

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA DE BAURU  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**Uso de Absorvedores de Vibrações Eletromecânicos  
Lineares e Não-Lineares em Sistemas Não-Lineares e  
Não-Ideais**

Autor: **Juliano Gonçalves Iossaqui**

Orientador: **Prof. Dr. José Manoel Balthazar**

Co-orientador: **Prof. Dr. Bento Rodrigues de Pontes Júnior**

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA DE BAURU  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

# **Uso de Absorvedores de Vibrações Eletromecânicos Lineares e Não-Lineares em Sistemas Não-Lineares e Não-Ideais**

Autor: **Juliano Gonçalves Iossaqui**

Orientador: **Prof. Dr. José Manoel Balthazar**

Co-orientador: **Prof. Dr. Bento Rodrigues de Pontes Júnior**

Curso: **Engenharia Mecânica**

Área de concentração: **Projeto Mecânico**

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Bauru, 2009

SP – Brasil

**Divisão Técnica de Biblioteca e Documentação  
Unesp - Campus de Bauru**

Iossaqui, Juliano Gonçalves.

Uso de absorvedores de vibrações eletromecânicos lineares e não-lineares em sistemas não-lineares e não-ideais / Juliano Gonçalves Iossaqui. Bauru, 2009. 107 f.

Orientador: José Manoel Balthazar

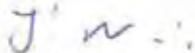
Co-orientador: Bento Rodrigues de Pontes Júnior

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Bauru, Bauru, 2009

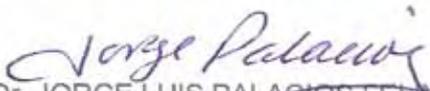
Absorvedores de vibrações eletromecânicos. 2. Dinâmica não-ideal. 3. Dinâmica não-linear. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Bauru. II. Título.

**ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE JULIANO GONÇALVES IOSSAQUI, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, DO(A) FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU.**

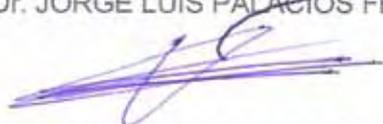
Aos 23 dias do mês de janeiro do ano de 2009, às 09:00 horas, no(a) ANFITEATRO DO STI DA FACULDADE DE ENGENHARIA, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. JOSE MANOEL BALTHAZAR do(a) Departamento de Estat Mat Apl Computac / Instituto de Geociencias e Ciencias Exatas, Prof. Dr. JORGE LUIS PALACIOS FELIX do(a) Departamento de Ciencias Exatas e Da Terra / Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e Das Missões, Prof. Dr. VICENTE LOPES JUNIOR do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de JULIANO GONÇALVES IOSSAQUI, intitulado "USO DE ABSORVEDORES DE VIBRAÇÕES ELETROMECÂNICOS LINEARES E NÃO-LINEARES EM SISTEMAS NÃO-LINEARES E NÃO-IDEAIS". Após a exposição, o discente foi argüido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: Aprovado. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que, após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.



Prof. Dr. JOSE MANOEL BALTHAZAR



Prof. Dr. JORGE LUIS PALACIOS FELIX



Prof. Dr. VICENTE LOPES JUNIOR

## **Agradecimentos**

Gostaria de agradecer as pessoas e instituições que colaboraram para o sucesso deste trabalho:

À CAPES pelo apoio financeiro concedido através da bolsa de mestrado. Ao Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” de Bauru por ter me recebido e dado condições para meu aperfeiçoamento profissional e elaboração desta dissertação de mestrado. A secretaria de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia de Bauru.

Ao meu orientador Professor Dr. José Manoel Balthazar pela dedicação, auxílio e competência com a qual me conduziu no desenvolvimento desse trabalho.

Agradeço ao Prof. Dr. Bento Rodrigues de Pontes Júnior pelo incentivo e apoio como co-orientador deste trabalho.

Aos meus pais Mário e Luzia que sempre me apoiaram e me incentivaram em todos os momentos da minha vida, principalmente nos estudos, não poupando esforços para que eu chegasse até aqui.

E a Deus, por me proporcionar muita vida, saúde e condições para vencer mais este desafio.

**“Embora ninguém possa voltar atrás e fazer um novo começo, qualquer um pode  
começar agora e fazer um novo fim”.**

**-Ayrton Senna-**

## Resumo

Iossaqui, J. G., Uso de Absorvedores de Vibrações Eletromecânicos Lineares e Não-Lineares em Sistemas Não-Lineares e Não-Ideais, Bauru: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2009, 107 pp., Dissertação (Mestrado).

Neste trabalho, investigou-se a efetividade de um absorvedor de vibrações eletromecânico linear e um absorvedor de vibrações eletromecânico não-linear na atenuação de vibrações em estruturas não-ideais. Dois modelos não-lineares foram utilizados para representar o sistema estudado, uma viga engastada excitada por uma fonte não-ideal. Um modelo simplificado que considera o torque gerado pelo motor como sendo uma função linear e um modelo mais completo que considera as propriedades elétricas do motor CC. As equações que governam a dinâmica do sistema foram deduzidas pelas equações de Lagrange, parte mecânica, e pelas leis de Kirchhoff, parte elétrica. Simulações numéricas dos dois modelos foram realizadas no módulo Simulink® do software MATLAB®. Uma análise do efeito dos parâmetros não-lineares no sistema foi realizada. Resultados mostram a redução do “salto” nas curvas de resposta-frequência - efeito Sommerfeld - fenômeno típico de sistemas não-ideais. O estudo da estabilidade foi realizado conforme a análise de estabilidade de Lyapunov. Uma solução analítica aproximada, para o movimento estacionário do sistema, foi obtida através de um método de perturbação (método da média). Para completar o estudo, analisou-se a interação dinâmica dos absorvedores de vibrações eletromecânicos em outros modelos de sistemas não-ideais que apresentam comportamentos caóticos. Os resultados obtidos mostram a supressão de caos, através da transformação de movimentos caóticos em movimentos periódicos.

**Palavras chaves:** Absorvedores Eletromecânicos, Dinâmica Não-Ideal, Dinâmica Não-Linear.

# Abstract

Iossaqui, J. G., Use of Linear and Nonlinear Electromechanical Vibration Absorbers in Nonlinear and Nonideal Systems, Bauru: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2009, 107 pp., Dissertação (Mestrado).

In this work, we investigated the effectiveness of a linear electro-mechanical vibration absorber and a nonlinear electro-mechanical vibration absorber that is used for the vibration attenuation in a non-ideal structure. Two nonlinear models were used to represent a cantilever beam supporting a nonideal energy source at its free end. The first model simplified takes into account the stationary characteristic of the energy source and the second model takes into account also influence of the dynamics of the oscillating mechanical elements on electrical properties of the DC motor. The governing equations of the models are deduced by Lagrange's equations and also by Kirchhoff's laws. The numerical simulations of models were implemented using the Simulink® module of Matlab® software. A numerical analysis of the effects of the parameters of nonlinearity was presented. Others results showed the reduction of the Sommerfeld effect. We analytically determine the expression for the steady-state solutions using the method of averaging. We also analyzed the dynamic interaction between the electromechanical vibration absorber and the others nonideal structural that have chaotic behavior. We have found that the chaotic motion of the main system has been transformed to periodic motion, see as a quenching of chaotic vibrations.

**Keywords:** Electromechanical Absorbers, Dynamic Nonlinear, Dynamic Nonideal.

# Índice

<b>Resumo</b>	i
<b>Abstract</b>	ii
<b>Índice</b>	iii
<b>Lista de Tabelas</b>	v
<b>Lista de Figuras</b>	vi
<b>Nomenclatura</b>	xii
<b>1 Introdução</b>	1
1.1 Motivações e Objetivos	1
1.2 Breve Revisão Bibliográfica	3
1.2.1 Absorvedores de Vibrações	3
1.2.2 Analogia entre Sistemas Mecânicos e Sistemas Elétricos	9
1.2.3 Transdutores	11
1.2.4 Sistemas Dinâmicos do Tipo Ideal e do Tipo Não-Ideal	12
1.2.5 Sistemas Não-Lineares	16
1.3 Descrição do Trabalho	19
<b>2 Modelagem Matemática da Dinâmica de um Sistema Não-Ideal com Absorvedor de Vibrações do Tipo Eletromecânico</b>	21
2.1 Descrição do Problema	21
2.2 Obtenção das Equações Governantes do Movimento	22
2.2.1 Equações do Transdutor Eletromecânico	23
2.2.2 Equações do Sistema Não-Ideal	25
2.2.2 Equações do Absorvedor de Vibrações do Tipo Eletromecânico	27
2.2.3 Sistema de Equações Adimensionais	28
2.3 Obtenção das Equações de Movimento Considerando-se o Torque Variável do Motor	31

<b>3 Simulações Numéricas</b>	34
3.1 Considerações Gerais	34
3.2 Resultados das Simulações Utilizando-se Um Absorvedor Eletromecânico	
Linear	38
3.2.1 Modelo Simplificado do Sistema com Absorvedor Linear	38
3.2.2 Modelo Completo do Sistema com Absorvedor Linear	47
3.3 Resultados das Simulações Utilizando-se Um Absorvedor Eletromecânico	
Não-Linear	52
3.3.1 Modelo Simplificado do Sistema com Absorvedor Não-Linear	52
3.3.2 Modelo Completo do Sistema com Absorvedor Não-Linear	56
<b>4 Busca das Soluções Analíticas Aproximadas</b>	58
4.1 Considerações Gerais	58
4.2 Utilização do Método da Média	59
<b>5 Algumas Aplicações do Absorvedor de Vibrações Eletromecânico</b>	65
5.1 Utilização de um Absorvedor de Vibrações Eletromecânico em um Sistema	
Não-Ideal com Rigidez do Tipo Mola Mole	66
5.1.1 Modelo Matemático Adotado	66
5.1.2 Resultados Numéricos e Discussões	67
5.2 Utilização de um Absorvedor de Vibrações Eletromecânico em um Sistema Não-	
Ideal com Potencial de Mínimos Duplos	76
5.2.1 Modelo Matemático	76
5.2.2 Resultados Numéricos e Discussões	77
<b>6 Discussões, Trabalhos Futuros e Conclusões</b>	84
<b>Referências Bibliográficas</b>	87
<b>Apêndice A Modelo Matemático de um Motor de Corrente Contínua</b>	93
<b>Apêndice B Rotinas Computacionais</b>	95
<b>Apêndice C Outra Solução Analítica Aproximada</b>	103
<b>Súmula Curricular</b>	107

## Lista de Tabelas

Tabela 1.1 Modelos matemáticos dos circuitos mecânicos e elétricos.	9
Tabela 1.2 Elementos análogos de sistemas mecânicos e elétricos baseado na relação força-voltagem. Medidas no Sistema Internacional de Unidades (SI).	10
Tabela 1.3 Elementos análogos de sistemas mecânicos e elétricos baseado na relação força-corrente. Medidas no Sistema Internacional de Unidades (SI).	10
Tabela 3.1 Valores dos parâmetros adimensionais utilizados nas simulações do modelo simplificado.	35
Tabela 3.2 Valores dos parâmetros adimensionais utilizados nas simulações do modelo com completo.	37
Tabela 5.1 Comportamento do sistema para cada valor do parâmetro de controle.	77

## Lista de Figuras

Figura 1.1	Modelo do sistema estudado por Zhu, Zhen e Fu (2004).	3
Figura 1.2	Modelo utilizado por Yuri e Reshetnikova (2005).	4
Figura 1.3	Esquema representativo do sistema estudado por Vera e Febo (2008).	4
Figura 1.4	Modelo do DVA estudado por Vera e Febo (2008).	4
Figura 1.5	Modelo do sistema estudado por Ikeda (2007).	5
Figura 1.6	Modelo do sistema estudado por Woong, Weon e Sin (2007).	5
Figura 1.7	Modelo do sistema estudado por Vyas e Bajaj (2001).	6
Figura 1.8	Esquema da estrutura proposta por Snowdon, Wolfe e Kerlin (1984).	6
Figura 1.9	Esquema do sistema estudado por Morgan e Wang (2002).	7
Figura 1.10	Modelo do sistema estudado por Yamapi (2006).	7
Figura 1.11	Esquema do acoplamento das estruturas estudada por Nichols e Ghoneim (2003).	8
Figura 1.12	Esquema do sistema estudado por Dantas (2004).	14
Figura 1.13	Modelo do sistema não-ideal utilizado por Guilherme (2004).	14
Figura 1.14	Modelo de um sistema com potencial de mínimos duplos.	18
Figura 2.1	Sistema não-ideal com absorvedor de vibrações do tipo eletromecânico (Felix e Balthazar, 2008).	21
Figura 2.2	Modelo físico do sistema não-ideal com absorvedor de vibrações do tipo eletromecânico (Felix e Balthazar, 2008).	22
Figura 2.3	Transdutor de bobina móvel. a) vista de frente. b) vista lateral. (Vassalo, 1992).	23
Figura 2.4	Campo magnético permanente (Vassalo, 1992)	23
Figura 3.1	Curvas de resposta-freqüência do sistema com absorvedor de vibrações linear, a) Freqüência de excitação vs. Amplitude de deslocamento da estrutura, e b) Freqüência de Excitação vs. Amplitude de oscilação do absorvedor.	39
Figura 3.2	Curvas de resposta-parâmetro de controle do sistema com absorvedor de vibrações linear, a) Parâmetro de controle vs. Amplitude de deslocamento da estrutura, e b) Parâmetro de controle vs. Amplitude de oscilação do absorvedor.	40
Figura 3.3	Relação entre parâmetro de controle e freqüência de excitação.	40

- Figura 3.4 Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_1 = 14$  e  $\alpha_2 = -10$ ,  
a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário, c)  
FFT do sistema sem absorvedor, e d) FFT do sistema com absorvedor. 41
- Figura 3.5 Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_2$  para  $\mu_1 = 14$  e  $\alpha_2 = -10$ ,  
a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário, c)  
FFT do sistema sem absorvedor, e d) FFT do sistema com absorvedor. 42
- Figura 3.6 Histórico da velocidade rotacional do motor para  $\mu_1 = 14$  e  $\alpha_2 = -10$ . 43
- Figura 3.7 Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_1 = 20$  e  $\alpha_2 = -10$ ,  
a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário, c)  
FFT do sistema sem absorvedor, e d) FFT do sistema com absorvedor. 44
- Figura 3.8 Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_2$  para  $\mu_1 = 20$  e  $\alpha_2 = -10$ ,  
a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário, c)  
FFT do sistema sem absorvedor, e d) FFT do sistema com absorvedor. 45
- Figura 3.9 Histórico da velocidade rotacional do motor para  $\mu_1 = 20$  e  $\alpha_2 = -10$ . 45
- Figura 3.10 a) Expoentes de Lyapunov do sistema sem absorvedor, e b) Detalhe dos  
três maiores expoentes. 46
- Figura 3.11 a) Expoentes de Lyapunov do sistema com absorvedor, e b) Detalhe dos  
três maiores expoentes. 46
- Figura 3.12 Curvas de resposta-freqüência do sistema, a) Freqüência de excitação vs.  
amplitude de deslocamento da estrutura, b) Freqüência de excitação  
vs.amplitude de oscilação do absorvedor, c) Freqüência de excitação vs.  
amplitude de oscilação da corrente na armadura do motor, e d) Relação  
entre parâmetro de controle vs. freqüência de excitação. 47
- Figura 3.13 Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_3 = 0.9$ ,  
a) Histórico do deslocamento e b) Plano de fase no regime estacionário. 48
- Figura 3.14 Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_2$  para  $\mu_3 = 0.9$ ,  
a) Histórico do deslocamento e b) Plano de fase no regime estacionário. 48
- Figura 3.15 Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_3$  para  $\mu_3 = 0.9$ ,  
a) Histórico do deslocamento e b) Plano de fase no regime estacionário. 49
- Figura 3.16 Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_3 = 1.2$ ,  
a) Histórico do deslocamento e b) Plano de fase no regime estacionário. 49

- Figura 3.17 Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_2$  para  $\mu_3 = 1.2$ ,  
a) Histórico do deslocamento e b) Plano de fase no regime estacionário. 50
- Figura 3.18 Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_3$  para  $\mu_3 = 1.2$ ,  
a) Histórico do deslocamento e b) Plano de fase no regime estacionário. 50
- Figura 3.19 Histórico do deslocamento para  $\mu_3 = 1.3$ , a) da variável adimensional relacionada à corrente na armadura do motor e b) da frequência de excitação do motor. 51
- Figura 3.20 Histórico do deslocamento para  $\mu_3 = 1.4$ , a) da variável adimensional relacionada à corrente na armadura do motor e b) da frequência de excitação do motor. 51
- Figura 3.21 Histórico do deslocamento para  $\mu_3 = 1.5$ , a) da variável adimensional relacionada à corrente na armadura do motor e b) da frequência de excitação do motor. 51
- Figura 3.22 Curva resposta-frequência para o sistema com absorvedor de vibrações não-linear quando  $\alpha_2 = 10$ , a) Frequência de excitação vs. Amplitude de deslocamento da estrutura, e b) Frequência de excitação vs. Amplitude de oscilação do absorvedor. 53
- Figura 3.23 Curva resposta-frequência para o sistema com absorvedor de vibrações não-linear quando  $\alpha_2 = 1$ , a) Frequência de excitação vs. Amplitude de deslocamento da estrutura, e b) Frequência de excitação vs. Amplitude de oscilação do absorvedor. 54
- Figura 3.24 Curva resposta-frequência para o sistema com absorvedor de vibrações não-linear quando  $\alpha_2 = 0.1$ , a) Frequência de excitação vs. Amplitude de deslocamento da estrutura, e b) Frequência de excitação vs. Amplitude de oscilação do absorvedor. 54
- Figura 3.25 Curva resposta-frequência para o sistema com absorvedor de vibrações não-linear quando  $\alpha_2 = 0.1$  e  $\alpha_3 = 10$ , a) Frequência de excitação vs. amplitude de deslocamento da estrutura, e b) Frequência de excitação vs. Amplitude de oscilação do absorvedor. 55
- Figura 3.26 a) Expoentes de Lyapunov do sistema sem absorvedor, e b) Detalhe dos três maiores expoentes. 55

- Figura 3.27 a) Expoentes de Lyapunov versus o parâmetro de controle para o sistema com absorvedor, e b) Detalhe dos três maiores expoentes de Lyapunov. 56
- Figura 3.28 Curvas de resposta-freqüência do sistema, a) Freqüência de excitação vs. amplitude de deslocamento da estrutura, b) Freqüência de excitação vs. amplitude de oscilação do absorvedor, c) Freqüência de excitação vs. amplitude de oscilação da corrente na armadura do motor, e d) Relação entre parâmetro de controle vs. freqüência de excitação. 57
- Figura 4.1 Curvas de resposta-freqüência do sistema com absorvedor de vibrações linear, a) Freqüência de excitação vs. Amplitude de deslocamento da estrutura, e b) Freqüência de Excitação vs. Amplitude de oscilação do absorvedor. 64
- Figura 4.2 Curvas de resposta-freqüência do sistema com absorvedor de vibrações linear, a) Freqüência de excitação vs. Amplitude de deslocamento da estrutura, e b) Freqüência de Excitação vs. Amplitude de oscilação do absorvedor. 64
- Figura 5.1 Curvas de resposta-freqüência do sistema com absorvedor de vibrações linear, a) Freqüência de excitação vs. Amplitude de deslocamento da estrutura, e b) Freqüência de Excitação vs. Amplitude de oscilação do absorvedor. 67
- Figura 5.2 Curvas de resposta-parâmetro de controle do sistema com absorvedor de vibrações linear, a) Parâmetro de controle vs. Amplitude de deslocamento da estrutura, e b) Parâmetro de controle vs. Amplitude de oscilação do absorvedor. 68
- Figura 5.3 Relação entre parâmetro de controle e freqüência de excitação. 68
- Figura 5.4 Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_1 = 13$ , a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário, c) FFT do sistema sem absorvedor, e d) FFT do sistema com absorvedor. 69
- Figura 5.5 Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_1 = 14$ , a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário, c) FFT do sistema sem absorvedor, e d) FFT do sistema com absorvedor. 70

- Figura 5.6 Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_2$  para  $\mu_1 = 14$ , a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário, c) FFT do sistema sem absorvedor, e d) FFT do sistema com absorvedor. 71
- Figura 5.7 Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_1 = 21$ , a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário, c) FFT do sistema sem absorvedor, e d) FFT do sistema com absorvedor. 72
- Figura 5.8 Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_1 = 23$ , a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário, c) FFT do sistema sem absorvedor, e d) FFT do sistema com absorvedor. 73
- Figura 5.9 Histórico da velocidade rotacional do motor quando, a)  $\mu_1 = 13$ , b)  $\mu_1 = 14$ , c)  $\mu_1 = 21$  e d)  $\mu_1 = 23$ . 74
- Figura 5.10 a) Expoentes de Lyapunov versus o parâmetro de controle para o sistema sem absorvedor, e b) Detalhe dos três maiores expoentes de Lyapunov. 75
- Figura 5.11 a) Expoentes de Lyapunov versus o parâmetro de controle para o sistema com absorvedor, e b) Detalhe dos três maiores expoentes de Lyapunov. 75
- Figura 5.12 Curvas de resposta-freqüência do sistema, a) Freqüência de excitação vs. amplitude de deslocamento da estrutura, e b) Freqüência de excitação vs. amplitude de oscilação do absorvedor. 78
- Figura 5.13 Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_1 = 14$ , a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário. 79
- Figura 5.14 Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_1 = 15$ , a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário. 79
- Figura 5.15 Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_1 = 19$ , a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário. 80
- Figura 5.16 Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_1 = 28$ , a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário. 80
- Figura 5.17 Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_1 = 27$  e  $\alpha_2 = 0.1$ , a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário. 81
- Figura 5.18 Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_1 = 44$ , a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário. 81
- Figura 5.19 a) Expoentes de Lyapunov do sistema sem absorvedor, e b) Detalhe dos três maiores expoentes. 82

Figura 5.20 a) Expoentes de Lyapunov do sistema com absorvedor, e b) Detalhe dos três maiores expoentes.	83
Figura A.1 Circuito equivalente de um motor CC controlado pela armadura (Basílio e Moreira, 2001).	93
Figura B.1 Diagrama de bloco do modelo simplificado.	95
Figura B.2 Diagrama de bloco do absorvedor para o modelo simplificado.	96
Figura B.3 Diagrama de bloco da estrutura principal para o modelo simplificado.	96
Figura B.4 Diagrama de bloco do motor para o modelo simplificado.	97
Figura B.5 Diagrama de bloco do modelo completo.	98
Figura B.6 Diagrama de bloco do absorvedor para o modelo completo.	99
Figura B.7 Diagrama de bloco da estrutura principal para o modelo completo.	99
Figura B.8 Diagrama de bloco do motor para o modelo completo.	100

# Nomenclatura

## Letras Latinas

$a$  - coeficiente não-linear do capacitor.

$A_1, A_2$  - amplitudes das soluções analíticas aproximadas.

$b$  - coeficiente de amortecimento viscoso.

$B_1, B_2$  - fases das soluções analíticas aproximadas.

$\vec{B}$  - campo magnético radial uniforme.

$c$  - coeficiente de atrito viscoso no motor CC.

$C$  - capacitância do circuito elétrico RCL.

$e$  - diferença de potencial gerado pelo transdutor.

$e_a$  - força contra-eletromotriz do motor.

$f$  - força externa necessária para balancear a força associada ao campo magnético na bobina móvel.

$\mathbf{F}$  - vetor função que descreve a evolução de um sistema não-linear.

$h$  - raio das espiras da bobina.

$i$  - corrente elétrica do circuito elétrico RCL.

$i_0$  - corrente elétrica inicial no circuito elétrico RCL.

$I_0$  - momento de inércia do rotor.

$i_a$  - corrente elétrica na armadura do motor.

$J$  - momento de inércia da carga no eixo de saída do motor CC.

$k_1, k_2$  - constantes de rigidez.

$K_g$  - constante da força contra-eletromotriz do motor CC.

$K_m$  - constante de torque do motor CC.

$L$  - indutância do circuito elétrico RCL.

$L_a$  - indutância elétrica do motor CC.

$m_0$  - massa desbalanceada do motor não-ideal.

$m_1$  - massa da estrutura.

$\mathbf{M}$  - vetor de parâmetros de controle.  
 $M(\phi')$  - expressão do torque resultante desenvolvido pelo motor.  
 $n$  - número de espiras da bobina.  
 $p_i$  - coordenadas generalizadas usadas na formulação de Lagrange.  
 $P_i$  - forças não conservativas usadas na formulação de Lagrange.  
 $q$  - carga elétrica instantânea no circuito elétrico RCL.  
 $\dot{q}$  - variação da carga elétrica ou corrente do circuito RCL.  
 $\ddot{q}$  - variação da corrente elétrica do circuito RCL.  
 $Q$  - expressão da energia usada na formulação de Lagrange.  
 $r$  - excentricidade do rotor.  
 $R$  - resistência do circuito elétrico RCL.  
 $R_a$  - resistência elétrica do motor CC.  
 $S$  - constante do transdutor eletromecânico.  
 $t$  - variável do tempo.  
 $T$  - expressão da energia cinética usada na formulação de Lagrange.  
 $V$  - expressão da energia potencial usada na formulação de Lagrange.  
 $u_1$  - constante relacionado à tensão aplicada no motor CC.  
 $u_2$  - constante relacionado à característica do motor CC.  
 $U$  - tensão elétrica aplicada aos terminais da armadura do motor CC.  
 $U_c$  - expressão da tensão elétrica sobre o capacitor não-linear.  
 $U_L$  - expressão da tensão elétrica sobre o indutor linear.  
 $U_R$  - expressão da tensão elétrica sobre o resistor não-linear.  
 $u_x$  - versor na direção axial.  
 $v$  - velocidade associada ao movimento da bobina.  
 $x$  - deslocamento da estrutura principal.  
 $\dot{x}$  - velocidade de deslocamento da estrutura principal.  
 $\ddot{x}$  - aceleração de deslocamento da estrutura principal.  
 $\mathbf{x}$  - vetor de variáveis de estado.  
 $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$  - variáveis de estado.

## Letras Gregas

$\alpha_1$  - coeficiente de amortecimento adimensional da estrutura principal.

$\alpha_2$  - coeficiente de amortecimento adimensional do termo linear do circuito RCL.

$\alpha_3$  - coeficiente de amortecimento adimensional do termo não-linear do circuito RCL.

$\beta_1$  - constante de rigidez adimensional do termo não-linear da estrutura principal.

$\beta_2$  - constante de elastância (rigidez) adimensional do termo não-linear do circuito RCL.

$\chi_1$  - deslocamento adimensional da estrutura principal.

$\chi_1'$  - velocidade adimensional de deslocamento da estrutura principal.

$\chi_1''$  - aceleração adimensional de deslocamento da estrutura principal.

$\chi_2$  - deslocamento adimensional da carga elétrica do circuito RCL.

$\chi_2'$  - velocidade adimensional de deslocamento da carga elétrica do circuito RCL.

$\chi_2''$  - aceleração adimensional de deslocamento da carga elétrica do circuito RCL.

$\chi_3$  - deslocamento adimensional da corrente na armadura do motor.

$\chi_3'$  - velocidade adimensional de deslocamento da corrente na armadura do motor.

$\chi_3''$  - aceleração adimensional de deslocamento da corrente na armadura do motor.

$\delta_1, \delta_2$  - parâmetro adimensional de acoplamento da equação de corrente do motor.

$\Delta$  - parâmetro da frequência de excitação.

$\varepsilon$  - parâmetro de acoplamento adimensional entre a estrutura principal e o motor CC.

$\phi$  - deslocamento angular adimensional da massa desbalanceada.

$\phi'$  - velocidade angular adimensional da massa desbalanceada.

$\phi''$  - aceleração angular adimensional da massa desbalanceada.

$\varphi$  - deslocamento angular da massa desbalanceada.

$\dot{\varphi}$  - velocidade angular da massa desbalanceada.

$\ddot{\varphi}$  - aceleração angular da massa desbalanceada.

$\Gamma(\phi)$  - expressão do torque resultante adimensional desenvolvido pelo motor.

$\gamma_1, \gamma_2$  - parâmetro de acoplamento adimensional entre o circuito elétrico e o sistema mecânico.

$\lambda$  - parâmetro de acoplamento adimensional entre motor CC e a estrutura principal.

$\bar{\lambda}_i$  - expoentes de Lyapunov.

$\mu_1$  - parâmetro de controle adimensional (relativo à tensão de alimentação na armadura do motor elétrico - torque constante).

$\mu_2$  - parâmetro adimensional relacionado à característica do motor CC – torque constante.

$\mu_3$  - parâmetro de controle adimensional (relativo à tensão de alimentação na armadura do motor elétrico - torque variável ).

$\mu_4$  - parâmetro adimensional relacionado à característica do motor CC – torque variável.

$\tau$  - variável de tempo adimensional.

$\Omega$  - parâmetro da frequência de excitação.

$\sigma_1$  - parâmetro de sintonia da ressonância interna entre sistema mecânico e sistema elétrico.

$\sigma_2$  - parâmetro de sintonia da ressonância externa.

$\omega_1$  - frequência natural adimensional da estrutura principal.

$\omega_2$  - frequência natural adimensional do circuito elétrico.

$\omega_e$  - frequência natural do circuito elétrico.

$\omega_m$  - frequência natural da estrutura principal.

# Capítulo 1

## Introdução

Neste capítulo, inicialmente, apresenta-se as motivações e os objetivos desta dissertação. A seguir, realiza-se uma revisão bibliográfica contextualizando o trabalho na literatura. Finalmente, descreve-se como estão estruturados e o que será encontrado em cada capítulo deste trabalho.

### 1.1 Motivações e Objetivos

Vibração é o fenômeno físico caracterizado pelo movimento oscilatório de um objeto em relação a uma posição de equilíbrio. No nosso cotidiano, todos os objetos apresentam vibrações. As vibrações podem ser transmitidas na forma de deslocamentos, velocidades e acelerações. Embora em muitos casos as vibrações possam ser úteis e desejadas (por exemplo: esteira separadora de grãos), em muitos outros casos são prejudiciais e indesejadas. Em estruturas mecânicas, vibrações podem provocar fadiga e causar barulhos indesejados. A necessidade de se controlar as vibrações excessivas motivou pesquisadores a encontrar novas soluções para o problema.

Conforme Du (2003), pode-se controlar os níveis de vibrações de três formas: reduzindo a intensidade da fonte excitadora, isolando a estrutura excitada ou modificando as características dinâmicas da estrutura.

As características dinâmicas da estrutura podem ser modificadas pela introdução de absorvedores de vibrações. Absorvedores de vibrações são dispositivos passivos usados na redução de vibrações excessivas em sistemas mecânicos. Os absorvedores típicos consistem de um dispositivo inercial que modifica a resposta dinâmica do sistema vibratório original, em uma determinada faixa de frequência de interesse. Os dispositivos absorvedores podem ser um oscilador massa-mola, um oscilador pendular, um fluido ou uma estrutura elástica contínua.

Embora um absorvedor de vibrações possa produzir uma redução das amplitudes de vibrações do sistema mecânico original, esta melhora, somente, é obtida à custa de um aumento das amplitudes de vibrações do absorvedor. Este aumento das amplitudes

de vibrações do absorvedor é um dos maiores problemas encontrados no projeto de um absorvedor. Falhas estruturais e limitações de espaço e peso restringem a utilização de absorvedores de vibrações.

Esta dissertação foi motivada pelo trabalho realizado anteriormente por Felix e Balthazar (2008), que obteve os primeiros resultados na investigação da redução de vibrações em uma viga engastada excitada por um motor não-ideal (fonte de energia com potência limitada) usando um absorvedor de vibrações eletromecânico,

O objetivo principal desta dissertação foi estudar a efetividade de absorvedores de vibrações eletromecânico, considerando modelos lineares e não-lineares, em um sistema não-ideal (sistema com fonte de energia não-ideal), ou seja, quando a excitação é influenciada pela resposta do sistema.

Para atingirmos o objetivo principal deste trabalho algumas etapas, ou objetivos secundários, foram necessárias:

- Elaboração de um modelo matemático mais completo e real possível, que contemplasse elementos lineares e não-lineares;
- Simulações numéricas que mostrassem a eficiência dos absorvedores de vibrações eletromecânico em sistemas não-ideais e a interação entre sistemas mecânicos e elétricos;
- Comparação da eficiência de absorvedores lineares e absorvedores não-lineares em sistemas não-ideais;
- Estudo do comportamento do sistema para diferentes valores dos parâmetros dos termos lineares e não-lineares e a importância de cada parâmetro;
- Obtenção de soluções analíticas através de técnicas de perturbação;
- Comparação entre soluções obtidas analiticamente e as soluções obtidas numericamente;
- Estudo da estabilidade do sistema;
- Estudo da eficiência do absorvedor de vibrações eletromecânico em sistemas que apresentam comportamento irregular, através do estudo de casos particulares;
- Analisar os resultados do uso dos absorvedores de vibrações eletromecânicos em condições únicas de sistemas não-lineares (por exemplo: caos) e de sistemas não-ideais (por exemplo: fenômeno de salto).

## 1.2 Breve Revisão Bibliográfica

### 1.2.1 Absorvedores de Vibrações

O absorvedor de vibração, uma aplicação de controle passivo, foi inventado por Frahm em 1909, segundo Wright e Kidner (2004). Tal dispositivo consistia num sistema vibratório massa-mola que acoplado à estrutura principal oscilante, tinha a função de reduzir os níveis de vibração, e sua característica principal era apresentar a mesma frequência natural da estrutura ressonante.

Durante o século XX inúmeras publicações científicas trataram de absorvedores de vibrações mecânicas. Marques (2000) cita alguns dos trabalhos mais importantes deste período. A seguir, são mostradas as tendências de pesquisa no campo de absorvedores de vibrações.

Zhu, Zheng e Fu (2004) analisaram a interação dinâmica entre um oscilador com amortecimento e rigidez não-lineares e um absorvedor, modelado por um oscilador com amortecimento e rigidez não-lineares e excitado por uma força harmônica. A figura 1.1 mostra o modelo do sistema estudado pelos autores.

Os símbolos utilizados nas figuras, extraídas das referências, não serão explicitados neste trabalho, pois se trata de uma nomenclatura usual em trabalhos científicos e fugiria do objetivo principal, que é mostrar a tendência de pesquisa do assunto abordado.

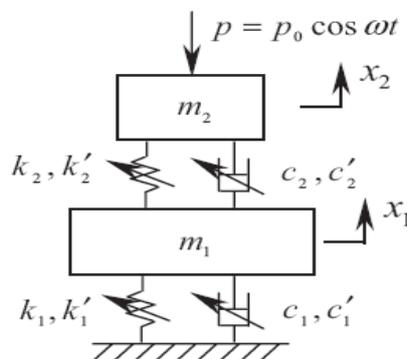


Figura 1.1 – Modelo do sistema estudado por Zhu, Zhen e Fu (2004).

Yuri e Reshetnikova (2005) estudaram a interação dinâmica entre uma estrutura elástica, modelado por um oscilador linear de massa relativamente grande e um absorvedor não-linear, modelado por um oscilador de massa relativamente pequena e rigidez não-linear. A figura 1.2 mostra o modelo do sistema analisado pelos autores.

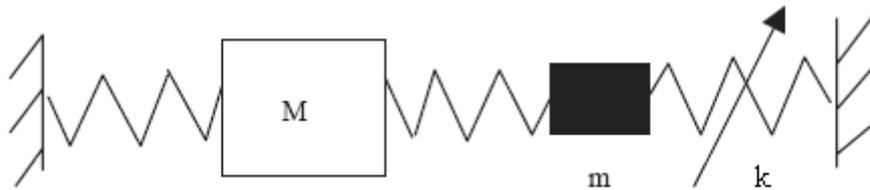


Figura 1.2 – Modelo utilizado por Yuri e Reshetnikova (2005).

Vera e Febo (2008) lidaram com o problema de encontrar os coeficientes ótimos de rigidez e amortecimento do absorvedor de vibrações dinâmicas (DVA) com dois graus de liberdades, utilizado em uma viga excitada por uma força harmônica. As figuras 1.3 e 1.4 mostram o esquema do sistema estudado e o modelo do absorvedor de dois graus de liberdades, respectivamente.

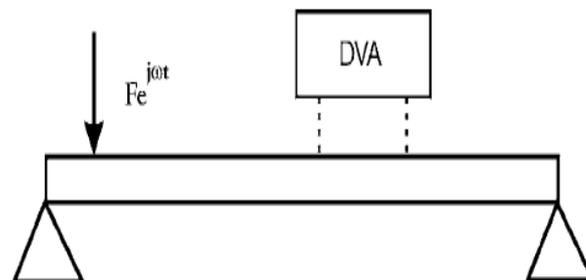


Figura 1.3 – Esquema representativo do sistema estudado por Vera e Febo (2008).

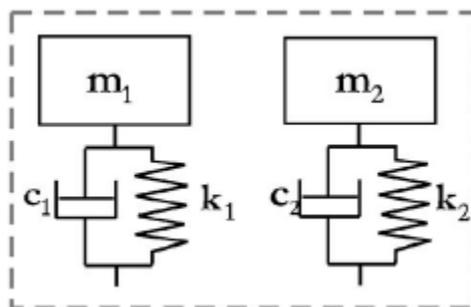


Figura 1.4 – Modelo do DVA estudado por Vera e Febo (2008).

Ikeda (2007) estudou a interação dinâmica de um oscilador linear excitado por uma força harmônica e dois absorvedores de vibrações não-lineares, utilizados simultaneamente. Para determinadas condições foram mostradas a existência de bifurcações, causadas pelo acoplamento dos dois absorvedores. A figura 1.5 mostra o modelo do sistema estudado por Ikeda.

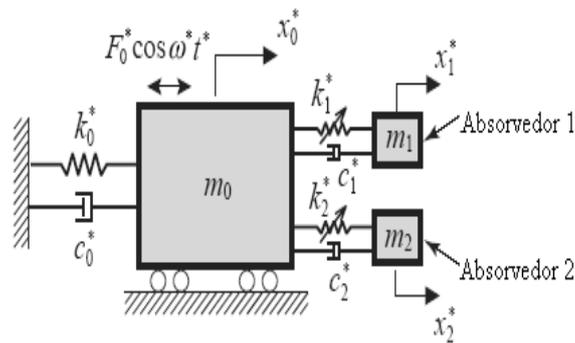


Figura 1.5 – Modelo do sistema estudado por Ikeda (2007).

Woong, Weon e Sin (2007) projetaram e construíram um absorvedor de vibrações dinâmicas (DVA) para um hardware de DVD  $\pm$  RW. A construção do absorvedor foi baseada na análise do modelo e depois comprovada experimentalmente. A figura 1.6 mostra o modelo do hardware proposto pelos pesquisadores.

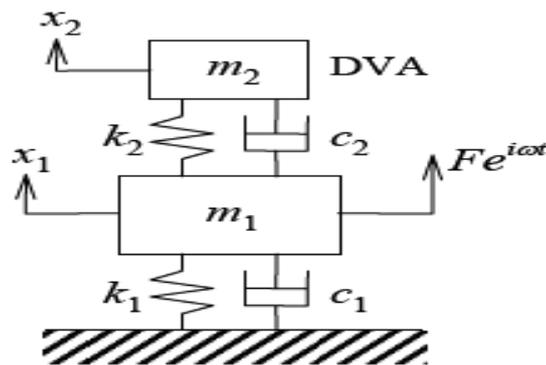


Figura 1.6 – Modelo do sistema estudado por Woong, Weon e Sin (2007).

Outros pesquisadores estudaram os chamados absorvedores inerciais do tipo massa-mola ou massa-mola-amortecedor em diferentes aplicações e condições. Entre eles Ram e Elhay (1996), Nagaya et al (1999), Wright e Kidner (2004), os irmãos Liu (2005) etc.

Os absorvedores de vibrações mecânicas, também, podem ser do tipo pendular.

Vyas e Bajaj (2001) analisaram a interação dinâmica de um absorvedor paramétrico de vibrações (pendular) acoplado a um oscilador linear de um grau de liberdade. A figura 1.7 mostra o modelo do sistema estudado por Vyas e Bajaj.

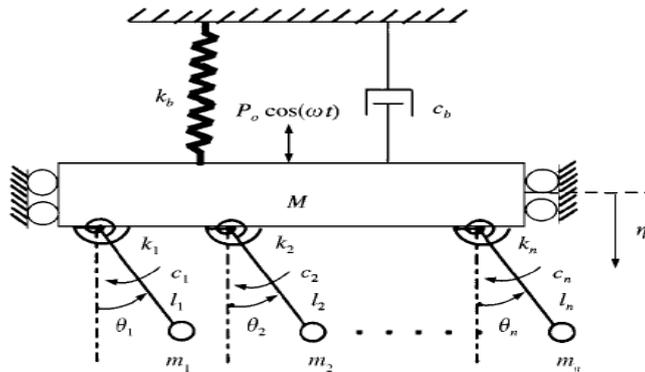


Figura 1.7 – Modelo do sistema estudado por Vyas e Bajaj (2001).

Uma estrutura elástica continua também pode ser usada com absorvedor de vibrações. Snowdon, Wolfe e Kerlin (1984) propuseram um absorvedor em forma de crucifixo que seria acoplada ao oscilador pelo ponto de intersecção entre as vigas da estrutura. Este tipo de absorvedor poderia ser utilizado onde fosse desejada a combinação da ação de dois absorvedores. A figura 1.8 mostra o esquema da estrutura proposta por eles.

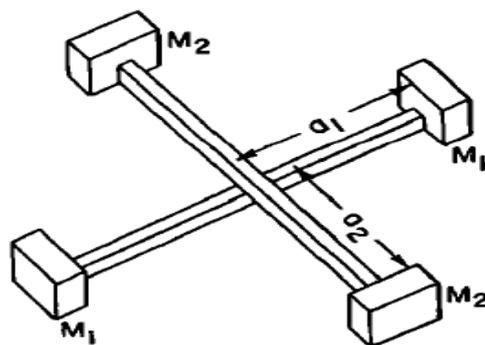


Figura 1.8 – Esquema da estrutura proposta por Snowdon, Wolfe e Kerlin (1984).

Recentemente, outros tipos de absorvedores de vibrações que tem despertado o interesse dos pesquisadores são os absorvedores de vibrações eletromecânicos. Estes dispositivos de amortecimento eletromecânicos apresentam comportamento semelhante

aos absorvedores de vibrações mecânicas. A analogia entre sistemas mecânicos e elétricos, explicada na seção 1.2.2, mostra melhor esta semelhança. Absorvedores de vibrações eletromecânicos consistem de um sistema elétrico acoplado ao sistema oscilador através de transdutores (ver seção 1.2.3). Antecipando-se, alguns dos transdutores mais estudados e utilizados são os piezelétricos e os eletromagnéticos.

Liu et al. (1999) propôs um modelo de elementos finitos baseado na teoria clássica de placas laminadas para determinar a redução de vibrações e controle de trajetórias de uma placa através de sensores e atuadores piezelétricos.

Morgan e Wang (2002) propuseram um modelo de um absorvedor, denominado por eles de ativo-passivo, constituído por um atuador piezelétrico, um circuito elétrico (parte passiva), um controlador e uma fonte de tensão (parte ativa). A figura 1.9 mostra o esquema do sistema estudado por eles.

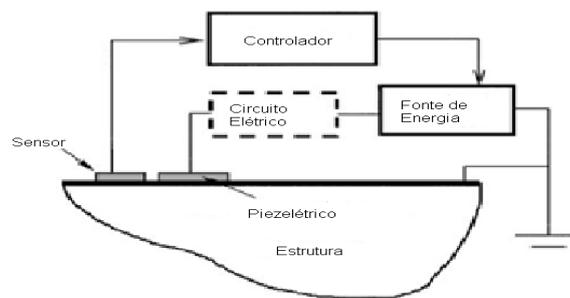


Figura 1.9 – Esquema do sistema estudado por Morgan e Wang (2002).

Yamapi (2006) analisou a dinâmica de um dispositivo de amortecimento eletromecânico acoplado a um oscilador não-linear de um grau de liberdade através de um transdutor eletromagnético. A figura 1.10 mostra o modelo do sistema utilizado por Yamapi.

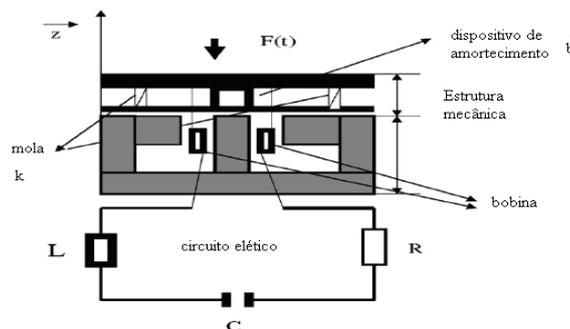


Figura 1.10 – Modelo do sistema estudado por Yamapi (2006).

Outra possibilidade no uso de absorvedores eletromecânicos seria o uso de transdutores de bobina móvel, que permitem maior variação nos valores dos parâmetros do absorvedor e podem ser aplicados em uma variedade maior de problemas de vibrações em máquinas e estruturas. Nagem, Madanshetty e Medhi (1997) realizaram alguns experimentos preliminares e propôs um modelo para este tipo de absorvedor de vibrações eletromecânico.

Outro tipo de absorvedor de vibrações eletromecânico foi estudado por Nichols e Ghoneim (2003). Este absorvedor não seria formado por um circuito elétrico, e sim, outra estrutura flexível. A transferência de energia entre as estruturas seria realizada por um piezelétrico. A figura 1.11 mostra o esquema do acoplamento utilizado por eles.

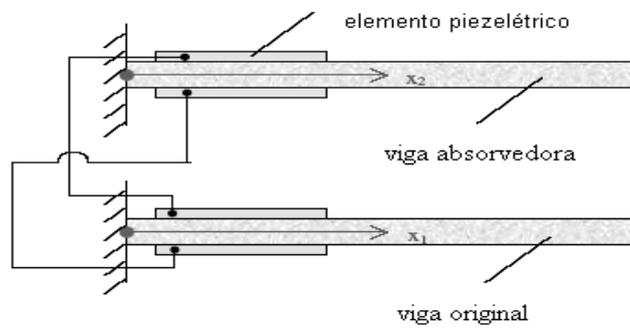


Figura 1.11 – Esquema do acoplamento das estruturas estudada por Nichols e Ghoneim (2003).

A possibilidade de se substituir um absorvedor do tipo massa-mola por um circuito elétrico ocorre devido a semelhança entre os modelos matemático gerados pelos sistemas mecânicos e elétricos. A seguir, verifica-se a analogia existente entre sistemas mecânicos e elétricos.

## 1.2.2 Analogia entre Sistemas Mecânicos e Sistemas Elétricos

Dois sistemas físicos são análogos (duais) quando são descritos pelo mesmo modelo matemático, ou seja, pelo mesmo conjunto de equações diferenciais ou pela mesma função de transferência.

Os sistemas análogos caracterizam-se por apresentarem a mesma forma de resposta quando submetidos a excitações do mesmo tipo.

O conceito de sistemas análogos é bem mais amplo: podemos ter analogias eletro-hidráulica, eletrotérmica, eletropneumática, etc.

No que diz respeito à analogia eletromecânica, segundo Dorf e Bishop (2001), temos dois tipos: a analogia força-voltagem, com base na Lei de Kirchhoff das malhas, e a analogia força-corrente, amparada na Lei de Kirchhoff dos nós.

A tabela 1.1 mostra as equações diferenciais de um sistema mecânico do tipo massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade, de um circuito elétrico RCL em série, obtido pela lei das malhas, e de um circuito elétrico RCL em paralelo, obtido pela lei dos nós. A simbologia usada nesta tabela é descrita nas tabelas seguintes.

Tabela 1.1 – Modelos matemáticos dos circuitos mecânicos e elétricos.

Sistema Mecânico	Sistema Elétrico (obtido pela lei das malhas)	Sistema Elétrico (obtido pela lei dos nós)
Sistema Translacional $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t)$	$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = e(t)$	$C \frac{de}{dt} + \frac{1}{R} e + \frac{1}{L} \int_0^t e dt = i$
Sistema rotacional $J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + K\theta = T(t)$	ou $L\dot{q} + Rq + \frac{1}{C} q = e(t)$	ou $C\ddot{\psi} + \frac{1}{R}\dot{\psi} + \frac{1}{L}\psi = i(t)$

A analogia realizada aqui se estende para sistemas que apresentam elementos não-lineares. Nestes casos, faz-se necessário realizar novamente as devidas comparações entre os modelos matemáticos.

A tabela 1.2 mostra os elementos análogos obtido por comparação entre os modelos matemáticos dos sistemas mecânico e elétrico na analogia força-voltagem.

A tabela 1.3 mostra a analogia força-corrente obtida da comparação entre os modelos matemáticos dos sistemas mecânico e elétrico na analogia força-corrente.

Tabela 1.2 – Elementos análogos de sistemas mecânicos e elétricos baseado na relação força-voltagem. Medidas no Sistema Internacional de Unidades (SI).

Sistema Mecânico	Sistema Elétrico
Força $f (N)$ ou Torque $T (N.m)$	Voltagem $e (V)$
Massa $m (Kg)$ ou Inércia $J (Kg.m^2)$	Indutância $L (H)$
Amortecimento Viscoso $b (N.s/m)$ ou $B (N.m.s/rad)$	Resistência $R (\Omega)$
Rigidez $k (N/m)$ ou $K (N.m/rad)$	Inverso da Capacitância $1/C (1/F)$
Deslocamento $x (m)$ ou $\theta (rad)$	Carga Elétrica $q (C)$
Velocidade $\dot{x} (m/s)$ ou $\dot{\theta} (rad/s)$	Corrente Elétrica $i (A)$
Aceleração $\ddot{x} (m/s^2)$ ou $\ddot{\theta} (rad/s^2)$	Varição $di/dt (A/s)$

Tabela 1.3 – Elementos análogos de sistemas mecânicos e elétricos baseado na relação força-corrente. Medidas no Sistema Internacional de Unidades (SI).

Sistema Mecânico	Sistema Elétrico
Força $f (N)$ ou Torque $T (N.m)$	Corrente Elétrica $i (A)$
Massa $m (Kg)$ ou Inércia $J (Kg.m^2)$	Capacitância $C (F)$
Amortecimento Viscoso $b (N.s/m)$ ou $B (N.m.s/rad)$	Inverso da Resistência $1/R (1/\Omega)$
Rigidez $k (N/m)$ ou $K (N.m/rad)$	Inverso da Indutância $1/L (1/H)$
Deslocamento $x (m)$ ou $\theta (rad)$	Fluxo Magnético $\psi (Wb)$
Velocidade $\dot{x} (m/s)$ ou $\dot{\theta} (rad/s)$	Voltagem $e (V)$
Aceleração $\ddot{x} (m/s^2)$ ou $\ddot{\theta} (rad/s^2)$	Varição $de/dt (V/s)$

O uso de circuitos elétricos, como absorvedores, pode ser explicado pela analogia entre sistemas mecânicos e elétricos. Entretanto, precisa-se considerar como será realizada a transferência de energia entre os sistemas mecânicos e elétricos. A seguir, mostra-se o dispositivo que pode ser utilizado nesta transferência.

### 1.2.3 Transdutores

Transdutores são dispositivos que convertem energia de uma forma para outra. Os transdutores mais estudados são os sensores e os atuadores. Sensores são dispositivos utilizados na detecção e medida de quantidades físicas, normalmente estas medidas são transformadas em energia elétrica. Atuadores são dispositivos que convertem um sinal (normalmente elétrico) em uma ação (normalmente mecânica). Sinclair (2001), em seu livro “Sensors and Transducers”, convencionou tratar os atuadores simplesmente por transdutores. A diferença entre sensores e atuadores é muito sutil. A principal diferença ocorre nas eficiências da conversão de energia. O principal objetivo dos sensores é realizar medidas, então a eficiência não é tão importante. Ao contrário dos atuadores que tem como principal objetivo a conversão de energia, portanto a eficiência da conversão é muito importante.

Sensores podem ser classificados como ativos ou passivos. Os sensores ativos são aqueles que podem gerar um sinal sem precisar de uma fonte de alimentação externa. Células fotovoltaicas, termopares e piezelétricos são alguns exemplos de sensores ativos. Por outro lado, sensores passivos são aqueles que para gerar um sinal precisam de uma fonte de alimentação externa.

O uso de transdutores piezelétricos tornou-se bastante comum em aplicações de controle de vibrações. Eles são usados tanto como sensores quanto atuadores em sistemas de controle de vibrações estruturais. A capacidade dos materiais piezelétricos de transformar energia mecânica em energia elétrica e vice-versa foi descoberto por Pierre e Jacque Curie, segundo Moheimani e Fleming (1967). Estes cientistas descobriram uma classe de materiais que quando pressionados geram uma carga elétrica e quando colocados em um campo elétrico são mecanicamente tensionados.

Piezeletricidade que literalmente significa “eletricidade gerada de pressão” é encontrada naturalmente em muitos materiais monocristalinos, como o quartzo e topázio. Entretanto, estes materiais não são adequados como atuadores em aplicações de controle de vibrações. Em seu lugar, utilizam-se materiais sintéticos com estruturas policristalinas, como o Titanato de Zinco (PZT), que pode ser processado para apresentar importantes propriedades piezelétricas.

Os transdutores piezelétricos são usados em muitas aplicações tais como controle de vibrações estruturais, sistemas aeroespaciais e, mais recentemente, em micro e nanotecnologia.

Outro tipo de transdutor eletromecânico muito utilizado é o transdutor capacitivo. O transdutor capacitivo é um condensador que exhibe uma variação do valor nominal da capacidade em função de uma grandeza não-elétrica. Uma vez que um condensador consiste basicamente num conjunto de duas placas condutoras separadas por um dielétrico, as variações no valor nominal da capacidade podem ser provocadas por redução da área frente a frente e da separação entre placas, ou por variação da constante dielétrica do material. Este tipo de transdutor é muito empregado como sensor de medidas físicas, tais como a posição, a velocidade e aceleração linear ou angular de um objeto, pressão, umidade, etc.

O transdutor eletromecânico de bobina móvel, utilizado para modelar matematicamente o sistema estudado nesta dissertação, será descrito física e matematicamente no capítulo 2.

A seguir, apresentam-se as definições de sistemas ideais e não-ideais e as referências sobre sistemas não-ideais.

#### **1.2.4 Sistemas Dinâmicos do Tipo Ideal e Não-Ideal**

O estudo de vibrações de sistemas não-ideais, isto é, quando uma excitação é influenciada pela resposta do sistema, tem sido considerado um grande desafio na pesquisa teórica e prática da engenharia. Segundo Nayfeh e Mook (1979), quando a excitação não é influenciada pela resposta, é dita uma excitação ideal ou uma fonte ideal de energia. Por outro lado, quando uma excitação é influenciada pela resposta do sistema, é dita não-ideal. Assim, dependendo da excitação, refere-se a um sistema vibratório como ideal ou não-ideal. Geralmente, sistemas vibratórios não-ideais são aqueles para os quais a potência disponível é limitada. O comportamento do sistema vibratório se afasta do caso ideal à medida que a potência suprida torna-se mais limitada. Para sistemas dinâmicos não-ideais, deve-se adicionar uma equação que descreve como a fonte de energia passa essa energia às equações que governam o correspondente sistema dinâmico ideal. Assim, como uma primeira característica, o sistema vibratório não-ideal tem um grau de liberdade a mais que seu paralelo ideal.

O primeiro tipo de problema não-ideal a aparecer na literatura atual é o Efeito Sommerfeld, comentado na revisão sobre vibrações não-ideais feita por Balthazar et al. (2003). Um experimento foi descrito no qual surge interação entre um motor e sua base elástica (uma viga em balanço suportando uma fonte não-ideal de energia na extremidade). Naquele caso, o sistema exibia movimentos instáveis nas regiões de ressonância. Além disso, a forma da curva de ressonância dependia do sentido pelo qual a frequência de excitação era alterada. Esse sentido muda as características da transição através da ressonância. A investigação desse comportamento levou ao que é usualmente chamado fenômeno de salto. À medida que a frequência de excitação aproxima-se da frequência natural, o sistema vibratório pode repentinamente saltar de um lado para outro do pico de ressonância. Isto é, o sistema operando em regime permanente não pode permanecer em certas frequências perto da ressonância. O salto aparece na curva de resposta em frequência como uma descontinuidade que indica uma região onde condições de regime permanente não existem. Assim, modelar sistemas vibratórios como ideais pode ser inadequado se uma frequência da excitação está perto de uma frequência natural do sistema, como pode ser o caso. Se considerarmos uma região antes da ressonância numa curva frequência-resposta típica, notamos que à medida que a potência suprida pela fonte aumenta, a velocidade de rotação do motor também aumenta. Entretanto, esse comportamento não continua indefinidamente. À medida que a velocidade do motor se aproxima da frequência de ressonância, mais potência é requerida para aumentar a velocidade do motor, pois parte da energia é consumida movendo a estrutura de suporte. Uma grande mudança na potência suprida ao motor resulta em uma pequena mudança em sua frequência e um grande aumento na amplitude das resultantes oscilações. Assim, perto da ressonância, parece que a potência adicional suprida ao motor somente aumenta a amplitude da resposta da estrutura tendo pequeno efeito na velocidade de rotação do motor. Fenômenos de salto na potência requerida de uma fonte operando perto da ressonância são manifestações de uma fonte não-ideal de energia e são referidas como o Efeito Sommerfeld, em honra do primeiro homem que o observou. Sommerfeld sugeriu que a resposta estrutural funcionava como um sumidouro de energia. Assim, ele dizia que pagamos para vibrar nossa estrutura em vez de acelerar a máquina. Um dos problemas enfrentados pelos projetistas é como levar um sistema através da ressonância e evitar o “sumidouro de energia” descrito por Sommerfeld.

Alguns outros trabalhos sobre sistemas não-ideais foram publicados posteriormente e não constam na revisão feita por Balthazar et al (2003).

Warminski e Balthazar (2003) analisaram a influência de se considerar a dinâmica de oscilações dos elementos mecânicos sobre a dinâmica dos elementos elétricos do motor CC em sistemas modelados como sendo do tipo ideal.

Dantas e Balthazar (2004) estudaram a estabilidade de um sistema modelado como sendo do tipo não-ideal. A principal preocupação deste trabalho foi encontrar pontos de equilíbrios, órbitas periódicas e possíveis bifurcações. O esquema do sistema não-ideal utilizado por Dantas e Balthazar pode ser visto na figura 1.12.

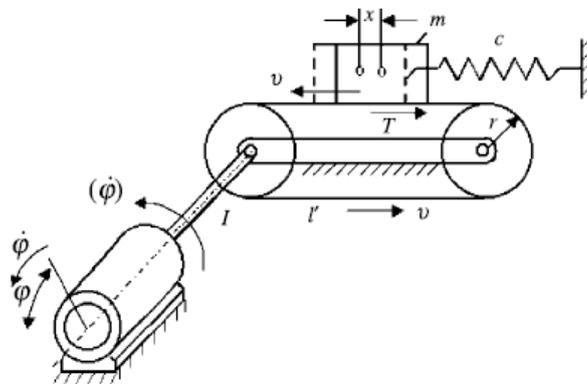


Figura 1.12 – Esquema do sistema estudado por Dantas (2004).

Guilherme (2004) investigou o comportamento dinâmico de um oscilador de dois graus de liberdade excitado por uma fonte não-ideal. A figura 1.13 mostra o modelo utilizado por Guilherme.

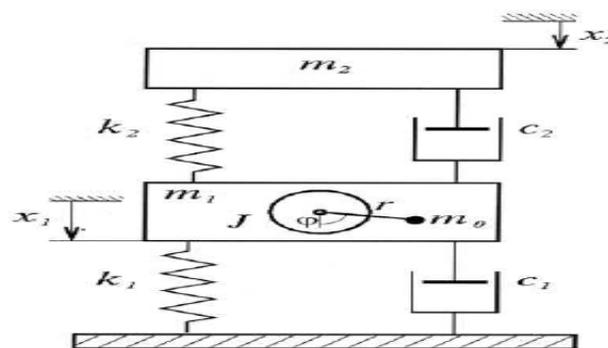


Figura 1.13 – Modelo do sistema não-ideal utilizado por Guilherme (2004).

Dantas e Baltazar (2006) também estudaram o problema de um motor centrífugo suportado por uma mola não-linear. O sistema foi modelado como sendo do tipo não-ideal. O principal objetivo do trabalho de Dantas e Baltazar foi mostrar as diferenças entre o caso em que se considera uma mola mole (em inglês “soft spring”) e do caso em que se considera uma mola dura (em inglês “hard spring”).

Considere um sistema mecânico que apresente rigidez com um termo linear e um termo cúbico (não-linear). O coeficiente do termo cúbico da rigidez descreve quão longe se esta do comportamento linear da mola. O sinal do coeficiente do termo cúbico determina o tipo de mola. Para um coeficiente positivo têm-se o que denominamos de mola dura e para um coeficiente negativo têm-se a mola mole.

Zukovic e Cveticanin (2007) estudaram a dinâmica de um oscilador massa-mola-amortecedor, com rigidez não-linear e amortecimento linear, excitado por uma fonte não-ideal de energia. Para algumas condições específicas, eles mostram a existência de caos no sistema.

Bolla et al (2007) obtiveram uma solução analítica aproximada, através do método das múltiplas escalas, para um oscilador massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade excitado por uma fonte não-ideal de energia.

Piccirillo (2007) estudou o comportamento dinâmico não-linear de um oscilador com memória de forma, excitado por uma fonte não-ideal – um motor elétrico de corrente contínua, desbalanceado e com potência limitada. Materiais com memória de forma, em geral são utilizados como sensores e atuadores em estruturas denominadas como inteligentes, onde possuem a capacidade de alterar sua forma, rigidez, frequências naturais, dentre outras propriedades mecânicas, mediante a imposição de campos elétricos, eletromagnéticos, de temperatura ou de tensão.

Castão (2008) fez uma análise da dinâmica não-linear e não-ideal de um oscilador com rigidez linear e amortecedor do tipo magneto-reológico (dispositivo que utiliza o fluido magneto reológico na sua fabricação). A característica essencial dos fluidos magnetos reológicos é a sua habilidade de mudança reversível, indo de um fluido linearmente viscoso para um fluido semi-sólido e vice-versa, possuindo força e rendimento controlável em milissegundos, quando expostos a campos magnéticos.

A seguir, apresentam-se as implicações da abordagem não-linear e algumas características encontradas, exclusivamente, na análise não-linear.

## 1.2.5 Sistemas Não-Lineares

A utilização efetiva de modelos não-lineares é pouco difundida. Em geral, o procedimento padrão adotado ao se defrontar com sistemas não-lineares é efetuar a sua linearização, em torno de um ponto de operação ou de uma trajetória de interesse e, a partir daí, trata-lo como se fosse linear. Tal abordagem funciona bem na grande maioria dos problemas e não há motivos para que seja alterada, visto que as características de sistemas lineares são bem definidas e há uma extensa literatura a respeito. Neste contexto uma abordagem é a sugerida por Schoukens et al (1998), que visa a obtenção do sistema linear que melhor representa uma determinada planta de interesse que apresenta distorções não-lineares relativamente pouco relevantes.

Por outro lado, a maioria dos sistemas encontrados na prática é não-linear em alguma extensão. Embora seja possível representar aqueles cujas perturbações estão restritas a uma faixa operacional via um modelo linear, geralmente processos não-lineares só podem ser adequadamente caracterizados por modelos não-lineares (Billings, 1980). Neste contexto, a representação não-linear não necessariamente é a que tem maior acuidade numa determinada faixa de trabalho, mas a que permite a melhor representação do sistema em qualquer faixa.

A necessidade de se lidar com sistemas não-lineares surge, por exemplo, quando o sistema real apresenta características, como bifurcações e saturações, que não podem ser obtidas via abordagem linear. Em outras situações, como sistemas robóticos ou estruturas flexíveis, não é adequado considerar tais sistemas lineares ou mesmo linearizá-los visto a extensão das não-linearidades presentes.

Também, sob certas condições, o tratamento não-linear pode conduzir a novos fenômenos, inexistentes nos sistemas lineares. Este é o caso, por exemplo, das vibrações sub-harmônicas e ultra-harmônicas, ou da existência de um ciclo-limite, ou o aparecimento de atratores caóticos.

Vale ressaltar que um sistema linear não apresenta caos. Para que o caos e suas implicações se façam presentes, é necessário que o sistema seja não-linear. Entretanto, como já discutido neste capítulo, a maioria dos sistemas encontrados no mundo real são não-lineares e, sob condições convenientes, esses podem apresentar caos.

Pode-se dizer que existem algumas razões pelas quais alguns sistemas são denominados caóticos. Ainda que o movimento seja completamente determinístico do

ponto de vista matemático, ele pode se mostrar imprevisível do ponto de vista experimental. Além disso, os sistemas caóticos exibem uma sensível dependência das condições iniciais. Ao mesmo tempo em que as trajetórias convergem em direção a um atrator, divergem dele.

A natureza caótica de um atrator pode ser estabelecida examinando a divergência das trajetórias, quantificada pelo expoente de Lyapunov. A seguir, introduzimos o conceito de expoentes de Lyapunov segundo Nayfeh e Balachandran (1995).

Seja  $\mathbf{X}(t)$  tal que  $\mathbf{X}(t=0) = \mathbf{X}_0$  represente uma trajetória do sistema governado pelo seguinte sistema autônomo de  $n$ -ordem:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}; \mathbf{M}) \quad (1.1)$$

onde o vetor  $\mathbf{x}$  é composto pelas  $n$  variáveis de estado, o vetor função  $\mathbf{F}$  descreve a evolução não-linear do sistema e  $\mathbf{M}$  representa um vetor de parâmetros de controle. Denotando uma pequena perturbação de  $\mathbf{X}(t)$  por  $\mathbf{y}(t)$ , obtemos uma equação após linearização nos termos perturbados. A perturbação é governada por:

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) \quad (1.2)$$

onde  $\mathbf{A} = D_x \mathbf{F}[\mathbf{x}(t); \mathbf{M}]$  é uma matriz  $n \times n$  com coeficientes dependentes do tempo. Se considerarmos um condição inicial  $\mathbf{y}(0)$ , sua evolução é descrita por:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{y}(0) \quad (1.3)$$

onde  $\mathbf{\Phi}(t)$  é a matriz solução fundamental da equação (1.3) associada com a trajetória de  $\mathbf{X}(t)$ .

Para uma escolha apropriada de  $\mathbf{y}(0)$  em 1.3, a taxa de expansão ou contração exponencial na direção de  $\mathbf{y}(0)$  sobre a trajetória passando através de  $\mathbf{X}_0$  é dada por:

$$\bar{\lambda}_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{\|\mathbf{y}(t)\|}{\|\mathbf{y}(0)\|} \right) \quad (1.4)$$

onde o símbolo  $\| \|$  denota um vetor norma e  $\ln$  é o logaritmo natural.

A quantidade assintótica  $\bar{\lambda}_i$  é chamada de expoente de Lyapunov. Um ou mais expoentes de Lyapunov positivo é sinal de movimento caótico.

Alguns sistemas não-lineares sob certas condições apresentam comportamento caótico. Pode-se citar os sistemas que, em determinadas situações, se enquadram nos sistemas modelados por um potencial de mínimos duplos (em inglês “double-well potential”). Este é o caso do estudo feito por Piccirillo (2007). Neste estudo, o modelo de um sistema não-ideal de um oscilador com memória de forma se resumiria, em determinadas condições, ao estudo de um sistema com potencial mínimo duplos.

Um sistema mecânico foi utilizado por Strogaz (1994) para explicar uma partícula com potencial de mínimos duplos (figura 1.14). Uma força periódica excita o sistema de um lado para o outro. O sistema apresenta duas regiões de energia potencial mínima, uma com coordenada positiva e outra com coordenada negativa. Para uma excitação fraca, a partícula deve ficar em uns dos mínimos. Para uma excitação forte, a partícula pode apresentar dois tipos de oscilações. Na primeira para baixas energias de oscilações, o sistema fica preso a uns dos mínimos. Na segunda para altas energias de oscilações, o sistema fica saltando de um mínimo para outro. Para excitações extremamente fortes, a partícula fica oscilando de um mínimo para outro.

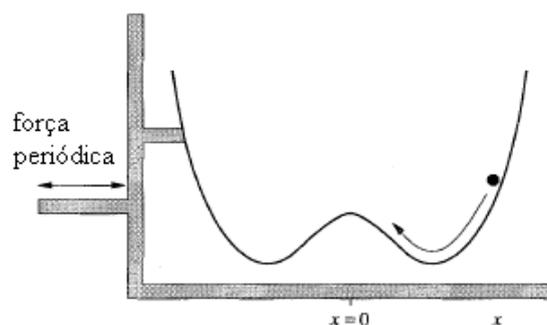


Figura 1.14 – Modelo de um sistema com potencial de mínimos duplos (STROGAZ,1994).

Na prática, caos pode ser desejável ou indesejável, dependendo da aplicação. Em aplicações de combustão, o caos é desejável porque aumentaria a mistura ar-combustível resultando em um rendimento maior da combustão. Por outro lado, em sistemas estruturais e mecânicos, caos pode produzir operações irregulares e provocar fadiga de materiais e equipamentos. Nas situações indesejáveis necessita-se controlar o sistema, de tal forma, que trajetórias caóticas sejam transformadas em trajetórias conhecidas, por exemplo, periódicas.

Atualmente, as técnicas de controle de sistemas lineares são muito bem conhecidas. Por outro lado, o mesmo não acontece para sistemas não-lineares. Então, lidar com controle de modelos não-lineares somente em casos totalmente inevitáveis.

O modo usual de controlar sistemas com características não-lineares é aplicar técnicas pré-definidas para um determinado grupo de problemas, ou seja, usar controladores específicos para sistemas e condições específicas (Slotine e Li, 1999 e Hangos et al., 2004). Tais técnicas são aceitas por uma parte dos engenheiros projetistas, pois, normalmente, é de fácil implementação. Por exemplo, Marat e Balthazar (2008) propuseram em seu trabalho uma nova técnica de controle para sistemas caóticos, baseado nas técnicas de controle linear.

Por outro lado, a utilização de tais técnicas sofre com críticas da outra parte dos engenheiros projetistas, pois, na maioria dos casos, não possuem embasamentos teóricos, não tendo garantia de convergência, estabilidade, robustez, etc.

A seguir, descreve-se resumidamente, capítulo por capítulo, os principais pontos abordados neste trabalho.

### **1.3 Descrição do Trabalho**

O presente trabalho foi dividido em seis capítulos.

Neste capítulo inicial, foram apresentados os principais motivos e objetivos deste trabalho. A seguir, realizou-se uma breve revisão bibliográfica sobre absorvedores de vibrações, analogia entre sistemas mecânicos e elétricos, transdutores, sistemas ideais e não-ideais e sistemas não-lineares. Finalmente, a descrição sucinta dos capítulos desta dissertação.

No capítulo 2, é apresentado o modelo matemático de um sistema não-ideal que consiste em uma estrutura elástica que suporta um motor não-ideal com um dispositivo

absorvedor de vibrações eletromecânico. Após a descrição do sistema, apresenta-se a obtenção das equações diferenciais de movimento do sistema. Dois modelos são considerados: no primeiro modelo a dinâmica de funcionamento do motor não é considerada, para isso, adota-se que o torque gerado pelo motor é linear (modelo simplificado), no segundo modelo, considera-se as características elétricas do motor, o que gera uma variável a mais no modelo (modelo completo).

No capítulo 3, são apresentados os resultados numéricos obtidos através da integração direta das equações de movimento do sistema estudado. As simulações numéricas são realizadas para diferentes valores dos parâmetros do sistema. Neste capítulo, simulam-se os absorvedores de vibrações eletromecânicos lineares e não-lineares para os dois modelos gerados (simplificado e completo). A estabilidade dos sistemas estudados é verificada através do cálculo dos expoentes de Lyapunov.

No capítulo 4, apresenta-se o método da média de perturbações aplicado ao sistema estudado (modelo simplificado) para se obter as soluções analíticas aproximadas, destacando-se o desempenho deste método nas soluções de sistemas de equações diferenciais não-lineares e não-ideais.

No capítulo 5, estuda-se a eficiência do absorvedor eletromecânico em dois casos peculiares. No primeiro caso, estuda-se a aplicação do absorvedor em sistemas não-ideais com mola mole. No segundo caso, analisa-se a aplicação do absorvedor em sistemas não-ideais que apresentam potencial de mínimos duplos. A análise dos dois casos é realizada através de simulações numéricas.

No capítulo 6, são apresentadas as discussões finais, conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

A dissertação prossegue com a listagem das principais referências bibliográficas utilizadas no decorrer desta pesquisa. A seguir, são apresentados os apêndices com alguns aspectos considerados importantes para o entendimento do trabalho. Para finalizar, incluiu-se também a súmula curricular do autor com os principais trabalhos publicados e/ou submetidos.

## Capítulo 2

# Modelagem Matemática da Dinâmica de Um Sistema Não-Ideal Com Absorvedor de Vibrações do Tipo Eletromecânico

Este capítulo está dividido em três partes. Na primeira parte, descreve-se o sistema estudado. Na segunda parte, obtêm-se o modelo matemático do sistema. Neste modelo, a função que representa o torque gerado pelo motor é considerada linear. Na terceira e última parte, o modelo do sistema é obtido considerando-se as características elétricas do motor.

### 2.1 Descrição do Problema

O sistema não-ideal proposto consiste de uma viga engastada excitada por um motor elétrico de corrente contínua desbalanceado com potência limitada. O absorvedor de vibrações eletromecânico é formado por um transdutor eletromecânico e um circuito elétrico RCL em série. O transdutor, formado por um ímã e uma bobina, conecta a viga ao circuito elétrico, que é formado por elementos indutivo linear, resistivo não-linear e armazenador não-linear.

A figura 2.1 mostra o sistema não-ideal com o absorvedor de vibrações do tipo eletromecânico.

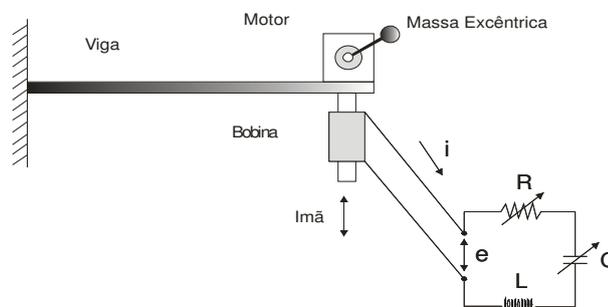


Figura 2.1 – Sistema não-ideal com absorvedor de vibrações do tipo eletromecânico (Felix e Balthazar, 2008).

O modelo físico utilizado na modelagem matemática do problema é apresentado na figura 2.2.

Para o modelo do sistema não-ideal considerou-se uma rigidez mecânica não-linear e um amortecimento viscoso linear.

Para o modelo do absorvedor, considerou-se o absorvedor de vibrações eletromecânico não-linear para se obter um modelo mais geral. Porém, nas simulações numéricas, também, considerou-se o absorvedor de vibrações eletromecânico linear.

As variáveis e parâmetros físicos mostrados na figura 2.2 serão descritos, conforme aparecem na obtenção das equações diferenciais do movimento.

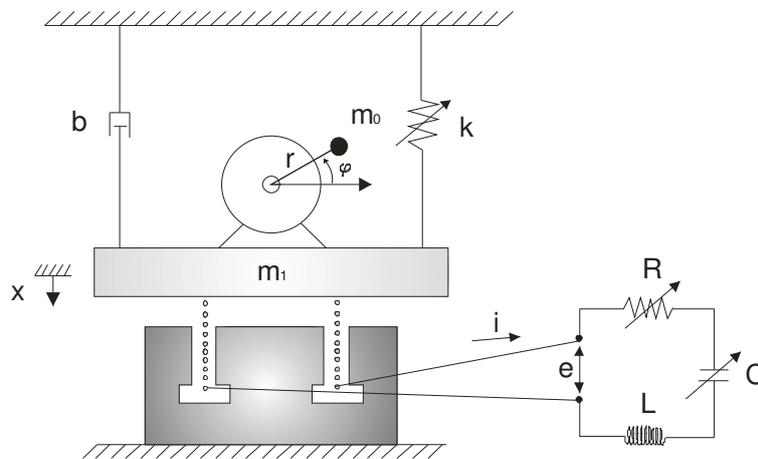


Figura 2.2 – Modelo físico do sistema não-ideal com absorvedor de vibrações do tipo eletromecânico (Felix e Balthazar, 2008).

## 2.2 Obtenção das Equações Governantes do Movimento

As equações diferenciais do movimento do sistema, proposto acima, podem ser obtidas pelas leis da mecânica e elétrica. Nesta seção, primeiramente, mostra-se a obtenção das equações do transdutor eletromecânico. Em seguida, a obtenção das equações do sistema não-ideal, utilizando-se as leis da mecânica (formulação de Lagrange). A seguir, a obtenção das equações do absorvedor de vibrações do tipo eletromecânico, utilizando-se as leis da elétrica (lei de Kirchhoff). Então, adimensionalisa-se o sistema de equações resultante.

## 2.2.1 Equações do Transdutor Eletromecânico

O transdutor eletromecânico utilizado no nosso modelo é o transdutor de bobina móvel, que é um transdutor de transferência de energia (Vassalo, 1992). A figura 2.3 mostra o transdutor eletromecânico visto de frente e lateralmente. Neste modelo não se considerou a inércia da bobina nem forças de resistência mecânicas ou elétricas.

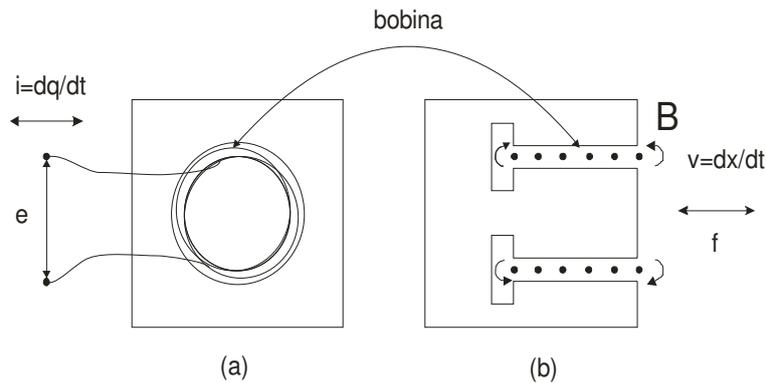


Figura 2.3 – Transdutor de bobina móvel. A) vista de frente. B) vista lateral.  
(Vassalo, 1992).

Na figura 2.3,  $f$  é a força externa para balancear a força associada ao campo magnético,  $v$  é a velocidade associada ao movimento da bobina,  $e$  é a diferença de tensão elétrica,  $i$  é a corrente elétrica e  $q$  é a carga elétrica.

Neste tipo de transdutor o ímã permanente mantém um campo magnético radial uniforme  $\vec{B}$  mostrado abaixo na figura 2.4.

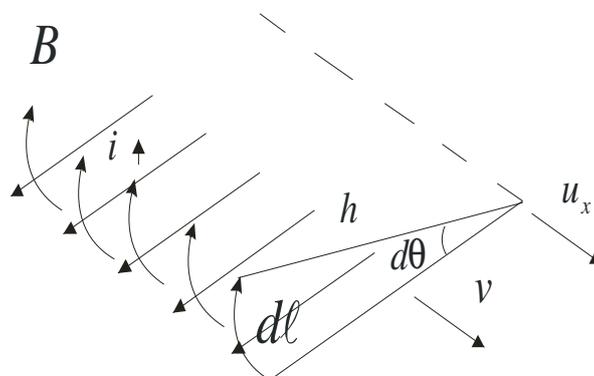


Figura 2.4 – Campo magnético permanente (Vassalo, 1992).

O incremento no potencial na direção do fluxo de corrente é dado por:

$$de = \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = -vBhd\theta \quad (2.1)$$

onde  $h$  é o raio das espiras da bobina.

A diferença de potencial total é dada pela integração da Equação (2.1) de 0 a  $2n\pi$  onde  $n$  é o número de espiras da bobina. Esta diferença de potencial se refere à queda de potencial na bobina. Portanto a expressão da voltagem  $e$  para  $n$  espiras é dada por:

$$e = 2n\pi h B v \quad (2.2)$$

De forma similar, a expressão da força magnética associada ao campo  $\vec{B}$  é dada por:

$$df = i \cdot d\vec{\ell} \times \vec{B} = Bi h d\theta u_x \quad (2.3)$$

onde  $u_x$  é o versor na direção axial.

A expressão da força do campo magnético atuando na bobina é dada pela integração da Equação (2.3) de 0 a  $2n\pi$ , assim:

$$f = -2n\pi h B i \quad (2.4)$$

Para simplificar as equações constitutivas definiu-se a constante do transdutor  $2n\pi h B$ , comum nas equações (2.2) e (2.4), como  $S$  de modo que se pudessem escrever as relações constitutivas como:

$$e = S v \quad (2.5)$$

$$f = S i \quad (2.6)$$

## 2.2.2 Equações do Sistema Não-Ideal

As equações de Lagrange foram utilizadas na obtenção das equações diferenciais do movimento do sistema não-ideal. As equações de Lagrange têm a seguinte forma, (Craig, 1981):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Q}{\partial \dot{p}_i} \right) - \frac{\partial Q}{\partial p_i} = P_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

onde  $p_i$  são as coordenadas generalizadas,  $P_i$  são as forças não-conservativas aplicadas no sistema e  $Q = T - V$  ( $T$  é a energia cinética e  $V$  é a energia potencial).

Tomando como uma das coordenada generalizada o deslocamento linear da estrutura ( $p_1 = x$ ) e, a outra coordenada, o deslocamento angular do motor ( $p_2 = \varphi$ ), obtêm-se:

- A energia cinética dada por:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_0 (\dot{x} - r \dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + \frac{1}{2} m_0 (r \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}^2 \quad (2.8)$$

onde  $m_0$  é a massa desbalanceada do motor não-ideal,  $m_1$  é a massa da estrutura,  $r$  é a excentricidade do rotor e  $I_0$  é o momento de inércia do rotor.

- A energia potencial para um sistema com não-linearidade cúbica, é dada por:

$$V = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{4} k_2 x^4 \quad (2.9)$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  são as constantes de rigidez linear e não-linear da estrutura, respectivamente.

As forças não-conservativas atuantes no sistema foram definidas por:

$$P_1 = -b\dot{x} + f \quad (2.10)$$

$$P_2 = M(\dot{\phi}) \quad (2.11)$$

onde  $b$  é o coeficiente de amortecimento viscoso da estrutura,  $f = Si = S\dot{q}$  foi obtido acima, no equacionamento do transdutor eletromecânico,  $M(\dot{\phi})$  é o torque resultante desenvolvido pelo motor.

Neste modelo, as características elétricas do motor do motor não foram consideradas. Então, o torque resultante se reduz a uma função linear da velocidade de rotação do motor. A modelagem completa de um motor de corrente contínua pode ser vista no apêndice A. Na seção 2.3, deste capítulo, é obtido o modelo para o caso em que se considera a dinâmica de funcionamento do motor.

$$M(\dot{\phi}) = u_1 - u_2\dot{\phi} \quad (2.12)$$

onde  $u_1$  é a constante relacionado à tensão aplicada na armadura do motor CC e  $u_2$  é constante, normalmente obtida experimentalmente, relacionado à característica do motor CC.

Substituindo as equações (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) e (2.12) nas equações de Lagrange (2.7), obtêm-se:

$$\begin{aligned} (m_0 + m_1)\ddot{x} - m_0r(\ddot{\phi}\cos\varphi - \dot{\phi}^2\text{sen}\varphi) + k_1x + k_2x^3 &= -b\dot{x} + S\dot{q} \\ (I_0 + m_0r^2)\ddot{\phi} - m_0r\ddot{x}\cos\varphi &= u_1 - u_2\dot{\phi} \end{aligned} \quad (2.13)$$

### 2.2.3 Equações do Absorvedor de Vibrações do Tipo Eletromecânico

As equações diferenciais geradas pelo absorvedor eletromecânico foram obtidas pela Segunda Lei de Kirchhoff.

A segunda lei de Kirchhoff ou “lei das tensões” diz que a soma algébrica das tensões nos bipolos pertencentes a um laço é nula, onde bipolo é qualquer dispositivo que contém dois terminais condutores (exemplo: resistor, capacitor, indutor etc) e laço é qualquer percurso fechado formado por bipolos que não passe duas vezes pelo mesmo nó (Bird, 2001).

A expressão da tensão elétrica sobre o resistor não-linear, encontrada em Yamapi (2005), é dada por:

$$U_R = -Ri_0 \left( \frac{\dot{q}}{i_0} - \left( \frac{\dot{q}}{i_0} \right)^3 \right) \quad (2.14)$$

onde  $R$  é a resistência do circuito elétrico,  $i_0$  é a corrente elétrica inicial e  $q$  é a carga elétrica instantânea.

A expressão da tensão elétrica sobre o capacitor não-linear, adaptada de Yamapi (2005), é dada por:

$$U_C = \frac{q}{C} + aq^3 \quad (2.15)$$

onde  $a$  é coeficiente não-linear do capacitor e  $C$  é a capacitância do circuito elétrico.

A expressão da tensão elétrica sobre o indutor linear, encontrada em Burian e Lyra (2006), é dada por:

$$U_L = L\ddot{q} \quad (2.16)$$

onde  $L$  é a indutância do circuito elétrico.

O diferencial de potencial, conforme obtido no equacionamento do transdutor eletromecânico, é dado por:

$$e = Sv = S\dot{x} \quad (2.17)$$

Utilizando a segunda lei de Kirchhoff e as expressões (2.14), (2.15), (2.16) e (2.17), obtêm-se:

$$L\ddot{q} - R\left(1 - \frac{1}{i_0^2}\dot{q}^2\right)\dot{q} + \frac{1}{C}q + aq^3 + S\dot{x} = 0 \quad (2.18)$$

#### 2.2.4 Sistema de Equações Adimensionais

A vantagem do estudo de um sistema com variáveis adimensionais é que nele trabalha-se com números puros, sem considerar a dimensão de suas variáveis. Tornar um sistema adimensional não altera suas características dinâmicas. Além disso, possibilita uma melhor compreensão física do problema.

O sistema de equações que representa o modelo estudado obtido acima, equações (2.13) e (2.18), é dado por:

$$\begin{aligned} (m_0 + m_1)\ddot{x} + b\dot{x} + k_1x + k_2x^3 - S\dot{q} &= m_0r(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) \\ L\ddot{q} - R\left(1 - \frac{1}{i_0^2}\dot{q}^2\right)\dot{q} + \frac{1}{C}q + aq^3 + S\dot{x} &= 0 \\ (I_0 + m_0r^2)\ddot{\varphi} - m_0r\ddot{x}\cos\varphi &= u_1 - u_2\dot{\varphi} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Nota-se que o sistema de equações (2.19) é autônomo e não-linear, contendo não-linearidades cúbicas. As funções  $m_0r\ddot{\varphi}\cos\varphi$  e  $m_0r\dot{\varphi}^2\sin\varphi$  são as funções de inércia provocadas pelo motor e  $m_0r\ddot{x}\cos\varphi$  representa o momento desta força de inércia.

É possível tornar o sistema (2.19) adimensional introduzindo as variáveis adimensionais:

$$\begin{aligned}
\tau &= \omega_m t \\
x &= r\chi_1, \quad \dot{x} = \omega_m r\chi_1' \quad e \quad \ddot{x} = \omega_m^2 r\chi_1'' \\
q &= q_0\chi_2, \quad \dot{q} = \omega_m q_0\chi_2' \quad e \quad \ddot{q} = \omega_m^2 q_0\chi_2'' \\
\varphi &= \phi, \quad \dot{\varphi} = \omega_m \phi' \quad e \quad \ddot{\varphi} = \omega_m^2 \phi''
\end{aligned} \tag{2.20}$$

onde  $\tau$  é o tempo adimensional,  $\chi_1$  é o deslocamento adimensional da estrutura,  $\chi_2$  é a oscilação adimensional da carga do circuito elétrico e  $\phi$  é deslocamento angular adimensional da massa desbalanceada.

Substituindo as variáveis adimensionais no sistema de equações (2.19) e rearranjando-as, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
\chi_1'' + \frac{b}{\sqrt{k_1(m_0+m_1)}}\chi_1' + \chi_1 + \frac{k_2 r^2}{(m_0+m_1)\omega_m^2}\chi_1^3 - \frac{Sq_0}{(m_0+m_1)\omega_m r}\chi_2 &= \frac{m_0}{m_0+m_1}(\phi'' \cos\phi - \phi'^2 \sin\phi) \\
\chi_2'' - \frac{R}{L\omega_m} \left(1 - \frac{1}{i_0^2}\omega_m^2 q_0^2 \chi_2'^2\right)\chi_2' + \frac{1}{LC\omega_m^2}\chi_2 + \frac{aq_0^2}{L\omega_m^2}\chi_2^3 + \frac{Sr}{Lq_0\omega_m}\chi_1' &= 0 \\
\phi'' - \frac{m_0 r^2}{(I+m_0 r^2)}\chi_1' \cos\phi &= \frac{u_1}{(I+m_0 r^2)\omega_m^2} - \frac{u_2}{(I+m_0 r^2)\omega_m}\phi'
\end{aligned} \tag{2.21}$$

A seguir, foram definidos os parâmetros adimensionais:

$$\begin{aligned}
\varepsilon\alpha_1 &= \frac{b}{\sqrt{k_1(m_0+m_1)}}, \quad \varepsilon\alpha_2 = \frac{R}{L\omega_m^2}, \quad \varepsilon\alpha_3 = R\omega_m \left(\frac{q_0}{i_0}\right)^2, \\
\varepsilon\beta_1 &= \frac{k_2 r^2}{(m_0+m_1)\omega_m^2}, \quad \varepsilon\beta_2 = \frac{aq_0^2}{L\omega_m^2}, \\
\varepsilon &= \frac{m_0}{m_0+m_1}, \quad \varepsilon\lambda = \frac{m_0 r^2}{(I+m_0 r^2)}, \quad \varepsilon\gamma_1 = \frac{Sr}{L\omega_m q_0}, \quad \varepsilon\gamma_2 = \frac{Sq_0}{(m_0+m_1)\omega_m r}, \\
\varepsilon\mu_1 &= \frac{u_1}{(I+m_0 r^2)\omega_m^2}, \quad \varepsilon\mu_2 = \frac{u_2}{(I+m_0 r^2)\omega_m}, \\
\omega_2 &= \frac{\omega_e}{\omega_m}, \quad \omega_m^2 = \frac{k_1}{m_0+m_1} \quad e \quad \omega_e^2 = \frac{1}{LC}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Então, foi obtido o seguinte sistema adimensional:

$$\begin{aligned}
\chi_1'' + \chi_1 &= \varepsilon(\phi'' \cos \phi - \phi'^2 \operatorname{sen} \phi - \alpha_1 \chi_1' - \beta_1 \chi_1^3 + \gamma_2 \chi_2') \\
\chi_2'' + \omega_2^2 \chi_2 &= \varepsilon(\alpha_2 \chi_2' - \alpha_3 \chi_2^3 - \beta_2 \chi_2^3 - \gamma_1 \chi_1') \\
\phi'' &= \varepsilon(\lambda \chi_1'' \cos \phi + \mu_1 - \mu_2 \phi')
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Note que  $\mu_1$  é o parâmetro de controle (relativo à tensão de alimentação na armadura do motor elétrico ou torque constante) e  $\mu_2$  é o valor escolhido para um determinado tipo de motor.

Usando novas variáveis, definidas por,  $X_1 = \chi_1$ ,  $X_2 = \chi_1'$ ,  $X_3 = \chi_2$ ,  $X_4 = \chi_2'$ ,  $X_5 = \phi$ ,  $X_6 = \phi'$ , o sistema (2.23) pode ser reescrito, na forma de estado, como:

$$\begin{cases}
X_1' = X_2 \\
X_2' = \varepsilon(X_2' \cos X_5 - X_6 \operatorname{sen} X_5 - \alpha_1 X_2 - \beta_1 X_1^3 + \gamma_2 X_4) - X_1 \\
X_3' = X_4 \\
X_4' = \varepsilon(\alpha_2 X_4 - \alpha_3 X_4^3 - \beta_2 X_3^3 - \gamma_1 X_2) - \omega_2^2 X_3 \\
X_5' = X_6 \\
X_6' = \varepsilon(\lambda X_2' \cos X_5 + \mu_1 - \mu_2 X_6)
\end{cases} \tag{2.24}$$

Realizando algumas manipulações algébricas, obtêm-se, as seguintes equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{cases}
X_1' = X_2 \\
X_2' = \frac{1}{(1 - \varepsilon^2 \lambda \cos^2 X_5)} \left[ \varepsilon^2 (\mu_1 - \mu_2 X_6) \cos X_5 + \varepsilon (\gamma_2 X_4 - X_6 \operatorname{sen} X_5 - \alpha_1 X_2 - \beta_1 X_1^3) - X_1 \right] \\
X_3' = X_4 \\
X_4' = \varepsilon (\alpha_2 X_4 - \alpha_3 X_4^3 - \beta_2 X_3^3 - \gamma_1 X_2) - \omega_2^2 X_3 \\
X_5' = X_6 \\
X_6' = \frac{1}{(1 - \varepsilon^2 \lambda \cos^2 X_5)} \varepsilon \left\{ \lambda \left[ \varepsilon (\gamma_2 X_4 - X_6 \operatorname{sen} X_5 - \alpha_1 X_2 - \beta_1 X_1^3) - X_1 \right] \cos X_5 + \mu_1 - \mu_2 X_6 \right\}
\end{cases} \tag{2.25}$$

## 2.3 Obtenção das Equações de Movimento Considerando-se o Torque Variável do Motor

No modelo matemático obtido anteriormente considerou-se que o torque gerado pelo motor elétrico era um função linear. Nesta seção, um novo modelo é obtido. Neste modelo, considera-se a dinâmica do circuito elétrico do motor. A equação governante do circuito elétrico do motor é dada por (apêndice A):

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = U - K_g \dot{\varphi} \quad (2.26)$$

onde  $L_a$  é a indutância da armadura,  $R_a$  é a resistência elétrica da armadura,  $K_g$  é a constante de força contra-eletromotriz,  $U$  é a tensão elétrica aplicada sobre a armadura,  $i_a$  é a corrente elétrica que atravessa a armadura,  $\dot{\varphi}$  é a velocidade angular do motor.

A nova expressão do torque gerado pelo motor, agora, é uma função da corrente elétrica que atravessa a armadura do motor e, é dada por:

$$\Gamma = K_m i_a \quad (2.27)$$

onde  $K_m$  é a constante de torque.

Portanto, o novo sistema de equações, considerando a equação da dinâmica do circuito elétrico do motor, é dado por:

$$\begin{aligned} (m_0 + m_1)\ddot{x} - m_0 r (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) + k_1 x + k_2 x^3 &= -b\dot{x} + S\dot{q} \\ (I_0 + m_0 r^2)\ddot{\varphi} - m_0 r \ddot{x} \cos \varphi &= K_m i_a \\ L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a &= U - K_g \dot{\varphi} \\ L\ddot{q} - R \left( 1 - \frac{1}{i_0^2} \dot{q}^2 \right) \dot{q} + \frac{1}{C} q + a q^3 + S\dot{x} &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Observa-se que no modelo os elementos não-lineares foram preservados. No sistema não-ideal manteve-se o modelo não-linear para a rigidez mecânica. No modelo do absorvedor eletromecânico manteve-se as características não-lineares da resistência elétrica e do capacitor. Os parâmetros de acoplamentos do sistema não-ideal e do absorvedor eletromecânico não se alterou.

É possível tornar o sistema (2.28) adimensional introduzindo as variáveis adimensionais:

$$\tau = \omega_m t$$

$$x = r\chi_1, \quad \dot{x} = \omega_m r\chi_1' \quad e \quad \ddot{x} = \omega_m^2 r\chi_1''$$

$$q = q_0\chi_2, \quad \dot{q} = \omega_m q_0\chi_2' \quad e \quad \ddot{q} = \omega_m^2 q_0\chi_2''$$

$$i_a = i_0\chi_3 \quad e \quad \frac{di_a}{dt} = \omega_m i_0\chi_3'$$

$$\phi = \phi, \quad \dot{\phi} = \omega_m \phi' \quad e \quad \ddot{\phi} = \omega_m^2 \phi''$$

onde  $\chi_3$  é a corrente elétrica adimensional que circula pela armadura do motor, as outras variáveis são as mesmas definidas anteriormente.

Substituindo as variáveis adimensionais no sistema de equações (2.28) e rearranjando-as, têm-se:

$$\chi_1'' + \frac{b}{\sqrt{k_1(m_0 + m_1)}} \chi_1' + \chi_1 + \frac{k_2 r^2}{(m_0 + m_1)\omega_m^2} \chi_1^3 - \frac{S q_0}{(m_0 + m_1)\omega_m r} \chi_2' = \frac{m_0}{m_0 + m_1} (\phi'' \cos \phi - \phi'^2 \sin \phi)$$

$$\chi_2'' - \frac{R}{L\omega_m} \left( 1 - \frac{1}{i_0^2} \omega_m^2 q_0^2 \chi_2'^2 \right) \chi_2' + \frac{1}{LC\omega_m^2} \chi_2 + \frac{a q_0^2}{L\omega_m^2} \chi_2^3 + \frac{Sr}{Lq_0\omega_m} \chi_1' = 0$$

$$\phi'' - \frac{m_0 r^2}{(I_0 + m_0 r^2)} \chi_1'' \cos \phi = \frac{K_m i_0}{(I_0 + m_0 r^2)\omega_m^2} \chi_3$$

$$\chi_3' + \frac{R_a}{L_a \omega_m} \chi_3 = \frac{U}{L_a \omega_m i_0} - \frac{K_g}{L_a i_0} \phi'$$

A seguir, foram definidos os novos parâmetros adimensionais:

$$\begin{aligned}\varepsilon\alpha_1 &= \frac{b}{\sqrt{k_1(m_0 + m_1)}}, \quad \varepsilon\alpha_2 = \frac{R}{L\omega_m^2}, \quad \varepsilon\alpha_3 = R\omega_m \left( \frac{q_0}{i_0} \right)^2, \\ \varepsilon\beta_1 &= \frac{k_2 r^2}{(m_0 + m_1)\omega_m^2}, \quad \varepsilon\beta_2 = \frac{a q_0^2}{L\omega_m^2}, \\ \delta_1 &= \frac{K_m i_0}{(I_0 + m_0 r^2)\omega_m^2}, \quad \delta_2 = \frac{R_a}{L_a \omega_m}, \quad \mu_3 = \frac{U}{L_a \omega_m i_0}, \quad \mu_4 = \frac{K_g}{L_a i_0}, \\ \varepsilon &= \frac{m_0}{m_0 + m_1}, \quad \varepsilon\lambda = \frac{m_0 r^2}{(I_0 + m_0 r^2)}, \quad \varepsilon\gamma_1 = \frac{S r}{L\omega_m q_0}, \quad \varepsilon\gamma_2 = \frac{S q_0}{(m_0 + m_1)\omega_m r}, \\ \omega_2 &= \frac{\omega_e}{\omega_m}, \quad \omega_m^2 = \frac{k_1}{m_0 + m_1} \quad \text{e} \quad \omega_e^2 = \frac{1}{LC}.\end{aligned}$$

Então, o sistema adimensional, considerando-se o torque variável do motor, é dado por:

$$\begin{aligned}\chi_1'' + \chi_1 &= \varepsilon(\phi'' \cos \phi - \phi'^2 \operatorname{sen} \phi - \alpha_1 \chi_1' - \beta_1 \chi_1^3 + \gamma_2 \chi_2') \\ \chi_2'' + \omega_2^2 \chi_2 &= \varepsilon(\alpha_2 \chi_2' - \alpha_3 \chi_2^3 - \beta_2 \chi_2^3 - \gamma_1 \chi_1') \\ \phi'' &= \varepsilon(\lambda \chi_1'' \cos \phi + \delta_1 \chi_3) \\ \chi_3' &= \varepsilon(\mu_3 - \mu_4 \phi' - \delta_2 \chi_3)\end{aligned}\tag{2.29}$$

O sistema (2.29) não foi colocado na forma de estado, pois foi simulado diretamente no Simulink® e este programa permite que se trabalhe com as equações nesta forma.

O sistema (2.23), obtido anteriormente, foi colocado na forma de estado, pois esta forma é necessária para realizar os cálculos dos expoentes de Lyapunov. Os expoentes de Lyapunov não foram calculados para o sistema (2.29).

# Capítulo 3

## Simulações Numéricas

### 3.1 Considerações Gerais

Muitos métodos de integração numérica direta são utilizados para achar as respostas de sistemas mecânicos lineares ou não-lineares. Meirovitch (2001) e Palácios (2002) sugerem que o algoritmo mais eficiente para integração direta das equações dinâmicas não-lineares de sistemas não-ideais seria o método de Runge-Kutta.

As simulações numéricas do sistema estudado (2.24) foram realizadas na ferramenta Simulink® encontrada no software MATLAB®. O integrador utilizado foi o de Runge-Kutta de ordem média (quarta e quinta ordem) com passo de integração variável (método de Dormand-Prince – ODE45 do aplicativo MATLAB®).

Para todas as simulações numéricas realizadas foram consideradas condições iniciais nulas.

O intervalo de tempo utilizado na integração numérica do sistema estudado, em todas as situações, foi sempre de 0 a 1000.

Nos cálculos efetuados, observou-se que o regime permanente é a parte que resta eliminando-se dois terços iniciais das repostas.

Neste capítulo foram realizadas simulações numéricas para duas situações diferentes. Na seção 3.2, considerou-se o sistema com absorvedor eletromecânico linear e, na seção 3.3, considerou-se o sistema com absorvedor eletromecânico não-linear.

Os parâmetros adimensionais utilizados nas simulações numéricas foram obtidos de forma que a frequência natural  $\omega_1$ , do sistema não-ideal, seja igual, à frequência natural  $\omega_2$ , do absorvedor eletromecânico, ou seja,  $\omega_1 = \omega_2 = 1$ .

A tabela 3.1 mostra os parâmetros adimensionais para as diversas simulações numéricas realizadas do modelo simplificado, aquele que considera o torque gerado pelo motor CC linear. Na segunda coluna, encontram-se os valores dos parâmetros para o sistema não-ideal sem absorvedor, na terceira coluna, estão os valores para o sistema com absorvedor linear e, finalmente, na quarta coluna os valores para o sistema com absorvedor não-linear. A referência “controle” refere-se ao parâmetro de controle ou

entrada do sistema estudado e a referência “varia” indica que será estudado a variação deste parâmetro.

Tabela 3.1 – Valores dos parâmetros adimensionais utilizados nas simulações do modelo simplificado.

Parâmetros do Sistema	Sistema Não-Ideal (Sem Absorvedor)	Sistema com Absorvedor Linear	Sistema com Absorvedor Não-Linear
$\alpha_1$	0.2	0.2	0.2
$\alpha_2$	0	varia	varia
$\alpha_3$	0	0	varia
$\beta_1$	3	3	3
$\beta_2$	0	0	varia
$\varepsilon$	0.1	0.1	0.1
$\lambda$	5	5	5
$\gamma_1$	0	20	20
$\gamma_2$	0	10	10
$\mu_1$	controle	controle	controle
$\mu_2$	15	15	15

Os parâmetros adimensionais representam características da dinâmica do sistema estudado. Os parâmetros adimensionais são descritos da seguinte maneira:

- $\alpha_1$  é o coeficiente de amortecimento adimensional da estrutura principal.
- $\alpha_2$  é o coeficiente de amortecimento adimensional do termo linear do circuito RCL.
- $\alpha_3$  é o coeficiente de amortecimento adimensional do termo não-linear do circuito RCL.
- $\beta_1$  é a constante de rigidez adimensional do termo não-linear da estrutura principal.
- $\beta_2$  é a constante de elastância (rigidez) adimensional do termo não-linear do circuito RCL.

- $\varepsilon$  é o parâmetro de acoplamento adimensional entre a estrutura principal e o motor CC.
- $\lambda$  é o parâmetro de acoplamento adimensional entre motor CC e a estrutura principal.
- $\gamma_1, \gamma_2$  são os parâmetros de acoplamento adimensional entre o circuito elétrico e o sistema mecânico.
- $\mu_1$  é o parâmetro de controle adimensional (relativo à tensão de alimentação na armadura do motor elétrico – torque constante).
- $\mu_2$  é o parâmetro adimensional relacionado à característica do motor CC – torque constante.

Os valores dados na tabela 3.1 e utilizados nas simulações numéricas contemplam inúmeras situações. Alguns parâmetros adimensionais ( $\alpha_1, \beta_1, \varepsilon, \lambda$  e  $\mu_2$ ) não sofrem alterações.

O parâmetro  $\mu_1$  (relativo à tensão de alimentação na armadura do motor elétrico) é o parâmetro de controle. Para cada valor do parâmetro de controle obtemos uma velocidade rotacional no motor, ou frequência de excitação ( $\phi'$ ).

O único parâmetro variado no sistema com absorvedor linear foi  $\alpha_2$  (relacionado com o termo linear do “amortecimento” elétrico).

O sistema com absorvedor não-linear apresenta dois parâmetros relacionados aos termos não-lineares ( $\alpha_3$  e  $\beta_2$ ).

A tabela 3.2 mostra os parâmetros adimensionais utilizados nas simulações numéricas do modelo completo, aquele que considera que o torque gerado pelo motor é influenciado pela dinâmica de funcionamento do motor. Na segunda coluna, encontram-se os valores dos parâmetros para o sistema não-ideal sem absorvedor, na terceira coluna, estão os valores para o sistema com absorvedor linear e, finalmente, na quarta coluna os valores para o sistema com absorvedor não-linear. A referência “controle” refere-se ao parâmetro de controle ou entrada do sistema estudado. Para os novos parâmetros relacionados ao motor CC adotou-se valores encontrados em Aung (2007).

Tabela 3.2 – Valores dos parâmetros adimensionais utilizados nas simulações do modelo completo

Parâmetros do Sistema	Sistema Não-Ideal (Sem Absorvedor)	Sistema com Absorvedor Linear	Sistema com Absorvedor Não-Linear
$\alpha_1$	0.2	0.2	0.2
$\alpha_2$	0	10	0.1
$\alpha_3$	0	0	10
$\beta_1$	3	3	3
$\beta_2$	0	0	0
$\delta_1$	9.5	9.5	9.5
$\delta_2$	0.5	0.5	0.5
$\varepsilon$	0.1	0.1	0.1
$\lambda$	5	5	5
$\gamma_1$	0	20	20
$\gamma_2$	0	10	10
$\mu_3$	controle	controle	controle
$\mu_4$	1	1	1

Os novos parâmetros adimensionais, utilizados nas simulações do modelo com torque variável, são descritos da seguinte forma:

- $\delta_1$ ,  $\delta_2$  são os parâmetros adimensionais de acoplamento da equação de corrente da armadura do motor CC.
- $\mu_3$  é o parâmetro de controle adimensional (relativo à tensão de alimentação na armadura do motor elétrico – torque variável ).
- $\mu_4$  é o parâmetro adimensional relacionado à característica do motor CC – torque variável.

Os outros parâmetros adimensionais são os mesmos definidos anteriormente.

As curvas de resposta-freqüência foram obtidas da seguinte maneira: para cada parâmetro de controle capturou-se as amplitudes máximas de oscilações e a média da velocidade rotacional do motor, o que se denominou de freqüência de excitação. Assim, plotou-se as amplitudes máximas em função da freqüência de excitação.

As curvas de resposta-parâmetro de controle foram obtidas de modo semelhante: para cada parâmetro de controle capturou-se as amplitudes máximas de oscilações. Desta forma, plotou-se as amplitudes máximas em função dos parâmetros de controle.

Os espectros de freqüência foram analisados através da transformada rápida de Fourier (“Fast Fourier Transform – FFT”). Os espectros de freqüência ajudam na distinção entre movimentos periódicos, quase-periódicos e caóticos e são utilizados, normalmente, no estudo de sinais estacionários. As FFTs calculadas neste capítulo foram obtidas diretamente do software MATLAB®, através do comando “fft”.

O estudo da estabilidade dos sistemas estudados foi realizado conforme a análise de estabilidade de Lyapunov, através dos cálculos numéricos dos expoentes de Lyapunov. Os expoentes de Lyapunov foram calculados utilizando-se o algoritmo proposto por Wolf (1985). Este algoritmo foi implantado como uma função do MATLAB® (lyapunov.m) e tem distribuição livre. As entradas desta função são: as equações diferenciais do sistema, o integrador utilizado, as condições iniciais e o tempo de integração.

## **3.2 Resultados das Simulações Utilizando-se Um Absorvedor Eletromecânico Linear**

Nesta seção, estudam-se os dois modelos obtidos no capítulo 2. Na seção 3.2.1 simula-se o modelo simplificado, que considera uma função linear para a expressão que define o torque gerado pelo motor. Na seção 3.2.2, simula-se o modelo completo, no qual as características elétricas do motor CC são consideradas.

### **3.2.1 Modelo Simplificado do Sistema com Absorvedor Linear**

Para a simulação do sistema com absorvedor de vibrações eletromecânico linear, considera-se o sistema de equações (2.23), observando que os parâmetros não-lineares

$\alpha_3$  (relacionado ao termo cúbico do “amortecimento” elétrico) e  $\beta_2$  (relacionado ao termo cúbico da “rigidez” elétrica) são zerados e o parâmetro  $\alpha_2$  (relacionado ao termo linear do “amortecimento” elétrico) tomado com sinal negativo, assim foi possível utilizar-se o mesmo modelo matemático.

A figura 3.1 mostra as curvas de respostas em frequência do sistema com absorvedor linear para três valores distintos de  $\alpha_2$  (valores mostrados nas figuras). Na figura 3.1.a, tem-se as amplitudes de deslocamentos da estrutura. Na figura 3.1.b, tem-se as amplitudes de oscilações do absorvedor.

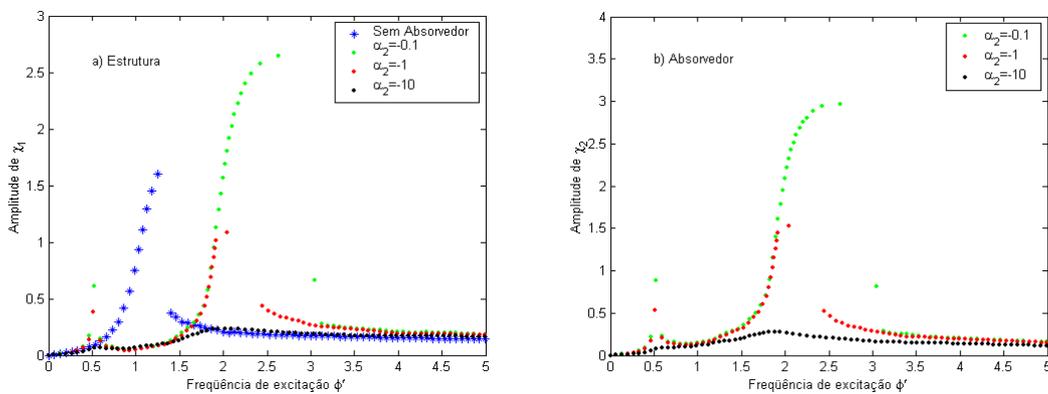


Figura 3.1 – Curvas de resposta-frequência do sistema com absorvedor de vibrações linear, a) Frequência de excitação vs. Amplitude de deslocamento da estrutura, e b) Frequência de Excitação vs. Amplitude de oscilação do absorvedor.

Nota-se que o absorvedor eletromecânico que apresenta melhor efetividade é o que apresenta maior valor de  $\alpha_2$ . A curva do sistema sem absorvedor apresenta um único pico, quando a frequência de excitação ( $\phi'$ ) atinge a frequência natural do sistema ( $\omega_1 = 1$ ). Enquanto as curvas do sistema com absorvedor apresentam dois picos para baixos valores de  $\alpha_2$  e o quase desaparecimento dos picos para altos valores de  $\alpha_2$ . O fenômeno do salto característico dos sistemas não-ideais (efeito Sommerfeld) diminui nos casos de  $\alpha_2$  (relacionado ao termo linear do “amortecimento” elétrico) pequenos e desaparece quando  $\alpha_2 = -10$ .

A figura 3.2 mostra as curvas de respostas em função do parâmetro de controle do sistema com absorvedor linear para três valores distintos de  $\alpha_2$  (valores mostrados

nas figuras). Na figura 3.2.a, tem-se as amplitudes de deslocamentos da estrutura. Na figura 3.2.b, tem-se as amplitudes de oscilações do absorvedor.

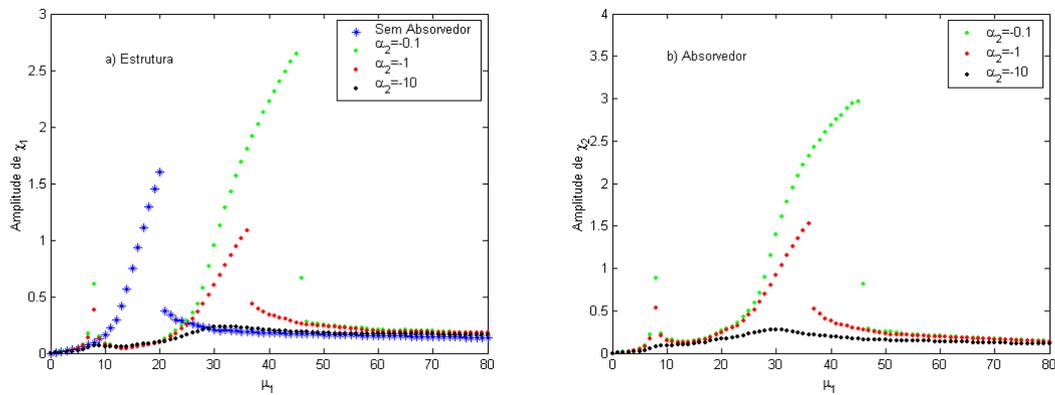


Figura 3.2 – Curvas de resposta-parâmetro de controle do sistema com absorvedor de vibrações linear, a) Parâmetro de controle vs. Amplitude de deslocamento da estrutura, e b) Parâmetro de controle vs. Amplitude de oscilação do absorvedor.

A figura 3.3 mostra a relação entre o parâmetro de controle e a frequência de excitação ou velocidade rotacional do motor para diferentes valores de  $\alpha_2$ . Nota-se que a relação entre o aumento do parâmetro de controle e o aumento da frequência de excitação pode ser considerada linear, a menos das regiões onde ocorre o fenômeno de salto.

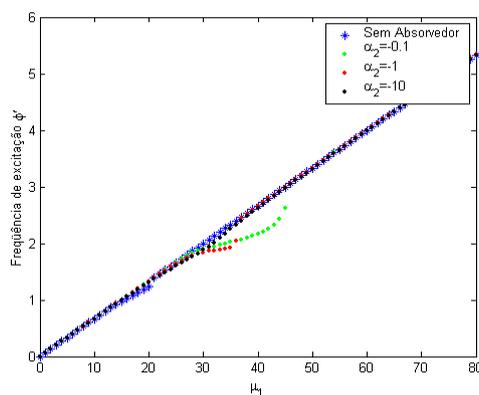


Figura 3.3 – Relação entre parâmetro de controle e frequência de excitação.

As figuras de 3.4 até 3.11 estão relacionadas com o estudo do absorvedor que obteve melhor desempenho na análise das respostas em frequência, ou seja, o caso em que  $\alpha_2$  (relacionado ao termo linear do “amortecimento” elétrico) é igual a -10. As

linhas claras (verdes) representam as repostas do sistema sem absorvedor e as linhas escuras (preto) representam as repostas do sistema com absorvedor.

A figura 3.4 mostra as curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  (relacionado ao deslocamento da estrutura principal) quando se fixa o parâmetro de controle  $\mu_1$  em 14. Na figura 3.4.a, tem-se as evoluções temporais dos deslocamentos da estrutura, para o sistema sem absorvedor e para o sistema com absorvedor. Na figura 3.4.b, tem-se o plano de fase no regime estacionário, também para o sistema sem absorvedor e para o sistema com absorvedor. Nas figuras 3.4.c e 3.4.d, têm-se as FFTs do sistema sem absorvedor e do sistema com absorvedor, respectivamente.

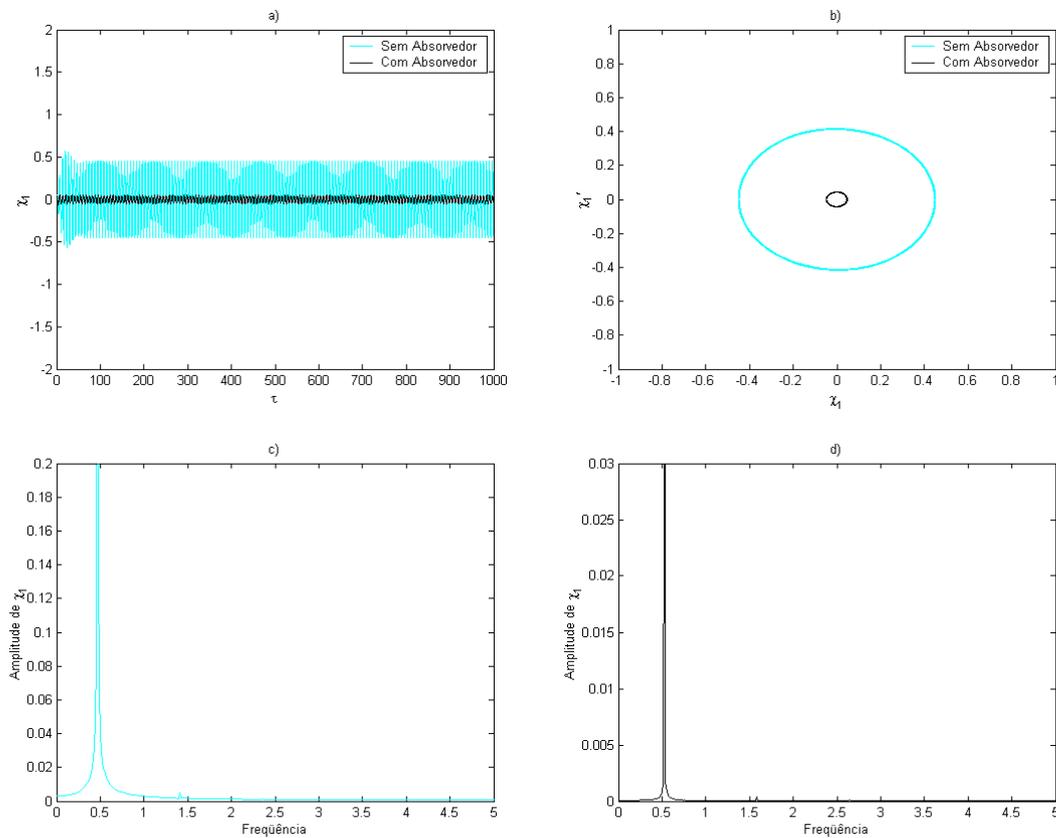


Figura 3.4 – Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_1 = 14$  e  $\alpha_2 = -10$ ,  
a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário, c) FFT do sistema sem absorvedor, e d) FFT do sistema com absorvedor.

Observa-se, na figura 3.4.a, uma redução da amplitude de deslocamento da estrutura para o sistema com absorvedor. A utilização do absorvedor não altera o comportamento da variável  $\chi_1$  (relacionado ao deslocamento da estrutura principal) que

permanece periódico, como pode ser visto no plano de fase, figura 3.4.b, e pelas FFTs, figuras 3.4.c e 3.4.d.

A figura 3.5 mostra as curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_2$  (relacionado a oscilações da carga no absorvedor) quando se fixa o parâmetro de controle  $\mu_1$  em 14. Na figura 3.5.a, tem-se as evoluções temporais das oscilações da carga elétrica no absorvedor, para o sistema sem absorvedor e para o sistema com absorvedor. Na figura 3.5.b, tem-se o plano de fase no regime estacionário, também para o sistema sem absorvedor e para o sistema com absorvedor. Nas figuras 3.5.c e 3.5.d, têm-se as FFTs do sistema sem absorvedor e do sistema com absorvedor, respectivamente.

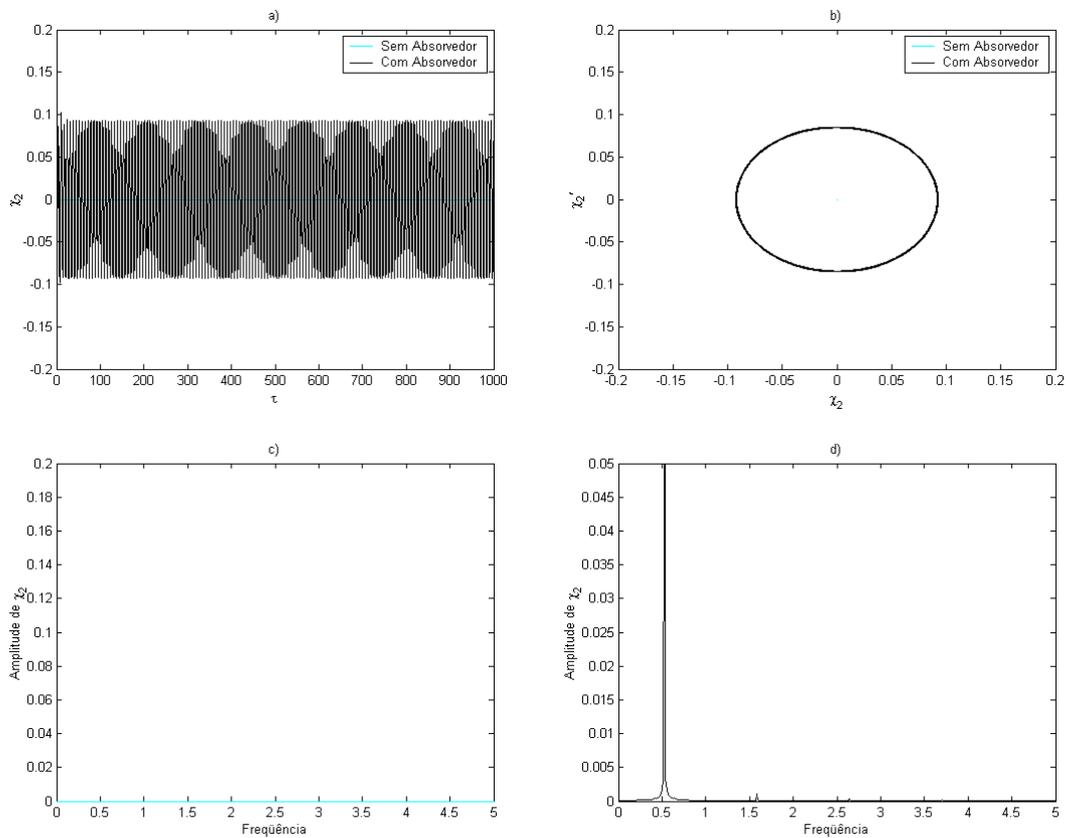


Figura 3.5 – Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_2$  para  $\mu_1 = 14$  e  $\alpha_2 = -10$ , a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário, c) FFT do sistema sem absorvedor, e d) FFT do sistema com absorvedor.

Nota-se nas figuras 3.5.a, 3.5.b e 3.5.d que a variável  $\chi_2$ , relacionada ao absorvedor, também apresenta comportamento periódico. Para o sistema sem absorvedor não existe curvas de  $\chi_2$ .

A figura 3.6 mostra a evolução temporal da velocidade rotacional do motor (ou frequência de excitação) próximo de atingir a frequência natural do sistema, tanto do sistema sem absorvedor quanto do sistema com absorvedor. Neste caso, nota-se um comportamento regular da frequência de excitação.

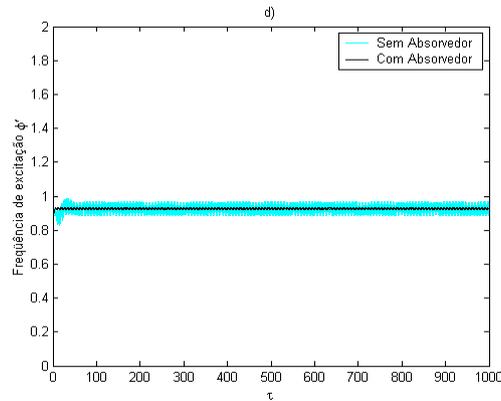


Figura 3.6 – Histórico da velocidade rotacional do motor para  $\mu_1 = 14$  e  $\alpha_2 = -10$ .

O comportamento do sistema não se altera. Mas a região de regime permanente demora mais para ser atingida quando a frequência de excitação está deixando a região de ressonância. Este fato pode ser observado quando se plota as mesmas curvas acima para  $\mu_1$  igual a 20.

A figura 3.7 mostra as mesmas curvas da figura 3.4 para  $\mu_1$  igual a 20.

Observa-se, na figura 3.7.a, uma boa performance do absorvedor, mesmo tendo uma amplitude de deslocamento maior do sistema não-ideal. Um fato interessante nesta figura é a região transiente mais lenta. Este fato ocorre exatamente quando ocorre o fenômeno de salto (como pode ser visto nas figuras 3.1 e 3.2). As figuras 3.7.b, 3.7.c e 3.7.d mostram o comportamento periódico da variável  $\chi_1$ , do sistema sem absorvedor e do sistema com absorvedor.

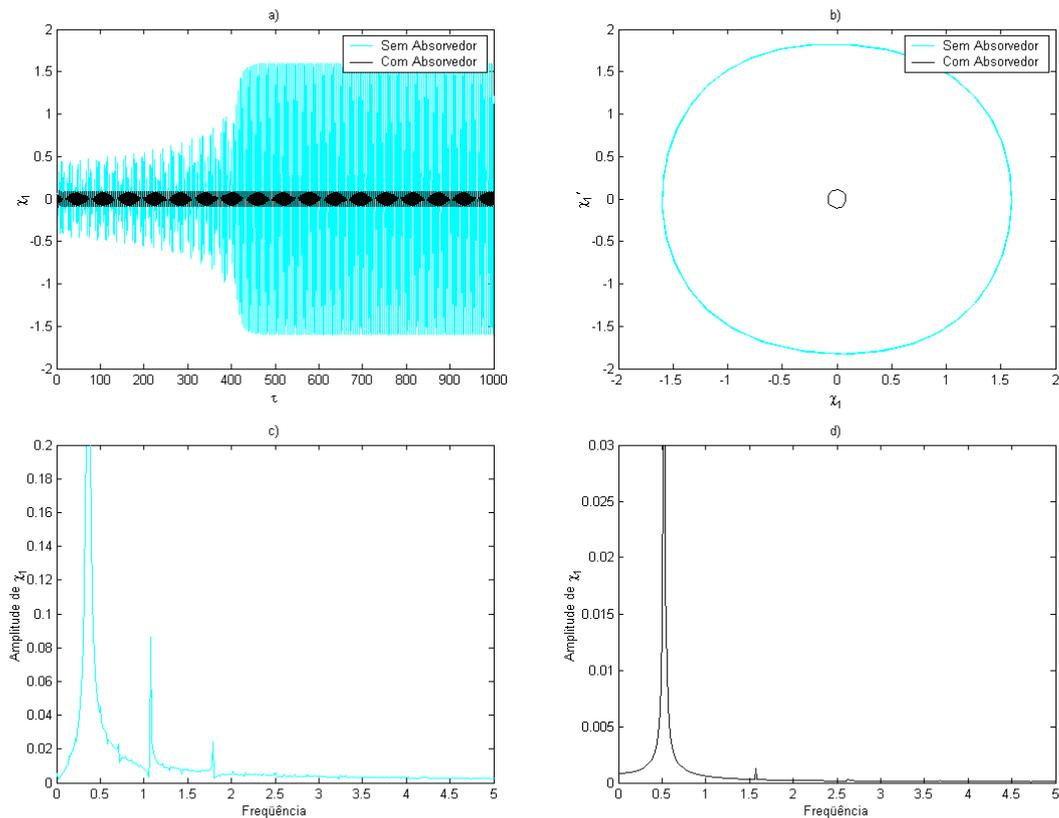


Figura 3.7 – Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_1 = 20$  e  $\alpha_2 = -10$ ,  
a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário, c) FFT do sistema sem absorvedor, e d) FFT do sistema com absorvedor.

A figura 3.8 mostra as mesmas curvas da figura 3.5 para  $\mu_1$  igual a 20.

A variável  $\chi_2$  apresenta comportamento periódico, como pode ser visto nas figuras 3.8.b e 3.8.d.

Deduz-se, como no caso anterior, que a energia que era gasta para vibrar a estrutura agora é gasta para produzir oscilações da corrente do circuito elétrico do absorvedor. Este fato é observado pelo aumento das oscilações de  $\chi_2$  e a pouca variação de  $\chi_1$  quando se muda de  $\mu_1$  igual a 14 para  $\mu_1$  igual a 20.

A figura 3.9 mostra a velocidade rotacional do motor para  $\mu_1$  igual a 20.

Nesta figura, observa-se um comportamento irregular durante a região transiente para o sistema sem absorvedor. O comportamento torna-se regular no sistema com absorvedor.

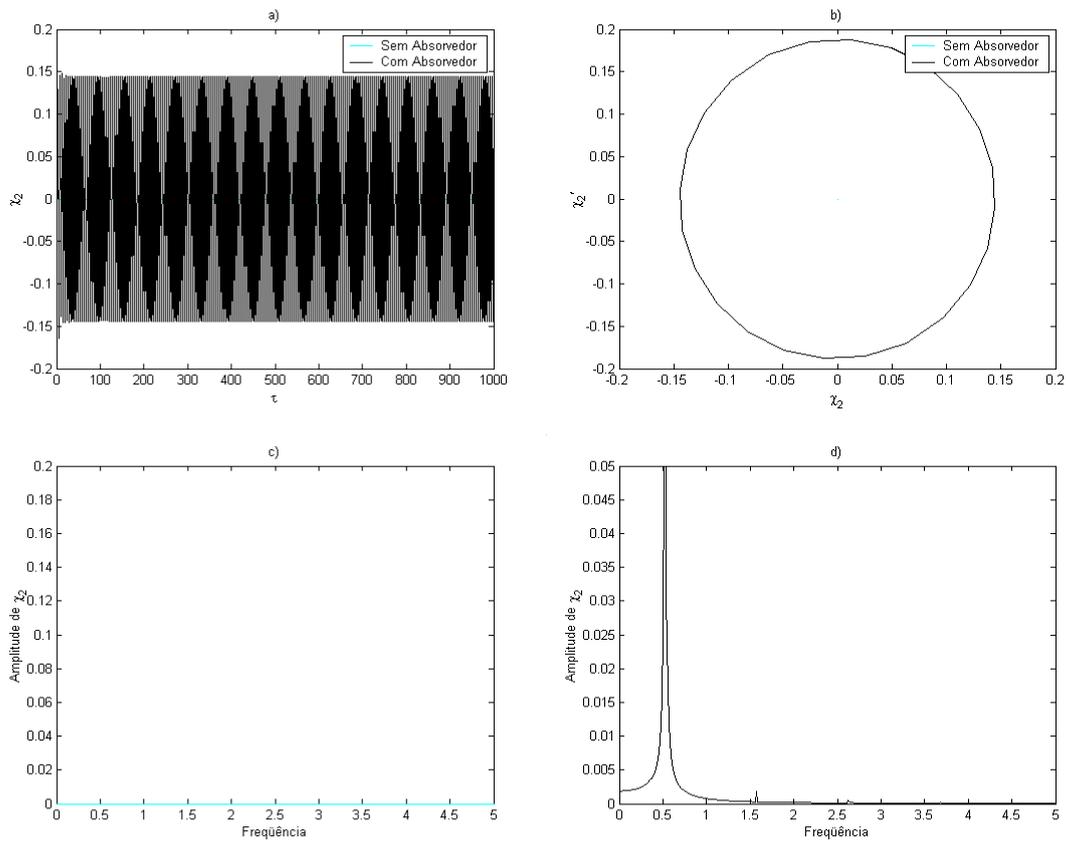


Figura 3.8 – Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_2$  para  $\mu_1 = 20$  e  $\alpha_2 = -10$ , a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário, c) FFT do sistema sem absorvedor, e d) FFT do sistema com absorvedor.

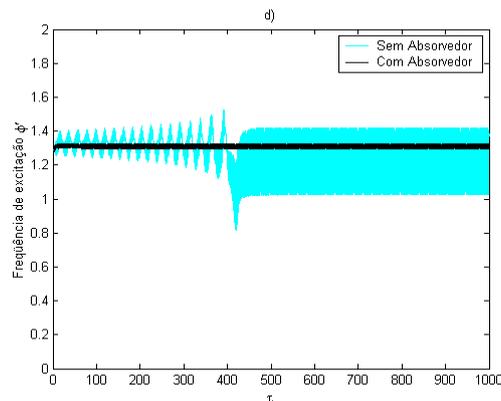


Figura 3.9 – Histórico da velocidade rotacional do motor para  $\mu_1 = 20$  e  $\alpha_2 = -10$ .

A seguir, analisa-se a estabilidade do sistema segundo critério de Lyapunov.

Os expoentes de Lyapunov são calculados para cada valor de parâmetro de controle  $\mu_1$ , tomado com incremento unitário.

A figura 3.10 mostra os expoentes de Lyapunov do sistema sem absorvedor. Na figura 3.10.a temos todos os expoentes calculados para o sistema, cada variável gera dois expoentes. Na figura 3.10.b mostra os três maiores expoentes de Lyapunov em detalhes.

Observa-se que o sistema sem absorvedor não apresenta nenhum expoente de Lyapunov positivo, o que caracteriza que não existe no sistema nenhum atrator estranho.

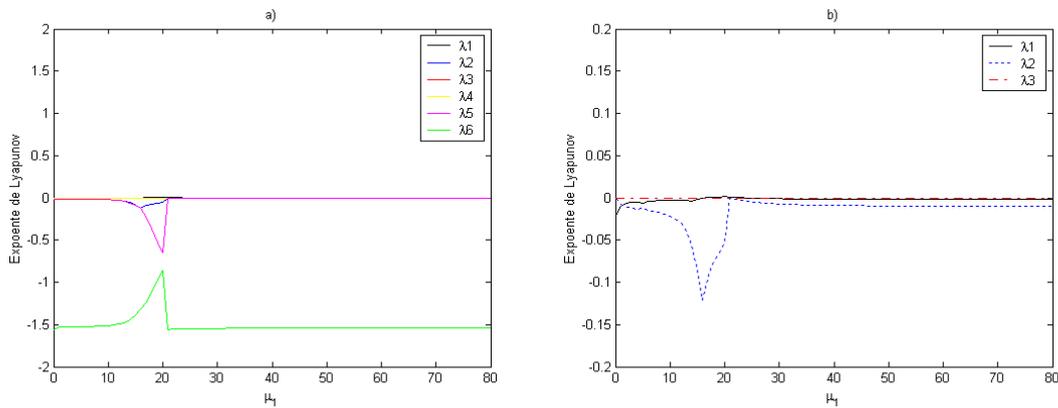


Figura 3.10 – a) Expoentes de Lyapunov do sistema sem absorvedor, e b) Detalhe dos três maiores expoentes.

A figura 3.11 mostra, da mesma forma que na figura 3.10, os expoentes de Lyapunov para o sistema com absorvedor eletromecânico linear.

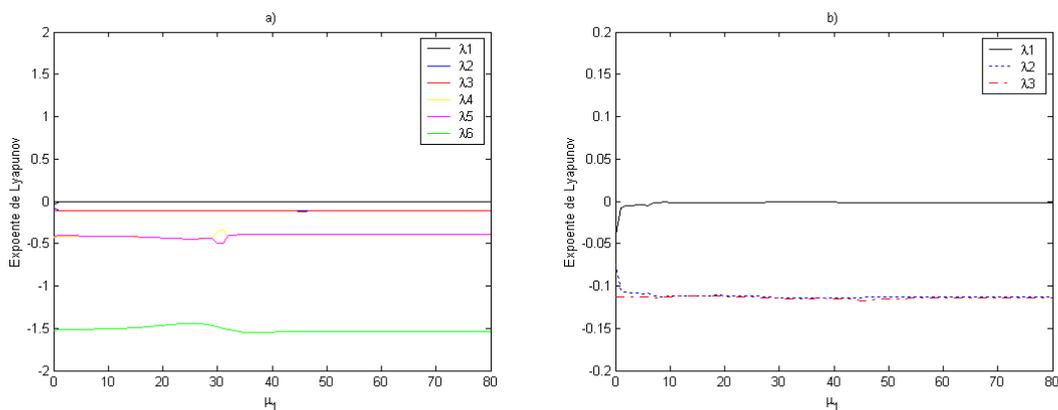


Figura 3.11 – a) Expoentes de Lyapunov do sistema com absorvedor, e b) Detalhe dos três maiores expoentes.

### 3.2.2 Modelo Completo do Sistema com Absorvedor Linear

A seguir, algumas simulações foram realizadas considerando-se o sistema (2.29), obtido na seção 2.3, ou seja, o modelo com as características elétricas do motor. Os valores dos parâmetros utilizados nestas simulações foram mostrados na tabela 3.2.

A figura 3.12 mostra as curvas de respostas em frequência do sistema. Na figura 3.11.a, têm-se a amplitudes de deslocamentos da estrutura. Na figura 3.12.b, encontra-se as amplitudes de oscilações do absorvedor. Na figura 3.13.c, mostram-se as amplitudes de oscilação da corrente na armadura do motor CC. A figura 3.13.d mostra a relação entre o parâmetro de controle  $\mu_3$  e a frequência de excitação  $\phi'$ . Nas próximas figuras, as linhas claras (azuis) representam as repostas do sistema sem absorvedor e as linhas escuras (preto) representam as repostas do sistema com absorvedor.

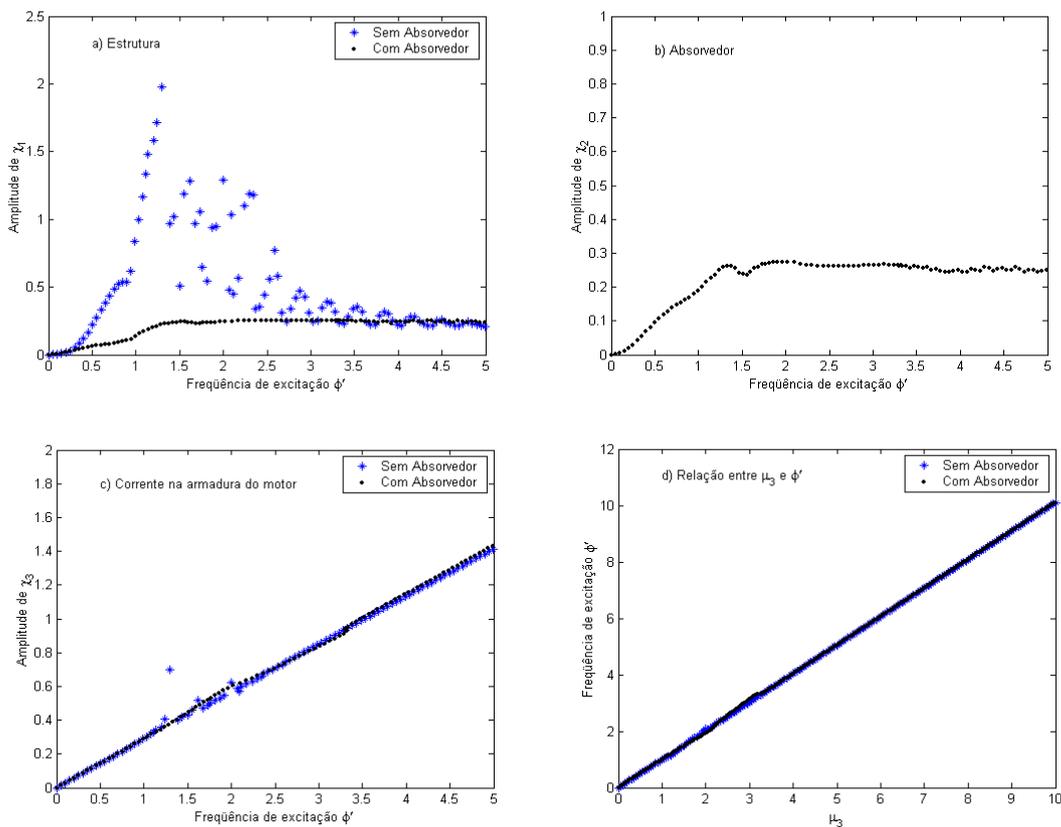


Figura 3.12 – Curvas de resposta-freqüência do sistema, a) Freqüência de excitação vs. amplitude de deslocamento da estrutura, b) Freqüência de excitação vs. amplitude de oscilação do absorvedor, c) Freqüência de excitação vs. amplitude de oscilação da corrente na armadura do motor, e d) Relação entre parâmetro de controle vs. freqüência de excitação.

As figuras 3.13 a 3.18 mostram as curvas relacionadas às variáveis adimensionais  $\chi_1$  (relativa ao deslocamento da estrutura),  $\chi_2$  (relativa à carga elétrica que atravessa o absorvedor),  $\chi_3$  (relativa à corrente que atravessa a armadura do motor) quando se fixa o parâmetro de controle  $\mu_3$ . As figuras “a” mostram as evoluções temporais dos deslocamentos da estrutura, para o sistema sem absorvedor e para o sistema com absorvedor. As figuras “b” mostram os planos de fase no regime estacionário, também para o sistema sem absorvedor e para o sistema com absorvedor.

As figuras 3.13 a 3.15 mostram os resultados quando se fixa o parâmetro de controle  $\mu_3$  em 0.9 e as figuras 3.16 a 3.18 para  $\mu_3$  igual 1.2.

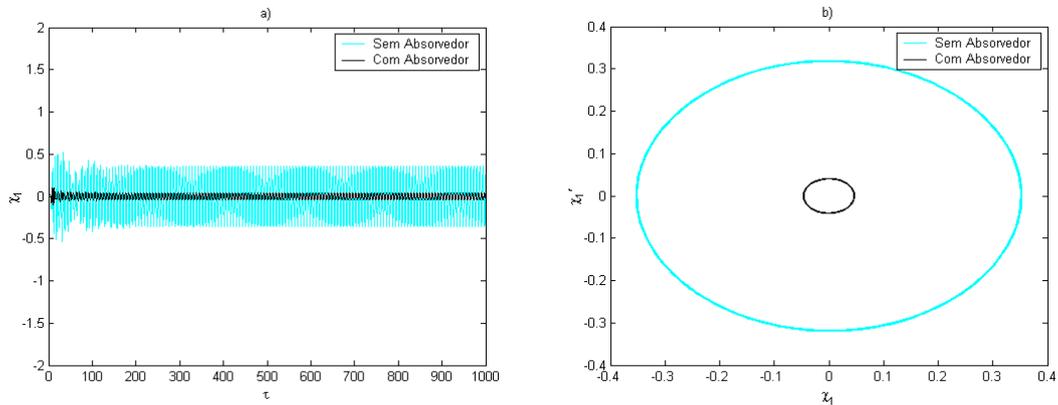


Figura 3.13 – Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_3 = 0.9$ ,  
a) Histórico do deslocamento e b) Plano de fase no regime estacionário.

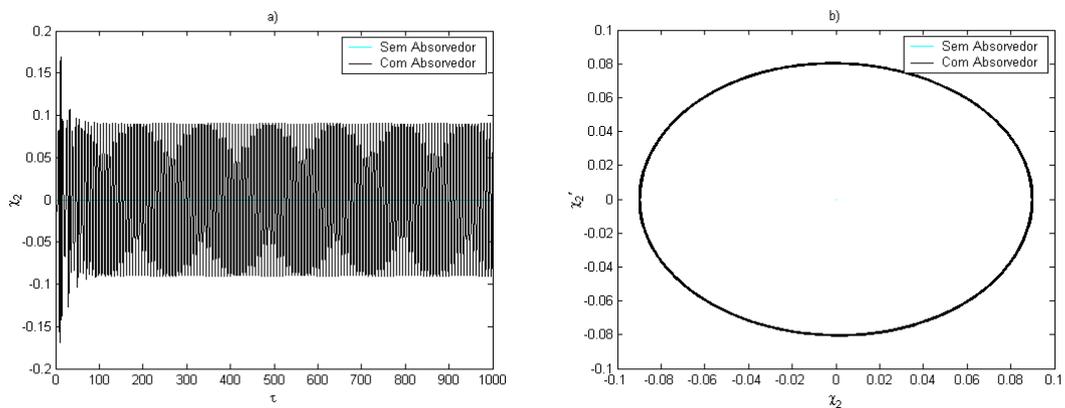


Figura 3.14 – Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_2$  para  $\mu_3 = 0.9$ ,  
a) Histórico do deslocamento e b) Plano de fase no regime estacionário.

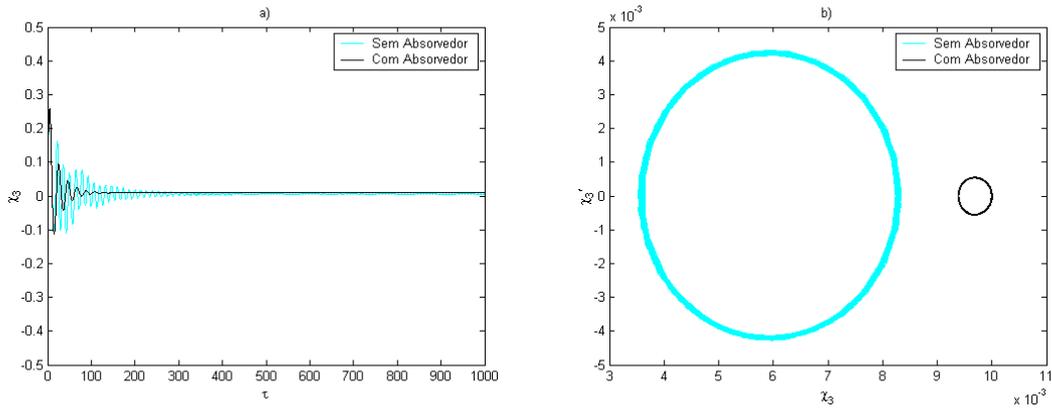


Figura 3.15 – Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_3$  para  $\mu_3 = 0.9$ ,  
a) Histórico do deslocamento e b) Plano de fase no regime estacionário.

Observa-se, na figura 3.13.a, uma redução da amplitude de deslocamento da estrutura para o sistema com absorvedor. A utilização do absorvedor não altera o comportamento da variável  $\chi_1$  (relacionado ao deslocamento da estrutura principal) que permanece periódico, como pode ser visto no plano de fase, figura 3.13.b.

Nota-se nas figuras 3.14a e 3.14.b que a variável  $\chi_2$ , relacionada ao absorvedor, também apresenta comportamento periódico. Para o sistema sem absorvedor não existe curvas de  $\chi_2$ .

A figura 3.15 mostra que a variável  $\chi_3$  (relativa à corrente que atravessa a armadura do motor) tem valor praticamente constante para baixos valores do parâmetro de controle  $\mu_3$ .

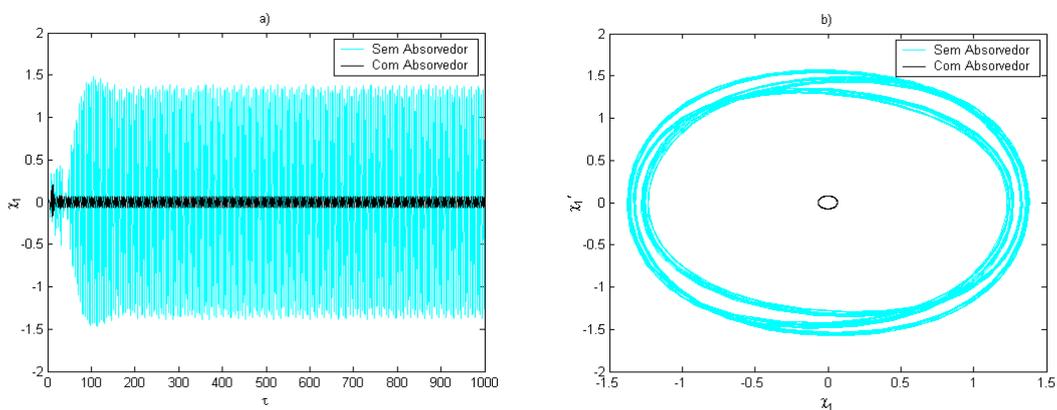


Figura 3.16 – Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_3 = 1.2$ ,  
a) Histórico do deslocamento e b) Plano de fase no regime estacionário.

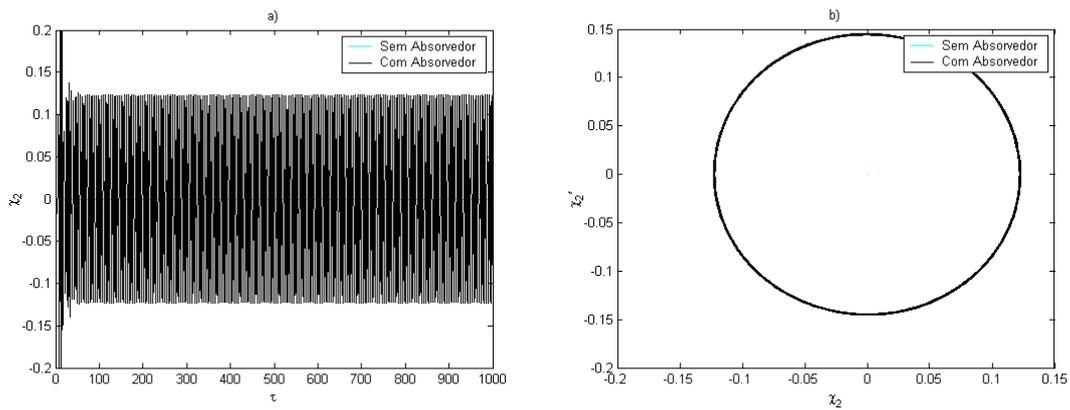


Figura 3.17 – Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_2$  para  $\mu_3 = 1.2$ ,  
a) Histórico do deslocamento e b) Plano de fase no regime estacionário.

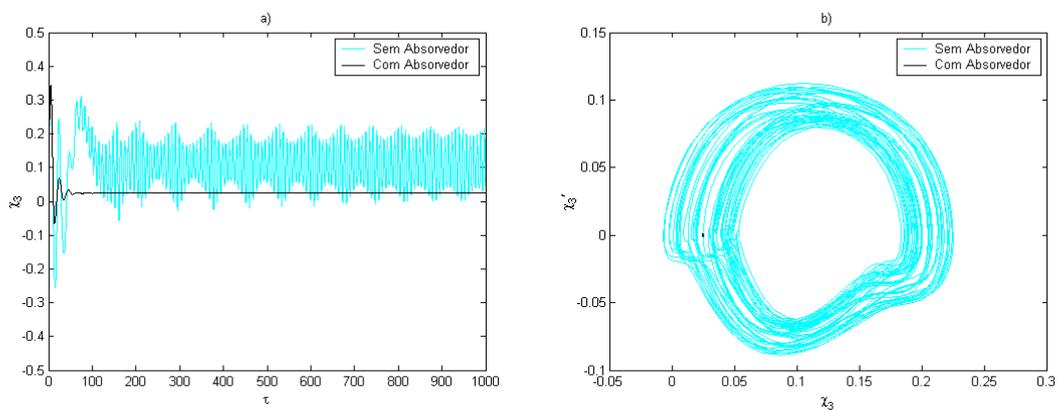


Figura 3.18 – Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_3$  para  $\mu_3 = 1.2$ ,  
a) Histórico do deslocamento e b) Plano de fase no regime estacionário.

Nota-se, na figura 3.16.a, uma redução da amplitude de deslocamento da estrutura para o sistema com absorvedor, na região que o sistema sem absorvedor apresenta maiores amplitudes de deslocamentos. A figura 3.16.b mostra uma geometria de plano de fases um pouco diferente para o sistema sem absorvedor, este fato não foi observado nas simulações do sistema simplificado. Porém, pode-se analisar esta nova geometria avaliando o comportamento da variável  $\chi_3$  (relativa à corrente que atravessa a armadura do motor). A figura 3.18 mostra que essa corrente apresenta um comportamento irregular para o sistema sem absorvedor. A fim de verificar o que ocasiona tal irregularidade no sistema, plotou-se as curvas da corrente que atravessa o motor e as curvas da frequência de excitação do sistema para diferentes parâmetros de controle  $\mu_3$ , como pode ser visto nas figuras 3.19 a 3.21.

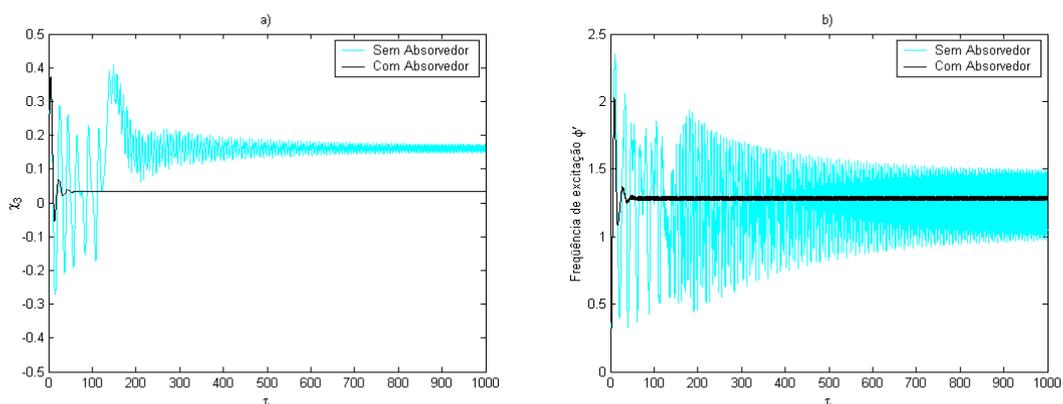


Figura 3.19 – Histórico do deslocamento para  $\mu_3 = 1.3$ , a) da variável adimensional relacionada à corrente na armadura do motor e b) da frequência de excitação do motor.

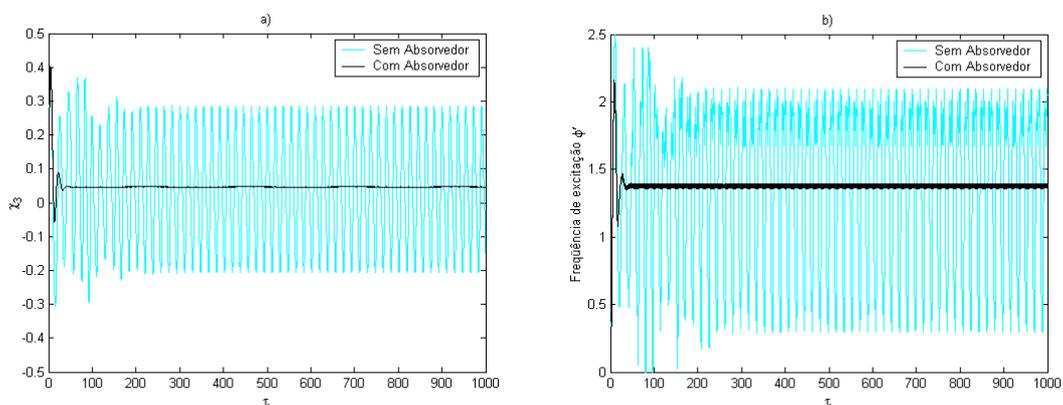


Figura 3.20 – Histórico do deslocamento para  $\mu_3 = 1.4$ , a) da variável adimensional relacionada à corrente na armadura do motor e b) da frequência de excitação do motor.

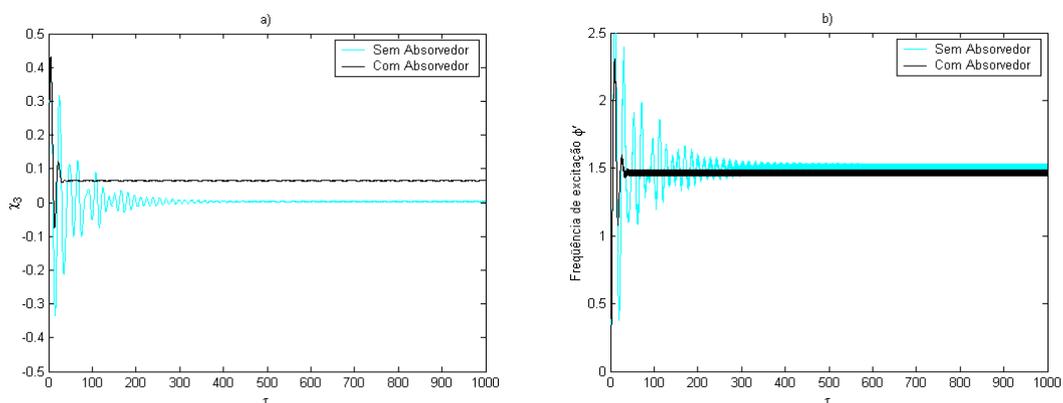


Figura 3.21 – Histórico do deslocamento para  $\mu_3 = 1.5$ , a) da variável adimensional relacionada à corrente na armadura do motor e b) da frequência de excitação do motor.

As figuras 3.19 a 3.21 mostram que o sistema apresenta diferenças significativas de comportamento quando se considera o modelo simplificado e o modelo completo. Estas diferenças são acentuadas durante a passagem pela ressonância. No modelo completo percebe-se que uma pequena variação do parâmetro de controle  $\mu_3$  modifica completamente o comportamento do sistema. Warminski e Balthazar (2003) mostram as diferenças entre o modelo simplificado e o modelo completo de um sistema não-ideal.

O sistema apresenta maior variação da frequência de excitação ou velocidade rotacional na região próximo a ressonância. Nestes casos a corrente que atravessa o motor também apresenta oscilações maiores. Mas este fato não ocorre para todas as frequências ou parâmetro de controle. As figuras 3.19 a 3.21 mostram que ora a corrente é praticamente constante ora a corrente varia.

O mais importante é observar que o sistema com absorvedor sempre apresenta comportamento bem definido. O aumento do parâmetro de controle  $\mu_3$  provoca o aumento das oscilações da corrente do motor e da frequência de excitação. Tanto a corrente do motor quanto a frequência de excitação atingem valores constantes em regime permanente.

### **3.3 Resultados das Simulações Utilizando-se Um Absorvedor Eletromecânico Não-Linear**

Nesta seção, realizam-se simulações do modelo com absorvedores de vibrações eletromecânicos com componentes não-lineares. Como aconteceu na seção anterior, analisam-se o modelo simplificado (seção 3.3.1) e o modelo completo (seção 3.3.2).

#### **3.3.1 Modelo Simplificado do Sistema com Absorvedor Não-Linear**

Para a simulação do sistema com absorvedor de vibrações eletromecânico não-linear, modelo completo, considera-se o sistema de equações (2.23).

Os parâmetros adimensionais, relacionados aos termos não-lineares, analisados nesta seção foram  $\alpha_2$  (relacionado ao termo linear do “amortecimento” elétrico),  $\alpha_3$  (relacionado ao termo cúbico do “amortecimento” elétrico) e  $\beta_2$  (relacionado ao

termo cúbico da “rigidez” elétrica). Os valores dos parâmetros utilizados foram mostrados na tabela 3.1, para as simulações do modelo simplificado, e tabela 3.2, para os cálculos do modelo completo.

Para as curvas obtidas nas figuras de 3.22 a 3.24, adotou-se  $\beta_2$  igual a zero. Assim, os resultados obtidos não foram influenciados pela não-linearidade cúbica  $\chi_2^3$ .

A figura 3.22 mostra as curvas de respostas em frequência do sistema com absorvedor não-linear para três valores distintos de  $\alpha_3$  quando se tem  $\alpha_2$  igual a 10. Na figura 3.23.a, têm-se as amplitudes de deslocamentos da estrutura. Na figura 3.23.b, têm-se as amplitudes de oscilações do absorvedor.

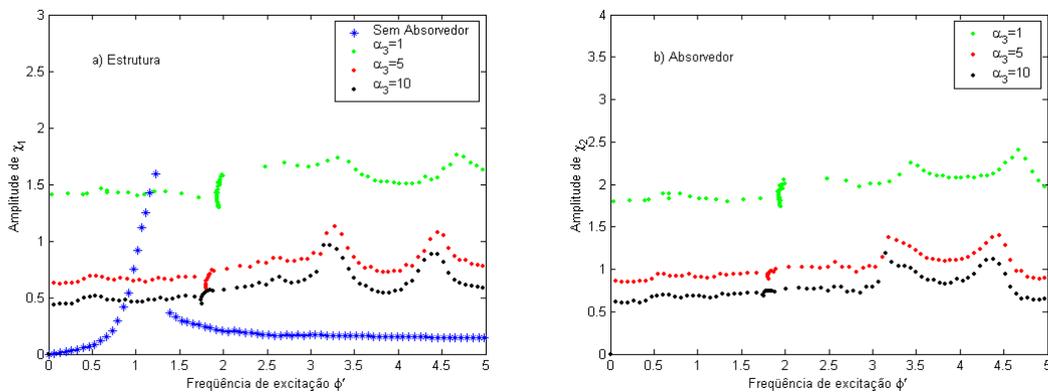


Figura 3.22 – Curva resposta-freqüência para o sistema com absorvedor de vibrações não-linear quando  $\alpha_2 = 10$ , a) Freqüência de excitação vs. amplitude de deslocamento da estrutura, e b) Freqüência de excitação vs. amplitude de oscilação do absorvedor.

As figuras 3.23 e 3.24 mostram as curvas de respostas em frequência do sistema com absorvedor não-linear para três valores distintos de  $\alpha_3$  (relacionado ao termo cúbico do “amortecimento” elétrico) quando se tem  $\alpha_2$  (relacionado ao termo linear do “amortecimento” elétrico) igual a 1 e  $\alpha_2$  igual a 0.1, respectivamente. Nas figuras “a”, têm-se as amplitudes de deslocamentos da estrutura. Nas figuras “b”, têm-se as amplitudes de oscilações do absorvedor.

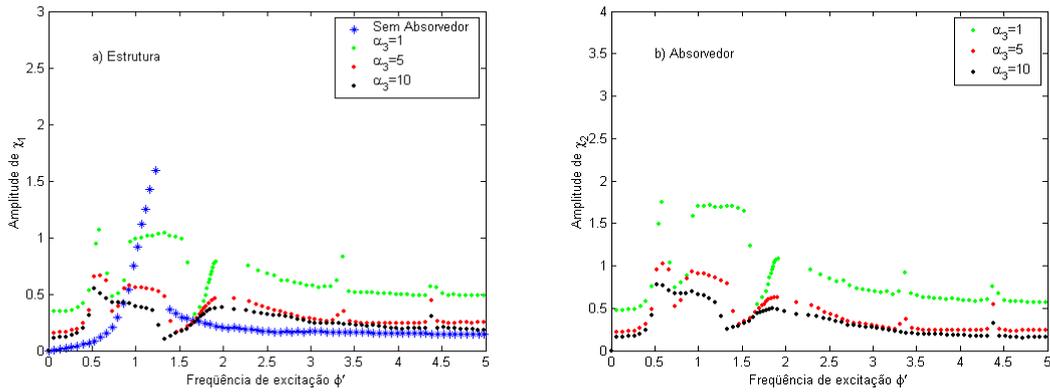


Figura 3.23 – Curva resposta-freqüência para o sistema com absorvedor de vibrações não-linear quando  $\alpha_2 = 1$ , a) Freqüência de excitação vs. amplitude de deslocamento da estrutura, e b) Freqüência de excitação vs. amplitude de oscilação do absorvedor.

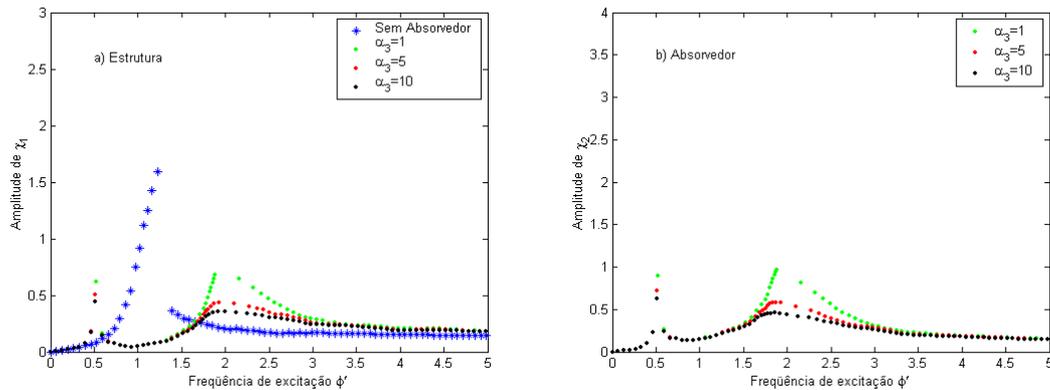


Figura 3.24 – Curva resposta-freqüência para o sistema com absorvedor de vibrações não-linear quando  $\alpha_2 = 0.1$ , a) Freqüência de excitação vs. amplitude de deslocamento da estrutura, e b) Freqüência de excitação vs. amplitude de oscilação do absorvedor.

Nas figuras 3.22 e 3.23, observam-se diversos picos nas respostas. Estes picos ocorrem quando a freqüência de excitação do sistema passa pelas harmônicas do sistema. Este fato pode explicado como resultado dos altos valores dos parâmetros não-lineares utilizados.

Nota-se dos resultados acima que o absorvedor não-linear que apresentou melhor desempenho foi aquele com  $\alpha_2$  (relacionado ao termo linear do “amortecimento” elétrico) igual a 0.1, menor valor simulado e  $\alpha_3$  (relacionado ao termo cúbico do “amortecimento” elétrico) igual a 10, maior valor simulado. Este resultado foi o que mais se aproximou do melhor resultado do absorvedor linear.

A figura 3.25 mostra as curvas de resposta-freqüência do sistema com absorvedor não-linear quando variamos o parâmetro  $\beta_2$  (relacionado ao termo cúbico da “rigidez” elétrica) para o absorvedor que obteve melhor desempenho.

A variação do parâmetro  $\beta_2$  não acrescenta mudanças significativas na resposta do sistema.

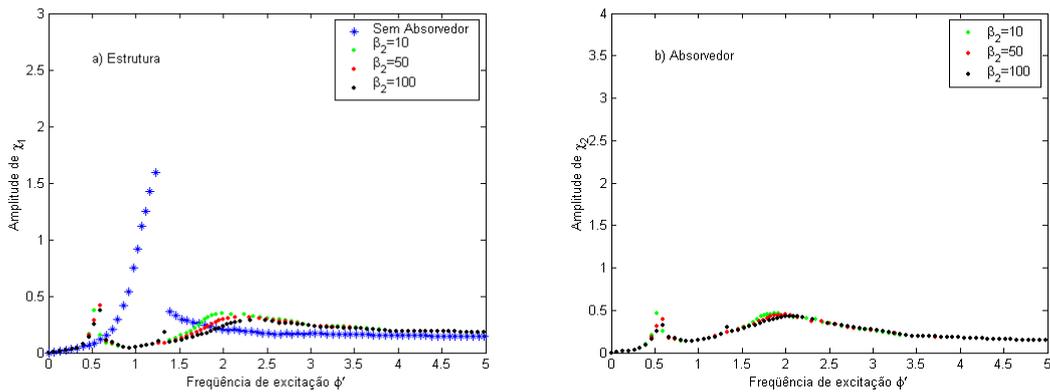


Figura 3.25 – Curva resposta-freqüência para o sistema com absorvedor de vibrações não-linear quando  $\alpha_2 = 0.1$  e  $\alpha_3 = 10$ , a) Freqüência de excitação vs. amplitude de deslocamento da estrutura, e b) Freqüência de excitação vs. amplitude de oscilação do absorvedor.

A seguir, analisa-se a estabilidade do sistema segundo o critério de Lyapunov.

A figura 3.26 mostra novamente (já mostrados na figura 3.10) os expoentes de Lyapunov do sistema sem absorvedor. Na figura 3.26.a temos todos os expoentes calculados para o sistema, cada variável gera dois expoentes. Na figura 3.26.b mostra os três maiores expoentes de Lyapunov em detalhes.

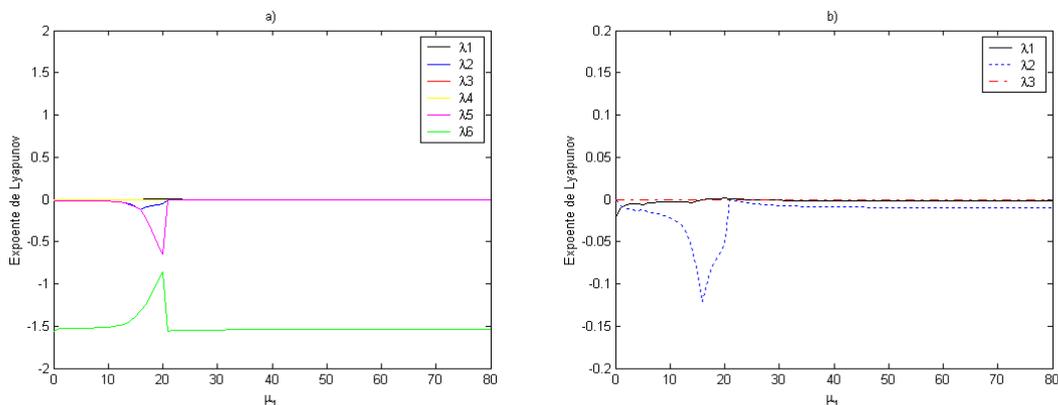


Figura 3.26 – a) Expoentes de Lyapunov do sistema sem absorvedor, e b) Detalhe dos três maiores expoentes.

A figura 3.27 mostra os expoentes de Lyapunov para o sistema com absorvedor eletromecânico não-linear.

Observa-se pelas figuras 3.26 e 3.27 que tanto o sistema sem absorvedor quanto o sistema com absorvedor não-linear não apresentaram nenhum expoente positivo, logo os sistemas são estáveis segundo a análise de Lyapunov.

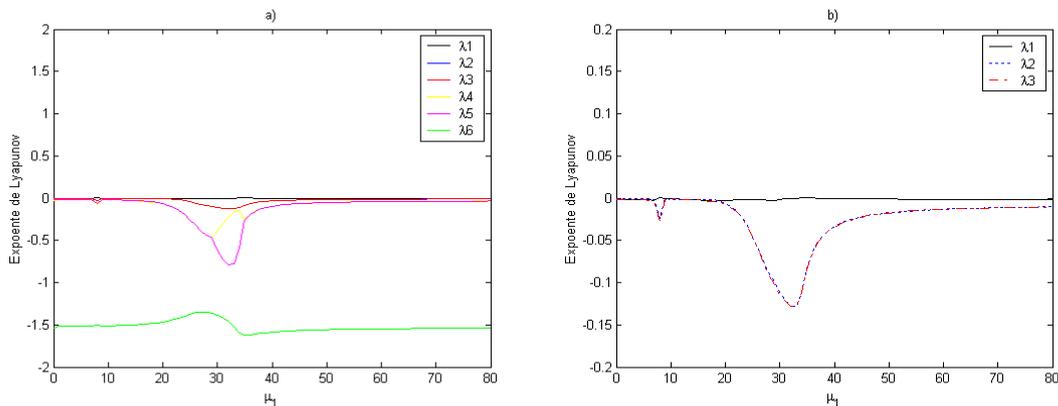


Figura 3.27 – a) Expoentes de Lyapunov do sistema cm absorvedor, e b) Detalhe dos três maiores expoentes.

### 3.3.2 Modelo Completo do Sistema com Absorvedor Não-Linear

A seguir, algumas simulações foram realizadas considerando-se o modelo obtido na seção 2.3 (sistema 2.29), ou seja, o modelo que considera as características elétricas do motor e o absorvedor eletromecânico não-linear. Os valores dos parâmetros utilizados nestas simulações foram mostrados na tabela 3.2.

A figura 3.28 mostra as curvas de respostas em frequência do sistema. Na figura 3.28.a, têm-se a amplitudes de deslocamentos da estrutura. Na figura 3.28.b, encontra-se as amplitudes de oscilações do absorvedor. Na figura 3.28.c, mostram-se as amplitudes de oscilação da corrente na armadura do motor CC. A figura 3.28.d mostra a relação entre o parâmetro de controle  $\mu_3$  e a frequência de excitação  $\phi'$ .

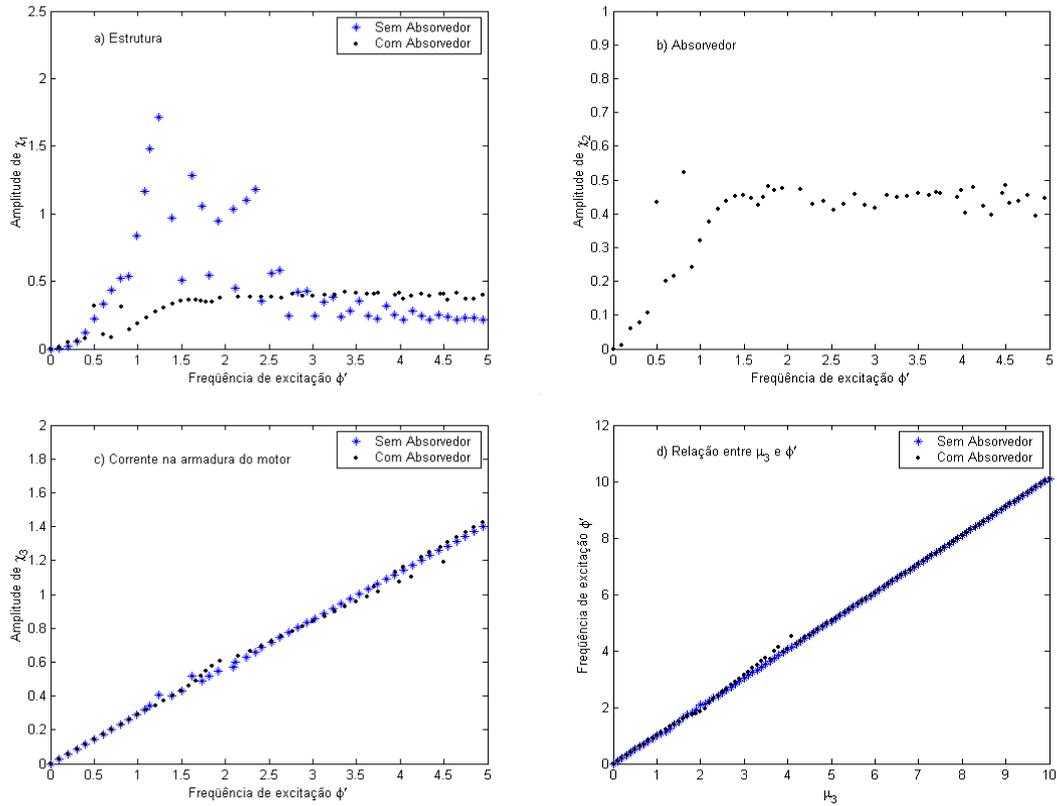


Figura 3.28 – Curvas de resposta-frequência do sistema, a) Frequência de excitação vs. amplitude de deslocamento da estrutura, b) Frequência de excitação vs. amplitude de oscilação do absorvedor, c) Frequência de excitação vs. amplitude de oscilação da corrente na armadura do motor, e d) Relação entre parâmetro de controle vs. frequência de excitação.

## Capítulo 4

### Busca das Soluções Analíticas Aproximadas

#### 4.1 Considerações Gerais

O comportamento dinâmico de sistemas não-lineares, por vezes, não é possível ser determinado de forma exata. Assim, uma das alternativas é a utilização de métodos de perturbação para a obtenção de uma solução analítica aproximada para o sistema dinâmico. Essas técnicas consistem basicamente em conhecer completamente as soluções de um dado sistema homogêneo e analisar pequenas perturbações próximas a elas.

O objetivo deste capítulo é o de encontrar uma solução analítica aproximada para o sistema estudado que seja válido tanto para o sistema sem absorvedor quanto para o sistema com absorvedor. Para este fim, aqui é utilizado um método clássico de perturbação conhecido como método da média. O método da média mostrou-se mais adequado para problemas do tipo não-ideal.

Para aplicar o método da média, no problema não-ideal, considera-se que o termo de amortecimento deve aparecer na mesma ordem com as não-linearidades e a excitação. As equações adimensionalizadas do sistema estudado (2.24) foram obtidas de maneira que estes termos aparecessem naturalmente na mesma ordem, assim não foi preciso efetuar nenhum balanço de ordem.

Mais uma vez, como realizado nas simulações numéricas, buscamos as soluções para os piores casos. Então, procurou-se as soluções analíticas para o caso em que se tem ressonância interna 1:1 (seção 4.2.1), ou seja, a frequência natural  $\omega_2$  é igual a frequência natural  $\omega_1$ .

## 4.2 Utilização do Método da Média

Relembrando que o sistema (2.23) obtido na modelagem foi:

$$\begin{aligned}\chi_1'' + \chi_1 &= \varepsilon(\phi'' \cos \phi - \phi'^2 \operatorname{sen} \phi - \alpha_1 \chi_1' - \beta_1 \chi_1^3 + \gamma_2 \chi_2') \\ \chi_2'' + \omega_2^2 \chi_2 &= \varepsilon(\alpha_2 \chi_2' - \alpha_3 \chi_2^3 - \beta_2 \chi_2^3 - \gamma_1 \chi_1') \\ \phi'' &= \varepsilon(\lambda_2 \chi_1'' \cos \phi + \Gamma(\phi'))\end{aligned}\quad (4.1)$$

onde  $\Gamma(\phi') = \mu_1 - \mu_2 \phi'$ .

Inicialmente, considera-se que a solução do sistema tem a seguinte forma:

$$\chi_i = A_i \cos(\phi + B_i) \quad i = 1, 2 \quad (4.2)$$

A seguir, considera-se que  $A$ ,  $B$  e  $\phi'$  são constantes, assim:

$$\chi_i' = -A_i \operatorname{sen}(\phi + B_i) \quad i = 1, 2 \quad (4.3a)$$

$$\phi' = \Delta \quad (4.3b)$$

Sabe-se que  $A = A(\tau)$  e  $B = B(\tau)$ , então, derivam-se as equações (4.2) e (4.3) em  $\tau$ , assim, obtêm-se:

$$\chi_i' = A_i' \cos(\phi + B_i) - A_i (\Delta + B_i') \operatorname{sen}(\phi + B_i) \quad i = 1, 2 \quad (4.4a)$$

$$\chi_i'' = -A_i' \operatorname{sen}(\phi + B_i) - A_i (\Delta + B_i') \cos(\phi + B_i) \quad i = 1, 2 \quad (4.4b)$$

Estamos interessados na região próxima a ressonância interna ( $\omega_2 \approx \omega_1$ ). Para isso, introduz-se um parâmetro de sintonia  $\sigma_1$  de mesma ordem das não-linearidades, então:

$$\omega_2 = 1 + \varepsilon\sigma_1 \quad (4.5)$$

Comparando as equações (4.3a) e (4.4a), obtêm-se a igualdade:

$$-A_i \text{sen}(\phi + B_i) = A'_i \cos(\phi + B_i) - A_i(\Delta + B'_i) \text{sen}(\phi + B_i) \quad i = 1, 2 \quad (4.6)$$

Substituindo as equações (4.2), (4.3), (4.4b), (4.5) e (4.6) no sistema de equações (4.1), obtêm-se:

$$\begin{aligned} A'_1 &= \varepsilon \left[ \Delta^2 \text{sen}\phi - \Delta' \cos\phi - \alpha_1 A_1 \text{sen}(\phi + B_1) + \beta_1 A_1^3 \cos^3(\phi + B_1) \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \gamma_2 A_2 \text{sen}(\phi + B_2) \right] \text{sen}(\phi + B_1) \\ A'_2 &= \varepsilon \left[ 2\sigma_1 A_2 \cos(\phi + B_2) + \alpha_2 A_2 \text{sen}(\phi + B_2) - \alpha_3 A_2^3 \text{sen}^3(\phi + B_2) + \beta_2 A_2^3 \cos^3(\phi + B_2) \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - \gamma_1 A_1 \text{sen}(\phi + B_1) \right] \text{sen}(\phi + B_2) \\ \Delta' &= \varepsilon [\Gamma(\Delta) - \lambda A_1 \cos(\phi + B_1) \cos\phi] \end{aligned}$$

O fato do sistema estar em ressonância interna 1:1 permite que se elimine a preocupação de estudar a passagem da frequência de excitação pela primeira frequência natural  $\omega_1$  e depois pela segunda frequência natural  $\omega_2$ .

Assim, restringimos nossa atenção para uma estreita faixa de frequência ao redor da frequência  $\omega_1$ , então, pode-se escrever que:

$$\Delta = 1 + \varepsilon\sigma_2 \quad (4.7)$$

Como uma primeira simplificação, desprezou-se todos os termos  $O(\varepsilon^2)$ , então:

$$\begin{aligned}
A'_1 &= \varepsilon \left[ \text{sen} \phi - \alpha_1 A_1 \text{sen}(\phi + B_1) + \beta_1 A_1^3 \cos^3(\phi + B_1) + \gamma_2 A_2 \text{sen}(\phi + B_2) \right] \text{sen}(\phi + B_1) \\
A'_2 &= \varepsilon \left[ 2\sigma_1 A_2 \cos(\phi + B_2) + \alpha_2 A_2 \text{sen}(\phi + B_2) - \alpha_3 A_2^3 \text{sen}^3(\phi + B_2) + \beta_2 A_2^3 \cos^3(\phi + B_2) \dots \right. \\
&\quad \left. \dots - \gamma_1 A_1 \text{sen}(\phi + B_1) \right] \text{sen}(\phi + B_2) \\
\Delta' &= \varepsilon \left[ \Gamma(\Delta) - \lambda A_1 \cos(\phi + B_1) \cos \phi \right] \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Isolando  $B$  da igualdade (4.6) e realizando as substituições necessárias, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
B'_1 &= \varepsilon \left\{ -\sigma_2 + \frac{1}{A_1} \left[ \text{sen} \phi - \alpha_1 A_1 \text{sen}(\phi + B_1) + \beta_1 A_1^3 \cos^3(\phi + B_1) \dots \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \dots + \gamma_2 A_2 \text{sen}(\phi + B_2) \right] \cos(\phi + B_1) \right\} \\
B'_2 &= \varepsilon \left\{ -\sigma_2 + \frac{1}{A_2} \left[ 2\sigma_1 A_2 \cos(\phi + B_2) + \alpha_2 A_2 \text{sen}(\phi + B_2) - \alpha_3 A_2^3 \text{sen}^3(\phi + B_2) \dots \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \dots + \beta_2 A_2^3 \cos^3(\phi + B_2) - \gamma_1 A_1 \text{sen}(\phi + B_1) \right] \cos(\phi + B_2) \right\} \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Como segunda simplificação, considerou-se  $A$ ,  $B$  e  $\sigma$  constantes para um ciclo e integrou-se (média) para um ciclo (de 0 a  $2\pi$ ) o lado direito das equações (4.8) e (4.9), assim:

$$\begin{aligned}
A'_1 &= \varepsilon \left[ \frac{1}{2} \cos B_1 - \frac{1}{2} \alpha_1 A_1 + \frac{1}{2} \gamma_2 A_2 \cos(B_2 - B_1) \right] \\
B'_1 &= \varepsilon \left\{ -\sigma_2 + \frac{1}{A_1} \left[ -\frac{1}{2} \text{sen} B_1 + \frac{3}{8} \beta_1 A_1^3 + \frac{1}{2} \gamma_2 A_2 \text{sen}(B_2 - B_1) \right] \right\} \\
A'_2 &= \varepsilon \left[ \frac{1}{2} \alpha_2 A_2 - \frac{3}{8} \alpha_3 A_2^3 - \frac{1}{2} \gamma_1 A_1 \cos(B_2 - B_1) \right] \\
B'_2 &= \varepsilon \left\{ -\sigma_2 + \frac{1}{A_2} \left[ \sigma_1 A_2 + \frac{3}{8} \beta_2 A_2^3 + \frac{1}{2} \gamma_1 A_1 \text{sen}(B_2 - B_1) \right] \right\} \\
\Delta' &= \varepsilon \left[ \Gamma(\Delta) - \frac{1}{2} \lambda A_1 \cos B_1 \right] \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Para se efetuar a análise do comportamento dinâmico do sistema, transformamos o sistema “médio” (4.10) na forma cartesiana, introduzindo-se as seguintes alterações:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= A_1 \cos B_1, & q_1 &= A_1 \operatorname{sen} B_1 \\
 p_2 &= A_2 \cos B_2, & q_2 &= A_2 \operatorname{sen} B_2 \\
 \Omega &= \Delta
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Utilizando as transformações (4.12) e as equações (4.10), têm-se:

$$\begin{aligned}
 p_1' &= \varepsilon \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \alpha_1 p_1 + \sigma_2 q_1 - \frac{3}{8} \beta_1 (p_1^2 + q_1^2) q_1 + \frac{1}{2} \gamma_2 p_2 \right] \\
 q_1' &= \varepsilon \left\{ (\sigma_2 - \sigma_1) q_2 + \frac{1}{2} \left[ \alpha_2 p_2 - \frac{3}{4} \alpha_3 (p_2^2 + q_2^2) p_2 - \frac{3}{4} \beta_2 (p_2^2 + q_2^2) q_2 - \gamma_1 p_1 \right] \right\} \\
 p_2' &= \varepsilon \left[ -\frac{1}{2} \alpha_1 q_1 - \sigma_2 p_1 + \frac{3}{8} \beta_1 (p_1^2 + q_1^2) p_1 + \frac{1}{2} \gamma_2 q_2 \right] \\
 q_2' &= \varepsilon \left\{ (\sigma_1 - \sigma_2) p_2 + \frac{1}{2} \left[ \alpha_2 q_2 - \frac{3}{4} \alpha_3 (p_2^2 + q_2^2) q_2 + \frac{3}{4} \beta_2 (p_2^2 + q_2^2) p_2 - \gamma_1 q_1 \right] \right\} \\
 \Omega' &= \varepsilon \left[ \Gamma(\Omega) - \frac{1}{2} \lambda p_1 \right]
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Para  $p_1' = p_2' = q_1' = q_2' = \Omega' = 0$  obtém-se o sistema não-linear:

$$\begin{aligned}
 1 - \alpha_1 p_1 + 2\sigma_2 q_1 - 0.75\beta_1 (p_1^2 + q_1^2) q_1 + \gamma_2 p_2 &= 0 \\
 2(\sigma_2 - \sigma_1) q_2 + \alpha_2 p_2 - 0.75\alpha_3 (p_2^2 + q_2^2) p_2 - 0.75\beta_2 (p_2^2 + q_2^2) q_2 - \gamma_1 p_1 &= 0 \\
 -\alpha_1 q_1 - 2\sigma_2 p_1 + 0.75\beta_1 (p_1^2 + q_1^2) p_1 + \gamma_2 q_2 &= 0 \\
 2(\sigma_1 - \sigma_2) p_2 + \alpha_2 q_2 - 0.75\alpha_3 (p_2^2 + q_2^2) q_2 + 0.75\beta_2 (p_2^2 + q_2^2) p_2 - \gamma_1 q_1 &= 0 \\
 2(\mu_1 - \mu_2 \Omega) - \lambda p_1 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

As soluções do sistema não-linear resultante, equações (4.14), foram obtidas numericamente pelo método de Newton, algoritmo encontrado em conforme Burden e Faires (2003).

Assim, calculam-se as amplitudes e fases de  $\chi_1$  por:

$$A_1 = \sqrt{p_1^2 + q_1^2} \quad (4.15a)$$

$$B_1 = \arccos\left(\frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2}}\right) = \arcsen\left(\frac{q_1}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2}}\right) \quad (4.15b)$$

E, calculamos as amplitudes e fases de  $\chi_2$  por:

$$A_2 = \sqrt{p_2^2 + q_2^2} \quad (4.16a)$$

$$B_1 = \arccos\left(\frac{p_2}{\sqrt{p_2^2 + q_2^2}}\right) = \arcsen\left(\frac{q_2}{\sqrt{p_2^2 + q_2^2}}\right) \quad (4.16b)$$

A seguir, plota-se as curvas de resposta-freqüência obtidas analiticamente e numericamente. As soluções analíticas, obtidas pelo método da média, são representadas por linhas contínuas em preto “-”, enquanto as soluções numéricas, obtidas pela integração numérica direta, são representadas por pontos em azul “.”.

A figura 4.1 mostra a mesma curva obtida numericamente na figura 3.1 para  $\alpha_2 = -1$  e a solução obtida analiticamente. Na figura 4.1.a, tem-se a amplitude de deslocamento da estrutura. Na figura 4.1.b, tem-se a amplitude de oscilação da corrente do absorvedor. A comparação entre as soluções analítica e numérica apresenta boa concordância. O fenômeno do salto é observado tanto na solução analítica quanto na solução numérica.

A figura 4.2 mostra as mesmas curvas da figura 4.1, porém para  $\alpha_2 = -10$ . Nota-se o desaparecimento no fenômeno de salto, fato já observado nas repostas obtidas numericamente.

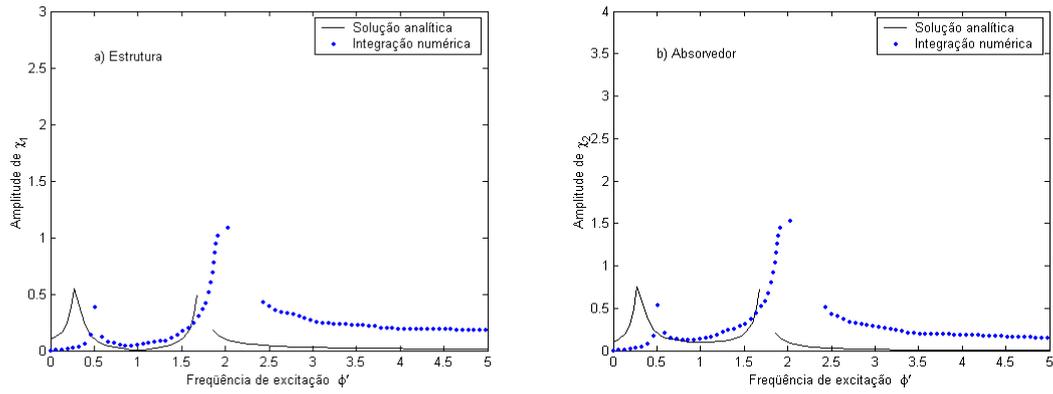


Figura 4.1 – Curvas de resposta-freqüência do sistema com absorvedor de vibrações linear, a) Freqüência de excitação vs. Amplitude de deslocamento da estrutura, e b) Freqüência de Excitação vs. Amplitude de oscilação do absorvedor.

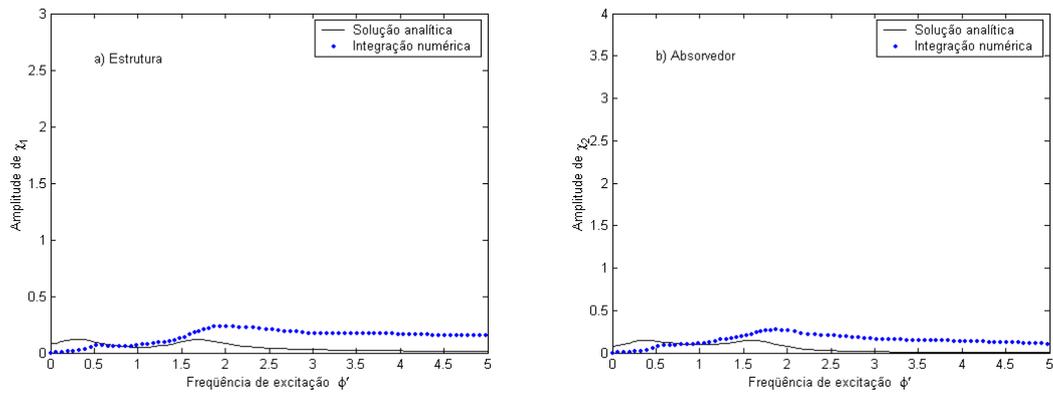


Figura 4.2 – Curvas de resposta-freqüência do sistema com absorvedor de vibrações linear, a) Freqüência de excitação vs. Amplitude de deslocamento da estrutura, e b) Freqüência de Excitação vs. Amplitude de oscilação do absorvedor.

## Capítulo 5

# Algumas Aplicações do Absorvedor de Vibrações Eletromecânico

Neste capítulo, estuda-se o comportamento de sistemas não-ideais quando se utiliza absorvedor de vibrações eletromecânico em condições especiais, por exemplo, em sistemas caóticos. Tais condições são normalmente encontradas na literatura de sistemas tratados como não-lineares. Então, estes sistemas foram tratados como outros casos, por não se tratar simplesmente de modelos para nosso sistema principal, sistema estudado nos capítulos anteriores, e sim modelos que apresentam características que podem ser encontradas ou obtidas sob certas condições. Os dois casos considerados foram escolhidos a priori por apresentarem certas peculiaridades.

Na seção 5.1, estuda-se o absorvedor de vibrações eletromecânico em sistemas não-ideais que apresentam características de mola mole (“soft spring”). Este tipo de sistema apresenta, para parâmetros apropriados, comportamento caótico (Dantas e Balthazar, 2006).

Na seção 5.2, estuda-se o uso do absorvedor eletromecânico em um sistema não-ideal com potencial de mínimos duplos (“double-well potential”). Para determinadas condições este tipo de sistema é caótico (Venkatesan e Lakshmanan, 1997).

O comportamento do absorvedor eletromecânico em cada sistema é verificado através de simulações numéricas.

Os resultados numéricos, para ambos os casos, foram obtidos considerando-se as mesmas condições do capítulo 2. O integrador utilizado foi o de Runge-Kutta de ordem média (quarta e quinta ordem) com passo de integração variável (método de Dormand-Prince - ODE45 do aplicativo MATLAB). Para todas as simulações numéricas realizadas, considerou-se condições iniciais nulas ( $\chi_1(0) = 0$ ,  $\chi_1'(0) = 0$ ,  $\chi_2(0) = 0$ ,  $\chi_2'(0) = 0$ ,  $\phi(0) = 0$  e  $\phi'(0) = 0$ ). O intervalo de tempo utilizado na integração numérica do sistema estudado, em todas as situações, foi sempre de 0 a 1000. Nos cálculos efetuados, considerou-se que o regime permanente é a parte que resta eliminando-se dois terços iniciais das repostas.

Nos capítulos anteriores, mostrou-se que o melhor desempenho foi obtido utilizando-se o absorvedor eletromecânico linear. Então, neste capítulo, adotou-se um modelo linear para o absorvedor.

## 5.1 Utilização de um Absorvedor de Vibrações Eletromecânico em um Sistema Não-ideal com Rigidez do Tipo Mola Mole

A diferença entre sistemas que apresenta mola dura e mola mole encontra-se no sinal do parâmetro do termo cúbico relativo a rigidez do sistema. Para um parâmetro positivo têm-se o que denominamos de mola dura e para um parâmetro negativo têm-se a mola mole. Portanto, as simulações realizadas no capítulo três trataram de sistema com mola dura. Nesta seção, estudam-se os sistemas com mola mole, ou seja, com parâmetro do termo cúbico, relativo à rigidez, negativo.

### 5.1.1 Modelo Matemático Adotado

O modelo matemático utilizado nas simulações é o sistema 2.23. Porém, este modelo será utilizado para simular um sistema que apresenta mola mole, uma imposição que foi adotada com intuito de verificar o comportamento do absorvedor de vibrações eletromecânico, neste tipo de sistema.

As equações diferenciais adimensionais utilizadas foram:

$$\begin{aligned}\chi_1'' + \chi_1 &= \varepsilon(\phi'' \cos \phi - \phi'^2 \operatorname{sen} \phi - \alpha_1 \chi_1' + \beta_1 \chi_1^3 + \gamma_2 \chi_2') \\ \chi_2'' + \omega_2^2 \chi_2 &= \varepsilon(-\alpha_2 \chi_2' - \gamma_1 \chi_1') \\ \phi'' &= \varepsilon(\lambda \chi_1'' \cos \phi + \mu_1 - \mu_2 \phi')\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde

$$\varepsilon \alpha_1 = \frac{b}{\sqrt{k_1(m_0 + m_1)}}, \quad \varepsilon \alpha_2 = \frac{R}{L \omega_m^2}, \quad \varepsilon \beta_1 = \frac{k_2 r^2}{(m_0 + m_1) \omega_m^2},$$

$$\varepsilon = \frac{m_0}{m_0 + m_1}, \quad \varepsilon\lambda = \frac{m_0 r^2}{(I_0 + m_0 r^2)}, \quad \varepsilon\gamma_1 = \frac{Sr}{L\omega_m q_0}, \quad \varepsilon\gamma_2 = \frac{Sq_0}{(m_0 + m_1)\omega_m r},$$

$$\varepsilon\mu_1 = \frac{u_1}{(I_0 + m_0 r^2)\omega_m^2}, \quad \varepsilon\mu_2 = \frac{u_2}{(I_0 + m_0 r^2)\omega_m},$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_e}{\omega_m}, \quad \omega_m^2 = \frac{k_1}{m_0 + m_1} \quad \text{e} \quad \omega_e^2 = \frac{1}{LC}$$

Os elementos não-lineares (resistor e capacitor) do absorvedor eletromecânico não foram considerados neste modelo.

O comportamento de mola mole é obtido quando se impõe um valor negativo para o parâmetro  $\beta_1$ .

### 5.1.2 Resultados Numéricos e Discussões

A figura 5.1 mostra as curvas de respostas em frequência do sistema com absorvedor linear para três valores distintos de  $\alpha_2$  (valores mostrados nas figuras). Na figura 5.1.a, tem-se a amplitudes de deslocamentos da estrutura. Na figura 5.2.b, tem-se as amplitudes de oscilações do absorvedor.

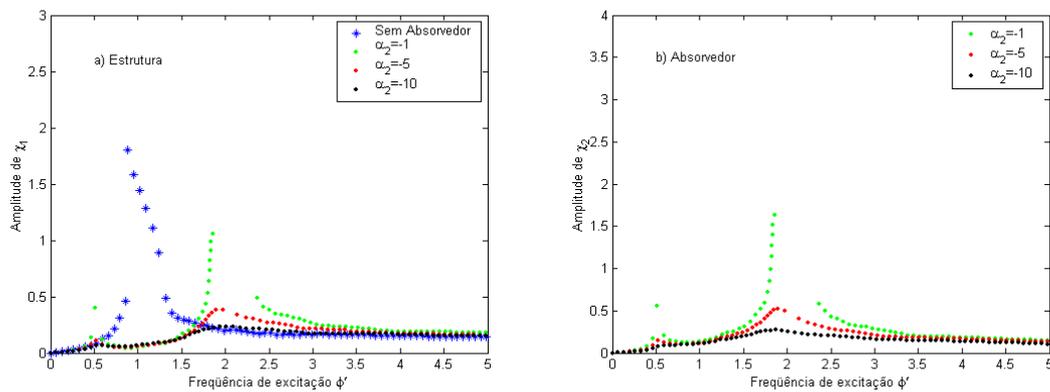


Figura 5.1 – Curvas de resposta-freqüência do sistema com absorvedor de vibrações linear, a) Frequência de excitação vs. Amplitude de deslocamento da estrutura, e b) Frequência de Excitação vs. Amplitude de oscilação do absorvedor.

Nota-se na figura 5.1 que o absorvedor eletromecânico que apresenta melhor efetividade é o que apresenta maior valor de  $\alpha_2$  (relacionado ao termo linear do

“amortecimento” elétrico). Este resultado pode ser explicado pelo fato de  $\alpha_2$  estar relacionado com o elemento resistivo do circuito elétrico do absorvedor. Um dispositivo resistivo funciona como dissipador de energia dentro de um circuito elétrico.

A figura 5.2 mostra as curvas de respostas em função do parâmetro de controle do sistema com absorvedor linear para três valores distintos de  $\alpha_2$  (relacionado ao termo linear do “amortecimento” elétrico). Na figura 5.2.a, tem-se as amplitudes de deslocamentos da estrutura. Na figura 5.2.b, tem-se as amplitudes de oscilações do absorvedor.

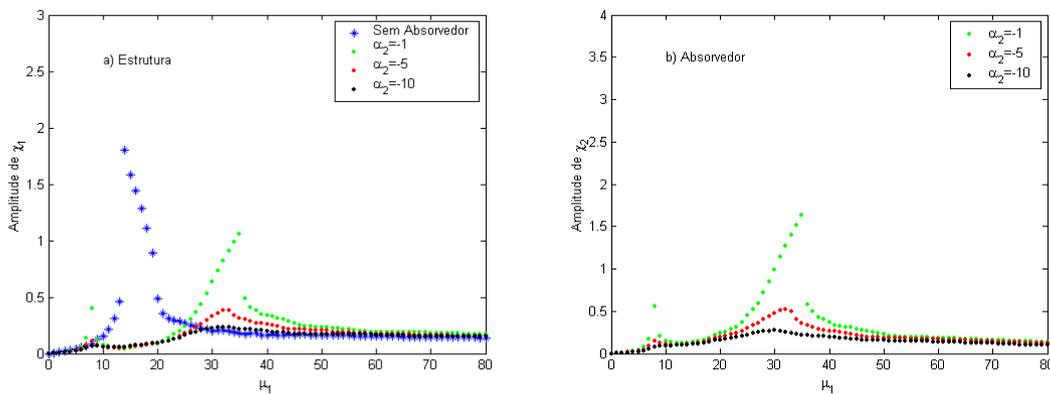


Figura 5.2 – Curvas de resposta-parâmetro de controle do sistema com absorvedor de vibrações linear, a) Parâmetro de controle vs. Amplitude de deslocamento da estrutura, e b) Parâmetro de controle vs. Amplitude de oscilação do absorvedor.

A figura 5.3 mostra a relação entre o parâmetro de controle e a frequência de excitação ou velocidade rotacional do motor.

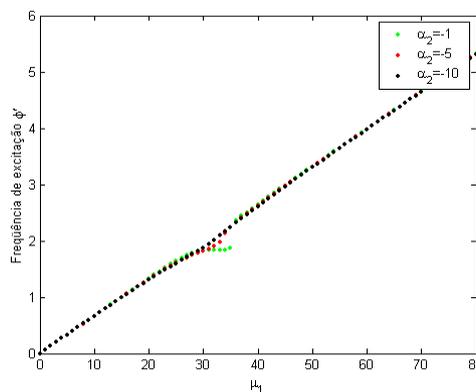


Figura 5.3 – Relação entre parâmetro de controle e frequência de excitação.

As figuras de 5.4 até 5.9 mostram a evolução do comportamento dinâmico do sistema no tempo quando fixamos o parâmetro de controle  $\mu_1$ . As figuras “a” mostram o histórico do deslocamento, as figuras “b” mostram o plano de fase no regime estacionário correspondente e as figuras “c” e “d” mostram as FFTs do sistema sem absorvedor e do sistema com absorvedor, respectivamente.

A figura 5.4 mostra as curvas relacionadas à  $\chi_1$  quando  $\mu_1$  é igual a 13. Na figura 3.15.a, observa-se a redução das amplitudes de vibrações. O sistema sem absorvedor apresenta comportamento periódico. O sistema com absorvedor não altera o comportamento do sistema que permanece periódico.

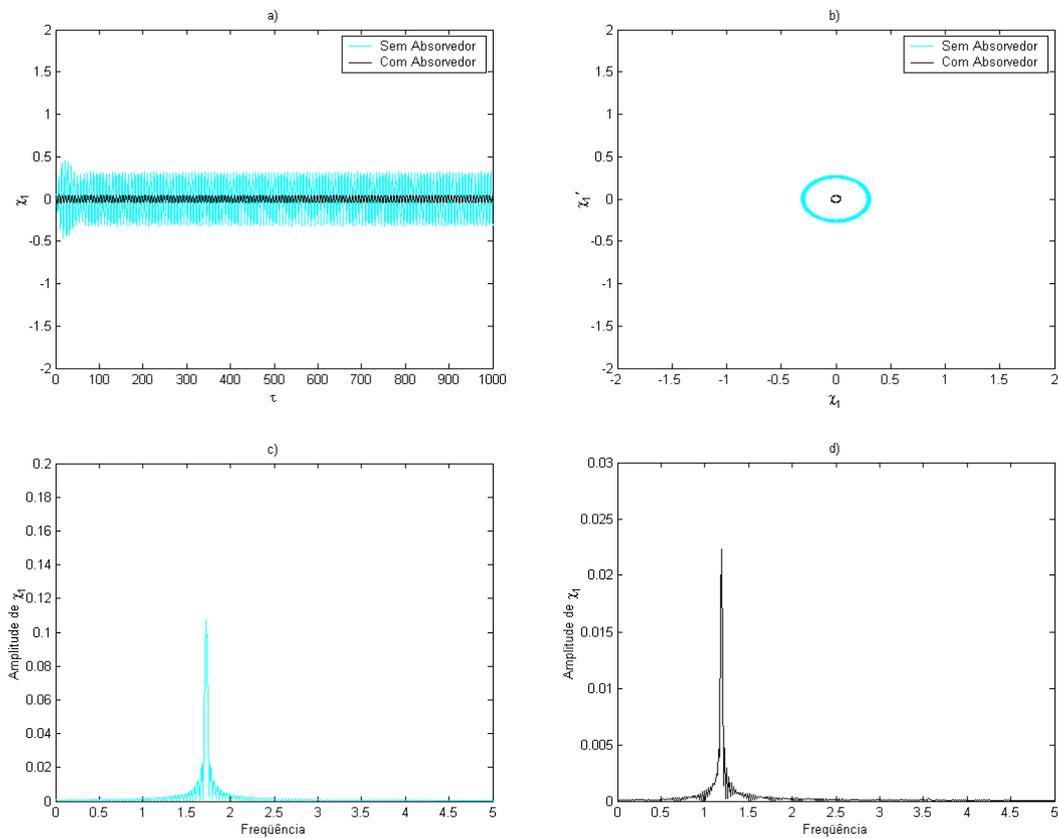


Figura 5.4 – Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_1 = 13$ , a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário, c) FFT do sistema sem absorvedor, e d) FFT do sistema com absorvedor.

A figura 5.5 mostra as curvas relacionadas à  $\chi_1$  quando  $\mu_1$  é igual a 14. Na figura 5.5.a observa-se a redução das amplitudes de vibrações. O sistema sem absorvedor parece apresentar comportamento caótico. Para comprovar o comportamento caótico calculam-se os expoentes de Lyapunov. Os expoentes de Lyapunov do sistema podem ser visto nas figuras 5.10 e 5.11. O sistema com absorvedor apresenta comportamento periódico. Então, o comportamento do sistema altera-se quando se utiliza o absorvedor.

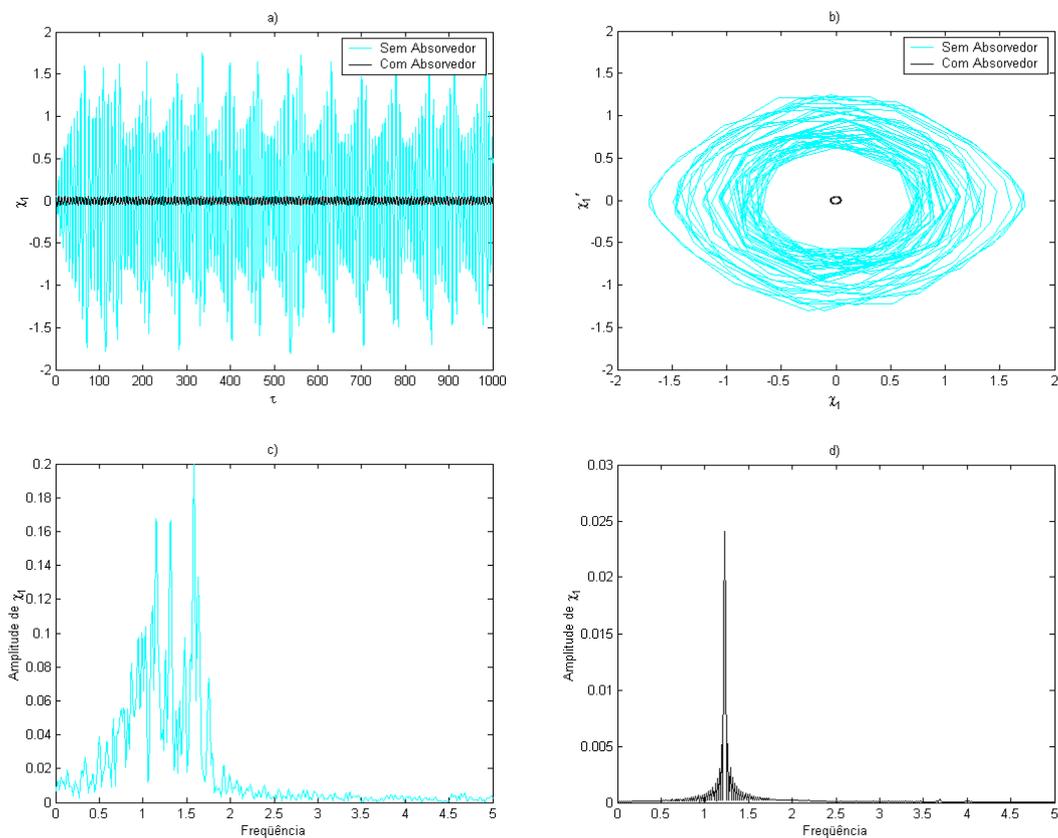


Figura 5.5 – Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_1 = 14$ , a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário, c) FFT do sistema sem absorvedor, e d) FFT do sistema com absorvedor.

A figura 5.6 mostra as curvas relacionadas à  $\chi_2$  quando  $\mu_1$  é igual a 14. O comportamento periódico do absorvedor não se altera para nenhum parâmetro de controle. Então, plota-se somente as curvas de  $\chi_2$  para este parâmetro.

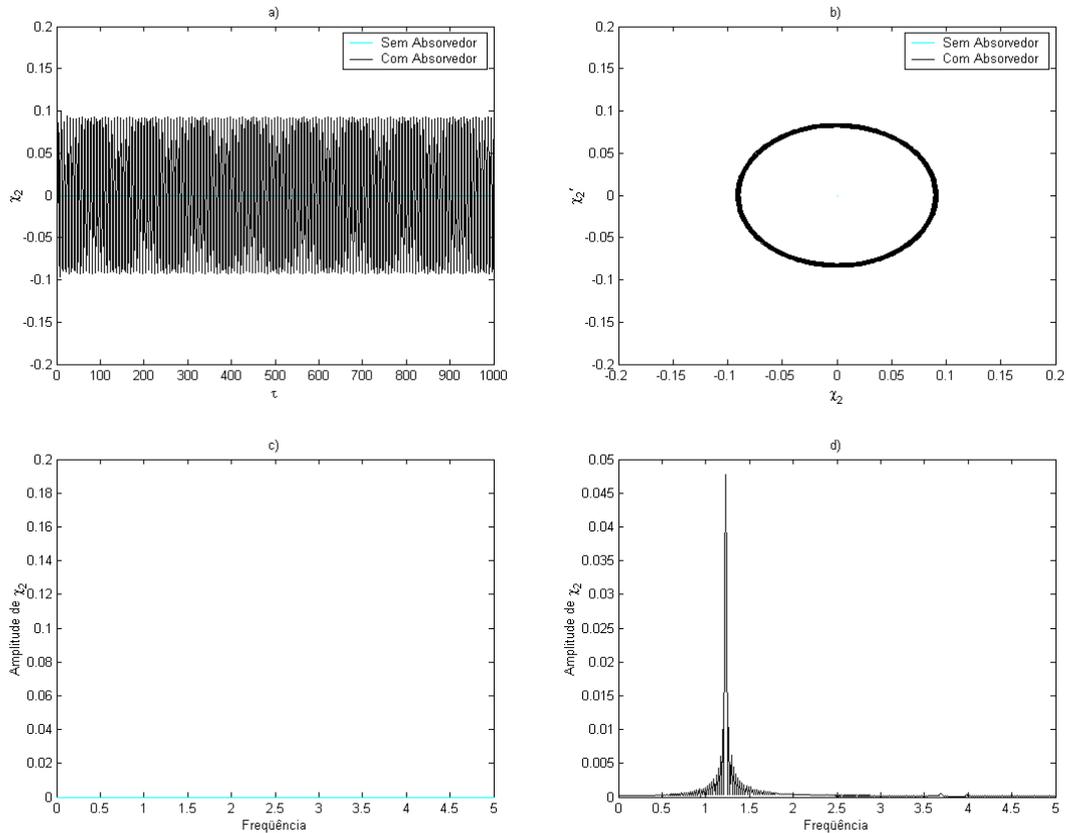


Figura 5.6 – Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_2$  para  $\mu_1 = 14$ , a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário, c) FFT do sistema sem absorvedor, e d) FFT do sistema com absorvedor.

A figura 5.7 mostra as curvas relacionadas à  $\chi_1$  quando  $\mu_1$  é igual a 21. Na figura 5.7.a, observa-se a redução das amplitudes de vibrações, como nos casos anteriores. Aqui, observa-se que o sistema sem absorvedor é quasiperiódico. Este fato pode ser observado pela FFT mostrada na figura 5.7.c. Os dois picos caracterizam um comportamento de período 2. O sistema com absorvedor apresenta comportamento periódico.

Nota-se que as curvas da figura 5.7 representam a transição de um atrator caótico para um atrator periódico. Esta transição ocorre de maneira lenta, ocasionando uma dificuldade no entendimento do comportamento do sistema nesta região.

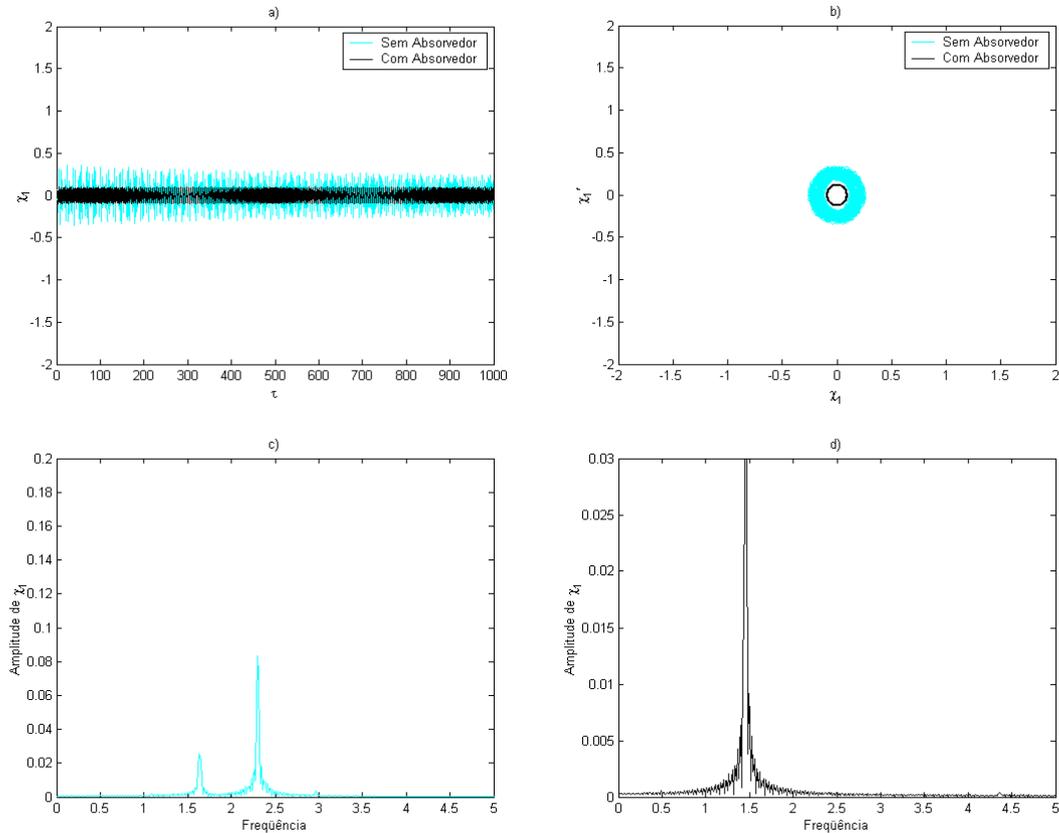


Figura 5.7 – Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_1 = 21$ , a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário, c) FFT do sistema sem absorvedor, e d) FFT do sistema com absorvedor.

A figura 5.8 mostra as curvas relacionadas à  $\chi_1$  quando  $\mu_1$  é igual a 23. Na figura 5.8.a, observa-se que o sistema sem absorvedor não apresenta grandes deslocamentos. O sistema sem absorvedor é periódico, assim como o sistema com absorvedor.

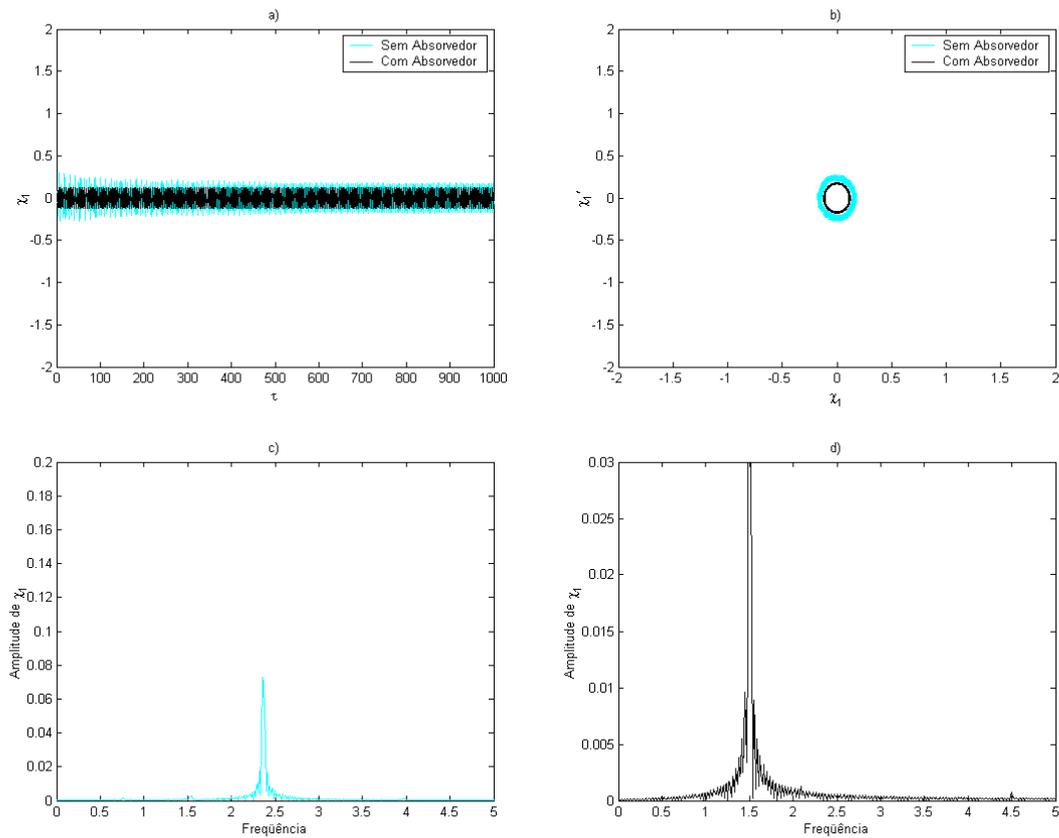


Figura 5.8 – Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_1 = 23$ , a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário, c) FFT do sistema sem absorvedor, e d) FFT do sistema com absorvedor.

A figura 5.9 mostra a evolução temporal da velocidade rotacional do motor ou frequência de excitação para os parâmetros  $\mu_1$  considerados acima. As curvas em linhas claras (azuis) representam o sistema sem absorvedor e as linhas escuras (preto) representam o sistema com absorvedor.

Na figura 5.9.b observamos uma irregularidade da resposta quando a frequência de excitação está próxima da ressonância interna do sistema ( $\omega_1 = \omega_2 = 1$ ).

A seguir, resumi-se na tabela 5.1 os diferentes comportamentos do sistema sem absorvedor e do sistema com absorvedor para cada parâmetro de controle.

Nota-se que em todos os casos a utilização do absorvedor levou o sistema para um atrator periódico.

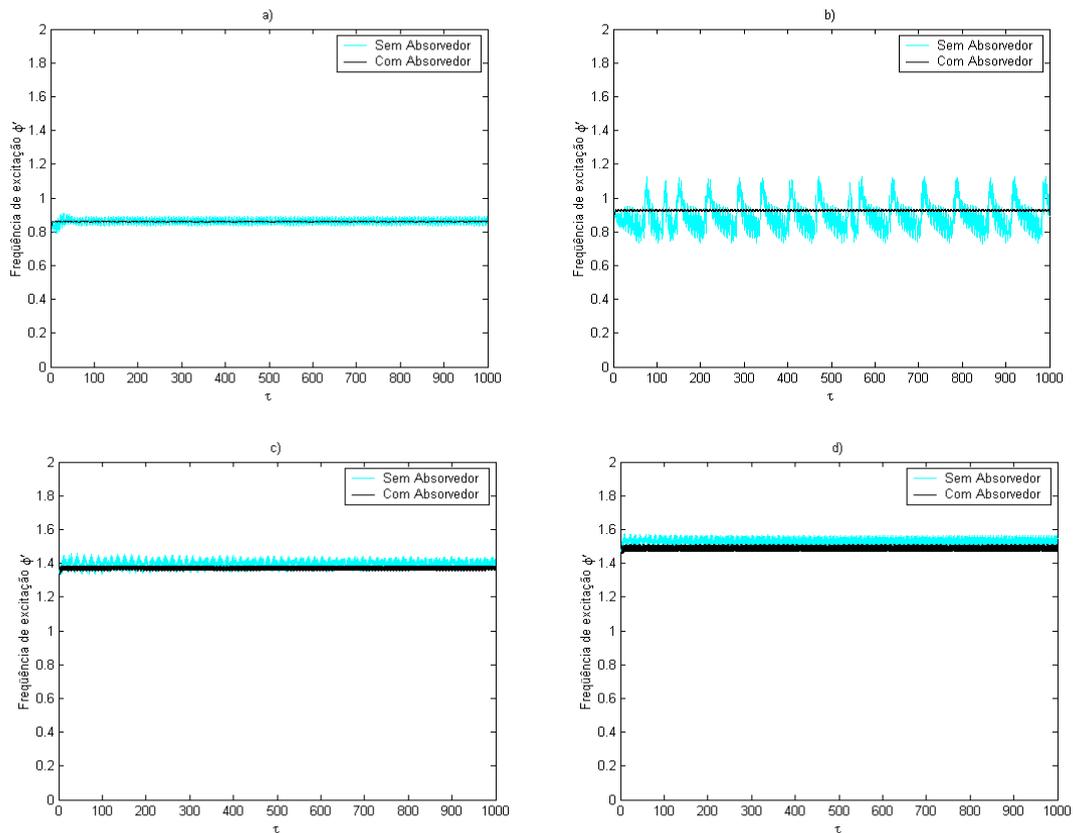


Figura 5.9 – Histórico da velocidade rotacional do motor quando, a)  $\mu_1 = 13$ , b)  $\mu_1 = 14$ , c)  $\mu_1 = 21$  e d)  $\mu_1 = 23$ .

Tabela 5.1 – Comportamento do sistema para cada valor do parâmetro de controle.

Valor do parâmetro de controle $\mu_1$	Comportamento do sistema sem absorvedor	Comportamento do sistema com absorvedor linear
0 – 13	periódico	periódico
14-20	caótico	periódico
21-22	quasiperiódico	periódico
23-80	periódico	periódico

Através do cálculo dos expoentes de Lyapunov podemos comprovar o comportamento do sistema resumido na tabela 5.1.

A figura 5.10 mostra os expoentes de Lyapunov para cada parâmetro de controle quando consideramos o sistema sem absorvedor. Na figura 5.10.a temos todos os expoentes calculados e na figura 5.10.b temos os três maiores expoentes de Lyapunov mostrados em detalhes.

Os expoentes de Lyapunov positivo indicam a existência de atratores caóticos. A figura 5.10.b mostra expoentes de Lyapunov positivos entre  $14 < \mu_1 < 20$ . Estes resultados comprovam os resultados obtidos anteriormente.

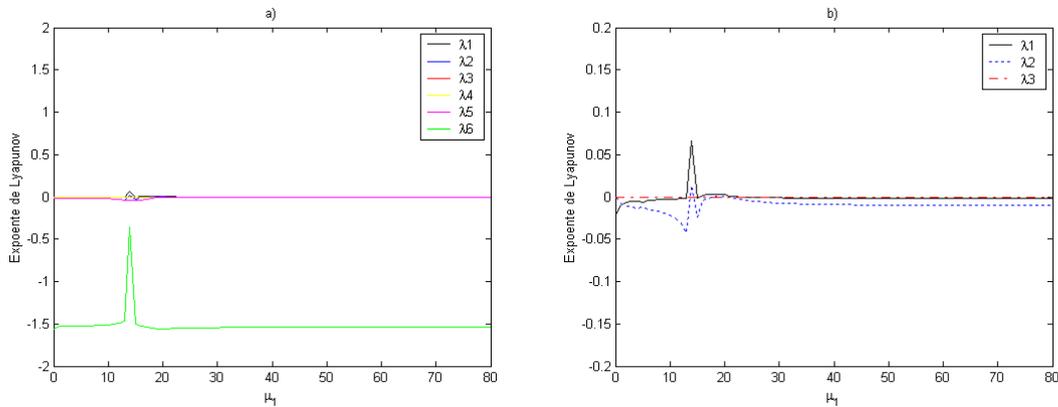


Figura 5.10 – a) Expoentes de Lyapunov versus o parâmetro de controle para o sistema sem absorvedor, e b) Detalhe dos três maiores expoentes de Lyapunov.

A figura 5.11 mostra os expoentes de Lyapunov para cada parâmetro de controle quando consideramos o sistema com absorvedor. Na figura 5.11.a temos todos os expoentes calculados e na figura 5.11.b temos os três maiores expoentes de Lyapunov mostrados em detalhes. Agora, não se tem mais nenhum expoente de Lyapunov positivo comprovando que o sistema com absorvedor não tem atratores estranhos.

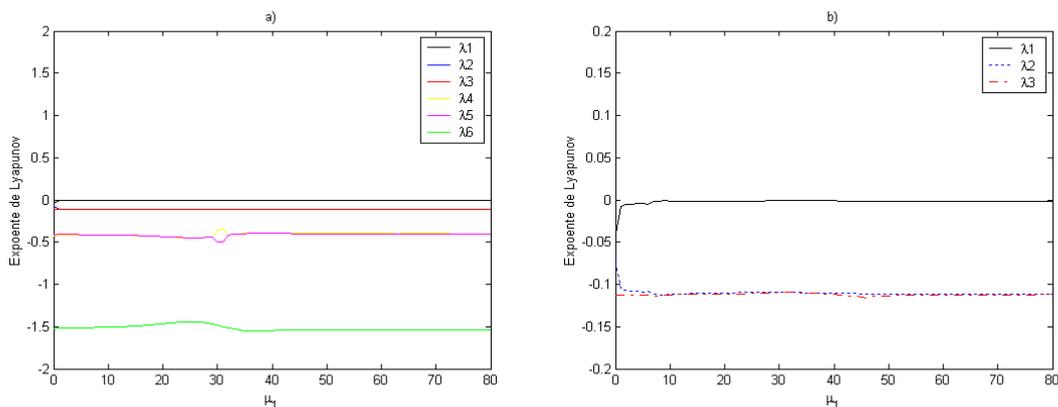


Figura 5.11– a) Expoentes de Lyapunov versus o parâmetro de controle para o sistema com absorvedor, e b) Detalhe dos três maiores expoentes de Lyapunov.

## 5.2 Utilização de um Absorvedor de Vibrações Eletromecânico em um Sistema Não-Ideal com Potencial de Mínimos Duplos

Nesta seção, analisa-se o comportamento de um sistema não-ideal, considerando-se um potencial de mínimos duplos, quando se utiliza um absorvedor de vibrações eletromecânico.

### 5.2.1 Modelo Matemático

O modelo considerado, aqui, é o mesmo do capítulo 2 (sistema 2.23). Entretanto, consideram-se somente elementos lineares para o absorvedor eletromecânico.

A expressão da energia cinética continua a mesma, e é dada por:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_0(\dot{x} - r\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + \frac{1}{2}m_0(r\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 + \frac{1}{2}I_0\dot{\varphi}^2 \quad (5.2)$$

A expressão da energia potencial, agora, é dada por:

$$V = -\frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{4}k_2x^4 \quad (5.3)$$

Portanto, o sistema de equações diferenciais que governa o sistema é dado por:

$$\begin{aligned} (m_0 + m_1)\ddot{x} - m_0r(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) - k_1x + k_2x^3 &= -b\dot{x} + S\dot{q} \\ L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q + S\dot{x} &= 0 \\ (I_0 + m_0r^2)\ddot{\varphi} - m_0r\ddot{x}\cos\varphi &= u_1 - u_2\dot{\varphi} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Da mesma forma que no capítulo 2, foi obtido o seguinte sistema adimensional:

$$\begin{aligned}
\chi_1'' - \chi_1 &= \varepsilon(\phi'' \cos \phi - \phi'^2 \operatorname{sen} \phi - \alpha_1 \chi_1' - \beta_1 \chi_1^3 + \gamma_2 \chi_2') \\
\chi_2'' + \omega_2^2 \chi_2 &= \varepsilon(-\alpha_2 \chi_2' - \gamma_1 \chi_1') \\
\phi'' &= \varepsilon(\lambda \chi_1'' \cos \phi + \mu_1 - \mu_2 \phi')
\end{aligned} \tag{5.5}$$

onde

$$\begin{aligned}
\varepsilon \alpha_1 &= \frac{b}{\sqrt{k_1(m_0 + m_1)}}, \quad \varepsilon \alpha_2 = \frac{R}{L \omega_m^2}, \quad \varepsilon \beta_1 = \frac{k_2 r^2}{(m_0 + m_1) \omega_m^2}, \\
\varepsilon &= \frac{m_0}{m_0 + m_1}, \quad \varepsilon \lambda = \frac{m_0 r^2}{(I_0 + m_0 r^2)}, \quad \varepsilon \gamma_1 = \frac{S r}{L \omega_m q_0}, \quad \varepsilon \gamma_2 = \frac{S q_0}{(m_0 + m_1) \omega_m r}, \\
\varepsilon \mu_1 &= \frac{u_1}{(I_0 + m_0 r^2) \omega_m^2}, \quad \varepsilon \mu_2 = \frac{u_2}{(I_0 + m_0 r^2) \omega_m}, \\
\omega_2 &= \frac{\omega_e}{\omega_m}, \quad \omega_m^2 = \frac{k_1}{m_0 + m_1} \quad \text{e} \quad \omega_e^2 = \frac{1}{LC}
\end{aligned}$$

## 5.2.2 Resultados Numéricos e Discussões

Os valores dos parâmetros adimensionais utilizados, nas simulações do sistema sem absorvedor, foram:  $\alpha_1 = 0.2$ ,  $\beta_1 = 3$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\lambda = 5$  e  $\mu_2 = 15$  (os mesmos usados no capítulo 2). Para o sistema com absorvedor adotou-se os valores do absorvedor linear que apresentou melhor desempenho. Os valores dos parâmetros adimensionais utilizados foram:  $\alpha_1 = 0.2$ ,  $\alpha_2 = 10$ ,  $\beta_1 = 3$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\lambda = 5$ ,  $\gamma_1 = 20$ ,  $\gamma_2 = 10$  e  $\mu_2 = 15$ .

A figura 5.12 mostra as curvas de respostas em frequência do sistema. Na figura 5.12.a, tem-se as amplitudes de deslocamentos da estrutura. Na figura 5.12.b, tem-se as amplitudes de oscilações do absorvedor. Nas próximas figuras, as linhas claras (azuis) representam as respostas do sistema sem absorvedor e as linhas escuras (preto) representam as respostas do sistema com absorvedor.

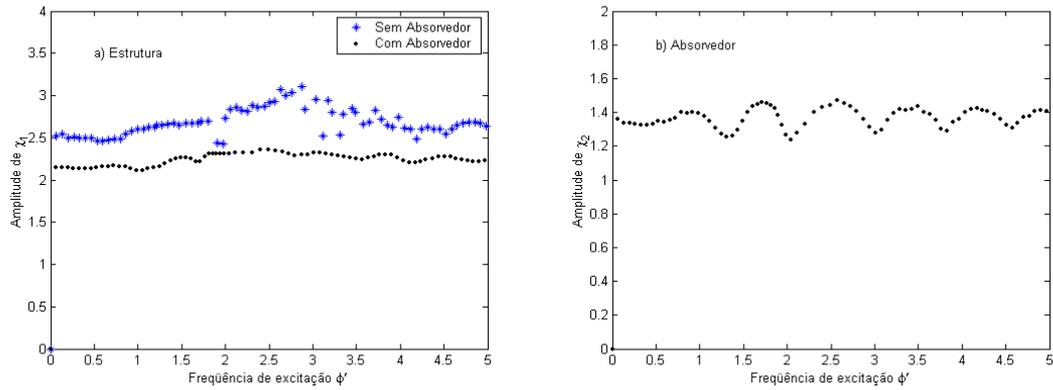


Figura 5.12 – Curvas de resposta-freqüência do sistema, a) Freqüência de excitação vs. amplitude de deslocamento da estrutura, e b) Freqüência de excitação vs. amplitude de oscilação do absorvedor.

Nas curvas de respostas em freqüência nota-se uma pequena redução das amplitudes máximas de deslocamento da estrutura. Este fato pode ser explicado através das curvas de resposta no tempo.

Conforme descrito no capítulo 1, os sistemas deste tipo apresentam dois mínimos, onde o sistema tende a permanecer. As curvas a seguir mostram claramente os dois mínimos. Um mínimo positivo e o outro negativo. O sistema também oscila de um mínimo para outro de forma irregular e depois de forma regular.

As figuras 5.13 a 5.18 mostram as curvas relacionadas à variável adimensional  $x_1$  quando se fixa o parâmetro de controle  $\mu_1$ . As figuras “a” mostram as evoluções temporais dos deslocamentos da estrutura, para o sistema sem absorvedor e para o sistema com absorvedor. Nas figuras “b” mostram o plano de fase no regime estacionário, também para o sistema sem absorvedor e para o sistema com absorvedor.

Na figura 5.13 fixa-se o parâmetro de controle  $\mu_1$  em 14. Observa-se, pelo plano de fase, um comportamento periódico tanto do sistema sem absorvedor quanto do sistema com absorvedor.

Na figura 5.14 fixa-se o parâmetro de controle  $\mu_1$  em 15. Nota-se, também, um comportamento periódico do sistema sem e com absorvedor, porém em atratores distintos.

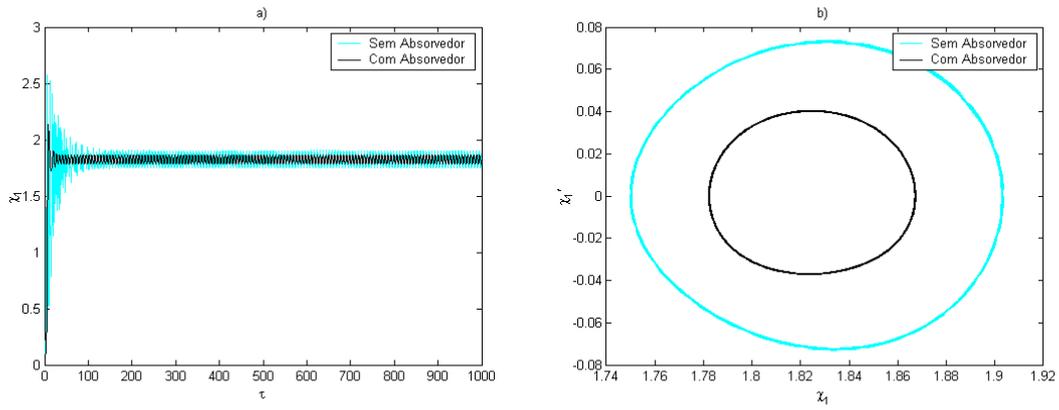


Figura 5.13 – Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_1 = 14$ , a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário.

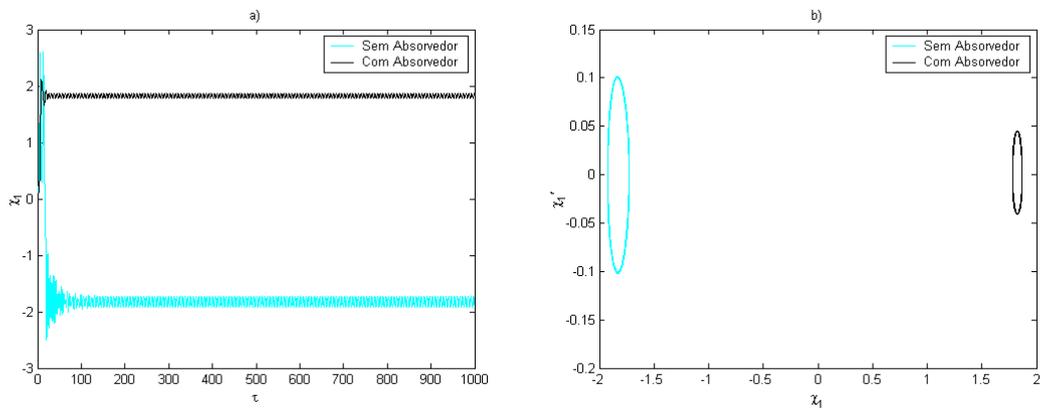


Figura 5.14 – Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_1 = 15$ , a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário.

Na figura 5.15 fixa-se o parâmetro de controle  $\mu_1$  em 19. O sistema sem absorvedor parece ser caótico. A trajetória de  $\chi_1$ , no sistema sem absorvedor, oscila entre dois atratores de forma irregular. Enquanto, o sistema com absorvedor para as mesmas condições é periódico.

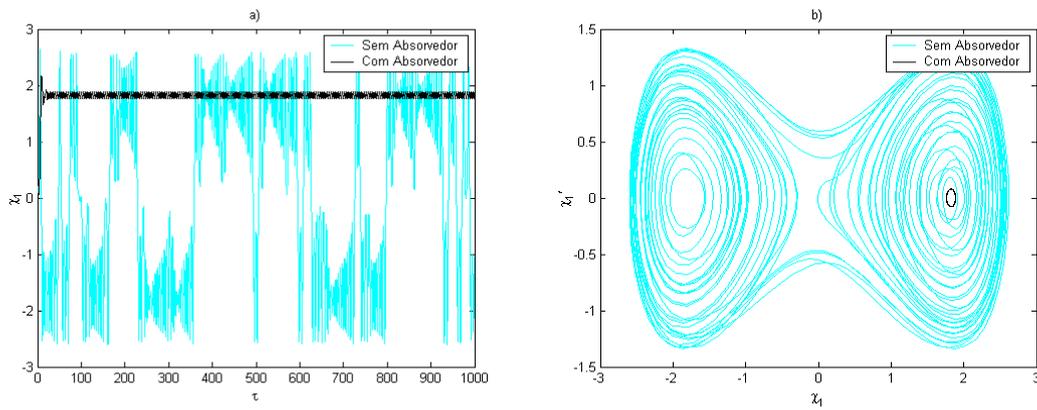


Figura 5.15 – Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_1 = 19$ , a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário.

Na figura 5.16 fixa-se o parâmetro de controle  $\mu_1$  em 28. Observa-se, pelo plano de fase, um comportamento periódico tanto do sistema sem absorvedor quanto do sistema com absorvedor. A trajetória de  $\chi_1$ , no sistema sem absorvedor, oscila entre dois atratores de forma regular.

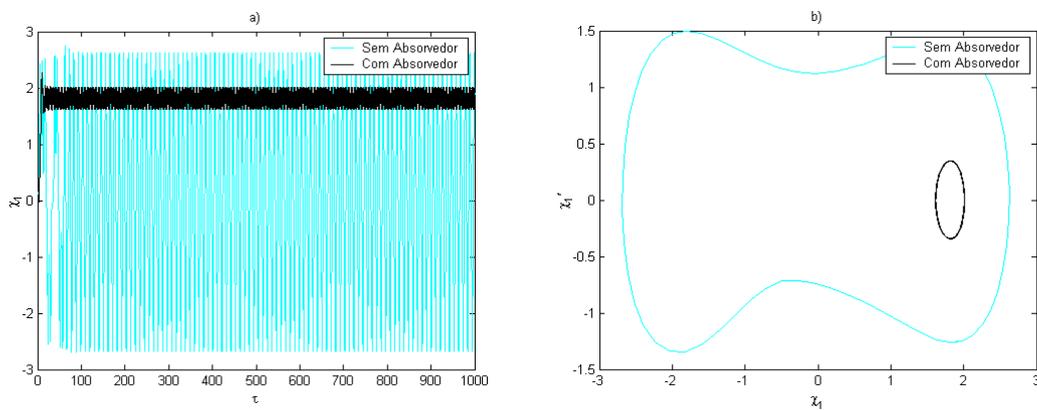


Figura 5.16 – Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_1 = 28$ , a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário.

Na figura 5.17 fixa-se o parâmetro de controle  $\mu_1$  em 28 e altera  $\alpha_2$  para 0.1. Esta alteração provocou a mudança da trajetória periódica de  $\chi_1$ , em torno de uma coordenada positiva, para uma trajetória periódica, em torno de uma coordenada negativa.

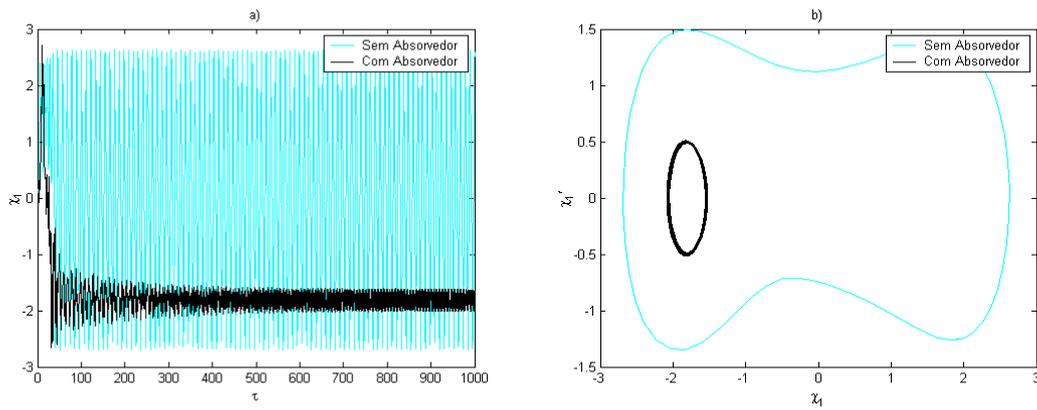


Figura 5.17 – Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_1 = 27$  e  $\alpha_2 = 0.1$ ,  
a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário.

Na figura 5.18 fixa-se o parâmetro de controle  $\mu_1$  em 44. O sistema sem absorvedor parece ser caótico. Enquanto, o sistema com absorvedor para as mesmas condições é periódico.

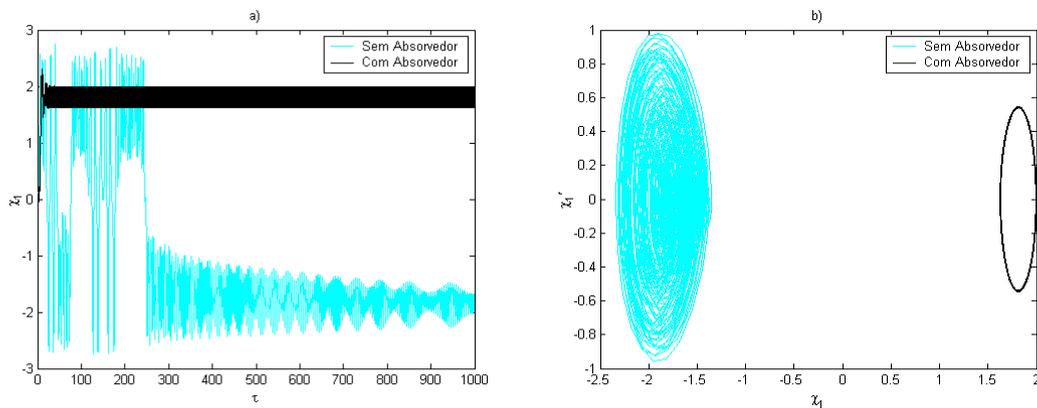


Figura 5.18 – Curvas relacionadas à variável adimensional  $\chi_1$  para  $\mu_1 = 44$ ,  
a) Histórico do deslocamento, b) Plano de fase no regime estacionário.

A seqüência de curvas mostrando o histórico de deslocamento e os planos de fases revelam a tendência de comportamento do sistema. Para valores baixos de  $\mu_1$ , o sistema oscila em torno do mínimo positivo. Aumentando-se o valor do parâmetro de controle, o sistema “salta” para o mínimo negativo e passa a oscilar naquela região. Com o aumento do valor de  $\mu_1$ , o sistema tem energia suficiente para “saltar” de um mínimo para outro, porém este “salto” acontece de modo irregular ou caótico. Aumentando-se mais o valor do parâmetro de controle, o sistema passa a “saltar” de um

mínimo para outro, porém de forma regular. Com o acréscimo do valor de  $\mu_1$  surgem novos modos de oscilar da estrutura. O sistema pode apresentar oscilações caóticas em torno dos mínimos.

O sistema com absorvedor sempre apresenta trajetória periódica, em torno do mínimo positivo, pois o absorvedor consome a energia necessária para a estrutura “saltar” para o mínimo negativo.

Consegue-se fazer que o sistema com absorvedor oscile em torno do mínimo negativo reduzindo-se o parâmetro do termo dissipativo, ou seja,  $\alpha_2$ . Este fato foi observado na figura 5.17.

A seguir, calculam-se os expoentes de Lyapunov para provar a existência dos estados caóticos. Utiliza-se o mesmo algoritmo do capítulo 2 para se calcular os expoentes de Lyapunov.

A figura 5.19 mostra os expoentes de Lyapunov do sistema sem absorvedor. A figura 5.19.a mostra todos os expoentes calculados para o sistema. A figura 5.19.b mostra os três maiores expoentes de Lyapunov em detalhes.

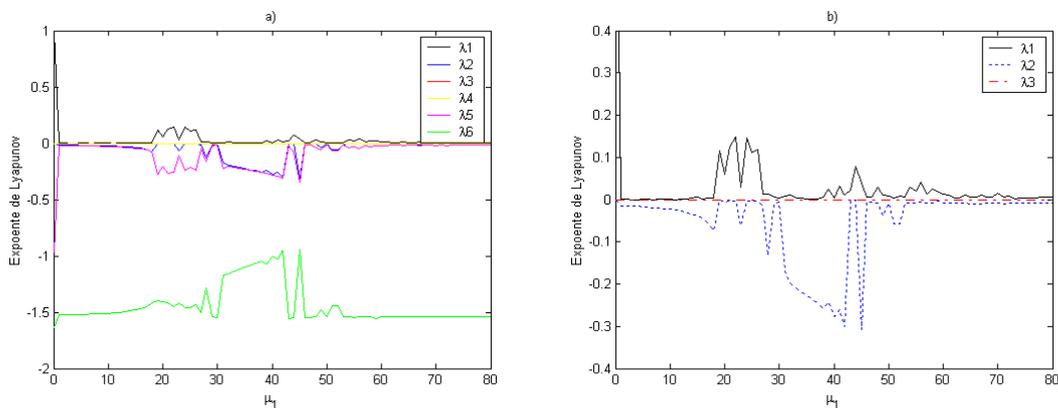


Figura 5.19 – a) Expoentes de Lyapunov do sistema sem absorvedor, e b) Detalhe dos três maiores expoentes.

Os expoentes de Lyapunov positivo indicam a existência de estados caóticos. Estes estados foram observados nas curvas de respostas no tempo e nos planos de fases.

A figura 5.20 mostra, da mesma forma que na figura 5.19, os expoentes de Lyapunov, mas agora para o sistema com absorvedor. Aqui, observa-se a ausência de expoentes positivos, o que mostra a supressão dos estados caóticos. Alguns expoentes sobrepõe outros expoentes graficamente, pois apresentam valores muito próximo.

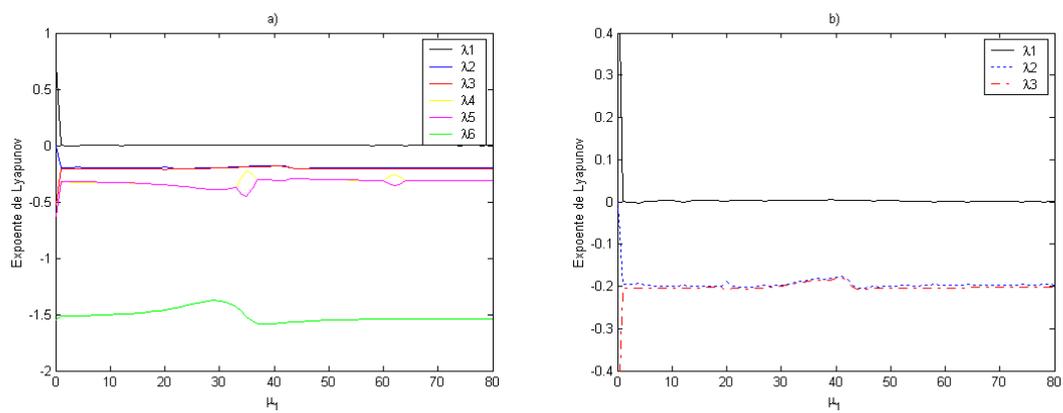


Figura 5.20 – a) Expoentes de Lyapunov do sistema com absorvedor, e b) Detalhe dos três maiores expoentes.

## Capítulo 6

### Discussões, Trabalhos Futuros e Conclusões

Nesta dissertação, investigou-se a efetividade, ou comportamento dinâmico, de um absorvedor de vibrações do tipo eletromecânico em sistemas não-ideais. Para esta análise considerou-se um sistema não-ideal que englobasse o maior número de variantes, ou situações possíveis. Além de mostrar o desempenho dos absorvedores na redução de vibrações, este trabalho mostrou como se comporta os absorvedores diante de fenômenos típicos de sistemas não-ideais.

Este estudo iniciou-se no capítulo 2 com a modelagem matemática do sistema formado por uma viga engastada excitada na sua extremidade livre por um motor elétrico CC, de potência limitada, ou seja, uma fonte não-ideal de energia. O sistema foi modelado por um oscilador com um grau de liberdade, com amortecimento viscoso linear e rigidez mecânica não-linear. Dois modelos foram considerados: no primeiro modelo a dinâmica de funcionamento do motor não é considerada, para isso, adota-se que o torque gerado pelo motor é linear (modelo simplificado), no segundo modelo, considera-se a variação do torque gerado pelo motor, o que gerou uma variável a mais no modelo (modelo completo).

No capítulo 3, realizaram-se simulações numéricas que permitisse observar as mais diferentes situações possíveis de ser encontradas na prática. Considerou-se o estudo de um absorvedor eletromecânico linear e de um absorvedor eletromecânico não-linear. O absorvedor linear era composto por um transdutor do tipo bobina móvel e um circuito elétrico RCL, composto por elementos lineares. O absorvedor não-linear era formado por um transdutor do mesmo tipo e um circuito elétrico RCL, constituído por resistor e capacitor não-lineares e indutor linear.

Dois casos foram analisados, tanto para o absorvedor linear quanto para o absorvedor não-linear. No primeiro caso foi considerado o modelo simplificado (torque linear). No segundo caso foi estudado o modelo completo (torque variável). Em ambos os casos, o absorvedor eletromecânico linear apresentou o melhor desempenho na redução de vibrações mecânicas. Os melhores resultados do absorvedor linear foram obtidos para valores mais alto do parâmetro  $\alpha_2$ , este parâmetro está relacionado com a resistência do circuito elétrico, ou seja, com o elemento dissipativo.

Os absorvedores eletromecânicos modificam a região de ressonância do sistema. A região de salto, característico dos sistemas não-ideais, também muda de região. Em algumas situações o salto desaparece. Portanto, o absorvedor eletromecânico provoca redução ou eliminação do efeito Sommerfeld.

No caso do modelo simplificado, os resultados numéricos mostraram que o sistema apresenta movimentos regulares para quaisquer valores do parâmetro de controle.

Para o caso do modelo completo, observou-se uma maior tendência para se ter movimentos irregulares, incluindo a região de ressonância, do sistema para valores diferentes do parâmetro de controle. A utilização do absorvedor eletromecânico reduz os movimentos irregulares observados na estrutura para movimentos regulares.

A estabilidade do modelo simplificado foi verificada segundo critérios de Lyapunov, através dos cálculos dos expoentes de Lyapunov. A estabilidade do modelo completo não foi realizada devido à inviabilidade computacional.

No capítulo 4, utilizou-se o método da média de perturbações para a obtenção de uma solução analítica aproximada do sistema estudado. Buscou-se uma solução para o caso em que se tem ressonância interna 1:1, ou seja, a frequência natural da estrutura é igual a frequência natural do circuito elétrico.

Uma comparação da solução analítica aproximada com a integração numérica direta foi feita, mostrando que o método da média é uma ferramenta válida para a solução aproximada do caso não-ideal.

No capítulo 5 foi verificada a efetividade do absorvedor eletromecânico em outros sistemas não-ideais, com o objetivo de estudar situações não analisadas anteriormente.

No primeiro caso estudou-se o comportamento dos absorvedores em sistemas com mola do tipo mole (“soft spring”). Os planos de fase e as FFTs mostram o comportamento do sistema. A supressão de estados caóticos encontrados no sistema sem absorvedor foi mostrada através dos planos de fase e FFTs e provadas com o cálculo dos expoentes de Lyapunov.

No segundo caso, considerou-se a generalização de sistemas não-ideais que apresentam potenciais de mínimos duplos. A transferência de energia entre estrutura, motor, absorvedor foi claramente mostrada através do aumento da tensão de alimentação do sistema, ou seja, do aumento da frequência de excitação. Os pontos de mínimos foram estimados com base nas curvas de evolução temporal. A passividade do

absorvedor eletromecânico, não implica na impossibilidade de se obter repostas desejadas. Tais repostas foram obtidas alterando-se parâmetros de construção do absorvedor. A redução da amplitude de vibração da estrutura ocorre em torno dos mínimos do sistema. Os expoentes de Lyapunov foram calculados para provar a existência de caos no sistema sem absorvedor e a supressão deste comportamento no sistema com absorvedor.

O desempenho dos absorvedores de vibrações eletromecânicos foi satisfatório para todos os casos estudados. Este fato sugere que uma investigação experimental seria extremamente importante na consolidação dos resultados.

Trabalhos futuros podem ser desenvolvidos objetivando a padronização dos absorvedores eletromecânicos. Transdutores e circuitos elétricos, específicos para cada necessidade, poderiam ser projetados.

Outra possibilidade é estender o estudo realizado aqui para um controle híbrido, uma mistura entre controle passivo e controle ativo. Wu et al (2007) estudou o controle híbrido utilizando um absorvedor do tipo massa-mola e um atuador linear. A idéia seria substituir o absorvedor inercial por um absorvedor eletromecânico.

## Referências Bibliográficas

- AUNG, W. P., Analysis on Modeling and Simulink of DC Motor and its Driving System Used for Wheeled Mobile Robot, International Journal of Computer, Information, and Systems Science, and Engineering, Vol. 2, No. 1, 2007.
- BALTHAZAR, J. M., MOOK, D. T., WEBER, H. I., BRASIL, R.M.L.R.F., FENILI, A., BELATO, D. e FELIX, J. L. P., An Overview on Non-Ideal Vibrations, Meccanica, Vol. 38, (2003), 613-621.
- BASILIO, J. C. e MOREIRA, M. V., Experimentos Para Estimação dos Parâmetros de Motores de Corrente Contínua, Cobenge-2001, Fonte: [www.dee.ufrj.br/control\\_e\\_automatico/artigos/cobenge2001.pdf](http://www.dee.ufrj.br/control_e_automatico/artigos/cobenge2001.pdf), encontrado em 10/3/2008.
- BILLINGS, S. A., Identification of Nonlinear Systems – A Survey, IEEE Proc., v.127, p.272-283, 1980.
- BIRD, J., Electrical Circuit Theory and Technology, Newnes, Burlington, 2. ed., 2001.
- BOLLA, M. R., BALTHAZAR, J. M., FELIX, J. L. P e MOOK, D. T., On a Approximate Analytical Solution to a Nonlinear Vibrating Problem, Excited by a Nonideal Motor, Nonlinear Dynamics, 50, (2007), 841-847.
- BURIAN, Y. Jr. e LYRA, A. C. C., Circuitos Elétricos, Pearson Education do Brasil, Brasil, 2006.
- BURDEN, L. and FAIRES, J. D., Numerical Analysis, PWS Pubs. Co., 2th Edition, 2003.
- CASTÃO, K. A. L., Análise Dinâmica Não Linear de Um Sistema Não-Ideal, Utilizando Amortecedor Magneto Reológico, Dissertação de Mestrado –

Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia Mecânica, Bauru-SP, 2008.

CRAIG, R. R., *Structural Dynamics: An Introduction to Computer Methods*, John Wiley and Sons, 1981.

DANTAS, M. J. H. e BALTHAZAR, J. M., A Comment on a Nonideal Centrifugal Vibrator Machine Behavior with Soft and Hard Springs, *International Journal of Bifurcations and Chaos*, Vol. 16, No. 4 (2006), 1083-1088.

DANTAS, M. J. H. e BALTHAZAR, J. M., On Local Analysis of Oscillations of a Non-Ideal and Non-Linear Mechanical Model, *Meccanica* 39: 313–330, 2004.

DORF, R. C. e BISHOP, R. H., *Sistemas de Controle Moderno*, Ed. Livros Técnicos e Científicos Editora S. A, Rio de Janeiro, 8º Ed., Tradução: Severo, B. S. F., 2001.

DU, Y., *Internal Resonances in Vibration Isolators and their Control Using Passive and Hybrid Dynamic Vibration Absorbers*, Dissertation Submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg-Virginia, April, 2003.

FELIX, J. L. P. e BALTHAZAR, J. M., Comments on a Nonlinear and a Non-Ideal Electromechanical Damping Vibration Absorber, Sommerfeld Effect and Energy Transfer, *Nonlinear Dynamics*, v. 55, p. 1-11, 2008.

GUILHERME, K. L., *Vibrações Não Lineares e Não Ideais de Um Sistemas de Dois Graus de Liberdade*, Dissertação de Mestrado, FEM-UNICAMP, Campinas-SP, 2004.

HANGOS, K. M., BOKOR, J. e SZEDERKÉNYI, G., *Analysis and Control of Nonlinear Process Systems*, Ed. Springer-Verlag London Limited, London, 2002.

- IKEDA, T. Bifurcation Dynamic Caused by Two Nonlinear Dynamic Absorbers, Proceedings of the ASME 2007, In: International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information Engineering Conference, Las Vegas, Nevada, USA, 2007.
- LIU, K. e LIU, J., The Damped Dynamic Vibration Absorbers: Revisited and New Result, Journal of Sound and Vibration 284, (2005), 1181-1189.
- LIU, G. R., PENG, X. Q., LAM, K. Y. Vibration Control Simulation of Laminated Composite Plates with Integrated Piezoelectrics. Journal of Sound and Vibration, Vol. 220, No. 5, 1999, pp. 827-846.
- MARAT, R. e BALTHAZAR, J. M., On Control and Synchronization in Chaotic and Hyperchaotic Systems Via Linear Feedback Control, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations, 13, (2008), 1246-1255.
- MARQUES, R. F. A., Estudo Teórico e Numérico de Absorvedores Dinâmicos de Vibrações Ativos e Adaptativos, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG, 2000.
- MEIROVITCH, L., Fundamentals of Vibrations, McGraw-Hill Companies, New York, 2001.
- MOHEIMANI, S. O. R. e FLEMING, A. J., Piezoelectric Transducer for Vibration Control and Damping, London: Springer-Verlag, 1967.
- MORGAN, R. A. e WANG, K. W., Active-Passive Piezoelectric Absorbers for Systems Under Multiple Non-Stationary Harmonic Excitations, Journal of Sound and Vibration 255(4), (2002), 685-700.
- NAGAYA, K., KURUSU, A., IKAI, S. e SHITANI, Y., Vibration Control of a Structure by Using a Tunable Absorber and an Optimal Vibration Absorber under Auto-Tuning Control, Journal of Sound and Vibration 228(4), (1999), 773-792.

- NAGEM, R. J., MADANSHETTY, S. I. e MEDHI, G., An Electromechanical Vibration Absorber, *Journal of Sound and Vibration*, 200(4), (1997), 551-556.
- NAYFEH, A. H. e BALACHANDRAN, B., *Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computation and Experimental Methods*, John Wiley and Sons, N.Y., 1995.
- NAYFEH, A. H. e MOOK, D. T., *Nonlinear Oscillations*, Wiley, New York, 1979.
- NICHOLS, T. e GHONEIM, H., A Remote Electromechanical Vibration Absorber, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 14, (2003), 23.
- PICCIRILO, V., *Dinâmica Não Linear e Controle de um Sistema Vibratório Modelado com Memória de Forma e, Excitado por Fontes de Energia do Tipo Ideal e Não-Ideal*, Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia Mecânica, Bauru, 2008.
- RAM, Y.M. e ELHAY, S., The Theory of a Multi-Degree-of-Freedom Dynamic Absorber, *Journal of Sound and Vibration* 195(4), (1996), 607-615.
- SCHOUKENS, J., DOBROWIECKI, T. e PINTELON, R., Identification of Linear Systems in The Presence of Nonlinear Distortions - A Frequency Domain Approach, *IEEE Trans. Automatic Control*. New York, 1998, p. 176-190.
- SINCLAIR, I. R., *Sensors and Transducers*, Woburn: Newnes, 3. ed., 1967.
- SLOTINE, J. J. E. e LI, W., *Applied Nonlinear Control*, Ed. Prentice-Hall, New Jersey, 1999.
- SNOWDON, J. C., WOLFE, A. A. e KERLIN, R. L., The Cruciform Dynamic Vibration Absorber, *Journal Acoustic Society of America*, 75(6), 1984.
- STROGATZ, S. H., *Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*, Perseus Books Group, 1994.

- VASSALO, F. R., Manual de Transdutores, Plátano - Edições Técnicas, 1992.
- VENKATESAN, A. e LAKSHMANAN, M., Bifurcation and Chaos in the Double-Well Duffing–van der Pol Oscillator: Numerical and Analytical Studies, Physical Review E, Vol. 56, No. 6, 1997.
- VERA, S. A. e FEBO, M., Optimization of a Two Degree of Freedom System Acting as a Dynamic Vibration Absorber, Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 130, 2008.
- VYAS, A. e BAJAJ, A. K., Dynamics of Autoparametric Vibration Absorbers Using Multiple Pendulums, Journal of Sound and Vibration 246(1), (2001), 115-135.
- WARMINSKI, J. e BALTHAZAR, J.M, Vibrations of a Parametrically and Self-Excited System with Ideal and Non-Ideal Energy Sources, J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng., Vol. XXV, No 4, 413, 2003.
- WOONG, N. K., WEON, K. K. e SIN, H. C., A Design of a Dynamic Vibration Absorber for a DVD  $\pm$  RW Drive, IEEE Transactions on Consumer Electronics, Vol. 53, No 3, 2007.
- WRIGHT, R. I. e KIDNER, M. R. F., Vibration Absorbers: A Review of Applications in Interior Noise Control of Propeller Aircraft, Journal of Vibration and Control 10, (2004), 1221.
- WU, S. T., CHIU, Y.Y e Yeh, Y. C., Hybrid Vibration Absorber with Virtual Passive Devices, Journal of Sound and Vibration 299, (2007), 247-260.
- YAMAPI, R. e WOAFO, P., Dynamics and Synchronization of Coupled Self-Sustained Electromechanical Devices, Journal of sound and Vibration, 285, (2005), 1151-1170.

- YAMAPI, R., Dynamics of an Electromechanical Damping Device with Magnetic Coupling, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 11, (2006), 907-921.
- YURI, V. M. e RESHETNIKOVA, S. N., Dynamical Interaction of an Elastic System and Essentially Nonlinear Absorber, *Journal of Sound and Vibration* 283, (2005), 91-120.
- ZHU, S. J., ZHENG, Y. F. e FU, Y. M., Analysis of Non-Linear Dynamics of a Two-Degree-of-Freedom Vibration System with Non-linear Damping and Non-linear Spring, *Journal of Sound and Vibration* 271, (2004), 15-24.
- ZUKOVIC, M. e CVETICANIN, L., Chaotic Responses in a Stable Duffing System of Non-Ideal Type, *Journal of Vibration and Control*, 13, (2007), 751.

## Apêndice A

### Modelo Matemático de Um Motor de Corrente

#### Contínua

Nesta seção, mostra-se um modelo matemático do motor CC controlado pela armadura (Aung, 2007). Para tanto, considere o circuito equivalente da Figura A.1, onde  $R_a$  e  $L_a$  denotam a resistência e indutância da armadura,  $J$  e  $c$  são o momento de inércia da carga e o coeficiente de atrito viscoso,  $U$  e  $i_a$  representam a tensão e a corrente de armadura,  $e_a$  é a força contra-eletromotriz e  $\dot{\phi}$  denota a velocidade angular do motor.

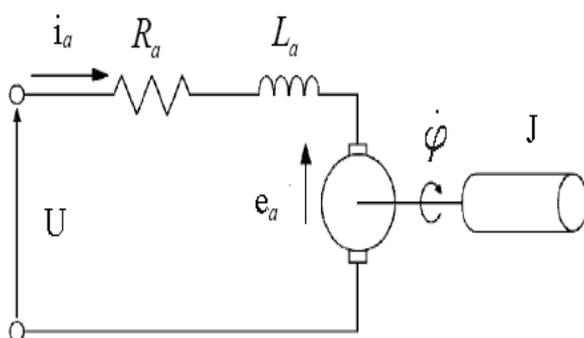


Figura A.1 – Circuito equivalente de um motor CC controlado pela armadura (Basílio e Moreira, 2001).

Aplicando-se a lei das tensões de Kirchhoff ao circuito da armadura, obtém-se:

$$U = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_a \quad (\text{A.1})$$

Em seguida, usando-se a lei de Newton para o movimento rotacional, pode-se escrever:

$$\Gamma - c \dot{\phi} = J \frac{d\dot{\phi}}{dt} \quad (\text{A.2})$$

onde  $\Gamma$  denota o torque produzido pelo motor.

O relacionamento entre as partes elétrica e mecânica do sistema é feito a partir das seguintes equações:

$$e_a = K_g \dot{\phi} \quad (\text{A.3})$$

$$\Gamma = K_m i_a \quad (\text{A.4})$$

onde  $K_g$  e  $K_m$  denotam, respectivamente, as constantes de força contra-eletromotriz e de torque. Substituindo-se a equação (A.4) na equação (A.2) e a equação (A.3) na equação (A.1), obtém-se:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = U - K_g \dot{\phi} \quad (\text{A.5})$$

$$J \frac{d\dot{\phi}}{dt} + c \dot{\phi} = K_m i_a \quad (\text{A.6})$$

Existe uma expressão, resultante da combinação das equações (A.1), (A.3) e (A.4), que relaciona a velocidade angular do motor, a tensão elétrica aplicada, o torque e a variação de torque, e é dada por:

$$U - K_b \dot{\phi} = \left( \frac{R_a}{K_m} \right) \Gamma + \left( \frac{L_a}{K_m} \right) \frac{d\Gamma}{dt} \quad (\text{A.7})$$

Em regime estacionário, e desprezando a indutância ( $L_a = 0$ ), o termo da variação do torque se anula e a equação (A.7) é reduzida para:

$$\Gamma(\dot{\phi}) = u_1 - u_2 \dot{\phi} \quad (\text{A.8})$$

onde  $u_1 = \frac{K_m}{R_a} U$  e  $u_2 = \frac{K_m K_b}{R_a}$ .

## Apêndice B

### Rotinas Computacionais

Neste apêndice, apresentam-se as principais rotinas computacionais e os diagramas de blocos utilizados nesta dissertação, desenvolvidas no software MATLAB®.

A figura B.1 mostra o diagrama de bloco do modelo simplificado – modelo que considera torque linear - construído no Simulink. O diagrama de bloco do modelo consiste de três sub-blocos: o bloco do absorvedor (figura B.2), o bloco da estrutura (figura B.3) e o bloco do motor (figura B.4).

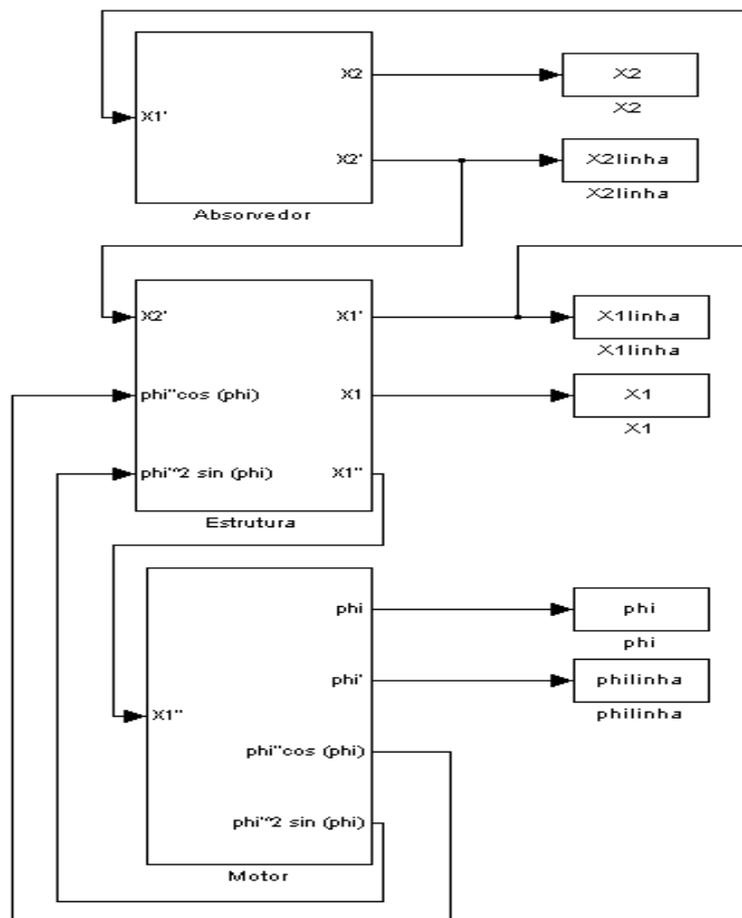


Figura B.1 – Diagrama de bloco do modelo simplificado.

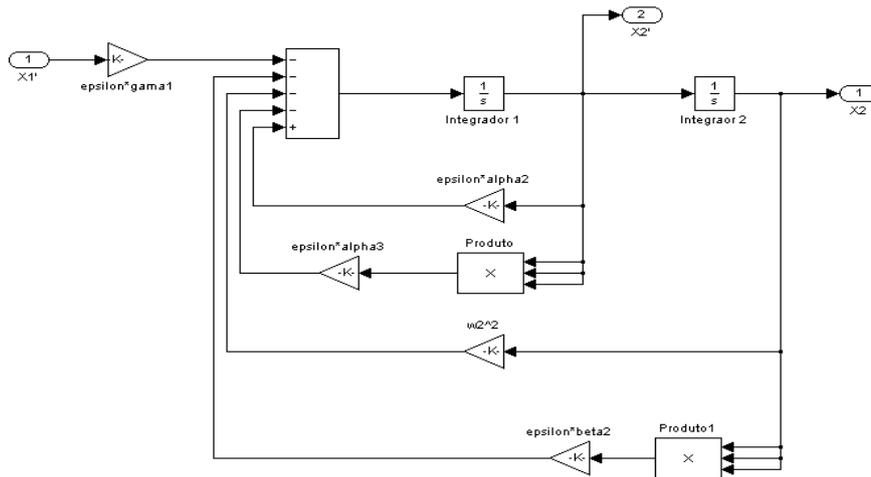


Figura B.2 – Diagrama de bloco do absorvedor para o modelo simplificado.

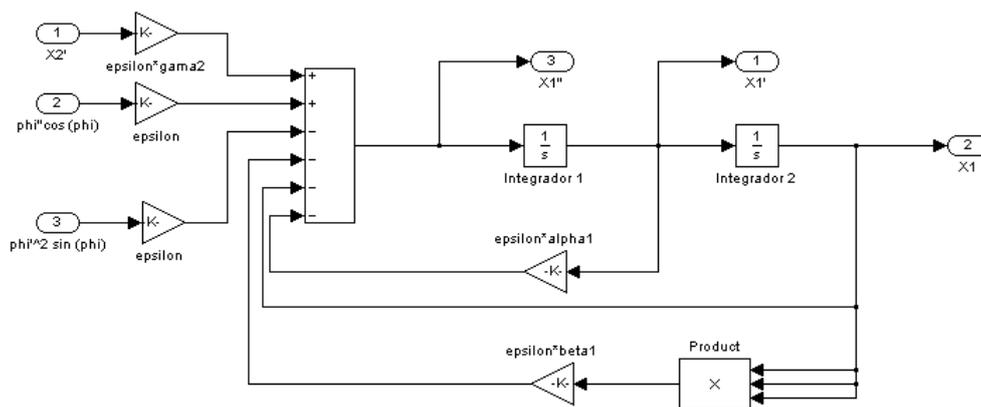


Figura B.3 – Diagrama de bloco da estrutura principal para o modelo simplificado.

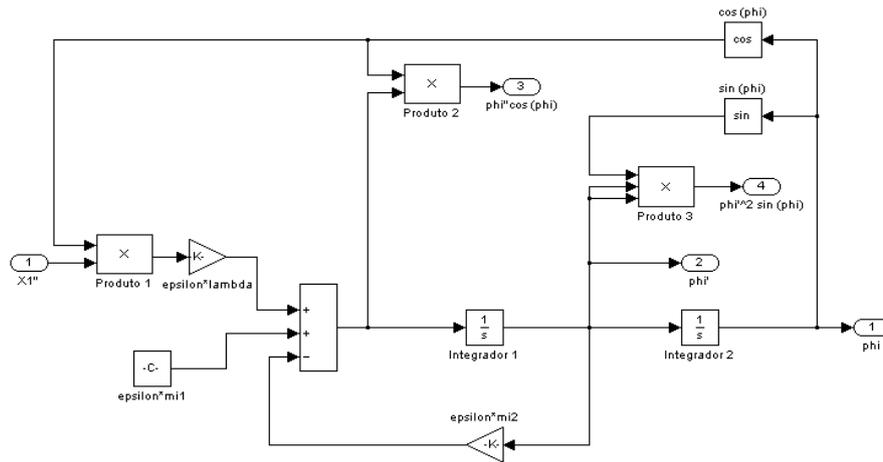


Figura B.4 – Diagrama de bloco do motor para o modelo simplificado.

A figura B.5 mostra o diagrama de bloco do modelo completo – modelo que considera a variação no torque gerado pelo motor - construído no Simulink. O diagrama de bloco do modelo consiste de três sub-blocos: o bloco do absorvedor (figura B.6), o bloco da estrutura (figura B.7) e o bloco do motor (figura B.8).



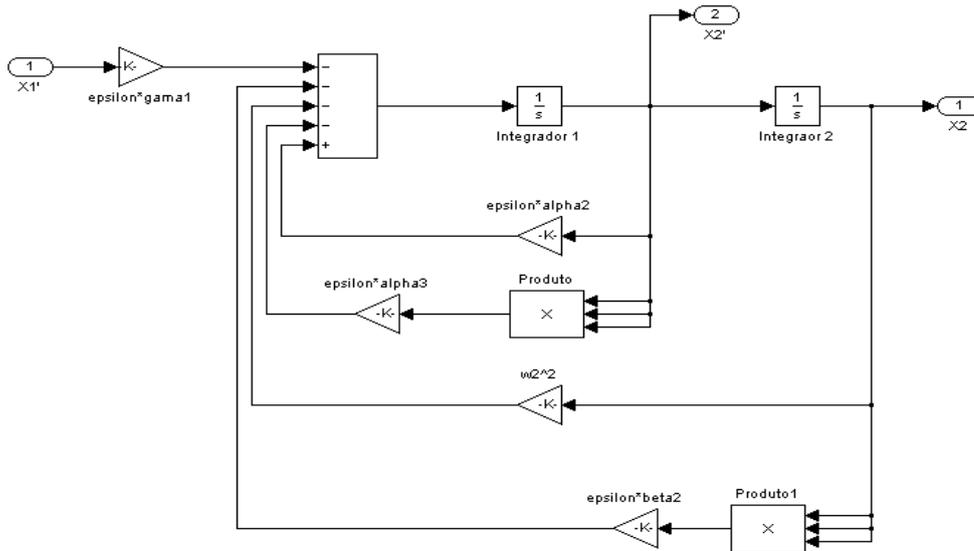


Figura B.6 – Diagrama de bloco do absorvedor para o modelo completo.

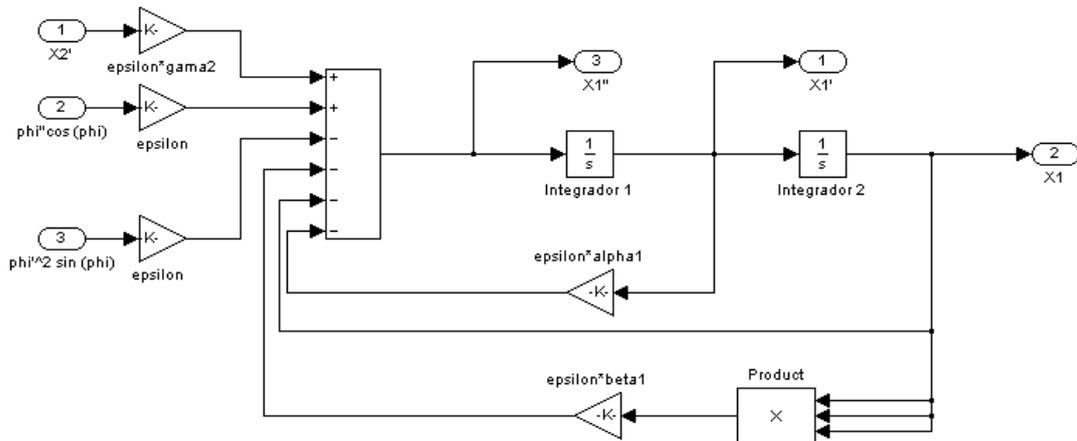


Figura B.7 – Diagrama de bloco da estrutura principal para o modelo completo.

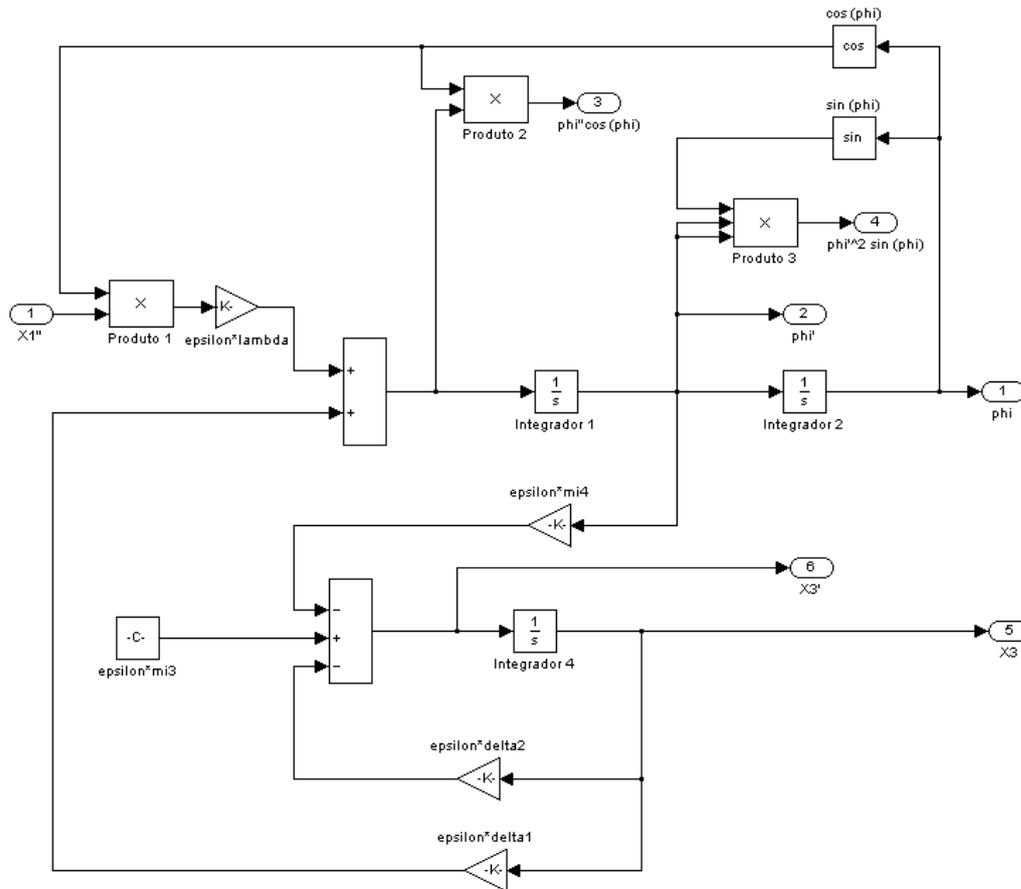


Figura B.8 – Diagrama de bloco do motor para o modelo completo.

A seguir, apresenta-se uma das rotinas utilizadas, no MATLAB®, para o cálculo das curvas de resposta-freqüência e reposta-parâmetro de controle do sistema com absorvedor linear.

```

%-----
%-----Simulação Numérica-----
%-----Sistema Absorvedor Linear-----
%-----

clear all           %limpa variáveis e funções da memória
clc                 %limpa janela de comando
close all          %fecha figuras

tic                 %retorna tempo de execução do programa

%-----
%-----Sistema Sem Absorvedor-----
%-----

%-----Parametros Adimensionais-----

epsilon=0.1;       %parâmetro de acoplamento entre a estrutura principal e o motor CC
alpha1=0.2;        %parâmetro relacionado ao amortecimento da estrutura principal
alpha2=0;          %parâmetro relacionado ao amortecimento do termo linear do absorvedor
alpha3=0;          %parâmetro relacionado ao amortecimento do termo cúbico do absorvedor
beta1=3;           %parâmetro relacionado a rigidez do termo cúbico da estrutura principal
beta2=0;           %parâmetro relacionado a rigidez do termo cúbico do absorvedor
gama1=0;           %parâmetro de acoplamento entre o absorvedor e o sistema principal

```

```

gama2=0;      %parâmetro de acoplamento entre o sistema principal e o absorvedor
w2=0;        %frequência natural do absorvedor
lambda=5;    %parâmetro de acoplamento entre o motor CC e a estrutura principal
mi2=15;      %parâmetro relacionado a tensão de alimentação do motor CC

%-----Condições Iniciais-----

X10=0;       %deslocamento da estrutura principal
X1linha0=0;  %velocidade da estrutura principal
X20=0;       %oscilação da carga no absorvedor
X2linha0=0;  %oscilação da corrente no absorvedor
phi0=0;      %deslocamento angular da massa desbalanceada
philinha0=0; %velocidade angular da massa desbalanceada

%-----Integração Numérica-----
%-----Runge-Kutta de Quarta Ordem Passo Variável-----

i=1;         %índice

for mi1=0:1:80; %parâmetro de controle

    sim('Sistema'); %integra sistema - simulink(ode45)

    X1s(i,1)=max(abs(X1)); %armazena amplitudes máximas de X1
    X2s(i,1)=max(abs(X2)); %armazena amplitudes máximas de X2
    philinhas(i,1)=mean(philinha); %armazena frequências de excitação - velocidade angular media

    i=i+1 %atualiza índice

end

%-----Sistema Com Absorvedor-----

%-----Parâmetros Adimensionais-----

epsilon=0.1; %parâmetro de acoplamento entre a estrutura principal e o motor CC
alpha1=0.2; %parâmetro relacionado ao amortecimento da estrutura principal
alpha2=-10; %parâmetro relacionado ao amortecimento do termo linear do absorvedor
alpha3=0;   %parâmetro relacionado ao amortecimento do termo cúbico do absorvedor
beta1=3;    %parâmetro relacionado a rigidez do termo cúbico da estrutura principal
beta2=0;    %parâmetro relacionado a rigidez do termo cúbico do absorvedor
gama1=20;   %parâmetro de acoplamento entre o absorvedor e o sistema principal
gama2=10;   %parâmetro de acoplamento entre o sistema principal e o absorvedor
w2=1;       %frequência natural do absorvedor
lambda=5;   %parâmetro de acoplamento entre o motor CC e a estrutura principal
mi2=15;     %parâmetro relacionado a tensão de alimentação do motor CC

%-----Condições Iniciais-----

X10=0;       %deslocamento da estrutura principal
X1linha0=0;  %velocidade da estrutura principal
X20=0;       %oscilação da carga no absorvedor
X2linha0=0;  %oscilação da corrente no absorvedor
phi0=0;      %deslocamento angular da massa desbalanceada
philinha0=0; %velocidade angular da massa desbalanceada

%-----Integração Numérica-----
%-----Runge-Kutta de Quarta Ordem Passo Variável-----

i=1;         %índice

for mi1=0:1:80; %parâmetro de controle

    sim('Sistema'); %integra sistema - simulink(ode45)

    X1c(i,1)=max(abs(X1)); %armazena amplitudes máximas de X1
    X2c(i,1)=max(abs(X2)); %armazena amplitudes máximas de X2
    philinhac(i,1)=mean(philinha); %armazena frequências de excitação - velocidade angular media

    i=i+1 %atualiza índice

end

%-----Plota Curvas-----

```

```

mi1=0:1:80; %parâmetro de controle

figure(1)
plot(mi1,X1s,'b*',mi1,X1c,'k. '); %plota parâmetro de controle vs amplitude X1
axis([0 200 0 2]);
xlabel('\mu_1');
ylabel('Amplitude de \chi_1');
legend('Sem Absorvedor','Com Absorvedor');
text(20,1.8,'a) Estrutura');

figure(2)
plot(mi1,X2c,'k. '); %plota parâmetro de controle vs amplitude X2
axis([0 200 0 2]);
xlabel('\mu_1');
ylabel('Amplitude de \chi_2');
text(10,1.8,'b) Absorvedor');

figure(3)
plot(philinhas,X1s,'b*',philinhac,X1c,'k. '); %plota frequência de excitação vs amplitude X1
axis([0 5 0 2.5]);
xlabel('Frequência de excitação \phi\prime');
ylabel('Amplitude de \chi_1');
legend('Sem Absorvedor','Com Absorvedor');
text(0.5,2.3,'a) Estrutura');

figure(4)
plot(philinhac,X2c,'k. '); %plota frequência de excitação vs amplitude X2
axis([0 5 0 1]);
xlabel('Frequência de excitação \phi\prime');
ylabel('Amplitude de \chi_2');
text(0.5,0.9,'b) Absorvedor');

figure(5)
plot(mi1,philinhac,'k. '); %plota parâmetro de controle vs frequência de excitação
axis([0 8 0 5]);
xlabel('\mu_1');
ylabel('Frequência de excitação \phi\prime');

toc

```

## Apêndice C

### Outra Solução Analítica Aproximada

Para sistemas com não-linearidades cúbicas ressonâncias internas podem existir se  $\omega_2 \approx 3\omega_1$ , conforme Nayfeh e Mook (1995). Então, considera-se aqui o caso que temos ressonância interna 1:3, ou seja, a frequência natural  $\omega_2$  é igual a três vezes a frequência natural  $\omega_1$ .

Relembrando que o sistema (2.23) obtido na modelagem foi:

$$\begin{aligned}\chi_1'' + \chi_1 &= \varepsilon(\phi'' \cos \phi - \phi'^2 \text{sen} \phi - \alpha_1 \chi_1' - \beta_1 \chi_1^3 + \gamma_2 \chi_2') \\ \chi_2'' + \omega_2^2 \chi_2 &= \varepsilon(\alpha_2 \chi_2' - \alpha_3 \chi_2^3 - \beta_2 \chi_2^3 - \gamma_1 \chi_1') \\ \phi'' &= \varepsilon(\lambda_2 \chi_1'' \cos \phi + \Gamma(\phi'))\end{aligned}\tag{C.1}$$

onde  $\Gamma(\phi') = \mu_1 - \mu_2 \phi'$ .

O método da média de perturbações é aplicado visando a obtenção de uma solução analítica para o caso em que se tem ressonância interna 1:3.

Inicialmente, considera-se que a solução do sistema tem a seguinte forma:

$$\chi_1 = A_1 \cos(\phi + B_1)\tag{C.2a}$$

$$\chi_2 = A_2 \cos(3\phi + B_2)\tag{C.2b}$$

A seguir, considerou-se que  $A$  e  $B$  são constantes, assim:

$$\chi_1' = -A_1 \text{sen}(\phi + B_1)\tag{C.3a}$$

$$\chi_2' = -3A_2 \text{sen}(3\phi + B_2)\tag{C.3b}$$

$$\phi' = \Delta\tag{C.3c}$$

Sabe-se que  $A = A(\tau)$  e  $B = B(\tau)$ , então, derivam-se as equações (C.2a) e (C.2b) em  $\tau$ , e obtêm-se:

$$\chi'_1 = A'_1 \cos(\phi + B_1) - A_1(\Delta + B'_1) \text{sen}(\phi + B_1) \quad (\text{C.4a})$$

$$\chi'_2 = A'_2 \cos(3\phi + B_2) - A_2(3\Delta + B'_2) \text{sen}(3\phi + B_2) \quad (\text{C.4b})$$

$$\chi''_1 = -A'_1 \text{sen}(\phi + B_1) - A_1(\Delta + B'_1) \cos(\phi + B_1) \quad (\text{C.4c})$$

$$\chi''_2 = -3A'_2 \text{sen}(3\phi + B_2) - 3A_2(3\Delta + B'_2) \cos(3\phi + B_2) \quad (\text{C.4d})$$

Estamos interessados na região próxima a ressonância interna ( $\omega_2 \approx \omega_1$ ). Para isso, introduz-se um parâmetro de sintonia  $\sigma_1$  de mesma ordem das não-linearidades, então:

$$\omega_2 = 3\omega_1 + \varepsilon\sigma_1 \rightarrow \omega_2 = 3 + \varepsilon\sigma_1 \quad (\text{C.5})$$

Comparando as equações (C.3a) com (C.4a) e (C.3b) com (C.4b) obtêm-se as igualdades:

$$-A_1 \text{sen}(\phi + B_1) = A'_1 \cos(\phi + B_1) - A_1(\Delta + B'_1) \text{sen}(\phi + B_1) \quad (\text{C.6a})$$

$$-3A_2 \text{sen}(3\phi + B_2) = A'_2 \cos(3\phi + B_2) - A_1(3\Delta + B'_2) \text{sen}(3\phi + B_2) \quad (\text{C.6b})$$

Substituindo as equações (C.2), (C.3), (C.4c), (C.4d), (C.5) e (C.6) no sistema de equações (C.1), obtêm-se:

$$A'_1 = \varepsilon \left[ \Delta^2 \text{sen} \phi - \Delta' \cos \phi - \alpha_1 A_1 \text{sen}(\phi + B_1) + \beta_1 A_1^3 \cos^3(\phi + B_1) \dots \right. \\ \left. \dots + 3\gamma_2 A_2 \text{sen}(3\phi + B_2) \right] \text{sen}(\phi + B_1)$$

$$A'_2 = \varepsilon \left[ 2\sigma_1 A_2 \cos(3\phi + B_2) + \alpha_2 A_2 \text{sen}(3\phi + B_2) - \alpha_3 A_2^3 \text{sen}^3(3\phi + B_2) + \frac{1}{3} \beta_2 A_2^3 \cos^3(3\phi + B_2) \dots \right. \\ \left. \dots - \frac{1}{3} \gamma_1 A_1 \text{sen}(\phi + B_1) \right] \text{sen}(3\phi + B_2)$$

$$\Delta' = \varepsilon [M(\Delta) - \lambda A_1 \cos(\phi + B_1) \cos \phi]$$

Diferentemente da solução anterior (caso de ressonância interna 1:1), agora, precisamos considerar dois casos distintos. O primeiro caso considerado ocorre quando a frequência de excitação passa pela primeira frequência natural  $\omega_1$ . O segundo caso ocorre quando a frequência de excitação passa pela primeira frequência natural  $\omega_2$ .

Assim, restringimos nossa atenção para uma estreita faixa de frequência ao redor da frequência  $\omega_1$ , então, pode-se escrever que:

$$\Delta = \omega_1 + \varepsilon\sigma_2 \rightarrow \Delta = 1 + \varepsilon\sigma_2 \quad (C.7)$$

Como uma primeira simplificação, desprezou-se todos os termos  $O(\varepsilon^2)$ , então:

$$\begin{aligned} A'_1 &= \varepsilon \left[ \text{sen}\phi - \alpha_1 A_1 \text{sen}(\phi + B_1) + \beta_1 A_1^3 \cos^3(\phi + B_1) + 3\gamma_2 A_2 \text{sen}(3\phi + B_2) \right] \text{sen}(\phi + B_1) \\ A'_2 &= \varepsilon \left[ 2\sigma_1 A_2 \cos(3\phi + B_2) + \alpha_2 A_2 \text{sen}(\phi + B_2) - \alpha_3 A_2^3 \text{sen}^3(3\phi + B_2) + \frac{1}{3} \beta_2 A_2^3 \cos^3(3\phi + B_2) \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - \frac{1}{3} \gamma_1 A_1 \text{sen}(\phi + B_1) \right] \text{sen}(3\phi + B_2) \\ \Delta' &= \varepsilon \left[ M(\Delta) - \lambda A_1 \cos(\phi + B_1) \cos\phi \right] \end{aligned} \quad (C.8)$$

Isolando os  $B$  das igualdades (C.6) e realizando as substituições necessárias, têm-se:

$$\begin{aligned} B'_1 &= \varepsilon \left\{ -\sigma_2 + \frac{1}{A_1} \left[ \text{sen}\phi - \alpha_1 A_1 \text{sen}(\phi + B_1) + \beta_1 A_1^3 \cos^3(\phi + B_1) \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots + 3\gamma_2 A_2 \text{sen}(3\phi + B_2) \right] \cos(\phi + B_1) \right\} \\ B'_2 &= \varepsilon \left\{ -3\sigma_2 + \frac{1}{A_2} \left[ 2\sigma_1 A_2 \cos(3\phi + B_2) + \alpha_2 A_2 \text{sen}(\phi + B_2) - \alpha_3 A_2^3 \text{sen}^3(3\phi + B_2) \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots + \frac{1}{3} \beta_2 A_2^3 \cos^3(3\phi + B_2) - \frac{1}{3} \gamma_1 A_1 \text{sen}(\phi + B_1) \right] \cos(3\phi + B_2) \right\} \end{aligned} \quad (C.9)$$

Como segunda simplificação, considerou-se  $A$ ,  $B$  e  $\sigma$  constantes para um ciclo e integrou-se (média) para um ciclo o lado direito das equações (C.8) e (C.9), assim:

$$\begin{aligned}
A_1' &= \varepsilon \left( \frac{1}{2} \cos B_1 - \frac{1}{2} \alpha_1 A_1 \right) \\
B_1' &= \varepsilon \left[ -\sigma_2 + \frac{1}{A_1} \left( -\frac{1}{2} \operatorname{sen} B_1 + \frac{3}{8} \beta_1 A_1^3 \right) \right] \\
A_2' &= \varepsilon \left( \frac{1}{2} \alpha_2 A_2 - \frac{3}{8} \alpha_3 A_2^3 \right) \\
B_2' &= \varepsilon \left[ -3\sigma_2 + \frac{1}{A_2} \left( \sigma_1 A_2 + \frac{3}{8} \beta_2 A_2^3 \right) \right] \\
\Delta' &= \varepsilon \left[ M(\Delta) - \frac{1}{2} \lambda A_1 \cos B_1 \right]
\end{aligned} \tag{C.10}$$

É importante salientar que a solução obtida acima é a equação média que representa o sistema (C.1). Para obter a solução não estacionária é necessário realizar simulações numéricas do sistema médio, considerando como condições iniciais a solução estacionária obtida analiticamente.

O motivo pelo qual se interessa pela solução estacionária das equações médias é que se pode fazer o estudo da estabilidade dessas equações e, segundo o teorema de Hartman-Grobman (Nayfeh, 1995) esta estabilidade é topologicamente equivalente à estabilidade do sistema original. Tal tarefa não será considerada neste trabalho.

# **Súmula Curricular**

## **Trabalhos Aceitos em Eventos com Arbitragem**

- Iossaqui, J. G., Balthazar, J. M., Pontes Jr., B. R. e Palácios, J. L., On a Passive Control in a Nonlinear and a Nonideal System. In: 7th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Applications 2008, Presidente Prudente, SP, Brasil. DINCON 2008, v.1.
- Iossaqui, J. G., Balthazar, J. M., Pontes Jr., B. R. e Palácios, J. L., Atuação de Absorvedores Eletromecânicos de Vibrações Não-Lineares e Não-Ideais. In: V Congresso Nacional de Engenharia Mecânica 2008, Salvador, BA, Brasil. CONEM 2008, v.1.

## **Trabalhos Submetidos em Revistas com Arbitragem**

- Iossaqui, J. G., Balthazar, J. M., Pontes Jr., B. R. e Palácios, J. L., On a Passive Control for a Nonlinear, Chaotic and Nonideal System, Using an Electromechanical Vibration Absorber, Like Device. Journal: Vibration and Acoustics. Submitted to Journal: Vibration and Acoustics (2008).