



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Jéssica Ventura da Silva

**Uma classe de polinômios ortogonais de Sobolev
no círculo unitário: limitantes, resultados
assintóticos e zeros**

São José do Rio Preto
2022

Jéssica Ventura da Silva

**Uma classe de polinômios ortogonais de Sobolev
no círculo unitário: limitantes, resultados
assintóticos e zeros**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga

Financiadora: CAPES

São José do Rio Preto
2022

S586c Silva, Jéssica Ventura
Uma classe de polinômios ortogonais de Sobolev no círculo unitário: limitantes, resultados assintóticos e zeros / Jéssica Ventura Silva. -- São José do Rio Preto, 2022
79 p. : il., tabs.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto
Orientador: Alagacone Sri Ranga

1. Matemática. 2. Análise matemática. 3. Polinômios ortogonais de Sobolev no círculo unitário. 4. Pares coerentes de medidas. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Jéssica Ventura da Silva

**Uma classe de polinômios ortogonais de Sobolev
no círculo unitário: limitantes, resultados
assintóticos e zeros**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga
Orientador

Prof. Dr. Francisco Jose Marcellán Español
Universidade Carlos III de Madrid

Prof. Dr. Daniel Oliveira Veronese
UFTM - Uberaba

Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani
UNESP – Presidente Prudente

Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
16 de fevereiro de 2022

*Aos meus irmãos e familiares,
com muito amor e carinho,
ofereço!*

*Aos meus pais, Lianiro e Nelci,
a meu orientador, Ranga,
dedico!*

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me permitido vivenciar esta fase de grande aprendizagem, por me dar sabedoria e guiar meu caminho.

Um agradecimento especial ao Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga, pelos desafios propostos, incentivo, paciência, cuidados e por todos os ensinamentos que muito contribuíram para a minha formação acadêmica e pessoal.

À Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali, pela atenção, incentivo e disponibilidade em todos os momentos vivenciados no curso.

Aos meus pais, Lianiro e Nelci, pelo apoio, incentivo, força, carinho e principalmente, pela simplicidade na forma que me educaram.

Aos meus irmãos Flávio, Marcelo, Thaís e Giovana, que sempre zelaram e intercederam por mim, e por serem exemplos de pessoas para mim. E, aos meus irmãos menores, João Vitor, Júlia Karoline, Vitória e Leonardo, pelo companheirismo e momentos de ternura.

Também, agradeço aos professores que fizeram parte de minha vida, entre eles, a Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani, que me orientou durante os cursos de Graduação e de Mestrado com muito empenho e cuidado.

Agradeço aos amigos do Programa de Pós-Graduação em Matemática: Luana, Yen e Gustavo, pelas discussões matemáticas produtivas. Aos companheiros de café e de sorvete: Ana Livia, Carol, Eduardo, Elaine, Jarne, Kumon, Otávio, Ronísio e Yino, obrigada pelo acolhimento e experiências compartilhadas. Ao André Amaral, grande matemático e amigo, obrigada pela amizade e parceria em todos os momentos. Agradeço imensamente ao Lucas Queiroz Arakaki, matemático e amigo incrível, grande irmão que o doutorado me presenteou, obrigada pelo companheirismo, pelas caminhadas e conversas que muito colaboraram para o meu crescimento matemático e pessoal.

Aos meus amigos Letícia, Roberto, Laison e Rodrigo que me acompanham desde a graduação e mestrado, obrigada pela amizade e apoio.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, à qual agradeço.

*Aprenda como se você fosse viver para sempre.
Viva como se você fosse morrer amanhã.*
Santo Isidoro de Sevilha

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho é apresentar um estudo detalhado de uma classe de polinômios ortogonais de Sobolev no círculo unitário introduzida por A. Sri Ranga em “*Orthogonal polynomials with respect to a family of Sobolev inner products on the unit circle, Proc. Amer. Math. Soc., 144 (2016), 1129-1143*”. A classe paramétrica de produtos internos de Sobolev em nosso estudo envolve pares de medidas conhecidas como “pares coerentes de medidas de segundo tipo no círculo unitário”. De acordo com este conceito de coerência, os polinômios ortogonais de Sobolev associados estão relacionados aos polinômios ortogonais com respeito a uma das medidas no produto interno de Sobolev por uma fórmula de conexão simples. Na presente tese consideramos outras propriedades, tais como limitantes e assintóticas, relacionadas aos coeficientes na fórmula de conexão e também aos polinômios ortogonais de Sobolev associados. Assumindo certas restrições nos parâmetros que definem o produto interno de Sobolev, mostramos também que os coeficientes de conexão estão relacionados a uma subclasse dos polinômios “*continuous dual Hahn*”. Além disso, determinamos algumas condições para que os zeros dos polinômios ortogonais de Sobolev e/ou de suas derivadas estejam dentro do disco unitário. Finalmente, usando experimentos numéricos, encontramos mais informações sobre os parâmetros para que os zeros de tais polinômios estejam dentro do disco unitário.

Palavras-chave: Polinômios ortogonais de Sobolev no círculo unitário. Coeficientes de conexão. Polinômios “*continuous dual Hahn*”.

ABSTRACT

The main goal of this work is to present a detailed study of a class of Sobolev orthogonal polynomials on the unit circle introduced by A. Sri Ranga in “Orthogonal polynomials with respect to a family of Sobolev inner products on the unit circle, Proc. Amer. Math. Soc., 144 (2016), 1129-1143”. The parametric class of Sobolev inner products in our study involve pairs of measures known as “coherent pairs of measures of the second kind on the unit circle”. Under this concept of coherence, the associated Sobolev orthogonal polynomials are found to be related to the orthogonal polynomials associated with one of the measures in the Sobolev inner product by a simple connection formula. In the present thesis we consider further properties, such as bounds and asymptotics, regarding the coefficients in the connection formula and also the associated Sobolev orthogonal polynomials. Assuming certain restrictions on the parameters that define the Sobolev inner product, we also show that the connection coefficients are related to a subclass of the “continuous dual Hahn” polynomials. Furthermore, we determine some conditions so that the zeros of the Sobolev orthogonal polynomials and/or its derivatives stay within the unit disk. Finally, using numerical experiments, we find further information on the parameters so that the zeros of such polynomials are within the unit disk.

Keywords: Sobolev orthogonal polynomials on the unit circle. Connection coefficients. Continuous dual Hahn polynomials.

Sumário

1	Introdução	19
2	Resultados Preliminares	23
2.1	Sequências encadeadas positivas	23
2.2	Funções especiais	24
2.3	Polinômios ortogonais	26
2.3.1	Polinômios ortogonais na reta real	27
2.3.2	Polinômios ortogonais no círculo unitário	29
2.3.3	Polinômios ortogonais de Sobolev	36
2.4	Pares coerentes de medidas	37
2.5	Alguns resultados recentes	39
3	Coeficientes de Conexão	43
3.1	Relação com os polinômios “continuous dual Hahn”	43
3.2	Limitantes e resultados assintóticos	48
3.3	Um caso particular	52
4	Polinômios Ortogonais de Sobolev	55
4.1	Resultados assintóticos	55
4.2	Localização dos zeros	59
4.3	Informações sobre os zeros da derivada	68
5	Considerações Finais	75
	Referências	77

1 Introdução

Os polinômios ortogonais possuem diversas aplicações em muitos campos da Matemática Aplicada como, por exemplo, no estudo de equações diferenciais, frações contínuas, estabilidade numérica de sistemas lineares, entre outras. Vale destacar que uma das aplicações mais interessantes destes polinômios está relacionada ao fato de seus zeros serem os nós das mais utilizadas fórmulas de quadratura, as de Gauss. Tais fórmulas possuem o maior grau de precisão algébrica, o que significa que elas aproximam, da maneira mais eficiente possível, integrais de funções suficientemente suaves. Estes polinômios também são definidos de forma simples, como segue.

Dizemos que ψ é uma medida positiva definida no intervalo (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq \infty$, se ψ é uma função real, limitada, não decrescente, e com infinitos pontos de aumento em (a, b) , tal que existam as integrais de Stieltjes

$$\mu_k = \int_a^b x^k d\psi(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Uma sequência de polinômios $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é uma *sequência de polinômios ortogonais* com relação à medida positiva ψ definida em (a, b) , se P_n tem grau n e

$$\langle P_m, P_n \rangle_\psi = \int_a^b P_m(x)P_n(x)d\psi(x) = \rho_n^2 \delta_{m,n}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots,$$

onde ρ_n é uma constante diferente de zero e $\delta_{m,n}$ é o delta de Kronecker, ou seja, $\delta_{m,n} = 1$ se $m = n$ e $\delta_{m,n} = 0$ caso contrário. Outra característica importante destes polinômios é o fato de que eles satisfazem uma relação de recorrência de três termos. Quando esses polinômios são mônicos, essa relação é dada por

$$P_{n+1}(x) = (x - c_{n+1})P_n(x) - \lambda_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (1.1)$$

com $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x - c_1$, $c_n \in \mathbb{R}$ e $\lambda_{n+1} > 0$, $n \geq 1$. Utilizando essa relação de recorrência prova-se várias propriedades interessantes relacionadas aos polinômios ortogonais. Por exemplo, que seus zeros são reais, simples e pertencem ao intervalo de ortogonalidade (a, b) , (ver [10, 15]).

A relação de recorrência de três termos é uma ferramenta essencial na teoria dos polinômios ortogonais, e é válida se o operador de multiplicação for simétrico com relação ao produto interno, isto é, $\langle xf, g \rangle_\psi = \langle f, xg \rangle_\psi$. Entretanto, quando o produto interno envolve termos com derivadas, tal como o produto interno de Sobolev, em particular, o produto interno definido em (1.2), o operador de multiplicação não é mais simétrico e, conseqüentemente, a relação de recorrência de três termos não é mais válida.

$$\langle f, g \rangle_{S(\mu_0, \mu_1, s)} = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)d\mu_0(x) + s \int_{\mathbb{R}} f'(x)g'(x)d\mu_1(x), \quad (1.2)$$

onde $s \geq 0$, μ_0 e μ_1 são medidas positivas.

Embora a falta dessa ferramenta represente uma grande dificuldade, o conceito de *par coerente de medidas* introduzido por A. Iserles e outros em [14] deu uma nova luz ao estudo dos polinômios ortogonais com relação ao produto interno de Sobolev (1.2).

De acordo com [14], um par de medidas (μ_0, μ_1) forma um par coerente de medidas se as respectivas sequências de polinômios ortogonais mônicos $\{P_n(\mu_0; x)\}_{n=0}^\infty$ e $\{P_n(\mu_1; x)\}_{n=0}^\infty$ satisfazem

$$nP_{n-1}(\mu_1; x) = P'_n(\mu_0; x) + a_n P'_{n-1}(\mu_0; x), \quad n \geq 2, \quad (1.3)$$

com $a_n \neq 0$.

Usando este conceito, mostra-se que os polinômios ortogonais associados ao produto interno de Sobolev (1.2) satisfazem relações simples envolvendo os polinômios ortogonais $\{P_n(\mu_0; x)\}_{n=0}^\infty$ e $\{P_n(\mu_1; x)\}_{n=0}^\infty$, o que contribui para o estudo de suas propriedades. Uma caracterização completa das medidas na reta real satisfazendo o conceito de coerência é apresentada em [26].

Os polinômios ortogonais mônicos no círculo unitário $\mathbb{T} = \{z = e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, também conhecidos como polinômios de Szegő, em homenagem a Gabor Szegő, que os introduziu na primeira metade do século XX, podem ser definidos por

$$\langle \Phi_m, \Phi_n \rangle_\mu = \int_{\mathbb{T}} \overline{\Phi_m(z)} \Phi_n(z) d\mu(z) = \int_0^{2\pi} \overline{\Phi_m(e^{i\theta})} \Phi_n(e^{i\theta}) d\mu(e^{i\theta}) = \kappa_n^{-2} \delta_{m,n}, \quad (1.4)$$

onde Φ_n é um polinômio de grau exatamente n e μ é uma medida positiva em \mathbb{T} . Observe que $\kappa_n^{-2} = \|\Phi_n\|^2$. Estes polinômios não satisfazem uma relação de recorrência de três termos da forma (1.1). Todavia, satisfazem a seguinte relação

$$\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) - \bar{\alpha}_n \Phi_n^*(z), \quad \text{para } n \geq 0,$$

onde $\Phi_0(z) = 1$, $\Phi_n^*(z) = z^n \overline{\Phi_n(1/\bar{z})}$ é o polinômio recíproco de $\Phi_n(z)$, e $\alpha_n = -\overline{\Phi_{n+1}(0)}$, $n \geq 0$, são conhecidos na literatura como *coeficientes de Verblunsky*. Os coeficientes de Verblunsky α_n , $n \geq 0$, de grande importância no estudo dos polinômios de Szegő, são tais que $|\alpha_n| < 1$ e, por meio de tais coeficientes, é possível caracterizar completamente a medida associada (ver [30] e [31]). Os polinômios de Szegő também possuem muitas aplicações, algumas delas em processamento de sinais, teoria de operadores, teoria espectral e fórmulas de quadratura.

Ao acrescentar termos com derivadas no produto interno dado em (1.4), define-se um produto interno de Sobolev sobre o círculo unitário. Em particular, se μ e ν são medidas positivas sobre o círculo unitário podemos definir a sequência de polinômios ortogonais com respeito ao produto interno de Sobolev

$$\langle f, g \rangle_S = \langle f, g \rangle_\mu + s \langle f', g' \rangle_\nu.$$

Muitos trabalhos foram desenvolvidos sobre tais polinômios, que podemos ver em [2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 13, 20, 21, 22, 33] e [35].

Novamente, como no caso dos polinômios ortogonais de Sobolev na reta real, a grande dificuldade no estudo dos polinômios ortogonais de Sobolev no círculo unitário está no fato de que em geral eles também não satisfazem uma relação simples. No entanto, em [6] foi introduzido o conceito de coerência para medidas definidas no círculo unitário, e então por meio dessa propriedade torna-se possível representar tais polinômios através de relações simples.

Na literatura são exibidos poucos exemplos de pares de medidas definidas no círculo unitário, satisfazendo a propriedade de coerência original. Entretanto, no caso de pares de medidas que satisfazem um conceito alternativo conhecido como *pares coerentes de medidas de segundo tipo* no círculo unitário, os estudos revelaram-se muito interessantes. Em [22], onde uma caracterização de tais pares de medidas é considerada, três famílias diferentes de pares de medidas também foram determinadas.

De acordo com [33], um par de medidas positivas (μ_0, μ_1) sobre o círculo unitário, chama-se *par coerente de medidas de segundo tipo* se as respectivas sequências de polinômios ortogonais mônicos $\{\Phi_n(\mu_0; z)\}_{n=0}^\infty$ e $\{\Phi_n(\mu_1; z)\}_{n=0}^\infty$ satisfazem

$$\frac{1}{n}\Phi'_n(\mu_0; z) = \Phi_{n-1}(\mu_1; z) - \chi_n\Phi_{n-2}(\mu_1; z), \quad n \geq 2.$$

Motivados por este conceito, neste trabalho consideramos o produto interno de Sobolev definido sobre o círculo unitário dado por

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{S}^{(b, \epsilon, s)}} = \langle f, g \rangle_{\mu^{(b, \epsilon)}} + s \langle f', g' \rangle_{\mu^{(b+1)}},$$

com parâmetros $s \geq 0$, $0 \leq \epsilon < 1$, $b = \lambda + i\eta$, $\lambda > -1/2$ e $\eta \in \mathbb{R}$, e o par de medidas $(\mu^{(b, \epsilon)}, \mu^{(b)})$ definidas no círculo unitário da seguinte forma

$$\langle f, g \rangle_{\mu^{(b, \epsilon)}} = (1 - \epsilon)\langle f, g \rangle_{\mu^{(b)}} + \epsilon \overline{f(1)}g(1),$$

$$\langle f, g \rangle_{\mu^{(b)}} = \int_0^{2\pi} \overline{f(e^{i\theta})}g(e^{i\theta})d\mu^{(b)}(e^{i\theta}) = \frac{\tau^{(b)}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(e^{i\theta})}g(e^{i\theta})(e^{\pi-\theta})^{\Im(b)}(\sin^2(\theta/2))^{\Re(b)}d\theta.$$

Aqui, $\tau^{(b)} = \frac{2^{b+\bar{b}}|\Gamma(b+1)|^2}{\Gamma(b+\bar{b}+1)}$, para que $\mu^{(b)}$ seja uma medida de probabilidade sobre o círculo unitário. Consequentemente, $\langle 1, 1 \rangle_{\mu^{(b, \epsilon)}} = 1$ e também $\langle 1, 1 \rangle_{\mathcal{S}^{(b, \epsilon, s)}} = 1$.

Denotemos por $\{\Psi_n^{(b, \epsilon, s)}\}_{n \geq 0}$, $\{\Phi_n^{(b, \epsilon)}\}_{n \geq 0}$ e $\{\Phi_n^{(b)}\}_{n \geq 0}$, respectivamente, as sequências de polinômios ortogonais mônicos com respeito aos produtos internos $\langle f, g \rangle_{\mathcal{S}^{(b, \epsilon, s)}}$, $\langle f, g \rangle_{\mu^{(b, \epsilon)}}$ e $\langle f, g \rangle_{\mu^{(b)}}$.

Em [33], foi mostrado que o par de medidas $(\mu^{(b, \epsilon)}, \mu^{(b+1)})$ é um par coerente de medidas de segundo tipo, ou seja, as respectivas sequências de polinômios ortogonais no círculo unitário, $\{\Phi_n^{(b, \epsilon)}\}_{n \geq 0}$ e $\{\Phi_n^{(b+1)}\}_{n \geq 0}$, satisfazem

$$\Phi_n^{(b, \epsilon)'}(z) = n\Phi_{n-1}^{(b+1)}(z) - n\chi_n^{(b, \epsilon)}\Phi_{n-2}^{(b+1)}(z), \quad n \geq 2.$$

Além disso, sobre os polinômios ortogonais de Sobolev $\Psi_n^{(b, \epsilon, s)}$, também foi mostrado que

$$\Psi_{n+1}^{(b, \epsilon, s)}(z) - \beta_{n+1}^{(b, \epsilon, s)}\Psi_n^{(b, \epsilon, s)}(z) = \Phi_{n+1}^{(b, \epsilon)}(z), \quad n \geq 0.$$

Desta forma, pela relação acima, podemos observar que conhecer detalhadamente informações sobre os coeficientes de conexão $\beta_n^{(b, \epsilon, s)}$ é importante para determinar as propriedades dos polinômios ortogonais de Sobolev $\Psi_n^{(b, \epsilon, s)}$. Alguns resultados interessantes desses coeficientes podem ser encontrados em [33].

Esta tese está estruturada da seguinte maneira: no Capítulo 2, com o objetivo de determinar as propriedades satisfeitas por esta família de polinômios ortogonais de Sobolev, abordamos o estudo de alguns dos principais resultados sobre sequências encadeadas positivas, funções especiais, polinômios ortogonais, pares coerentes de medidas e sobre alguns resultados recentes relacionados aos polinômios ortogonais de Sobolev $\Psi_n^{(b, \epsilon, s)}$ apresentados em [22] e [33].

No Capítulo 3, determinamos limitantes, monotonicidades e propriedades assintóticas associadas aos coeficientes de conexão $\beta_n^{(b,\epsilon,s)}$. Dentre tais resultados, também apresentamos o estudo dos polinômios, denotados por $Q_n^{(b,\epsilon)}$, definidos por

$$\beta_{n+1}^{(b,\epsilon,\kappa^{(b,\epsilon)}/y)} = \frac{Q_{n-1}^{(b,\epsilon)}(y)}{Q_n^{(b,\epsilon)}(y)}, \quad \text{onde} \quad \kappa^{(b,\epsilon)} = \frac{(2\lambda + 1)(2\lambda + 2)(1 - \epsilon)}{(|b + 1|^2)}.$$

Observamos que $\{Q_n^{(b,\epsilon)}\}_{n \geq 0}$ satisfazem uma interessante e simples relação de recorrência de três termos, indicando que eles são ortogonais com respeito a alguma medida positiva na reta real negativa. Em particular, quando $\epsilon = 0$, estes polinômios estão relacionados a uma subfamília dos polinômios “*continuous dual Hahn*”.

O Capítulo 4 é dedicado ao estudo das propriedades assintóticas dos polinômios ortogonais de Sobolev $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$ com respeito aos parâmetros λ , η e s , e ao estudo dos zeros destes polinômios. Estabelecemos algumas considerações sobre os zeros de $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$ e $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)'}$, bem como, tratamos as condições sob as quais os zeros de tais polinômios permanecem no disco unitário. Em particular, mostramos que os zeros de $\Psi_n^{(0,0,s)}$ estão dentro de uma região anelar no disco unitário e provamos que os zeros da derivada de $\Psi_n^{(\lambda,0,s)}$ estão dentro do disco unitário. Além disso, uma interessante contribuição obtida via experimentos numéricos, diz respeito a existência de uma função $s(n)$ tal que para todos valores de s limitados superiormente por $s(n)$, os zeros do polinômio $\Psi_n^{(\lambda,0,s)}$ permanecem dentro do disco unitário. Também determinamos uma estimativa para o comportamento de $s(n)$.

2 Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentamos um breve resumo dos resultados conhecidos na literatura sobre seqüências encadeadas positivas, as funções especiais gama e hipergeométricas, polinômios ortogonais na reta real e no círculo unitário, e polinômios ortogonais de Sobolev. Além disso, abordamos o estudo de outra ferramenta importante para o desenvolvimento deste trabalho, o conceito de pares coerentes de medidas. Por fim, apresentamos alguns resultados obtidos por Marcellán e Sri Ranga em [22] e por Sri Ranga em [33], sobre a família de polinômios ortogonais de Sobolev, que é o principal objeto de investigação do presente trabalho.

2.1 Sequências encadeadas positivas

O conceito de seqüência encadeada foi introduzido por Wall em sua monografia sobre frações contínuas [34]. Nesta seção abordamos brevemente a definição e os principais resultados sobre seqüências encadeadas positivas que serão utilizados no desenvolvimento deste trabalho. Tais resultados podem ser encontrados em [10] e [34].

Definição 2.1. Uma seqüência $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência encadeada positiva se existe uma seqüência $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que

- (i) $0 \leq g_0 < 1, \quad 0 < g_n < 1, \quad n \geq 1,$
- (ii) $d_n = (1 - g_{n-1})g_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

A seqüência $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ é chamada de seqüência de parâmetros para $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ e g_0 é o parâmetro inicial.

Vejamos, a seguir, um exemplo de seqüência encadeada positiva.

Exemplo 2.2. A seqüência constante dada por $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{4}\right\}_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência encadeada positiva com seqüência de parâmetros $\{g_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\frac{n}{2(n+1)}\right\}_{n=0}^{\infty}$. Além disso, podemos notar que a seqüência $\left\{\frac{1}{2}\right\}_{n=0}^{\infty}$ também é uma seqüência de parâmetros para $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definição 2.3. Seja $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência encadeada positiva. Uma seqüência de parâmetros $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ é chamada de seqüência minimal de parâmetros se $m_0 = 0$.

No Exemplo 2.2, podemos observar que $\{g_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \frac{n}{2(n+1)} \right\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência minimal de parâmetros para $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{4} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

Caso a sequência minimal de parâmetros seja a única sequência de parâmetros para a sequência encadeada positiva $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$, dizemos que $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ é unicamente determinada.

Definição 2.4. Seja $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência encadeada positiva. Uma sequência de parâmetros $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ é chamada de sequência maximal de parâmetros se, para qualquer outra sequência de parâmetros $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$, $M_n > g_n$, $n \geq 0$.

A seguir, enunciamos os resultados relacionados a sequências encadeadas positivas que serão utilizados no desenvolvimento deste trabalho. Para mais detalhes, citamos [10].

Teorema 2.5. *Sejam $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência encadeada positiva com $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$, respectivamente, sequências de parâmetros minimal e maximal para $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$, e $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência encadeada positiva com sequência de parâmetros $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$. Se $d_n \leq c_n$, $n \geq 1$, então*

$$m_n \leq h_n \leq M_n, \quad n \geq 0.$$

Como uma consequência do Teorema 2.5 enunciamos o seguinte corolário.

Corolário 2.6. *Se para algum $N \geq 1$, $d_N < c_N$, então*

$$m_k < h_k, \quad \text{para } k \geq N \quad \text{e} \quad h_k < M_k, \quad \text{para } 0 \leq k < N.$$

O próximo resultado fornece uma maneira de verificar se uma dada sequência é uma sequência encadeada positiva.

Teorema 2.7 (Teste da comparação). *Sejam $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência encadeada positiva e $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência. Se $0 < c_n \leq d_n$ para $n \geq 1$, então $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ é também uma sequência encadeada positiva.*

Teorema 2.8. *Seja $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência encadeada positiva com $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$, respectivamente, sequências de parâmetros minimal e maximal para $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$, tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = a.$$

Então, $0 \leq a \leq 1/4$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{1 - 4a}].$$

Além disso, se $M_0 > 0$, isto é, $m_n \neq M_n$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \frac{1}{2}[1 - \sqrt{1 - 4a}].$$

2.2 Funções especiais

Nesta seção apresentamos alguns resultados básicos sobre a função gama e séries hipergeométricas. Para estes estudos, utilizamos a referência [1].

Dado um número complexo a , o *símbolo de Pochhammer*, também conhecido por *fatorial deslocado*, denotado por $(a)_n$, sendo n um inteiro não negativo, é definido pelo seguinte produto

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1), \quad n \geq 1, \\ (a)_0 = 1.$$

Observe que, se $a = 1$ temos $(1)_n = n!$ e se $n > m$ são inteiros positivos, temos $(-m)_n = 0$.

A função gama foi introduzida por Euler em 1729, com o intuito de estender o domínio da função fatorial ao conjunto dos números complexos. Esta função possui várias representações, dentre elas temos o produtório infinito e a representação integral.

Para todo número complexo $z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, a função gama Γ é definida por

$$\Gamma(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!k^{z-1}}{(z)_k}. \quad (2.1)$$

Como consequência imediata de (2.1) a função Γ satisfaz a propriedade $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. E, ainda, se $z \in \mathbb{N}$ temos que $\Gamma(z+1) = z!$ e $\Gamma(z+n) = (z)_n\Gamma(z)$.

Dentre as muitas fórmulas interessantes envolvendo a função gama, apresentamos a fórmula de reflexão de Euler dada por

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi z)}, \quad z \notin \mathbb{Z}.$$

A série hipergeométrica é uma série $\sum_n c_n$ em que a razão dos coeficientes sucessivos indexados por n , c_{n+1}/c_n , é uma função racional de n , ou seja, usando fatoraçoão polinomial, temos

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+a_1)(n+a_2)\dots(n+a_p)z}{(n+b_1)(n+b_2)\dots(n+b_q)(n+1)}, \quad (2.2)$$

com $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \dots, p$, e $b_i \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, $i = 1, \dots, q$. O fator z aparece pois o polinômio em (2.2) pode não ser mônico, e o termo $n+1$ pode ser resultado da fatoraçoão do denominador, ou não. Se não for, multiplicamos o numerador e o denominador por $n+1$. Assim, de (2.2) temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n(a_2)_n \dots (a_p)_n z^n}{(b_1)_n(b_2)_n \dots (b_q)_n n!} =: c_0 {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z). \quad (2.3)$$

Aqui os valores b_i , $i = 1, \dots, q$, não podem ser inteiros negativos ou zero, pois isso tornaria o denominador nulo. Se o termo geral estiver claro no contexto podemos simplificar a notação ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z)$ por ${}_pF_q$.

As séries hipergeométricas, se convergentes, definem funções hipergeométricas, que são de grande importância na literatura, visto que por meio destas é possível expressar funções elementares, bem como outras funções interessantes na matemática.

Note que, se em (2.3) para algum i , tomarmos $a_i = -m$, com $m \in \mathbb{Z}^+$, então

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n(a_2)_n \dots (a_p)_n z^n}{(b_1)_n(b_2)_n \dots (b_q)_n n!} \\ = \sum_{n=0}^m \frac{(a_1)_n(a_2)_n \dots (a_p)_n z^n}{(b_1)_n(b_2)_n \dots (b_q)_n n!}.$$

Portanto, neste caso vemos que a série hipergeométrica se reduz a um polinômio de grau m na variável z .

Uma pergunta natural que surge sobre a série hipergeométrica diz respeito ao raio de convergência da mesma. É conhecido que a série converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$ se $p \leq q$ e para $|z| < 1$ se $p = q + 1$. Se $p > q + 1$ a série diverge para todo $z \neq 0$. Mais detalhes no Teorema 2.1.1 em [1].

Se $p = 2$ e $q = 1$ a série hipergeométrica definida em (2.3) é conhecida como *função hipergeométrica de Gauss* e pode ser definida como

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!},$$

para $|z| < 1$ e por continuidade analítica para $|z| \geq 1$.

Desta forma, temos que ${}_2F_1(a, b; c; z)$ converge para todo $|z| < 1$, e além disso a série também converge absolutamente para $|z| = 1$ desde que $\Re(c - a - b) > 0$. Mais detalhes no Teorema 2.1.2 em [1]. A função hipergeométrica de Gauss $y(z) = {}_2F_1(a, b; c; z)$ satisfaz

$$\frac{dy(z)}{dz} = \frac{ab}{c} {}_2F_1(a + 1, b + 1; c + 1; z).$$

O seguinte teorema fornece uma fórmula muito útil que será utilizada nos capítulos seguintes.

Teorema 2.9 (Chu-Vandermonde).

$${}_2F_1(-m, b; c; 1) = \frac{(c - b)_m}{(c)_m}.$$

2.3 Polinômios ortogonais

Nesta seção apresentamos alguns resultados clássicos sobre a teoria de polinômios ortogonais na reta real e no círculo unitário, que podem ser encontrados, por exemplo, em [10, 15, 30, 31]. Além disso, abordamos polinômios ortogonais com relação a produtos internos de Sobolev.

Consideremos um intervalo (a, b) , com $-\infty \leq a < b \leq \infty$, ψ uma função real e não decrescente definida em (a, b) e f uma função definida em (a, b) . A expressão

$$\int_a^b f(x) d\psi(x)$$

é conhecida como *integral de Riemann-Stieltjes* ou simplesmente, *integral de Stieltjes* da função f com respeito a ψ .

Definição 2.10. Seja ψ uma função real não decrescente definida em $[a, b]$ com $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Um ponto $\xi \in [a, b]$ é chamado de ponto de aumento de ψ se, para todo $\epsilon > 0$,

$$\psi(\xi + \epsilon) - \psi(\xi - \epsilon) > 0.$$

Em particular, o conjunto de todos os pontos de aumento de ψ

$$\text{supp}(\psi) = \{\xi \in (a, b) \mid \psi(\xi + \epsilon) - \psi(\xi - \epsilon) > 0, \text{ para todo } \epsilon > 0\}$$

é chamado de suporte de ψ .

Definição 2.11. Seja ψ uma função definida em (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq \infty$, limitada, não decrescente, e com infinitos pontos de aumento, tal que as integrais de Stieltjes

$$\mu_k = \int_a^b x^k d\psi(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

existam. Então, dizemos que ψ é uma distribuição ou medida positiva em (a, b) .

Os valores μ_k são chamados de *momentos* da medida ψ . E, se $\mu_0 = \int_a^b d\psi(x) = 1$, a medida ψ é chamada de *medida de probabilidade*.

Quando a função ψ é *absolutamente contínua*, podemos escrever $d\psi(x) = \omega(x)dx$, onde ω é uma função não negativa e não identicamente nula, ω é chamada de *função peso*.

Observemos que, ao supormos que ψ tem infinitos pontos de aumento, ou seja, que seu suporte é um conjunto infinito, garantimos que ψ é tal que

$$\int_a^b P(x)d\psi(x) > 0,$$

para qualquer polinômio $P(x) \geq 0$, mas não identicamente nulo em (a, b) . Assim, podemos definir o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi$ da seguinte forma

$$\langle f, g \rangle_\psi = \int_a^b f(x)g(x)d\psi(x),$$

onde f e g são funções contínuas no intervalo (a, b) .

2.3.1 Polinômios ortogonais na reta real

Uma sequência de polinômios $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é uma *sequência de polinômios ortogonais* com relação a medida positiva ψ definida em (a, b) , se P_n tem grau n e

$$\langle P_m, P_n \rangle_\psi = \int_a^b P_m(x)P_n(x)d\psi(x) = \rho_n^2 \delta_{m,n}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots,$$

onde $\delta_{m,n}$ é o delta de Kronecker, definido por

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & \text{se } m = n \\ 0, & \text{se } m \neq n. \end{cases}$$

Além disso, se $\rho_n = 1$, $n \geq 0$, a sequência $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é chamada de *sequência de polinômios ortonormais* com relação a ψ .

Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma sequência de polinômios ortogonais com relação a uma medida ψ é que os *determinantes de Hankel*,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}, \quad n \geq 0,$$

sejam todos positivos.

Na literatura, uma das características mais importantes dos polinômios ortogonais é o fato de que eles satisfazem uma relação de recorrência de três termos. Quando tais polinômios são mônicos, essa relação é dada por

$$P_{n+1}(x) = (x - c_{n+1})P_n(x) - \lambda_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (2.4)$$

com $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x - c_1$ e os coeficientes c_{n+1} e λ_{n+1} são tais que

$$c_{n+1} = \frac{\langle xP_n, P_n \rangle_\psi}{\langle P_n, P_n \rangle_\psi}, \quad n \geq 0 \quad \text{e} \quad \lambda_{n+1} = \frac{\langle P_n, P_n \rangle_\psi}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle_\psi}, \quad n \geq 1.$$

Note que, como $\lambda_{n+1} = \frac{\rho_n^2}{\rho_{n-1}^2}$, podemos escrever

$$\rho_n^2 = \langle P_n, P_n \rangle_\psi = \lambda_{n+1}\rho_{n-1}^2 = \lambda_{n+1}\lambda_n \dots \lambda_2\mu_0, \quad n \geq 1,$$

com $\rho_0^2 = \mu_0$.

Exemplo 2.12. De acordo com [18, p. 196], os polinômios “*continuous dual Hahn*”, p_n , satisfazem a ortogonalidade

$$\int_0^\infty p_m(x^2)p_n(x^2)d\nu(x) = \Gamma(n+a+b)\Gamma(n+a+c)\Gamma(n+b+c)n!\delta_{m,n},$$

onde a medida de probabilidade ν definida sobre a reta real é representada por

$$\int_0^\infty f(x^2)d\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f(x^2)\omega(x)dx,$$

para $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ e por

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x^2)d\nu(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f(x^2)\omega(x)dx + \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)\Gamma(b-a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(-2a)} \\ &\quad \times \sum_{\substack{k=0,1,\dots \\ a+k < 0}} \frac{(2a)_k(a+1)_k(a+b)_k(a+c)_k(-1)^k}{(a)_k(a-b+1)_k(a-c+1)_k k!} f(-(a+k)^2), \end{aligned}$$

para $a < 0$, $a+b > 0$ e $a+c > 0$. Aqui a função peso ω é dada por

$$\omega(x) = \left| \frac{\Gamma(a+ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(c+ix)}{\Gamma(2ix)} \right|^2.$$

Tais polinômios, p_n , satisfazem a relação de recorrência de três termos

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x - \mathbf{a}_0 - \mathbf{c}_0 + a^2, \\ p_n(x) &= [x - \mathbf{a}_{n-1} - \mathbf{c}_{n-1} + a^2]p_{n-1}(x) - \mathbf{a}_{n-2}\mathbf{c}_{n-1}p_{n-2}(x), \quad n \geq 2, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde $\mathbf{a}_n = (n+a+b)(n+a+c)$ e $\mathbf{c}_n = n(n+b+c-1)$.

Além disso, estes polinômios têm representação em termos de função hipergeométrica dada por

$$p_n(x^2) = (-1)^n S_n(x^2; a, b, c) = (-1)^n (a+b)_n (a+c)_n {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n, a+ix, a-ix \\ a+b, a+c \end{matrix} \middle| 1 \right), \quad n \geq 1.$$

Uma importante consequência da relação de recorrência de três termos (2.4) é dada no próximo resultado.

Teorema 2.13 (Identidade de Christoffel-Darboux). *Seja $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios que satisfaz (2.4) com $\lambda_{n+1} \neq 0$, para $n \geq 0$. Então*

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)P_k(u)}{\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_{k+1}} = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(u) - P_n(x)P_{n+1}(u)}{x - u}. \quad (2.6)$$

Observe que de (2.6) podemos escrever

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)P_k(u)}{\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_{k+1}} = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_{n+1}} \frac{[P_{n+1}(x) - P_{n+1}(u)]P_n(u) - [P_n(u) - P_n(x)]P_{n+1}(u)}{x - u}.$$

Fazendo u tender a x na expressão acima, obtemos a forma confluenta de (2.6) dada por

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k^2(x)}{\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_{k+1}} = \frac{P'_{n+1}(x)P_n(x) - P_n(x)'P_{n+1}(x)}{\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_{n+1}}. \quad (2.7)$$

O teorema a seguir, afirma que qualquer sequência de polinômios que satisfaz uma relação de recorrência da forma (2.4) é uma sequência de polinômios ortogonais.

Teorema 2.14 (Favard). *Sejam $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ sequências de números complexos arbitrários, com $c_n \in \mathbb{R}$ e $\lambda_{n+1} > 0$ para $n \geq 1$, e seja $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios mônicos satisfazendo a relação de recorrência de três termos*

$$P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots,$$

com $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x - c_1$. Então, existe uma medida ψ com relação à qual a sequência de polinômios $\{P_n\}_{n \geq 0}$ é ortogonal.

Dentre outras propriedades interessantes satisfeitas pelos polinômios ortogonais, P_n , podemos citar que seus zeros são reais, distintos, e pertencem ao intervalo (a, b) . Além disso, se denotarmos por $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n}$ os zeros de P_n , $n \geq 1$, em ordem crescente, então

$$x_{n+1,1} < x_{n,1} < x_{n+1,2} < x_{n,2} < \cdots < x_{n+1,n} < x_{n,n} < x_{n+1,n+1},$$

ou seja, entre dois zeros consecutivos do polinômio P_{n+1} existe um único zero de P_n . Neste caso, dizemos que os zeros de P_n e P_{n+1} se entrelaçam.

2.3.2 Polinômios ortogonais no círculo unitário

Nesta seção fazemos um breve estudo sobre os polinômios ortogonais e para-ortogonais no círculo unitário, utilizando as referências [17, 30] e [31]. Os polinômios ortogonais no círculo unitário também são conhecidos como polinômios de Szegő.

Seja μ uma medida positiva no círculo unitário $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, parametrizado por $z = e^{i\theta}$, ou seja, a medida $\mu(e^{i\theta})$ definida em $0 \leq \theta \leq 2\pi$, é uma função real, limitada e não decrescente, com infinitos pontos de aumento em \mathbb{T} . Aqui, vamos assumir que μ é uma medida de probabilidade.

A sequência de polinômios $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$, Φ_n mônico de grau n , é chamada de sequência de polinômios ortogonais no círculo unitário com relação a μ , se satisfaz

$$\int_{\mathbb{T}} \bar{z}^j \Phi_n(z) d\mu(z) = \int_0^{2\pi} e^{-ij\theta} \Phi_n(e^{i\theta}) d\mu(e^{i\theta}) = \frac{1}{\kappa_n^2} \delta_{n,j}, \quad 0 \leq j \leq n,$$

onde $\kappa_n^{-2} = \|\Phi_n\|^2 = \int_{\mathbb{T}} |\Phi_n(z)|^2 d\mu(z)$. Visto que a integral é sobre o círculo unitário, temos $\bar{z} = z^{-1}$, de onde

$$\int_{\mathbb{T}} \bar{z}^j \Phi_n(z) d\mu(z) = \int_{\mathbb{T}} z^{-j} \Phi_n(z) d\mu(z).$$

Denotemos por Φ_n^* o *polinômio recíproco* de Φ_n definido por

$$\Phi_n^*(z) = z^n \overline{\Phi_n(1/\bar{z})}.$$

Os polinômios de Szegő não satisfazem uma relação de recorrência de três termos da forma (2.4), como acontece para os polinômios ortogonais na reta real. No entanto, os polinômios mônicos de Szegő satisfazem as seguintes relações. Para $n \geq 0$,

$$\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) - \bar{\alpha}_n \Phi_n^*(z), \quad (2.8)$$

$$\Phi_{n+1}^*(z) = \Phi_n^*(z) - \alpha_n z\Phi_n(z), \quad (2.9)$$

onde $\Phi_0(z) = 1$, Φ_n^* é o polinômio recíproco de Φ_n e $\alpha_n = -\overline{\Phi_{n+1}(0)}$.

Os coeficientes α_n , $n \geq 0$, são conhecidos na literatura como *coeficientes de Verblunsky* e satisfazem

$$|\alpha_n| < 1 \quad \text{e} \quad \prod_{k=0}^{n-1} (1 - |\alpha_k|^2) = \kappa_n^{-2} = \frac{D_n}{D_{n-1}}, \quad n \geq 0,$$

onde D_n são os *determinantes de Toeplitz*, a saber,

$$D_0 = \mu_0 \quad \text{e} \quad D_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix}, \quad n \geq 0,$$

sendo μ_n os momentos associados a medida μ , definidos por $\mu_n = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\mu(e^{i\theta})$, e satisfazem $\mu_{-n} = \bar{\mu}_n$.

Uma importante propriedade dos coeficientes de Verblunsky é que podem ser expressos em termos dos determinantes de Toeplitz, ou seja, em termos dos momentos

$$\bar{\alpha}_n = \frac{(-1)^n}{D_n} \begin{vmatrix} \mu_{-1} & \mu_{-2} & \cdots & \mu_{-n-1} \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_{-1} \end{vmatrix}, \quad n \geq 0.$$

O próximo teorema, conhecido como Teorema de Favard para o círculo unitário e apresentado em Simon [30] como Teorema de Verblunsky, garante a existência de uma única medida sobre o círculo unitário tal que os polinômios Φ_n , gerados pelas relações (2.8) e (2.9), são polinômios de Szegő.

Teorema 2.15 (Verblunsky). *Seja $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência arbitrária de números complexos, onde $|\alpha_n| < 1$, $n \geq 0$. Então, associada a essa sequência, existe uma única medida de probabilidade μ , com suporte no círculo unitário, tal que os polinômios $\Phi_n(z)$, $n \geq 0$, gerados pelas relações (2.8) e (2.9), são os respectivos polinômios de Szegő mônicos.*

Outra propriedade satisfeita pelos polinômios de Szegő é que seus zeros estão todos no disco unitário aberto $|z| < 1$ e, portanto, os zeros do polinômio recíproco estão fora do disco unitário.

A seguir, apresentamos um exemplo de polinômios ortogonais no círculo unitário.

Exemplo 2.16. Consideremos a medida de Lebesgue μ definida por

$$d\mu(z) = \frac{1}{2\pi iz} dz, \quad z \in \mathbb{T}.$$

Note que

$$\langle z^m, z^n \rangle = \int_{\mathbb{T}} \bar{z}^m z^n \frac{1}{2\pi iz} dz = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \delta_{m,n}. \quad (2.10)$$

Assim, de (2.10) vemos que $\Phi_n(z) = z^n$, $n \geq 0$, são os polinômios ortogonais mônicos associados à medida de Lebesgue μ , e os zeros, $z_{n,k}$, $1 \leq k \leq n$, dos polinômios $\Phi_n(z) = z^n$, $n \geq 1$, são todos iguais a zero. Além disso, os coeficientes de Verblunsky associados à medida de Lebesgue são dados por

$$\alpha_n = -\overline{\Phi_{n+1}(0)} = 0, \quad n \geq 0.$$

Note também que os momentos correspondentes são tais que

$$\mu_0 = 1 \quad \text{e} \quad \mu_n = \int_{\mathbb{T}} z^{-n} d\mu(z) = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

O próximo teorema, cuja demonstração é dada em [32], garante a existência de uma medida positiva sobre o círculo unitário tal que a sequência associada de polinômios ortogonais é dada por uma relação de recorrência de três termos.

Teorema 2.17. *Seja $\{\Phi_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios dada pela relação de recorrência de três termos*

$$\Phi_{n+1}(z) = (z + \beta_{n+1})\Phi_n(z) - \lambda_{n+1}z\Phi_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (2.11)$$

onde $\Phi_0(z) = 1$ e $\Phi_1(z) = z + \beta_1$. Se

$$\beta_{n+1} \neq 0, \quad \lambda_{n+1} \neq 0 \quad \text{e} \quad 0 < \frac{\lambda_{n+1}}{\beta_{n+1}} = 1 - |\Phi_n(0)|^2, \quad \text{para } n \geq 1, \quad (2.12)$$

então existe uma medida positiva μ sobre o círculo unitário tal que $\{\Phi_n\}_{n=0}^\infty$ são os respectivos polinômios ortogonais mônicos no círculo unitário.

Observe que, de (2.11), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \Phi_1(z) d\mu(z) &= \int_{\mathbb{T}} z\Phi_0(z) d\mu(z) + \beta_1 \int_{\mathbb{T}} \Phi_0(z) d\mu(z), \\ \int_{\mathbb{T}} \Phi_{n+1}(z) d\mu(z) &= \int_{\mathbb{T}} (z + \beta_{n+1})\Phi_n(z) d\mu(z) - \lambda_{n+1} \int_{\mathbb{T}} z\Phi_{n-1}(z) d\mu(z), \\ \int_{\mathbb{T}} z^{-n} \Phi_{n+1}(z) d\mu(z) &= \int_{\mathbb{T}} z^{-n} (z + \beta_{n+1})\Phi_n(z) d\mu(z) - \lambda_{n+1} \int_{\mathbb{T}} z^{-n+1} \Phi_{n-1}(z) d\mu(z), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\mu_{-1} + \beta_1\mu_0 &= 0, \\ \int_{\mathbb{T}} z\Phi_n(z)d\mu(z) - \lambda_{n+1} \int_{\mathbb{T}} z\Phi_{n-1}(z)d\mu(z) &= 0, \\ \beta_{n+1} \int_{\mathbb{T}} z^{-n}\Phi_n(z)d\mu(z) - \lambda_{n+1} \int_{\mathbb{T}} z^{-n+1}\Phi_{n-1}(z)d\mu(z) &= 0.\end{aligned}$$

Logo, os coeficientes da relação de recorrência (2.11) são tais que

$$\beta_1 = -\frac{\mu_{-1}}{\mu_0}, \quad \lambda_{n+1} = \frac{\int_{\mathbb{T}} z\Phi_n(z)d\mu(z)}{\int_{\mathbb{T}} z\Phi_{n-1}(z)d\mu(z)} \quad \text{e} \quad \frac{\lambda_{n+1}}{\beta_{n+1}} = \frac{\int_{\mathbb{T}} z^{-n}\Phi_n(z)d\mu(z)}{\int_{\mathbb{T}} z^{-(n-1)}\Phi_{n-1}(z)d\mu(z)},$$

para $n \geq 1$. Desta forma, $\kappa_0^{-2} = \int_{\mathbb{T}} |\Phi_0(z)|^2 d\mu(z) = \mu_0$, e para $n \geq 1$, os coeficientes κ_n^{-2} são dados por

$$\begin{aligned}\kappa_n^{-2} &= \int_{\mathbb{T}} |\Phi_n(z)|^2 d\mu(z) = \int_{\mathbb{T}} z^{-n}\Phi_n(z)d\mu(z) \\ &= \left[\int_{\mathbb{T}} z^{-(n-1)}\Phi_{n-1}(z)d\mu(z) \right] \frac{\lambda_{n+1}}{\beta_{n+1}} = \cdots = \mu_0 \frac{\lambda_2\lambda_3 \cdots \lambda_{n+1}}{\beta_2\beta_3 \cdots \beta_{n+1}}.\end{aligned}$$

Além disso, temos também que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} z\Phi_n(z)d\mu(z) &= \lambda_{n+1} \int_{\mathbb{T}} z\Phi_{n-1}(z)d\mu(z) = \lambda_{n+1}\lambda_n \int_{\mathbb{T}} z\Phi_{n-2}(z)d\mu(z) \\ &= \cdots = \lambda_{n+1} \cdots \lambda_3\lambda_2\mu_{-1} = -\lambda_{n+1} \cdots \lambda_3\lambda_2\mu_0\beta_1,\end{aligned}$$

para $n \geq 1$.

O exemplo a seguir será muito útil no desenvolvimento deste trabalho.

Exemplo 2.18. Sejam $a, b, c \in \mathbb{C}$ com $c \neq 0, -1, -2, \dots$, e consideramos a relação de recorrência (2.5.16) em [1]:

$$(c-a) {}_2F_1(a-1, b; c; z) = (c-2a-(b-a)z) {}_2F_1(a, b; c; z) + a(1-z) {}_2F_1(a+1, b; c; z). \quad (2.13)$$

Escolhendo $a = -n$, $b = b+1$, $c = b + \bar{b} + 1$ e $z = 1-z$, com $2\Re(b) \neq -1, -2, -3, \dots$, na equação (2.13) obtemos

$$\begin{aligned}(b + \bar{b} + 1 + n) {}_2F_1(-n-1, b+1; b + \bar{b} + 1; 1-z) &= -z {}_2F_1(-n+1, b+1; b + \bar{b} + 1; 1-z) \\ &\quad + (\bar{b} + n + (b+1+n)z) {}_2F_1(-n, b+1; b + \bar{b} + 1; 1-z).\end{aligned} \quad (2.14)$$

Daí, usando a definição da função hipergeométrica de Gauss e observando que, $(-n)_k = 0$ para $n, k \in \mathbb{N}^*$ e $k > n$, temos que

$${}_2F_1(-n, b+1; b + \bar{b} + 1; 1-z) = \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (b+1)_k (1-z)^k}{(b + \bar{b} + 1)_k k!}$$

é um polinômio de grau n na variável z , cujo coeficiente do termo de maior grau é $\frac{(b+1)_n}{(b + \bar{b} + 1)_n}$. Denotemos por $\Phi_n^{(b)}$ os polinômios mônicos de grau n dados por

$$\Phi_n^{(b)}(z) = \frac{(b + \bar{b} + 1)_n}{(b+1)_n} {}_2F_1(-n, b+1; b + \bar{b} + 1; 1-z), \quad n \geq 0. \quad (2.15)$$

Além disso, de (2.14) temos

$$\begin{aligned} (b + \bar{b} + 1 + n) \frac{(b + \bar{b} + 1)_{n+1}}{(b + 1)_{n+1}} {}_2F_1(-n - 1, b + 1; b + \bar{b} + 1; 1 - z) = \\ (\bar{b} + n + (b + 1 + n)z) \frac{(b + \bar{b} + 1)_{n+1}}{(b + 1)_{n+1}} {}_2F_1(-n, b + 1; b + \bar{b} + 1; 1 - z) \\ - z \frac{(b + \bar{b} + 1)_{n+1}}{(b + 1)_{n+1}} {}_2F_1(-n + 1, b + 1; b + \bar{b} + 1; 1 - z), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\Phi_{n+1}^{(b)}(z) = \left(z + \frac{\bar{b} + n}{b + n + 1} \right) \Phi_n^{(b)}(z) - nz \frac{b + \bar{b} + n}{(b + n + 1)(b + n)} \Phi_{n-1}^{(b)}(z).$$

Assim, os polinômios mônicos $\Phi_n^{(b)}$ definidos em (2.15) satisfazem a relação de recorrência

$$\Phi_{n+1}^{(b)}(z) = (z + \beta_{n+1}^{(b)}) \Phi_n^{(b)}(z) - \lambda_{n+1}^{(b)} z \Phi_{n-1}^{(b)}(z), \quad n \geq 1, \quad (2.16)$$

para $n \geq 1$, com $\Phi_0^{(b)}(z) = 1$ e $\Phi_1^{(b)}(z) = z + \beta_1^{(b)}$, onde

$$\beta_{n+1}^{(b)} = \frac{\bar{b} + n}{b + n + 1} \quad \text{e} \quad \lambda_{n+1}^{(b)} = \frac{n(b + \bar{b} + n)}{(b + n + 1)(b + n)}.$$

Observe que $\beta_{n+1}^{(b)} \neq 0$ e $\lambda_{n+1}^{(b)} \neq 0$,

$$\frac{\lambda_{n+1}^{(b)}}{\beta_{n+1}^{(b)}} = \frac{n(b + \bar{b} + 1)}{(b + n)(\bar{b} + n)} \quad \text{e} \quad 1 - |\Phi_n^{(b)}(0)|^2 = 1 - \left| \frac{(\bar{b})_n}{(b + 1)_n} \right|^2 = \frac{n(b + \bar{b} + 1)}{(b + n)(\bar{b} + n)},$$

para $n \geq 1$. Logo, esses coeficientes satisfazem as condições do Teorema 2.17, desde que $\Re(b) > -1/2$, ou seja, se $\Re(b) > -1/2$ existe uma medida positiva $\mu^{(b)}$ sobre o círculo unitário tal que $\{\Phi_n^{(b)}\}$ são polinômios ortogonais mônicos no círculo unitário. Além disso,

$$\kappa_n^{(b)} = \sqrt{\frac{\beta_2^{(b)} \beta_3^{(b)} \dots \beta_{n+1}^{(b)}}{\mu_0 \lambda_2^{(b)} \lambda_3^{(b)} \dots \lambda_{n+1}^{(b)}}} = \sqrt{\frac{(b + 1)(\bar{b} + 1)(b + 2)(\bar{b} + 2) \dots (b + n)(\bar{b} + n)}{(b + \bar{b} + 1) 2(b + \bar{b} + 2) \dots n(b + \bar{b} + n)}},$$

ou seja,

$$\kappa_n^{(b)} = \sqrt{\frac{|(b + 1)_n|^2}{(b + \bar{b} + 1)_n n!}}, \quad \text{para } n \geq 1.$$

E os coeficientes de Verblunsky associados aos polinômios $\Phi_n^{(b)}$ são dados por

$$\alpha_n^{(b)} = -\overline{\Phi_{n+1}^{(b)}(0)} = -\overline{\beta_n^{(b)} \beta_{n-1}^{(b)} \dots \beta_1^{(b)}} = -\frac{(\bar{b} + n - 1)(\bar{b} + n - 2) \dots (\bar{b})}{(b + n)(b + n - 1) \dots (b + 1)},$$

isto é,

$$\alpha_n^{(b)} = -\frac{(\bar{b})_n}{(b + 1)_n} = -\frac{(b)_n}{(\bar{b} + 1)_n}, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Sri Ranga em [32], fornece uma fórmula explícita para $\mu^{(b)}$, isto é,

$$d\mu^{(b)}(z) = d\mu^{(b)}(e^{i\theta}) = \tau^{(b)} e^{(\pi - \theta)\Im(b)} [\text{sen}(\theta/2)]^{2\Re(b)} d\theta,$$

onde $\Re(b) > -1/2$ e $\tau^{(b)} = \frac{2^{b+\bar{b}} |\Gamma(b + 1)|^2}{2\pi \Gamma(b + \bar{b} + 1)}$ é tal que $\mu_0^{(b)} = 1$.

Os *polinômios para-ortogonais* no círculo unitário foram introduzidos por Jones, Njåstad e Thron em [17]. Uma sequência $\{\mathcal{R}_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios para-ortogonais com respeito a uma medida μ no círculo unitário se, para $n \geq 1$, \mathcal{R}_n é um polinômio de grau n que satisfaz

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_n(z), 1 \rangle_{\mu} &\neq 0, & \langle \mathcal{R}_n(z), z^n \rangle_{\mu} &\neq 0 \\ \langle \mathcal{R}_n(z), z^m \rangle_{\mu} &= 0, & \text{para } m &= 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Uma propriedade importante destes polinômios é que eles possuem n zeros simples localizados no círculo unitário \mathbb{T} que satisfazem a propriedade de entrelaçamento. A nomenclatura *para-ortogonal* se deve ao fato de que, na relação de ortogonalidade de tais polinômios temos $\langle \mathcal{R}_n(z), 1 \rangle_{\mu} \neq 0$, o que não ocorre no caso dos polinômios ortogonais.

Seja $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ sequência de polinômios ortogonais no círculo unitário, se $\omega_n \in \mathbb{C}$, com $|\omega_n| = 1$, os polinômios para-ortogonais também são dados por

$$\Phi_n(\omega_n; z) = \Phi_n(z) + \omega_n \Phi_n^*(z), \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

Além disso, das relações (2.8) e (2.9) temos

$$\begin{aligned} \Phi_n(\omega_n; z) &= z\Phi_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1}\Phi_{n-1}^*(z) + \omega_n[\Phi_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1}z\Phi_{n-1}(z)] \\ &= (1 - \omega_n\alpha_{n-1})z\Phi_{n-1}(z) + (\omega_n - \bar{\alpha}_{n-1})\Phi_{n-1}^*(z) \\ &= (1 - \omega_n\alpha_{n-1}) \left[z\Phi_{n-1}(z) + \frac{\omega_n - \bar{\alpha}_{n-1}}{1 - \omega_n\alpha_{n-1}}\Phi_{n-1}^*(z) \right]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Denotando por $\rho_n = \frac{\omega_n - \bar{\alpha}_{n-1}}{1 - \omega_n\alpha_{n-1}}$ notamos que, como $|\omega_n| = 1$,

$$\rho_n = \frac{\omega_n(1 - \bar{\omega}_n\bar{\alpha}_{n-1})}{1 - \omega_n\alpha_{n-1}} = \frac{\omega_n - \bar{\alpha}_{n-1}}{1 - \omega_n\alpha_{n-1}},$$

e então $|\rho_n| = 1$, $n \geq 1$. Portanto, tomando o polinômio em (2.18) na forma mônica, obtemos

$$\Phi_n(\omega_n; z) = z\Phi_{n-1}(z) + \rho_n\Phi_{n-1}^*(z).$$

Em [11], os autores estabeleceram que os polinômios para-ortogonais no círculo unitário $(z-1)R_n(z)$ dados por

$$R_n(z) = \sigma_n \frac{z\Phi_n(z) + \tau_n\Phi_n^*(z)}{z-1}, \quad n \geq 0,$$

onde

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{\Phi_0(1)}{\Phi_0^*(1)} = 1, & \tau_n &= \frac{\Phi_n(1)}{\Phi_n^*(1)} = \frac{\tau_{n-1} - \bar{\alpha}_{n-1}}{1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1}}, & n &\geq 1, \\ \sigma_0 &= 1, & \sigma_n &= \frac{1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1}}{1 - \Re(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})}\sigma_{n-1}, & n &\geq 1, \end{aligned}$$

e $\alpha_{n-1} = -\overline{\Phi_n(0)}$, $n \geq 1$, satisfazem a relação de recorrência de três termos

$$R_{n+1}(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]R_n(z) - 4d_{n+1}zR_{n-1}(z), \quad n \geq 1,$$

com $R_0(z) = 1$ e $R_1(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1)$. Sendo as seqüências de números reais $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{d_{n+1}\}_{n=1}^\infty$ tais que

$$c_n = \frac{-\Im(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})}{1 - \Re(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})} = i \frac{\tau_n - \tau_{n-1}}{\tau_n + \tau_{n-1}}$$

$$d_{n+1} = \frac{1}{4} \frac{[1 - |\tau_{n-1}\alpha_{n-1}|^2][1 - \tau_n\alpha_n]^2}{[1 - \Re(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})][1 - \Re(\tau_n\alpha_n)]}, \quad n \geq 1.$$

E ainda, $\{d_{n+1}\}_{n=1}^\infty$, onde $d_{n+1} = (1 - g_n)g_{n+1}$, é uma seqüência encadeada positiva com seqüência de parâmetros $\{g_{n+1}\}_{n=0}^\infty$ dada por

$$g_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{|1 - \tau_n\alpha_n|^2}{[1 - \Re(\tau_n\alpha_n)]}, \quad n \geq 0.$$

O exemplo a seguir tem grande importância no presente trabalho.

Exemplo 2.19. Seja $\mu^{(b)}$ medida positiva sobre o círculo unitário definida por

$$d\mu^{(b)}(z) = d\mu^{(b)}(e^{i\theta}) = \tau^{(b)} e^{(\pi-\theta)\Im(b)} [\text{sen}(\theta/2)]^{2\Re(b)} d\theta,$$

onde $\Re(b) > -1/2$ e $\tau^{(b)} = \frac{2^{b+\bar{b}}|\Gamma(b+1)|^2}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)}$ tal que $\mu_0^{(b)} = \int_{\mathbb{T}} d\mu^{(b)}(z) = 1$.

No Exemplo 2.18, vimos que os polinômios ortogonais no círculo unitário com relação a medida $\mu^{(b)}$, denotados por $\Phi_n^{(b)}$, são dados pela relação (2.15). Desta forma, aplicando os resultados enunciados anteriormente temos que os polinômios para-ortogonais associados $(z-1)R_n^{(b)}(z)$ são tais que

$$R_n^{(b)}(z) = \sigma_n^{(b)} \frac{z\Phi_n^{(b)}(z) - \tau_n^{(b)}\Phi_n^{(b)*}(z)}{z-1}, \quad n \geq 0,$$

onde

$$\tau_0^{(b)} = 1, \quad \tau_n^{(b)} = \frac{\Phi_n^{(b)}(1)}{\Phi_n^{(b)*}(1)} = \frac{(\bar{b}+1)_n}{(b+1)_n}, \quad \sigma_0^{(b)} = 1, \quad \sigma_n^{(b)} = \frac{b+n}{\lambda+n} \sigma_{n-1}^{(b)} = \frac{(b+1)_n}{(\lambda+1)_n}, \quad n \geq 1.$$

Além disso, estes polinômios satisfazem

$$R_{n+1}^{(b)}(z) = [(1 + ic_{n+1}^{(b)})z + (1 - ic_{n+1}^{(b)})]R_n^{(b)}(z) - 4d_{n+1}^{(b)}zR_{n-1}^{(b)}(z), \quad n \geq 1,$$

com $R_0^{(b)}(z) = 1$ e $R_1^{(b)}(z) = (1 + ic_1^{(b)})z + (1 - ic_1^{(b)})$, onde as seqüências de números reais $\{c_n^{(b)}\}_{n=1}^\infty$ e $\{d_{n+1}^{(b)}\}_{n=1}^\infty$ são tais que

$$c_n^{(b)} = \frac{\eta}{\lambda+n}, \quad d_{n+1}^{(b)} = \frac{1}{4} \frac{n(2\lambda+n+1)}{(\lambda+n)(\lambda+n+1)}, \quad n \geq 1. \quad (2.19)$$

A seqüência $\{d_{n+1}^{(b)}\}_{n=1}^\infty$ é uma seqüência encadeada positiva e sua seqüência de parâmetros maximal $\{M_{n+1}^{(b)}\}_{n=0}^\infty$ satisfaz

$$M_n = \frac{1}{2} \frac{|1 - \tau_n^{(b)}\alpha_n^{(b)}|^2}{[1 - \Re(\tau_n^{(b)}\alpha_n^{(b)})]} = \frac{1}{2} \frac{2\lambda+n}{\lambda+n}, \quad n \geq 1.$$

Os polinômios $R_n^{(b)}$ gerados pelas seqüências acima por meio da relação de recorrência, também são dados por

$$R_n^{(b)}(z) = \frac{(2\lambda+2)_n}{(\lambda+1)_n} {}_2F_1(-n, b+1; b+\bar{b}+1; 1-z), \quad n \geq 0.$$

2.3.3 Polinômios ortogonais de Sobolev

Sejam μ_k , $k = 0, 1, \dots, N$, medidas positivas na reta real \mathbb{R} , tendo suporte limitado ou não. Se o espaço das funções diferenciáveis até ordem N em \mathbb{R} satisfaz

$$\sum_{k=0}^N \int_{\mathbb{R}} [f^{(k)}(x)]^2 d\mu_k(x) < \infty,$$

então esse espaço é chamado de espaço de Sobolev. Neste espaço, consideremos o produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle_S = \sum_{k=0}^N \int_{\mathbb{R}} f^{(k)}(x) g^{(k)}(x) d\mu_k(x), \quad N \geq 1. \quad (2.20)$$

Este produto interno é conhecido como produto interno de Sobolev.

Uma sequência de polinômios $\{\Psi_n\}_{n \geq 0}$ é chamada de sequência de polinômios ortogonais de Sobolev, se Ψ_n é de grau n e

$$\langle \Psi_n, \Psi_m \rangle_S = \sum_{k=0}^N \int_{\mathbb{R}} \Psi_n^{(k)}(x) \Psi_m^{(k)}(x) d\mu_k(x) = \rho_n^2 \delta_{n,m}. \quad (2.21)$$

Os polinômios ortogonais de Sobolev são objetos de estudo de muitos autores, nos mais variados enfoques. A motivação inicial para tal estudo surgiu na teoria da aproximação, mais precisamente, no problema de aproximação por mínimos quadrados. Neste caso, uma função f e as suas derivadas $f^{(k)}$, para $k = 1, 2, \dots, N$, são aproximadas simultaneamente por um polinômio $p \in \mathbb{P}_n$ que satisfaz

$$\|f - p\|_S^2 = \inf_{q \in \mathbb{P}_n} \|f - q\|_S^2,$$

onde \mathbb{P}_n é o espaço linear dos polinômios de grau no máximo n e $\|\cdot\|_S$ denota a norma de Sobolev induzida pelo produto interno de Sobolev definido em (2.20). É bem conhecido na literatura que a solução para este problema é dada em termos da sequência de polinômios ortogonais de Sobolev $\{\Psi_n\}_{n \geq 0}$, mais precisamente, a melhor aproximação é o polinômio $p \in \mathbb{P}_n$ dado por

$$p(x) = \sum_{j=0}^n \frac{\langle f, \Psi_j \rangle_S}{\langle \Psi_j, \Psi_j \rangle_S} \Psi_j(x).$$

Este problema de aproximação por mínimos quadrados foi apresentado inicialmente em 1947 por Lewis, cujo trabalho [19], não aborda polinômios ortogonais. Estes foram considerados e estudados pela primeira vez na década de 1960, para medidas particulares, por vários matemáticos alemães.

Uma ferramenta essencial na teoria dos polinômios ortogonais na reta real é a relação de recorrência de três termos que os polinômios ortogonais satisfazem, e vale se o operador de multiplicação for simétrico em relação ao produto interno, isto é, $\langle xf, g \rangle_\mu = \langle f, xg \rangle_\mu$. Entretanto, considerando o produto interno de Sobolev, $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$, o operador de multiplicação não é mais simétrico e, conseqüentemente, a relação de recorrência de três termos não é mais válida. Visto que a falta desta ferramenta fundamental não pode ser facilmente compensada, diferentes métodos foram desenvolvidos para lidar com diversos produtos internos de Sobolev. Os artigos [23] e [25] apresentam um levantamento bibliográfico e as principais ideias e técnicas desenvolvidas.

De acordo com [23], o estudo dos polinômios ortogonais de Sobolev tornou-se inativo por quase duas décadas, ressurgindo apenas quando o conceito de pares coerentes de medidas foi introduzido.

Usando este conceito, mostra-se que os polinômios ortogonais de Sobolev satisfazem relações simples envolvendo os polinômios ortogonais associados as respectivas medidas do par de coerência, o que abriu caminho para o estudo de muitas propriedades algébricas, diferenciais e assintóticas dos polinômios ortogonais de Sobolev. Dedicaremos a próxima seção ao conceito de par coerente de medidas visto que tal ferramenta é de grande importância para o desenvolvimento deste trabalho.

2.4 Pares coerentes de medidas

O conceito de par coerente de medidas foi introduzido por A. Iserles e outros em [14] enquanto estudavam os polinômios ortogonais, Ψ_n , associados ao produto interno de Sobolev

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{S}(\mu_0, \mu_1, s)} = \langle f, g \rangle_{\mu_0} + s \langle f', g' \rangle_{\mu_1}, \quad (2.22)$$

onde μ_0 e μ_1 são medidas positivas sobre a reta real e $s \geq 0$. De acordo com [14], um par de medidas (μ_0, μ_1) e suas correspondentes sequências de polinômios ortogonais mônicos, $\{P_n(\mu_0; x)\}_{n \geq 0}$ e $\{P_n(\mu_1; x)\}_{n \geq 0}$, forma um par coerente de medidas se existem constantes $\{a_n\}_{n \geq 2}$ tais que

$$nP_{n-1}(\mu_1; x) = P'_n(\mu_0; x) + a_n P'_{n-1}(\mu_0; x), \quad a_n \neq 0, \quad n \geq 2. \quad (2.23)$$

Como uma consequência, foi demonstrado que os polinômios ortogonais mônicos $\{\Psi_n\}_{n \geq 0}$ associados ao produto interno de Sobolev (2.22), satisfazem a seguinte relação:

$$\Psi_n(x) + b_{n,s} \Psi_{n-1}(x) = P_n(\mu_0; x) + a_n P_{n-1}(\mu_0; x), \quad n \geq 1, \quad (2.24)$$

onde $\{b_{n,s}\}_{n \geq 1}$ são funções racionais em $s > 0$. Esta relação se mostrou muito útil para o estudo de propriedades analíticas e assintóticas dos respectivos polinômios ortogonais de Sobolev.

Em 1997, Meijer em [26] provou que se (μ_0, μ_1) é um par coerente de medidas positivas na reta real, para o qual (2.23) é válida, então uma das medidas tem que ser clássica (Laguerre ou Jacobi). Além disso, em [26] são apresentados todos os possíveis pares coerentes de medidas positivas suportadas na reta real.

Delgado e Marcellán em [12], apresentam um conjunto de funcionais lineares quase definidos tais que suas correspondentes sequências de polinômios ortogonais mônicos $\{R_n\}$ e $\{P_n\}$ satisfazem

$$P_n(x) + b_n P_{n-1}(x) = \frac{R'_{n+1}(x)}{n+1} + a_n \frac{R'_n(x)}{n}, \quad (2.25)$$

onde $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que, a relação (2.25) é uma extensão da definição de coerência dada em (2.23).

O caso mais geral de par coerente de medidas foi apresentado em [16]. De acordo com este artigo, um par de medidas positivas (μ_0, μ_1) é chamado um par (M, N) -coerente de ordem (m, k) se as correspondentes sequências de polinômios ortogonais mônicos, $\{P_n(\mu_0; x)\}_{n \geq 0}$ e $\{P_n(\mu_1; x)\}_{n \geq 0}$, satisfazem uma relação de estrutura tal que

$$\sum_{j=0}^M a_{j,n} P_{n+m-j}^{(m)}(\mu_0; x) = \sum_{j=0}^N b_{j,n} P_{n+k-j}^{(k)}(\mu_1; x),$$

onde $a_{j,n}$ e $b_{j,n}$ são números complexos tais que $a_{M,n} \neq 0$ se $n \geq M$, $a_{N,n} \neq 0$ se $n \geq N$ e $a_{j,n} = b_{j,n} = 0$ quando $j > n$. Observe que, sob essa notação o par de medidas para o qual a relação (2.23) é válida é chamado de par de medidas $(1, 0)$ -coerente de ordem $(1, 0)$. E, o par de medidas que satisfaz (2.25) é denotado por par $(1, 1)$ -coerente de ordem $(1, 0)$.

Com relação as medidas com suporte no círculo unitário, o conceito de coerência foi introduzido em [6], onde os autores estenderam o conceito de par coerente de medidas da reta real para arcos e curvas de Jordan e, estabeleceram que se (μ_0, μ_1) é um par de medidas coerente sobre o círculo unitário, então μ_0 é uma medida semi-clássica. Desta forma, segue de [6] que um par de medidas positivas com suporte sobre o círculo unitário é dito ser um par coerente de medidas positivas sobre o círculo unitário se as correspondentes sequências de polinômios ortogonais mônicos $\{\Phi_n(\mu_0; z)\}_{n \geq 0}$ e $\{\Phi_n(\mu_1; z)\}_{n \geq 0}$ satisfazem

$$n\Phi_{n-1}(\mu_1; z) = \Phi'_n(\mu_0; z) + \rho_n \Phi'_{n-1}(\mu_0; z), \quad n \geq 2. \quad (2.26)$$

Assim, como no caso da reta real, quando o par de medidas satisfaz esse conceito os polinômios ortogonais de Sobolev podem ser dados por relações simples.

Sri Ranga em [33], introduziu um conceito de coerência alternativo conhecido como *pares coerentes de medidas de segundo tipo* no círculo unitário, isto é, um par de medidas positivas (μ_0, μ_1) sobre o círculo unitário é um *par coerente de medidas de segundo tipo* se as respectivas sequências associadas de polinômios ortogonais mônicos satisfazem

$$\frac{1}{n}\Phi'_n(\mu_0; z) = \Phi_{n-1}(\mu_1; z) - \chi_n \Phi_{n-2}(\mu_1; z), \quad n \geq 2. \quad (2.27)$$

A seguir, apresentaremos um exemplo de par coerente de medidas de segundo tipo no círculo unitário, que representa a base do presente trabalho.

Exemplo 2.20. Consideremos as medidas positivas no círculo unitário $\mu^{(b)}$ definida no Exemplo 2.19, e $\mu^{(b,\epsilon)}$ dada por

$$\langle f, g \rangle_{\mu^{(b,\epsilon)}} = (1 - \epsilon)\langle f, g \rangle_{\mu^{(b)}} + \epsilon \overline{f(1)}g(1),$$

com $b = \lambda + i\eta \in \mathbb{C}$, $\Re(b) > -1/2$ e $0 \leq \epsilon < 1$.

De acordo com [11], os polinômios ortogonais mônicos com respeito ao produto interno $\langle f, g \rangle_{\mu^{(b,\epsilon)}}$ satisfazem

$$\Phi_n^{(b,\epsilon)}(z) = \frac{(\lambda + 1)_n}{(b + 1)_n} \left[R_n^{(b)}(z) - 2[1 - m_n^{(\lambda,\epsilon)}]R_{n-1}^{(b)}(z) \right], \quad n \geq 1, \quad (2.28)$$

onde os polinômios $R_n^{(b)}$ são dados no Exemplo 2.19. Diferenciando (2.28) com respeito a variável z obtemos

$$\frac{d}{dz} \left[\Phi_n^{(b,\epsilon)}(z) \right] = \frac{d}{dz} \left[\frac{(\lambda + 1)_n}{(b + 1)_n} \left[R_n^{(b)}(z) - 2[1 - m_n^{(\lambda,\epsilon)}]R_{n-1}^{(b)}(z) \right] \right].$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[\frac{(\lambda + 1)_n}{(b + 1)_n} R_n^{(b)}(z) \right] &= \frac{(\lambda + 1)_n}{(b + 1)_n} \frac{(2\lambda + 3)_{n-1}}{(\lambda + 1)_n} n(b + 1) {}_2F_1(-n + 1, b + 2; b + \bar{b} + 3; 1 - z) \\ &= n \frac{(2\lambda + 3)_{n-1}}{(b + 2)_{n-1}} {}_2F_1(-n + 1, b + 2; b + \bar{b} + 3; 1 - z). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{(\lambda + 1)_n}{(b + 1)_n} R_n^{(b)}(z) \right] = n \Phi_{n-1}^{(b+1)}(z).$$

Consequentemente, obtemos $\Phi_1^{(b,\epsilon)'}(z) = 1$ e

$$\Phi_n^{(b,\epsilon)'}(z) = n \Phi_{n-1}^{(b+1)}(z) - n \chi_n^{(b,\epsilon)} \Phi_{n-2}^{(b+1)}(z), \quad n \geq 2, \quad (2.29)$$

com

$$\chi_n^{(b,\epsilon)} = 2[1 - m_n^{(\lambda,\epsilon)}] \frac{n-1}{n} \frac{\lambda+n}{b+n}, \quad n \geq 2. \quad (2.30)$$

Portanto, pela relação (2.29) temos que o par de medidas $(\mu^{(b,\epsilon)}, \mu^{(b+1)})$ é um par coerente de medidas de segundo tipo no círculo unitário.

Aqui, $\{m_n^{(\lambda,\epsilon)}\}_{n \geq 0}$ é a sequência de parâmetros minimal da sequência encadeada positiva $\{d_{n+1}^{(\lambda,\epsilon)}\}_{n \geq 0}$, isto é,

$$m_0^{(\lambda,\epsilon)} = 0 \quad \text{e} \quad m_n^{(\lambda,\epsilon)} = \frac{d_n^{(\lambda,\epsilon)}}{[1 - m_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)}]}, \quad n \geq 1,$$

onde

$$d_1^{(\lambda,\epsilon)} = (1 - \epsilon) M_1^{(\lambda)}, \quad M_1^{(\lambda)} = \frac{(2\lambda + 1)}{(2\lambda + 2)} \quad \text{e} \quad d_{n+1}^{(\lambda,\epsilon)} = d_{n+1}^{(\lambda)}, \quad n \geq 1,$$

e a sequência $\{d_{n+1}^{(\lambda)}\}_{n \geq 1}$ é uma sequência encadeada positiva tal que

$$[1 - \ell_n^{(\lambda)}] \ell_{n+1}^{(\lambda)} = d_{n+1}^{(\lambda)} = [1 - M_n^{(\lambda)}] M_{n+1}^{(\lambda)},$$

$$\ell_n^{(\lambda)} = \frac{1}{2} \frac{n-1}{\lambda+n}, \quad M_n^{(\lambda)} = \frac{1}{2} \frac{2\lambda+n}{\lambda+n} \quad \text{e} \quad d_{n+1}^{(\lambda)} = \frac{1}{4} \frac{n(2\lambda+n+1)}{(\lambda+n)(\lambda+n+1)}, \quad n \geq 1. \quad (2.31)$$

As sequências $\{\ell_{n+1}^{(\lambda)}\}_{n \geq 0}$ e $\{M_{n+1}^{(\lambda)}\}_{n \geq 0}$ são respectivamente as sequências de parâmetros minimal e maximal de $\{d_{n+1}^{(\lambda)}\}_{n \geq 1}$, e satisfazem

$$\ell_n^{(\lambda)} < m_n^{(\lambda,\epsilon)} < M_n^{(\lambda)} \quad \text{quando} \quad \epsilon \neq 0 \quad \text{e} \quad \ell_n^{(\lambda)} < m_n^{(\lambda,0)} = M_n^{(\lambda)}, \quad (2.32)$$

para $n \geq 1$.

2.5 Alguns resultados recentes

Nesta seção apresentaremos alguns resultados sobre a sequência de polinômios ortogonais com respeito ao produto interno de Sobolev $\langle f, g \rangle_{\mathcal{S}^{(b,\epsilon,s)}}$ definido por

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{S}^{(b,\epsilon,s)}} = \langle f, g \rangle_{\mu^{(b,\epsilon)}} + s \langle f', g' \rangle_{\mu^{(b+1)}}, \quad (2.33)$$

onde $\langle f, g \rangle_{\mu^{(b,\epsilon)}} = (1 - \epsilon) \langle f, g \rangle_{\mu^{(b)}} + \epsilon \overline{f(1)} g(1)$ e

$$\langle f, g \rangle_{\mu^{(b)}} = \int_0^{2\pi} \overline{f(e^{i\theta})} g(e^{i\theta}) d\mu^{(b)}(e^{i\theta}) = \frac{\tau^{(b)}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(e^{i\theta})} g(e^{i\theta}) (e^{\pi-\theta})^{\Im(b)} (\sin^2(\theta/2))^{\Re(b)} d\theta.$$

Tais resultados serão úteis na compreensão e no desenvolvimento deste trabalho e podem ser encontrados em [22] e [33].

No teorema a seguir, consideramos a expressão para $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$ como uma combinação linear dos polinômios $\{\Phi_n^{(b,\epsilon)}\}_{n \geq 0}$.

As constantes $\chi_n^{(b,\epsilon)}$ são como em (2.30). Ademais, uma fórmula alternativa para tais constantes é dada por

$$\chi_n^{(b,\epsilon)} = \frac{|b+1|^2}{(2\lambda+1)(2\lambda+2)(1-\epsilon)} \frac{\bar{b}+n}{n} \frac{A_n^{(b,\epsilon)}}{A_{n-2}^{(b+1)}}, \quad n \geq 2. \quad (2.39)$$

Como limitantes e resultados assintóticos relativos aos coeficientes $\beta_n^{(b,\epsilon,s)}$, os seguintes resultados também podem ser encontrados em [22] e [33]:

$$0 < \bar{\chi}_n^{(b,\epsilon)} \beta_n^{(b,\epsilon,s)} < \frac{n}{n-1} |\chi_n^{(b,\epsilon)}|^2, \quad n \geq 2, \quad (2.40)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\chi}_n^{(b,\epsilon)} \beta_n^{(b,\epsilon,s)} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^{(b,\epsilon,s)} = 1.$$

De (2.38) temos que os polinômios ortogonais mônicos de Sobolev $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$, $n \geq 1$, são tais que

$$\begin{aligned} \Psi_1^{(b,\epsilon,s)}(z) &= \Phi_1^{(b,\epsilon)}(z), \\ \Psi_{n+1}^{(b,\epsilon,s)}(z) &= \Phi_{n+1}^{(b,\epsilon)}(z) + \beta_{n+1}^{(b,\epsilon,s)} \Phi_n^{(b,\epsilon)}(z) + \beta_{n+1}^{(b,\epsilon,s)} \beta_n^{(b,\epsilon,s)} \Phi_{n-1}^{(b,\epsilon)}(z) + \dots \\ &\quad \dots + \beta_{n+1}^{(b,\epsilon,s)} \beta_n^{(b,\epsilon,s)} \dots \beta_2^{(b,\epsilon,s)} \Phi_1^{(b,\epsilon)}(z), \end{aligned} \quad (2.41)$$

para $n \geq 1$. Assim, para o vetor $\mathbf{a}_n^{(b,\epsilon,s)}$ em (2.34), observe também que $\mathbf{a}_1^{(b,\epsilon,s)} = a_{1,1}^{(b,\epsilon,s)} = \beta_2^{(b,\epsilon,s)}$ e

$$\mathbf{a}_n^{(b,\epsilon,s)} = \begin{bmatrix} a_{n,1}^{(b,\epsilon,s)} \\ \vdots \\ a_{n,n-1}^{(b,\epsilon,s)} \\ a_{n,n}^{(b,\epsilon,s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{n+1}^{(b,\epsilon,s)} \beta_n^{(b,\epsilon,s)} \dots \beta_2^{(b,\epsilon,s)} \\ \vdots \\ \beta_{n+1}^{(b,\epsilon,s)} \beta_n^{(b,\epsilon,s)} \\ \beta_{n+1}^{(b,\epsilon,s)} \end{bmatrix}, \quad n \geq 2.$$

Desta forma, os coeficientes de conexão $\beta_k^{(b,\epsilon,s)}$, $k \geq 2$, nos dão informações sobre os coeficientes $a_{n,k}^{(b,\epsilon,s)}$, $k \geq 1$. Consequentemente, utilizando os Teoremas 2.21 e 2.22, também obtemos informações detalhadas sobre os polinômios ortogonais mônicos de Sobolev no círculo unitário $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$ associados ao produto interno $\langle f, g \rangle_{\mathcal{S}^{(b,\epsilon,s)}}$. O estudo dos coeficientes de conexão $\beta_k^{(b,\epsilon,s)}$, $k \geq 2$, é exibido no próximo capítulo.

3 Coeficientes de Conexão

Com o intuito de determinar as propriedades dos polinômios ortogonais mônicos de Sobolev no círculo unitário, $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$, e visto que tais polinômios satisfazem a relação (2.37), ou seja,

$$\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}(z) - \beta_n^{(b,\epsilon,s)} \Psi_{n-1}^{(b,\epsilon,s)}(z) = \Phi_n^{(b,\epsilon)}(z), \quad n \geq 1,$$

observamos que para este estudo é essencial ter um conhecimento detalhado dos coeficientes de conexão $\beta_n^{(b,\epsilon,s)}$. Neste sentido, dedicamos este capítulo a tal estudo.

Vale ressaltar que os resultados presentes neste capítulo compõem os objetivos propostos na tese de doutorado, e foram publicados na revista *Journal of Approximation Theory*, ver [5].

3.1 Relação com os polinômios “continuous dual Hahn”

Nesta seção mostraremos que os coeficientes $\beta_n^{(b,\epsilon,s)}$ podem ser expressos como funções racionais envolvendo uma sequência de polinômios que satisfazem uma simples relação de recorrência de três termos.

Para $b = \lambda + i\eta$ e $0 \leq \epsilon < 1$, consideremos o conjunto de funções $\{Q_n^{(b,\epsilon)}(y)\}_{n \geq 0}$ tais que

$$Q_0^{(b,\epsilon)}(y) = 1 \quad \text{e} \quad \beta_{n+1}^{(b,\epsilon,\kappa^{(b,\epsilon)}/y)} = \frac{Q_{n-1}^{(b,\epsilon)}(y)}{Q_n^{(b,\epsilon)}(y)}, \quad n \geq 1. \quad (3.1)$$

Para simplificar a notação vamos denotar a constante $\kappa^{(b,\epsilon)}$ por κ . O valor de κ será escolhido adiante.

Observe que, pelo Teorema 2.22, temos

$$\beta_1^{(b,\epsilon,\kappa/y)} = 0 \quad \text{e} \quad \beta_{n+1}^{(b,\epsilon,\kappa/y)} = \frac{\mathfrak{q}_{n+1}^{(b,\epsilon,\kappa/y)}}{\mathfrak{p}_n^{(b,\epsilon,\kappa/y)} - \bar{\mathfrak{q}}_n^{(b,\epsilon,\kappa/y)} \beta_n^{(b,\epsilon,\kappa/y)}}, \quad n \geq 1.$$

Assim, de (3.1), obtemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_2^{(b,\epsilon,\kappa/y)} Q_1^{(b,\epsilon)}(y) &= \mathfrak{p}_1^{(b,\epsilon,\kappa/y)} Q_0^{(b,\epsilon)}(y) \\ \mathfrak{q}_{n+1}^{(b,\epsilon,\kappa/y)} Q_n^{(b,\epsilon)}(y) &= \mathfrak{p}_n^{(b,\epsilon,\kappa/y)} Q_{n-1}^{(b,\epsilon)}(y) - \bar{\mathfrak{q}}_n^{(b,\epsilon,\kappa/y)} Q_{n-2}^{(b,\epsilon)}(y), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Substituindo a expressão para $\mathfrak{p}_n^{(b,\epsilon,s)}$, segue que,

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_2^{(b,\epsilon,\kappa/y)} Q_1^{(b,\epsilon)}(y) &= \left[A_1^{(b,\epsilon)} + \frac{\kappa}{y} A_0^{(b+1)} \right] Q_0^{(b,\epsilon)}(y) \\ \mathfrak{q}_{n+1}^{(b,\epsilon,\kappa/y)} Q_n^{(b,\epsilon)}(y) &= \left[A_n^{(b,\epsilon)} + \frac{\kappa}{y} n^2 \left[A_{n-1}^{(b+1)} + A_{n-2}^{(b+1)} |\chi_n^{(b,\epsilon)}|^2 \right] \right] Q_{n-1}^{(b,\epsilon)}(y) - \bar{\mathfrak{q}}_n^{(b,\epsilon,\kappa/y)} Q_{n-2}^{(b,\epsilon)}(y). \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados das igualdades acima por $\frac{y}{A_1^{(b,\epsilon)}}$ e $\frac{y}{A_n^{(b,\epsilon)}}$, respectivamente, obtemos

$$\frac{y\mathfrak{q}_2^{(b,\epsilon,\kappa/y)}}{A_1^{(b,\epsilon)}} Q_1^{(b,\epsilon)}(y) = \left[y + \frac{\kappa}{A_1^{(b,\epsilon)}} A_0^{(b+1)} \right] Q_0^{(b,\epsilon)}(y), \quad \text{e para } n \geq 2,$$

$$\frac{y\mathfrak{q}_{n+1}^{(b,\epsilon,\kappa/y)}}{A_n^{(b,\epsilon)}} Q_n^{(b,\epsilon)}(y) = \left[y + \frac{\kappa n^2}{A_n^{(b,\epsilon)}} \left[A_{n-1}^{(b+1)} + A_{n-2}^{(b+1)} |\chi_n^{(b,\epsilon)}|^2 \right] \right] Q_{n-1}^{(b,\epsilon)}(y) - \frac{y\bar{\mathfrak{q}}_n^{(b,\epsilon,\kappa/y)}}{A_n^{(b,\epsilon)}} Q_{n-2}^{(b,\epsilon)}(y).$$

Observe que, $y\mathfrak{q}_n^{(b,\epsilon,\kappa/y)}$ não depende de y para todo $n \geq 1$. Assim, definindo

$$\widehat{Q}_n^{(b,\epsilon)}(y) = Q_n^{(b,\epsilon)}(y) \prod_{k=1}^n \frac{y\mathfrak{q}_{k+1}^{(b,\epsilon,\kappa/y)}}{A_k^{(b,\epsilon)}}, \quad n \geq 1,$$

segue que

$$\widehat{Q}_n^{(b,\epsilon)}(y) = \left[y + \frac{\kappa n^2}{A_n^{(b,\epsilon)}} \left[A_{n-1}^{(b+1)} + A_{n-2}^{(b+1)} |\chi_n^{(b,\epsilon)}|^2 \right] \right] \widehat{Q}_{n-1}^{(b,\epsilon)}(y) - \frac{y\bar{\mathfrak{q}}_n^{(b,\epsilon,\kappa/y)}}{A_n^{(b,\epsilon)}} \frac{y\mathfrak{q}_n^{(b,\epsilon,\kappa/y)}}{A_{n-1}^{(b,\epsilon)}} \widehat{Q}_{n-2}^{(b,\epsilon)}(y),$$

para $n \geq 2$ e $\widehat{Q}_1^{(b,\epsilon)}(y) = \left[y + \frac{\kappa}{A_1^{(b,\epsilon)}} A_0^{(b+1)} \right] \widehat{Q}_0^{(b,\epsilon)}(y)$.

Note que,

$$y\mathfrak{q}_{n+1}^{(b,\epsilon,\kappa/y)} = \kappa \frac{|b+1|^2}{(2\lambda+1)(2\lambda+2)(1-\epsilon)} n(\bar{b}+n+1) A_{n+1}^{(b,\epsilon)}, \quad n \geq 1.$$

Assim, se escolhermos $\kappa = \kappa^{(b,\epsilon)} = \frac{(2\lambda+1)(2\lambda+2)(1-\epsilon)}{|b+1|^2}$, então

$$\frac{y\mathfrak{q}_{n+1}^{(b,\epsilon,\kappa/y)}}{A_n^{(b,\epsilon)}} = n(\bar{b}+n+1) \frac{A_{n+1}^{(b,\epsilon)}}{A_n^{(b,\epsilon)}} = \frac{n^2(\lambda+n+1)(2\lambda+n+1)}{(\lambda+n)(b+n+1)} \frac{1-m_{n+1}^{(\lambda,\epsilon)}}{1-m_n^{(\lambda,\epsilon)}}, \quad n \geq 1,$$

$$\frac{\kappa n^2 A_{n-1}^{(b+1)}}{A_n^{(b,\epsilon)}} = \frac{n^2(2\lambda+n+1)}{2(\lambda+n)(1-m_n^{(\lambda,\epsilon)})} = 2n(\lambda+n+1)m_{n+1}^{(\lambda,\epsilon)} = \mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)}, \quad n \geq 1,$$

$$\frac{\kappa n^2 A_{n-2}^{(b+1)} |\chi_n^{(b,\epsilon)}|^2}{A_n^{(b,\epsilon)}} = 2(n-1)(\lambda+n)(1-m_n^{(\lambda,\epsilon)}) = \mathfrak{c}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)}, \quad n \geq 1,$$

$$\frac{y\bar{\mathfrak{q}}_n^{(b,\epsilon,\kappa/y)}}{A_n^{(b,\epsilon)}} \frac{y\mathfrak{q}_n^{(b,\epsilon,\kappa/y)}}{A_{n-1}^{(b,\epsilon)}} = \frac{(n-1)^3(2\lambda+n)(\lambda+n)}{(\lambda+n-1)} \frac{1-m_n^{(\lambda,\epsilon)}}{1-m_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)}} = \mathfrak{a}_{n-2}^{(\lambda,\epsilon)} \mathfrak{c}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)}, \quad n \geq 2,$$

e

$$\prod_{k=1}^n \frac{y\mathfrak{q}_{k+1}^{(b,\epsilon,\kappa/y)}}{A_k^{(b,\epsilon)}} = \frac{(n!)^2(2\lambda+2)_n}{(b+2)_n} \frac{\lambda+n+1}{\lambda+1} \frac{(1-m_{n+1}^{(\lambda,\epsilon)})}{(1-m_1^{(\lambda,\epsilon)})} = \mathfrak{e}_n^{(b,\epsilon)}, \quad n \geq 1.$$

Desta forma, obtemos uma sequência de polinômios mônicos $\{\widehat{Q}_n^{(b,\epsilon)}(y)\}_{n \geq 0}$ que satisfazem a relação de recorrência de três termos

$$\widehat{Q}_n^{(b,\epsilon)}(y) = \left[y + \mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)} + \mathfrak{c}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)} \right] \widehat{Q}_{n-1}^{(b,\epsilon)}(y) - \mathfrak{a}_{n-2}^{(\lambda,\epsilon)} \mathfrak{c}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)} \widehat{Q}_{n-2}^{(b,\epsilon)}(y), \quad n \geq 2,$$

$$\widehat{Q}_1^{(b,\epsilon)}(y) = \left[y + \mathfrak{a}_0^{(\lambda,\epsilon)} + \mathfrak{c}_0^{(\lambda,\epsilon)} \right] \widehat{Q}_0^{(b,\epsilon)}(y), \quad \text{e } \widehat{Q}_0^{(b,\epsilon)}(y) = 1,$$

onde

$$\mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)} = 2n(\lambda+n+1)m_{n+1}^{(\lambda,\epsilon)} \quad \text{e} \quad \mathfrak{c}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)} = 2(n-1)(\lambda+n)(1-m_n^{(\lambda,\epsilon)}), \quad n \geq 1.$$

E então, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.1. Para $n \geq 0$, $Q_n^{(b,\epsilon)}(y)$ em (3.1) é um polinômio em y de grau exato n . Precisamente, se $\widehat{Q}_n^{(b,\epsilon)}(y) = \mathfrak{c}_n^{(b,\epsilon)} Q_n^{(b,\epsilon)}(y)$, $n \geq 0$, com

$$\mathfrak{c}_n^{(b,\epsilon)} = \frac{(n!)^2 (2\lambda + 2)_n \lambda + n + 1 (1 - m_{n+1}^{(\lambda,\epsilon)})}{(b + 2)_n \lambda + 1 (1 - m_1^{(\lambda,\epsilon)})}, \quad n \geq 0,$$

então $\widehat{Q}_n^{(b,\epsilon)}(y)$ são polinômios mônicos tais que $\widehat{Q}_n^{(b,\epsilon)}(y) = \widehat{Q}_n^{(\lambda,\epsilon)}(y)$, $n \geq 0$ (isto é, independe de η) e

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_1^{(b,\epsilon)}(y) &= [y + \mathfrak{a}_0^{(\lambda,\epsilon)} + \mathfrak{c}_0^{(\lambda,\epsilon)}] \widehat{Q}_0^{(b,\epsilon)}(y), \\ \widehat{Q}_n^{(b,\epsilon)}(y) &= [y + \mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)} + \mathfrak{c}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)}] \widehat{Q}_{n-1}^{(b,\epsilon)}(y) - \mathfrak{a}_{n-2}^{(\lambda,\epsilon)} \mathfrak{c}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)} \widehat{Q}_{n-2}^{(b,\epsilon)}(y), \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Aqui,

$$\mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)} = 2n(\lambda + n + 1)m_{n+1}^{(\lambda,\epsilon)} \quad e \quad \mathfrak{c}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)} = 2(n-1)(\lambda + n)(1 - m_n^{(\lambda,\epsilon)}), \quad n \geq 1.$$

Embora os coeficientes na relação de recorrência de três termos (3.2) tenham representações muito simples e agradáveis, infelizmente, em geral eles não tem representação explícita. Quando $\epsilon \neq 0$ e $\lambda \neq 0$, para obter esses coeficientes é preciso gerar $\{m_n^{(\lambda,\epsilon)}\}_{n \geq 1}$ recursivamente usando $m_0^{(\lambda,\epsilon)} = 0$ e $(1 - m_n^{(\lambda,\epsilon)})m_{n+1}^{(\lambda,\epsilon)} = d_{n+1}^{(\lambda,\epsilon)}$ para $n \geq 0$. Entretanto, veremos que quando $\epsilon = 0$ e/ou $\lambda = 0$ os coeficientes em (3.2) tem representações explícitas.

Consideremos primeiramente o caso em que $\lambda = 0$. De (2.31), temos para $0 \leq \epsilon < 1$ que a sequência $\{m_n^{(0,\epsilon)}\}_{n \geq 0}$ é a sequência de parâmetro minimal da sequência encadeada positiva

$$\{d_n^{(0,\epsilon)}\}_{n=1}^\infty = \left\{ \frac{1-\epsilon}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots \right\}.$$

Assim, os primeiros termos da sequência $\{m_n^{(0,\epsilon)}\}_{n \geq 0}$ são $m_0^{(0,\epsilon)} = 0$,

$$\begin{aligned} m_1^{(0,\epsilon)} &= \frac{d_1^{(0,\epsilon)}}{1 - m_0^{(0,\epsilon)}} = \frac{(1-\epsilon)}{2}, & m_2^{(0,\epsilon)} &= \frac{d_2^{(0,\epsilon)}}{1 - m_1^{(0,\epsilon)}} = \frac{1}{2} \frac{1}{(1+\epsilon)}, \\ m_3^{(0,\epsilon)} &= \frac{d_3^{(0,\epsilon)}}{1 - m_2^{(0,\epsilon)}} = \frac{1}{2} \frac{(1+\epsilon)}{(1+2\epsilon)}, & m_4^{(0,\epsilon)} &= \frac{d_4^{(0,\epsilon)}}{1 - m_3^{(0,\epsilon)}} = \frac{1}{2} \frac{(1+2\epsilon)}{(1+3\epsilon)}, \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$m_{n+1}^{(0,\epsilon)} = \frac{1 + (n-1)\epsilon}{2(1+n\epsilon)} \quad e \quad 1 - m_{n+1}^{(0,\epsilon)} = \frac{1 + (n+1)\epsilon}{2(1+n\epsilon)}, \quad n \geq 0.$$

Portanto, podemos enunciar o seguinte corolário.

Corolário 3.2. A sequência de polinômios $\{Q_n^{(in,\epsilon)}\}_{n \geq 0}$ que segue de (3.1) é tal que

$$\frac{n![(n+1)!]^2 [1 + (n+1)\epsilon]}{(in+2)_n [1+n\epsilon] (1+\epsilon)} Q_n^{(in,\epsilon)}(y) = \widehat{Q}_n^{(0,\epsilon)}(y), \quad n \geq 0,$$

onde $\widehat{Q}_0^{(0,\epsilon)}(y) = 1$, $\widehat{Q}_1^{(0,\epsilon)}(y) = [y + \mathfrak{a}_0^{(0,\epsilon)} + \mathfrak{c}_0^{(0,\epsilon)}]$ e

$$\widehat{Q}_n^{(0,\epsilon)}(y) = [y + \mathfrak{a}_{n-1}^{(0,\epsilon)} + \mathfrak{c}_{n-1}^{(0,\epsilon)}] \widehat{Q}_{n-1}^{(0,\epsilon)}(y) - \mathfrak{a}_{n-2}^{(0,\epsilon)} \mathfrak{c}_{n-1}^{(0,\epsilon)} \widehat{Q}_{n-2}^{(0,\epsilon)}(y), \quad n \geq 2. \quad (3.3)$$

Os coeficientes $\mathfrak{a}_{n-1}^{(0,\epsilon)}$ e $\mathfrak{c}_{n-1}^{(0,\epsilon)}$ são dados explicitamente por

$$\mathfrak{a}_{n-1}^{(0,\epsilon)} = n(n+1) \frac{1 + (n-1)\epsilon}{1+n\epsilon} \quad e \quad \mathfrak{c}_{n-1}^{(0,\epsilon)} = (n-1)n \frac{1+n\epsilon}{1+(n-1)\epsilon}, \quad n \geq 1.$$

Agora, consideremos o caso $\epsilon = 0$. Neste caso todos os coeficientes da relação de recorrência de três termos (3.2) também são dados explicitamente.

Quando $\epsilon = 0$ temos que $m_n^{(\lambda,0)} = M_n^{(\lambda)}$. Assim, usando (2.31) obtemos

$$\mathbf{a}_{n-1}^{(\lambda,0)} = n(2\lambda + n + 1) \quad \text{e} \quad \mathbf{c}_{n-1}^{(\lambda,0)} = (n-1)n, \quad n \geq 1. \quad (3.4)$$

Desta forma, apresentamos o seguinte corolário para o Teorema 3.1.

Corolário 3.3. *A sequência de polinômios $\{Q_n^{(b,0)}\}_{n \geq 0}$ que segue de (3.1) satisfaz*

$$n!(n+1)! \frac{(2\lambda+2)_n}{(b+2)_n} Q_n^{(b,0)}(y) = \widehat{Q}_n^{(\lambda,0)}(y), \quad n \geq 0,$$

onde $\widehat{Q}_0^{(\lambda,0)}(y) = 1$, $\widehat{Q}_1^{(\lambda,0)}(y) = y + 2(\lambda + 1)$ e

$$\widehat{Q}_n^{(\lambda,0)}(y) = [y + 2n(\lambda + n)] \widehat{Q}_{n-1}^{(\lambda,0)}(y) - (n-1)^2 n(2\lambda + n) \widehat{Q}_{n-2}^{(\lambda,0)}(y), \quad n \geq 2. \quad (3.5)$$

Com o Teorema 3.1, também podemos escrever os coeficientes de conexão $\beta_{n+1}^{(b,\epsilon,\kappa^{(b,\epsilon)}/y)}$ em termos dos polinômios mônicos $\widehat{Q}_n^{(b,\epsilon)}(y)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \beta_{n+1}^{(b,\epsilon,\kappa^{(b,\epsilon)}/y)} &= \frac{Q_{n-1}^{(b,\epsilon)}(y)}{Q_n^{(b,\epsilon)}(y)} = \frac{\mathfrak{c}_n^{(b,\epsilon)} \widehat{Q}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)}(y)}{\mathfrak{c}_{n-1}^{(b,\epsilon)} \widehat{Q}_n^{(\lambda,\epsilon)}(y)} \\ &= n^2 \frac{(2\lambda + n + 1)}{(b + n + 1)} \frac{(\lambda + n + 1)}{(\lambda + n)} \frac{(1 - m_{n+1}^{(\lambda,\epsilon)})}{(1 - m_n^{(\lambda,\epsilon)})} \frac{\widehat{Q}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)}(y)}{\widehat{Q}_n^{(\lambda,\epsilon)}(y)}, \end{aligned} \quad n \geq 1. \quad (3.6)$$

Além disso, observe que a relação de recorrência de três termos (3.2) mostra que a sequência de polinômios mônicos $\{\widehat{Q}_n^{(b,\epsilon)}\}_{n \geq 0}$ são ortogonais com respeito a alguma medida positiva sobre o eixo real negativo $(-\infty, 0)$. Isso é esperado, uma vez que o produto interno de Sobolev $\langle f, g \rangle_{S^{(b,\epsilon,s)}}$ é definido positivo para $0 < s < \infty$ e, portanto, as funções racionais $\widehat{Q}_{n-1}^{(b,\epsilon)}(y)/\widehat{Q}_n^{(b,\epsilon)}(y)$ estão bem definidas para $0 < y < \infty$.

Uma pergunta natural que surge diz respeito a identificação dessa medida, ou seja, é possível identificar essa medida com alguma medida conhecida na literatura? No caso $\epsilon = 0$ a resposta é sim. Mostraremos que os polinômios $\widehat{Q}_n^{(\lambda,0)}$ no Corolário 3.3 estão relacionados a uma subclasse dos polinômios “*continuous dual Hahn*” apresentados no Exemplo 2.12.

Consideremos uma subclasse dos polinômios “*continuous dual Hahn*”, que denotaremos por $h_n(x; \lambda)$, e são tais que

$$\begin{aligned} h_n(x^2; \lambda) &= (-1)^n S_n\left(x^2; \frac{1}{2} - \lambda, \frac{1}{2} + \lambda, \frac{3}{2} + \lambda\right), \\ &= (-1)^n n!(n+1)! {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, \frac{1}{2} - \lambda + ix, \frac{1}{2} - \lambda - ix \\ 1, 2 \end{matrix} \middle| 1\right), \end{aligned} \quad n \geq 0, \quad (3.7)$$

onde $\lambda > -1/2$. Dos resultados dados em [18], é fácil verificar que esses polinômios satisfazem a ortogonalidade

$$\int_0^\infty h_m(x^2; \lambda) h_n(x^2; \lambda) d\nu(x; \lambda) = (n!)^2 (n+1)! (2\lambda+2)_n \delta_{n,m},$$

onde a medida de probabilidade $\nu(x; \lambda)$ definida sobre a reta real é dada por

$$\int f(x^2) d\nu(x; \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f(x^2) \omega(x; \lambda) dx,$$

para $\frac{1}{2} \geq \lambda > -\frac{1}{2}$ e

$$\int f(x^2) d\nu(x; \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f(x^2) \omega(x; \lambda) dx + \sum_{k=0}^{\lfloor (2\lambda-1)/2 \rfloor} \omega_k(\lambda) f\left(-\left(k + \frac{1}{2} - \lambda\right)^2\right),$$

para $\lambda > \frac{1}{2}$. Aqui, $\omega_k(\lambda) = \frac{(2\lambda - 1 - 2k)(k + 1)!}{2\lambda + 1} \frac{(-1)^k}{(-2\lambda)_k}$ e

$$\omega(x; \lambda) = \left| \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \lambda + ix) \Gamma(\frac{1}{2} + \lambda + ix) \Gamma(\frac{3}{2} + \lambda + ix)}{\sqrt{\Gamma(2\lambda + 2)} \Gamma(2ix)} \right|^2.$$

Teorema 3.4. *Seja $h_n(x; \lambda)$ os polinômios “continuous dual Hahn” mônicos especiais dados em (3.7). Então os polinômios $\widehat{Q}_n^{(\lambda,0)}(y)$ que aparecem no Corolário 3.3 são tais que*

$$h_n(x; \lambda) = (-1)^n \widehat{Q}_n^{(\lambda,0)}\left(-x - \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2\right), \quad n \geq 0.$$

Demonstração: Da relação de recorrência de três termos (2.5) com parâmetros

$$a = -\lambda + \frac{1}{2}, \quad b = \lambda + \frac{1}{2}, \quad e \quad c = \lambda + \frac{3}{2},$$

e de (3.4), segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{c}_{n-1} - a^2 &= n(n+1) + (n-1)(n+2\lambda) - (-\lambda + 1/2)^2 \\ &= n(2\lambda + n + 1) + (n-1)n - (\lambda + 1/2)^2 = \mathbf{a}_{n-1}^{(\lambda,0)} + \mathbf{c}_{n-1}^{(\lambda,0)} - (\lambda + 1/2)^2, \\ \mathbf{a}_{n-2} \times \mathbf{c}_{n-1} &= (n-1)n \times (n-1)(n+2\lambda) \\ &= (n-1)(2\lambda + n) \times (n-1)n = \mathbf{a}_{n-2}^{(\lambda,0)} \times \mathbf{c}_{n-1}^{(\lambda,0)}. \end{aligned}$$

Desta forma, os polinômios mônicos $h_n(x; \lambda)$ satisfazem a relação de recorrência de três termos

$$\begin{aligned} h_1(x; \lambda) &= x - 2(\lambda + 1) + (\lambda + \frac{1}{2})^2, \\ h_n(x; \lambda) &= \left[x - 2n(\lambda + n) + (\lambda + \frac{1}{2})^2\right] h_{n-1}(x; \lambda) - (n-1)^2 n (2\lambda + n) h_{n-2}(x; \lambda), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Assim, o resultado do teorema segue pela comparação dessa relação de recorrência de três termos com a relação de recorrência de três termos no Corolário 3.3. ■

Agora, olhemos para a matriz tridiagonal que define o sistema de equações

$$\mathbf{T}_n^{(b,\epsilon,s)} \mathbf{a}_n^{(b,\epsilon,s)} = \mathbf{q}_{n+1}^{(b,\epsilon,s)} \mathbf{e}_n, \quad n \geq 2,$$

no Teorema 2.21. Mais precisamente, consideremos o polinômio característico associado à matriz $\mathbf{T}_n^{(b,\epsilon,s)}$

$$\mathbf{t}_n^{(b,\epsilon,s)}(z) = (z - \mathbf{p}_n^{(b,\epsilon,s)}) \mathbf{t}_{n-1}^{(b,\epsilon,s)}(z) - |\mathbf{q}_n^{(b,\epsilon,s)}|^2 \mathbf{t}_{n-2}^{(b,\epsilon,s)}(z),$$

onde $\mathbf{t}_0^{(b,\epsilon,s)}(z) = 1$ e $\mathbf{t}_1^{(b,\epsilon,s)}(z) = z - \mathbf{p}_1^{(b,\epsilon,s)}$. Claramente, $\mathbf{t}_n^{(b,\epsilon,s)}(0) = \det(\mathbf{T}_n^{(b,\epsilon,s)})$, $n \geq 0$.

Além disso, tomando $\epsilon = 0$ e $s^{(b,0)}(y) = \frac{(2\lambda + 1)(2\lambda + 2)}{|b + 1|^2} \frac{1}{y}$ temos que

$$\mathbf{t}_n^{(b,0,s^{(b,0)}(y))}(z) = \left(z - \frac{(2\lambda + 1)_n n!}{y |(b + 1)_n|^2} [y + 2n(\lambda + n)] \right) \mathbf{t}_{n-1}^{(b,0,s^{(b,0)}(y))}(z) - \left| \frac{(n-1)n!(2\lambda + 1)_n (\bar{b} + n)}{|(b + 1)_n|^2} \right|^2 \frac{1}{y^2} \mathbf{t}_{n-2}^{(b,0,s^{(b,0)}(y))}(z), \quad n \geq 2,$$

onde $\mathbf{t}_0^{(b,0,s^{(b,0)}(y))}(z) = 1$ e $\mathbf{t}_1^{(b,0,s^{(b,0)}(y))}(z) = z - \frac{(2\lambda + 1)}{y |(b + 1)|^2} [y + 2(\lambda + 1)]$. Portanto, segue o próximo resultado.

Teorema 3.5. *Os polinômios “continuous dual Hahn” especiais modificados $\widehat{Q}_n^{(\lambda,0)}$, dados no Corolário 3.3 e no Teorema 3.4, satisfazem*

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_n^{(\lambda,0)}(y) &= (-y)^n \det(\mathbf{T}_n^{(b,0,s^{(b,0)}(y))}) \prod_{j=0}^n \frac{|(b + 1)_j|^2}{j! (2\lambda + 1)_j}, \\ &= (-y)^n \det(\mathbf{T}_n^{(\lambda,0,s^{(\lambda,0)}(y))}) \prod_{j=0}^n \frac{|(\lambda + 1)_j|^2}{j! (2\lambda + 1)_j}, \end{aligned} \quad n \geq 0.$$

3.2 Limitantes e resultados assintóticos

Nesta seção apresentamos o estudo do comportamento dos coeficientes de conexão $\beta_n^{(b,\epsilon,s)}$ com respeito aos parâmetros b , ϵ e s . Tal estudo será de grande importância na determinação das propriedades dos polinômios ortogonais de Sobolev $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$.

O teorema a seguir fornece limitantes para o valor absoluto dos coeficientes de conexão $\beta_n^{(b,\epsilon,s)}$.

Teorema 3.6. *As constantes $\beta_n^{(b,\epsilon,s)}$, $n \geq 1$, definidas por (2.38) para $0 < s < \infty$, $0 \leq \epsilon < 1$ e $\Re(b) = \lambda > -1/2$, são tais que $\beta_1^{(b,\epsilon,s)} = 0$ e*

$$A. \quad |\beta_{n+1}^{(b,\epsilon,s)}| < \frac{n+1}{n} |\chi_{n+1}^{(b,\epsilon)}| = 2[1 - m_{n+1}^{(\lambda,\epsilon)}] \frac{\lambda + n + 1}{|b + n + 1|} < \frac{n + 2\lambda + 2}{|b + n + 1|}, \quad n \geq 1,$$

$$B. \quad |\beta_{n+1}^{(b,\epsilon,s)}| < 2[1 - m_{n+1}^{(\lambda,\epsilon)}] \frac{\lambda + n + 1}{|b + n + 1|} \frac{\mathbf{a}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)} + \mathbf{c}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)}}{\mathbf{a}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)} + \mathbf{c}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)} + \kappa^{(b,\epsilon)}/s}, \quad n \geq 1,$$

onde $\kappa^{(b,\epsilon)} = \frac{(2\lambda + 1)(2\lambda + 2)(1 - \epsilon)}{|b + 1|^2}$, $\{\mathbf{a}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)}\}_{n \geq 1}$ e $\{\mathbf{c}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)}\}_{n \geq 1}$ são como no Teorema 3.1.

Demonstração: De (2.40) e (2.30) segue que

$$|\beta_{n+1}^{(b,\epsilon,s)}| < \frac{n+1}{n} |\chi_{n+1}^{(b,\epsilon)}| = 2[1 - m_{n+1}^{(\lambda,\epsilon)}] \frac{\lambda + n + 1}{|b + n + 1|}, \quad n \geq 1.$$

E de (2.32) temos $[1 - m_{n+1}^{(\lambda,\epsilon)}] < [1 - \ell_{n+1}^{(\lambda)}]$, logo

$$2[1 - m_{n+1}^{(\lambda,\epsilon)}] \frac{\lambda + n + 1}{|b + n + 1|} < 2 \left[1 - \frac{1}{2} \frac{n}{\lambda + n + 1} \right] \frac{\lambda + n + 1}{|b + n + 1|} = \frac{n + 2\lambda + 2}{|b + n + 1|}, \quad n \geq 1.$$

Para provar a parte B utilizamos um procedimento bem conhecido associado a relações de recorrência de três termos, polinômios ortogonais e sequência encadeada positiva (ver [10, p. 110]).

Da relação de recorrência de três termos (3.2), determinamos a sequência encadeada positiva $\{\mathfrak{d}_{n+1}^{(\lambda, \epsilon)}(y)\}_{n \geq 1}$ associada a sequência $\{\widehat{Q}_n^{(b, \epsilon)}(y)\}$, ou seja,

$$\frac{\widehat{Q}_{n+1}^{(b, \epsilon)}(y)}{\left[y + \mathfrak{a}_n^{(\lambda, \epsilon)} + \mathfrak{c}_n^{(\lambda, \epsilon)}\right] \widehat{Q}_n^{(b, \epsilon)}(y)} = 1 - \frac{\mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)} \mathfrak{c}_n^{(\lambda, \epsilon)} \widehat{Q}_{n-1}^{(b, \epsilon)}(y)}{\left[y + \mathfrak{a}_n^{(\lambda, \epsilon)} + \mathfrak{c}_n^{(\lambda, \epsilon)}\right] \widehat{Q}_n^{(b, \epsilon)}(y)},$$

daí, podemos escrever

$$1 - \frac{\widehat{Q}_{n+1}^{(b, \epsilon)}(y)}{\left[y + \mathfrak{a}_n^{(\lambda, \epsilon)} + \mathfrak{c}_n^{(\lambda, \epsilon)}\right] \widehat{Q}_n^{(b, \epsilon)}(y)} = \frac{\mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)} \mathfrak{c}_n^{(\lambda, \epsilon)} \widehat{Q}_{n-1}^{(b, \epsilon)}(y)}{\left[y + \mathfrak{a}_n^{(\lambda, \epsilon)} + \mathfrak{c}_n^{(\lambda, \epsilon)}\right] \widehat{Q}_n^{(b, \epsilon)}(y)}.$$

E, multiplicando ambos os lados da igualdade acima por $\frac{\widehat{Q}_n^{(b, \epsilon)}(y)}{\left[y + \mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)} + \mathfrak{c}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)}\right] \widehat{Q}_{n-1}^{(b, \epsilon)}(y)}$, obtemos as sequências $\{\mathfrak{d}_{n+1}^{(\lambda, \epsilon)}(y)\}_{n \geq 1}$ e $\{\mathfrak{h}_{n+1}^{(\lambda, \epsilon)}(y)\}_{n \geq 0}$, tais que

$$\left[1 - \mathfrak{h}_n^{(\lambda, \epsilon)}(y)\right] \mathfrak{h}_{n+1}^{(\lambda, \epsilon)}(y) = \mathfrak{d}_{n+1}^{(\lambda, \epsilon)}(y) = \frac{\mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)} \mathfrak{c}_n^{(\lambda, \epsilon)}}{\left[y + \mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)} + \mathfrak{c}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)}\right] \left[y + \mathfrak{a}_n^{(\lambda, \epsilon)} + \mathfrak{c}_n^{(\lambda, \epsilon)}\right]}, \quad n \geq 1$$

e

$$1 - \mathfrak{h}_n^{(\lambda, \epsilon)}(y) = \frac{\widehat{Q}_n^{(\lambda, \epsilon)}(y)}{\left[y + \mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)} + \mathfrak{c}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)}\right] \widehat{Q}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)}(y)}, \quad n \geq 1. \quad (3.8)$$

Para $y \geq 0$ a sequência $\{\mathfrak{d}_{n+1}^{(\lambda, \epsilon)}(y)\}_{n \geq 1}$ é uma sequência encadeada positiva e $\{\mathfrak{h}_{n+1}^{(\lambda, \epsilon)}(y)\}_{n \geq 0}$ é sua sequência minimal de parâmetros. Verificamos esta afirmação da seguinte maneira:

A sequência $\{\mathfrak{d}_{n+1}^{(\lambda, \epsilon)}(0)\}_{n \geq 1}$ é claramente uma sequência encadeada positiva, com sua sequência minimal de parâmetros $\{\mathfrak{h}_{n+1}^{(\lambda, \epsilon)}(0)\}_{n \geq 0}$ dada por

$$\mathfrak{h}_n^{(\lambda, \epsilon)}(0) = \frac{\mathfrak{c}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)}}{\mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)} + \mathfrak{c}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)}}, \quad n \geq 1. \quad (3.9)$$

Observe também que

$$\mathfrak{d}_{n+1}^{(\lambda, \epsilon)}(y) < \mathfrak{d}_{n+1}^{(\lambda, \epsilon)}(0), \quad n \geq 1,$$

para $y > 0$. Assim, pelo Teorema 2.7 temos que $\{\mathfrak{d}_{n+1}^{(\lambda, \epsilon)}(y)\}_{n \geq 1}$ é uma sequência encadeada positiva, e como $\mathfrak{h}_1^{(\lambda, \epsilon)}(y) = 0$, segue que a sequência de parâmetros $\{\mathfrak{h}_{n+1}^{(\lambda, \epsilon)}(y)\}_{n \geq 0}$ é sua sequência minimal.

Além disso, pelo Corolário 2.6 obtemos que $\mathfrak{h}_{n+1}^{(\lambda, \epsilon)}(y) < \mathfrak{h}_{n+1}^{(\lambda, \epsilon)}(0)$ para $n \geq 1$ e $y > 0$, ou seja, $1 - \mathfrak{h}_{n+1}^{(\lambda, \epsilon)}(y) > 1 - \mathfrak{h}_{n+1}^{(\lambda, \epsilon)}(0)$ para $n \geq 1$ e $y > 0$. Isso significa que, de (3.8), temos

$$\frac{\widehat{Q}_n^{(\lambda, \epsilon)}(y)}{\left[y + \mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)} + \mathfrak{c}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)}\right] \widehat{Q}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)}(y)} > \frac{\widehat{Q}_n^{(\lambda, \epsilon)}(0)}{\left[0 + \mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)} + \mathfrak{c}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)}\right] \widehat{Q}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)}(0)} = \frac{\mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)}}{\mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)} + \mathfrak{c}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)}}, \quad (3.10)$$

para $n \geq 2$. Assim, para $y > 0$,

$$\frac{\widehat{Q}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)}(y)}{\widehat{Q}_n^{(\lambda, \epsilon)}(y)} < \frac{\mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)} + \mathfrak{c}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)}}{\mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)} \left[y + \mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)} + \mathfrak{c}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)}\right]}, \quad n \geq 1.$$

Substituindo essa desigualdade em (3.6) obtemos a parte B do teorema. \blacksquare

Algo interessante de ser observado é o fato de que quando $\epsilon = 0$ a sequência encadeada positiva $\{\mathfrak{d}_{n+1}^{(\lambda, \epsilon)}(0)\}_{n \geq 1}$ coincide com a sequência encadeada positiva $\{d_{n+1}^{(\lambda)}\}_{n \geq 1}$ em (2.31).

Além disso, de (3.2) e (3.10), vemos também que

$$\frac{\widehat{Q}_n^{(\lambda, \epsilon)}(0)}{\widehat{Q}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)}(0)} = \mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)} = 2n(\lambda + n + 1)m_{n+1}^{(\lambda, \epsilon)}, \quad n \geq 1. \quad (3.11)$$

Observe que, para $n \geq 1$, temos

$$\mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)} = \frac{1}{2} \frac{n^2(2\lambda + n + 1)}{(\lambda + n)(1 - m_n^{(\lambda, \epsilon)})} > \frac{1}{2} \frac{n^2(2\lambda + n + 1)}{(\lambda + n)(1 - \ell_n^{(\lambda)})} = \frac{1}{2} \frac{n^2(2\lambda + n + 1)}{(\lambda + n)} \frac{2(\lambda + n)}{(2\lambda + n + 1)} = n^2.$$

Logo, $\mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)} > n^2$ e, conseqüentemente, $\mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)} > 1$ para $n \geq 1$. Portanto, pela equação (3.11), segue que

$$\widehat{Q}_n^{(\lambda, \epsilon)}(0) > \widehat{Q}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)}(0)$$

para $n \geq 1$. Assim, para $y \geq 0$ e $n \geq 1$ segue que $\widehat{Q}_n^{(\lambda, \epsilon)}(y) > \widehat{Q}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)}(y)$, isto significa que para $y \in [0, +\infty)$ os polinômios da sequência $\{\widehat{Q}_n^{(\lambda, \epsilon)}(y)\}_{n \geq 0}$ não se cruzam.

O teorema a seguir fornece informações sobre o comportamento assintótico dos coeficientes de conexão $\beta_n^{(b, \epsilon, s)}$.

Teorema 3.7. *Seja $b = \lambda + i\eta$. Para qualquer $n \geq 2$ os seguintes resultados valem*

- A. $\lim_{s \rightarrow \infty} \beta_n^{(b, \epsilon, s)} = 2(1 - m_n^{(\lambda, \epsilon)}) \frac{\lambda + n}{b + n} e$
para b e ϵ fixos, $|\beta_n^{(b, \epsilon, s)}|$ é uma função estritamente crescente de s para $s \in [0, \infty)$;
- B. $\lim_{\eta \rightarrow \infty} |\beta_n^{(b, \epsilon, s)}| = 0 e$
- C. $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} |\beta_n^{(b, \epsilon, s)}| = 0.$

Demonstração: Derivando a equação (3.6) com relação a variável y obtemos

$$\frac{\partial}{\partial y} |\beta_{n+1}^{(b, \epsilon, \kappa^{(b, \epsilon)})/y}| = - \frac{|\mathfrak{c}_n^{(b, \epsilon)}| \widehat{Q}_n^{(\lambda, \epsilon)'}(y) \widehat{Q}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)}(y) - \widehat{Q}_n^{(\lambda, \epsilon)}(y) \widehat{Q}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)'}(y)}{|\mathfrak{c}_{n-1}^{(b, \epsilon)}| (\widehat{Q}_n^{(\lambda, \epsilon)}(y))^2},$$

para $n \geq 1$. Desta forma, pela forma conflúente da Identidade de Christoffel-Darboux (2.7) e da relação de recorrência de três termos (3.2), segue que

$$\begin{aligned} & \widehat{Q}_n^{(\lambda, \epsilon)'}(y) \widehat{Q}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)}(y) - \widehat{Q}_n^{(\lambda, \epsilon)}(y) \widehat{Q}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)'}(y) \\ &= \left[\widehat{Q}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)}(y) \right]^2 + \sum_{j=0}^{n-2} \left(\prod_{k=n-2-j}^{n-2} \mathfrak{a}_k^{(\lambda, \epsilon)} \mathfrak{c}_{k+1}^{(\lambda, \epsilon)} \right) \left[\widehat{Q}_{n-2-j}^{(\lambda, 0)}(y) \right]^2, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Logo, $\widehat{Q}_n^{(\lambda, \epsilon)'}(y) \widehat{Q}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)}(y) - \widehat{Q}_n^{(\lambda, \epsilon)}(y) \widehat{Q}_{n-1}^{(\lambda, \epsilon)'}(y)$ é positivo para $y \in \mathbb{R}$ e, assim, temos que $\frac{\partial}{\partial y} |\beta_{n+1}^{(b, \epsilon, \kappa^{(b, \epsilon)})/y}|$ é negativo para $y \in \mathbb{R}$. Portanto, $|\beta_n^{(b, \epsilon, \kappa^{(b, \epsilon)})/y}|$ é uma função estritamente decrescente de y e, conseqüentemente, é uma função estritamente crescente de s .

Além disso, $\lim_{s \rightarrow \infty} \beta_n^{(b,\epsilon,s)} = \lim_{y \rightarrow 0} \beta_n^{(b,\epsilon,\kappa^{(b,\epsilon)}/y)}$, e de (3.6) e (3.11) segue que

$$\lim_{y \rightarrow 0} \beta_{n+1}^{(b,\epsilon,\kappa^{(b,\epsilon)}/y)} = n^2 \frac{(2\lambda + n + 1)(\lambda + n + 1)(1 - m_{n+1}^{(\lambda,\epsilon)})}{(b + n + 1)(\lambda + n)(1 - m_n^{(\lambda,\epsilon)})} \frac{1}{2n(\lambda + n + 1)m_{n+1}^{(\lambda,\epsilon)}}.$$

Assim, de $(1 - m_n^{(\lambda,\epsilon)})m_{n+1}^{(\lambda,\epsilon)} = d_{n+1}^{(\lambda,\epsilon)} = d_{n+1}^{(\lambda)}$, para $n \geq 1$, e usando a expressão para a sequência encadeada positiva $\{d_{n+1}^{(\lambda)}\}_{n \geq 1}$ dada em (2.31), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \beta_{n+1}^{(b,\epsilon,\kappa^{(b,\epsilon)}/y)} &= n \frac{(2\lambda + n + 1)(1 - m_{n+1}^{(\lambda,\epsilon)})}{(b + n + 1)(\lambda + n)2} \frac{4(\lambda + n)(\lambda + n + 1)}{n(2\lambda + n + 1)} \\ &= 2(1 - m_{n+1}^{(\lambda,\epsilon)}) \frac{\lambda + n + 1}{b + n + 1}. \end{aligned}$$

O comportamento assintótico apresentado na parte B neste teorema é uma consequência imediata da parte A do Teorema 3.6.

Agora, para provar a parte C deste teorema consideremos dois casos: $\epsilon = 0$ e $\epsilon \neq 0$. Quando $\epsilon = 0$ temos que $m_n^{(\lambda,0)} = M_n^{(\lambda)}$, para $n \geq 1$, daí

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} m_n^{(\lambda,0)} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{2\lambda + n}{\lambda + n} = 1.$$

Assim, pela parte A do Teorema 3.6, temos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} |\beta_n^{(b,0,s)}| \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} 2[1 - m_{n+1}^{(\lambda,0)}] \frac{\lambda + n + 1}{|b + n + 1|} = 0,$$

e, portanto, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} |\beta_n^{(b,0,s)}| = 0$.

Para $\epsilon \neq 0$, observe que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} d_n^{(\lambda,\epsilon)} = \begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} d_1^{(\lambda,\epsilon)} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (1 - \epsilon)M_1^{(\lambda)} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (1 - \epsilon) \frac{2\lambda + 1}{2\lambda + 2} = 1 - \epsilon, \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} d_n^{(\lambda)} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \frac{(n-1)(2\lambda + n)}{(\lambda + n - 1)(\lambda + n)} = 0, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Logo, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} m_1^{(\lambda,\epsilon)} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{d_1^{(\lambda,\epsilon)}}{[1 - m_0^{(\lambda,\epsilon)}]} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} d_1^{(\lambda,\epsilon)} = 1 - \epsilon$, e como $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} d_n^{(\lambda,\epsilon)} = 0$, para $n \geq 2$, então pelo Teorema 2.8 segue que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} m_n^{(\lambda,\epsilon)} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4(0)}) = 0, \quad n \geq 2.$$

Além disso, de (3.6) e (3.8), temos que

$$\beta_{n+1}^{(b,\epsilon,s)} = \frac{n^2(2\lambda + n + 1)(\lambda + n + 1)(1 - m_{n+1}^{(\lambda,\epsilon)})}{(b + n + 1)(\lambda + n)(1 - m_n^{(\lambda,\epsilon)})[1 - \mathfrak{h}_n^{(\lambda,\epsilon)}(\kappa^{(b,\epsilon)}/s)][\mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)} + \mathfrak{c}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)} + \kappa^{(b,\epsilon)}/s]},$$

para $n \geq 1$.

Observe que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} [\mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)} + \mathfrak{c}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)} + \kappa^{(b,\epsilon)}/s] = \infty$ e, como

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathfrak{d}_{n+1}^{(\lambda,\epsilon)}(\kappa^{(b,\epsilon)}/s) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)} \mathfrak{c}_n^{(\lambda,\epsilon)}}{[\mathfrak{a}_n^{(\lambda,\epsilon)} + \mathfrak{c}_n^{(\lambda,\epsilon)} + \kappa^{(b,\epsilon)}/s][\mathfrak{a}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)} + \mathfrak{c}_{n-1}^{(\lambda,\epsilon)} + \kappa^{(b,\epsilon)}/s]} = 0,$$

segue do Teorema 2.8 que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathfrak{h}_n^{(\lambda,\epsilon)}(\kappa^{(b,\epsilon)}/s) \rightarrow 0$ quando $s < \infty$ e, consequentemente, obtemos $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} |\beta_n^{(b,\epsilon,s)}| = 0$. ■

3.3 Um caso particular

Consideremos agora, o caso $\lambda = 0$ e $\epsilon = 0$, de (3.1) e do Corolário 3.2 temos

$$\beta_{n+1}^{(i\eta, 0, \kappa^{(i\eta, 0)}/y)} = \frac{Q_{n-1}^{(i\eta, 0)}(y)}{Q_n^{(i\eta, 0)}(y)} = \frac{n(n+1)^2}{(i\eta + n + 1)} \frac{\widehat{Q}_{n-1}^{(0, 0)}(y)}{\widehat{Q}_n^{(0, 0)}(y)}, \quad (3.12)$$

para $n \geq 1$, onde $\kappa^{(i\eta, 0)} = 2/(1 + \eta^2)$.

Teorema 3.8. *Para qualquer $s > 0$, as seqüências $\{\beta_n^{(0, 0, s)}\}_{n \geq 2}$ e $\{|\beta_n^{(i\eta, 0, s)}|\}_{n \geq 2}$ são seqüências monotonicamente crescentes com respeito a n . Isto é,*

$$\beta_n^{(0, 0, s)} < \beta_{n+1}^{(0, 0, s)} \quad e \quad |\beta_n^{(i\eta, 0, s)}| < |\beta_{n+1}^{(i\eta, 0, s)}|,$$

para $n \geq 1$.

Demonstração: Como $\beta_1^{(0, 0, s)} = 0$ e $\beta_2^{(0, 0, s)} > 0$, a primeira desigualdade do teorema é válida para $n = 1$. Para $n \geq 2$, de (3.12) temos que

$$\beta_{n+1}^{(0, 0, \kappa^{(0, 0)}/y)} - \beta_n^{(0, 0, \kappa^{(0, 0)}/y)} = \frac{[Q_{n-1}^{(0, 0)}(y)]^2 - Q_n^{(0, 0)}(y) Q_{n-2}^{(0, 0)}(y)}{Q_n^{(0, 0)}(y) Q_{n-1}^{(0, 0)}(y)}.$$

Assim, basta mostrarmos que os determinantes de Turán

$$\Delta_n(y) = [Q_n^{(0, 0)}(y)]^2 - Q_{n+1}^{(0, 0)}(y) Q_{n-1}^{(0, 0)}(y), \quad n \geq 1,$$

são todos positivos para $y > 0$. Da relação de recorrência (3.5) obtemos

$$\begin{aligned} 2Q_1^{(0, 0)}(y) &= (y + 2)Q_{0,0}^{(0, 0)}(y), \\ n(n+1)Q_n^{(0, 0)}(y) &= (y + 2n^2)Q_{n-1}^{(0, 0)}(y) - (n-1)nQ_{n-2}^{(0, 0)}(y), \quad n \geq 2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde $Q_0^{(0, 0)}(y) = 1$. Desta forma, temos $\Delta_1(y) = y(y+1)/6 > 0$.

Além disso, podemos escrever a relação (3.13) como

$$\gamma_{n-1}Q_n^{(0, 0)}(y) = [y - \beta_{n-1}]Q_{n-1}^{(0, 0)}(y) - \alpha_{n-1}Q_{n-2}^{(0, 0)}(y), \quad n \geq 2,$$

onde $\gamma_{n-1} = n(n+1)$, $\beta_{n-1} = -2n^2$ e $\alpha_{n-1} = (n-1)n$. Assim,

$$\begin{aligned} \gamma_n \Delta_n(y) &= \gamma_n [Q_n^{(0, 0)}(y)]^2 - \gamma_n Q_{n+1}^{(0, 0)}(y) Q_{n-1}^{(0, 0)}(y) \\ &= \gamma_n [Q_n^{(0, 0)}(y)]^2 - Q_{n-1}^{(0, 0)}(y) [(y - \beta_n)Q_n^{(0, 0)}(y) - \alpha_n Q_{n-1}^{(0, 0)}(y)] \\ &= \gamma_n [Q_n^{(0, 0)}(y)]^2 - (y - \beta_n) Q_{n-1}^{(0, 0)}(y) Q_n^{(0, 0)}(y) + \alpha_n [Q_{n-1}^{(0, 0)}(y)]^2. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \gamma_n \Delta_n(y) &= \gamma_n [Q_n^{(0, 0)}(y)]^2 + \alpha_n [Q_{n-1}^{(0, 0)}(y)]^2 - (\beta_{n-1} - \beta_n) Q_{n-1}^{(0, 0)}(y) Q_n^{(0, 0)}(y) \\ &\quad - (y - \beta_{n-1}) Q_{n-1}^{(0, 0)}(y) Q_n^{(0, 0)}(y), \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

Utilizando novamente a relação de recorrência, obtemos

$$\begin{aligned} \gamma_n \Delta_n(y) &= \gamma_n [Q_n^{(0,0)}(y)]^2 + \alpha_n [Q_{n-1}^{(0,0)}(y)]^2 - (\beta_{n-1} - \beta_n) Q_{n-1}^{(0,0)}(y) Q_n^{(0,0)}(y) \\ &\quad - \gamma_{n-1} [Q_n^{(0,0)}(y)]^2 - \alpha_{n-1} Q_{n-2}^{(0,0)}(y) Q_n^{(0,0)}(y), \end{aligned}$$

para $n \geq 2$. Desta forma,

$$\begin{aligned} \gamma_n \Delta_n(y) &= (\gamma_n - \gamma_{n-1}) [Q_n^{(0,0)}(y)]^2 + (\alpha_n - \alpha_{n-1}) [Q_{n-1}^{(0,0)}(y)]^2 \\ &\quad - (\beta_{n-1} - \beta_n) Q_{n-1}^{(0,0)}(y) Q_n^{(0,0)}(y) + \alpha_{n-1} \Delta_{n-1}(y), \end{aligned}$$

para $n \geq 2$. Então, substituindo os valores das constantes γ_k , α_k e β_k para $k = n, n-1$, temos

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2)\Delta_n(y) &= 2(n+1) [Q_n^{(0,0)}(y)]^2 + 2n [Q_{n-1}^{(0,0)}(y)]^2 \\ &\quad - 2(2n+1) Q_n^{(0,0)}(y) Q_{n-1}^{(0,0)}(y) + (n-1)n\Delta_{n-1}(y), \end{aligned} \quad (3.14)$$

para $n \geq 2$. Claramente, esta expressão pode ser escrita como

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2)\Delta_n(y) &= 2 [Q_n^{(0,0)}(y) - Q_{n-1}^{(0,0)}(y)] [(n+1)Q_n^{(0,0)}(y) - nQ_{n-1}^{(0,0)}(y)] \\ &\quad + (n-1)n\Delta_{n-1}(y), \end{aligned}$$

para $n \geq 2$. Uma vez que $Q_n^{(0,0)}(y) > 0$ e $1 > Q_n^{(0,0)}(y)/Q_{n+1}^{(0,0)}(y)$ para $n > 1$, a positividade $\Delta_n(y)$ para $n \geq 1$ segue imediatamente.

Agora, para mostrar a segunda desigualdade do teorema, consideremos a fórmula

$$\beta_{n+1}^{(in,0,\kappa^{(in,0)}/y)} = \frac{n+1}{in+n+1} \beta_{n+1}^{(0,0,\kappa^{(0,0)}/y)}, \quad n \geq 1,$$

que segue de (3.6). Como ambos $n/|in+n|$ e $|\beta_n^{(0,0,\kappa^{(0,0)}/y)}|$ são funções crescentes de n , a segunda desigualdade é confirmada. ■

Os polinômios “*continuous dual Hahn*” mônicos associados $\{h_n(x; 0)\}_{n \geq 0}$ são tais que

$$\begin{aligned} h_n(x; 0) &= (-1)^n S_n \left(x; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \\ &= (-1)^n \widehat{Q}_n^{(0,0)} \left(-x - \frac{1}{4} \right), \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

De (3.12) também temos

$$\beta_{n+1}^{(0,0,\kappa^{(0,0)}/y)} - \beta_n^{(0,0,\kappa^{(0,0)}/y)} = \frac{n(n+1) [\widehat{Q}_{n-1}^{(0,0)}(y)]^2 - (n-1)n\widehat{Q}_n^{(0,0)}(y)\widehat{Q}_{n-2}^{(0,0)}(y)}{\widehat{Q}_n^{(0,0)}(y)\widehat{Q}_{n-1}^{(0,0)}(y)} > 0,$$

para $n \geq 2$. Assim, usando (3.15) segue que a seguinte desigualdade dos determinantes de Turán vale para os polinômios “*continuous dual Hahn*” especiais $\{h_n(x; 0)\}_{n \geq 0}$:

$$h_{n-1}^2(x; 0) - \frac{n-1}{n+1} h_{n-2}(x; 0) h_n(x; 0) > 0,$$

para $x < -1/4$ e $n \geq 2$.

4 Polinômios Ortogonais de Sobolev

Com base na representação simples dos polinômios ortogonais de Sobolev mônicos, $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$, dada pela expressão (2.37), consequência da propriedade de coerência de segundo tipo, e juntamente com os resultados obtidos sobre os coeficientes de conexão $\beta_n^{(b,\epsilon,s)}$, neste capítulo, caracterizamos o comportamento assintótico dos polinômios ortogonais de Sobolev $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$ com respeito aos parâmetros s, η e λ . E, apresentamos um estudo sobre o comportamento dos zeros de tais polinômio e de sua derivada.

Os resultados deste capítulo também compõem os objetivos propostos na tese de doutorado, e foram publicados em [5].

4.1 Resultados assintóticos

Com relação às propriedades dos polinômios ortogonais de Sobolev $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$ associados ao produto interno

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{S}^{(b,\epsilon,s)}} = \langle f, g \rangle_{\mu^{(b,\epsilon)}} + s \langle f', g' \rangle_{\mu^{(b+1)}},$$

recordamos o seguinte comportamento assintótico já provado em [22]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}(z)}{\Phi_n^{(b,\epsilon)}(z)} = \frac{z}{z-1},$$

em todo subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Aqui, $\overline{\mathbb{D}}$ representa o disco unitário fechado e, $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ é o complementar do disco unitário fechado.

No teorema a seguir, abordamos o comportamento assintótico de $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$ com respeito ao parâmetro s .

Teorema 4.1. *Para qualquer $n \geq 1$,*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \Psi_n^{(b,\epsilon,s)}(z) = \frac{(\lambda+1)_n}{(b+1)_n} \left[R_n^{(b)}(z) - 2^n \prod_{j=1}^n (1 - m_j^{(\lambda,\epsilon)}) \right],$$

onde $R_n^{(b)}$ e $m_n^{(\lambda,\epsilon)}$ são como em (2.28) e (2.30).

Demonstração: Das expressões hipergeométricas para $\Phi_{n-1}^{(b+1)}(z)$ e $R_n^{(b)}(z)$ dadas nos Exemplos 2.18 e 2.19, observe que

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{(\lambda+1)_n}{(b+1)_n} R_n^{(b)}(z) \right] = n \Phi_{n-1}^{(b+1)}(z), \quad n \geq 1.$$

Com isto, e considerando os polinômios ortogonais que seguem do produto interno limite $\lim_{s \rightarrow \infty} s^{-1} \langle f, g \rangle_{\mathcal{S}^{(b, \epsilon, s)}} = \langle f', g' \rangle_{\mu^{(b+1)}}$, obtemos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \Psi_n^{(b, \epsilon, s)}(z) = \Psi_n^{(b, \epsilon, \infty)}(z) = \frac{(\lambda + 1)_n}{(b + 1)_n} R_n^{(b)}(z) + \rho_n^{(b, \epsilon)}, \quad n \geq 1.$$

Os valores das constantes $\rho_n^{(b, \epsilon)}$, $n \geq 1$, serão determinados.

Por outro lado, de (2.37), temos

$$\Psi_n^{(b, \epsilon, \infty)}(z) - \beta_n^{(b, \epsilon, \infty)} \Psi_{n-1}^{(b, \epsilon, \infty)}(z) = \Phi_n^{(b, \epsilon)}(z), \quad n \geq 1,$$

onde $\beta_1^{(b, \epsilon, \infty)} = 0$ e os valores de $\beta_n^{(b, \epsilon, \infty)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \beta_n^{(b, \epsilon, s)}$, $n \geq 2$, são dados no Teorema 3.7.

Combinando as duas fórmulas anteriores, obtemos

$$\frac{(\lambda + 1)}{(b + 1)} R_1^{(b)}(z) + \rho_1^{(b, \epsilon)} = \Phi_1^{(b, \epsilon)}(z) \quad \text{e}$$

$$\left[\frac{(\lambda + 1)_n}{(b + 1)_n} R_n^{(b)}(z) - \beta_n^{(b, \epsilon, \infty)} \frac{(\lambda + 1)_{n-1}}{(b + 1)_{n-1}} R_{n-1}^{(b)}(z) \right] + [\rho_n^{(b, \epsilon)} - \beta_n^{(b, \epsilon, \infty)} \rho_{n-1}^{(b, \epsilon)}] = \Phi_n^{(b, \epsilon)}(z),$$

para $n \geq 2$. E, comparando as equações acima com a expressão para $\Phi_n^{(b, \epsilon)}(z)$ dada por (2.28):

$$\Phi_n^{(b, \epsilon)}(z) = \frac{(\lambda + 1)_n}{(b + 1)_n} \left[R_n^{(b)}(z) - 2[1 - m_n^{(\lambda, \epsilon)}] R_{n-1}^{(b)}(z) \right], \quad n \geq 1,$$

imediatamente segue que

$$\rho_1^{(b, \epsilon)} = -2(1 - m_1^{(\lambda, \epsilon)}) \frac{\lambda + 1}{b + 1} \quad \text{e} \quad \rho_n^{(b, \epsilon)} = \beta_n^{(b, \epsilon, \infty)} \rho_{n-1}^{(b, \epsilon)}, \quad n \geq 2,$$

sendo $\beta_n^{(b, \epsilon, \infty)}$ conforme a parte A do Teorema 3.7. Ademais, recursivamente temos

$$\rho_n^{(b, \epsilon)} = -2^n \frac{(\lambda + 1)_n}{(b + 1)_n} \prod_{j=1}^n (1 - m_j^{(\lambda, \epsilon)}).$$

Isto completa a prova do teorema. ■

O polinômio mônico $\Psi_n^{(b, \epsilon, \infty)}$ avaliado no ponto $z = 0$, fornece o valor de seu termo independente. Assim, pelo Teorema 4.1 obtemos

$$\Psi_n^{(b, \epsilon, \infty)}(0) = \frac{(\lambda + 1)_n}{(b + 1)_n} \left[R_n^{(b)}(0) - 2^n \prod_{j=1}^n (1 - m_j^{(\lambda, \epsilon)}) \right].$$

De acordo com a expressão em termos da função hipergeométrica dada para os polinômios $R_n^{(b)}$, no Exemplo 2.19, temos

$$R_n^{(b)}(0) = \frac{(2\lambda + 2)_n}{(\lambda + 1)_n} {}_2F_1(-n, b + 1, b + \bar{b} + 1; 1),$$

e, aplicando o Teorema 2.9 de Chu-Vandermonde à esta expressão hipergeométrica, obtemos $R_n^{(b)}(0) = \frac{(\bar{b} + 1)_n}{(\lambda + 1)_n}$ e, conseqüentemente, segue que

$$\Psi_n^{(b, \epsilon, \infty)}(0) = \frac{(\lambda + 1)_n}{(b + 1)_n} \left[\frac{(\bar{b} + 1)_n}{(\lambda + 1)_n} - 2^n \prod_{j=1}^n (1 - m_j^{(\lambda, \epsilon)}) \right].$$

Como os polinômios $\Psi_n^{(b,\epsilon,\infty)}$ são mônicos, a expressão acima fornece informações sobre o produto dos zeros de $\Psi_n^{(b,\epsilon,\infty)}$.

Observe que quando $\epsilon = 0$ no Teorema 4.1, e recordando que $m_j^{(\lambda,0)} = M_j^{(\lambda)}$, temos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \Psi_n^{(b,0,s)}(z) = \frac{(\lambda + 1)_n}{(b + 1)_n} \left[R_n^{(b)}(z) - 2^n \prod_{j=1}^n (1 - M_j^{(\lambda)}) \right], \quad n \geq 1.$$

Assim, de (2.31), segue que

$$\Psi_n^{(b,0,\infty)}(z) = \frac{(\lambda + 1)_n}{(b + 1)_n} \left[R_n^{(b)}(z) - \frac{(1)_n}{(\lambda + 1)_n} \right], \quad n \geq 1.$$

Avaliando o polinômio $\Psi_n^{(b,0,\infty)}$ no ponto $z = 0$, temos

$$\Psi_n^{(b,0,\infty)}(0) = \frac{(\lambda + 1)_n}{(b + 1)_n} \left[\frac{(\bar{b} + 1)_n}{(\lambda + 1)_n} - \frac{(1)_n}{(\lambda + 1)_n} \right], \quad n \geq 1.$$

E, em particular,

$$\Psi_n^{(\lambda,0,\infty)}(0) = 1 - \frac{(1)_n}{(\lambda + 1)_n} \quad n \geq 1. \quad (4.1)$$

Novamente, as expressões acima fornecem informações sobre o produto dos zeros de $\Psi_n^{(b,0,\infty)}(z)$ e $\Psi_n^{(\lambda,0,\infty)}(z)$, respectivamente.

No resultado a seguir, apresentamos o comportamento assintótico de $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$ com relação ao parâmetro η .

Teorema 4.2. *Seja $b = \lambda + i\eta$. Para qualquer $n \geq 1$,*

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \Psi_n^{(b,\epsilon,s)}(z) = (z - 1)^n.$$

Demonstração: De (2.37):

$$\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}(z) - \beta_n^{(b,\epsilon,s)} \Psi_{n-1}^{(b,\epsilon,s)}(z) = \Phi_n^{(b,\epsilon)}(z), \quad n \geq 1,$$

e da parte B do Teorema 3.7, segue que $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \Psi_n^{(b,\epsilon,s)}(z)$ existe e satisfaz

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \Psi_n^{(b,\epsilon,s)}(z) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \Phi_n^{(b,\epsilon)}(z).$$

Assim, substituindo a expressão do polinômio $\Phi_n^{(b,\epsilon)}$ dada em (2.28), temos

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \Psi_n^{(b,\epsilon,s)}(z) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{(\lambda + 1)_n}{(b + 1)_n} \left[R_n^{(b)}(z) - 2[1 - m_n^{(\lambda,\epsilon)}] R_{n-1}^{(b)}(z) \right].$$

Deste modo, segue que

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{(\lambda + 1)_n}{(b + 1)_n} R_n^{(b)}(z) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{(\lambda + 1)_n}{(b + 1)_n} \frac{(2\lambda + 2)_n}{(\lambda + 1)_n} \sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j (b + 1)_j}{(2\lambda + 2)_j j!} (1 - z)^j = (z - 1)^n$$

e

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{(\lambda + 1)_n}{(b + 1)_n} 2[1 - m_n^{(\lambda,\epsilon)}] R_{n-1}^{(b)}(z) = 0.$$

Portanto, o resultado do teorema segue. ■

O próximo teorema nos fornece o comportamento assintótico de $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$ com relação ao parâmetro λ .

Teorema 4.3. *Seja $b = \lambda + i\eta$. Para qualquer $n \geq 1$,*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Psi_n^{(b,0,s)}(z) = (z+1)^n \quad e$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Psi_n^{(b,\epsilon,s)}(z) = (z-1)(z+1)^{n-1} \quad \text{se } 0 < \epsilon < 1.$$

Demonstração: De (2.37):

$$\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}(z) - \beta_n^{(b,\epsilon,s)} \Psi_{n-1}^{(b,\epsilon,s)}(z) = \Phi_n^{(b,\epsilon)}(z), \quad n \geq 1,$$

e da parte C do Teorema 3.7, vemos que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Psi_n^{(b,\epsilon,s)}(z)$ existe e satisfaz

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Psi_n^{(b,\epsilon,s)}(z) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Phi_n^{(b,\epsilon)}(z).$$

Assim, substituindo a expressão do polinômio $\Phi_n^{(b,\epsilon)}$ dada em (2.28), obtemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Psi_n^{(b,\epsilon,s)}(z) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{(\lambda+1)_n}{(b+1)_n} \left[R_n^{(b)}(z) - 2[1 - m_n^{(\lambda,\epsilon)}] R_{n-1}^{(b)}(z) \right].$$

Note que

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{(\lambda+1)_n}{(b+1)_n} R_n^{(b)}(z) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{(\lambda+1)_n (2\lambda+2)_n}{(b+1)_n (\lambda+1)_n} \sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j (b+1)_j}{(2\lambda+2)_j j!} (1-z)^j \\ &= 2^n \sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j}{2^j j!} (1-z)^j \\ &= 2^n \sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j}{j!} \left(1 - \frac{z+1}{2}\right)^j. \end{aligned}$$

E observando que

$$\Phi_n^{(0)}(z) = {}_2F_1(-n, 1; 1; 1-z) = \sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j}{j!} (1-z)^j = z^n,$$

segue que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{(\lambda+1)_n}{(b+1)_n} R_n^{(b)}(z) = (z+1)^n,$$

e, conseqüentemente, temos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{(\lambda+1)_n}{(b+1)_n} 2R_{n-1}^{(b)}(z) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{(\lambda+n)(\lambda+1)_{n-1}}{(b+n)(b+1)_{n-1}} 2R_{n-1}^{(b)}(z) = 2(z+1)^{n-1}.$$

Além disso, como observado na prova da parte C do Teorema 3.7, temos que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} m_n^{(\lambda,0)} = 1$ e se $\epsilon \neq 0$ então $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} m_n^{(\lambda,\epsilon)} = 0$. Daí, segue que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} [1 - m_n^{(\lambda,0)}] = 0$ e se $\epsilon \neq 0$ então $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} [1 - m_n^{(\lambda,\epsilon)}] = 1$.

Portanto, quando $\epsilon = 0$ temos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Psi_n^{(b,0,s)}(z) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{(\lambda+1)_n}{(b+1)_n} R_n^{(b)}(z) = (z+1)^n.$$

E, quando $0 < \epsilon < 1$ segue que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Psi_n^{(b,\epsilon,s)}(z) = (z+1)^n - 2(z+1)^{n-1} = (z-1)(z+1)^{n-1}.$$

■

4.2 Localização dos zeros

É bem conhecido que os zeros dos polinômios ortogonais no círculo unitário estão dentro do disco unitário aberto \mathbb{D} . Consequentemente, os zeros dos polinômios $\Phi_n^{(b)}$ e $\Phi_n^{(b,\epsilon)}$ estão dentro de \mathbb{D} . Uma pergunta natural que surge é: será que essa propriedade se estende aos polinômios ortogonais de Sobolev no círculo unitário $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$? No caso $b = 0$ e $\epsilon = 0$ a resposta é sim, os zeros de $\Psi_n^{(0,0,s)}$ estão dentro do círculo unitário e também obtemos o seguinte resultado.

Teorema 4.4. *Seja $n \geq 1$. Então $z = 0$ é um zero de $\Psi_{n+1}^{(0,0,s)}$ e os zeros restantes são tais que:*

A. *Eles estão dentro da região anelar dada por $\{\beta_2^{(0,0,s)} \leq |z| \leq \beta_{n+1}^{(0,0,s)} < 1\}$;*

B. *Eles estão fora da região parabólica $\{\Im(z)^2 \leq 4\tau[\tau + \Re(z)], \Re(z) > -\tau\}$.*

Aqui, $\tau = \min\{\beta_{k+1}^{(0,0,s)} - \beta_k^{(0,0,s)} : k = 1, 2, \dots, n\}$.

Demonstração: Como $\Phi_n^{(0,0)}(z) = \Phi_n^{(0)}(z) = z^n$, $n \geq 0$, temos de (2.37),

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1}^{(0,0,s)}(z) &= z^{n+1} + \beta_{n+1}^{(0,0,s)} \Psi_n^{(0,0,s)}(z) = z^{n+1} + \beta_{n+1}^{(0,0,s)} [z^n + \beta_n \Psi_{n-1}^{(0,0,s)}(z)] = \dots \\ &= z^{n+1} + \beta_{n+1}^{(0,0,s)} z^n + \beta_{n+1}^{(0,0,s)} \beta_n^{(0,0,s)} z^{n-1} + \dots + \beta_{n+1}^{(0,0,s)} \beta_n^{(0,0,s)} \dots \beta_2^{(0,0,s)} z. \end{aligned}$$

Desta forma, podemos escrever

$$\Psi_{n+1}^{(0,0,s)}(z) = z \sum_{j=0}^n a_{n,j+1}^{(0,0,s)} z^j, \quad n \geq 1,$$

onde $a_{n,n+1}^{(0,0,s)} = 1$ e $a_{n,j}^{(0,0,s)} = \beta_{j+1}^{(0,0,s)} a_{n,j+1}^{(0,0,s)}$, $j = n, n-1, \dots, 1$.

Como $0 < \beta_j^{(0,0,s)} < 1$, $j \geq 2$, temos $a_{n,j}^{(0,0,s)} < a_{n,j+1}^{(0,0,s)}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Portanto, pelo Teorema de Eneström-Kekeya (ver [24, 27]) todos os zeros de $\Psi_{n+1}^{(0,0,s)}$ estão dentro do disco unitário $|z| \leq 1$. Além disso, podemos usar uma extensão deste teorema, atribuída a Eneström (ver [27, p.275]), pela qual os zeros de $\Psi_{n+1}^{(0,0,s)}(z)/z$ estão dentro da região anelar

$$\min_{1 \leq j \leq n} [a_{n,j}^{(0,0,s)} / a_{n,j+1}^{(0,0,s)}] \leq |z| \leq \max_{1 \leq j \leq n} [a_{n,j}^{(0,0,s)} / a_{n,j+1}^{(0,0,s)}],$$

com $\frac{a_{n,j}^{(0,0,s)}}{a_{n,j+1}^{(0,0,s)}} = \beta_{j+1}^{(0,0,s)}$. Pelo Teorema 3.8 temos $\beta_j^{(0,0,s)} < \beta_{j+1}^{(0,0,s)}$, $j \geq 2$ e isto conclui a parte A do teorema.

Para provar a parte B, novamente de (2.37) temos

$$\Psi_{n+1}^{(0,0,s)}(z) - \beta_{n+1}^{(0,0,s)} \Psi_n^{(0,0,s)}(z) = z^{n+1}, \quad n \geq 0,$$

onde $\beta_1^{(0,0,s)} = 0$. Assim,

$$\Psi_{n+1}^{(0,0,s)}(z) - \beta_{n+1}^{(0,0,s)} \Psi_n^{(0,0,s)}(z) = z [\Psi_n^{(0,0,s)}(z) - \beta_n^{(0,0,s)} \Psi_{n-1}^{(0,0,s)}(z)], \quad n \geq 1,$$

e os polinômios mônicos $r_n(z) = z^{-1} \Psi_{n+1}^{(0,0,s)}(z)$ satisfazem a relação de recorrência de três termos

$$r_n(z) = (z + \beta_{n+1}^{(0,0,s)}) r_{n-1}(z) - \beta_n^{(0,0,s)} z r_{n-2}(z), \quad n \geq 2,$$

com $r_0(z) = 1$ e $r_1(z) = z + \beta_2^{(0,0,s)}$. Deste modo, aplicando [29, Teorema 2.1] provamos a parte B do teorema. Aqui, é importante que $\tau > 0$, que é garantido por $\beta_j^{(0,0,s)} < \beta_{j+1}^{(0,0,s)}$, $j \geq 2$. ■

A seguir, apresentamos um exemplo numérico ilustrando as regiões determinadas no Teorema 4.4.

Exemplo 4.5. Os gráficos na Figura 4.1 apresentam os zeros do polinômio de Sobolev $\Psi_{13}^{(0,0,s)}$, para três valores distintos do parâmetro s , junto com os anéis e regiões parabólicas correspondentes. Observe que os zeros diferentes de $z = 0$ permanecem dentro das regiões esperadas no Teorema 4.4.

Os números que correspondem aos anéis e regiões parabólicas na Figura 4.1 são os seguintes:

- $\beta_2^{(0,0,0.4)} \approx 0.2857$, $\beta_{13}^{(0,0,0.4)} \approx 0.8664$ e $\tau \approx 0.0092623$ no caso do gráfico (a);
- $\beta_2^{(0,0,3)} \approx 0.7500$, $\beta_{13}^{(0,0,3)} \approx 0.9642$ e $\tau \approx 0.0026010$ no caso do gráfico (b);
- $\beta_2^{(0,0,5)} \approx 0.8333$, $\beta_{13}^{(0,0,5)} \approx 0.9760$ e $\tau \approx 0.0017457$ no caso do gráfico (c).

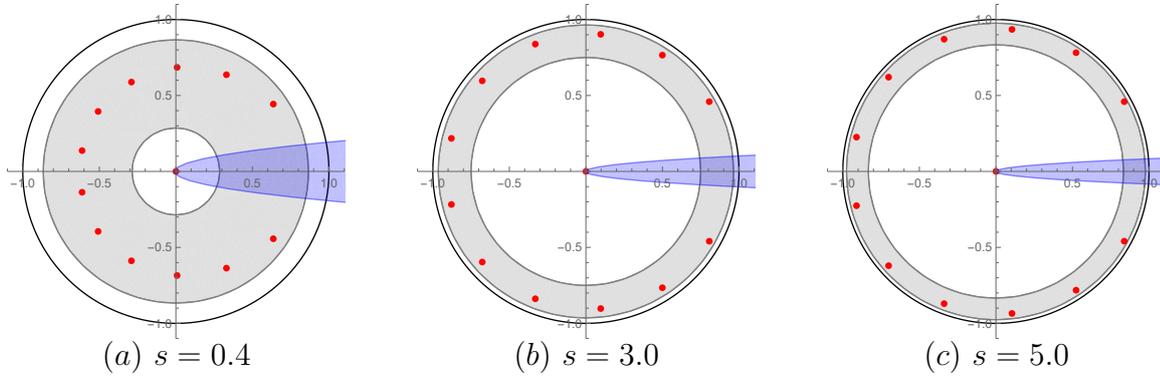


Figura 4.1: Zeros de $\Psi_{13}^{(0,0,s)}$

No caso geral, por meio de experimentos numéricos observamos que $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$ tem zeros fora do disco unitário, como mostra as Figuras 4.2, 4.3 e 4.4.

Os gráficos na Figura 4.2 mostram os zeros de $\Psi_{10}^{(1+i\eta,0.5,1)}$ para três valores distintos do parâmetro η . Nesses gráficos, muitos dos zeros estão fora do \mathbb{D} . No entanto, como esperado pelo Teorema 4.2, os zeros tendem ao ponto $z = 1$ quando η é grande.

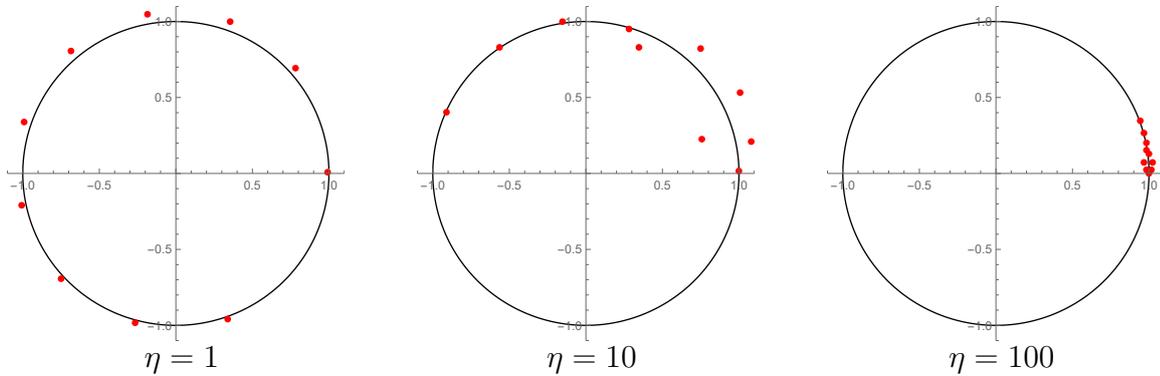


Figura 4.2: Zeros de $\Psi_{10}^{(1+i\eta,0.5,1)}$

A Figura 4.3 apresenta informações sobre os zeros de $\Psi_{10}^{(\lambda+2i,0,3)}$ para três valores distintos do parâmetro λ , com $\epsilon = 0$. Novamente, muitos dos zeros estão fora do disco

unitário aberto. Entretanto, esses gráficos também indicam que todos os zeros se aproximam do ponto $z = -1$ a medida que λ cresce. Este comportamento pode ser previsto pelo Teorema 4.3.

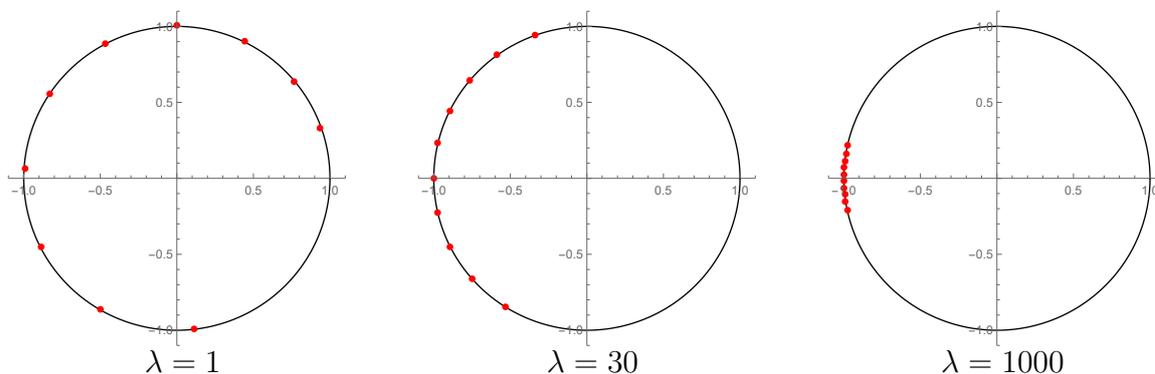


Figura 4.3: Zeros de $\Psi_{10}^{(\lambda+2i, 0, 3)}$

Os gráficos na Figura 4.4 apresentam os zeros de $\Psi_{10}^{(\lambda+i, 0.2, 1)}$ para três valores distintos de λ , com $\epsilon \neq 0$. Assim, como se espera do Teorema 4.3, um dos zeros se move em direção ao ponto $z = 1$ e os zeros restantes se movem em direção a $z = -1$ quando λ é grande. Nestes gráficos, também observamos que o polinômio $\Psi_{10}^{(\lambda+2i, 0, 3)}$ tem zeros localizados fora do disco unitário.

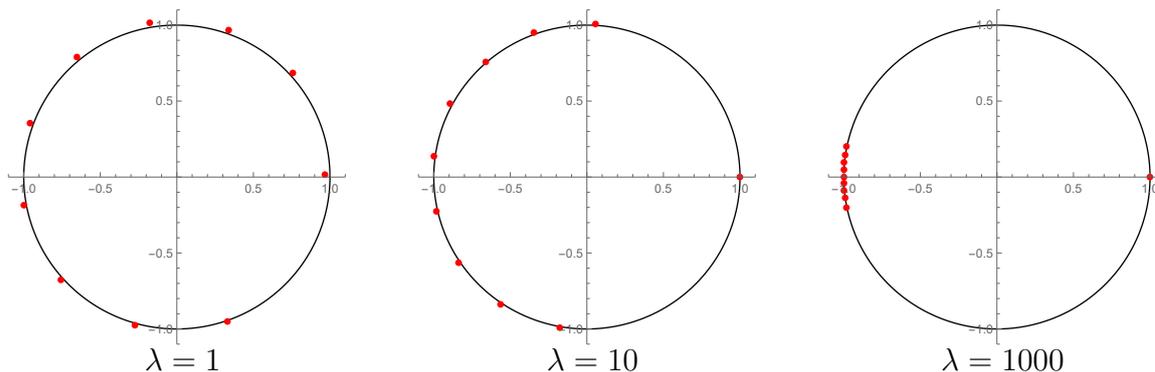


Figura 4.4: Zeros de $\Psi_{10}^{(\lambda+i, 0.2, 1)}$

Embora as Figuras 4.2, 4.3 e 4.4, evidenciam certo comportamento dos zeros do polinômio de Sobolev $\Psi_n^{(b, \epsilon, s)}$ fora do disco unitário, simulações numéricas indicaram que para determinados valores dos parâmetros b, ϵ e s , os zeros de tais polinômios permanecem dentro do disco unitário.

A fim de encontrar condições suficientes sob as quais os zeros de $\Psi_n^{(b, \epsilon, s)}$ ficam dentro do disco unitário \mathbb{D} , consideremos primeiramente, o seguinte lema. Resultados que apresentam condições desse tipo são bem conhecidos na literatura (ver, por exemplo, [28]).

Lema 4.6. *Seja $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ uma sequência de polinômios ortogonais com respeito a alguma medida positiva no círculo unitário e seja $\alpha_{n-1} = -\overline{\Phi_n(0)}$ os coeficientes de Verblunsky associados.*

Para $n \geq 1$, seja o polinômio Ψ_n de grau exato n dado por

$$\Psi_n(z) = \Phi_n(z) + \sum_{j=1}^n \gamma_{n-j} \Phi_{n-j}(z).$$

Então, uma condição suficiente para os zeros de Ψ_n estarem dentro do \mathbb{D} é $\Delta_n < 1$, onde

$$\Delta_n = \sum_{j=1}^n \left[|\gamma_{n-j}| \prod_{k=1}^j \frac{1}{1 - |\alpha_{n-k}|} \right]. \quad (4.2)$$

Demonstração: Observe que

$$\Psi_n^*(z) = z^n \overline{\Psi_n(1/\bar{z})} = \sum_{j=0}^n \bar{\gamma}_{n-j} z^j \Phi_{n-j}^*(z),$$

onde $\bar{\gamma}_n = 1$. Na literatura é conhecido que os zeros de Φ_n^* , para todo n , estão fora do disco unitário. Conseqüentemente, se $\zeta \in \bar{\mathbb{D}}$, isto é, $|\zeta| \leq 1$, é um zero de Ψ_n^* então

$$0 = \Psi_n^*(\zeta) = \sum_{j=0}^n \bar{\gamma}_{n-j} \zeta^j \Phi_{n-j}^*(\zeta) = \bar{\gamma}_n \Phi_n^*(\zeta) + \sum_{j=1}^n \bar{\gamma}_{n-j} \zeta^j \Phi_{n-j}^*(\zeta).$$

Assim, usando a desigualdade triangular e $|\zeta| \leq 1$, obtemos

$$1 = \left| \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\gamma}_{n-j} \zeta^j \Phi_{n-j}^*(\zeta)}{\bar{\gamma}_n \Phi_n^*(\zeta)} \right| \leq \sum_{j=1}^n \frac{|\bar{\gamma}_{n-j}| |\zeta|^j |\Phi_{n-j}^*(\zeta)|}{|\bar{\gamma}_n| |\Phi_n^*(\zeta)|} \leq \sum_{j=1}^n \frac{|\bar{\gamma}_{n-j}| |\Phi_{n-j}^*(\zeta)|}{|\bar{\gamma}_n| |\Phi_n^*(\zeta)|}.$$

Aplicando o princípio do módulo máximo, temos

$$1 \leq \sum_{j=1}^n \frac{|\bar{\gamma}_{n-j}|}{|\bar{\gamma}_n|} \max_{|z|=1} \left[\frac{|\Phi_{n-j}^*(z)|}{|\Phi_n^*(z)|} \right] = \sum_{j=1}^n \frac{|\bar{\gamma}_{n-j}|}{|\bar{\gamma}_n|} \max_{|z|=1} \left[\frac{|\Phi_{n-1}^*(z)| |\Phi_{n-2}^*(z)| \dots |\Phi_{n-j}^*(z)|}{|\Phi_n^*(z)| |\Phi_{n-1}^*(z)| \dots |\Phi_{n-j+1}^*(z)|} \right].$$

Além disso, pela relação de recorrência dos polinômios ortogonais sobre o círculo unitário temos

$$\max_{|z|=1} \frac{|\Phi_{n-k}^*(z)|}{|\Phi_{n+1-k}^*(z)|} = \frac{1}{1 - |\alpha_{n-k}|}.$$

Conseqüentemente,

$$1 \leq \sum_{j=1}^n \frac{|\bar{\gamma}_{n-j}|}{|\bar{\gamma}_n|} \frac{1}{1 - |\alpha_{n-1}|} \frac{1}{1 - |\alpha_{n-2}|} \dots \frac{1}{1 - |\alpha_{n-j}|} = \sum_{j=1}^n \frac{|\bar{\gamma}_{n-j}|}{|\bar{\gamma}_n|} \prod_{k=1}^j \frac{1}{1 - |\alpha_{n-k}|} = \Delta_n.$$

Isso significa que se $\zeta \in \bar{\mathbb{D}}$ então $\Delta_n \geq 1$.

Assim, se a condição no Lema for mantida, então Ψ_n^* não tem zeros em $\bar{\mathbb{D}}$. Isto é, todos os zeros de Ψ_n estão dentro de \mathbb{D} . ■

Agora, podemos usar este Lema para obter informações sobre os zeros de $\Psi_{n+1}^{(b,\epsilon,s)}$. Temos de (2.37),

$$\Psi_{n+1}^{(b,\epsilon,s)}(z) = \Phi_{n+1}^{(b,\epsilon)}(z) + \sum_{j=1}^n a_{n,n-j+1}^{(b,\epsilon,s)} \Phi_{n-j+1}^{(b,\epsilon)}(z), \quad n \geq 1,$$

onde $a_{n,n-j+1}^{(b,\epsilon,s)} = \beta_{n-j+2}^{(b,\epsilon,s)} a_{n,n-j+2}^{(b,\epsilon,s)}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Desse modo, usando o Lema 4.6 obtemos

$$\Delta_{n+1}^{(b,\epsilon,s)} = \sum_{j=1}^{n+1} \left[|a_{n-j+1}^{(b,\epsilon,s)}| \prod_{k=1}^j \frac{1}{1 - |\alpha_{n-k+1}^{(b,\epsilon)}|} \right].$$

Observe que podemos escrever os coeficientes $a_{n-j+1}^{(b,\epsilon,s)}$, $j = 1, 2, \dots, n$, da seguinte forma

$$\begin{aligned} a_{n-j+1}^{(b,\epsilon,s)} &= a_{n-(j-1)}^{(b,\epsilon,s)} = \beta_{n-(j-2)}^{(b,\epsilon,s)} a_{n,n-(j-2)}^{(b,\epsilon,s)} = \beta_{n-(j-2)}^{(b,\epsilon,s)} \beta_{n-(j-3)}^{(b,\epsilon,s)} a_{n,n-(j-3)}^{(b,\epsilon,s)} \\ &= \dots = \beta_{n-(j-2)}^{(b,\epsilon,s)} \beta_{n-(j-3)}^{(b,\epsilon,s)} \dots \beta_{n-(n-3)}^{(b,\epsilon,s)} \beta_{n-(n-2)}^{(b,\epsilon,s)} = \prod_{k=0}^{j-1} \beta_{n-k+1}^{(b,\epsilon,s)}. \end{aligned}$$

Assim, segue que

$$\Delta_{n+1}^{(b,\epsilon,s)} = \sum_{j=1}^{n+1} \left[\prod_{k=0}^{j-1} \left| \beta_{n-k+1}^{(b,\epsilon,s)} \right| \prod_{k=0}^{j-1} \frac{1}{1 - |\alpha_{n-k}^{(b,\epsilon)}|} \right] = \sum_{j=1}^n \left[\prod_{k=0}^{j-1} \frac{|\beta_{n-k+1}^{(b,\epsilon,s)}|}{1 - |\alpha_{n-k}^{(b,\epsilon)}|} \right].$$

Desta forma, usando o Lema 4.6 podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 4.7. *Sejam $\alpha_{n-1}^{(b,\epsilon)} = -\overline{\Phi_n^{(b,\epsilon)}}(0)$, $n \geq 1$, e*

$$\Delta_{n+1}^{(b,\epsilon,s)} = \sum_{j=1}^n \prod_{k=0}^{j-1} \frac{|\beta_{n+1-k}^{(b,\epsilon,s)}|}{1 - |\alpha_{n-k}^{(b,\epsilon)}|}, \quad n \geq 1.$$

Para qualquer $n \geq 1$, se $\Delta_{n+1}^{(b,\epsilon,s)} < 1$ então os zeros de $\Psi_{n+1}^{(b,\epsilon,s)}$ estão dentro do \mathbb{D} .

Agora, vamos analisar os termos de $\Delta_{n+1}^{(b,\epsilon,s)}$ dado no Teorema 4.7, para determinar quando a condição $\Delta_{n+1}^{(b,\epsilon,s)} < 1$ é satisfeita.

Observe que dos coeficientes de Verblunsky $\alpha_{n-1}^{(b,\epsilon)} = -\overline{\Phi_n^{(b,\epsilon)}}(0)$, associados a sequência de polinômios ortogonais mônicos no círculo unitário $\{\Phi_n^{(b,\epsilon)}\}_{n \geq 0}$, e de (2.28), podemos escrever

$$-\overline{\alpha_{n-1}^{(b,\epsilon)}} = \Phi_n^{(b,\epsilon)}(0) = \frac{(\lambda + 1)_n}{(b + 1)_n} \left[R_n^{(b)}(0) - 2[1 - m_n^{(\lambda,\epsilon)}] R_{n-1}^{(b)}(0) \right], \quad n \geq 1.$$

Aplicando o Teorema 2.9 de Chu-Vandermonde na expressão de $R_n^{(b)}$ dada em (2.19) determinamos uma expressão para $R_n^{(b)}(0)$, como segue

$$R_n^{(b)}(0) = \frac{(2\lambda + 2)_n}{(\lambda + 1)_n} {}_2F_1(-n, b + 1; b + \bar{b} + 2; 1) = \frac{(2\lambda + 2)_n}{(\lambda + 1)_n} \frac{(2\lambda + 2 - b - 1)_n}{(2\lambda + 2)_n} = \frac{(\bar{b} + 1)_n}{(\lambda + 1)_n}.$$

Deste modo, temos que

$$-\overline{\alpha_{n-1}^{(b,\epsilon)}} = \frac{(\bar{b} + 1)_n}{(b + 1)_n} \left[1 - 2[1 - m_n^{(\lambda,\epsilon)}] \frac{\lambda + n}{\bar{b} + n} \right],$$

para $n \geq 1$. Assim,

$$|\alpha_{n-1}^{(b,\epsilon)}| < \left| 1 - \frac{\lambda + n}{\bar{b} + n} \right| + \left| [1 - 2m_n^{(\lambda,\epsilon)}] \frac{\lambda + n}{\bar{b} + n} \right|, \quad n \geq 1.$$

Contudo, de (2.32), ou seja, de $\ell_n^{(\lambda)} < m_n^{(\lambda,\epsilon)} < M_n^{(\lambda)}$ para $\epsilon \neq 0$ segue que

$$\frac{-\lambda}{\lambda + n} = 1 - 2M_n^{(\lambda)} < 1 - 2m_n^{(\lambda,\epsilon)} < 1 - 2\ell_n^{(\lambda)} = \frac{\lambda + 1}{\lambda + n}, \quad n \geq 1.$$

Considerando $\lambda > -1/2$, temos $|1 - 2m_n^{(\lambda, \epsilon)}| < (\lambda + 1)/(\lambda + n)$, $n \geq 1$. Consequentemente,

$$|\alpha_{n-1}^{(b, \epsilon)}| < \left| 1 - \frac{\lambda + n}{\bar{b} + n} \right| + \left| [1 - 2m_n^{(\lambda, \epsilon)}] \frac{\lambda + n}{\bar{b} + n} \right| < \frac{|-i\eta|}{|\bar{b} + n|} + \frac{\lambda + 1}{|\bar{b} + n|} = \frac{|\eta| + \lambda + 1}{|b + n|}.$$

Portanto,

$$|\alpha_{n-1}^{(b, \epsilon)}| < \frac{|\eta| + \lambda + 1}{|b + n|} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - |\alpha_{n-1}^{(b, \epsilon)}|] = 0.$$

Além disso, como pode-se observar dos Teoremas 3.6 e 3.7, embora $|\beta_{n+1-k}^{(b, \epsilon, s)}|$ seja uma função crescente de s , seus valores ficam mais próximos de zero quando s é pequeno. Portanto, para pequenos valores de s , a condição $\Delta_{n+1}^{(b, \epsilon, s)} < 1$ no Teorema 4.7 é satisfeita, então podemos afirmar que para qualquer $n \geq 1$, é possível encontrar \hat{s} suficientemente pequeno tal que para qualquer $s < \hat{s}$ todos os zeros de $\Psi_{n+1}^{(b, \epsilon, s)}$ estão dentro \mathbb{D} . Esta afirmação também pode ser justificada por continuidade, visto que os zeros de $\Psi_{n+1}^{(b, \epsilon, 0)} = \Phi_{n+1}^{(b, \epsilon)}$ estão dentro \mathbb{D} .

A seguir, apresentamos um exemplo numérico relacionado a condição estabelecida no Teorema 4.7.

Exemplo 4.8. Os gráficos na Figura 4.5, apresentam os zeros de $\Psi_9^{(0.7+i0.3, 0.1, s)}$, para três valores distintos do parâmetro s . Os valores atribuídos a s , e as correspondentes constantes $\Delta_9^{(0.7+i0.3, 0.1, s)}$ do Teorema 4.7 são os seguintes:

- $s = 0.045$ e $\Delta_9^{(0.7+i0.3, 0.1, s)} = 0.9878331 \dots < 1$ no caso do gráfico (a);
- $s = 0.6$ e $\Delta_9^{(0.7+i0.3, 0.1, s)} = 6.0288710 \dots > 1$ no caso do gráfico (b);
- $s = 20$ e $\Delta_9^{(0.7+i0.3, 0.1, s)} = 34.1270740 \dots > 1$ no caso do gráfico (c).

No gráfico (a) da Figura 4.5, observe que a condição do Teorema 4.7 é satisfeita e como, já esperado neste resultado, os zeros de $\Psi_9^{(0.7+i0.3, 0.1, s)}$ estão dentro do \mathbb{D} . Com respeito ao gráfico (c) da Figura 4.5, note que a condição do Teorema 4.7 não é satisfeita e alguns zeros de $\Psi_9^{(0.7+i0.3, 0.1, s)}$ estão fora do \mathbb{D} . Entretanto, com relação ao gráfico (b) na Figura 4.5, a condição do Teorema 4.7 não é satisfeita, porém todos os zeros de $\Psi_9^{(0.7+i0.3, 0.1, s)}$ estão dentro do \mathbb{D} .

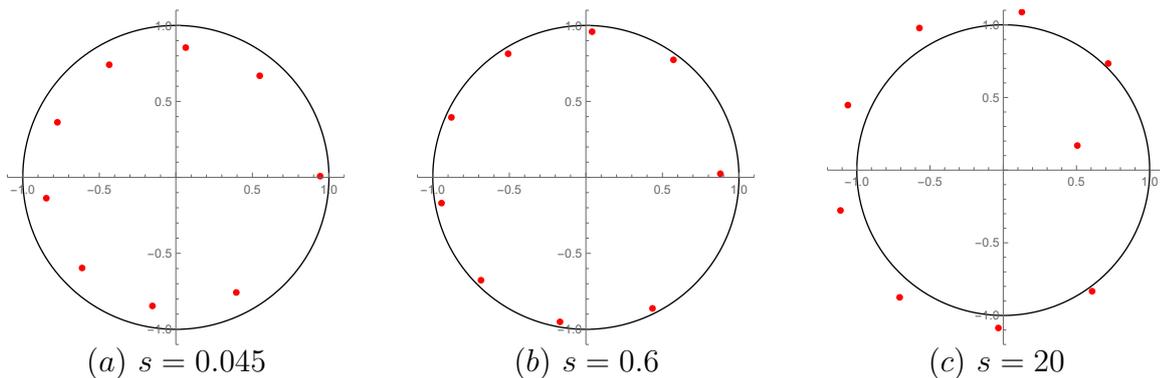


Figura 4.5: Zeros de $\Psi_9^{(0.7+i0.3, 0.1, s)}$

O exemplo apresentado na Figura 4.5 e outras simulações numéricas realizadas indicam que, infelizmente, o valor de \hat{s} obtido desta forma não é o ideal. Contudo, deste estudo observamos que existem relações entre os parâmetros n , λ , η , ϵ e s que garantem que os zeros de $\Psi_n^{(b, \epsilon, s)}$ permaneçam dentro do disco unitário.

Neste sentido, consideramos alguns casos particulares, e apresentamos a seguir exemplos numéricos do estudo do comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais de Sobolev $\Psi_n^{(\lambda+i\eta, \epsilon, s)}$ com respeito aos parâmetros $n, \lambda, \eta, \epsilon$ e s .

Exemplo 4.9. Sejam $n = 12, \lambda = 1, \epsilon = 0$ e $\eta \in [0.5, 5]$. A Tabela 4.2, apresenta o maior zero em valor absoluto de $\Psi_{12}^{(1+i\eta, 0, s)}$ para três valores distintos do parâmetro s .

η	$\approx \max zero_k $	η	$\approx \max zero_k $	η	$\approx \max zero_k $
0.5	0.944210	0.5	0.965652	0.5	0.993338
1	0.962284	1	0.978328	1	1.002173
1.5	0.977095	1.5	0.987855	1.5	1.007099
2	0.986724	3	1.002196	3	1.008166
4	1.000185	4	1.002644	4	1.005336
5	1.001894	5	1.003011	5	1.003868

(a) $s = 0.5$ (b) $s = 1$ (c) $s = 5$

Tabela 4.1: Maior zero em valor absoluto de $\Psi_{12}^{(1+i\eta, 0, s)}$

Observe que para $s = 0.5$ e $\eta \in [0.5, 2]$, os zeros de $\Psi_{12}^{(1+i\eta, 0, s)}$ estão dentro de \mathbb{D} , e conforme aumentamos o parâmetro s , vemos que o intervalo de η , que indica que os zeros de $\Psi_{12}^{(1+i\eta, 0, s)}$ estão em \mathbb{D} , diminui. Este comportamento também pode ser observado na Figura 4.6, onde para os pontos (s, η) abaixo da curva, os zeros de $\Psi_{12}^{(1+i\eta, 0, s)}$ permanecem dentro do \mathbb{D} . Note também, a medida que s é suficientemente pequeno, o intervalo de η , que indica que os zeros de $\Psi_{12}^{(1+i\eta, 0, s)}$ estão em \mathbb{D} , cresce.

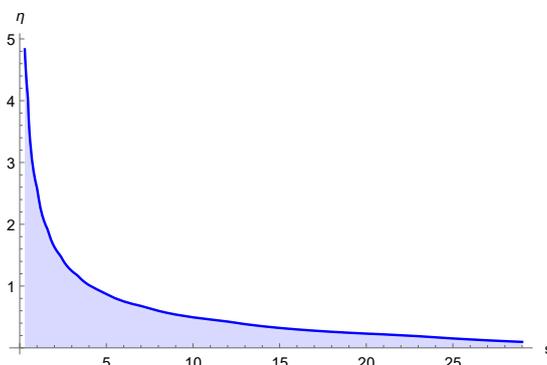


Figura 4.6: Região abaixo da curva para (s, η) tais que os zeros de $\Psi_{12}^{(1+i\eta, 0, s)}$ estão em \mathbb{D}

Exemplo 4.10. Considere $n = 7, \eta = 0, \epsilon = 0.2$ e $\lambda \in [0.5, 5]$. Para três valores distintos do parâmetro s , a Tabela 4.2 expressa o maior zero em valor absoluto de $\Psi_7^{(\lambda, 0.2, s)}$.

Observe que para $s = 0.5$ e $\lambda \in [0.5, 1.5]$, os zeros de $\Psi_7^{(\lambda, 0.2, s)}$ estão dentro do \mathbb{D} . Também, quando $s = 1$ e $\lambda \in [0.5, 1)$ notamos que os zeros de $\Psi_7^{(\lambda, 0.2, s)}$ permanecem em \mathbb{D} . Porém, quando $s = 5$ e $\lambda \in [0.5, 5]$ vemos que $\Psi_7^{(\lambda, 0.2, s)}$ tem zeros fora de \mathbb{D} .

Deste modo, conforme aumentamos o parâmetro s , vemos que o intervalo de λ , que indica que os zeros de $\Psi_7^{(\lambda, 0.2, s)}$ estão em \mathbb{D} , diminui. Este comportamento também pode ser observado na Figura 4.7, onde para os pontos (s, λ) abaixo da curva, os zeros de $\Psi_7^{(\lambda, 0.2, s)}$ permanecem dentro do \mathbb{D} .

Na Figura 4.7, pode se observar também que a medida que s é suficientemente pequeno, o intervalo de λ , que indica que os zeros de $\Psi_7^{(\lambda, 0.2, s)}$ estão em \mathbb{D} , cresce.

λ	$\approx \max zero_k $
0.5	0.941542
1	0.973581
1.5	0.990999
2	1.001956
2.5	1.008782
3	1.013030
5	1.018649

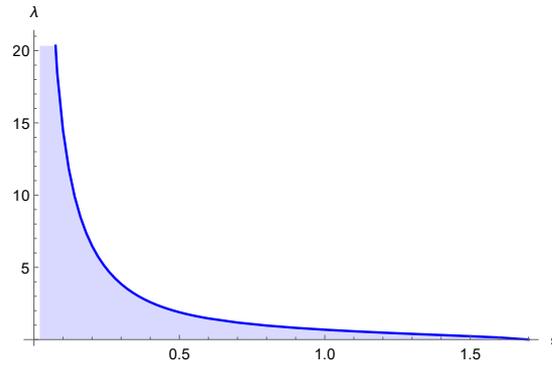
(a) $s = 0.5$

λ	$\approx \max zero_k $
0.5	0.986414
1	1.017583
1.5	1.033454
2	1.040872
2.5	1.043849
3	1.044445
5	1.038742

(b) $s = 1$

λ	$\approx \max zero_k $
0.5	1.131585
1	1.165180
1.5	1.180334
2	1.182483
2.5	1.177311
3	1.168468
5	1.126429

(c) $s = 5$

Tabela 4.2: Maior zero em valor absoluto de $\Psi_7^{(\lambda, 0.2, s)}$ Figura 4.7: Região abaixo da curva para (s, λ) tais que os zeros de $\Psi_7^{(\lambda, 0.2, s)}$ estão em \mathbb{D}

Nos Exemplos 4.11, 4.12 e observações seguintes, consideramos o caso em que $b = \lambda$, $\epsilon = 0$ e $s > 0$, e apresentamos o estudo do comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais de Sobolev $\Psi_n^{(\lambda, 0, s)}$, com respeito a tais parâmetros.

Exemplo 4.11. Na Tabela 4.3, para três valores diferentes de s e $\lambda \in [0.5, 5]$, temos o maior zero em valor absoluto de $\Psi_{12}^{(\lambda, 0, s)}$. Observe que para $s = 30$ e $\lambda \in [0.5, 5]$, todos os zeros de $\Psi_{12}^{(\lambda, 0, 30)}$ estão dentro do disco unitário. Entretanto, para $s = 40$, quando $\lambda \in [1.5, 2.5]$ então $\Psi_{12}^{(\lambda, 0, 40)}$ tem zeros fora do disco unitário. No caso em que $s = 50$, temos que se $\lambda \in [1, 3]$ então $\Psi_{12}^{(\lambda, 0, 50)}$ tem zeros fora do disco unitário, daí podemos notar que os zeros de $\Psi_{12}^{(\lambda, 0, 50)}$ apresentam um comportamento semelhante aos dos zeros de $\Psi_{12}^{(\lambda, 0, 40)}$.

λ	$\approx \max zero_k $
0.5	0.997645
1.0	0.999216
1.5	0.999741
2.0	0.999768
2.5	0.999862
3.0	0.999860
5.0	0.999875

(a) $s = 30$

λ	$\approx \max zero_k $
0.5	0.998798
1.0	0.999929
1.5	1.000151
2.0	1.000049
2.5	1.000053
3.0	0.999997
5.0	0.999929

(b) $s = 40$

λ	$\approx \max zero_k $
0.5	0.999499
1.0	1.000362
1.5	1.000399
2.0	1.000219
2.5	1.000168
3.0	1.000080
5.0	0.999962

(c) $s = 50$

Tabela 4.3: Maior zero em valor absoluto de $\Psi_{12}^{(\lambda, 0, s)}$

Exemplo 4.12. Considere $n = 15$, $\lambda \in [0.5, 5]$ e para três valores diferentes de s , a Tabela 4.4 apresenta o maior zero em valor absoluto de $\Psi_{15}^{(\lambda, 0, s)}$. Note que, para $s = 40$ e $\lambda \in [0.5, 5]$, todos os zeros de $\Psi_{15}^{(\lambda, 0, 40)}$ estão dentro do disco unitário. No entanto, para $s = 50$ se $\lambda \in [1, 2]$ então $\Psi_{15}^{(\lambda, 0, 50)}$ tem zeros fora do disco unitário. Ademais, no caso em que $s = 60$, temos que se $\lambda \in [1, 3]$ então $\Psi_{15}^{(\lambda, 0, 60)}$ tem zeros fora do disco unitário. Conseqüentemente, podemos notar que os zeros de $\Psi_{15}^{(\lambda, 0, 60)}$ apresentam um comportamento semelhante aos dos zeros de $\Psi_{15}^{(\lambda, 0, 50)}$.

λ	$\approx \max zero_k $
0.5	0.998725
1	0.999743
1.5	0.999919
2	0.999907
2.5	0.999893
3	0.999894
5	0.999913

(a) $s = 40$

λ	$\approx \max zero_k $
0.5	0.999278
1	1.000075
1.5	1.000124
2	1.000034
2.5	0.999983
3	0.999958
5	0.999938

(b) $s = 50$

λ	$\approx \max zero_k $
0.5	0.999649
1	1.000298
1.5	1.000261
2	1.000119
2.5	1.000043
3	1.0000013
5	0.999954

(c) $s = 60$

Tabela 4.4: Maior zero em valor absoluto de $\Psi_{15}^{(\lambda, 0, s)}$

Deste modo, com base em simulações numéricas, observamos que para cada n existe uma região, denotada aqui por \mathfrak{B}_n , no plano s - λ tal que para qualquer $(s, \lambda) \notin \mathfrak{B}_n$ os zeros de $\Psi_n^{(\lambda, 0, s)}$ estão dentro do disco unitário. Na Figura 4.8 apresentamos a região \mathfrak{B}_n para dois valores distintos de n , especificamente $n = 12$ e $n = 15$.

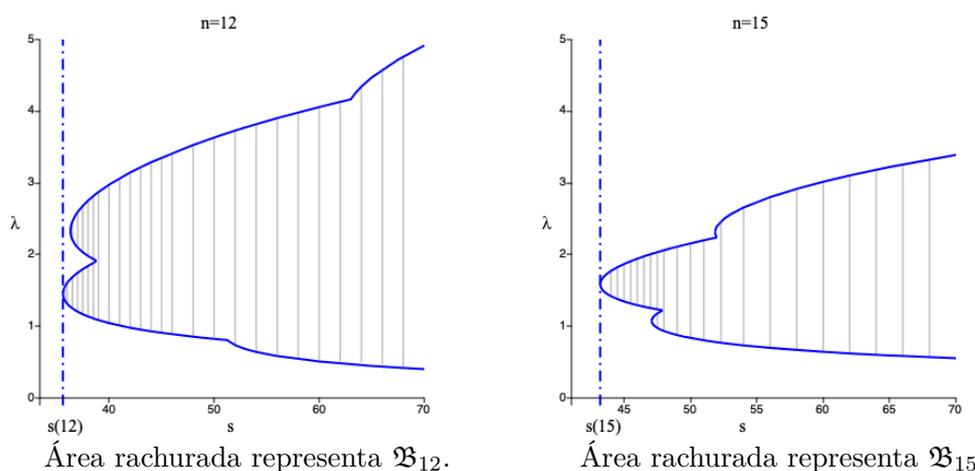


Figura 4.8: Regiões para (s, λ) onde $\Psi_n^{(\lambda, 0, s)}$ tem zeros fora do disco unitário

Outra interessante observação é com relação aos pontos mais à esquerda da região \mathfrak{B}_n , que denotamos por $s(n)$. Os pontos $s(12)$ e $s(15)$ estão indicados nos gráficos na Figura 4.8.

Numericamente, para muitos valores de n geramos os valores de $s(n)$ tais que para $s < s(n)$ os zeros de $\Psi_n^{(\lambda, 0, s)}$ permanecem dentro do disco unitário, e para $s > s(n)$, $\Psi_n^{(\lambda, 0, s)}$ tem zeros fora do disco unitário. Os valores de $s(n)$ são plotados na Figura 4.9, iniciando em $n = 4$ e finalizando em $n = 65$. A aparência não suave da curva que passa por esses pontos traçados pode ser devido a erros de arredondamento.

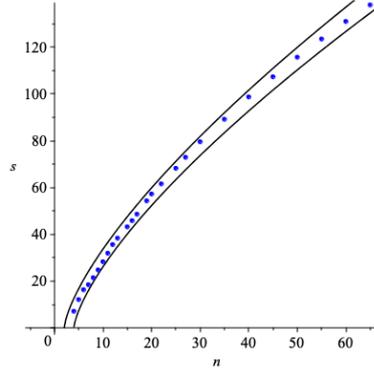


Figura 4.9: Os pontos $s(n)$ e curvas de limite superior $\hat{s}(n)$ e inferior $\check{s}(n)$.

Contudo, é interessante ver que os pontos plotados de $s(n)$ ficam dentro das duas curvas

$$\check{s}(n) = [17(n-4)]^{0.706} \quad \text{e} \quad \hat{s}(n) = [18(n-2)]^{0.708},$$

repectivamente. Baseados nas evidências apresentadas na Figura 4.9, conjecturamos:

Conjectura 1. *Existe uma função crescente $s(n)$ de n tal que se $0 \leq s < s(n)$ então todos os zeros de $\Psi_n^{(\lambda,0,s)}$ estão dentro do disco unitário aberto. Além disso,*

$$\check{s}(n) < s(n) < \hat{s}(n) \quad \text{para} \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

Para chegar a essas funções limitantes, inicialmente usamos técnicas dos mínimos quadrados. É possível que a forma exata de $s(n)$ tenha uma estrutura semelhante às curvas de limites inferior e superior, mas com o expoente $1/\sqrt{2}$.

4.3 Informações sobre os zeros da derivada

Nesta seção, apresentamos o estudo do comportamento dos zeros da derivada do polinômio de Sobolev $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$.

Para o caso $b = 0$ e $\epsilon = 0$, o teorema a seguir fornece uma região anelar onde estão localizados os zeros de $\Psi_{n+1}^{(0,0,s)'}$, e uma região parabólica que não contém zeros de $\Psi_{n+1}^{(0,0,s)'}$.

Teorema 4.13. *Sejam $n \geq 1$ e $s > 0$. Os zeros de $\Psi_{n+1}^{(0,0,s)'}$ são tais que:*

- A. *Eles estão dentro da região anelar dada por $\left\{ \frac{1}{2} \beta_2^{(0,0,s)} \leq |z| \leq \frac{n}{n+1} \beta_{n+1}^{(0,0,s)} \right\}$;*
- B. *Eles estão fora da região parabólica $\{\Im(z)^2 \leq 4\hat{\tau}[\hat{\tau} + \Re(z)], \Re(z) > -\hat{\tau}\}$.*

Aqui, $\hat{\tau} = \min \left\{ \frac{k}{k+1} \beta_{k+1}^{(0,0,s)} - \frac{k-1}{k} \beta_k^{(0,0,s)} : k = 1, 2, \dots, n \right\}$.

Demonstração: Como $\Phi_n^{(0,0)}(z) = \Phi_n^{(0)}(z) = z^n$, $n \geq 0$, temos de (2.37),

$$\Psi_{n+1}^{(0,0,s)}(z) = z^{n+1} + \beta_{n+1}^{(0,0,s)} z^n + \beta_{n+1}^{(0,0,s)} \beta_n^{(0,0,s)} z^{n-1} + \dots + \beta_{n+1}^{(0,0,s)} \beta_n^{(0,0,s)} \dots \beta_2^{(0,0,s)} z.$$

Derivando esta expressão com relação a variável z , temos

$$\Psi_{n+1}^{(0,0,s)'}(z) = (n+1) z^n + n \beta_{n+1}^{(0,0,s)} z^{n-1} + \dots + \beta_{n+1}^{(0,0,s)} \beta_n^{(0,0,s)} \dots \beta_2^{(0,0,s)}.$$

Desta forma, podemos escrever

$$\frac{\Psi_{n+1}^{(0,0,s)'}(z)}{n+1} = \sum_{j=0}^n \widehat{a}_{n,j}^{(0,0,s)} z^j, \quad n \geq 1,$$

com $\widehat{a}_{n,n}^{(0,0,s)} = 1$ e $\widehat{a}_{n,j}^{(0,0,s)} = \frac{j+1}{j+2} \beta_{j+2}^{(0,0,s)} \widehat{a}_{n,j+1}^{(0,0,s)}$, $j = n-1, n-2, \dots, 0$.

Usando uma extensão do Teorema de Eneström-Kakeya, atribuída a Eneström (ver [27, p. 275]), segue que os zeros de $\Psi_{n+1}^{(0,0,s)'}$ estão dentro da região anelar

$$\min_{0 \leq j < n} [\widehat{a}_{n,j}^{(0,0,s)} / \widehat{a}_{n,j+1}^{(0,0,s)}] \leq |z| \leq \max_{0 \leq j < n} [\widehat{a}_{n,j}^{(0,0,s)} / \widehat{a}_{n,j+1}^{(0,0,s)}],$$

com $\frac{\widehat{a}_{n,j}^{(0,0,s)}}{\widehat{a}_{n,j+1}^{(0,0,s)}} = \frac{j+1}{j+2} \beta_{j+2}^{(0,0,s)}$. Pelo Teorema 3.8 temos $\beta_j^{(0,0,s)} < \beta_{j+1}^{(0,0,s)}$, $j \geq 2$ e isto conclui a parte *A* do teorema.

Para provar a parte *B*, novamente considerando o caso $b = 0$ e $\epsilon = 0$, e derivando a expressão (2.37) com relação a variável z obtemos

$$\Psi_{n+1}^{(0,0,s)'}(z) - \beta_{n+1}^{(0,0,s)} \Psi_n^{(0,0,s)'}(z) = (n+1)z^n, \quad n \geq 0.$$

Assim, podemos escrever

$$\Psi_{n+1}^{(0,0,s)'}(z) - \beta_{n+1}^{(0,0,s)} \Psi_n^{(0,0,s)'}(z) = \frac{(n+1)}{n} z \left[\Psi_n^{(0,0,s)'}(z) - \beta_n^{(0,0,s)} \Psi_{n-1}^{(0,0,s)'}(z) \right],$$

e conseqüentemente, temos

$$\Psi_{n+1}^{(0,0,s)'}(z) = \left[\frac{(n+1)}{n} z + \beta_{n+1}^{(0,0,s)} \right] \Psi_n^{(0,0,s)'}(z) - \frac{(n+1)}{n} \beta_n^{(0,0,s)} z \Psi_{n-1}^{(0,0,s)'}(z)$$

e os polinômios mônicos

$$r_n^{(0,0,s)}(z) = \frac{n!}{(n+1)!} \Psi_{n+1}^{(0,0,s)'}(z), \quad n \geq 0,$$

satisfazem a relação de recorrência de três termos

$$r_n^{(0,0,s)}(z) = \left[z + \frac{n}{n+1} \beta_{n+1}^{(0,0,s)} \right] r_{n-1}^{(0,0,s)}(z) - \frac{(n-1)}{n} \beta_n^{(0,0,s)} z r_{n-2}^{(0,0,s)}(z), \quad n \geq 2,$$

com $r_0^{(0,0,s)}(z) = 1$ e $r_1^{(0,0,s)}(z) = z + \frac{1}{2} \beta_2^{(0,0,s)}$. Deste modo, aplicando o [29, Teorema 2.1] provamos a parte *B* do teorema. Aqui, é importante que $\tau > 0$, que é garantido por $\beta_j^{(0,0,s)} < \beta_{j+1}^{(0,0,s)}$, $j \geq 2$. ■

A seguir, apresentamos um exemplo numérico ilustrando as regiões determinadas no Teorema 4.13.

Exemplo 4.14. Os gráficos na Figura 4.10 apresentam os zeros da derivada do polinômio de Sobolev $\Psi_{10}^{(0,0,s)}$, para três valores distintos do parâmetro s , junto com os anéis e regiões parabólicas correspondentes. Observe que os zeros de $\Psi_{10}^{(0,0,s)'}$ permanecem dentro das regiões esperadas no Teorema 4.13.

Os números que correspondem aos anéis e regiões parabólicas na Figura 4.10 são os seguintes:

- $0.5 \beta_2^{(0,0,0.8)} \approx 0.2222$, $0.9 \beta_{10}^{(0,0,0.8)} \approx 0.7966$ e $\hat{\tau} \approx 0.0210816$ no caso do gráfico (a);
- $0.5 \beta_2^{(0,0,50)} \approx 0.4902$, $0.9 \beta_{10}^{(0,0,50)} \approx 0.8965$ e $\hat{\tau} \approx 0.0114532$ no caso do gráfico (b);
- $0.5 \beta_2^{(0,0,1000)} \approx 0.4995$, $0.9 \beta_{10}^{(0,0,1000)} \approx 0.8998$ e $\hat{\tau} \approx 0.0111286$ no caso do gráfico (c).

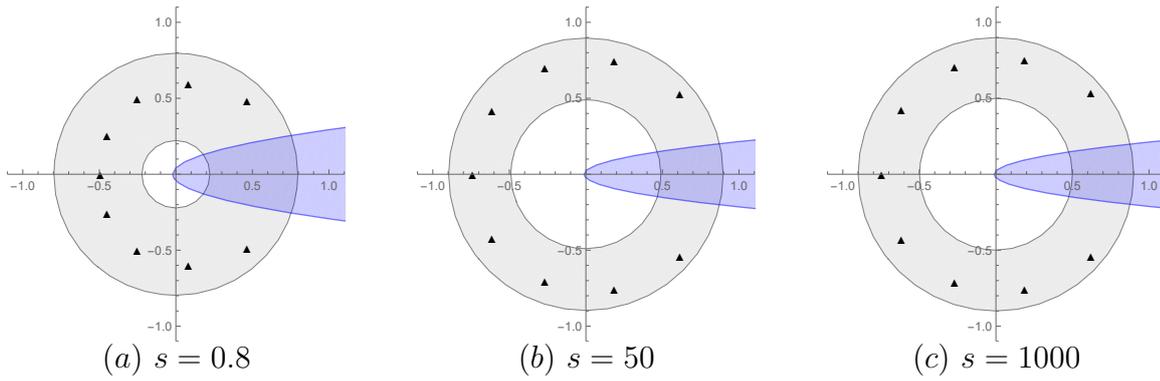


Figura 4.10: Zeros de $\Psi_{10}^{(0,0,s)'}$

Uma observação interessante a ser feita é que a região anelar apresentada no Teorema 4.4, onde estão localizados os zeros de $\Psi_{n+1}^{(0,0,s)}$, juntamente com o Teorema de Gauss-Lucas (ver [24]), indica que os zeros de $\Psi_{n+1}^{(0,0,s)'}$ estão no disco $|z| \leq \beta_{n+1}^{(0,0,s)}$. Contudo, o Teorema 4.13 fornece uma região mais refinada sobre a localização dos zeros de $\Psi_{n+1}^{(0,0,s)'}$, conforme pode ser observado no exemplo a seguir.

Exemplo 4.15. A Figura 4.11 apresenta para três valores diferentes do parâmetro s , as regiões anelares determinadas nos Teoremas 4.4 e 4.13, respectivamente, representadas em azul e cinza. Nos gráficos, os pontos representam os zeros de $\Psi_{10}^{(0,0,s)}$ e os triângulos representam os zeros de $\Psi_{10}^{(0,0,s)'}$. Os números que correspondem aos anéis que contém os zeros de $\Psi_{10}^{(0,0,s)'}$ são dados no Exemplo 4.14, e os números referentes aos anéis que contém os zeros de $\Psi_{10}^{(0,0,s)}$ são os seguintes:

- $\beta_2^{(0,0,0.8)} \approx 0.4444$, $\beta_{10}^{(0,0,0.8)} \approx 0.8851$ no caso do gráfico (a);
- $\beta_2^{(0,0,50)} \approx 0.9804$, $\beta_{10}^{(0,0,50)} \approx 0.9961$ no caso do gráfico (b);
- $\beta_2^{(0,0,1000)} \approx 0.9990$, $\beta_{10}^{(0,0,1000)} \approx 0.9998$ no caso do gráfico (c).

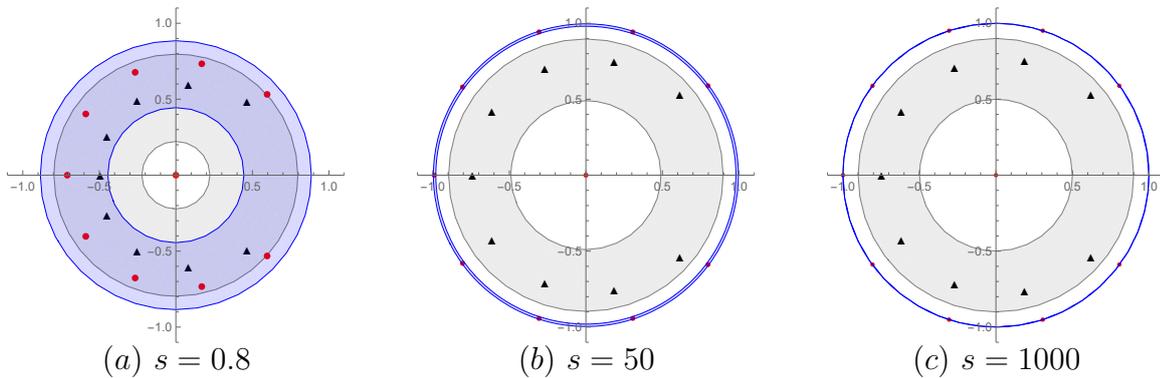


Figura 4.11: Regiões anelares para os zeros de $\Psi_{10}^{(0,0,s)}$ e $\Psi_{10}^{(0,0,s)'}$

Agora, para o caso geral onde $b = \lambda + i\eta$ com $\lambda > -\frac{1}{2}$, $0 < \epsilon < 1$ e $s > 0$, vamos utilizar o Lema 4.6 para obter informações sobre os zeros da derivada de $\Psi_{n+1}^{(b,\epsilon,s)}$.

Observe que de (2.37) e (2.29) segue que

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1}^{(b,\epsilon,s)'}(z) &= \Phi_{n+1}^{(b,\epsilon)'}(z) + \beta_{n+1}^{(b,\epsilon,s)} \Psi_n^{(b,\epsilon,s)'}(z) \\ &= (n+1)\Phi_n^{(b+1)}(z) - (n+1)\chi_{n+1}^{(b,\epsilon)}\Phi_{n-1}^{(b+1)}(z) + \beta_{n+1}^{(b,\epsilon,s)}\Psi_n^{(b,\epsilon,s)'}(z). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_{n+1}^{(b,\epsilon,s)'}(z)}{n+1} &= \Phi_n^{(b+1)}(z) - \chi_{n+1}^{(b,\epsilon)}\Phi_{n-1}^{(b+1)}(z) + \frac{n}{n+1}\beta_{n+1}^{(b,\epsilon,s)}\frac{\Psi_n^{(b,\epsilon,s)'}(z)}{n} \\ &= \Phi_n^{(b+1)}(z) - \left[\chi_{n+1}^{(b,\epsilon)} - \frac{n}{n+1}\beta_{n+1}^{(b,\epsilon,s)}\right] - \frac{n}{n+1}\beta_{n+1}^{(b,\epsilon,s)}\chi_n^{(b,\epsilon)}\Phi_{n-2}^{(b+1)}(z) \\ &\quad + \frac{n}{(n+1)}\frac{(n-1)}{n}\beta_{n+1}^{(b,\epsilon,s)}\beta_n^{(b,\epsilon,s)}\frac{\Psi_{n-1}^{(b,\epsilon,s)'}(z)}{n-1}. \end{aligned}$$

Desta forma, recursivamente obtemos

$$\frac{\Psi_{n+1}^{(b,\epsilon,s)'}(z)}{n+1} = \Phi_n^{(b+1)}(z) - \sum_{j=1}^n \gamma_{n,n-j}^{(b,\epsilon,s)}\Phi_{n-j}^{(b+1)}(z), \quad n \geq 1,$$

onde $\gamma_{n,n-1}^{(b,\epsilon,s)} = \delta_{n-1}^{(b,\epsilon,s)}$ e $\gamma_{n,n-j}^{(b,\epsilon,s)} = \delta_{n-j}^{(b,\epsilon,s)} \prod_{k=1}^{j-1} \frac{n+1-k}{n+2-k} \beta_{n+2-k}^{(b,\epsilon,s)}$, $j = 2, \dots, n$, com

$$\delta_n^{(b,\epsilon,s)} = \chi_{n+2}^{(b,\epsilon)} - \frac{n+1}{n+2}\beta_{n+2}^{(b,\epsilon,s)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Deste modo, aplicando o Lema 4.6 temos

$$\begin{aligned} \Delta_{n,1}^{(b,\epsilon,s)} &= \sum_{j=1}^n \left[|\gamma_{n,n-j}^{(b,\epsilon,s)}| \prod_{k=1}^j \frac{1}{1 - |\alpha_{n-k}^{(b+1)}|} \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{|\delta_{n-j}^{(b,\epsilon,s)}|}{1 - |\alpha_{n-j}^{(b+1)}|} \prod_{k=1}^{j-1} \frac{n+1-k}{n+2-k} \frac{\beta_{n+2-k}^{(b,\epsilon,s)}}{1 - |\alpha_{n-k}^{(b,\epsilon,s)}|} \right]. \end{aligned}$$

Portanto, uma condição suficiente para os zeros de $\Psi_{n+1}^{(b,\epsilon,s)'}$ estar dentro do \mathbb{D} é $\Delta_{n,1}^{(b,\epsilon,s)} < 1$, onde $\Delta_{1,1}^{(b,\epsilon,s)} = |\delta_0^{(b,\epsilon,s)}|/(1 - |\alpha_0^{(b+1)}|)$ e

$$\Delta_{n,1}^{(b,\epsilon,s)} = \frac{|\delta_{n-1}^{(b,\epsilon,s)}|}{1 - |\alpha_{n-1}^{(b+1)}|} + \sum_{j=2}^n \left\{ \frac{|\delta_{n-j}^{(b,\epsilon,s)}|}{1 - |\alpha_{n-j}^{(b+1)}|} \prod_{k=1}^{j-1} \frac{n+1-k}{n+2-k} \frac{|\beta_{n+2-k}^{(b,\epsilon,s)}|}{1 - |\alpha_{n-k}^{(b+1)}|} \right\}, \quad n \geq 2.$$

Pelo Teorema 3.7 observamos que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} |\delta_n^{(b,\epsilon,s)}| = \lim_{s \rightarrow \infty} \left| \chi_{n+2}^{(b,\epsilon)} - \frac{n+1}{n+2}\beta_{n+2}^{(b,\epsilon,s)} \right| = 0, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

Isto significa que, se s é suficientemente grande então os zeros de $\Psi_{n+1}^{(b,\epsilon,s)'}$ estão dentro \mathbb{D} . Por outro lado, pelo Teorema 4.7 e pelo Teorema de Gauss-Lucas (ver [24]), se s é suficientemente pequeno então os zeros de $\Psi_{n+1}^{(b,\epsilon,s)'}$ também estão dentro do disco unitário.

A seguir, apresentamos um exemplo numérico relacionado a condição $\Delta_{n,1}^{(b,\epsilon,s)}$ apresentada anteriormente.

Exemplo 4.16. Na Figura 4.12, os triângulos nos três gráficos representam os zeros de $\Psi_9^{(0.7+i0.3, 0.1, s)'}$, para três valores distintos do parâmetro s . Os valores atribuídos a s , e as correspondentes constantes $\Delta_{8,1}^{(0.7+i0.3, 0.1, s)}$ são os seguintes:

- $s = 0.045$ e $\Delta_{8,1}^{(0.7+i0.3, 0.1, s)} = 1.4779875 \cdots > 1$ no caso do gráfico (a);
- $s = 0.6$ e $\Delta_{8,1}^{(0.7+i0.3, 0.1, s)} = 2.5662174 \cdots > 1$ no caso do gráfico (b);
- $s = 26$ e $\Delta_{8,1}^{(0.7+i0.3, 0.1, s)} = 0.9988677 \cdots < 1$ no caso do gráfico (c).

No gráfico (c) da Figura 4.12, observe que a condição é satisfeita e como, já esperado, todos os zeros de $\Psi_9^{(0.7+i0.3, 0.1, s)'}$ estão dentro do \mathbb{D} . No entanto, com respeito aos gráficos (a) e (b) na Figura 4.12, apesar de a condição não ser satisfeita, os zeros de $\Psi_9^{(0.7+i0.3, 0.1, 0.045)'}$ e $\Psi_9^{(0.7+i0.3, 0.1, 0.6)'}$ ainda estão dentro do \mathbb{D} .

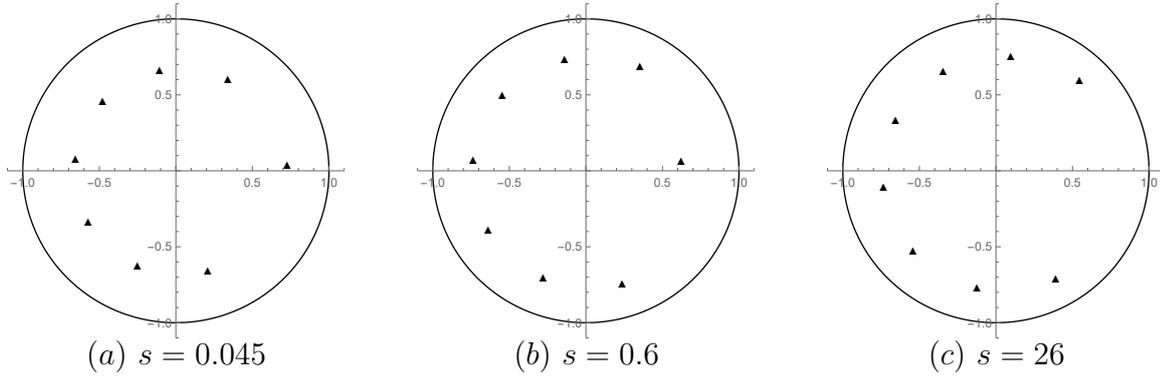


Figura 4.12: Zeros de $\Psi_9^{(0.7+i0.3, 0.1, s)'}$

Baseados em muitos experimentos numéricos, podemos formular a seguinte conjectura.

Conjectura 2. Para todo $n \geq 2$ os zeros de $\Psi_{n+1}^{(b, \epsilon, s)'}$ estão dentro do disco unitário aberto.

Agora, provaremos que a afirmação desta conjectura é verdadeira para $\eta = 0$ e $\epsilon = 0$. De fato, como $\delta_n^{(\lambda, 0, s)} > 0$, $\beta_{n+1}^{(\lambda, 0, s)} > 0$ para $s > 0$ e

$$\alpha_{n-1}^{(\lambda+1)} = -\frac{\lambda+1}{n+\lambda+1},$$

temos

$$\begin{aligned} \Delta_{n,1}^{(\lambda, 0, s)} &= \frac{(\lambda+n+1)\delta_{n-1}^{(\lambda, 0, s)}}{n} + \sum_{j=2}^n \left\{ \frac{(\lambda+n+2-j)\delta_{n-j}^{(\lambda, 0, s)}}{n+1-j} \prod_{k=1}^{j-1} \frac{\lambda+n+2-k}{n+2-k} \beta_{n+2-k}^{(\lambda, 0, s)} \right\} \\ &= \frac{(\lambda+n+1)}{n} \delta_{n-1}^{(\lambda, 0, s)} + \frac{(\lambda+n+1)}{n+1} \beta_{n+1}^{(\lambda, 0, s)} \Delta_{n-1,1}^{(\lambda, 0, s)}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

para $n \geq 2$ e $s \geq 0$, com $\Delta_{1,1}^{(\lambda, 0, s)} = (\lambda+2)\delta_0^{(\lambda, 0, s)}$.

Assim, diferenciando $\Delta_{n,1}^{(\lambda, 0, s)}$ com respeito ao parâmetro s usando (4.3) e (4.4) temos

$$\frac{\partial}{\partial s} \Delta_{n,1}^{(\lambda, 0, s)} = -\frac{(\lambda+n+1)}{n+1} \left[1 - \Delta_{n-1,1}^{(\lambda, 0, s)} \right] \frac{\partial}{\partial s} \beta_{n+1}^{(\lambda, 0, s)} + \frac{(\lambda+n+1)}{n+1} \beta_{n+1}^{(\lambda, 0, s)} \frac{\partial}{\partial s} \Delta_{n-1,1}^{(\lambda, 0, s)},$$

para $n \geq 2$, com $\frac{\partial}{\partial s} \Delta_{1,1}^{(\lambda, 0, s)} = -\frac{\lambda+2}{2} \frac{\partial}{\partial s} \beta_2^{(\lambda, 0, s)}$.

Agora, observe da parte A do Teorema 3.7 que

$$\frac{\partial}{\partial s} \Delta_{1,1}^{(\lambda,0,s)} < 0 \quad \text{para } s > 0.$$

Além disso, como $\beta_{n+1}^{(\lambda,0,0)} = 0$, também notamos que

$$\Delta_{n,1}^{(\lambda,0,0)} = \frac{(\lambda + n + 1)}{n} \chi_{n+1}^{(\lambda,0)} = 1, \quad n \geq 1.$$

Portanto, obtemos sucessivamente, que

$$\Delta_{n-1,1}^{(\lambda,0,s)} < 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial s} \Delta_{n,1}^{(\lambda,0,s)} < 0,$$

para $n \geq 2$ e $s > 0$. Isto prova o seguinte.

Teorema 4.17. *Para todo $n \geq 2$ os zeros de $\Psi_{n+1}^{(\lambda,0,s)'}$ estão dentro do disco unitário aberto.*

5 Considerações Finais

O objetivo desta tese foi estudar detalhadamente os polinômios ortogonais com relação ao produto interno de Sobolev definido por

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{S}^{(b,\epsilon,s)}} = \langle f, g \rangle_{\mu^{(b,\epsilon)}} + s \langle f', g' \rangle_{\mu^{(b+1)}},$$

onde o par de medidas positivas definidas no círculo unitário $(\mu^{(b,\epsilon)}, \mu^{(b+1)})$ satisfazem a propriedade de coerência de segundo tipo. Como mencionado, por meio desse conceito de coerência, os polinômios ortogonais com respeito ao produto interno de Sobolev $\langle f, g \rangle_{\mathcal{S}^{(b,\epsilon,s)}}$, denotados por $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$, podem ser expressos de forma simples através da seguinte relação

$$\Psi_{n+1}^{(b,\epsilon,s)}(z) - \beta_{n+1}^{(b,\epsilon,s)} \Psi_n^{(b,\epsilon,s)}(z) = \Phi_{n+1}^{(b,\epsilon)}(z), \quad n \geq 0.$$

Com base nesta relação, observamos que para determinar as propriedades dos polinômios $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$ é essencial ter um conhecimento detalhado dos coeficientes de conexão $\beta_n^{(b,\epsilon,s)}$. Deste modo, provamos que os coeficientes $\beta_n^{(b,\epsilon,s)}$ podem ser expressos como funções racionais envolvendo uma sequência de polinômios ortogonais com respeito a alguma medida positiva sobre o eixo real negativo $(-\infty, 0)$. Em particular, quando o parâmetro ϵ é nulo, os coeficientes $\beta_n^{(b,0,s)}$ estão relacionados a uma subfamília dos polinômios “*continuous dual Hahn*”. Além disso, estabelecemos limitantes, monotonicidades e propriedades assintóticas associados aos coeficientes de conexão $\beta_n^{(b,\epsilon,s)}$ com relação aos parâmetros $b = \lambda + i\eta$, ϵ , e s .

Além disso, usando os resultados obtidos com relação aos coeficientes de conexão $\beta_n^{(b,\epsilon,s)}$, caracterizamos o comportamento assintótico dos polinômios ortogonais de Sobolev $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$ com respeito aos parâmetros s, η e λ .

Sobre a localização dos zeros de $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$, quando $b = 0$ e $\epsilon = 0$, provamos que os zeros de $\Psi_n^{(0,0,s)}$ estão em uma região anelar dentro do disco unitário. Entretanto, através de experimentos numéricos, vimos que, em geral, $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$ tem zeros fora do disco unitário. Contudo, estabelecemos uma condição sob a qual todos os zeros de $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$ ficam dentro do disco unitário.

Infelizmente, essa condição é satisfeita apenas para valores suficientemente pequenos de s . Numericamente, observamos que existem valores de s em que a condição não é satisfeita, porém todos os zeros de $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$ permanecem dentro do disco unitário.

Desta forma, pode-se perguntar: Existe alguma relação entre os parâmetros $n, \lambda, \eta, \epsilon$ e s que garantem que os zeros de $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$ permaneçam dentro do disco unitário? Para o caso $b = \lambda, \epsilon = 0$ e $s > 0$, por meio de simulações numéricas observamos que para cada valor de n existe uma região do plano - $s\lambda$ tal que para qualquer ponto (s, λ) fora dessa região os zeros de $\Psi_n^{(\lambda,0,s)}$ permanecem dentro do disco unitário.

As simulações numéricas sobre o comportamento dos zeros dos polinômios $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$ e de suas derivadas apontaram evidências interessantes, sob as quais conjecturamos a existência

de uma função $s(n)$ tal que para todos valores de s limitados superiormente por $s(n)$ os zeros do polinômio $\Psi_n^{(\lambda,0,s)}$ permanecem dentro do disco unitário. Também determinamos uma boa estimativa para o comportamento de $s(n)$. Além disso, conjecturamos que todos os zeros da derivada de $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$ estão dentro do disco unitário. Por fim, para o caso particular $b = \lambda$ e $\epsilon = 0$, provamos que os zeros da derivada de $\Psi_n^{(\lambda,0,s)}$ estão dentro do disco unitário.

As conjecturas apresentadas são problemas em aberto muito interessantes que possibilitam o desenvolvimento de trabalhos futuros. Além disso, como uma aplicação dos polinômios ortogonais de Sobolev $\Psi_n^{(b,\epsilon,s)}$, também iniciamos o estudo numérico e teórico do problema de aproximação por mínimos quadrados. Neste caso, o problema consiste em aproximar simultaneamente uma dada função f por um polinômio

$$\mathcal{P}_n^{(b,\epsilon,s)}(z) = \sum_{j=0}^n c_{n,j}^{(b,\epsilon,s)} \Psi_j^{(b,\epsilon,s)}(z),$$

onde os coeficientes $c_{n,j}^{(b,\epsilon,s)}$, $j = 0, 1, \dots, n$, são determinados de forma que $\mathcal{P}_n^{(b,\epsilon,s)}$ seja o polinômio de melhor aproximação. Em outras palavras, o problema consiste em determinar os coeficientes $c_{n,j}^{(b,\epsilon,s)}$, $j = 0, 1, \dots, n$, tais que o erro $\|f(z) - \mathcal{P}_n^{(b,\epsilon,s)}(z)\|_{\mathcal{S}^{(b,\epsilon,s)}}^2$ seja mínimo. Aqui, $\|\cdot\|_{\mathcal{S}^{(b,\epsilon,s)}}$ denota a norma induzida pelo produto interno de Sobolev $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}^{(b,\epsilon,s)}}$.

Referências

- [1] G.E. Andrews, R. Askey, R. Roy. Special Functions, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 71, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [2] A. Aptekarev, E. Berriochoa, A. Cachafeiro, Strong asymptotics for the continuous Sobolev orthogonal polynomials on the unit circle, *J. Approx. Theory*, 100 (1999) 381–391.
- [3] E. Berriochoa, A. Cachafeiro, Lebesgue Sobolev orthogonality on the unit circle, *J. Comput. Appl. Math.*, 96 (1998) 27–34.
- [4] E. Berriochoa, A. Cachafeiro, A family of Sobolev orthogonal polynomials on the unit circle, *J. Comput. Appl. Math.*, 105 (1999) 163–173.
- [5] C.F. Bracciali, J.V. da Silva, A. Sri Ranga, A class of Sobolev orthogonal polynomials on the unit circle and associated continuous dual Hahn polynomials: Bounds, asymptotics and zeros, *J. Approx. Theory*, 268 (2021) 105604.
- [6] A. Branquinho, A. Foulquié Moreno, F. Marcellán, M.N. Rebocho, Coherent pairs of linear functionals on the unit circle, *J. Approx. Theory*, 153 (2008) 122–137.
- [7] A. Cachafeiro, F. Marcellán, Orthogonal polynomials of Sobolev type on the unit circle, *J. Approx. Theory*, 78 (1994) 127–146.
- [8] K. Castillo, L.E. Garza, F. Marcellán, Zeros of Sobolev orthogonal polynomials on the unit circle, *Numer. Algorithms*, 60 (2012) 669–681.
- [9] K. Castillo, L.E. Garza, F. Marcellán, Asymptotic behaviour of Sobolev orthogonal polynomials on the unit circle, *Integral Transforms Spec. Funct.*, 24 (2013) 23–38.
- [10] T.S. Chihara, An Introduction to Orthogonal Polynomials, Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [11] M.S. Costa, H.M. Felix, A. Sri Ranga, Orthogonal polynomials on the unit circle and chain sequences, *J. Approx. Theory*, 173 (2013) 14–32.
- [12] A.M. Delgado, F. Marcellán, Companion linear functionals and Sobolev inner products: a case study, *Methods Appl. Anal.* 11 (2004) 237–266.
- [13] A. Foulquié Moreno, F. Marcellán, K. Pan, Asymptotic behavior of Sobolev-type orthogonal polynomials on the unit circle, *J. Approx. Theory*, 100 (1999) 345–363.

-
- [14] A. Iserles, P.E. Koch, S.P. Nørsett, J.M. Sanz-Serna, On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products, *J. Approx. Theory*, 65 (1991) 151–175.
- [15] M.E.H. Ismail, *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 98, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
- [16] M.N. Jesus, F. Marcellán, J. Petronilho, N.C. Pinzón-Cortés, (M, N) -coherent pairs of order (m, k) and Sobolev orthogonal polynomials, *J. Comput. Appl. Math.*, 256 (2014) 16–35.
- [17] W.B. Jones, O. Njåstad, W.J. Thron, Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle. *Bull. London Math. Soc.*, 21 (1989) 113–152.
- [18] R. Koekoek, P.A. Lesky, R.F. Swarttouw, *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and their q-Analogues*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 2010.
- [19] D.C. Lewis, Polynomial least square approximations, *Amer. J. Math.* 69 (1947) 273–278.
- [20] Xin Li, F. Marcellán, On polynomials orthogonal with respect to Sobolev inner product on the unit circle, *Pac. J. Math.*, 175 (1996) 127–146.
- [21] F. Marcellán, L. Moral, Sobolev-type orthogonal polynomials on the unit circle, *Appl. Math. Comput.*, 128 (2002) 329–363.
- [22] F. Marcellán, A. Sri Ranga, Sobolev orthogonal polynomials on the unit circle and coherent pairs of measures of the second kind, *Results Math.*, 71 (2017) 1127–1149.
- [23] F. Marcellán, Yuan Xu, On Sobolev orthogonal polynomials, *Expo. Math.*, 33 (2015) 308–352.
- [24] M. Marden, *Geometry of Polynomials*, in: *Math. Surveys*, (3), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1966.
- [25] H.G. Meijer, A short history of orthogonal polynomials in a Sobolev space I. The non-discrete case, in *31st Dutch Mathematical Conference*, Groningen, 1995, *Nieuw Arch. Wiskd.* (4) 14 (1996) 93–112.
- [26] H.G. Meijer, Determination of all coherent pairs, *J. Approx. Theory*, 89 (1997) 321–343.
- [27] G.V. Milovanović, D.S. Mitrinović, Th.M. Rassias, *Topic in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*, World Scientific Publ., London, 1994.
- [28] F. Peherstorfer, Linear combinations of orthogonal polynomials generating quadrature formulas, *Math. Comp.*, 55 (1990) 231–241.
- [29] E.B. Saff, R.S. Varga, Zero-free parabolic regions for sequences of polynomials, *SIAM J. Math. Anal.*, 7 (1976) 344–357.

-
- [30] B. Simon, *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 1. Classical Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 54, part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [31] B. Simon, *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 2. Spectral Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 54, part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [32] A. Sri Ranga, Szegő polynomials from hypergeometric functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138 (2010) 4243–4247.
- [33] A. Sri Ranga, Orthogonal polynomials with respect to a family of Sobolev inner products on the unit circle, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 144 (2016) 1129–1143.
- [34] H.S. Wall, *Analytic Theory of Continued Fractions*. Chelsea Publishing, New York, 1948.
- [35] S.M. Zagorodnyuk, On a family of hypergeometric Sobolev orthogonal polynomials on the unit circle, *Constr. Math. Anal.*, 3 (2020) 75–84.