.6: Campo de direções do sistema $x' = 3x^2 + 2y^2 - x - 2y, y' = x^2 + y^2 - y - 1$.

Proposição (1.0.4), o sistema dado não tem trajetórias fechadas. Veja na Figura (4.7) o comportamento do sistema. $\square$

Exemplo 8. Consideremos o sistema quadrático

$$x' = x^2 + 2x - y + 2xy, \quad y' = y^2 - x + 0,5y - xy.$$

Tomando $\lambda_0 = 2$, temos $R = P + \lambda_0 Q = x^2 + 2y^2$. Daí, obtemos que $R \geq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e o lugar geométrico dos pontos (x, y) que satisfazem $R = 0$ é um único ponto. Pela Proposição (1.0.4), o sistema dado não tem trajetórias fechadas, como pode ser observado no comportamento dado pela Figura (4.8). $\square$

Como mencionamos no Capítulo 1, o Primeiro Critério mostra que, quando conhecemos explicitamente a trajetória $V(x, y) = 0$ do campo de vetores (P, Q) através da equação (1.1) para um dado R , obtemos informações adicionais sobre as soluções periódicas de (P, Q) . Em geral, é difícil conhecer explicitamente uma trajetória, com exceção dos

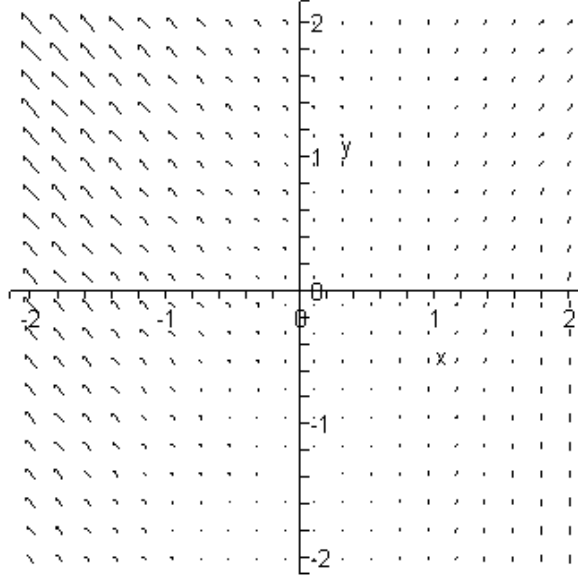


Figura 4.7: Campo de direções do sistema $x' = -x^2 + 4x - y + xy - 1$, $y' = 2x^2 - 2x + y - xy + 3$.

pontos singulares.

A próxima proposição usa o ponto singular na origem para obter informações sobre as soluções periódicas do Teorema 1.0.1.

Demonstração da Proposição 1.0.5. Consideremos o sistema quadrático

$$x' = \delta x - y + lx^2 + mxy + ny^2, \quad y' = x(1 + ax + by)$$

com $\delta^2 - 4 < 0$ e γ uma trajetória fechada deste sistema. Suponhamos

$$R = \frac{\delta(x^2 - \delta xy + y^2) + (2l - \delta a)x^3 + (2(m + a) - \delta(b + l))x^2y + (2(n + b) - \delta m)xy^2 - \delta ny^3}{x^2 - \delta xy + y^2}.$$

Queremos provar que $\int_{\gamma} R dt = 0$.

Suponhamos, por absurdo, que $\int_{\gamma} R dt \neq 0$. Seja

$$V = x^2 - \delta xy + y^2.$$

Note que V é solução da equação diferencial $P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = RV$ associada ao campo e a

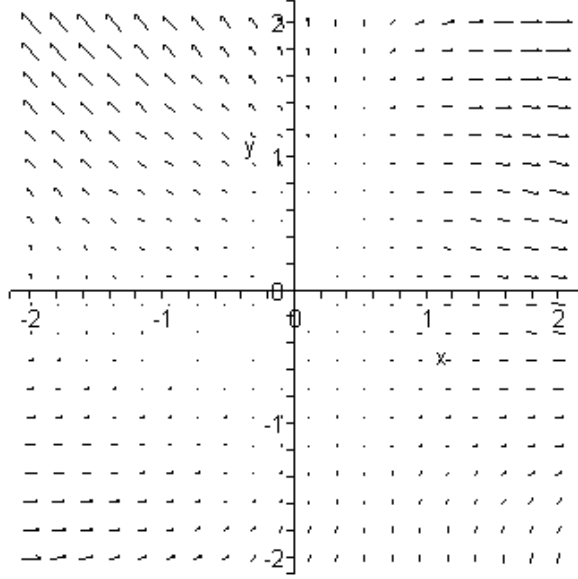


Figura 4.8: Campo de direções do sistema $x' = x^2 + 2x - y + 2xy, y' = y^2 - x + 0,5y - xy$.

aplicação R dados acima. De fato,

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = (\delta x - y + lx^2 + mxy + ny^2)(2x - \delta y) + (x(1 + ax + by))(-\delta x + 2y) =$$

$$R \cdot (x^2 - \delta xy + y^2) = RV.$$

Pelo Teorema 1.0.1, obtemos $\gamma \subset \Sigma$. Observe que

$$V(x, y) = 0 \iff (x, y) = (0, 0),$$

pois caso contrário obtemos que

$$x^2 - \delta xy + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = \delta xy \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = \delta^2 x^2 y^2.$$

Por hipótese, $\delta^2 - 4 < 0 \Rightarrow \delta^2 < 4$.

Daí,

$$(x^2 + y^2)^2 < 4x^2 y^2 \Rightarrow x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 - 4x^2 y^2 < 0 \Rightarrow x^4 - 2x^2 y^2 + y^4 < 0 \Rightarrow (x^2 - y^2)^2 < 0.$$

Portanto,

$$\gamma \subset \Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : V(x, y) = 0\} = \{(0, 0)\}.$$

Logo, qualquer trajetória fechada γ de (P, Q) deve satisfazer $\int_{\gamma} R dt = 0$. ■

Segundo as hipóteses da Proposição 1.0.5, se $\delta \neq 0$, então o conjunto de pontos $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : R(x, y) = 0\}$ não contém a origem.

Desde que $\int_{\gamma} R dt = 0$ para qualquer trajetória fechada γ , obtemos $\gamma \cap \Gamma \neq \emptyset$. Caso contrário, $R > 0$ ou $R < 0$ em γ e a integral nunca se anula.

Então, conhecendo Γ , sabemos algo sobre o tamanho dos ciclos limites na vizinhança da origem, se eles existem. Veja a Figura (4.9).

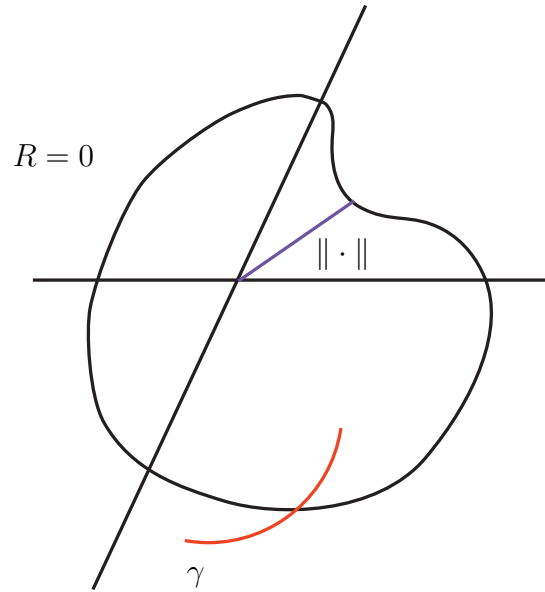


Figura 4.9: Tamanho dos ciclos limites.

Capítulo 5

Ciclos limites dos sistemas de Vorobev

Neste capítulo, estudaremos os sistemas cúbicos, em particular o sistema de Vorobev.

Definição 5.0.16. *O sistema cúbico da forma*

$$x' = -y + ax(x^2 + y^2 - 1), \quad y' = x + by(x^2 + y^2 - 1) \quad (5.1)$$

onde a e b são constantes, é chamado de sistema de Vorobev.

A próxima proposição estabelece condições para que tal sistema tenha ciclos limites, devido a Vorobev, veja [16].

Proposição 5.0.17. *Consideremos o sistema de Vorobev (5.1) com $ab > -1$ e $(a - b)^2 > 4$. Então o sistema (5.1) tem o ciclo limite*

$$x^2 + y^2 = 1$$

na vizinhança de um nó, a saber a origem.

Recordemos, da Observação 3, na Seção 2.1, que se $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ é uma solução periódica do sistema (5.1) de período T e

$$I = \int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (u(t), v(t)) dt \quad (5.2)$$

então $\gamma(t)$ é um *ciclo limite estável* se $I < 0$ e é um *ciclo limite instável* se $I > 0$. Quando $I \neq 0$, dizemos que o *ciclo limite é hiperbólico*.

A próxima proposição melhora o resultado de Vorobev sobre os ciclos limites do sistema (5.1).

Observação 1. Notemos que $(\cos(t), \sin(t))$ é uma solução do sistema de Vorobev. Disso, temos que $x^2 + y^2 = 1$ sempre é uma órbita periódica.

Proposição 5.0.18. *Consideremos o sistema de Vorobev (5.1), γ uma trajetória fechada do sistema (5.1) definida por $x^2 + y^2 = 1$, $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ e $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$.*

- (a) *Se $a + b = 0$ e $ab \neq 0$, então γ é o único ciclo limite do sistema (5.1).*
- (b) *Se $a + b \neq 0$, então γ é um ciclo limite hiperbólico, estável se $a + b < 0$ e instável se $a + b > 0$.*
- (c) *Se $a + b \neq 0$ e $ab \geq 0$, então γ é o único ciclo limite do sistema (5.1) e a origem é o único ponto singular.*
- (d) *Se $a + b \neq 0$ e $-1 \leq ab < 0$, então o sistema (5.1) não tem trajetórias fechadas em R_1 , e se ele tem alguma trajetória fechada em R_2 esta deve ser um ciclo limite hiperbólico com a mesma estabilidade que γ . Além disso, o sistema (5.1) tem 5 pontos singulares, 1 em R_1 e 4 em R_2 .*
- (e) *Suponha que $a + b \neq 0$ e $ab < -1$. Então, se o sistema (5.1) tem alguma trajetória fechada em R_2 (respectivamente em R_1), esta deve ser um ciclo limite hiperbólico com a mesma (respectivamente diferente) estabilidade que γ . Além disso, o sistema (5.1) tem 9 pontos singulares, 5 em R_1 e 4 em R_2 .*

Demonstração da Proposição 5.0.18.

- (a) Será demonstrada no Lema 6.2.3 no Capítulo 6.
- (b) Por hipótese, $a + b \neq 0$. Tomemos

$$x = \cos(t), \quad y = \sin(t)$$

a solução periódica associada a trajetória fechada γ , e

$$P(x, y) = -y + ax(x^2 + y^2 - 1), \quad Q(x, y) = x + by(x^2 + y^2 - 1).$$

A equação (5.2) torna-se

$$I = 2(a + b)\pi \quad (5.3)$$

De fato,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (u(t), v(t)) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} [3a \cos^2(t) + a \sin^2(t) - a + 3b \sin^2(t) + b \cos^2(t) - b] dt = \\ &= (3a + b) \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt + (a + 3b) \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt - (a + b) \int_0^{2\pi} dt = 2(a + b)\pi. \end{aligned}$$

Como $a + b \neq 0$ então, $I \neq 0$. Logo, γ é um ciclo limite hiperbólico. E mais, se $a + b < 0$ então $I < 0$. Assim, γ é estável. Analogamente, se $a + b > 0$, então $I > 0$. Portanto, γ é instável.

- (c) Por hipótese, $a + b \neq 0$ e $ab \geq 0$. Tomemos $R(x, y) = 2(ax^2 + by^2)$. Assim, $V(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ é uma solução da equação

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = RV$$

com R dado acima.

Tomemos $(u(t), v(t))$ uma solução periódica de período T , do sistema (5.1) e

$$J = \int_0^T R(t) dt = 2 \int_0^T [au^2(t) + bv^2(t)] dt.$$

Como $ab \geq 0$ e $a + b \neq 0$ temos

$$J \neq 0.$$

Pelo Teorema 1.0.1, a trajetória fechada

$$\{(u(t), v(t)) : t \in [0, T]\}$$

está contida em $\Sigma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

Assim, $\{(u(t), v(t)) : t \in [0, T]\}$ é o círculo $x^2 + y^2 = 1$. Portanto, γ é o único ciclo limite do sistema (5.1).

Note que $(0, 0)$ é um ponto singular do sistema (5.1). E mais, se o sistema (5.1) tem algum outro ponto singular, ele deve ser solução das equações

$$ax^2 + by^2 = 0, \quad x^2 + y^2 = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{-ab}}. \quad (5.4)$$

De fato, note que das equações

$$-y + ax(x^2 + y^2 - 1) = 0, \quad x + by(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

obtemos que

$$-y + ax(x^2 + y^2 - 1) = 0 \Rightarrow y = ax(x^2 + y^2 - 1).$$

Portanto,

$$x^2 + y^2 - 1 = \frac{y}{ax} \quad (5.5)$$

Substituindo a equação (5.5) na segunda equação do sistema (5.1):

$$x + by(x^2 + y^2 - 1) = 0 \Rightarrow x + by \frac{y}{ax} = 0 \Rightarrow ax^2 + by^2 = 0.$$

Portanto,

$$y = \pm \sqrt{\frac{-a}{b}} x \quad (5.6)$$

Por fim, substituindo a equação (5.6) na equação (5.5):

$$x^2 + y^2 - 1 = \pm \frac{1}{\sqrt{-ab}}.$$

Logo,

$$x^2 + y^2 = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{-ab}}, \quad ax^2 + by^2 = 0.$$

Como $ab \geq 0$, temos que nenhum ponto $(x, y) \neq (0, 0)$ satisfaz a equação (5.4).

Portanto, a origem é o único ponto singular do sistema (5.1).

(d) Note que

$$A = \begin{pmatrix} -a & -1 \\ 1 & -b \end{pmatrix}$$

é a matriz obtida da parte linear do sistema (5.1). Daí, temos $\det A = ab + 1 \geq 0$ e $\operatorname{tr} A = -(a + b)$. Logo, a origem é um nó ou um foco.

Recorde que, se $\operatorname{tr} A > 0$, então o ponto de equilíbrio é instável e, se $\operatorname{tr} A < 0$, então o ponto de equilíbrio é estável.

Logo, a origem é instável se $a + b < 0$, e estável se $a + b > 0$. Note que no item (b) temos que, se $a + b < 0$, então γ é estável e se $a + b > 0$ então γ é instável.

Portanto, a estabilidade da origem e de γ são contrárias.

Suponhamos, por absurdo, que $(u(t), v(t))$ seja uma solução periódica de período T , do sistema (5.1) em R_1 , ou seja, $u^2(t) + v^2(t) < 1$. Agora, tomemos $R(x, y) = 2(ax^2 + by^2)$ e

$$J = \int_0^T R(t) dt = 2 \int_0^T [au^2(t) + bv^2(t)] dt.$$

Assim, $V(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ é uma solução da equação

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = RV$$

com R dado acima.

Como $a + b \neq 0$ e $-1 \leq ab < 0$, segue que $J = 0$. Caso contrário, pelo Primeiro Critério, $\{(u(t), v(t)) : t \in [0, T]\}$ é o círculo $x^2 + y^2 = 1$. Assim, a equação (5.2) torna-se

$$I = \int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (u(t), v(t)) dt = (a + b) \int_0^T (u^2(t) + v^2(t) - 1) dt.$$

Como $a + b \neq 0$ segue que $I \neq 0$. Logo, $(u(t), v(t))$ é um ciclo limite hiperbólico.

Portanto, $(u(t), v(t))$ ou é um ciclo limite estável ou instável. Como origem e γ têm estabilidade contrária, segue que se $(u(t), v(t))$ é uma trajetória fechada em R_1 então $(u(t), v(t))$ é semi-estável, o que contradiz o fato de ser hiperbólica.

Logo, não existe ciclo limite $(u(t), v(t))$ em R_1 .

Suponhamos que $(u(t), v(t))$ seja uma trajetória fechada em R_2 . Daí, $u^2(t) + v^2(t) > 1$. Tomemos $R = 2(ax^2 + by^2)$ e $J = \int_0^T R(t)dt$. Note que

$$V(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

é uma solução da equação diferencial

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = RV$$

com R dado acima. E mais, $J = 0$. Do contrário, obteríamos do Teorema 1.0.1 que $\{(u(t), v(t)) : t \in [0, T]\}$ é o círculo $x^2 + y^2 = 1$, o que contradiz a hipótese que γ é diferente de $(u(t), v(t))$.

Assim, a equação (5.2) torna-se

$$I = \int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (u(t), v(t)) dt = (a + b) \int_0^T (u^2(t) + v^2(t) - 1) dt \quad (5.7)$$

Como $a + b \neq 0$, segue que $I \neq 0$. Logo, $(u(t), v(t))$ é um ciclo limite hiperbólico.

Daí e da equação (5.7) obtemos que se $a + b > 0$, então $I > 0$ e se $a + b < 0$ então $I < 0$. Portanto, das equações (5.3) e (5.7), temos que γ e $(u(t), v(t))$ tem a mesma estabilidade em R_2 .

Como $-1 \leq ab < 0$, $x^2 + y^2 \geq 2$ ou $x^2 + y^2 \leq 0$. Portanto,

$$ax^2 + by^2 = 0, \quad x^2 + y^2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{-ab}}$$

tem 4 soluções. Então, o sistema (5.1) tem 4 pontos singulares em R_2 e 1 em R_1 , a origem. Assim, o sistema (5.1) tem 5 pontos singulares.

- (e) Por hipótese $a + b \neq 0$ e $ab < -1$. Suponhamos que a solução periódica $(u(t), v(t))$ do sistema (5.1) é diferente de γ . Logo, $u^2(t) + v^2(t) - 1 \neq 0$.

Tomemos $R = 2(ax^2 + by^2)$ e $J = \int_0^T R(t)dt$. Note que

$$V(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

é uma solução da equação diferencial

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = RV$$

com R dado acima. E mais, $J = 0$, pois, caso contrário, obtemos do Teorema 1.0.1 que $\{(u(t), v(t)) : t \in [0, T]\}$ é o círculo $x^2 + y^2 = 1$, o que contradiz a hipótese que γ é diferente de $(u(t), v(t))$.

Assim, a equação (5.2) torna-se

$$I = \int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (u(t), v(t)) dt = (a + b) \int_0^T (u^2(t) + v^2(t) - 1) dt$$

ou seja, a equação (5.7). Como $a + b \neq 0$, segue que $I \neq 0$. Logo, $(u(t), v(t))$ é um ciclo limite hiperbólico.

Suponhamos que $(u(t), v(t))$ está contido em R_2 . Então,

$$u^2(t) + v^2(t) > 1.$$

Daí, e da equação (5.7), obtemos que se $a + b > 0$ então $I > 0$ e, se $a + b < 0$ então $I < 0$. Portanto, das equações (5.3) e (5.7) obtemos que γ e $(u(t), v(t))$ tem a mesma estabilidade em R_2 .

Agora, suponhamos que $(u(t), v(t))$ está contida em R_1 . Então,

$$u^2(t) + v^2(t) < 1.$$

Logo, da equação (5.7), se $a + b > 0$, então $I < 0$ e, se $a + b < 0$ então $I > 0$. Portanto, das equações (5.3) e (5.7), γ e $(u(t), v(t))$ tem estabilidade diferente em R_1 .

Por fim, como $ab < -1$ segue que

$$\sqrt{-ab} > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{-ab}} < 1.$$

Logo, $x^2 + y^2 < 1$ ou $x^2 + y^2 > 1$. Assim, obtemos 4 pontos singulares e a origem em R_1 , ou seja, as 4 soluções de

$$ax^2 + by^2 = 0, \quad x^2 + y^2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{-ab}} < 1$$

e mais 4 pontos singulares em R_2 , ou seja, as 4 soluções de

$$ax^2 + by^2 = 0, \quad x^2 + y^2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{-ab}} > 1.$$

Portanto, o sistema (5.1) tem 9 pontos singulares, sendo 5 em R_1 e 4 em R_2 . ■

A seguir, apresentamos alguns exemplos onde aplicamos a Proposição (5.0.18).

Exemplo 1. Consideremos o sistema quadrático

$$x' = -y - 2x(x^2 + y^2 - 1), \quad y' = x - y(x^2 + y^2 - 1).$$

Note que $a = -2$ e $b = -1$. Pelo item (b) da Proposição (5.0.18), γ é um ciclo limite hiperbólico estável.

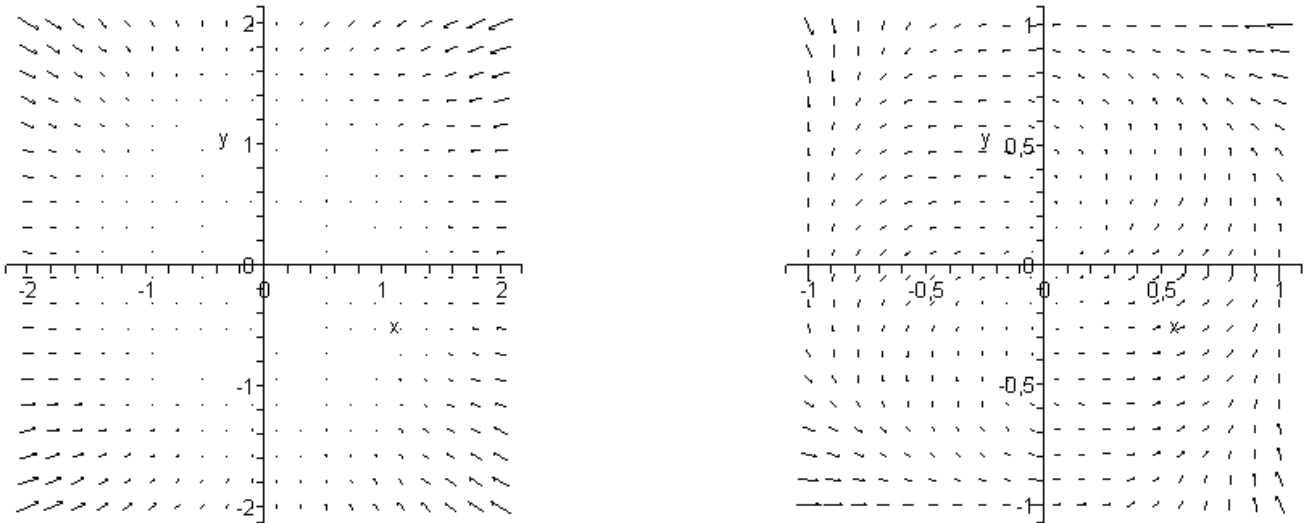


Figura 5.1: Campo de direções do sistema $x' = -y - 2x(x^2 + y^2 - 1), y' = x - y(x^2 + y^2 - 1)$.

O campo de direções é dado na Figura (5.1). □

Exemplo 2. Consideremos o sistema quadrático

$$x' = -y + 2x(x^2 + y^2 - 1), \quad y' = x + y(x^2 + y^2 - 1).$$

Como $a = 2$ e $b = 1$ segue que pelo item (b) da Proposição (5.0.18) γ é um ciclo limite hiperbólico instável. $\square$

Exemplo 3. Consideremos o sistema quadrático

$$x' = -y, \quad y' = x + 2y(x^2 + y^2 - 1).$$

Note que $a = 0$ e $b = 2$. Então, pelo item (c) da Proposição (5.0.18), temos que γ é o único ciclo limite do sistema dado e a origem é o único ponto singular.

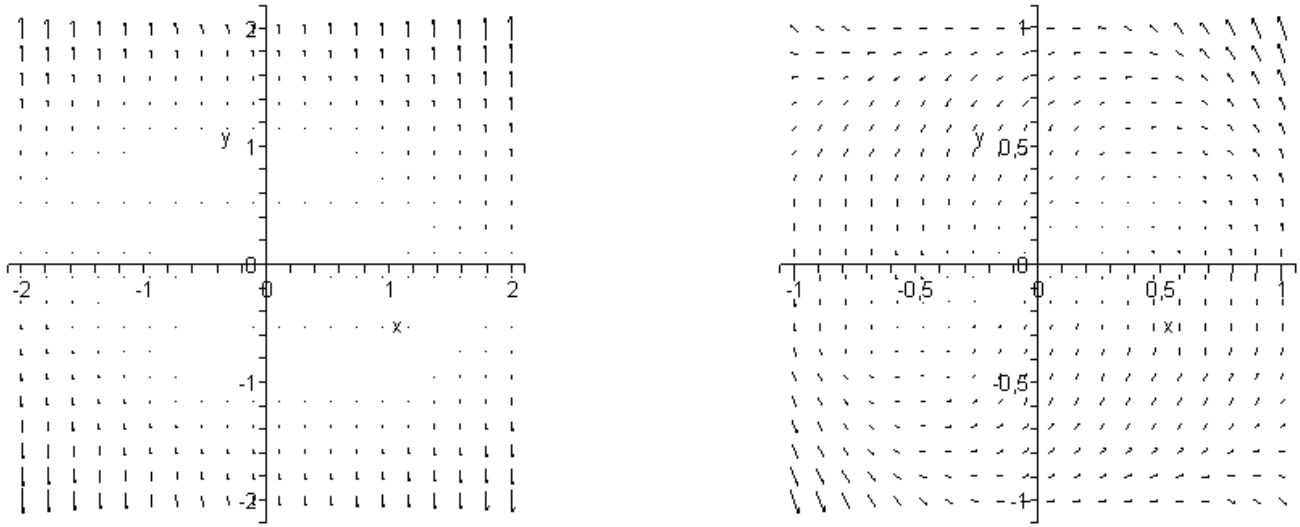


Figura 5.2: Campo de direções do sistema $x' = -y, y' = x + 2y(x^2 + y^2 - 1)$.

O campo de direções é dado na Figura (5.2). $\square$

Exemplo 4. Consideremos o sistema quadrático

$$x' = -y - x(x^2 + y^2 - 1), \quad y' = x - 2y(x^2 + y^2 - 1).$$

Note que $a = -1$ e $b = -2$. Portanto, pelo item (c) da Proposição (5.0.18), obtemos que γ é o único ciclo limite do sistema dado e a origem é o único ponto singular. $\square$

Exemplo 5. Consideremos o sistema quadrático

$$x' = -y + x(x^2 + y^2 - 1), \quad y' = x - \frac{1}{2}y(x^2 + y^2 - 1).$$

Como $a = 1$ e $b = -1/2$, $a + b \neq 0$ e $-1 \leq ab < 0$. Portanto, pelo item (d) da Proposição (5.0.18), o sistema acima não tem trajetória fechada em R_1 . E mais, se existe alguma trajetória fechada em R_2 , esta deve ser um ciclo limite hiperbólico instável.

□

Exemplo 6. Consideremos o sistema quadrático

$$x' = -y - \frac{1}{4}x(x^2 + y^2 - 1), \quad y' = x + \frac{1}{2}y(x^2 + y^2 - 1).$$

Note que $a = -\frac{1}{4}$ e $b = \frac{1}{2}$. Assim, $a + b \neq 0$ e $-1 \leq ab < 0$. Então, pelo item (d) da Proposição (5.0.18), segue que o sistema dado não tem trajetória fechada em R_1 . E mais, se existe alguma trajetória fechada em R_2 , esta deve ser um ciclo limite hiperbólico instável.

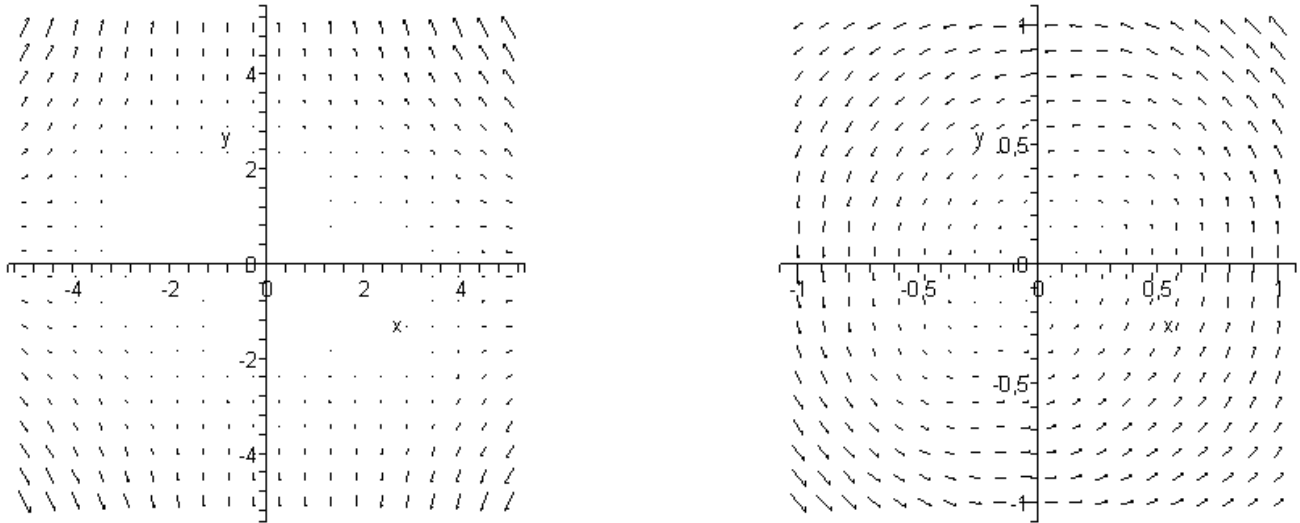


Figura 5.3: Campo de direções do sistema $x' = -y - \frac{1}{4}x(x^2 + y^2 - 1)$, $y' = x + \frac{1}{2}y(x^2 + y^2 - 1)$.

O campo de direções é dado na Figura (5.3).

□

Exemplo 7. Consideremos o sistema quadrático

$$x' = -y + \frac{1}{2}x(x^2 + y^2 - 1), \quad y' = x - \frac{1}{10}y(x^2 + y^2 - 1).$$

Note que $a = \frac{1}{2}$ e $b = -\frac{1}{10}$. Daí, $a + b \neq 0$ e $-1 \leq ab < 0$. Pelo item (d) da Proposição (5.0.18), o sistema dado não tem trajetória fechada em R_1 . Se existir alguma trajetória fechada em R_2 , esta deve ser um ciclo limite hiperbólico instável. $\square$

Exemplo 8. Consideremos o sistema quadrático

$$x' = -y + 2x(x^2 + y^2 - 1), \quad y' = x - y(x^2 + y^2 - 1).$$

Como $a = 2$ e $b = -1$, obtemos que $a + b \neq 0$ e $ab < -1$. Portanto, pelo item (e) da Proposição (5.0.18), se o sistema dado possui alguma trajetória fechada em R_1 (respectivamente R_2), esta deve ser um ciclo limite hiperbólico estável (respectivamente instável).

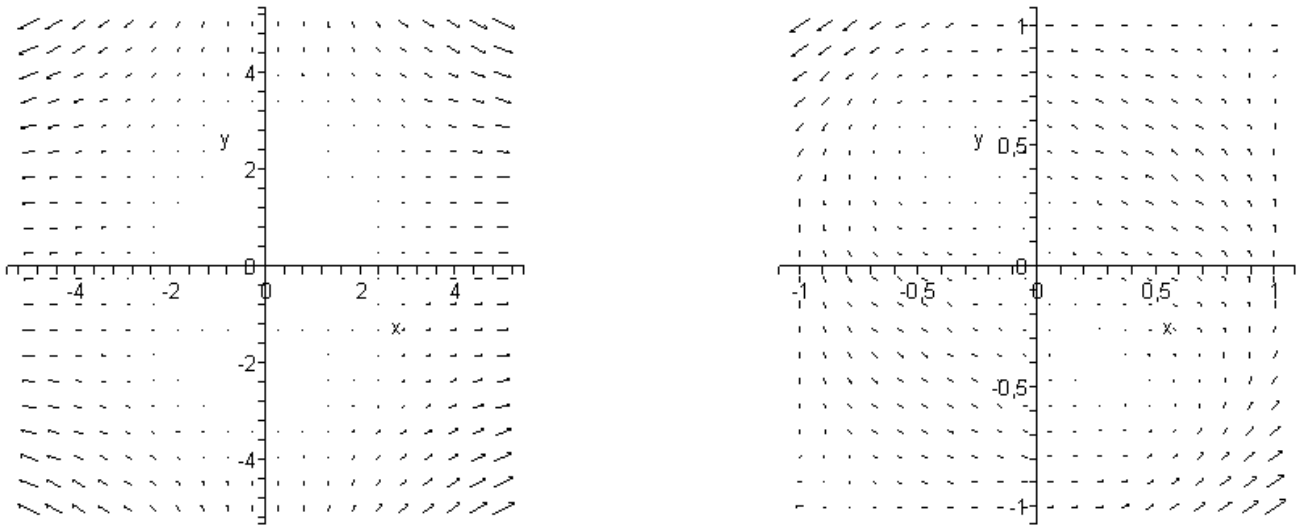


Figura 5.4: Campo de direções do sistema $x' = -y + 2x(x^2 + y^2 - 1)$, $y' = x - y(x^2 + y^2 - 1)$.

O campo de direções é dado na Figura (5.4). $\square$

Exemplo 9. Consideremos o sistema quadrático

$$x' = -y + x(x^2 + y^2 - 1), \quad y' = x - 2y(x^2 + y^2 - 1).$$

Como $a = 1$ e $b = -2$ segue que $a + b \neq 0$ e $ab < -1$. Portanto, pelo item (e) da Proposição (5.0.18), segue que se o sistema dado tem alguma trajetória fechada em R_1 (respectivamente R_2) esta deve ser um ciclo limite hiperbólico instável (respectivamente estável). $\square$

Exemplo 10. Consideremos o sistema quadrático

$$x' = -y - 2x(x^2 + y^2 - 1), \quad y' = x + \frac{1}{4}y(x^2 + y^2 - 1).$$

Note que $a = -2$ e $b = \frac{1}{4}$. Daí, $a + b \neq 0$ e $ab < -1$. Portanto, pelo item (e) da Proposição (5.0.18), segue que, se o sistema dado tem alguma trajetória fechada em R_1 (respectivamente R_2), esta deve ser um ciclo limite hiperbólico instável (respectivamente estável). $\square$

Capítulo 6

O fator de integração inverso

Neste capítulo, provaremos o Segundo Critério. Para tanto, recordaremos algumas definições e apresentaremos alguns resultados preliminares. Um destes resultados diz que os campos vetoriais associados a sistemas hamiltonianos não têm ciclos limites.

6.1 Sistemas Hamiltonianos

Definição 6.1.1. *Sejam $\mathcal{U}$ um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^2$ e $H : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação de classe C^2 . Um sistema da forma*

$$x' = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad y' = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (x, y) \in \mathcal{U} \quad (6.1)$$

é chamado um sistema Hamiltoniano.

Exemplo 1. Considere o sistema $x' = y$, $y' = -kx$. Tomemos $H(x, y) = \frac{1}{2}(y^2 + kx^2)$, segue que $\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = kx$ e $\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = y$. Logo, o sistema acima pode ser reescrito da seguinte forma

$$x' = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad y' = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

ou seja, é Hamiltoniano. □

Exemplo 2. Considere o sistema

$$x' = y, \quad y' = -x^3 + x.$$

Tomemos $H(x, y) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$. Daí, $\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = x^3 - x$ e $\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = y$. Logo, H é uma função Hamiltoniana e, consequentemente, o sistema dado é um sistema Hamiltoniano. $\square$

Definição 6.1.2. Um difeomorfismo $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, onde $\mathcal{U}$ é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^2$, preserva área se, para qualquer aberto limitado $\mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}^2$, os conjuntos $h(\mathcal{U}_1)$ e $\mathcal{U}_1$ tem a mesma área.

A seguinte proposição afirma que um difeomorfismo preserva área se, e somente se, seu determinante jacobiano tem valor absoluto igual a 1 em cada ponto.

Proposição 6.1.3. Um difeomorfismo $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, onde $\mathcal{U}$ é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^2$, de classe C^1 preserva área se, e somente se, o determinante jacobiano de h tem valor absoluto constante e igual a 1, ou seja, se, e somente se,

$$|\det Dh(x)| = 1$$

para qualquer $x \in \mathcal{U}$.

Demonstração.

Para abertos limitados $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$, temos que vale

$$A(\mathcal{U}) = \int_{\mathcal{U}} dx = \int_{h^{-1}(\mathcal{U})} |\det Dh(x)| dx$$

e, em particular,

$$A(h(\mathcal{U})) = \int_{h(\mathcal{U})} dx = \int_{\mathcal{U}} |\det Dh(x)| dx.$$

Suponhamos que $|\det Dh(x)| = 1$ para qualquer $x \in \mathcal{U}$. Logo,

$$A(h(\mathcal{U})) = \int_{\mathcal{U}} |\det Dh(x)| dx = \int_{\mathcal{U}} dx = A(\mathcal{U}).$$

Portanto, h preserva área.

Por outro lado, se h preserva área e supormos, por absurdo, que exista um $x \in \mathcal{U}$ tal que $|\det Dh(x)| > 1$, pela continuidade de $\det Dh(x)$, obtemos $v > 1$ e um aberto limitado $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ tal que $|\det Dh(x)| \geq v > 1$ para cada $x \in \mathcal{U}_1$ e portanto,

$$A(h(\mathcal{U}_1)) = \int_{\mathcal{U}_1} |\det Dh(x)| dx \geq \int_{\mathcal{U}_1} v dx = v \int_{\mathcal{U}_1} dx = v A(\mathcal{U}_1) > A(\mathcal{U}_1)$$

o que contradiz a hipótese que h preserva área. ■

Agora, considere $X : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores polinomial cujo fluxo $\phi_t : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ está definido para todo t real.

Definição 6.1.4. Dizemos que o fluxo do campo X preserva área se

$$A(\phi_t(\mathcal{U}_1)) = A(\mathcal{U}_1)$$

para cada $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$ de área finita e para cada $t \in \mathbb{R}$.

Recorde que o divergente do campo $X = (P, Q)$ é o traço da matriz jacobiana de X , ou seja,

$$\operatorname{div} X = \operatorname{tr} DX(x) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

A seguir, apresentamos o Teorema de Liouville, que nos afirma que o divergente de um campo determina a taxa de variação da área pela ação do fluxo do campo.

Teorema 6.1.5 (Teorema de Liouville). *Se um campo de classe C^1 tem divergente nulo, então seu fluxo preserva área.*

Demonstração.

Pela fórmula de Liouville,

$$\det D\phi_t(x) = \exp\left(\int_0^t \operatorname{tr} DX(\phi_s(x)) ds\right).$$

Como $\operatorname{div} X = 0$,

$$A(\phi_t(\mathcal{U}_1)) = \int_{\mathcal{U}_1} |\det D\phi_t(x)| dx = \int_{\mathcal{U}_1} \exp\left(\int_0^t \operatorname{tr} DX(\phi_s(x)) ds\right) dx = \int_{\mathcal{U}_1} dx = A(\mathcal{U}_1).$$

Portanto, o fluxo do campo preserva a área. ■

O Teorema de Liouville nos assegura que a área de $\phi_t(\mathcal{U}_1)$ é constante em t , de modo que não é possível que todas estas trajetórias se afastem uma das outras, pois isto causaria uma expansão da área de $\mathcal{U}_1$: se existir uma direção em que as trajetórias se afastem uma das outras, deverá também existir uma outra direção em que as trajetórias se aproximam

uma das outras, veja a Figura (6.1).

Exemplo 3. Considere a função Hamiltoniana $H(\theta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2 - g \cos \theta$, onde g é a constante de gravidade. A equação dada pelo campo hamiltoniano associado a esta função hamiltoniana descreve o pêndulo sem atrito e com $l = m = 1$, obtemos $(\theta', \omega') = (\omega, -g \sin \theta)$.

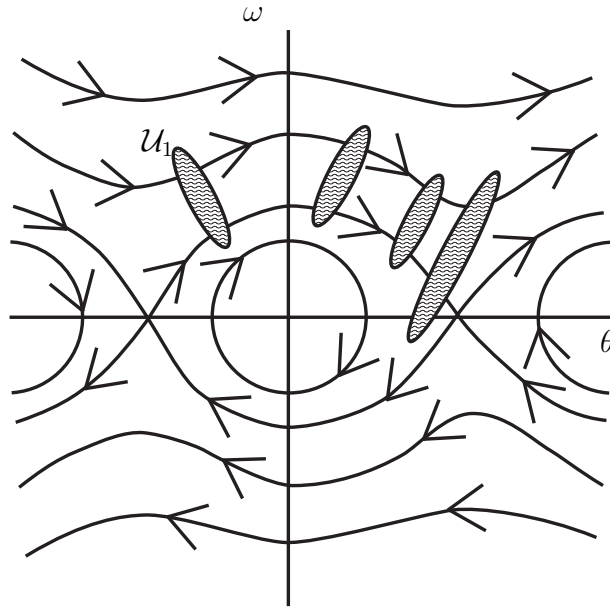


Figura 6.1: O fluxo de um pêndulo sem atrito preserva área.

A Figura (6.1) mostra, em termos genéricos, o que pode acontecer com a evolução temporal $\phi_t(\mathcal{U}_1)$ de $\mathcal{U}_1$ pelo fluxo do pêndulo sem atrito. $\square$

O próximo resultado nos diz que o fluxo associado a qualquer sistema Hamiltoniano (6.1) preserva a área.

Proposição 6.1.6. *O fluxo de campos hamiltonianos preserva a área.*

Demonstração.

Consideremos o sistema hamiltoniano (6.1), ou seja,

$$x' = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad y' = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Pelo Teorema de Liouville, basta mostrar que o $\operatorname{div} X = 0$. Note que como H é de classe C^2 ,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial H}{\partial x} \right).$$

Daí,

$$\operatorname{div} X = \operatorname{tr} DX = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial H}{\partial x} \right) = 0.$$

Portanto, todo campo hamiltoniano tem divergente nulo. Logo, o fluxo do campo X preserva a área. ■

Observe que o fluxo de um campo planar que preserva área tem propriedades especiais. Por exemplo, tomando a aplicação de Poincaré $\pi : S \rightarrow H$ de primeiro retorno em alguma seção transversal local S , se $\pi(x_1) = x_2 \neq x_1$ para algum par de pontos $x_1, x_2 \in S$, então o fluxo ϕ_{t^*} de X no tempo t^* de primeiro retorno da trajetória leva $\mathcal{U}_1$ (aproximadamente) em $\phi_{t^*}(\mathcal{U}_1) = W$, veja a Figura (6.2). Como a área da região $\mathcal{U}_1$ é maior do que a área da região W , o fluxo de X não preserva área.

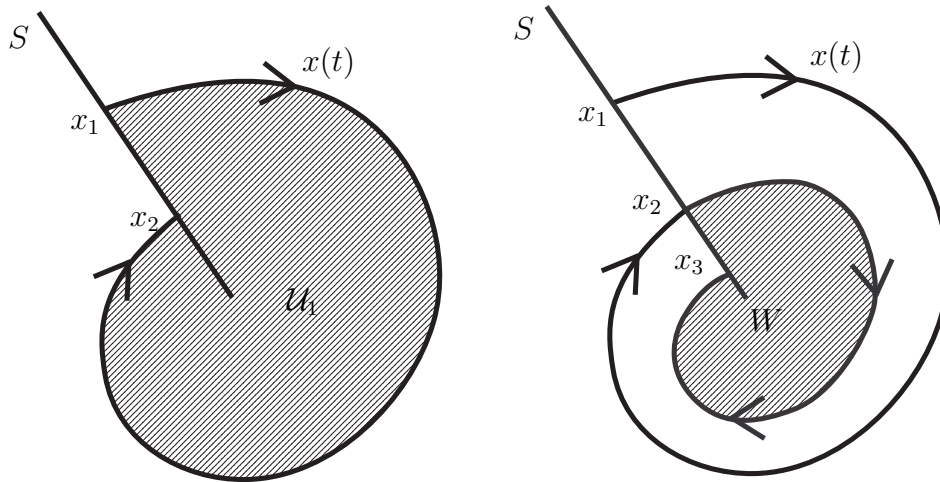


Figura 6.2: O que não pode ocorrer num fluxo que preserva área.

Assim, se o fluxo de um campo planar preserva área então a aplicação de primeiro retorno deve ser a identidade $\pi(x) = x$, veja a Figura (2.3).

Assim, podemos concluir que os sistemas Hamiltonianos planar não tem ciclos limites.

Definição 6.1.7. *Uma integral primeira da equação diferencial $x' = X(x)$ de primeira ordem associada a um campo $X : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $\mathcal{U}$ é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^2$, é uma função diferenciável $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ que não é constante em conjuntos abertos, mas que é constante ao longo de cada solução da equação diferencial.*

Em outras palavras, cada solução da equação permanece confinada a uma única superfície de nível $V_\alpha = \{x \in \mathcal{U} : V(x) = \alpha\}$ da integral primeira V . Observe que o conceito de integral primeira leva em conta o domínio $\mathcal{U}$ do campo.

Proposição 6.1.8. *Considere o sistema Hamiltoniano (6.1). Então, a aplicação H é uma integral primeira do sistema Hamiltoniano, ou seja, $H(x, y)$ permanece constante ao longo das trajetórias do sistema.*

Demonstração.

Basta observar que

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{-\partial H}{\partial x} = 0.$$

Logo, $\dot{H} = 0$, e consequentemente H é constante ao longo de cada solução. ■

Então, pela proposição acima, para descrever o retrato de fase de um sistema Hamiltoniano, é suficiente desenhar as curvas de níveis $H(x, y) = c$, onde c é uma constante.

Note que, como o divergente de um sistema hamiltoniano é identicamente nulo, se (x_0, y_0) é um ponto singular do sistema hamiltoniano (6.1), então o traço da parte linear do sistema (6.1) em (x_0, y_0) é zero.

6.2 O segundo critério para existência de ciclos limite

Definição 6.2.1. *Uma aplicação $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 é um fator de integração inverso do sistema (2.1), isto é, $x' = P(x, y)$, $y' = Q(x, y)$ em $\mathcal{U}$ se V é uma solução*

da equação diferencial parcial linear

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V, \quad (x, y) \in \mathcal{U}.$$

Proposição 6.2.2. *Se V é um fator de integração inverso do sistema (2.1), então o sistema associado ao campo $\frac{1}{V}(P, Q)$ é Hamiltoniano.*

Demonstração.

Por hipótese, V é um fator de integração inverso do sistema (2.1), por definição, V é solução da equação diferencial parcial linear

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V, \quad (x, y) \in \mathcal{U}.$$

Tomemos

$$H(x, y) = \int \frac{1}{V} P dy + c,$$

onde c é uma constante qualquer. Daí,

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{V} P \right) dy = \int \left(-\frac{1}{V^2} \frac{\partial V}{\partial x} P + \frac{1}{V} \frac{\partial P}{\partial x} \right) dy = \int -\frac{1}{V^2} \left(P \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} V \right) dy.$$

Como V é um fator de integração,

$$P \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} V = \frac{\partial Q}{\partial y} V - Q \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= \int -\frac{1}{V^2} \left(P \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} V \right) dy = \int -\frac{1}{V^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial y} V - Q \frac{\partial V}{\partial y} \right) dy = \\ &= \int \left(\frac{1}{V^2} \frac{\partial V}{\partial y} Q - \frac{1}{V} \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dy = \int \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{V} Q \right) dy = -\frac{1}{V} Q. \end{aligned}$$

E mais,

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \int \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{V} P \right) dy = \frac{1}{V} P.$$

Por fim, observe H é de classe C^2 . Portanto, o sistema associado ao campo $\frac{1}{V}(P, Q)$ é hamiltoniano. ■

Agora, estamos em condições de provar o Segundo Critério.

Demonstração do Segundo Critério.

Consideremos (P, Q) um campo de vetores polinomial definido em um subconjunto aberto $\mathcal{U}$ do $\mathbb{R}^2$ e $V = V(x, y)$, de classe C^1 , uma solução da equação diferencial parcial linear

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V.$$

Queremos provar que se $\gamma(t) = (u(t), v(t))$, com $t \in [0, T]$, é um ciclo limite de (P, Q) , então γ está contida em $\Sigma = \{(x, y) \in \mathcal{U} : V(x, y) = 0\}$.

Note que o campo $\frac{1}{V}(P, Q) : \mathcal{U} \setminus \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$ é hamiltoniano, consequentemente não tem ciclo limite. Mas, γ é ciclo de (P, Q) . Logo, γ é ciclo de $\frac{1}{V}(P, Q) : \mathcal{U} \setminus \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$, pois (P, Q) e $\frac{1}{V}(P, Q)$ são topologicamente equivalentes. Então, como Σ é invariante por (P, Q) , γ não está contida em $\mathcal{U} \setminus \Sigma$. Logo, $\gamma \subset \Sigma$.

Portanto, $V(\gamma(t)) = 0$, para todo $t \in [0, T]$. ■

Agora podemos provar a sentença (a) da Proposição (5.0.18) no seguinte lema.

Lema 6.2.3. *Seja γ uma trajetória do sistema (5.1) definida por $x^2 + y^2 = 1$. Se $a + b = 0$ e $ab \neq 0$, então γ é o único ciclo limite do sistema (5.1).*

Demonstração.

Por hipótese, γ é uma trajetória do sistema

$$x' = -y + ax(x^2 + y^2 - 1) = P(x, y), \quad y' = x - ay(x^2 + y^2 - 1) = Q(x, y).$$

Tomemos

$$V = V(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Note que

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V.$$

Logo, pelo Segundo Critério, todos os ciclos limites do sistema (5.1) estão contidos em $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : V(x, y) = 0\}$. Observe que

$$V(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Portanto, γ é o único ciclo limite do sistema (5.1). ■

Por fim, apresentamos dois exemplos de aplicação do Lema (6.2.3).

Exemplo 1. Consideremos o sistema quadrático

$$x' = -y + x(x^2 + y^2 - 1), \quad y' = x - y(x^2 + y^2 - 1).$$

Como $a = 1$ e $b = -1$, $a + b = 0$ e $ab \neq 0$. Portanto, pelo Lema (6.2.3), γ é o único ciclo limite do sistema.

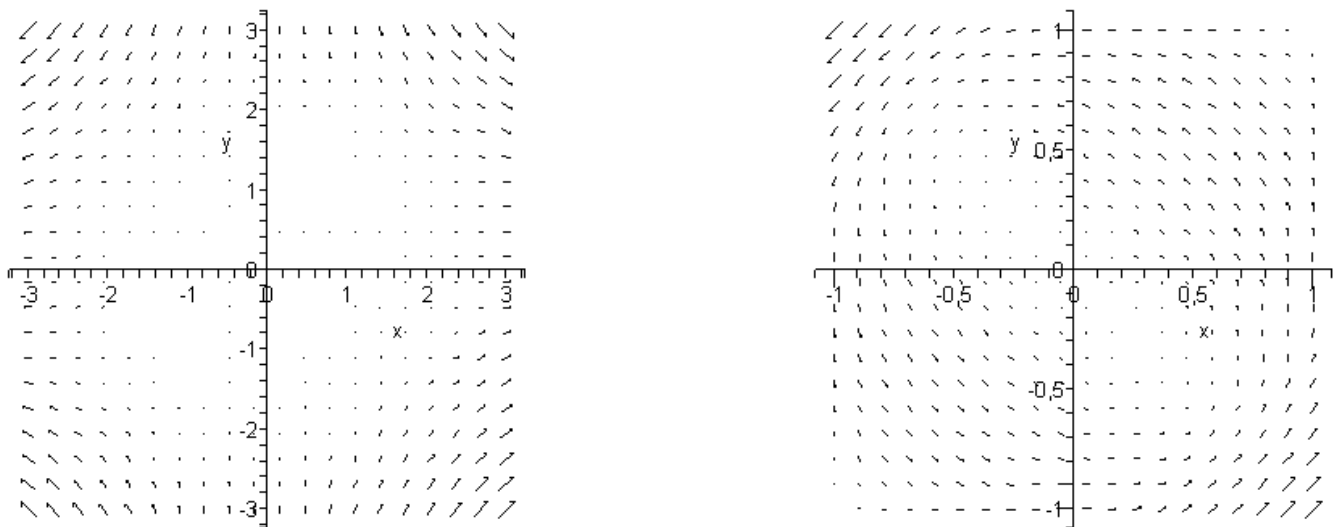


Figura 6.3: Campo de direções do sistema $x' = -y + 2x(x^2 + y^2 - 1)$, $y' = x - y(x^2 + y^2 - 1)$.

O campo de direções é dado na Figura (6.3). □

Exemplo 2. Consideremos o sistema quadrático

$$x' = -y - 2x(x^2 + y^2 - 1), \quad y' = x + 2y(x^2 + y^2 - 1).$$

Como $a = -2$ e $b = 2$, obtemos que $a + b = 0$ e $ab \neq 0$. Pelo Lema (6.2.3), γ é o único ciclo limite do sistema.

O campo de direções é dado na Figura (6.4). □

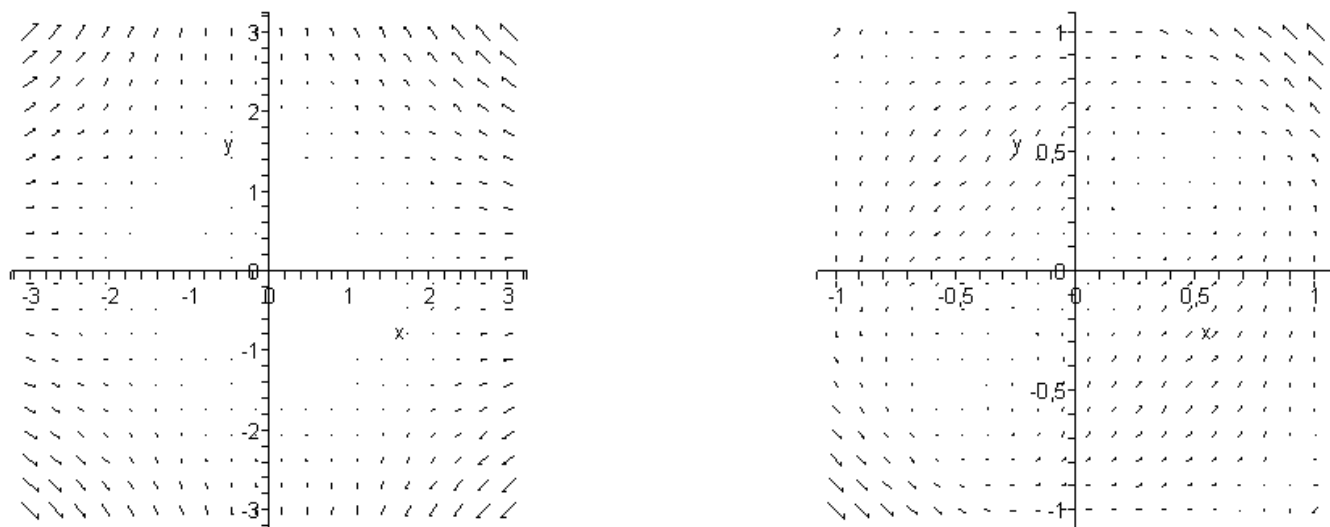


Figura 6.4: Campo de direções do sistema $x' = -y + 2x(x^2 + y^2 - 1)$, $y' = x - y(x^2 + y^2 - 1)$.

Capítulo 7

Bifurcações de ciclos limites a partir de centros

Neste capítulo, estudaremos as bifurcações de ciclos limites a partir de centros dos campos vetoriais polinômiais.

Consideraremos os sistemas da forma

$$x' = P(x, y) + \varepsilon p(x, y, \varepsilon), \quad y' = Q(x, y) + \varepsilon q(x, y, \varepsilon) \quad (7.1)$$

onde P , Q , p e q dependem analiticamente de suas variáveis, ε é um pequeno parâmetro e o sistema tem um centro na origem quando $\varepsilon = 0$.

Definição 7.0.4. *Dizemos que o sistema (7.1) com $\varepsilon = 0$ é um sistema não perturbado.*

Assim, o problema é determinar o número e as posições dos ciclos limites que emergem das trajetórias fechadas do sistema não perturbado quando o parâmetro ε é variado.

Existem três métodos clássicos para a análise destes problemas de bifurcações. O primeiro método é baseado na aplicação de primeiro retorno de Poincaré, o segundo no método da integral de Poincaré-Melnikov e o último método é o da integral Abelian. Na verdade, os dois últimos métodos são equivalentes, veja [1].

A idéia básica destes métodos é fazer uso das soluções gerais do sistema integrável não-perturbado no cálculo das soluções do sistema perturbado.

Aqui, apresentamos um novo método, baseado no Segundo Critério. Como veremos, tal método pode também obter a forma global dos ciclos limites bifurcados em função de x , y e ε . Observe que esta forma global não pode ser obtida pelos métodos clássicos.

Para ilustrar o uso do Segundo Critério no estudo das bifurcações de ciclos limites a partir de centros, consideraremos o centro linear

$$x' = -y = P(x, y), \quad y' = x = Q(x, y),$$

e o perturbamos pelos diferentes campos de vetores polinomiais $(\varepsilon p, \varepsilon q)$. Mais concretamente, consideraremos o sistema

$$x' = -y + \varepsilon \sum_{i+j=1}^n a_{ij} x^i y^j, \quad y' = x + \varepsilon \sum_{i+j=1}^n b_{ij} x^i y^j \quad (7.2)$$

e olhamos para uma solução analítica $V = V(x, y, \varepsilon)$ da equação diferencial parcial linear (1.2).

Recorde que V é analítica sobre as variáveis x , y e ε , exceto talvez nos pontos críticos do sistema (2.1). Prova-se isso repetindo os argumentos da prova padrão da existência e unicidade de soluções de uma equação diferencial parcial linear, veja [10]. Tal prova essencialmente reduz o problema para a existência e unicidade de soluções de duas equações diferenciais ordinárias. Assim, usando nestas reduções o fato que as soluções de uma equação diferencial ordinária analítica são localmente analítica, a composição de funções analíticas é também analítica, veja [15], obtemos que V é analítica nas variáveis x , y e ε .

Recorde que, no Capítulo 1, definimos o polinômio de grau $(m+1)$

$$p(\rho) = \sum_{j=0}^m p_j \rho^{j+1}$$

onde

$$p_j = \frac{1}{2^j(j+1)!} \sum_{k=0}^j (2j+1-2k)!!(2k-1)!!(a_{2j+1-2k,2k} + b_{2k,2j+1-2k})$$

e $n = 2m+1$ se n é ímpar ou $n = 2m+2$ se n é par.

O próximo lema será útil na demonstração do Teorema (1.0.8).

Lema 7.0.5. O coeficiente do termo linear θ em $\int \sin^{2k}(\theta) \cos^{2l}(\theta) d\theta$ é

$$\frac{(2k-1)!!(2l-1)!!}{2^{k+l}(k+l)!}. \quad (7.3)$$

Demonstração. Utilizando uma tabela de integrais, veja 2.512.1 e 2.512.2 de [9], obtemos que o coeficiente do termo linear θ em $\int \sin^{2k}(\theta) \cos^{2l}(\theta) d\theta$ é dado pela equação (7.3). ■

Agora, utilizando o Segundo Critério podemos provar o Teorema (1.0.8).

Demonstração do Teorema (1.0.8). Consideremos $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno e suponhamos que $p(\rho)$ tem h , ($0 \leq h \leq m$), raízes reais positivas simples $\rho = r_i^2$ (com $i = 1, 2, \dots, h$) e $\rho = 0$ é uma raiz simples. Queremos provar que o sistema

$$X(x, y) = (-y + \varepsilon \sum_{i+j=1}^n (a_{ij} x^i y^j), x + \varepsilon \sum_{i+j=1}^n (b_{ij} x^i y^j))$$

tem, no máximo, h ciclos limites que são assintóticos aos círculos de raio r_i centrados na origem quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Como o sistema (7.2) é analítico, olhamos para uma solução analítica

$$V = V(x, y, \varepsilon) = V_0(x, y) + \varepsilon V_1(x, y) + o(\varepsilon^2)$$

da equação diferencial parcial linear (1.2).

Daí,

$$\begin{aligned} P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} &= \left(x \frac{\partial V_0}{\partial y} - y \frac{\partial V_0}{\partial x} \right) + \\ &\varepsilon \left(x \frac{\partial V_1}{\partial y} - y \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \sum_{i+j=1}^n a_{ij} x^i y^j + \frac{\partial V_0}{\partial y} \sum_{i+j=1}^n b_{ij} x^i y^j \right) + \dots \end{aligned}$$

e

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V = \varepsilon V_0 \sum_{r+s=0}^{n-1} ((r+1)a_{r+1,s} + (s+1)b_{r,s+1}) x^r y^s + \dots$$

Logo, a equação de ordem zero em ε da equação (1.2) é

$$-y \frac{\partial V_0}{\partial x} + x \frac{\partial V_0}{\partial y} = 0. \quad (7.4)$$

Daí,

$$-y \frac{\partial V_0}{\partial x} + x \frac{\partial V_0}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow (-y, x) \cdot \nabla V_0(x, y) = 0.$$

E mais, sabemos que $\nabla V_0(x, y)$ é perpendicular a curva de nível de V_0 no ponto (x, y) .

Assim, tomemos o caminho $\gamma(t)$ contido na curva de nível de V_0 por (x, y) . Logo,

$$\gamma'(t) \cdot \nabla V_0(\gamma(t)) = 0.$$

E então, é possível parametrizar $\gamma(t)$ por

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (a \cos(t), a \sin(t))$$

pois $\gamma'(t) = (-y, x)$.

Por fim, observe que $\gamma(t)$ é uma circunferência de raio a . Logo, as curvas de níveis de V_0 são circunferências. Portanto, uma solução da equação (7.4) é

$$V_0 = V_0(x^2 + y^2).$$

E mais, a equação de primeira ordem em ε da equação (1.2) é

$$x \frac{\partial V_1}{\partial y} - y \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \sum_{i+j=1}^n a_{ij} x^i y^j + \frac{\partial V_0}{\partial y} \sum_{i+j=1}^n b_{ij} x^i y^j = V_0 \sum_{r+s=0}^{n-1} ((r+1)a_{r+1,s} + (s+1)b_{r,s+1}) x^r y^s$$

Como

$$-y \frac{\partial V_0}{\partial x} + x \frac{\partial V_0}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V_0}{\partial y} = \frac{y}{x} \frac{\partial V_0}{\partial x}$$

segue que

$$\begin{aligned} -y \frac{\partial V_1}{\partial x} + x \frac{\partial V_1}{\partial y} &= V_0 \sum_{r+s=0}^{n-1} ((r+1)a_{r+1,s} + (s+1)b_{r,s+1}) x^r y^s \\ &\quad - \frac{\partial V_0}{\partial x} \sum_{i+j=1}^n a_{ij} x^i y^j - \frac{\partial V_0}{\partial y} \sum_{i+j=1}^n b_{ij} x^i y^j \\ &= V_0 \sum_{r+s=0}^{n-1} ((r+1)a_{r+1,s} + (s+1)b_{r,s+1}) x^r y^s \\ &\quad - \frac{\partial V_0}{\partial x} \sum_{i+j=1}^n a_{ij} x^i y^j - \frac{y}{x} \frac{\partial V_0}{\partial x} \sum_{i+j=1}^n b_{ij} x^i y^j \\ &= V_0 \sum_{r+s=0}^{n-1} ((r+1)a_{r+1,s} + (s+1)b_{r,s+1}) x^r y^s \\ &\quad - \frac{1}{2x} \frac{\partial V_0}{\partial x} \sum_{r+s=2}^{n+1} 2(a_{r-1,s} + b_{r,s-1}) x^r y^s \end{aligned}$$

Note que, tomando $u = x^2 + y^2$ e $v = y$, $x = \sqrt{u - v^2}$ e $y = v$. E mais, tomando $g_1(u, v) = V_0(x, y)$,

$$\frac{\partial g_1}{\partial v}(u, v) = 0$$

e, portanto, $g_1(u, v) = \phi(u)$.

Daí,

$$\phi'(u) = \frac{\partial g_1}{\partial u} = \frac{1}{2x} \frac{\partial V_0}{\partial x}.$$

Portanto,

$$V'_0 = \frac{1}{2x} \frac{\partial V_0}{\partial x}.$$

Observe que, V'_0 denota a derivada de V_0 em relação a variável $x^2 + y^2$.

Assim, podemos reescrever

$$-y \frac{\partial V_1}{\partial x} + x \frac{\partial V_1}{\partial y} = V_0 \sum_{r+s=0}^{n-1} ((r+1)a_{r+1,s} + (s+1)b_{r,s+1})x^r y^s - V'_0 \sum_{r+s=2}^{n+1} 2(a_{r-1,s} + b_{r,s-1})x^r y^s.$$

Daí,

$$-y \frac{\partial V_1}{\partial x} + x \frac{\partial V_1}{\partial y} = f(x, y) \quad (7.5)$$

onde

$$f(x, y) = V_0 \sum_{r+s=0}^{n-1} ((r+1)a_{r+1,s} + (s+1)b_{r,s+1})x^r y^s - V'_0 \sum_{r+s=2}^{n+1} 2(a_{r-1,s} + b_{r,s-1})x^r y^s.$$

Note que, assumimos que se algum dos coeficientes a_{ij} ou b_{ij} que aparecem na expressão de f tem um sub-índice negativo, então eles são nulos.

Agora, resolveremos a equação (7.5). Para tanto basta resolver o sistema diferencial ordinário

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dV_1}{f}.$$

Daí,

- $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow xdx = ydy \Rightarrow \int xdx = \int ydy \Rightarrow x^2 + y^2 = c = a^2$
- $\frac{dy}{x} = \frac{dV_1}{f} \Rightarrow \frac{f dy}{x} = dV_1.$

Note que

$$\frac{f}{x} dy = dV_1 = \frac{\partial V_1}{\partial x} dx + \frac{\partial V_1}{\partial y} dy.$$

Logo, $\frac{\partial V_1}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{f}{x}$. Assim, segue que

$$V_1(x, y) = \int \frac{f}{x} dy$$

$$\text{e } \frac{\partial V_1}{\partial x} = 0.$$

Assim, tomemos

$$g(a^2, y) = \int \frac{f(x, y)}{x} dy = \int \frac{f(\sqrt{a^2 - y^2}, y)}{\sqrt{a^2 - y^2}} dy$$

e, portanto, $V_1(x, y) = g(x^2 + y^2, y)$ é solução da equação (7.5).

Observe que, em $(\sqrt{a^2 - y^2}, y)$, as funções V_0 e V'_0 são constantes, pois $V_0(\sqrt{a^2 - y^2}, y) = V_0(a^2)$ e $V'_0(\sqrt{a^2 - y^2}, y) = V'_0(a^2)$.

Para simplificar as contas de $g(a^2, y)$, levamos em conta a simetria circular do nosso problema e mudamos para coordenadas polares, ou seja, $x = a \cos(\theta)$ e $y = a \sin(\theta)$.

Assim,

$$g(a^2, a \sin(\theta)) = \int \frac{f(a \cos(\theta), a \sin(\theta))}{a \cos(\theta)} a \cos(\theta) d\theta = \int f(a \cos(\theta), a \sin(\theta)) d\theta$$

ou seja, os cálculos de $g(a^2, a \sin(\theta))$ é reduzido ao cálculo de integrais da forma

$$\int \sin^s(\theta) \cos^r(\theta) d\theta$$

onde sabemos que a primitiva de tal integral são polinômios nas variáveis $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$, mais eventualmente um termo em θ . Além disso, tal termo linear aparece quando ambas as potências r e s , na integral acima, são pares.

Note que devemos anular o coeficiente de θ em $\int f(a \cos(\theta), a \sin(\theta)) d\theta$. Caso contrário, obtemos que

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

e assim, a função $g(x^2 + y^2, y)$ não estará bem definida.

Afirmção: Se colecionarmos todos os monômios onde $x^r y^s$ aparece com r e s pares em $f(x, y)$ e os integramos, então obtemos que o coeficiente de θ em $\int f(a \cos(\theta), a \sin(\theta)) d\theta$ é

$$p'(\rho)V_0(\rho) - p(\rho)V'_0(\rho). \quad (7.6)$$

De fato, primeiro observe que, se passarmos de um n ímpar para um $n + 1$ par, então em $f(x, y)$ não aparecem novos monômios com $x^r y^s$ tendo r e s par.

Assim, provaremos por indução com relação a $n = 2m + 1$ ímpar.

- $n = 1$ ou $m = 0$.

Daí,

$$f(x, y) = (a_{10} + b_{01})V_0 - (2a_{10}x^2 + 2(a_{01} + b_{10})xy + 2b_{01}y^2)V'_0.$$

e os únicos termos em $f(x, y)$ com r e s par são

$$(a_{10} + b_{01})V_0 - (2a_{10}x^2 + 2b_{01}y^2)V'_0. \quad (7.7)$$

Tomando $x = a \cos(\theta)$ e $y = a \sin(\theta)$ na equação (7.7) e depois integrando em relação a θ , obtemos

$$\begin{aligned} & \int [(a_{10} + b_{01})V_0(a^2) - (2a_{10}a^2 \cos^2(\theta) + 2b_{01}a^2 \sin^2(\theta))V'_0(a^2)] d\theta = \\ & = [(a_{10} + b_{01})V_0(a^2) - (a_{10} + b_{01})a^2 V'_0(a^2)] \theta - (a_{10} + b_{01})a^2 \cos(\theta) \sin(\theta) V'_0(a^2). \end{aligned}$$

Daí, temos que o coeficiente de θ é

$$(a_{10} + b_{01})V_0(a^2) - (a_{10} + b_{01})a^2 V'_0(a^2). \quad (7.8)$$

Como $m = 0$, segue que $p(\rho) = p_0 \rho = (a_{10} + b_{01})\rho$. Daí, $p'(\rho) = a_{10} + b_{01}$. Assim, o coeficiente de θ dada na equação (7.8) é

$$p'(\rho)V_0(\rho) - p(\rho)V'_0(\rho).$$

- $n = 2m - 1$ ou $m = k$.

Por hipótese de indução (HI), temos que para

$$f(x, y) = V_0 \sum_{r+s=0}^{2m-2} ((r+1)a_{r+1,s} + (s+1)b_{r,s+1})x^r y^s - V'_0 \sum_{r+s=2}^{2m} 2(a_{r-1,s} + b_{r,s-1})x^r y^s$$

o coeficiente de θ é

$$p'(\rho)V_0(\rho) - p(\rho)V'_0(\rho).$$

- $n = 2m + 1$ ou $m = k + 1$.

Daí,

$$f(x, y) = V_0 \sum_{r+s=0}^{2m} ((r+1)a_{r+1,s} + (s+1)b_{r,s+1})x^r y^s - V'_0 \sum_{r+s=2}^{2m+2} 2(a_{r-1,s} + b_{r,s-1})x^r y^s$$

De agora em diante, denotaremos por $f_1(x, y)$ a expressão de $f(x, y)$ dada na hipótese de indução.

Assim,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f_1(x, y) + V_0 \sum_{r+s=2m-1}^{2m} ((r+1)a_{r+1,s} + (s+1)b_{r,s+1})x^r y^s - \\ &\quad V'_0 \sum_{r+s=2m+1}^{2m+2} 2(a_{r-1,s} + b_{r,s-1})x^r y^s \end{aligned}$$

Observe que, para provar a equação (7.6), basta provarmos que os monômios de $f(x, y)$ tendo $x^r y^s$ de grau $r + s = 2m$ com r e s par multiplicado por $V_0(a^2)$ e os monômios tendo $x^r y^s$ de grau $r + s = 2m + 2$ com r e s par multiplicado por $V'_0(a^2)$ contribuem com

$$(m+1)p_m \rho^m V_0(\rho) - p_m \rho^{m+1} V'_0(\rho) \quad (7.9)$$

na equação (7.6).

Com efeito, a soma dos monômios de $f(x, y)$ tendo $x^r y^s$ de grau $r + s = 2m$ com r e s par é

$$\sum_{k=0}^m [(2m+1-2k)a_{2m+1-2k,2k}x^{2m-2k}y^{2k} + (2k+1)b_{2m-2k,2k+1}x^{2m-2k}y^{2k}]$$

ou, equivalentemente,

$$\sum_{k=0}^m [(2m+1-2k)a_{2m+1-2k,2k}x^{2m-2k}y^{2k} + (2m+1-2k)b_{2k,2m+1-2k}x^{2k}y^{2m-2k}]$$

e a soma dos monômios de $f(x, y)$ tendo $x^r y^s$ de grau $r + s = 2m + 2$ com r e s par é

$$\sum_{k=0}^m [2a_{2m+1-2k,2k}x^{2m+2-2k}y^{2k} + 2b_{2m+2-2k,2k-1}x^{2m+2-2k}y^{2k}]$$

ou, equivalentemente,

$$\sum_{k=0}^m 2[a_{2m+1-2k,2k}x^{2m+2-2k}y^{2k} + b_{2k,2m+1-2k}x^{2k}y^{2m+2-2k}]$$

Assim, obtemos que a soma dos monômios de $f(x, y)$ tendo $x^r y^s$ de grau $r + s = 2m$ com r e s pares multiplicados por $V_0(a^2)$ e a soma dos monômios tendo $x^r y^s$ de grau $r + s = 2m + 2$ com r e s pares multiplicados por $V'_0(a^2)$ são

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^m [(2m+1-2k)(a_{2m+1-2k,2k}x^{2m-2k}y^{2k} + b_{2k,2m+1-2k}x^{2k}y^{2m-2k})]V_0(a^2) - \\ & \sum_{k=0}^m 2[a_{2m+1-2k,2k}x^{2m+2-2k}y^{2k} + b_{2k,2m+1-2k}x^{2k}y^{2m+2-2k}]V'_0(a^2). \end{aligned} \quad (7.10)$$

E mais, utilizando a equação (7.3), dada no Lema (7.0.5),

1. O monômio $(2m+1-2k)a_{2m+1-2k,2k}x^{2m-2k}y^{2k}V_0(a^2)$ contribui para o coeficiente de θ em $\int f(a \cos(\theta), a \sin(\theta))d\theta$ com

$$\frac{(2m+1-2k)!!(2k-1)!!}{2^m m!} a^{2m};$$

2. O monômio $(2m+1-2k)b_{2k,2m+1-2k}x^{2k}y^{2m-2k}V_0(a^2)$ contribui para o coeficiente de θ em $\int f(a \cos(\theta), a \sin(\theta))d\theta$ com

$$\frac{(2m+1-2k)!!(2k-1)!!}{2^m m!} a^{2m};$$

3. O monômio $2a_{2m+1-2k,2k}x^{2m+2-2k}y^{2k}V'_0(a^2)$ contribui para o coeficiente de θ em $\int f(a \cos(\theta), a \sin(\theta))d\theta$ com

$$\frac{(2m+1-2k)!!(2k-1)!!}{2^m (m+1)!} a^{2m+2};$$

4. O monômio $2b_{2k,2m+1-2k}x^{2k}y^{2m+2-2k}V'_0(a^2)$ contribui para o coeficiente de θ em $\int f(a \cos(\theta), a \sin(\theta))d\theta$ com

$$\frac{(2m+1-2k)!!(2k-1)!!}{2^m (m+1)!} a^{2m+2}.$$

Portanto, a equação (7.10) contribui para o coeficiente de θ em $\int f(a \cos(\theta), a \sin(\theta)) d\theta$ com

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^m \frac{(2m+1-2k)!!(2k-1)!!}{2^m m!} (a_{2m+1-2k,2k} + b_{2k,2m+1-2k}) a^{2m} V_0(a^2) - \\ & - \sum_{k=0}^m \frac{(2m+1-2k)!!(2k-1)!!}{2^m (m+1)!} (a_{2m+1-2k,2k} + b_{2k,2m+1-2k}) a^{2m+2} V_0'(a^2) = \\ & = (m+1)p_m \rho^m V_0(\rho) - p_m \rho^{m+1} V_0'(\rho). \end{aligned}$$

E, assim, concluímos a prova por indução sobre n .

Por fim, como devemos anular o coeficiente de θ , segue que

$$p'(\rho) V_0(\rho) - p(\rho) V_0'(\rho) = 0.$$

Daí,

$$\left(\frac{p(\rho)}{V_0(\rho)} \right)' V_0^2(\rho) = 0$$

mas, note que $V_0(\rho)$ é constante. Assim, segue que

$$\left(\frac{p(\rho)}{V_0(\rho)} \right)' = 0$$

e consequentemente,

$$\frac{p(\rho)}{V_0(\rho)} = c.$$

Tomando $c = 1$,

$$V_0(\rho) = p(\rho).$$

Pelo Segundo Critério, sabemos que os ciclos limites do sistema (7.2) estão contidos no conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$V_0(x^2 + y^2) + \varepsilon V_1(x, y) + o(\varepsilon^2) = 0.$$

Portanto, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, o sistema (7.2) tem no máximo h ciclos limites que são assintóticos ao círculo de raio r_i centrado na origem. ■

Como exemplo, damos o polinômio $p(\rho)$ associado ao sistema (7.2) para $n = 9$. Por definição, temos que

$$p(\rho) = \sum_{j=0}^4 p_j \rho^{j+1} = p_0 \rho + p_1 \rho^2 + p_2 \rho^3 + p_3 \rho^4 + p_4 \rho^5$$

onde

- $p_0 = (a_{10} + b_{01});$
- $p_1 = \frac{1}{2^1 2!} \sum_{k=0}^1 (3 - 2k)!!(2k - 1)!!(a_{3-2k, 2k} + b_{2k, 3-2k}) = \frac{1}{4}(3a_{30} + a_{12} + b_{21} + 3b_{03});$
- $p_2 = \frac{1}{2^2 3!} \sum_{k=0}^2 (5 - 2k)!!(2k - 1)!!(a_{5-2k, 2k} + b_{2k, 5-2k}) = \frac{1}{8}(5a_{50} + a_{32} + a_{14} + b_{41} + b_{23} + 5b_{05});$
- $p_3 = \frac{1}{2^3 4!} \sum_{k=0}^3 (7 - 2k)!!(2k - 1)!!(a_{7-2k, 2k} + b_{2k, 7-2k}) = \frac{1}{64}(35a_{70} + 5a_{52} + 3a_{34} + 5a_{16} + 5b_{61} + 3b_{43} + 5b_{25} + 35b_{07});$
- $p_4 = \frac{1}{2^4 5!} \sum_{k=0}^4 (9 - 2k)!!(2k - 1)!!(a_{9-2k, 2k} + b_{2k, 9-2k}) = \frac{1}{128}(63a_{90} + 7a_{72} + 3a_{54} + 3a_{36} + 7a_{18} + 7b_{81} + 3b_{63} + 3b_{45} + 7b_{27} + 63b_{09});$

Portanto,

$$\begin{aligned} p(\rho) &= (a_{10} + b_{01})\rho \\ &+ \frac{1}{4}(3a_{30} + a_{12} + b_{21} + 3b_{03})\rho^2 \\ &+ \frac{1}{8}(5a_{50} + a_{32} + a_{14} + b_{41} + b_{23} + 5b_{05})\rho^3 \\ &+ \frac{1}{64}(35a_{70} + 5a_{52} + 3a_{34} + 5a_{16} + 5b_{61} + 3b_{43} + 5b_{25} + 35b_{07})\rho^4 \\ &+ \frac{1}{128}(63a_{90} + 7a_{72} + 3a_{54} + 3a_{36} + 7a_{18} + 7b_{81} + 3b_{63} + 3b_{45} + 7b_{27} + 63b_{09})\rho^5. \end{aligned}$$

Definição 7.0.6. *Os sistemas da forma*

$$x' = -y + F(x), \quad y' = x \tag{7.11}$$

são chamados de sistema de Liénard.

O próximo resultado é devido a Blows e Perko, veja [1], e melhora o resultado anterior de Lins e Pugh, veja [11]. Assim, podemos obtê-lo como um caso particular do Teorema 1.0.8.

Corolário 7.0.7. *Se a equação de grau m*

$$q(\rho) = \frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{8}a_3\rho + \frac{5}{16}a_5\rho^2 + \frac{35}{128}a_7\rho^3 + \dots + \frac{1}{2^{2m+2}} \binom{2m+2}{m+1} a_{2m+1}\rho^m = 0$$

tem m raízes reais positivas $\rho = r_j^2$, $j = 1, \dots, m$ então para $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, o sistema de Liénard (7.11) com

$$F(x) = \varepsilon \sum_{i=1}^{2m+1} a_i x^i$$

tem no máximo m ciclos limites que são assintóticos aos círculos de raio r_j , $j = 1, \dots, m$, centrado na origem quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demonstração. Observe que, se no sistema (7.2), tomarmos $n = 2m + 1$, $a_{i0} = a_i$ para $i = 1, \dots, n$ e todos os outros coeficientes a_{ij} e b_{ij} iguais a zero, então obtemos o sistema (7.11) com $F(x) = \varepsilon \sum_{i=1}^{2m+1} a_i x^i$.

Assim, o polinômio $p(\rho)$ torna-se

$$p(\rho) = \sum_{j=0}^m p_j \rho^{j+1} = \sum_{j=0}^m \frac{1}{2^j(j+1)!} (2j+1)!! a_{2j+1} \rho^{j+1}.$$

$$\text{Afirmação: } (2j+1)!! = \frac{(2j+2)(2j+1)\dots(j+2)}{2^{j+1}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

De fato, provemos por indução sobre j .

- Para $j = 0$ é trivialmente verdadeiro.
- Hipótese de indução (HI): Suponhamos que, para $j = k$, temos

$$(2k+1)!! = \frac{(2k+2)(2k+1)\dots(k+2)}{2^{k+1}}.$$

- Assim, para $j = k + 1$, temos

$$\begin{aligned} (2(k+1)+1)!! &= (2k+3)!! \\ &= (2k+3)(2k+1)!! \\ &\stackrel{\text{HI}}{=} \frac{(2k+3)(2k+2)(2k+1)\dots(k+2)}{2^{k+1}} \\ &= \frac{(2k+4)(2k+3)\dots(k+3)}{2^{k+1}2} \\ &= \frac{(2(k+1)+2)(2(k+1)+1)\dots((k+1)+2)}{2^{(k+1)+1}}. \end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\frac{(2j+1)!!}{2^j(j+1)!} = \frac{\frac{(2j+2)(2j+1)\dots(j+2)}{2^{j+1}}}{2^j(j+1)!} = \frac{1}{2^{2j+1}} \binom{2j+2}{j+1}.$$

Portanto,

$$p(\rho) = \sum_{j=0}^m \frac{(2j+1)!!}{2^j(j+1)!} a_{2j+1} \rho^{j+1} = \sum_{j=0}^m \frac{1}{2^{2j+1}} \binom{2j+2}{j+1} a_{2j+1} \rho^{j+1} = 2\rho q(\rho).$$

Como, por hipótese, $q(\rho)$ tem m raízes reais positivas, segue da equação acima que $p(\rho)$ tem m raízes reais positivas e $\rho = 0$ uma raiz simples.

Pelo Teorema (1.0.8), o sistema dado tem no máximo m ciclos limites, que são assintóticos aos círculos de raio r_i , $i = 1, \dots, m$, centrado na origem quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

■

A próxima proposição mostra como usar o Teorema 1.0.6, Segundo Critério, para obtermos a forma dos ciclos limites que bifurcam a partir do centro.

Proposição 7.0.8. *Para $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, o sistema de Liénard*

$$x' = -y + \varepsilon(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3), \quad y' = x \quad (7.12)$$

tem no máximo um ciclo limite se $a_1a_3 < 0$. Além disso, este ciclo limite é assintótico ao círculo de raio $\sqrt{-\frac{4a_1}{3a_3}}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e a forma é dada pela curva

$$V_0 + \varepsilon V_1 + o(\varepsilon^2) = 0 \quad (7.13)$$

onde

$$V_0 = [a_1 + \frac{3}{4}a_3(x^2 + y^2)](x^2 + y^2)$$

e

$$V_1 = -\frac{1}{12}[12a_1^2x - 8a_1a_2y^2 + 3a_1a_3(5x^3 + 3xy^2) + 6a_2a_3(3x^4 + 4x^2y^2 + y^4) + 9a_3^2(x^5 + x^3y^2)]y.$$

Demonstração. Note que $n = 3$. Assim, $m = 1$. Daí, obtemos

$$q(\rho) = \frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{8}a_3\rho.$$

E mais,

$$q(\rho) = 0 \Rightarrow \rho = -\frac{4}{3} \frac{a_1}{a_3}.$$

Como $a_1 a_3 < 0$,

$$\rho = -\frac{4a_1}{3a_3} > 0.$$

Portanto, $q(\rho)$ tem uma raiz real positiva e, conseqüentemente, pelo Corolário (7.0.7), obtemos que o sistema de Liénard dado tem no máximo 1 ciclo limite, que é assintótico ao círculo de raio $r_1 = \sqrt{-\frac{4a_1}{3a_3}}$, centrado na origem quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Agora, mostremos que a forma do possível ciclo limite até os termos ε^2 é dado pela curva $V_0 + \varepsilon V_1 + o(\varepsilon^2) = 0$.

De fato, como o sistema (7.12) é analítico, olhamos para uma solução

$$V = V(x, y, \varepsilon) = V_0(x, y) + \varepsilon V_1(x, y) + o(\varepsilon^2)$$

da equação diferencial parcial linear (1.2).

Assim, a equação de ordem zero em ε da equação (1.2) é

$$-y \frac{\partial V_0}{\partial x} + x \frac{\partial V_0}{\partial y} = 0$$

cuja solução é

$$V_0 = V_0(x^2 + y^2).$$

Veja a demonstração do Teorema (1.0.8).

E mais, a equação de primeira ordem em ε da equação (1.2) é

$$(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) \frac{\partial V_0}{\partial x} + x \frac{\partial V_1}{\partial y} - y \frac{\partial V_1}{\partial x} = (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2) V_0.$$

Daí, procedendo como na demonstração do Teorema 1.0.8, a equação acima torna-se

$$-y \frac{\partial V_1}{\partial x} + x \frac{\partial V_1}{\partial y} = (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2) V_0 - 2(a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4) V_0' = f(x, y) \quad (7.14)$$

cuja solução é dada por

$$V_1(x, y) = g(x^2 + y^2, y) = \int \frac{f(\sqrt{a^2 - y^2}, y)}{\sqrt{a^2 - y^2}} dy.$$

Tomando $x = a \cos(\theta)$ e $y = a \sin(\theta)$,

$$g(x^2 + y^2, y) = g(a^2, a \sin(\theta)) = \int f(a \cos \theta, a \sin \theta) d\theta$$

ou seja, os cálculos de $g(a^2, a \sin \theta)$ é reduzido ao cálculo de integrais da forma $\int \sin^s(\theta) \cos^r(\theta) d\theta$ onde sabemos que a primitiva de tal integral são polinômios nas variáveis $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$, mais eventualmente um termo linear em θ . Além disso, tal termo linear aparece quando ambas as potências r e s são pares.

Observe que devemos anular o coeficiente de θ em $\int f(a \cos(\theta), a \sin(\theta)) d\theta$. Do contrário,

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

e, assim, a função $g(x^2 + y^2, y)$ não estará bem definida.

Afirmção: Se colecionarmos todos os monômios onde $x^r y^s$ aparece com r e s par em $f(x, y)$ e os integramos, então obtemos que o coeficiente de θ em $\int f(a \cos \theta, a \sin \theta) d\theta$ é

$$p'(\rho)V_0(\rho) - p(\rho)V_0'(\rho).$$

Como devemos anular o coeficiente de θ , segue que

$$p'(\rho)V_0(\rho) - p(\rho)V_0'(\rho) = 0.$$

Daí,

$$\left(\frac{p(\rho)}{V_0(\rho)}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{p(\rho)}{V_0(\rho)} = c.$$

Tomando $c = 1$, obtemos que $V_0(\rho) = p(\rho)$.

Note que

$$p(\rho) = \sum_{j=0}^1 p_j \rho^{j+1} = \sum_{j=0}^1 \frac{(2j+1)!!}{2^j(j+1)!} a_{2j+1} \rho^{j+1}.$$

Logo,

$$V_0(\rho) = p(\rho) = \left(a_1 + \frac{3}{4}a_3\rho\right)\rho. \quad (7.15)$$

Agora, substituindo a equação (7.15) na equação (7.14),

$$\begin{aligned} -y \frac{\partial V_1}{\partial x} + x \frac{\partial V_1}{\partial y} &= a_1^2(y^2 - x^2) + 2a_1a_2xy^2 + a_1a_3\left(-\frac{5}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{3}{4}y^4\right) + \\ &\quad a_2a_3\left(-\frac{3}{2}x^5 + \frac{3}{2}xy^4\right) + a_3^2\left(-\frac{3}{4}x^6 + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{9}{4}x^2y^4\right) \\ &= f(x, y). \end{aligned}$$

Agora, fazendo a mudança de variáveis $x = a \cos(\theta)$, $y = a \sin(\theta)$, calculando

$$\int f(a \cos(\theta), a \sin(\theta)) d\theta$$

e retornando as variáveis x e y obtemos

$$V_1(x, y) = -\frac{y}{12}[12a_1^2x - 8a_1a_2y^2 + 3a_1a_3(5x^3 + 3xy^2) + 6a_2a_3(3x^4 + 4x^2y^2 + y^4) + 9a_3^2(x^5 + x^3y^2)].$$

■

Como na prova da proposição 7.0.8 é possível saber a forma dos ciclos limites no caso geral do Teorema 1.0.8 calculando V_1 depois da determinação do V_0 . Tais cálculos são tediosos, porém simples.

Podemos ainda usar o Teorema 1.0.6 para aproximar a forma dos ciclos limites para um campo vetorial arbitrário. Giacomini e Viano fazem para o ciclo limite da equação de van de Pol, e de um dado campo vetorial polinomial quadrático, veja [8]. Chicone e Jacobs, veja [3], estudaram o problema das bifurcações de ciclos limites de centros isocronos de campos vetoriais polinomiais quadráticos. Assim, usando o Teorema de Bautin, a forma normal de Bautin para sistema quadráticos e desenvolvendo os coeficientes do sistema em séries de potências do parâmetro ε , eles provaram que o número de trajetórias fechadas do centro linear $x' = -y$, $y' = x$ do qual uma família de ciclos limites emergem é no máximo 3 e que existem perturbações para os quais o número de famílias de ciclos limites que emergem é três. Podemos dar uma outra prova destes resultados de Chicone e Jacobs, veja [3], usando o Teorema 1.0.6 como na prova do Teorema 1.0.8. Além disso, na ordem que eles produzem 3 famílias de ciclos limites é necessário chegar a ordem 6 no pequeno parâmetro ε . De fato, até ordem 1 em ε não dá nenhum ciclo limite, até ordem 3 em ε dá no máximo um ciclo limite, e até ordem 5 em ε dá no máximo dois ciclo limite. Trabalhando como na prova da Proposição (7.0.8), tal método não apenas produz estes resultados, mas pode também provar a forma do ciclo limite destas três famílias até ordem 6 em ε .

Capítulo 8

Apêndice: Órbitas periódicas no $\mathbb{R}^3$

Neste capítulo, descreveremos, brevemente, quão rico pode ser o comportamento dinâmico das trajetórias do fluxo de um campo polinomial $X = (P, Q)$ na vizinhança de uma órbita periódica, ilustrando alguns dos comportamentos possíveis de tais sistemas em $\mathbb{R}^3$.

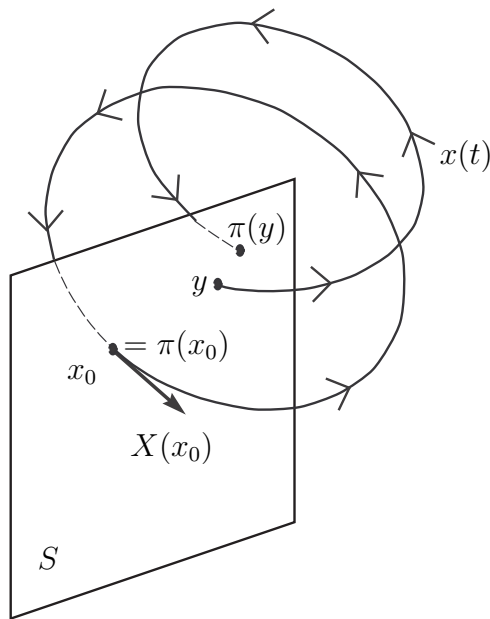


Figura 8.1: A aplicação de primeiro retorno de Poincaré.

Como na Seção (2.1), consideremos uma seção transversal local S por um ponto x_0 de uma órbita periódica definida pela solução de um campo polinomial $X = (P, Q)$ em $\mathbb{R}^m$. Observe que, por definição, neste caso, o vetor tangente $X(x_0)$ à órbita em x_0 não é

tangente a S .

A aplicação de primeiro retorno de Poincaré $\pi : W \rightarrow S$ está definida localmente numa vizinhança W em torno de x_0 na seção local S , de tal modo que, para $y \in W \subseteq S$, temos $\pi(y) = x(t_1) \in S$, onde $x(t)$ é a solução do campo (P, Q) com $x(0) = y$ e $t_1 > 0$ é o menor valor de $t > 0$ no qual a trajetória $x(t)$ retorna a S . Veja a Figura (8.1). Em particular, $\pi(x_0) = x_0$ é um *ponto fixo* de π .

O comportamento das trajetórias do campo X na vizinhança da órbita periódica por x_0 pode ser analisado através da aplicação de primeiro retorno de Poincaré π em x_0 . Por exemplo, o ponto fixo x_0 de π reflete a periodicidade da órbita do campo X por x_0 .

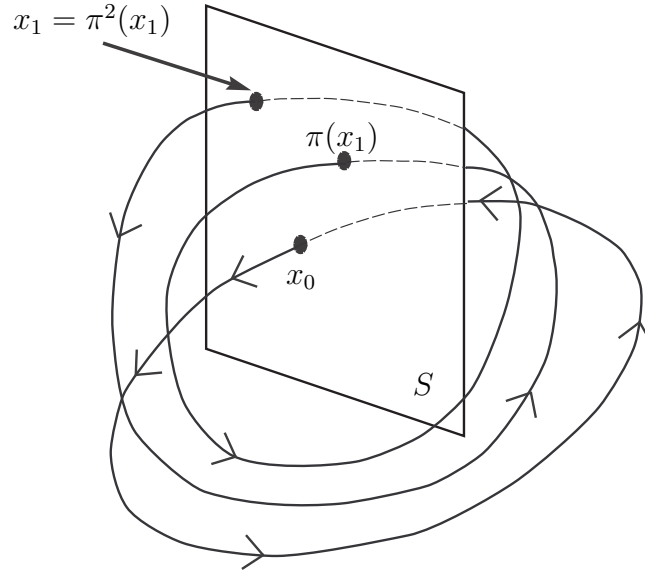


Figura 8.2: Uma órbita periódica tal que $\pi^2(x_1) = x_1$.

Definição 8.0.9. Dado um difeomorfismo $\pi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, onde $\mathcal{U}$ é um aberto de $\mathbb{R}^k$, dizemos que um ponto $x \in \mathcal{U}$ é um ponto periódico de π se existe $n > 0$ tal que $\pi^n(x) = x$, onde o menor de tais possíveis valores $n > 0$ é o período de x por π .

Observação: Um ponto fixo é um caso particular de ponto periódico, de período 1.

Exemplo 1. Se x é um ponto periódico de período n para um difeomorfismo π , então a órbita

$$\{\pi^j(x) : j \in \mathbb{N}\} = \{x, \pi(x), \pi^2(x), \dots, \pi^{n-1}(x)\}$$

de x por π é um conjunto finito de n pontos. Note que, neste caso, cada um dos pontos $x, \pi(x), \pi^2(x), \dots, \pi^{n-1}(x)$ da órbita de x também é um ponto periódico de período n de π . $\square$

Consideremos, a seguir, especificamente a aplicação π de primeiro retorno de Poincaré para a órbita periódica por x_0 de um campo X no caso tridimensional, que já apresenta uma enorme diferença do caso bidimensional ilustrado nas figuras da Seção (2.2).

Exemplo 2. Se $X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo em $\mathbb{R}^3$ então, como ilustra a Figura (8.1), a seção local S é um aberto de um plano (bidimensional) e, diferentemente do que ocorre com campos planares, podemos perfeitamente ter duas trajetórias periódicas do campo pela seção local, uma pelo ponto x_0 , que define um ponto fixo da aplicação de primeiro retorno de Poincaré, e outra pelo ponto x_1 , na vizinhança de x_0 na seção local, que, no caso da Figura (8.2), define um ponto periódico de período dois, com órbita $\{x_1, \pi(x_1)\}$ pela aplicação de primeiro retorno de Poincaré π . $\square$

Definição 8.0.10. O conjunto estável $\gamma^e(x_0)$ do ponto fixo x_0 da aplicação de primeiro retorno de Poincaré π da seção local S é o conjunto dos pontos $y \in S$ tais que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^n(y) = x_0.$$

Definição 8.0.11. O conjunto instável $\gamma^i(x_0)$ do ponto fixo x_0 da aplicação de primeiro retorno de Poincaré π da seção local S é o conjunto dos pontos $y \in S$ tais que $\pi^n(y) \rightarrow x_0$ para $n \rightarrow -\infty$.

O conjunto estável (respectivamente, instável) de um ponto periódico x de período n de π é a união dos conjuntos estáveis (respectivamente, instáveis) do difeomorfismo iterado π^n em cada um dos pontos da órbita de x por π .

Agora, vejamos os casos genéricos possíveis em $\mathbb{R}^3$.

Definição 8.0.12. Dizemos que o ponto $x_0 \in S$ é um ponto fixo hiperbólico para a aplicação π de primeiro retorno de Poincaré se os dois autovalores generalizados da matriz jacobiana $D\pi(x_0) \in M(2)$ têm módulo diferente de 1. Neste caso, dizemos que a órbita periódica $x(t) \in \mathbb{R}^3$ do campo X é uma órbita periódica hiperbólica.

Definição 8.0.13. Um ponto periódico x de período n de um difeomorfismo π é um ponto periódico hiperbólico se x é ponto fixo hiperbólico do difeomorfismo iterado π^n .

É fácil ver que, se x é um ponto periódico hiperbólico, cada ponto pertencente à sua órbita também é hiperbólico.

Definição 8.0.14. Se os dois autovalores generalizados da matriz jacobiana $D\pi(x_0) \in M(2)$ têm módulo menor do que 1, dizemos que a órbita periódica hiperbólica é atratora, veja a Seção (2.1).

No Teorema (2.1.5) provamos que, neste caso, a dinâmica em torno do ponto x_0 é dada por uma versão discreta da Figura (8.3): o conjunto instável se restringe à singularidade e o conjunto estável é um aberto contendo a singularidade.

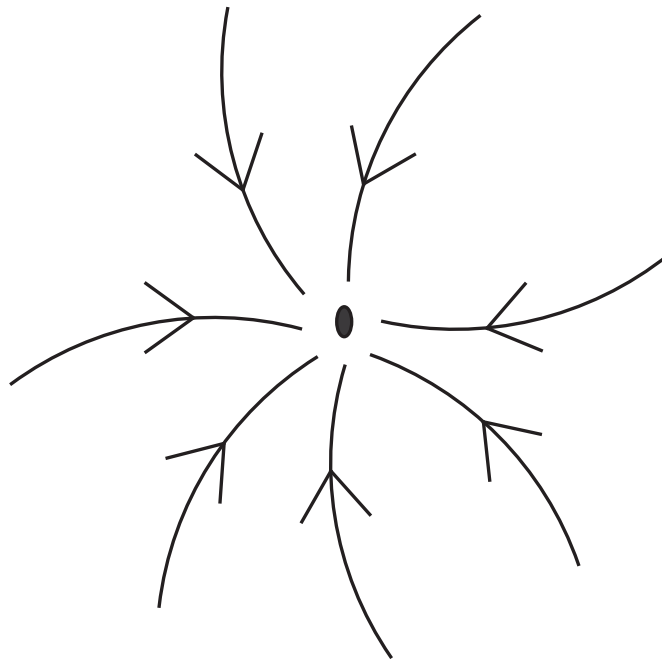


Figura 8.3: Singularidade assintoticamente estável.

Observe que para qualquer condição inicial $y \in S$ suficientemente próxima de x_0 , as iteradas $\pi^n(y)$, com $n \rightarrow +\infty$, convergem a x_0 , enquanto que as iteradas $\pi^n(y)$, com $n \rightarrow -\infty$, saem de uma vizinhança de x_0 .

Para as trajetórias do campo X , isto significa que as soluções do campo X com condições iniciais suficientemente próximas de x_0 convergem todas à órbita periódica por x_0 quando o tempo cresce para $+\infty$, ou seja, existe uma vizinhança da órbita periódica que é positivamente invariante pelo fluxo do campo e todas órbitas por pontos nesta vizinhança tendem à órbita periódica.

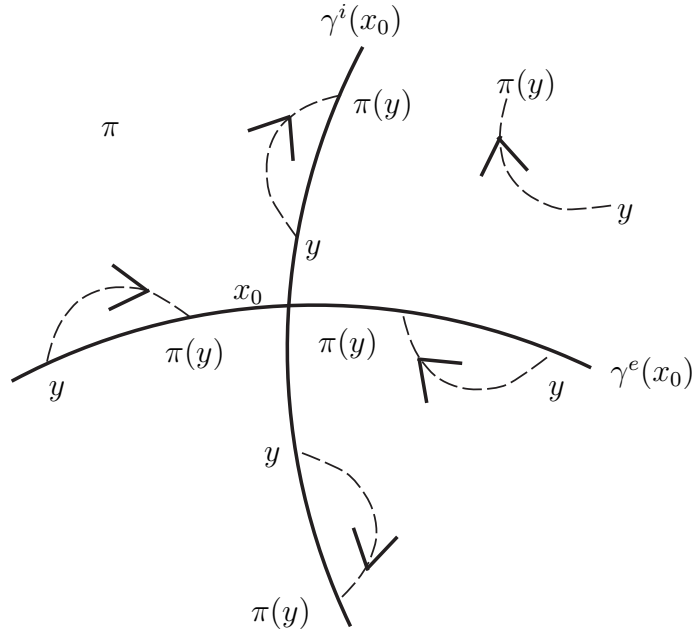


Figura 8.4: Os conjuntos estável e instável de x_0 hiperbólico.

Analogamente, temos a seguinte definição:

Definição 8.0.15. *Se os dois autovalores generalizados da matriz jacobiana $D\pi(x_0)$ em $M(2)$ têm módulo maior do que 1, dizemos que a órbita periódica hiperbólica é repulsora.*

Assim, a dinâmica em torno do ponto x_0 é dada por uma versão discreta da Figura (8.5). Neste caso, o conjunto estável se restringe à singularidade e o conjunto instável é um aberto contendo a singularidade: o comportamento das soluções é idêntico ao do caso atrator, bastando trocar t por $-t$.

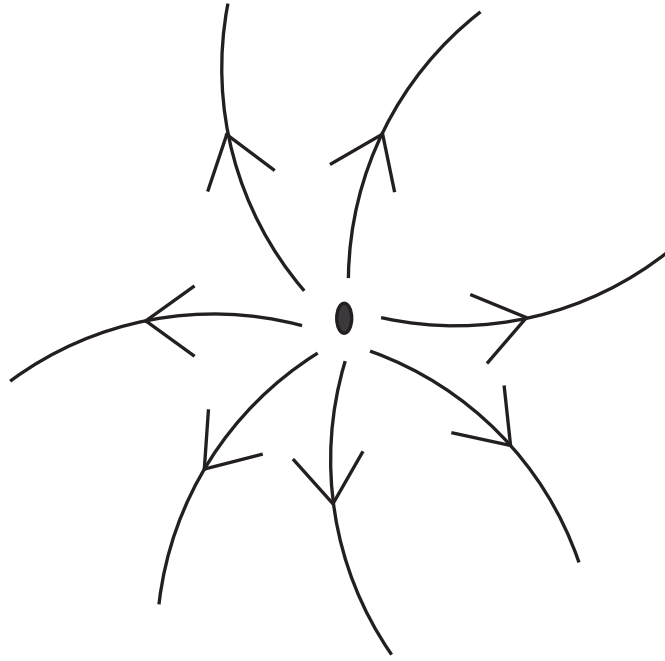


Figura 8.5: Singularidade assintoticamente instável.

Além dos casos extremos de órbitas periódicas hiperbólicas que são atratoras e repulsoras, temos o único outro caso da sela hiperbólica.

Definição 8.0.16. *Dados dois autovalores generalizados da matriz jacobiana $D\pi(x_0)$ em $M(2)$, se um autovalor generalizado tem módulo menor do que 1 e o outro tem módulo maior do que 1, dizemos que a órbita periódica hiperbólica é do tipo sela hiperbólica.*

Observação: Como a matriz $D\pi(x_0)$ é real, sabemos que se os autovalores são complexos, necessariamente são conjugados e portanto têm o mesmo módulo. Assim, não há autovalores complexos numa sela hiperbólica em $\mathbb{R}^3$, que só ocorre quando ambos autovalores de $D\pi(x_0)$ são reais, um com valor absoluto menor do que 1 e o outro com valor absoluto maior do que 1.

É possível mostrar que, neste caso, os conjuntos estável $\gamma^e(x_0)$ e instável $\gamma^i(x_0)$ são curvas diferenciáveis por x_0 . A dinâmica em torno deste ponto é descrita pela Figura (8.4). As condições iniciais $y \in \gamma^e(x_0)$ convergem a x_0 pela evolução temporal $\pi^n(y)$ com $n \geq 0$ tendendo a $+\infty$ e as condições iniciais $y \in \gamma^i(x_0)$ convergem a x_0 pela evolução

temporal $\pi^n(y)$ com $n \leq 0$ tendendo a $-\infty$. Fora das variedades estável e instável, a dinâmica de π na vizinhança do ponto fixo x_0 , que é uma sela hiperbólica, é semelhante a uma versão discreta da dinâmica do campo linear $DX(x_0) \in M(3)$ em torno do ponto de equilíbrio na origem, que é o de uma sela.

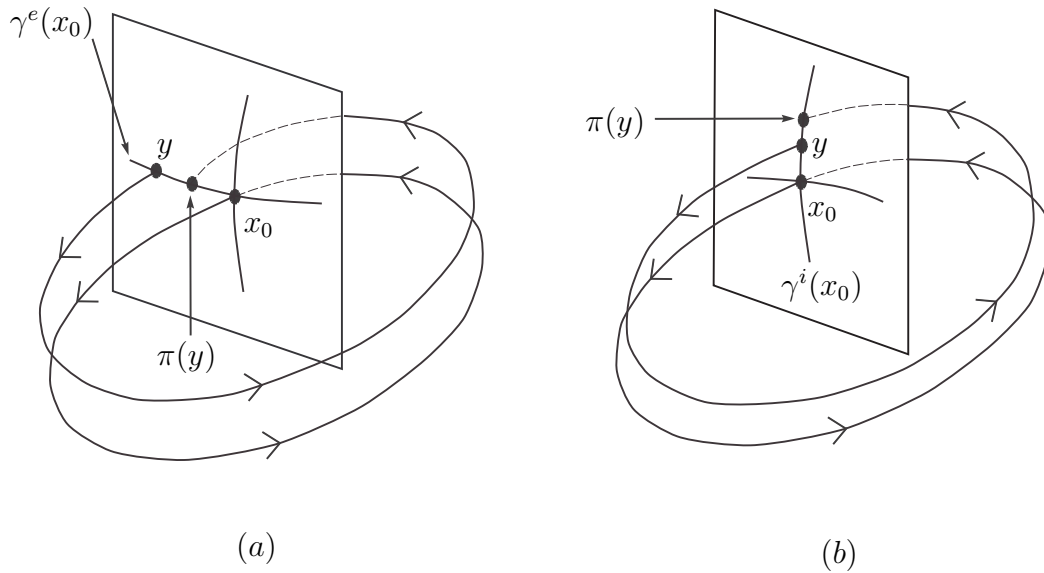


Figura 8.6: Uma órbita no conjunto (a) estável, (b) instável de uma sela.

Assim, as iteradas de condições iniciais fora das variedades estável e instável, mas ainda suficientemente próximos de x_0 , a ponto de estarem definidas, saem de qualquer vizinhança em torno de x_0 , tanto a partir de algum n positivo quanto a partir de algum n negativo.

Assim, este comportamento da aplicação de primeiro retorno de Poincaré π reflete no comportamento das trajetórias do campo. As Figuras (8.6)(a) e (b) descrevem o que acontece com as trajetórias do campo de vetores X em torno de uma órbita periódica hiperbólica do tipo sela.

Exemplo 3. Globalmente, o comportamento das trajetórias na vizinhança de uma órbita periódica hiperbólica do tipo sela pode ser muito mais complexo do que se poderia antecipar a partir do caso linear.

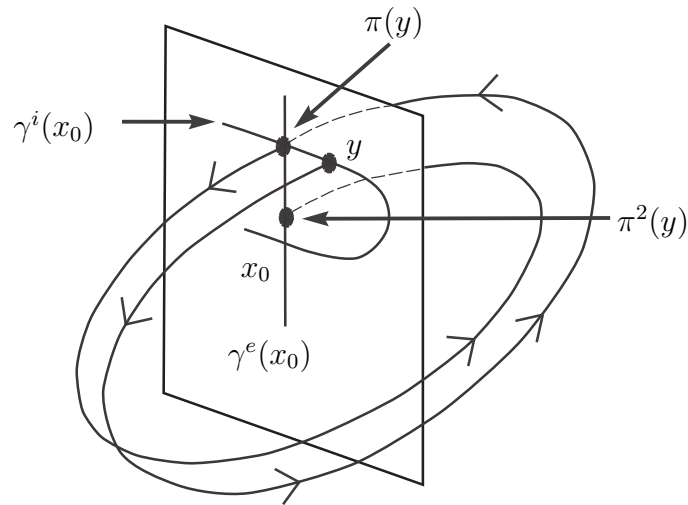


Figura 8.7: Uma órbita periódica exibindo uma ferradura.

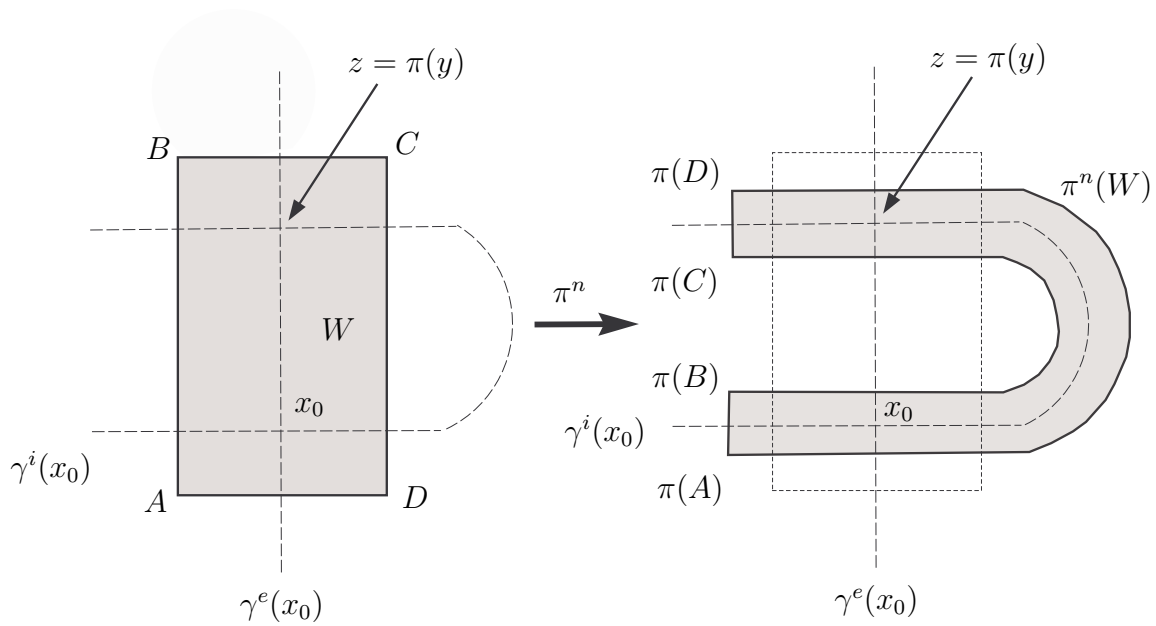


Figura 8.8: A aplicação de primeiro retorno de Poincaré de uma ferradura.

Na Figura (8.7), mostramos uma órbita periódica hiperbólica em $\mathbb{R}^3$ na qual aparece o fenômeno da ferradura e, na Figura (8.8), mostramos como se comporta uma iterada

da aplicação de primeiro retorno de Poincaré π na seção transversal. Neste exemplo da ferradura, devido a S. Smale, é possível mostrar que existem infinitas órbitas periódicas para o campo de vetores na vizinhança da órbita periódica.

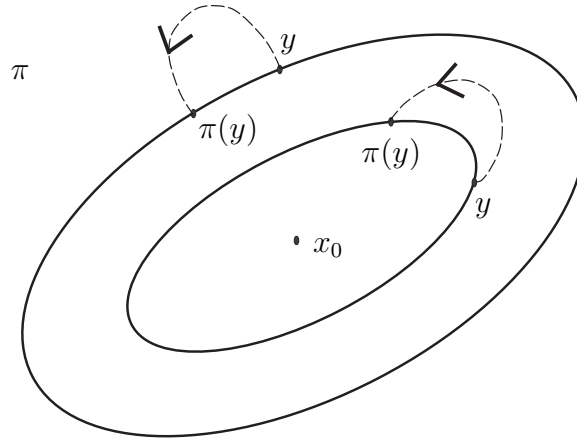


Figura 8.9: A aplicação de primeiro retorno de Poincaré em um ponto elíptico.

Mais precisamente, mostramos que existe uma infinidade de pontos periódicos de π , de períodos arbitrariamente grandes, no conjunto invariante obtido pela interseção de todos os iterados do retângulo W indicado na Figura (8.8). $\square$

O contraponto do caso hiperbólico da Figura (8.4) é ilustrado na Figura (8.9), na qual retratamos as iteradas da aplicação de primeiro retorno de Poincaré na vizinhança de um ponto elíptico.

Definição 8.0.17. Dizemos que o ponto fixo x_0 é um ponto fixo elíptico para a aplicação π de primeiro retorno de Poincaré se $D\pi(x_0) \in M(2)$ tem os dois autovalores complexos e não-reais de módulo igual a 1.

Neste caso, dizemos que a órbita periódica por x_0 é uma órbita periódica elíptica.

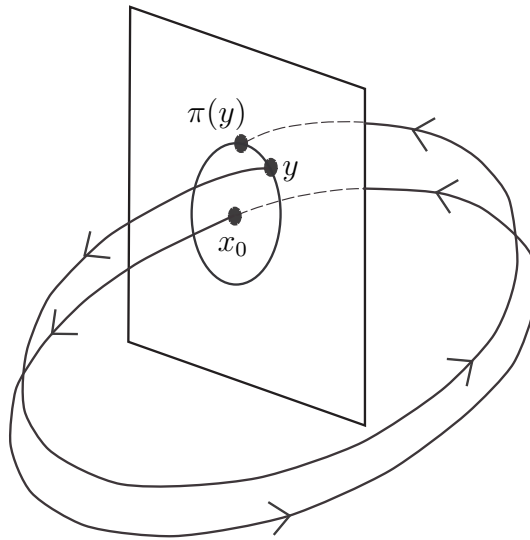


Figura 8.10: Uma órbita na vizinhança de uma órbita periódica elíptica.

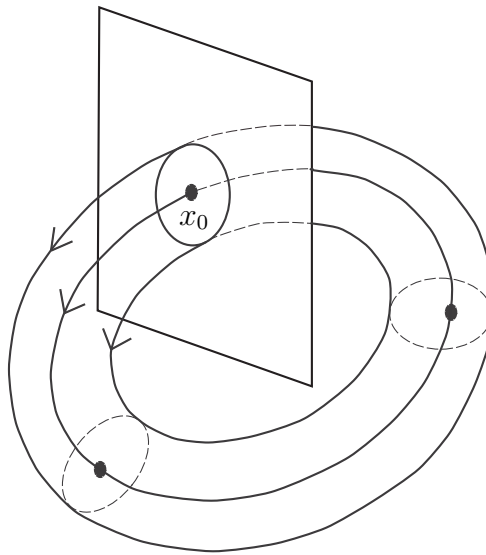


Figura 8.11: Um toro invariante.

Definição 8.0.18. *Um ponto periódico x de período n de um difeomorfismo π é um ponto periódico elíptico se x é ponto fixo elíptico do difeomorfismo iterado π^n .*

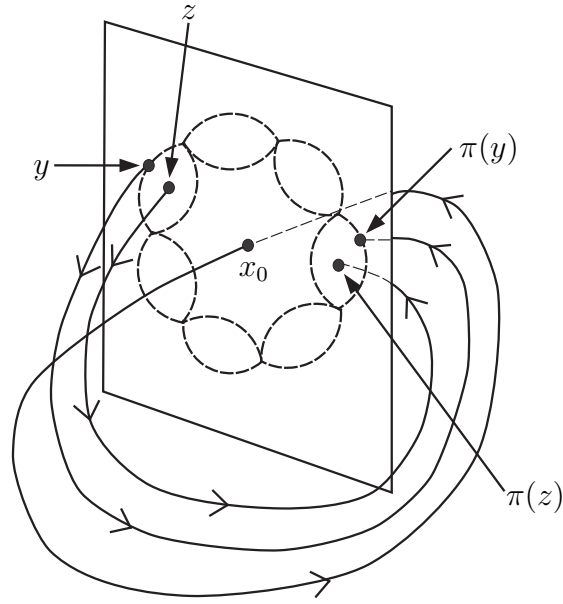


Figura 8.12: A destruição de um toro invariante.

Cada ponto inicial y na vizinhança de um ponto elíptico x_0 tem a tendência de rodar em torno de x_0 ao longo de sua evolução temporal $\pi^n(y)$, com $n \geq 0$. Observe que, localmente, a dinâmica de π em torno do ponto fixo elíptico x_0 é semelhante a uma versão discreta da dinâmica da derivada $D\pi(x_0)$ em torno do ponto de equilíbrio na origem, que é um centro.

A Figura (8.10) ilustra o comportamento das trajetórias do campo X próximas de uma órbita periódica elíptica, refletindo o comportamento dinâmico da aplicação de primeiro retorno de Poincaré π em torno de x_0 descrito na Figura (8.9).

Neste caso, existe um contínuo de toros envolvendo a órbita $x(t)$, cada toro sendo invariante pelo fluxo, veja a Figura (8.11). Fenômenos extremamente complexos podem suceder no caso de uma órbita elíptica e a destruição dos toros invariantes por uma perturbação do campo é de fundamental importância na teoria de Sistemas Dinâmicos, veja a Figura (8.12).

A dinâmica resultante é denominada o comportamento KAM, em homenagem aos matemáticos A. N. Kolmogorov, V. Arnold e J. Moser, veja a Figura (8.13).

A partir do que foi apresentado acima, podemos perceber a extrema complexidade

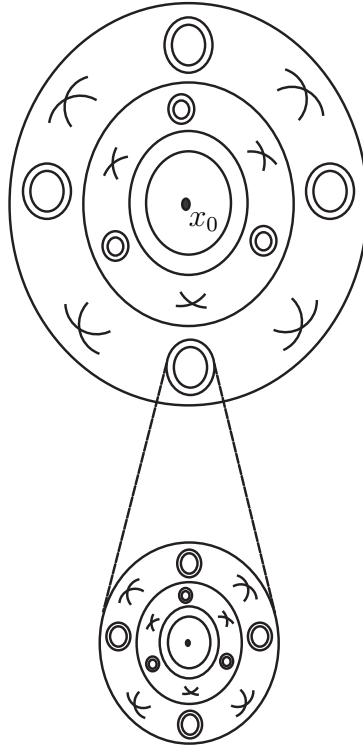


Figura 8.13: O fenômeno KAM.

do que pode suceder na evolução temporal das condições iniciais na proximidade de uma órbita periódica de um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$.

Nosso objetivo, neste capítulo, foi apenas descrever, de maneira sumária, o que acontece em torno das órbitas periódicas de um campo de vetores. Como vimos, este comportamento depende fundamentalmente da aplicação de primeiro retorno de Poincaré numa seção transversal local por um ponto da órbita e, assim, leva naturalmente ao estudo da dinâmica de difeomorfismos.

Por fim, não é possível apresentar as provas dos resultados acima descritos, pois isto implicaria um estudo da versão discreta dos resultados apresentados neste texto. Nosso objetivo foi apenas o de apresentar algumas idéias centrais da dinâmica global de Sistemas Dinâmicos.

Referências Bibliográficas

- [1] BLOWS, T. R; PERKO, L. M. Bifurcation of limit cycles from centres and separatrix cycles of planar analytic systems. *SIAM*. v. 36, n. 3, p. 341-376, 1994.
- [2] BÜCHEL, ZUR W. Topologie der durch eine gewöhnliche Differential - gleichung erster Ordnung und ersten Grades definierten Kurvenschar. (On the topology of the curves defined by an ordinary differential equation of the first order and the first degree). *Mitteil. der Math.* Hamburg, v. 4, n. 4, p. 33-68, 1904.
- [3] CHICONE, C. *Ordinary Differential Equations with Applications*. 2^a ed. New York: Text in Applied Mathematics - Springer, 2006.
- [4] DEMAZURE, M. *Bifurcations and Catastrophes - Geometry of Solutions to Non-linear Problems*. Berlin: Springer, 2000.
- [5] DEVANEY, R.L; HIRSCH, M; SMALE, S. *Differential Equations, Dynamical Systems, and An Introduction to Chaos*. San Diego: Elsevier Academic Press, 2004.
- [6] DOERING, C.I; LOPES, A.O. *Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária - IMPA, 2005.
- [7] GIACOMINI, H; LLIBRE, J; VIANO, M. On the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles. *Nonlinearity* **9**, p. 501-516, 1996.
- [8] GIACOMINI, H; VIANO, V. Determination of limit cycles for two-dimensional dynamical systems. *The American Physical Society*. v. 52, n. 1, p. 222-228, jul 1995.
- [9] GRADSHEYN, I. S; RYSHIK, I. M *Table of Integrals, Series, and Products*. San Diego: Academic, 1980.

-
- [10] JOHN; F. *Partial Differential equations*. New York: Springer, 1971.
 - [11] LINS A; MELO, W; PUGH, C. *On Liénard's equation*. Lecture Notes in Math. Berlin, v. 597, p. 335 - 357, 1977.
 - [12] MELO, W; PALIS, J. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 1978.
 - [13] MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2002.
 - [14] REYN, J. *Phase Portraits of Planar Quadratic Systems*. New York: Mathematics and Its Applications - Springer, 2007.
 - [15] SOTOMAYOR, J. *Lições de Equações Diferenciais*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - CNPq, 1979.
 - [16] VOROBÉV, A. P. *Cycles around a singular point of the nodal type*. Dokl. Akad. Nauk. B.S.S.R. IV **9**, p. 369 - 371, 1960.
 - [17] YANQUIAN, Y. E. *Theory of Limit Cycles*. 2^a ed. Providence: American Mathematical Society, 1986.