UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

A HISTÓRIA DOS PROBLEMAS
DA TAUTÓCRONA E DA BRAQUISTÓCRONA

Rejeane Alexandre Coelho

Orientador: Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Área de concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos.

Rio Claro, SP
2008

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira

Prof. Dr. Sérgio Nobre

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes

Rejeane Alexandre Coelho
Aluno (a)

Rio Claro, 25 de abril de 2008

Resultado: **APROVADA**

A Paulo e Murilo pelo amor, apoio e compreensão em todas as fases de minha vida.

AGRADEÇO

Meu orientador Marcos, pela compreensão, amizade e carinho;

Prof. Sérgio Nobre pelo incentivo (apesar das piadas de loira);

Prof.ª Rosa, pela contribuição no meu trabalho;

Minha amiga do peito, Fêo, pelo incentivo, por acreditar na minha capacidade e estar sempre por perto quando preciso;

Minha prima, Miriam, pelos papos de sábado à noite e almoços de domingo;

Carla e Luciele pela amizade e cumplicidade;

Casa das Sete Mulheres, pelo acolhimento caloroso;

A todos os meus colegas da pós, pelos almoços divertidos no RU, pelas conversas descontraídas, por criarem este ambiente harmonioso.

Resumo

O objetivo deste trabalho é analisar a forma como Huygens e os irmãos Bernoulli, propuseram e resolveram, respectivamente, os problemas do Isocronismo do Pêndulo (Tautócrona) e da Braquistócrona, Buscando, assim, contribuir para o entendimento dos métodos utilizados pelos eruditos para essas demonstrações. Trata-se de uma pesquisa de cunho histórico-analítico, centrada no século XVII, que fez-se uso de bibliografias que transcreviam os originais dos dois cientistas. Observou-se que para o sucesso da resolução dos problemas propostos, muitos conceitos matemáticos conhecidos até então foram usados, contudo os que mais deram suporte ao sucesso dos trabalhos em questão foram as teorias de Galileu e as contribuições de Mersenne. Tanto os Bernoulli quanto Huygens concluíram no final de seus trabalhos, que a curva procurada era uma Ciclóide. A Braquistócrona é um problema que faz parte de todo o desenvolvimento do Cálculo de Variações e o Isocronismo contribuiu para a construção de relógios de pêndulo mais precisos e dos marítimos.

Palavras-chave: História da Matemática, Isocronismo, Braquistócrona, Ciclóide.

Abstract

The goal of this essay is analyzing the way how Huygens and the Bernoulli brothers, proposed and solved, respectively, the problems of the Pendulum Isocronism (tautochrone) and the brachistochrone. Intending, this way, to contribute for the understanding of the methods used for the erudites to these demonstrations. It is a research of a historical aspect, centered in the XVIII century, and it was made use of the bibliography which transcribed the originals of both scientists. It was observed that for the success of the resolution of the suggested problems, lots of mathematical concepts known at that time were used, however, the ones that had support to the success of the resolution of the suggested problems were Galileu´s theory and Mersenne´s contribution. As Bernoulli´s as Huygens concluded at the end of their works that the curve searched was a Cycloid. The Braquistócrona is a problem that is part of all the development of the Calculus of Variations and the Isocronism contributed to the construction of the most accurate pendulum clocks and the maritime ones.

Key-words: Mathematic History, Isocronism, Brachistochrone, Cycloid

S U M Á R I O

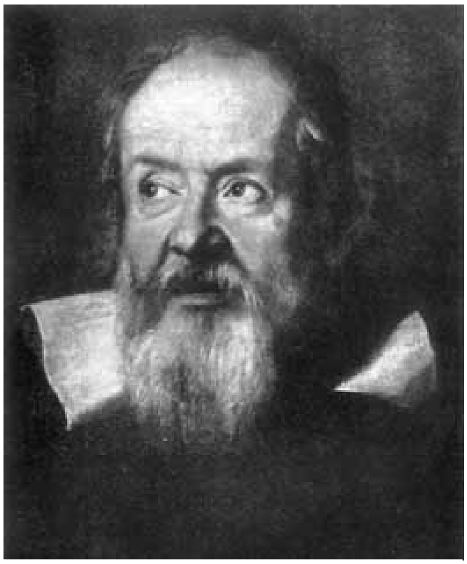
1- CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Para compreender o avanço matemático do século XVII é necessário fazer um breve relato dos seus aspectos históricos que influenciaram esse período, representado por monarcas e pela nobreza - o chamado "regime feudal", onde a política é comandada pelo valor da terra, na figura do senhor feudal, tendo o dinheiro como símbolo do poder econômico. Assim, com o apoio de monarcas e nobres a cultura e a ciência puderam obter um desenvolvimento expressivo.

Foi, então, uma época de grandes cientistas, em todas as áreas, sendo alguns deles: Thomas Harriot (1560-1648), John Napier (1550-1617), Jobst Bürgi (1552-1632), Henri Briggs (1561-1631), Galileu Galilei (1564-1642) Johann Kepler (1571-1630), Gregory Saint-Vicent (1584-1667), Marin Mersenne (1588-1648), Girard Desargues (1591-1661), Albert Girard (1595-1632), René Descartes (1596-1650), Bonaventura Cavalieri (1598-1647), Pierre Fermat (1601-1665), Gilles Persone de Roberval (1602-1675), Evangelista Torricelli (1608-1647), Frans van Schooten (1615-1660), John Walllis (1616-1703), Alfonso Antonio de Sarasa (1618-1667), Nicolaus Mercantor (1620-1687), René Françoise de Sluse (1622-1685), Blaise Pascal (1623-1662) Jan Witt (1623-1672), Christian Huygens (1629-1695), Isac Barrow (1630-1677), James Gregory (1638-1675), Isaac Newton (1642-1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), Guillaume François l'Hopital (1661-1704), Jacob Bernoulli (1654-1705), Johann Bernoulli (1667-1748), entre tantos outros que também escreveram a história do século XVII.

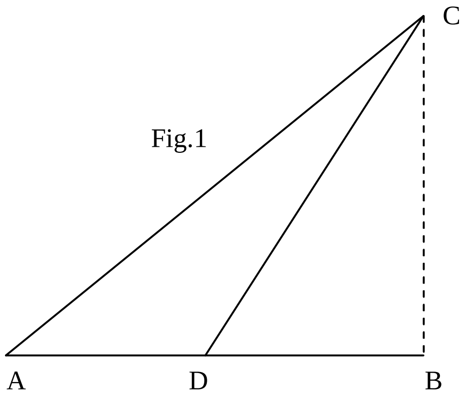
É nessa época que está centrado o trabalho aqui apresentado, que tem por objetivo analisar a forma como Huygens propôs e resolveu o problema do Isocronismo do Pêndulo e os irmãos Bernoulli o da Braquistócrona, a pesquisa busca contribuir para o entendimento dessas demonstrações.

Tendo em vista os trabalhos dos eruditos acima citados, foi investigado os procedimentos utilizados por esses matemáticos, em seus trabalhos sobre Braquistócrona e Isocronismo, observou-se que eles utilizaram recursos baseados na teoria de Galileu[1] sobre o movimento acelerado da queda livre – publicada em 1638, sob o título de *Discursi e Demonstrazioni Matematiche intorno a Due Nuove Scienzie attenenti Allá Mecanica Ed ai Movimenti Locali.*



Galileu Galilei (1564-1642)

Galileu se interessava em comparar velocidades, tempos e distâncias para o movimento ao longo de planos inclinados, bem como para a queda livre. Assim, ele apresentou um postulado dizendo que a velocidade adquirida por um objeto deslizando por um plano inclinado, sem atrito, depende somente da altura[2] do plano e não do ângulo de inclinação conforme representação ao lado (figura 1).



Altura de CA e CD é CB

[1] **Galileu Galilei** nasceu em 18 de fevereiro de 1564, na cidade de Pisa. Por influência da família, estudou medicina entre 1581 e 1585, na Universidade de Pisa. Decidiu seguir a carreira de matemático, e em 1859, tornou-se professor em Pádua. Em 1592, foi convidado para ser o professor titular de Matemática em Pádua, onde desenvolveu seus trabalhos científicos mais importantes. Foi um grande astrônomo e físico, tendo construído o primeiro telescópio “satisfatório”, um microscópio moderno e um extenso trabalho em física. Faleceu em Florença, no dia 8 de janeiro de 1642.

[2] **Galileu** chama altura de um plano inclinado à perpendicular que, traçada do ponto superior desse plano, cai sobre a linha horizontal que é traçada pelo ponto inferior desse mesmo plano inclinado, ou seja, AB // horizonte, 2 planos inclinados CA e CD; a perpendicular CB é a altura. Ele supõe que os graus de velocidade de um mesmo móvel que desce pelos planos inclinados CA e CD, adquiridos nos pontos finais A e D, são iguais, por ser sua altura CB a mesma; e o mesmo é o grau de velocidade que alcançaria o mesmo móvel, se caísse do ponto C ao ponto B. (GALILEI, 19??, p.133)

Na mesma obra, Galileu deduz resultados semelhantes sobre o tempo de queda de um determinado objeto ao longo de dois planos inclinados distintos, de mesma altura, que estão entre si na proporção inversa das raízes quadradas de suas respectivas alturas (fig. 2).

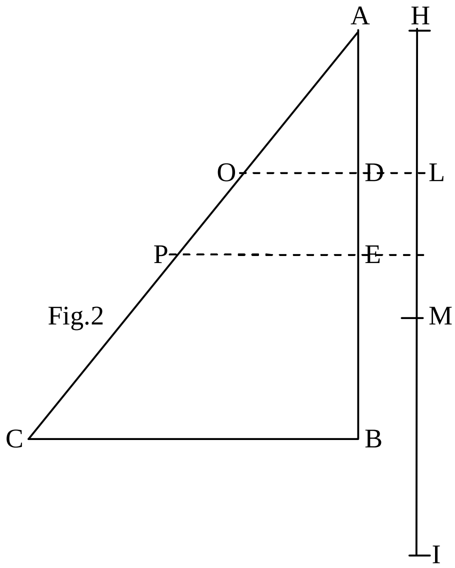


Fig.2

-AD e AE são intervalos de tempo

-HI a linha segundo a qual o móvel partindo de H cairá com um Movimento Uniformemente Acelerado.

-HL o espaço percorrido – 1º intervalo AD e

-HM o espaço percorrido no tempo AE

$$\frac{HM}{HL} = \left(\frac{AE}{AD}\right)^2$$

Segundo Katz (1998), Galileu também fez progressos com a solução do problema da curva de descida mais rápida e demonstrou que em um determinado círculo, o tempo gasto por um corpo para descer ao longo de uma corda de um ponto qualquer para outro mais baixo do círculo, por exemplo DC é maior do que o tempo para descer ao longo de duas cordas DB e BC, a primeira iniciando no mesmo ponto da corda original e a segunda terminada no mesmo ponto mais baixo. Com DC subtendido num arco não maior que 90º (fig. 3). Por estender esses resultados para mais e mais cordas Galileu concluiu, erroneamente, que a trajetória de descida mais rápida é um arco circular.

Também tentou encontrar a área sob um arco de ciclóide[3], geometricamente, não obtendo sucesso. Porém, chamou a atenção dos matemáticos para esta curva, recomendando o estudo de suas propriedades e a indicou para ser usado em construções de pontes.

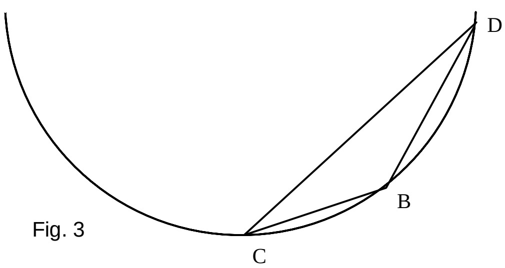


Fig. 3

[3] A **ciclóide** foi estudada primeiramente por **Cusa** (1401-1464) quando estava tentando encontrar a área de um círculo pela integração. **Nicholas de Cusa** era um padre alemão que se interessava por Geometria e Lógica e também por Filosofia e Astronomia. Foi **Galileu** quem deu esse nome a curva em 1599. (*O'CONNOR e ROBERTSON, 2007)*

Mersenne[4], um padre francês que admirava as obras de Galileu e que sabia dos problemas deste com a Igreja e das dificuldades dele em divulgar sua obra na Itália, trouxe os trabalhos do italiano para Paris. Centrados em Mersenne havia um grande círculo de matemáticos, e ele realizava regularmente reuniões para discutir novas idéias na Matemática e na Física.


Marin Mersene (1588 – 1648)

Mersenne fazia registros de descobertas e correspondências e, concomitantemente, copiava-os e os distribuía para serem lidos pelo grupo[5]. Em 1627, Roberval[6] chega a Paris e se junta ao grupo de Mersenne, que reconhece seu talento e o incentiva a trabalhar com a ciclóide.

Mersenne também foi orientador dos estudos de Christiaan Huygens durante muito tempo, através de correspondências com Constantin Huygens – pai e educador – sugerindo os temas para investigações, tendo inclusive, sugerido o pêndulo como mecanismo para o primeiro relógio construído por Huygens.

Segundo Yoder (1991), Mersenne estudou a ciclóide, não obtendo sucesso na questão do centro de oscilação de um corpo vibrando. Propôs, então, o problema da ciclóide a Huygens, através de uma carta, que também enviou a Torricelli[7]. Huygens

---

4 **Marin Mersene** nasceu em 8 de setembro de 1588, na pequena cidade de Oizé, na província de Maine, na França. Estudou Gramática, Teologia e Filosofia. Foi ordenado padre, em julho de 1612, passou algum tempo nos monastérios de Nigeon e Meaux e, em 1614 se fixou no monastério de Nevers, onde ensinou filosofia e teologia. Em 1616, foi transferido para o monastério de Royale, em Paris e, a partir daí, a Matemática tornou-se centro de seus interesses. Faleceu em 1º de setembro de 1648, na cidade de Paris e, desejou que seu corpo fosse doado a pesquisa biológica. (*O'CONNOR e ROBERTSON, 2007*

5 Este centro de estudos era conhecido como *Acadèmie Parisiensis* ou, entre amigos, por *Acadèmie de Mersenne.*

6 **Gilles Roberval** (1602 - 1675) era um cientista francês que desenvolveu métodos eficazes no estudo da integração. Mersenne lhe propôs o problema do cálculo da área da ciclóide em 1628. Roberval, em 1634, demonstrou que a área sob o arco é $3\pi a^2$. (*O'CONNOR e ROBERTSON, 2007*

7 **Evangelista Torricelli** (1608 - 1647) foi um cientista italiano, o primeiro a criar uma teoria sustentável sobre o vácuo e

se interessou pela proposta em 1658, devido aos desafios feitos por Pascal[8]. Após resolver o problema, o estudioso reconheceu sua dívida com Mersenne, sobre esse assunto, na introdução da quarta parte de sua obra *Horologium Oscillatorum.*

Mersenne teve dificuldades quando tentou verificar as afirmações de Galileu a respeito da queda livre. Primeiro quis encontrar o comprimento do pêndulo que completasse o balanço (de um lado para o outro) em 1 segundo e, então, usá-lo como um cronômetro para determinar a distância percorrida em 1 segundo, por um corpo, em queda livre. Não ficou satisfeito com os valores que encontrou, pois sabia que a vibração variava porque o pêndulo não era verdadeiramente isócrono e estava sujeito a resistência do ar (KATZ, 1998).

Após a morte de Mersenne foram encontradas, em seus aposentos, cartas de 78 correspondentes, entre eles, Fermat[9], Huygens, Galileu e Torricelli. Havia também diversos instrumentos de Física e trabalhos que foram publicados em 1651. Mais tarde foram publicadas as cartas que Mersenne enviou e recebeu dos eruditos. Segundo OConnor e Robertson (2007) essas correspondências trazem uma visão do que foi a ciência no século XVII e mostram que Mersenne[10] estava ciente dos assuntos que interessavam os cientistas.

No século XVII, eram constantes os desafios entre matemáticos, nos quais o desafiador mandava problemas, por ele já solucionados, ao desafiado, e em algumas ocasiões, os desafios eram lançados em forma de concurso com premiações. Governos da Europa, interessados em progressos científicos que trouxessem benefícios, ofereciam grandes prêmios.

---

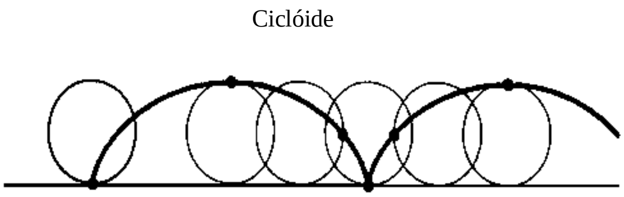
descobrir o princípio do barômetro. Conseguiu também alguns resultados importantes no desenvolvimento do Cálculo. (*O'CONNOR e ROBERTSON, 2007)*

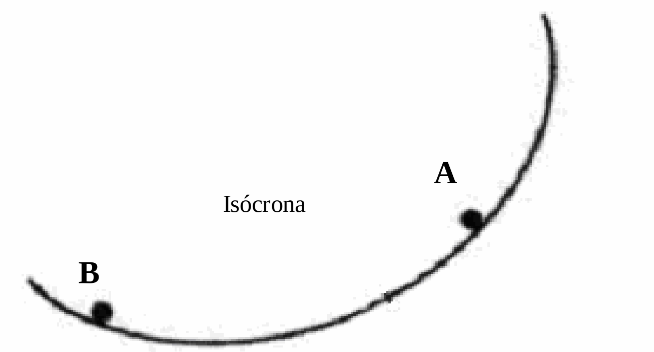
8 **Blaise Pascal** era matemático e filósofo francês muito influente que contribuia com muitas áreas da Matemática. Trabalhou com secções cônicas e na geometria projetiva. Na correspondência com Fermat escreveu as fundamentações para a teoria da probabilidade.(*O'CONNOR e ROBERTSON, 2007)*

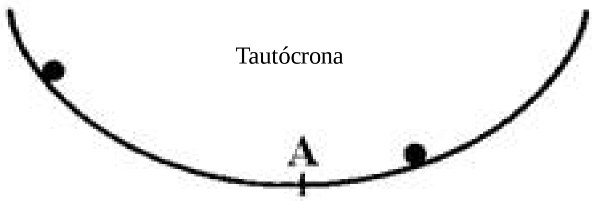
9 **Pierre de Fermat** (1601 – 1665) era advogado e oficial do governo francês, recordado mais por seu trabalho na teoria do número; e pelo Teorema de Fermat. É também importante nas fundamentações do cálculo.

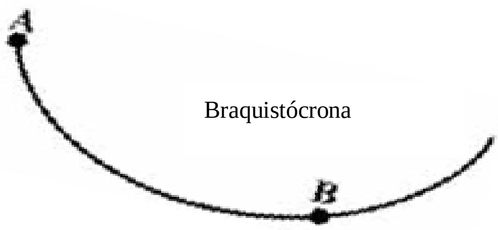
10 No **Anexo 1** apresenta-se uma lista das publicações de Mersenne.

Ainda, nesse mesmo século, eram comuns os estudos sobre curvas, em geral, problemas de valores extremos. Três problemas deste período têm como solução a **Ciclóide**[11]. Estes problemas são a ***Isócrona***[12] que é definida como a curva ao longo da qual um corpo cairá com velocidade vertical uniforme; a ***Tautócrona***[13] que é a curva plana ao longo da qual uma partícula material atinge um ponto dado da trajetória num espaço de tempo que não depende do ponto de onde ela saiu; a ***Braquistócrona***[14] que é a curva de descida mais rápida.









Como já foi ressaltado, nosso estudo interessa-se em analisar os trabalhos de Huygens e Bernoulli sobre a Braquistócrona e o Isocronismo do Pêndulo, na tentativa de contribuir para o entendimento dessas demonstrações, sem o uso do Cálculo Diferencial e Integral. Assim, o trabalho se divide em dois capítulos assim apresentados: no primeiro encontra-se um breve histórico da família Bernoulli, a biografia de Jacob Bernoulli e a de seu irmão Johann,

---

[11] **Ciclóide** é a curva descrita por um ponto da circunferência de um círculo que rola sobre uma reta sem deslizar. No **Anexo 2** encontra-se uma breve descrição histórica dessa curva.

[12] **Iso** = igual e **crono** = tempo

[13] **Tauto** = o mesmo

[14] **Braqui** = descida

descreve-se sobre seus principais estudos e o desafio proposto por Johann, na *Acta Eruditorum*[15], em junho de 1696, à comunidade matemática, para que se demonstrasse a curva de descida mais rápida: a Braquistócrona. Vários matemáticos responderam a tal desafio, inclusive Newton, que o resolveu em, aproximadamente, 24 horas. Mas a solução publicada como sendo a correta, foi a de Jacob Bernoulli. E é essa demonstração que se apresenta nesta parte do trabalho, com notações e comentários.

No capítulo seguinte, fez-se uma breve biografia de Huygens, seus estudos e inventos. Abordou-se também, o modo pelo qual Huygens propôs a si um problema envolvendo a ciclóide (isocronismo do pêndulo), que foi publicado em 1659, e também publicado pela Sociedade Holandesa de Ciências em 1629, no Tomo XVI de Œuvres Complètes[16]. E, com fundamento nessa obra, mais especificamente em seu capítulo III, da página 392 a 400, que foram feitas as análises das demonstrações originais de Huygens, fazendo complementações com notações e comentários para um melhor entendimento da Matemática utilizada.

---

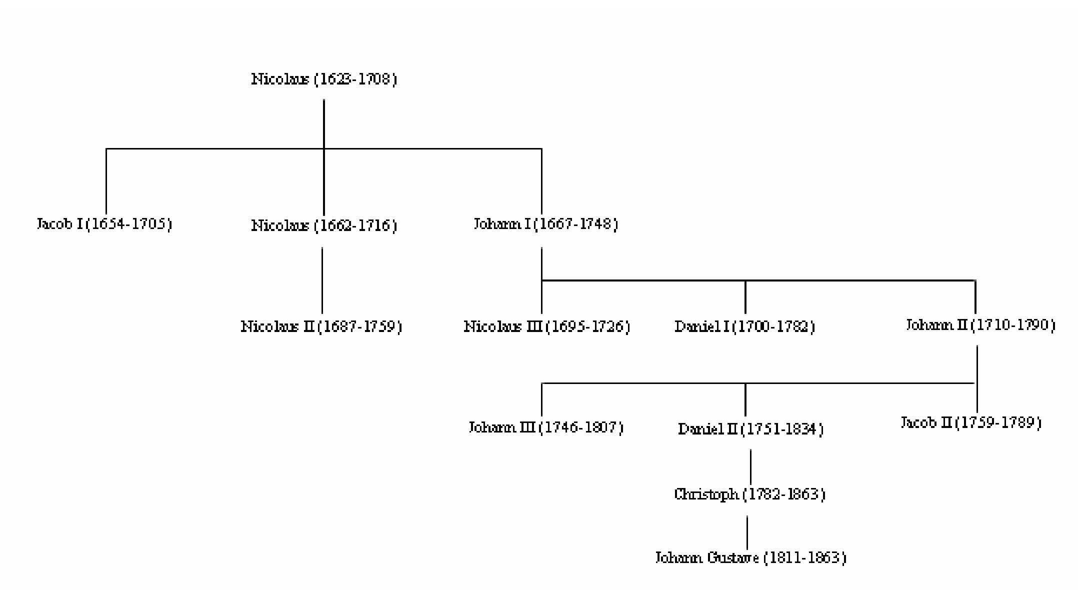
15 **No Anexo 3** encontra-se parte do índice geral da *Acta Eruditorum*, entre os períodos de 1692 a 1701.

16 Essa obra pode ser encontrada na íntegra, ou seja, 22 tomos, com comentários feitos pela Sociedade Holandesa de Ciências, no site da Biblioteca Nacional da França - http://gallica.bnf.fr/

2- OS BERNOULLI e a BRAQUISTÓCRONA

Família Bernoulli

A família Bernoulli de religião protestante, originária da Holanda chega a Basiléia, na Suíça, fugida da fúria espanhola que ocorria nos Países Baixos por ser protestante, na época da perseguição dos espanhóis aos não católicos, em 1583. Nicolaus Bernoulli (1623-1708) era negociante de especiarias, casou-se com Margaretha e teve três filhos, Jacob, Nicolaus e Johann, dos quais apenas o segundo seguiu a profissão do pai. Os irmãos, bem como várias outras gerações dos Bernoulli se dedicaram à Matemática, tendo como os mais renomados, Jacob e Johann Bernoulli.



Por mais de um século essa família contribuiu para o avanço da Ciência. A Árvore Genealógica dos Bernoulli's[17] mostra os membros que se dedicaram aos estudos de temas em Matemática e Física.

Os dois irmãos Bernoulli entraram em contato com o Cálculo através da revista *Acta Eruditorum.* Envolvidos profundamente pelos artigos de Leibniz[18], tornaram-se seus discípulos, e abandonadas outras ocupações, dedicaram-se exclusivamente à Matemática. Discípulo e admirador fervoroso de Leibniz, Jacob começou a se corresponder com ele e se interessou pelas obras de Wallis[19] e Barrow[20] sobre infinitésimos. Sugeriu ao mestre a adoção do termo "integral". Jacob trocava correspondência com muitos matemáticos e estava inteirado dos problemas existentes na época. Entre esses estavam os de achar as equações catenária, da tratiz e da isócrona, que já vinham sendo estudados por Huygens e Leibniz (BOYER, 1996).

Os dois irmãos também estavam interessados em encontrar solução para o cálculo de variações, e juntamente com Leibniz procuravam solução para o problema da Braquistócrona. Jacob e Johann Bernoulli deram grandes contribuições à Matemática. É importante observar que o foco principal dos matemáticos do século XVII tinha como objetivo o estudo e ampliação dos conceitos de Cálculo vinculados à Mecânica e à Astronomia.

---

[17] BOYER (1996, p.286).

[18] **Gottfried Leibniz** (1646 – 1716) matemático alemão que desenvolveu a notação atual para o Cálculo Diferencial e Integral apesar de nunca ter pensado derivada como um limite. Sua filosofia também é importante e inventou uma máquina de calcular. (O'CONNOR e ROBERTSON, 2007)

[19] **John Wallis** (1616 – 1703) matemático inglês que utilizou o método de Cavalieri dos indivisíveis para construir um método de interpolação. Usando o conceito de Kepler da continuidade descobriu métodos para avaliar integrais. (O'CONNOR e ROBERTSON, 2007)

[20] **Isaac Barrow** (1630 – 1677) matemático inglês que desenvolveu um método para determinar as tangentes, e foi o primeiro a reconhecer que a integração e a diferenciação são operações inversas.(O'CONNOR e ROBERTSON, 2007)

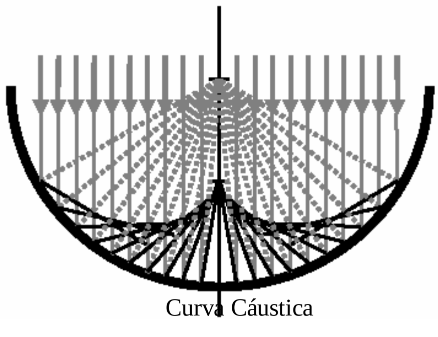
Jacob[21] Bernoulli (1654-1705)

Fonte: The MacTutor History of Mathematics archive [22]

[21] **Jacob** também pode ser encontrado como Jaques, James ou Jakob.
[22] Imagem retirada do site http://www-history.mcs.st-and.ac.uk

Jacob Bernoulli nasceu na Basiléia (Suíça), em 27 de dezembro de 1654. Primeiro estudou Teologia, e contra a vontade de seu pai, Matemática. Foi o primeiro da família a atingir alguma reputação nesse campo. Jacob viajou pela França, Holanda, Bélgica e Inglaterra com o propósito de devotar seu tempo para os estudos e tornar-se um erudito. No retorno à sua terra natal, em 1683, foi nomeado como professor de Física, na Universidade da Basiléia (KATZ, 1998). Em 1684, casou-se com Judith Stupanus. Tiveram um casal de filhos, que ao contrário de muitos membros da família de Bernoulli, não se tornaram matemáticos ou físicos. Em 1687, foi nomeado professor de Matemática, cargo que ocupou até o fim de sua vida.

Escreveu um grande número de artigos para a *Acta Eruditorum* (1683-1701). Foi o primeiro matemático a utilizar o termo integral (termo que foi sugerido a Leibiniz). As primeiras contribuições importantes de Jacob Bernoulli foram um paralelo entre a lógica e a álgebra (1685), probabilidade (1685) e geometria[23] (1687). Em 1689 publicou um trabalho importante sobre série infinita e também sua lei de “números grandes”[24] na teoria de probabilidade. Publicou cinco tratados sobre séries infinitas[25] entre 1682 e 1704. Em maio 1690, publicou na *Acta Eruditorum*, um artigo que mostrava que o problema de determinar a isócrona é equivalente a resolver uma equação diferencial não-linear de primeira ordem.



Curva Cáustica

Jacob Bernoulli descobriu também um método geral para determinar evolutas de uma curva como o envelope de suas circunferências. Investigou curvas cáusticas[26] e também essas curvas associadas à parábola, à espiral logarítmica e as epiciclóides (1692) e descobriu o Lemniscate de

[23] Esse trabalho mostra a construção para dividir qualquer triângulo em quatro partes iguais com duas retas perpendiculares.

[24] A interpretação da probabilidade diz que se uma experiência for repetida um grande número vezes então a freqüência relativa com que um evento ocorre é igual a probabilidade do evento.

[25] O dois primeiros continham o resultado fundamental de que a série $\Sigma(1/n)$ diverge. Não encontrou uma solução exata para a série $\Sigma(1/n^2)$ mas mostrou que convergia para um limite finito menor do que 2.

[26] Curva formada pela intersecção dos raios luminosos que uma superfície curva reflete ou refrata. A ciclóide é a catacáustica de um círculo quando os raios de luz vêm de um ponto na circunferência. A cáustica da ciclóide, onde os raios estão paralelos ao eixo y é uma ciclóide duas vezes maior. Mostrado por Jacob e por Johann Bernoulli em 1692.

Bernoulli[27] (1694). Estudou a catenária[28], foi um dos primeiros a utilizar coordenadas polares, em 1696 resolveu a equação $y' = p(x)y + q(x)y^n$, hoje conhecida como "Equação de Bernoulli". Seu trabalho mais original foi *Ars Conjectandi*[29] (1713).

Ele e o irmão Johann estudaram juntos os primeiros trabalhos de Leibniz, porém, entre eles havia disputas de vaidades matemáticas e o problema da Braquistócrona foi uma delas – Johann propôs o problema na *Acta Eruditorum*, em 1696, e Jacob respondeu ao desafio, e foi esta a solução publicada na mesma revista em 1697 (KATZ, 1998).

Jacob Bernoulli faleceu na Basiléia (Suíça), em 16 de agosto de 1705.

---

[27] É a curva que tem forma similar ao numeral 8 e ao símbolo ∞ .

[28] **Catenária** descreve uma família de curvas planas semelhantes às que seriam geradas por uma corda suspensa pelas suas extremidades e sujeitas à ação da gravidade. Este problema foi proposto por Galileu, que a conjectura de que a curva fosse uma parábola. A resolução do problema foi publicada independentemente em 1691 por Johann Bernoulli, Leibniz e Huygens, que estavam respondendo a um desafio feito por Jacob Bernoulli, em 1690, para encontrar a equação ' da corrente-curva '. (O'CONNOR e ROBERTSON, 2007)

[29] O trabalho estava incompleto, porém um trabalho significativo para a teoria da probabilidade. Nesse livro reviu o trabalho de outros estudiosos na probabilidade, tais como o de von Schooten, de Leibniz e de Prestet. Os números de Bernoulli aparecem no livro em uma discussão da série exponencial. (O'CONNOR e ROBERTSON, 2007)

Johann[30] Bernoulli (1667-1748)

Fonte: The MacTutor History of Mathematics archive [31]

[30] **Johann** também pode ser encontrado como Jean ou John.

[31] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk

Johann Bernoulli nasceu no dia 27 de julho de 1667, na Basiléia (Suíça), era o décimo filho de Nicolaus e Margaretha Bernoulli e irmão de Jacob, 12 anos mais velho. O desejo de seu pai era de que seguisse a carreira empresarial, contudo o filho não obteve sucesso (KATZ, 1998).

Quanto a sua educação, freqüentou a Universidade da Basiléia, cursando Medicina. Influenciado por seu irmão Jacob, que dava aulas de Física na Universidade da Basiléia, começou a desenvolver seu gosto pela Matemática, dedicando-se, principalmente, aos estudos realizados por Leibniz sobre Cálculo. (BOYER, 1996). Junto com seu irmão Jacob, fizeram diversas colaborações aos trabalhos de Leibniz, trabalharam em curvas cáusticas (1692-93) embora não publicassem conjuntamente. (KATZ, 1998).

Casou-se com Drothea Falkner e pouco tempo depois se mudou para a Holanda, em 1 setembro 1695. Seus filhos Nicolaus (II), Daniel Bernoulli, e Johann (II) Bernoulli tornaram-se matemáticos, também teve uma filha que faleceu aos seis meses (O'CONNOR e ROBERTSON, 2007).

Segundo Katz (1998), Johann desenvolveu as técnicas de Leibniz[32] com mais detalhes em vários artigos nos anos de 1690, o que lhe proporcionou, através da ajuda de Huygens, uma cadeira de Matemática, em 1695, na Universidade de Gröningen, na Holanda. Propôs o problema da Braquistócrona em junho 1696 e desafiou Jacob. A já sabida rivalidade dos irmãos fez então com que Jacob também desafiasse Johann propondo o problema isoperimétrico, minimizando a área incluída por uma curva.

Foi mais prolífico que seu irmão, escrevendo sobre uma extensa variedade de tópicos, incluindo curvas cáusticas (1692), equações diferenciais (1694), a retificação e quadratura de curvas por série, a ciclóide (1695), catóptricas e dióptricas (1701), curvas isócronas e curvas de descida rápida (1718) entre outros (SMITH, 1958).

[32] Quando l'Hôpital descobriu que Johann Bernoulli compreendeu os métodos do Cálculo que Leibniz tinha publicado, pediu-lhe que o ensinasse. Johann concordou e as lições foram dadas em Paris e também na casa de país de l'Hôpital em Oucques. Depois que Bernoulli retornou a Basiléia continuou suas lições do Cálculo por correspondência.

Johann obteve grande fama durante sua vida, recebendo muitos convites de diversas universidades, os quais recusou. Em 1699 tornou-se membro da Academia de Ciências de Paris, e após a morte de seu irmão, em 1705, voltou para a Basiléia ocupando a cadeira que fora de Jacob (KATZ, 1998).

Johann Bernoulli faleceu na Basiléia (Suíça), em 1º de janeiro de 1748.

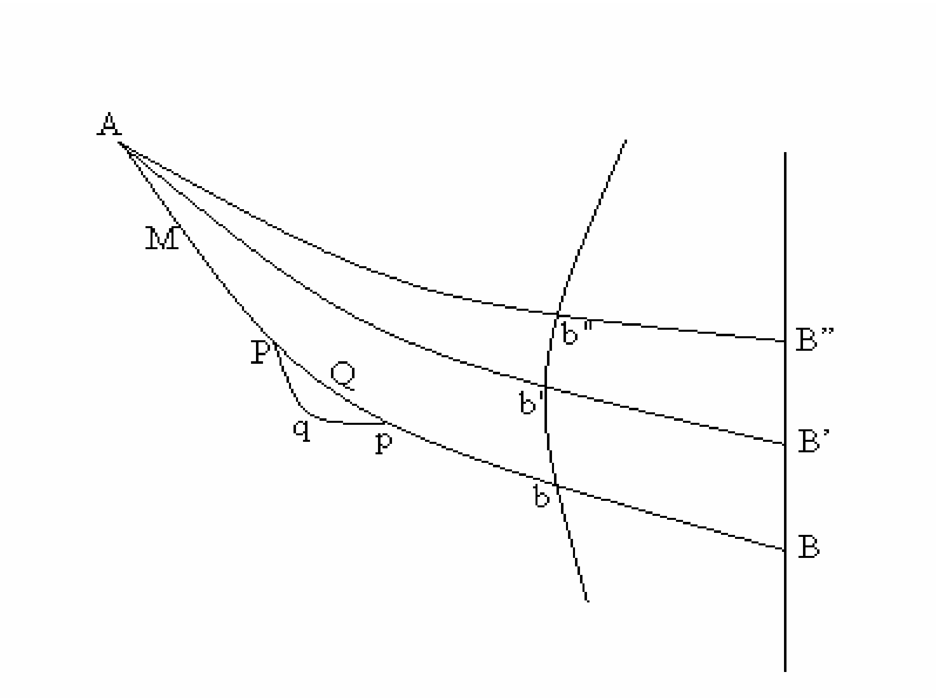
Braquistócrona

Johann Bernoulli, professor de matemática em Gröningen, requereu na *Acta Eruditorum,* que matemáticos determinassem a curva de descida mais rápida, a **Braquistócrona**. Desse modo, propôs em junho de 1696, o seguinte problema:

PROBLEMA NOVUM,

ad cujus Solutionem Mathematici invitantur.

"Datis in plano verticali duobus punctis A et B, assignare mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descendens, et moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniant ad alterum punctum B."[33]



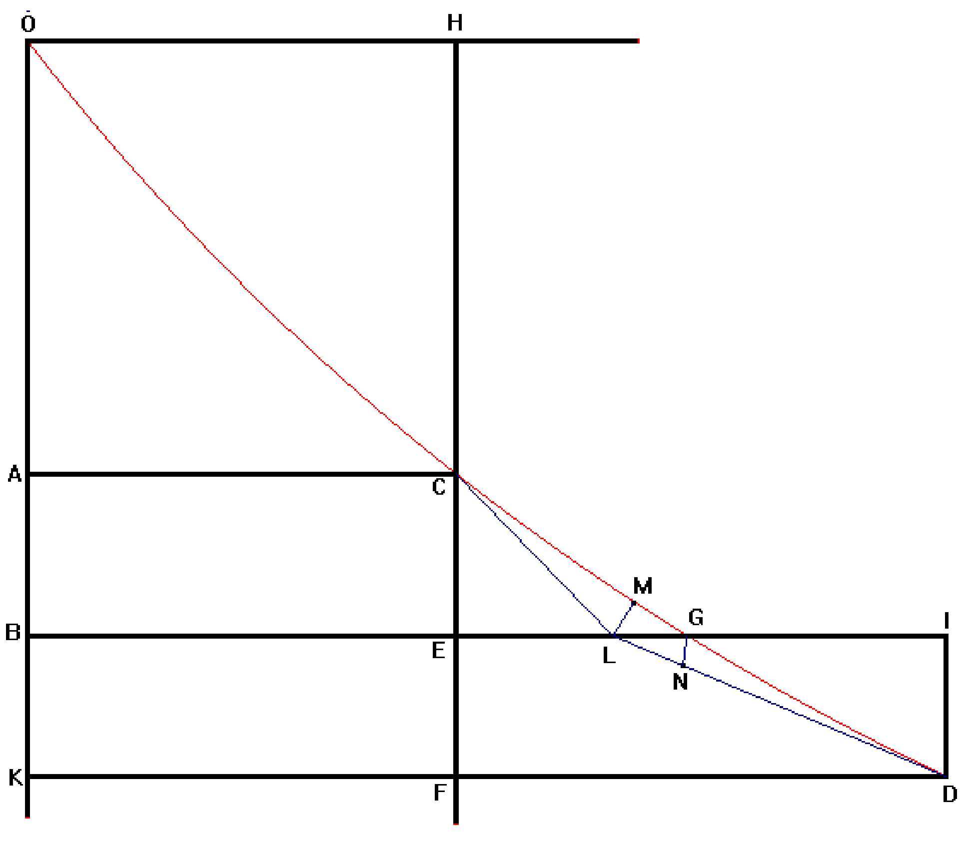
Fonte: Woodhouse (1810, p.3)

A solução publicada foi a de Jacob Bernoulli, em maio de 1697, na *Acta Eruditorum.* Há também uma tradução para o inglês, de autoria de Woodhouse, publicada em 1810, a qual foi utilizada para a elaboração deste trabalho. Os traduções para o português que aqui aparecem são de responsabilidade dos autores

[33] Dados um plano vertical e dois pontos A e B sobre o plano, com A mais alto do que B, e um ponto móvel M, determinar uma curva ao longo da qual uma partícula material desliza no menor tempo possível de A até B, considerando apenas a ação da gravidade, sem atrito. (BARON, 1985)

do presente texto e serão transcritas em itálico. Em seguida, é apresentado a solução proposta por Jacob Bernoulli e apresentados nossos comentários e as análises acerca da demonstração de Bernoulli.

Dada a curva OGD, considere uma porção de CGD, dividida em duas partes CG, GD; e acrescente o elemento para a curva CLD, dividida também em duas partes CL, LD, e indefinidamente próximo de CGD: temos por hipótese, que o tempo completo de CG + GD, é mínimo, e desde que as quantidades ou proximidades de seu estado mínimo podem ser consideradas constantes (para seus incrementos ou decrementos sejam muito pequenos)[34]*, temos*



$$t_{CG} + t_{GD} = t_{CL} + t_{LD}$$

[t_{CG} ,representa o tempo completo de CG][35]

---

[34] Bernoulli utiliza a seguinte notação t.CG, que no texto foi substituído por t_{CG}.
[35] E assim, reciprocamente, para todas as outras representações de tempo.

e

$$\therefore t_{CG} - t_{CL} = t_{LD} - t_{GD}$$

porém

$$CE : CG :: t_{CE} : t_{CG}$$

[considerando CG em um plano inclinado]

e

$$CE : CL :: t_{CE} : t_{CL}$$

consequentemente,

$$CE : CG - CL[MG] :: t_{CE} : t_{CG} - t_{CL}$$

mas

$$MG : LG :: EG : CG$$

[por semelhança dos triângulos LMG, GCE]

$$\therefore CE : LG :: EG\, x\, (t_{CE}) : CG\, x\, (t_{CG} - t_{CL})$$

analogamente

$$EF : LG :: GI\, x\, t_{EF} : GD\, x\, (t_{LD} - t_{GD})$$

Disso, igualando os dois valores de LG, temos

$$\therefore EG\, x\, t_{CE}\ x\ EF\, x\, GD = GI\, x\, t_{EF}\, x\, CE\, x\, CG$$

ou

$$EG\ x\ \frac{CG}{\sqrt{HC}}\ x\ EF\ x\ GD = GI\ x\ \frac{GD}{\sqrt{HE}}\ x\ CE\ x\ CG$$

[substituindo t_{CE}, t_{EF}]

ou

$$\frac{EG}{\sqrt{HC}} : \frac{GI}{\sqrt{HE}} :: CE : EF :: CG : GD \quad [1]$$

como é uma propriedade da ciclóide[36]: conseqüentemente a curva de descida mais rápida, ou braquistócrona, é uma ciclóide.

A proporção [1] pode ser assim expressa como :

$$\frac{EG}{GC} : \frac{GI}{GD} :: \sqrt{HC} : \sqrt{HE}$$

ou

$$sen < ECG : sen < GDI :: \sqrt{HC} : \sqrt{HE} :: vel^y\, em C : vel^y\, em G\,,$$

ou o seno do ângulo formado por um vértice e um elemento da curva é proporcional à velocidade.

Depois dessa apresentação e para compreender melhor as afirmações de Bernoulli, faz-se uma retomada da demonstração com comentários e complementos sobre o trabalho do matemático

$$t_{CG} + t_{GD} = t_{CL} + t_{LD}$$

$$\therefore t_{CG} - t_{CL} = t_{LD} - t_{GD}$$

36 "Isto aparecerá facilmente construindo a figura com seu círculo gerando; ou, a equação sabida da ciclóide pode assim ser deduzida: seja $\frac{EG}{\sqrt{HC \cdot CG}} = \frac{GI}{\sqrt{HE \cdot GD}}$ temos $\frac{dx}{\sqrt{y \cdot dz}} = \frac{dx'}{\sqrt{y' \cdot dz'}}$, e dx', y', dz' são os valores respectivos de dx, y, dz, segue da equação acima, que $\frac{dx}{\sqrt{y \cdot dz}}$ é sempre a mesma, ou é constante, e pode conseqüentemente ser posto $\frac{1}{\sqrt{a}}$. Daqui $adx^2 = y \cdot dx^2 + y \cdot dy^2$ e $dx = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{(a-y)}}dy$, a equação para uma ciclóide". (tradução nossa) (WOODHOUSE, 1810, p.5)

Segue, do Teorema III, Proposição III de Galileu (1935, p. 146) que afirma

> Se sobre um plano inclinado ou segundo uma vertical, tendo ambos a mesma altura, um móvel se movimenta a partir do repouso, os tempos do movimento estarão entre si na mesma proporção dos comprimentos do plano inclinado e da vertical.

Disso tem-se que,

$$\frac{CE}{CG} = \frac{t_{CE}}{t_{CG}}$$

e

$$\frac{CE}{CL} = \frac{t_{CE}}{t_{CL}}$$

Assim temos que CE . t_{CG} = CG. t_{CE} e CE . t_{CL} = CL . t_{CE} , donde se conclui que:

$$CE\ (t_{CG} - t_{CL}) = (CG - CL)\ t_{CE}$$

Em outras palavras:

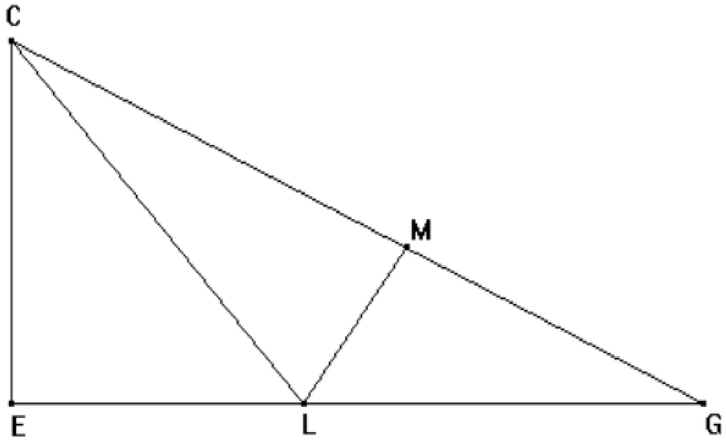
$$\frac{CE}{CG - CL[MG]} = \frac{t_{CE}}{t_{CG} - t_{CL}}$$

Mas

$$\frac{MG}{LG} = \frac{EG}{CG}$$

Para entender essa ultima afirmação pode-se construir um ponto M, tal que $CG - CL = MG$, fazendo-se assim, a comparação entre os triângulos[37] MLG e CEG nos leva a observar que:

[37] Esta demonstração é feita por aproximações e as construções são feitas sobre triângulos "curvos" e, somente assim, as equivalências são válidas.



$$\hat{E} \equiv \hat{M} \equiv 90^0$$
$$\hat{G} \text{ é comum}$$
$$\therefore \hat{C} \equiv \hat{L}$$

$$\begin{cases} MG = EG \\ LM = CE \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \frac{MG}{LM} = \frac{EG}{CE}$$

Desse modo os triângulos MLG e ECG são semelhantes e portanto

$$\frac{MG}{LG} = \frac{EG}{CG}$$

Portanto,

$$\frac{CE}{(CG - CL)} = \frac{t_{CE}}{(t_{CG} - t_{CL})}$$

ou seja,

$$\frac{CE}{MG} = \frac{t_{CE}}{t_{MG}}$$

podendo-se chegar à seguinte demonstração:

$$\frac{CE}{LG} = \frac{MG}{LG} \cdot \frac{CE}{MG}$$

Ainda utilizando o teorema de Galileu sobre planos inclinados tem-se que CE = t_{CE} e, consequentemente, MG = t_{MG}, então

$$\frac{CE}{LG}=\frac{MG}{LG}\cdot\frac{t_{CE}}{t_{MG}}$$

$$\frac{CE}{LG}=\frac{\frac{MG\cdot CG}{LG}}{CG}\cdot\frac{t_{CE}}{t_{MG}}$$

Como MG=CG – CL, então $t_{MG} = t_{CG} - t_{CL}$ e assim

$$\frac{CE}{LG}=\frac{EG}{CG}\cdot\frac{t_{CE}}{(t_{CG}-t_{CL})}$$

E assim Jacob chega aos seguintes resultados

$$\boxed{\therefore \frac{CE}{LG}=\frac{EG\,x\,(t_{CE})}{CG\,x\,(t_{CG}-t_{CL})}} \quad \text{e} \quad \boxed{\frac{EF}{LG}=\frac{GI\,x\,t_{EF}}{GD\,x\,(t_{LD}-t_{GD})}}$$

ele iguala os dois valores de LG, para se obter o seguinte:

$$\begin{cases} LG=\dfrac{CE\,x\,GC\,x\,(t_{CG}-t_{CL})}{EG\,x\,t_{CE}} \\[2ex] LG=\dfrac{EF x\,GD\,x\,(t_{LD}-t_{GD})}{GI\,x\,t_{EF}} \end{cases}$$

$$\frac{CE\,x\,GC\,x\,(t_{CG}-t_{CL})}{EG\,x\,t_{CE}}=\frac{EF x\,GD\,x\,(t_{LD}-t_{GD})}{GI\,x\,t_{EF}}$$

Como Bernoulli constrói, por hipótese, que $t_{CG}-t_{CL}=t_{LD}-t_{GD}$. Tem-se que

$$\boxed{\therefore EG\ x\,t_{CE}\ x\ EF\ x\,GD=GI\ x\,t_{EF}\ x\,CE\ x\,CG}$$

e usando o teorema de Galileu que diz que a velocidade de corpo em queda é igual a raiz quadrada de sua altura

$$HC = \left(\frac{CG}{t_{CE}}\right)^2$$

$$t_{CE}{}^2 = \frac{CG^2}{HC}$$

$$t_{CE} = \frac{CG}{\sqrt{HC}}$$

e analogamente tem-se que

$$HE = \left(\frac{GD}{t_{EF}}\right)^2$$

$$t_{EF}{}^2 = \frac{GD^2}{HE}$$

$$t_{EF} = \frac{GD}{\sqrt{HE}}$$

o que Bernoulli conclui

$$\boxed{EG \;\; x \;\; \frac{CG}{\sqrt{HC}} \;\; x \;\; EF \;\; x \;\; GD = GI \;\; x \;\; \frac{GD}{\sqrt{HE}} \;\; x \;\; CE \;\; x \;\; CG}$$

simplificando

$$\cancel{CG} \;\; x \;\; \frac{EG}{\sqrt{HC}} \;\; x \;\; EF \;\; x \;\; \cancel{GD} = \cancel{GD} \;\; x \;\; \frac{GI}{\sqrt{HE}} \;\; x \;\; CE \;\; x \;\; \cancel{CG}$$

tem-se

$$\frac{EG}{\sqrt{HC}} \;\; x \;\; EF = \frac{GI}{\sqrt{HE}} \;\; x \;\; CE$$

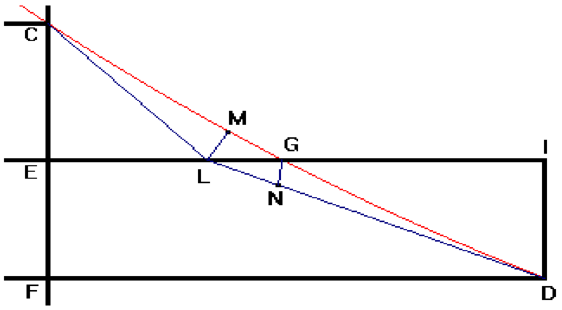
e assim,

$$\frac{\frac{EG}{\sqrt{HC}}}{\frac{GI}{\sqrt{HE}}} = \frac{CE}{EF}$$

logo

$$\frac{EG}{GI} \, x \, \frac{\sqrt{HE}}{\sqrt{HC}} = \frac{CE}{EF}$$

Através do teorema de Tales, pode-se fazer a seguinte relação: Sejam EG e FD retas paralelas e CD e CF retas transversais a elas, podemos afirmar que



$$\frac{CE}{EF} = \frac{CG}{GD}$$

Com essa demonstração pode-se chegar aos resultado de Jacob

$$\boxed{\frac{EG}{GI} \, x \, \frac{\sqrt{HE}}{\sqrt{HC}} = \frac{CE}{EF} = \frac{CG}{GD}}$$

onde se pode afirmar que

$$\frac{EG}{GI} \, x \, \frac{\sqrt{HE}}{\sqrt{HC}} = \frac{CG}{GD}$$

e

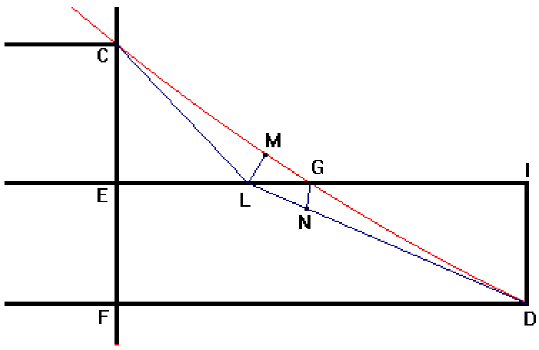
$$\frac{\frac{EG}{GI}}{\frac{CG}{GD}} = \frac{\sqrt{HC}}{\sqrt{HE}}$$

assim

$$\frac{EG}{GI} x \frac{CG}{GD} = \frac{\sqrt{HC}}{\sqrt{HE}}$$

Logo chega-se ao resultado encontrado por Bernoulli de que

$$\boxed{\frac{EG}{CD} : \frac{GI}{GD} = \frac{\sqrt{HC}}{\sqrt{HE}}}$$



considerando os triângulos retângulos ECG e GDI, pode-se afirmar a seguinte relação

$$\frac{EG}{CG} = \frac{cateto\ oposto\ a\ C}{hipotenusa\ CG},$$

pode-se afirmar então que é seno do ângulo C, analogamente para o seno do ângulo D, assim sendo

$$\frac{\frac{EG}{CG}}{\frac{GI}{GD}} = \frac{sen C}{sen D} = \frac{\sqrt{HC}}{\sqrt{HE}}$$

e retomando o conceito de Galileu de que a velocidade de um corpo em queda livre é igual a raiz quadrada da sua altura, Bernoulli finaliza sua demonstração

$$\boxed{\frac{sen < ECG}{sen < GDI} = \frac{\sqrt{HC}}{\sqrt{HE}} = \frac{vel^{y}\ em\ C}{vel^{y}\ em\ G}}$$

Assim Bernoulli conclui sua demonstração, que futuramente veio trazer grandes contribuições ao desenvolvimento do cálculo, mais tarde conhecido como Cálculo de Variações.

Christiaan Huygens (1629 – 1695)

Fonte: The MacTutor History of Mathematics archive[38]

[38] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk

3- CHRISTIAAN HUYGENS e o ISOCRONISMO DO PÊNDULO

Christiaan Huygens nasceu em Haia, na Holanda, em 14 de abril de 1629. Segundo filho do grande poeta alemão e diplomata Constantin Huygens[39], foi instruído até os 16 anos por professores particulares, com os quais aprendeu geometria, a fazer modelos mecânicos e habilidades sociais. Sua instrução matemática foi influenciada por Descartes que era um visitante ocasional na casa dos Huygens. Ainda jovem, foi levado ao conhecimento erudito e rapidamente distinguiu sua própria matemática e astronomia observacional (O'CONNOR e ROBERTSON, 2007).

Christiaan Huygens estudou Direito e Matemática na Universidade de Leiden de 1645 até 1647. Frans Van Schooten[40], foi seu professor em Leiden. De 1647 até 1649 estudou no *College Orange* em Breda. Através do contato de seu pai com Mersenne, uma correspondência entre Christiaan e Mersenne começou nessa época. Mersenne o desafiou a resolver inúmeros problemas[41].

Em 1654, junto com seu irmão Constantin, descobriu uma nova forma de polir lentes que contribuiu para seus estudos sobre os anéis de Saturno (EVES, 1997). Seus primeiros empreendimentos incluindo estudos tradicionais na matemática foram uma aproximação de *pi*, a primeira edição do tratado de probabilidade, a

[39] **Constantin Huygens** fez com que o filho tivesse acesso aos círculos científicos da época. Teve muitos contatos na Inglaterra, correspondeu-se regularmente com Mersenne e foi amigo de Descartes. (O'CONNOR e ROBERTSON, 2007).

[40] **Frans Van Schooten** nasceu em Leiden, em 1615 e faleceu em 29 de maio de 1660, na mesma cidade (BOYER, 1996).

[41] **Chistiaan Huygens** em suas primeiras publicações, a de 1651, o *Cyclometriae*, mostrou o erro nos métodos propostos por Gregory de Saint-Vincent, que tinha reivindicado ter feito a quadratura do círculo, e a de 1654, *De Circuli Magnitudine* Inventa, abordava temas similares.

descoberta de uma lua de Saturno (Titan), a correta explanação da variação do contorno de Saturno (sua hipótese circular) e um tratado de mecânica de impacto não publicado. Cientista renomado, estudou e publicou sua teoria ondulatória da luz. (YODER, 2004). Em 1655, foi pela primeira vez a Paris e lá, informou aos matemáticos a respeito de suas descobertas e, por sua vez, conheceu um trabalho sobre probabilidade, através de uma correspondência entre Pascal e Fermat. Em seu retorno a Holanda, Huygens escreveu o *De Ratiociniis in Ludo Aleae* sobre cálculo de probabilidades sendo este o primeiro impresso sobre assunto.

No ano seguinte descobriu a forma verdadeira dos anéis de Saturno e os resultados foram relatados ao grupo de Paris. Em *Systema Saturnium,* de 1659 explicou as fases e as mudanças na forma do anel. O trabalho em astronomia o levou a inventar o relógio de pêndulo, para obter meios mais precisos de medir o tempo e em 1656 patenteou o primeiro relógio de pêndulo, que aumentou extremamente a exatidão dessa medida (EVES, 1997).

Huygens tinha conhecimento de que as oscilações simples não são isócronas, provavelmente pelos trabalhos de Galileu (BOYER, 1996). Usou infinitesimais para descobrir, e geometria para provar, que a curva ao longo da qual um objeto desce, sem a influência da gravidade, leva o mesmo tempo para alcançar o ponto mais baixo, independente do ponto em que se inicia a trajetória, é uma ciclóide (KATZ, 1998).

Huygens percebeu que o pêndulo obtém um movimento num arco cicloidal e que descrevia o tempo perfeitamente, para qualquer comprimento da oscilação (KATZ, 1998). Essa descoberta foi importante para determinar que a involuta[42] de uma ciclóide é uma ciclóide ou inversamente, que a evoluta[43] de uma ciclóide é uma ciclóide (BOYER, 1996).

Seu trabalho sobre o pêndulo está relacionado a um outro trabalho matemático

---

42 **Involuta**: curva traçada pelo ponto de extremidades de um fio quando este, mantido tenso, é desenrolado de um carretel fixo.

43 A **evoluta** de uma curva é o envelope das normais da curva. Ela pode ainda ser pensada como o locus (lugar geométricos) dos centros de curvatura

que fez sobre ciclóide em conseqüência do desafio proposto por Pascal[44] (EVES, 1997). Huygens acreditou que um pêndulo longo seria mais útil no mar e inventou o pêndulo cicloidal (1673). Construiu diversos relógios de pêndulo para determinar a longitude no mar, fazendo experimentações no mar em 1662 e em 1686. No seu trabalho *Horologium Oscillatorium sive de motu pendulorum,* publicado em 1673, descreveu a teoria do movimento do pêndulo e também a lei da força centrífuga para o movimento circular uniforme[45]. (O'CONNOR e ROBERTSON, 2007).

Embora seja conhecido, principalmente, como um dos grandes físicos de seu tempo, particularmente em relação ao estudo do pêndulo, à invenção do relógio de pêndulo e às leis de quedas de corpos, Huygens foi importante no progresso da geometria e mostrou a importância do cálculo. O *Horologium Oscillatorium,* além do pêndulo, prova que a ciclóide é tautócrona e resolve também o problema do pêndulo composto. Nessa mesma publicação descreve a descida dos corpos em um vácuo, verticalmente ou ao longo das curvas.

Define evolutas e involutas das curvas, e após ter dado algumas propriedades elementares, encontra as evolutas do ciclóide e da parábola. Nesse trabalho tenta pela primeira vez estudar a dinâmica dos corpos melhor que partículas (O'CONNOR e ROBERTSON, 2007).

Ele também retificou a cissóide[46], investigou a forma e as propriedades da catenária[47], escreveu sobre a curva logarítmica, deu uma nova regra para encontrar máximos e mínimos da função integral e contribuiu extensamente para a aplicação da Matemática na Física (SMITH, 1958)

---

[44] **Blaise Pascal, n**asceu em 19 junho 1623, em *Clermont, Auvergne*, França. foi matemático e filósofo muito influente, fez várias contribuições em diversas áreas da Matemática. Trabalhou em seções cónicas e na geometria projetiva e na correspondência com Fermat discutiu sobra a teoria da probabilidade. Faleceu em 19 agosto 1662 em Paris.

[45] Em conseqüência deste trabalho de Huygens, Hooke, Halley e Wren formularam a lei do inverso-quadrado (*inverse-square*) da atração gravitacional.

[46] Esta curva foi inventada por Diocles em aproximadamente 180 a.C. em relação a sua tentativa de duplicar o cubo por métodos geométricos. O nome parece primeiramente no trabalho de Geminus aproximadamente 100 anos mais tarde. Fermat e Roberval construíram sua tangente em 1634. Huygens e Wallis encontraram, em 1658, que a área entre a curva e sua assintota era $3\pi a^2$. De um ponto dado há uma ou três tangentes ao cissóide. cissóide em grego significa: *Kissós* (hera) *eidos* (forma). (O'CONNOR e ROBERTSON, 2007)

[47] **Catenária** descreve uma família de curvas planas semelhantes às que seriam geradas por uma corda suspensa pelas suas extremidades e sujeitas à ação da gravidade.

Christiaan Huygens faleceu em Haia, no dia 8 de julho de 1695.

Membros da Sociedade Holandesa de Ciências (SHC) propuseram em 1882, eternizar a memória de Huygens, em uma homenagem pública, erguendo-lhe uma estátua e ao mesmo tempo prestar um serviço à Ciência fazendo uma nova edição das suas obras, publicando seus escritos, bem como sua correspondência. Tal homenagem foi editada em 22 tomos, datados de 1889 a 1950. Os 10 primeiros são somente de cartas trocadas por Huygens com diversos eruditos, depois 11 tomos tratam de suas obras matemáticas, entre outros temas como Física, Astronomia e Música e o último é uma biografia de Huygens, contendo também seu testamento[48].

No tomo I há uma introdução, assinada pelos Diretores da Sociedade Holandesa de Ciências, descrevendo os objetivos de tal publicação. Assim, esclarecem que Huygens, em testamento, deixou seus escritos matemáticos, tratados inéditos, observações, notas e cálculos, bem como a sua correspondência com diversos cientistas para a Biblioteca de Leiden, desejando que os professores de Volder (de Leiden) e Fullenius (de Franeker), estudassem e publicassem os manuscritos que julgassem estar corretos

[48] O **testamento** encontra-se na íntegra no anexo 5.

ŒUVRES COMPLÈTES

DE

CHRISTIAAN HUYGENS

PUBLIÉES PAR LA

SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES.

Fonte: Tomo XVI[49]

[49] No tomo XVI encontram-se o problema proposto por Huygens e sua solução que foram publicados pela Sociedade Holandesa de Ciências (Anexo 4).

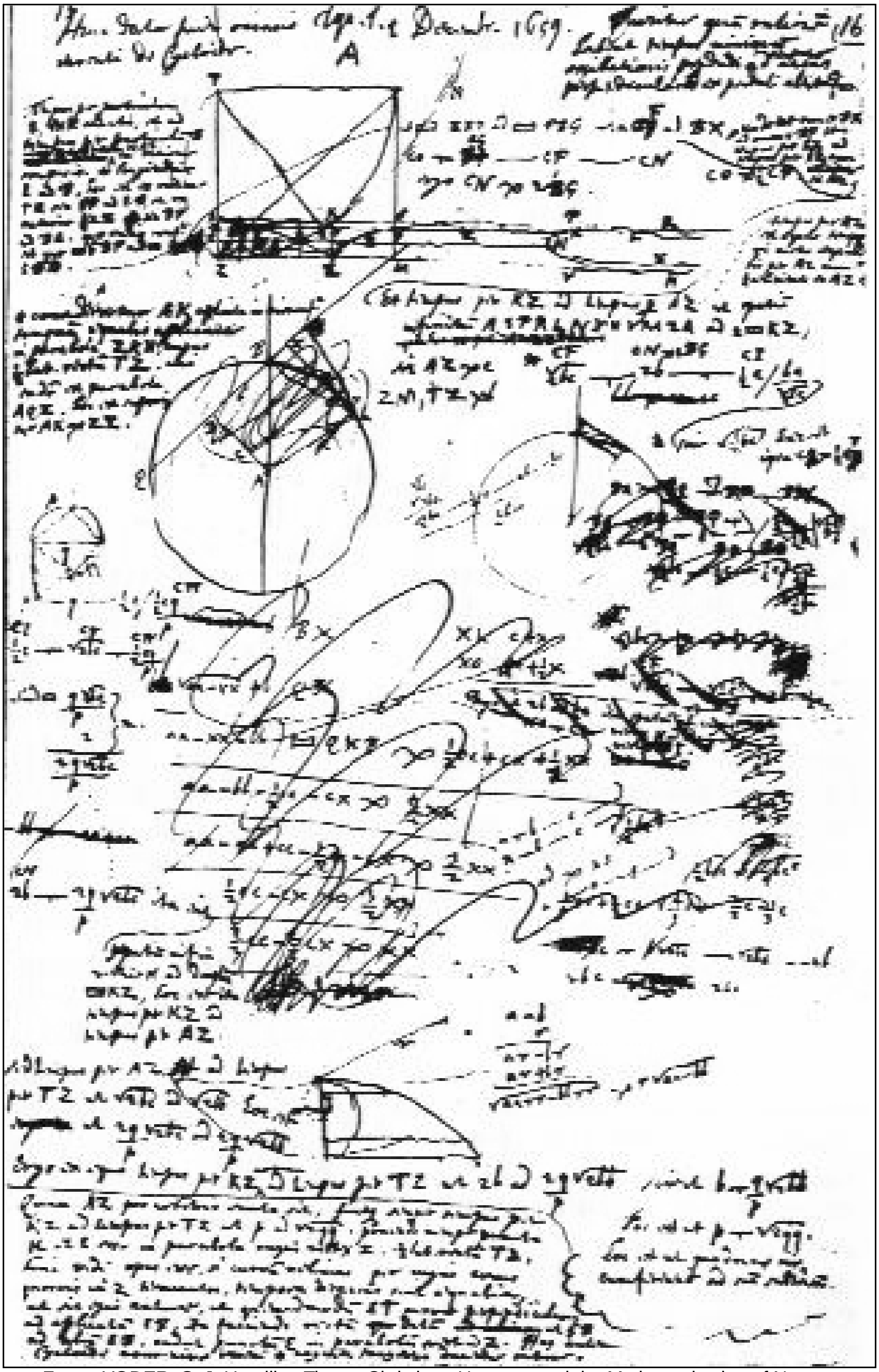
O Problema do Isocronismo do Pêndulo

No século XVII a medição do tempo era de extrema importância para a navegação devido à necessidade de determinar de modo preciso as longitudes, durante as viagens (BURROWES e FARINA, 2005). Nessa época os governantes de vários países europeus ofereciam excelente remuneração por esses estudos.

O estudo do pêndulo, como ferramenta para medição do tempo inicia-se com Galileu, que percebeu que o pêndulo simples é não isócrono e por essa razão a posição na qual o pêndulo é "solto" é importante para a determinação do tempo de oscilação do pêndulo. Assim, considerando um arco mínimo de oscilação, por meio do qual o círculo é aproximadamente uma isócrona, Huygens teve possibilidade de determinar uma relação entre a queda livre independente do comprimento do arco.

> Além disso, com seu contumaz talento como geômetra, foi capaz de estender sua solução para a ciclóide, sem a restrição para uma mínima oscilação, e o resultado para sua nova investigação foi sua descoberta do isocronismo da ciclóide (YODER, 1998, p.50, tradução nossa).

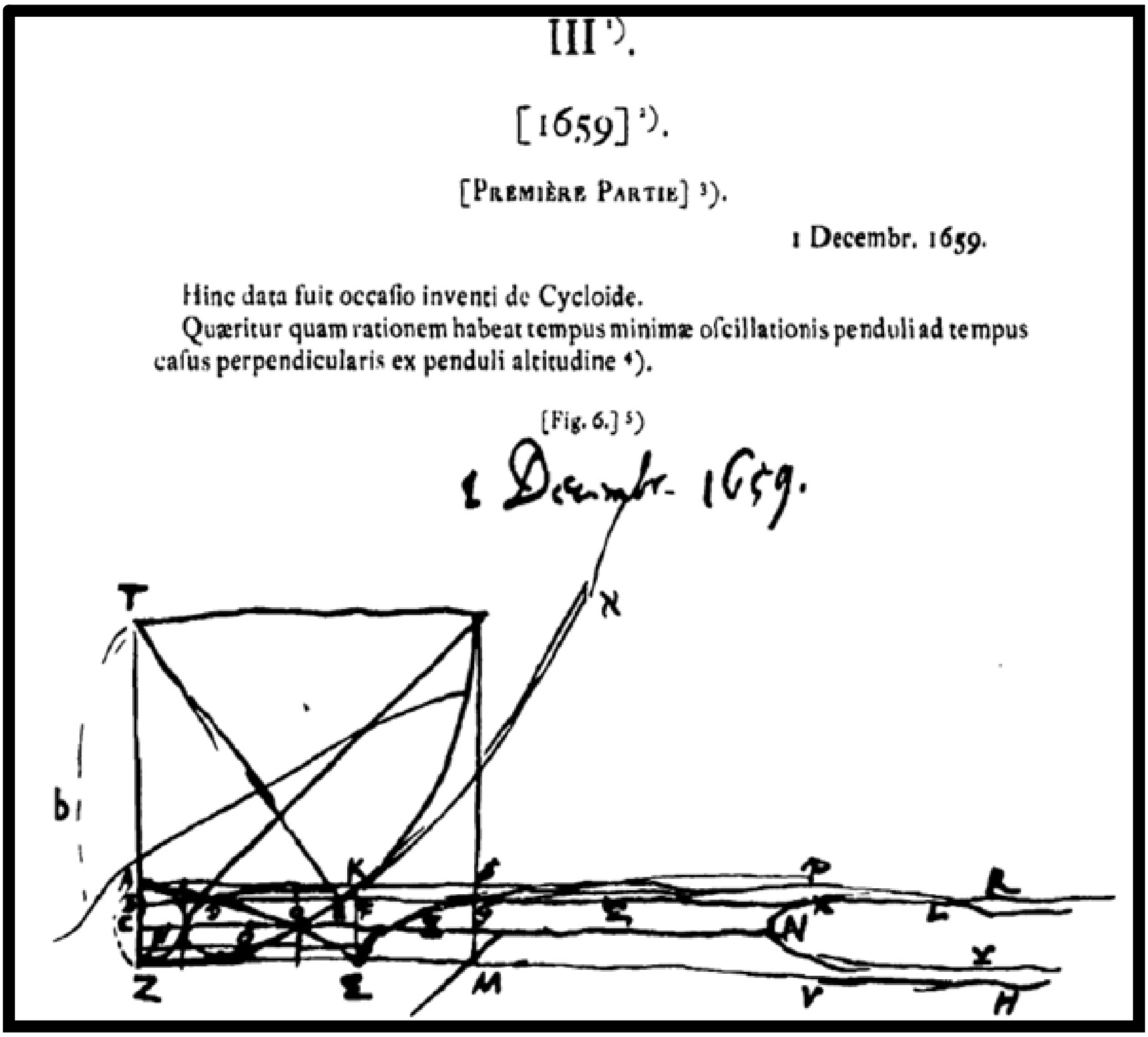
Segundo Yoder (1998), em 1º de dezembro de 1659, Huygens propôs a si mesmo um problema sobre o isocronismo do pêndulo. Ele confiou que o resolveria imediatamente e escreveu a questão nos cantos de uma página já desordenada com outro trabalho e com um pequeno espaço para um extensivo cálculo. (Veja figura a seguir)



Fonte: YODER, G. J. Unrolling Time – Christiaan Huygens and the Mathematization of Nature. Cambrigde: Cambrigde University Press, 1988. p. 49

O problema proposto por Huygens é o segunte:

"Quaeritur quam rationem habeat tempus minimae oscillationis penduli ad tempus casus pendularis ex penduli altitudine". [50]



III [1]).

[1659] [2]).

[PREMIÈRE PARTIE] [3]).

1 Decembr. 1659.

Hinc data fuit occasio inventi de Cycloide.

Quæritur quam rationem habeat tempus minimæ oscillationis penduli ad tempus casus perpendicularis ex penduli altitudine [4]).

[Fig. 6.] [5])

Ilustração 1[51] – Fonte: Tomo XVI

No tomo XVI, membros da SHC fizeram anotações e são nelas que esta parte do trabalho se pauta. Não terá como na primeira parte uma tradução do original em

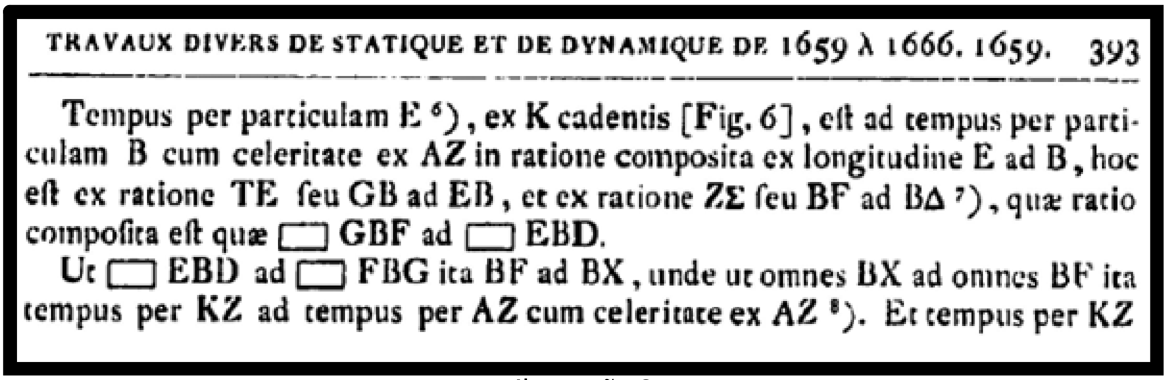
---

[50] Qual a razão entre o tempo de uma oscilação mínima de um pêndulo e o tempo da queda livre perpendicular à altura do pêndulo.(tradução nossa)

[51] Esta ilustração e todas as que aparecem nesse capítulo são do Tomo XVI, publicado pela Sociedade Holandesa de Ciências, 1929.

latim, uma tradução e interpretação dos cálculos e conclusões da comissão responsável por esta publicação.

Esse problema proposto por Huygens, considera o período de oscilação de acordo com uma *particulam*[52] de arco de círculo que conduziu às investigações das quais saiu a descoberta do tautocronismo[53] da queda de acordo com arcos cicloidais.



TRAVAUX DIVERS DE STATIQUE ET DE DYNAMIQUE DE 1659 À 1666. 1659. 393

Tempus per particulam E [6]), ex K cadentis [Fig. 6], eſt ad tempus per particulam B cum celeritate ex AZ in ratione compoſita ex longitudine E ad B, hoc eſt ex ratione TE ſeu GB ad EB, et ex ratione ZΣ ſeu BF ad BΔ [7]), quæ ratio compoſita eſt quæ □ GBF ad □ EBD.
Ut □ EBD ad □ FBG ita BF ad BX, unde ut omnes BX ad omnes BF ita tempus per KZ ad tempus per AZ cum celeritate ex AZ [8]). Et tempus per KZ

Ilustração 2

Huygens inicia sua demonstração fazendo algumas construções, explicadas nos comentários da Sociedade Holandesa de Ciências. Ele considera um ponto T, como sendo o centro de um quarto de circunferência de raio TZ, um ponto K qualquer, onde o arco KZ da circunferência coincide com o arco KZ de uma parábola. Os dois arcos interceptam-se em K. KZא com extremo em Z e intercepta o ***"latus rectum"***[54] TZ. Constrói QΣ̣ de tal forma, que é uma parábola congruente a parábola KZא̣ tendo como extremo o ponto Ạ.

[52] **Partículam** neste trabalho será considerado como parte ínfima ou infinitesimal.

[53] Segundo a Sociedade Holandesa de Ciências, esse problema trata do tautocronismo da ciclóide que se encontra nas páginas 72-74 da obra "Chartæ Mechanicæ" (a numeração das folhas desta obra data de 1928) e as páginas 187-188 do Manuscrito A. (Tomo XVI, p. 396, tradução nossa)

[54] ***Latus rectum*** foi traduzido aqui como lado ortogonal TZ em relação à ZM.

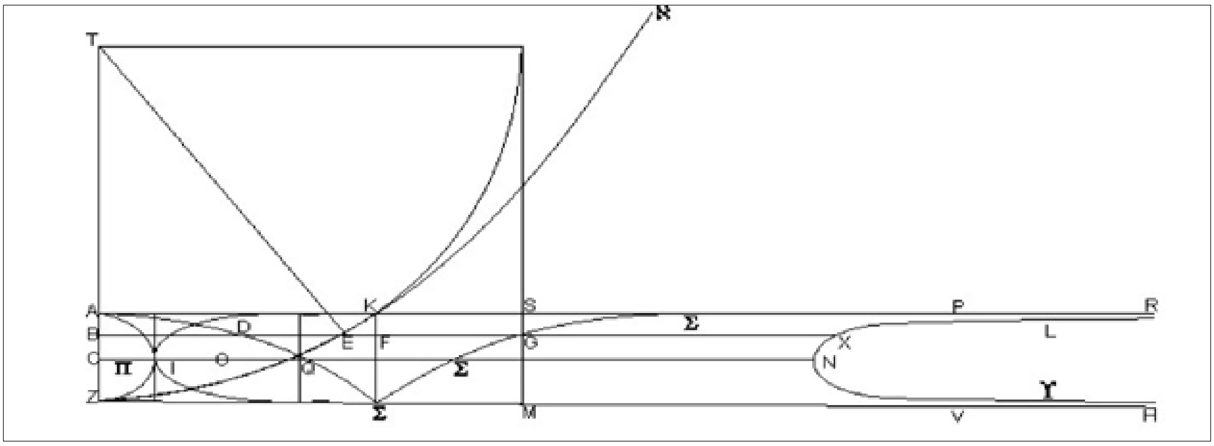


Figura 1

Sendo assim, **E** é uma parte ínfima pertencente ao arco **KZ** e **B** é a projeção ortogonal na reta **AZ**. Huygens, então, compara o tempo de queda (**t_1)** ao longo de **E,** quando o móvel parte de **K** com uma velocidade nula e sob efeito da aceleração da gravidade, com o tempo (**t_2)** correspondente a um movimento uniforme de queda ~~de~~ ao longo de **B** com velocidade igual a que o móvel teria em **Z,** ao partir em queda livre de **A** com velocidade nula, sob a ação da força de gravidade. Esta última velocidade será denotada por **v_z**. (fig. 2)

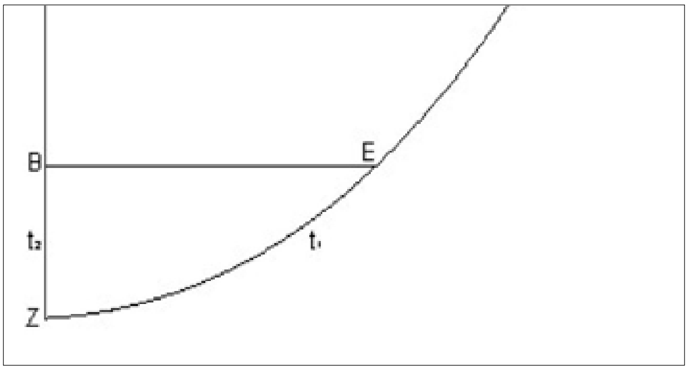


Figura 2

Considerando a ordenada BX medindo o tempo t_1, tal que F é uma projeção ortogonal do ponto K na reta BX. (Fig. 3), temos a seguinte razão:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{BX}{BF}$$

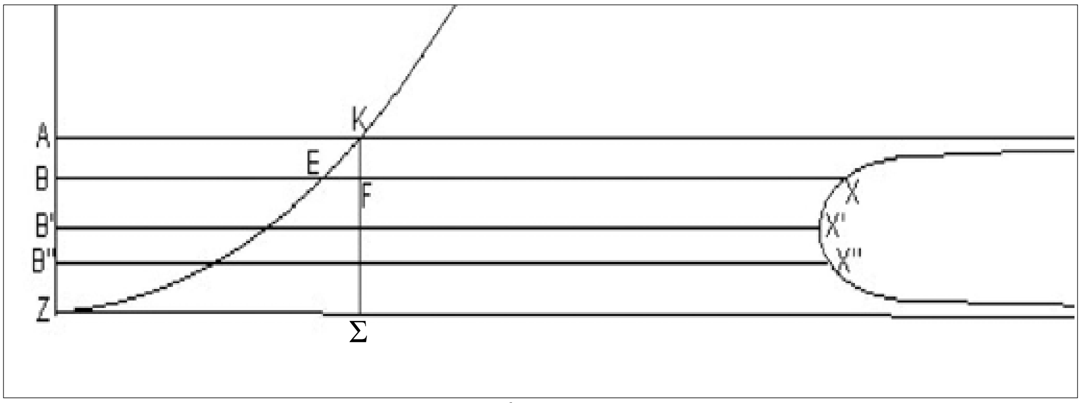


Figura 3

O tempo de queda através do arco KZ é considerado como a soma de todos os tempos t_1, isso corresponde à superfície ASPR ... NY ... HVZA (Fig. 4), considerada como a soma de todas as ordenadas BX

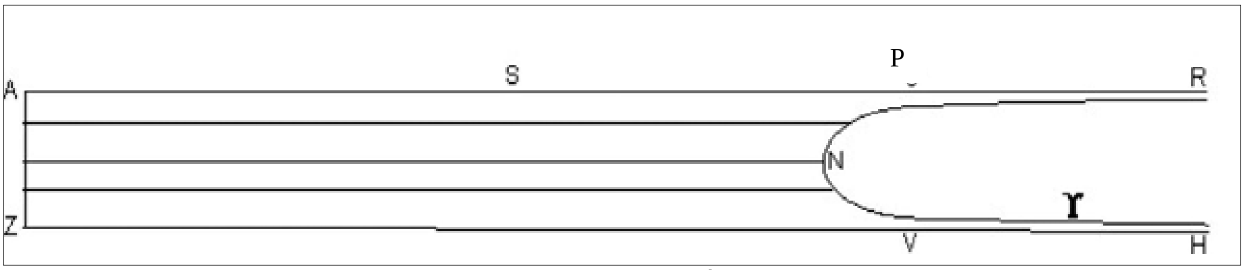


Figura 4 – superfície

Portanto,

$$\frac{tempo\ de\ queda\ KZ}{t_2\,(v_z)} = \frac{\sum BX}{BF} \quad \mathbf{(1)}$$

$$\frac{tempo\ de\ queda\ AZ\ (v_z)}{t_2\,(v_2)} = \frac{\sum BF}{BF} \quad \mathbf{(2)}$$

fazendo a razão entre (1) e (2), tem-se[55]

$$\frac{tempo\ de\ queda\ KZ}{tempo\ de\ queda\ AZ(v_z)} = \frac{\sum BX}{\sum BF} = \frac{ASPR...NY...HVZA}{[\ ]KZ} \qquad ^{56}$$

[55] v_z significa o tempo de percurso de um elemento determinado B com velocidade v_z.

[56] [ ] KZ significa o retângulo AKΣZ

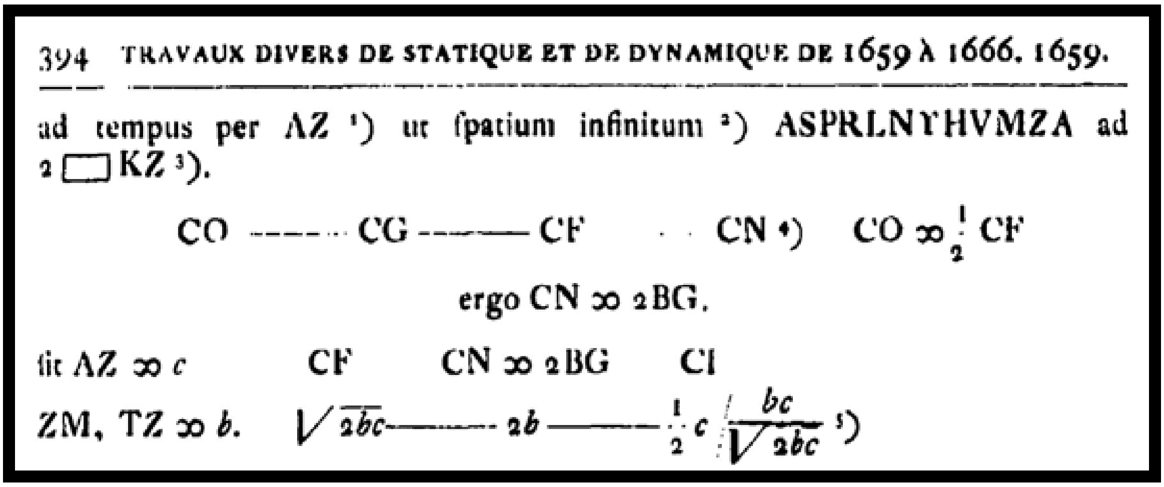
Huygens utilizando o Teorema da Velocidade Média, de Galileu, que reza que "o tempo de queda AZ de um corpo em movimento com velocidade uniforme é a metade do tempo da queda AZ com aceleração gravitacional", concluí que

$$\frac{tempo\ de\ queda\ AZ\,(v_z)}{tempo\ de\ queda\ AZ\ de\ um\ corpo\ partindo\ de\ A} = \frac{1}{2}\left(\frac{ASPR...NY...HVZA}{[\ ]KZ}\right)$$

$$2\,[tempo\ de\ queda\ AZ\,(v_z)] = [tempo\ de\ queda\ AZ\ de\ um\ corpo\ partindo\ de\ A]$$

Que é a afirmação que Huygens faz no final da página 393 e inicio da 394 de seu trabalho: *Et tempus per KZ ad tempus per AZ ut spatium infinitum ASPRLNYHVMZA ad 2 [ ] KZ,* ou seja[57]

$$\frac{tKZ}{tAZ} = \frac{ASPR...NY...HVZA}{2\,[\ ]KZ}$$


394 TRAVAUX DIVERS DE STATIQUE ET DE DYNAMIQUE DE 1659 À 1666. 1659.

ad tempus per AZ ¹) ut ſpatium infinitum ²) ASPRLNYHVMZA ad 2 □ KZ ³).

$$CO \text{ ---- } CG \text{ ---- } CF \quad\cdot\ \cdot\quad CN\ ^{4)} \qquad CO \propto \tfrac{1}{2}\, CF$$

ergo $CN \propto 2BG$.

ſit $AZ \propto c$ $\qquad CF \qquad CN \propto 2BG \qquad CI$

ZM, $TZ \propto b$. $\qquad \sqrt{2bc} \text{ ---- } 2b \text{ ---- } \tfrac{1}{2}c \quad \dfrac{bc}{\sqrt{2bc}}\ ^{5)}$

Ilustração 3 - parte da superior da p.394

Considerando F e G pontos de intersecção da reta CN com as KΣ e SM, respectivamente[58]. A definição de BX, aplicada no ponto C, muito próximo de B, tem-se que:

$$\frac{CQ.CQ}{CF.CG} = \frac{CF}{CN}$$

[57] SE TZ = b; AZ = c então CN = 2 TZ , ou seja, CN = 2b

[58] F e G são utilizados tanto para a reta B quanto para a C (na horizontal).

$$\frac{CQ^2}{CG} = \frac{CF^2}{CN}$$

Ou

$$CQ^2 = \frac{1}{2} K \Sigma^2 = \frac{1}{2} CF^2$$

Sendo assim,

$$CQ^2 = \frac{1}{2} CF^2 \Rightarrow 2CQ^2 = CF^2$$

E como

$$\frac{CQ^2}{CF.CG} = \frac{CF}{CN}$$

Tem-se

$$\frac{CQ^2}{CG} = \frac{CF^2}{CN} \Rightarrow \frac{CQ^2}{CG} = \frac{2CQ^2}{CN}$$

onde se conclui que

$$CN = 2CG$$

A partir daí, Huygens constrói uma reta CO como a terceira proporcional à CF e à CQ, ou seja CO é tal que

$$\frac{CF}{CQ} = \frac{CQ}{CO}$$

ou

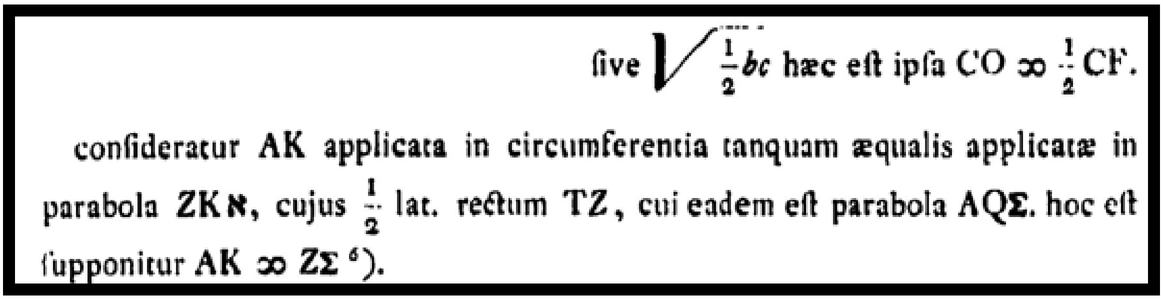
$$CO.CF = CQ^2$$

como

$$\frac{CQ^2}{CF^2} = \frac{1}{2},$$

obtemos

$$CO = \frac{1}{2} CF,$$



ſive $\sqrt{\frac{1}{2}bc}$ hæc eſt ipſa CO ∞ $\frac{1}{2}$ CF.

conſideratur AK applicata in circumferentia tanquam æqualis applicatæ in parabola ZKℵ, cujus $\frac{1}{2}$ lat. rectum TZ, cui eadem eſt parabola AQΣ. hoc eſt ſupponitur AK ∞ ZΣ [6]).

Ilustração 4 – parte central da p.394

Verifica-se, então, no original acima, que Huygens retoma a suposição de que a circunferência de raio TZ tangencia a parábola ZKℵ no ponto Z.

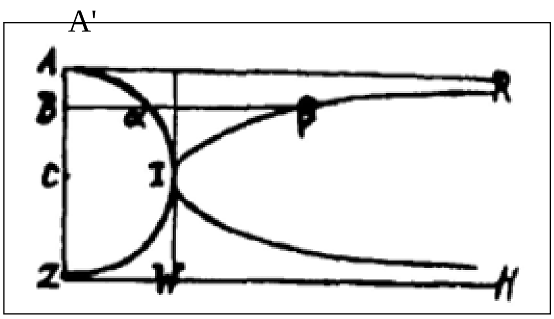


Ilustração 5

Huygens constrói uma ordenada Bα qualquer da semicircunferência AIZ, determinando Bβ de tal modo que

$$\frac{B\alpha}{CI} = \frac{CI}{B\beta}$$

A proposição citada afirma que a superfície compreendida entre a curva assim construída, as assíntotas AR, ZH e a reta AZ está para aquela do retângulo AW numa razão igual àquela da semicircunferência p para o diâmetro q.

Chamando esta superfície de O_2 e o espaço infinito AR...N...HZA de superfície, considerado anteriormente, O_1, temos que

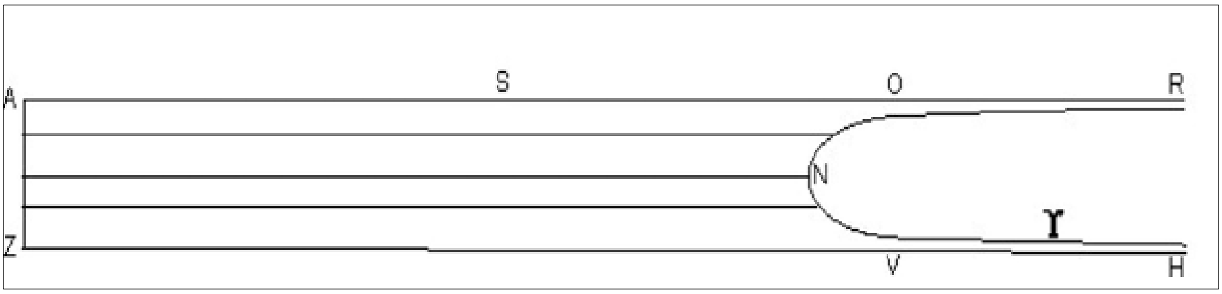


Figura 6

$$\frac{\textit{tempo de queda KZ}}{\textit{percurso AZ de um móvel partindo de A}} = \frac{O_1}{2[\ ]KZ}$$

E, de acordo com a proposição anteriormente citada

$$\frac{O_2}{[\ ]AW} = \frac{p}{q}$$

Temos também que

$$\frac{O_1}{2[\ ]KZ} = \frac{O_1}{O_2} \cdot \frac{O_2}{[\ ]AW} \cdot \frac{[\ ]AW}{2[\ ]KZ}$$

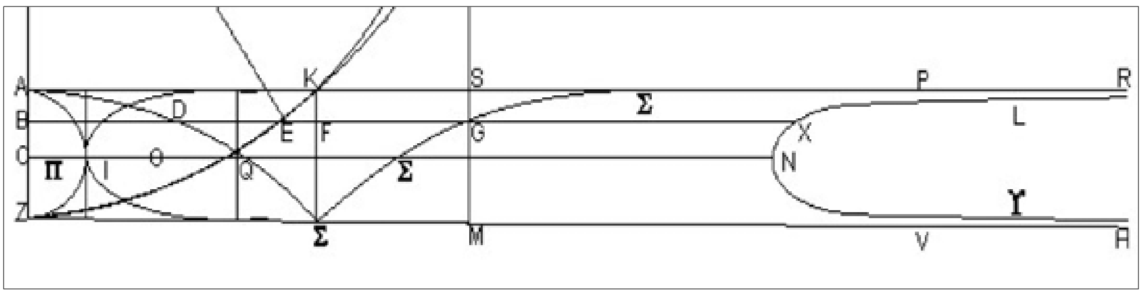


Figura 6

Pode-se notar que as ordenadas correpondentes BX e Bβ estão a uma razão constante igual àquela das superfícies O_1 e O2, tem-se a relação

$$\frac{BE.BD}{CQ^2} = \frac{B\alpha}{CI}$$

Substituindo-se o valor obtido de BE.BD da expressão acima em BX teremos

$$BX = \frac{BF^2.BG}{BE.BD} = \frac{BF^2.BG.CI}{CQ^2.B\alpha}$$

Como

$$B\beta = \frac{CI^2}{B\alpha}$$

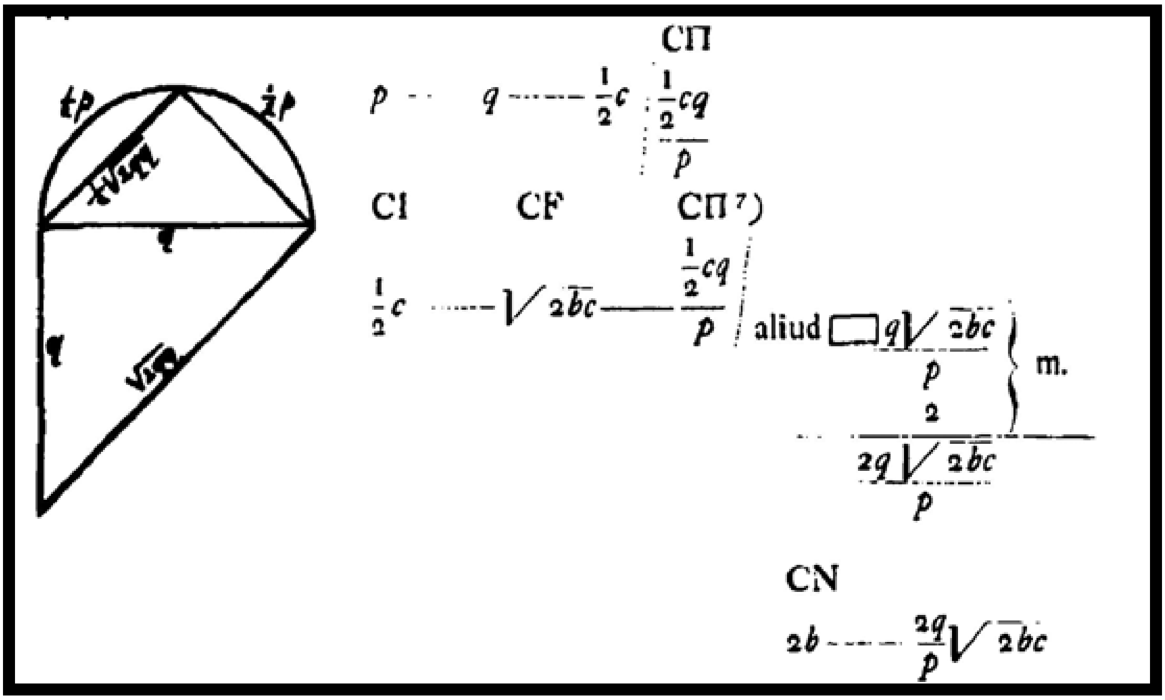


Ilustração 6 – ultima parte da p.394

Então na razão $\frac{BX}{B\beta}$, a única grandeza variável Bα desaparece. Para determinar essa razão constante, toma-se o ponto B em C, o que resulta em:

$$\frac{O_1}{O_2} = \frac{CN}{CI}$$

A equação

$$\frac{O_1}{2[\ ]KZ} = \frac{O_1}{O_2} \cdot \frac{O_2}{[\ ]AW} \cdot \frac{[\ ]AW}{2[\ ]KZ}$$

Resulta em

$$\frac{\mathrm{O_1}}{2[\ ]\mathrm{KZ}} \cdot \frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{CI}} \cdot \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}} \cdot \frac{\mathrm{CI}}{2\,\mathrm{AK}} = \frac{\mathrm{CN.p}}{\mathrm{q.2\,AK}}$$

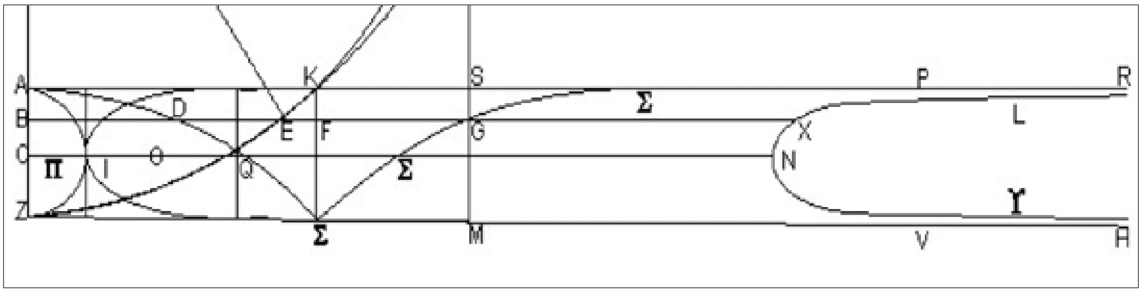


Figura 6

Considerando entre as ordenadas BX e Bβ uma razão constante igual a das superfícies O_1 e O_2, tem-se a relação

$$\frac{BE.BD}{CQ^2} = \frac{B\alpha}{CI}$$

Multiplicando por BF^2 e BG, tem-se

$$\frac{BF^2.BE.BD}{CQ^2} = \frac{BF^2.B\alpha}{CI}$$

$$\frac{BF^2.BG.BE.BD}{CQ^2} = \frac{BF^2.BG.B\alpha}{CI}$$

De tal forma que BX seja

$$BX = \frac{BF^2 . BG}{BE . BD} = \frac{BF^2 . BG . CI}{CQ^2 . B\alpha}$$

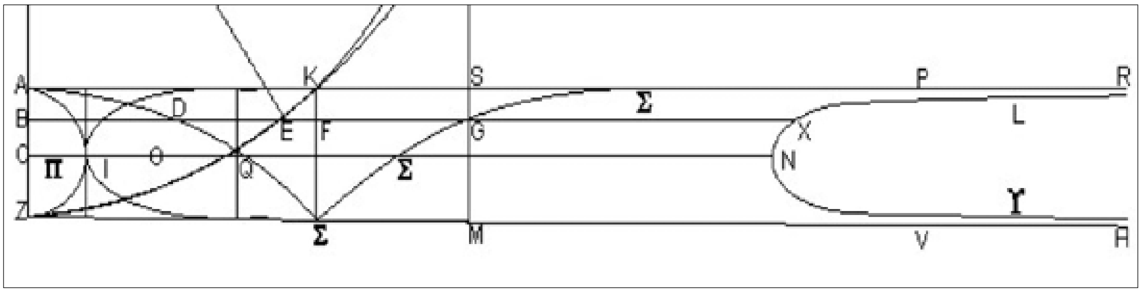


figura 6

E assim, concluir que

$$B\beta = \frac{CI^2}{B\alpha}$$

$$\frac{BX}{B\beta} = \frac{\dfrac{BF^2 . BG . CI}{CQ^2 . B\alpha}}{\dfrac{CI^2}{B\alpha}}$$

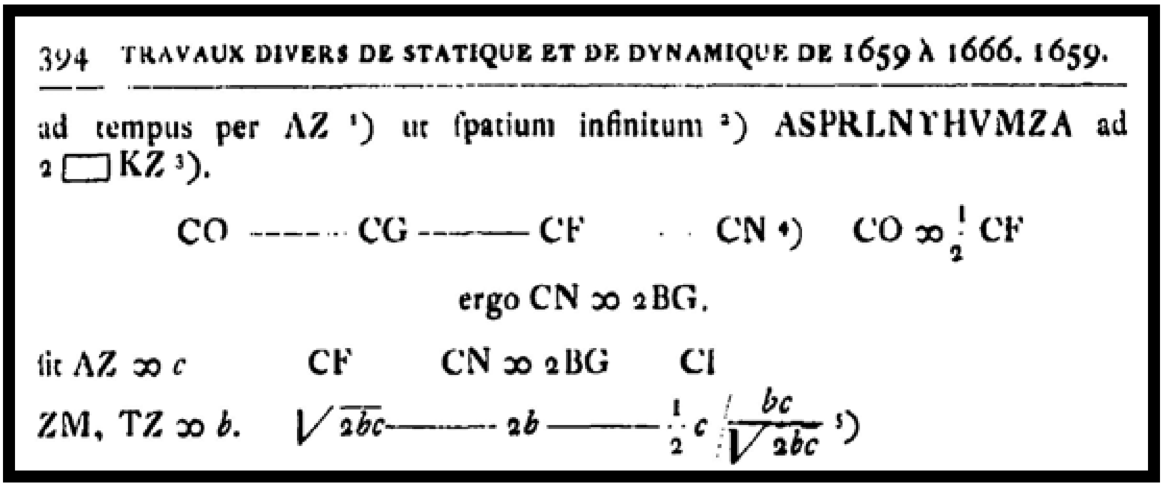
$$\frac{BX}{B\beta} = \frac{BF^2 . BG . CI}{CQ^2 . B\alpha} . \frac{B\alpha}{CI^2}$$

$$\frac{BX}{B\beta} = \frac{BF^2 . BG}{CQ^2 . B\alpha} \cdot \frac{B\alpha}{CI}$$

Como $\frac{B\alpha}{CI} = \frac{CI}{B\beta}$

$$\frac{BX}{B\beta} = \frac{BF^2 . BG}{CQ^2 . B\alpha} \cdot \frac{CI}{B\beta}$$

$$BX = \frac{BF^2.BG}{BE.BD} = \frac{BF^2.BG.CI}{CQ^2.B\alpha}$$



394 TRAVAUX DIVERS DE STATIQUE ET DE DYNAMIQUE DE 1659 À 1666. 1659.

ad tempus per AZ [1]) ut ſpatium infinitum [2]) ASPRLNYHVMZA ad 2 □ KZ [3]).

CO ---- CG ---- CF · · CN [4]) CO ∞ $\frac{1}{2}$ CF

ergo CN ∞ 2BG.

ſit AZ ∞ c CF CN ∞ 2BG CI

ZM, TZ ∞ b. $\sqrt{2bc}$ ---- $2b$ ---- $\frac{1}{2}c$ $\frac{bc}{\sqrt{2bc}}$ [5])

Ilustração 3 - parte da superior da p.394

E como TZ = b e AZ = c, então CN = 2TZ = 2b

$$\frac{CN.p}{q.2AK} = \frac{2b\,.\,p}{q\,.\,2AK} = \frac{2b}{\frac{2q}{p}.AK}$$

considera-se AK como ordenada da parábola ZKℵ. Logo

$$AK = \sqrt{AZ.2TZ}$$

Ou seja

$$\frac{CN.P}{q.2AK} = \frac{2b}{\frac{2q}{p}.\sqrt{2bc}} = \frac{O_1}{2[\ ]KZ},$$

Huygens se utiliza das Relações de Euclides e, de acordo com esta teoria pode-se concluir que:

$$\begin{cases} a:b=c:d \\ b:e=d:f \\ e:g=f:h \end{cases}$$

Logo, a:g=c:h.

Ou seja,

$$O_1 : O_2 = CN : CI$$
$$O_2 : [\ ]AW = p : q$$
$$[\ ]AW : [\ ]KZ = CI : CF$$

Portanto,

$$O_1 : [\ ]KZ = CN : CF$$

Fazendo uma transformação da segunda equação de tal forma que seu terceiro termo torne-se CI ou $\frac{1}{2}c$, tem-se

$$p : q = \frac{1}{2}c : C\Pi \,,$$

logo

$$C\Pi = \frac{\frac{1}{2}.c.q}{p}$$

Foi necessário a seguir transformar a terceira equação de tal maneira que seu terceiro termo torne-se $C\Pi$.

$$CI : CF = C\Pi : \frac{1}{4} comprimento\, CN$$

$$\frac{CI}{CF} = \frac{\frac{\frac{1}{2}c.q}{p}}{\frac{1}{4}CN}$$

$$\frac{CI}{CF} = \frac{\frac{1}{2}c.q}{p} \cdot \frac{4}{CN}$$

$$\frac{CN}{CF} = \frac{2c.q}{p.CI}$$

Como $\frac{CN}{CF} = \frac{O_1}{[\ ]KZ}$

$$\frac{O_1}{[\ ]KZ} = \frac{2c.q}{p.CI}$$

$$\frac{O_1}{2[\ ]KZ} = \frac{c.q}{p.CI}$$

$$\frac{O_1}{2[\ ]KZ} = \frac{2b}{\frac{2q}{p}.\sqrt{2bc}}$$

Sabe-se que CN=2b, e assim tem-se a seguinte equação

$$\frac{CN}{\frac{2q}{p}.\sqrt{2bc}}$$

Sabendo que

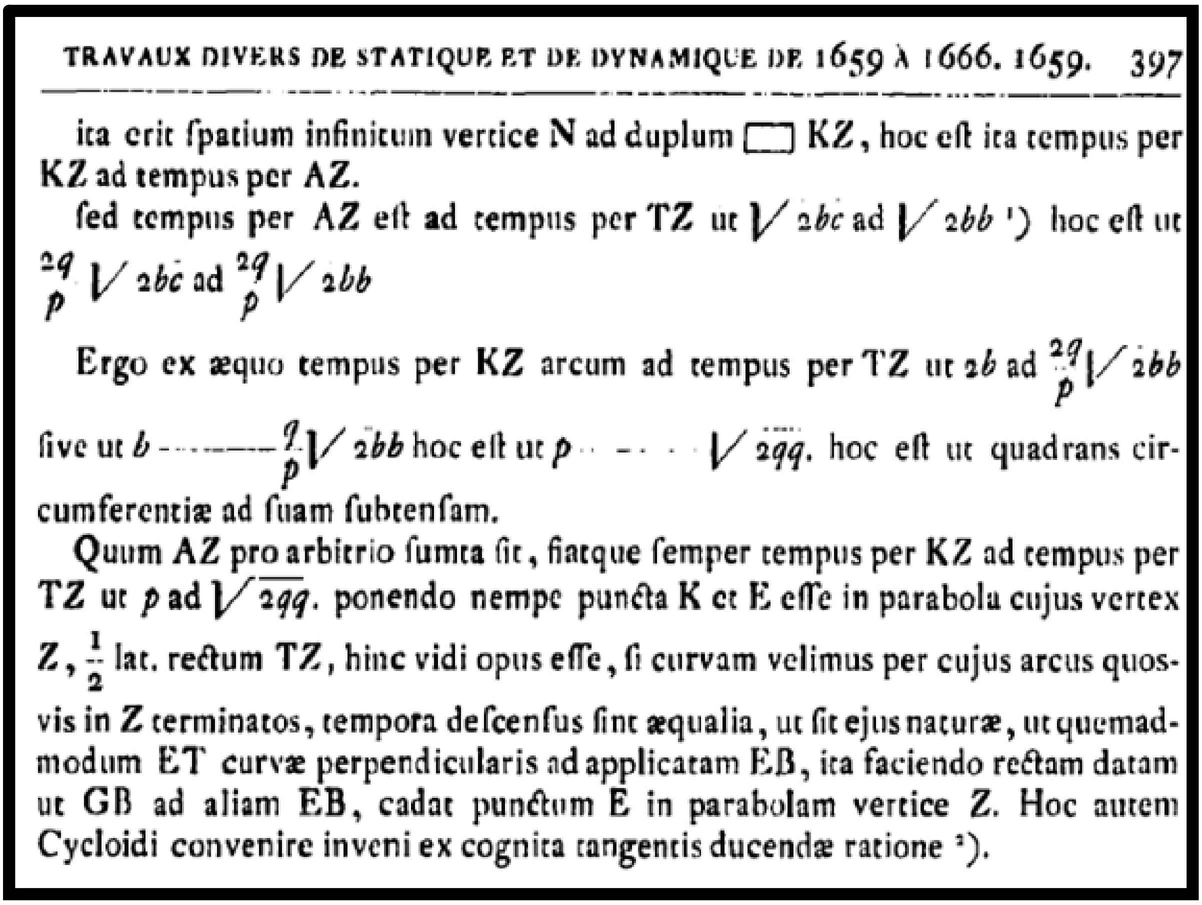
$$\text{tempo AZ} = \sqrt{2bc}$$

e que

$$\text{tempo TZ} = \sqrt{2bb}$$

E como

$$\frac{\text{tempo de queda KZ}}{\text{percurso AZ }(v_z)} = \frac{O_1}{2\,[\;]\,KZ} = \frac{APRXNHVZA}{2\ AZ \cdot Z\Sigma} = \frac{pb}{q\sqrt{2bc}}$$



TRAVAUX DIVERS DE STATIQUE ET DE DYNAMIQUE DE 1659 À 1666. 1659. 397

ita erit ſpatium infinitum vertice N ad duplum □ KZ, hoc eſt ita tempus per KZ ad tempus per AZ.

ſed tempus per AZ eſt ad tempus per TZ ut $\sqrt{2bc}$ ad $\sqrt{2bb}$ [1]) hoc eſt ut $\frac{2q}{p}\sqrt{2bc}$ ad $\frac{2q}{p}\sqrt{2bb}$

Ergo ex æquo tempus per KZ arcum ad tempus per TZ ut $2b$ ad $\frac{2q}{p}\sqrt{2bb}$ ſive ut b ——— $\frac{q}{p}\sqrt{2bb}$ hoc eſt ut p - - - - $\sqrt{2qq}$. hoc eſt ut quadrans circumferentiæ ad ſuam ſubtenſam.

Quum AZ pro arbitrio ſumta ſit, fiatque ſemper tempus per KZ ad tempus per TZ ut p ad $\sqrt{2qq}$. ponendo nempe puncta K et E eſſe in parabola cujus vertex Z, $\frac{1}{2}$ lat. rectum TZ, hinc vidi opus eſſe, ſi curvam velimus per cujus arcus quosvis in Z terminatos, tempora deſcenſus ſint æqualia, ut ſit ejus naturæ, ut quemadmodum ET curvæ perpendicularis ad applicatam EB, ita faciendo rectam datam ut GB ad aliam EB, cadat punctum E in parabolam vertice Z. Hoc autem Cycloidi convenire inveni ex cognita tangentis ducendæ ratione [2]).

Ilustração 7

E

$$\frac{\text{tempo de queda KZ}}{\text{percurso TZ}(v_z)} = \frac{pb}{q\sqrt{2bb}}$$

Sabe-se que o tempo de queda livre é proporcional a raiz quadrada da distância (Galileu) e combinando as duas equações, temos

$$\frac{\dfrac{\text{tempo de queda KZ}}{\text{percurso AZ}(v_z)}}{\dfrac{\text{tempo de queda KZ}}{\text{percurso TZ}(v_z)}} = \frac{\dfrac{pb}{q\sqrt{2bc}}}{\dfrac{pb}{q\sqrt{2bb}}}$$

ou seja

$$\frac{\textit{percurso } AZ(v_z)}{\textit{percurso } TZ(v_z)} = \frac{\sqrt{2bc}}{\sqrt{2bb}} = \frac{2bc}{2bb}$$

Então,

$$\frac{\text{percurso AZ}(v_z)}{\text{percurso TZ}(v_z)} = \frac{c}{b},$$

Esta última equação contém a descoberta do tautocronismo da queda cicloidal. O autor observa que o resultado obtido seria exato, se o ponto E se encontrasse sobre a parábola ZKא e não sobre a circunferência. Porém, durante a demonstração, E foi considerado uma única vez como ponto da circunferência, a relação entre os elementos E e B foi substituída por

$$\frac{TE}{BE} \text{ ou } \frac{GB}{BE'}$$

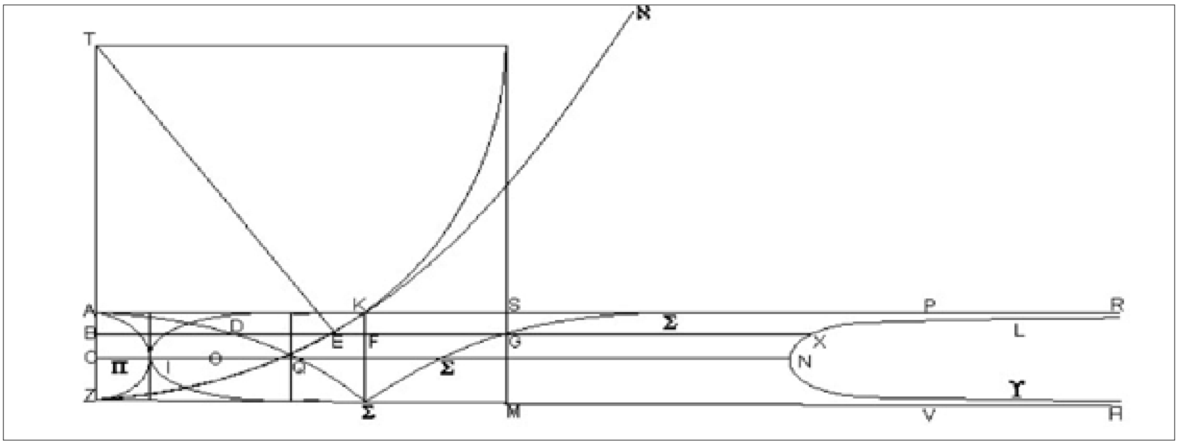
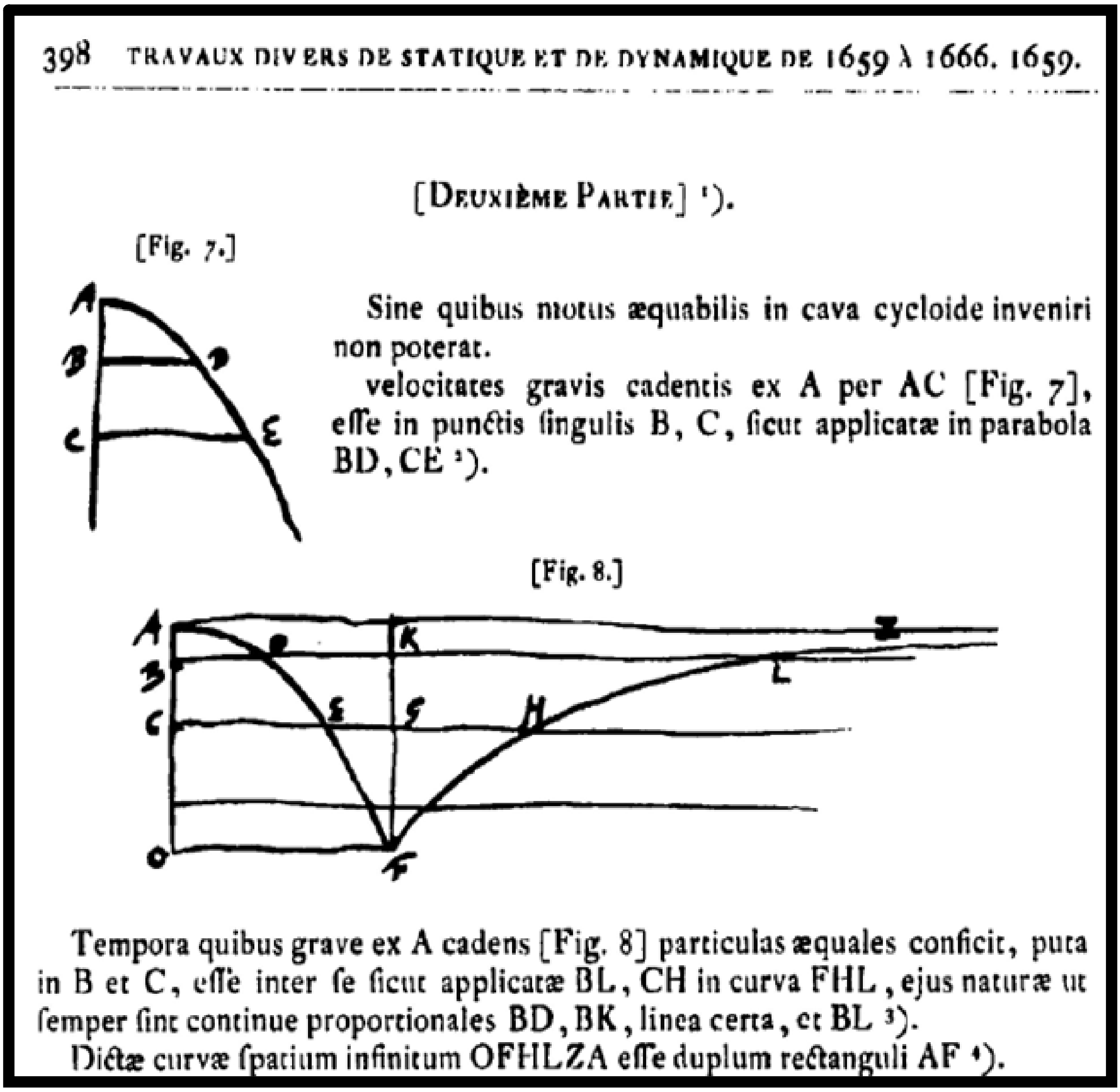


Figura 7

Assim foi substituída a circunferência por outra curva, de modo que TE represente a normal em E, limitada pela vertical que passa por Z, não se tem mais a igualdade TE = comprimento de GB (constante).

Coloca-se $\frac{TE}{BE} = \frac{GB}{BE'}$ (GB com comprimento constante dado) e E' é situado exatamente sobre a parábola ZKא, o raciocínio do texto continua sendo inteiramente válido quando o tautocronismo encontrado advém de um tautocronismo exato.

Huygens observa que será assim, quando o ponto E encontra-se sobre uma ciclóide e fará esta demonstração na segunda parte que se segue.


398 TRAVAUX DIVERS DE STATIQUE ET DE DYNAMIQUE DE 1659 À 1666. 1659.

[DEUXIÈME PARTIE] [1]).

[Fig. 7.]

Sine quibus motus æquabilis in cava cycloide inveniri non poterat.

velocitates gravis cadentis ex A per AC [Fig. 7], esse in punctis singulis B, C, sicut applicatæ in parabola BD, CE [2]).

[Fig. 8.]

Tempora quibus grave ex A cadens [Fig. 8] particulas æquales conficit, puta in B et C, esse inter se sicut applicatæ BL, CH in curva FHL, ejus naturæ ut semper sint continue proportionales BD, BK, linea certa, et BL [3]).

Dictæ curvæ spatium infinitum OFHLZA esse duplum rectanguli AF [4]).

Ilustração 8

De uma parte da parábola as ordenadas são proporcionais aos quadrados das abscissas, as distâncias percorridas por um móvel que cai a partir do repouso são proporcionais aos quadrados dos tempos, por conseguinte também aos quadrados das velocidades.

Como BK é uma constante, a proposição diz que BL é inversamente proporcional à BD. Assim, dado que os tempos considerados são inversamente proporcionais às velocidades. Estão também nessa proporção em relação às ordenadas correspondentes da parábola, onde se tem que

$$BL \cdot BD = CH \cdot CE$$

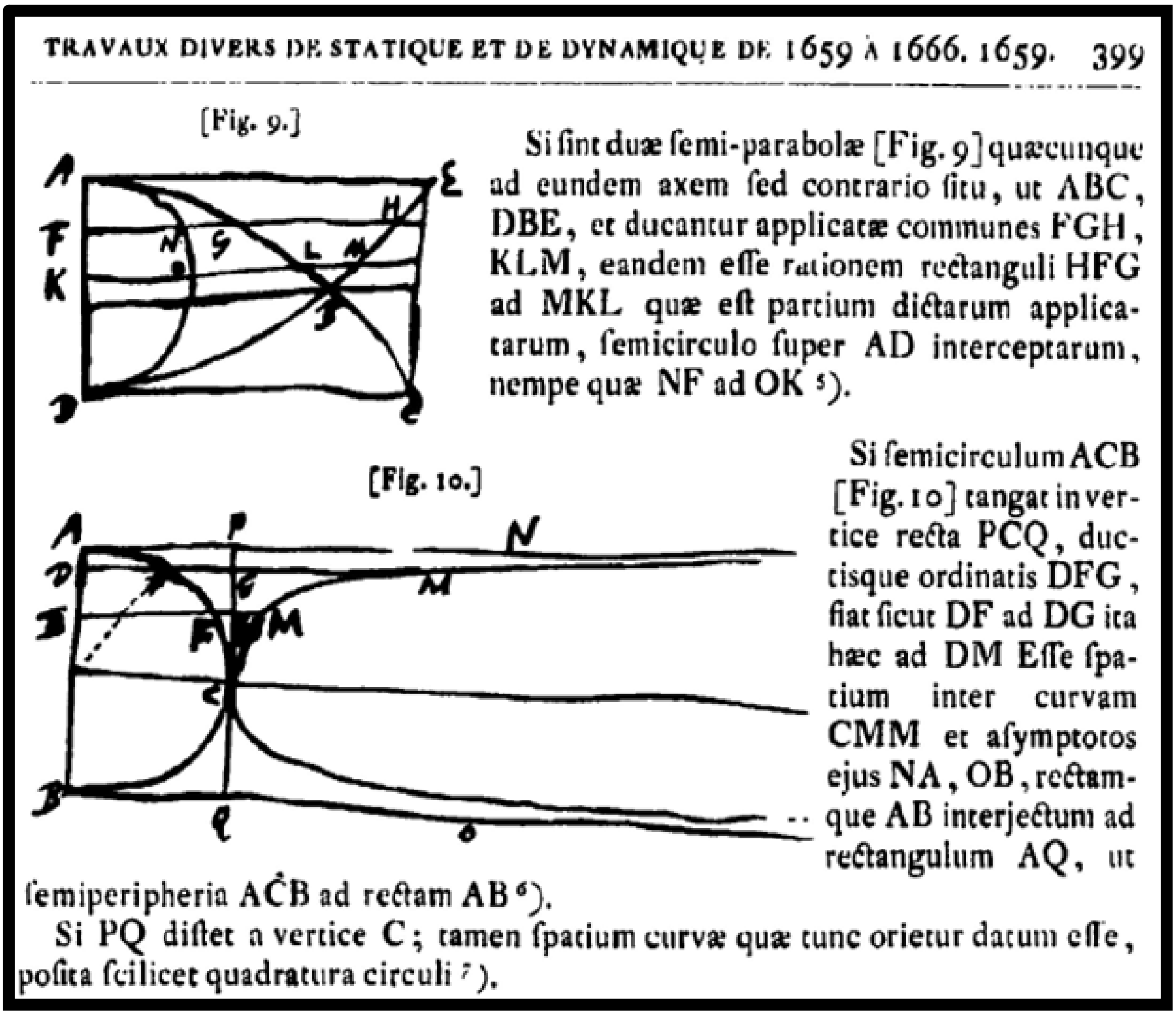
Portanto, tem-se

$$\frac{2}{1} = \frac{\text{tempo da queda AO de um móvel partindo do repouso}}{\text{tempo de percurso de AO com vel. constante } v_0 \text{ (vel. final queda AO)}} =$$

$$= \frac{\Sigma BL}{\Sigma OF} = \frac{\text{superfície OFHLZA}}{\text{superfície } [\;] \text{ AF}}$$

Sendo assim,

$$\frac{FG \cdot FH}{KL \cdot KM} = \frac{\sqrt{AF.FD}}{\sqrt{AK.KD}} = \frac{NF}{OK}$$


TRAVAUX DIVERS DE STATIQUE ET DE DYNAMIQUE DE 1659 À 1666. 1659. 399

[Fig. 9.]

Si ſint duæ ſemi-parabolæ [Fig. 9] quæcunque ad eundem axem ſed contrario ſitu, ut ABC, DBE, et ducantur applicatæ communes FGH, KLM, eandem eſſe rationem rectanguli HFG ad MKL quæ eſt partium dictarum applicatarum, ſemicirculo ſuper AD interceptarum, nempe quæ NF ad OK [5]).

[Fig. 10.]

Si ſemicirculum ACB [Fig. 10] tangat in vertice recta PCQ, ductisque ordinatis DFG, fiat ſicut DF ad DG ita hæc ad DM Eſſe ſpatium inter curvam CMM et aſymptotos ejus NA, OB, rectamque AB interjectum ad rectangulum AQ, ut ſemiperipheria AĈB ad rectam AB [6]).

Si PQ diſtet a vertice C; tamen ſpatium curvæ quæ tunc orietur datum eſſe, poſita ſcilicet quadratura circuli [7]).

Ilustração 9

Huygens compara os tempos nos quais um móvel percorre por um lado a semicircunferência, por outro o diâmetro AB, com a mesma velocidade constante; estes tempos estarão entre si como p (semicircunferência) : q (diâmetro). Portanto, encontra-se outra expressão comparando um elemento F do arco AB com a sua projeção D sobre diâmetro AB e observa-se que

$$\frac{\text{tempo de percurso F}}{\text{tempo de percurso D}} = \frac{VF}{DF} = \frac{CV}{DF} = \frac{DM}{VC}$$

sendo V o centro da circunferência. E conclui que

$$\frac{p}{q} = \frac{\text{tempo de percurso semi – circunferência AB}}{\text{tempo de percurso diâmetro AB}} = \frac{\sum DM}{\sum VC} = \frac{\text{superfície ANMCOQBA}}{\text{superfície } [\;]\, AQ}$$

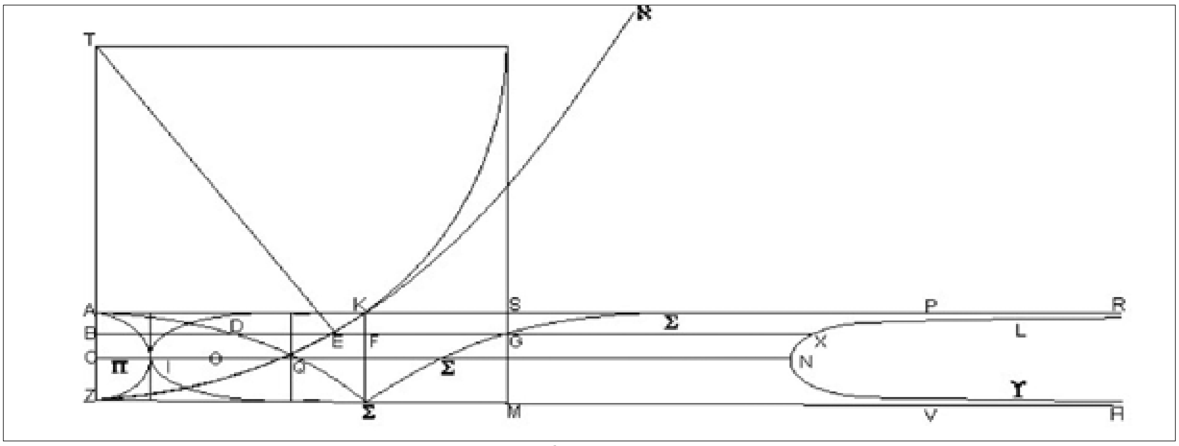


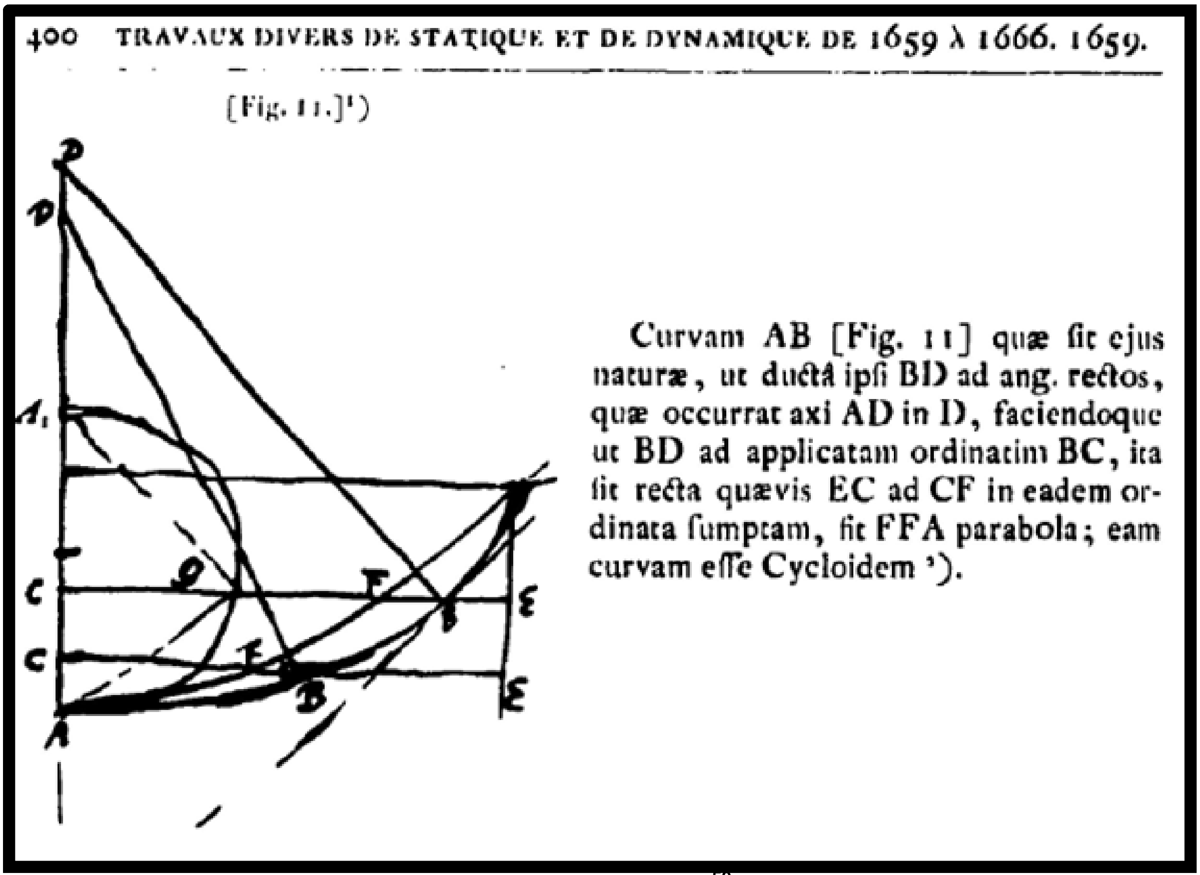
Figura 1

Este caso está apresentado na figura acima onde o *“spatium infinitum”* ASPR... NY...HVZA é um "spatium datum"; ou seja, uma superfície de grandeza calculável.

Que pode ter demonstrado da seguinte forma: AA_1 o círculo gerador do arco cicloidal ABB e B um ponto qualquer deste arco que corresponde à normal BD, têm-se de acordo com a propriedade conhecida tangentes ao ciclóide: BD é paralelo a GA_1, quando BG é horizontal (paralelo a tangente no ponto A_1 da circunferência AA_1) e que G encontra-se sobre a circunferência AA_1. Por conseqüência,

$$\frac{BD}{BC} = \frac{A_1G}{CG} = \frac{AG}{AC}$$

(por semelhança de triângulos)


400 TRAVAUX DIVERS DE STATIQUE ET DE DYNAMIQUE DE 1659 À 1666. 1659.

[Fig. 11.][1])

Curvam AB [Fig. 11] quæ ſit ejus naturæ, ut ductâ ipſi BD ad ang. rectos, quæ occurrat axi AD in D, faciendoque ut BD ad applicatam ordinatim BC, ita ſit recta quævis EC ad CF in eadem ordinata ſumptam, ſit FFA parabola; eam curvam eſſe Cycloidem [2]).

Ilustração 10 [59]

Assim, toma-se um F, tal que:

$$\frac{BD}{BC} = \frac{CE}{CF}$$

ou CE é um comprimento arbitrário constante, que resulta em

$$\frac{AG}{AC} = \frac{CE}{CF}$$

ou

$$CF^2 = \frac{AC^2 \cdot CE^2}{AG^2} = \frac{AC^2 \cdot CE^2}{AA_1 \cdot AC} = \frac{CE^2}{AA_1} \cdot AC,$$

do que se conclui que o lugar do ponto F é uma parábola.

---

59 Os membros da Academia Holandesa de Ciências acrescentaram à figura acima os pontos A_1 e G.

Huygens continua sua demonstração do seguinte modo: admitiu que a curva considerada possuía o vértice A e o eixo de simetria AD.

O *"latus rectum"* da parábola que deve provir da construção p, toma um comprimento AA_1 como $CE^2 = p. AA_1$; para que o círculo de diâmetro AA_1 possa gerar o ciclóide rolando sobre uma perpendicular A_1 ao eixo AD. A tangente ao ponto de intersecção do ciclóide com o prolongamento de CG é a paralela AG. Mas tangente à curva primitiva (lugar dos pontos B) é igualmente paralelo à AG: com efeito, tem-se que

$$\frac{CF^2}{CE^2} = \frac{AC}{AA_1},$$

por conseguinte

$$\frac{AC}{AA_1} = \frac{BC^2}{BD^2}$$

ou

$$\frac{AG}{AA_1} = \frac{BC}{BD}$$

ou

$$\frac{CG}{A_1G} = \frac{BC}{BD}$$

ou conclui-se que A_1G é paralelo à DB, por conseguinte AG paralelo à tangente de B

Do ponto A partem duas curvas que possuem tangentes paralelas entre elas os seus pontos de intersecção com uma ordenada qualquer perpendiculares à AD.

Segundo os membros da SHC,

> Huygens pode ter reconhecido intuitivamente que estas curvas devem ser idênticas, e teria dado, se fosse necessário, uma demonstração exata desta identidade de acordo com um método análogo à Prop.III da Parte II do *Horologium Oscillatorium* uma proposição do mesmo tipo para duas curvas que possuem normais comuns. (Tomo XVI, p.401, tradução nossa)

Daqui em diante o trabalho de Huygens tem mais 4 partes (p.400 a 413), porém todas se retratando ao trabalho *Chartae Mechanicae* que não será mostrado aqui, pois tais partes consistem em demonstrações análogas as que já foram apresentadas, nas quais o matemático demonstra o isocronismo da ciclóide (tautócrona).

Como vimos, Huygens propõem a si próprio o problema do isocronismo do pêndulo, preocupado em melhorar o desempenho do relógio de pêndulo já existente. Ele resolve o problema com sucesso, porém um relógio de pêndulo, que ele acreditava ser realmente eficiente para a utilização em navegação, só seria construído em 1673.

4- CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a parte histórica apresentada nesta pesquisa, observou-se que os irmãos Bernoulli, quando propuseram o desafio, estavam preocupados com o desenvolvimento da Matemática como Ciência, no caso da Braquistócrona, era o de confirmar sua aplicação no desenvolvimento da matemática, mais tarde no Cálculo de Variações.

Já Huygens se preocupou com a solução do Isocronismo do Pêndulo como um meio de melhorar o relógio de pêndulo já existente, porém pouco eficiente para a navegação. Com a descoberta do Tautocronismo da Ciclóide, pôde construir relógios mais precisos, o que contribuiu na localização dos navios nas longitudes.

Pensando no objetivo aqui proposto, que era o de analisar como esses matemáticos propuseram e resolveram os problemas do Isocronismo do Pêndulo e da Braquistócrona, pôde-se observar a importância do papel desempenhado por Mersenne ao disseminar a matemática produzida por grandes eruditos europeus, como no caso de Galileu, pois tanto a primeira solução quanto a segunda partiram do mesmo princípio norteador: a geometria grega e as teorias de Galileu sobre corpos em movimento.

Mesmo que se trate de contextos distintos, a escolha de se trabalhar com esses problemas deu-se porque, além de partirem do mesmo fundamento teórico, ambos têm a mesma solução, a curva ciclóide. À época, essa curva era de interesse de muitos eruditos, sendo chamada até mesmo de “Helena da Geometria” (BOYER, 1996).

Esses trabalhos desenvolvidos pelos Bernoulli e por Huygens em torno desse “pomo da discórdia”, com comentários e complementos a seus cálculos, só faz reforçar a validade da contribuição de tais matemáticos e torna acessível aos contemporâneos a gênese dessas teorias, fundamentais para a compreensão do desenvolvimento histórico e epistemológico das Equações Diferenciais.

Tal fato torna essa pesquisa de grande valia como material complementar para um curso de Equações Diferenciais como, por exemplo, auxiliar na elaboração de um conhecimento construído por meio da História da Matemática. Construído porque não se trata de entregar ao aluno o conteúdo pronto, mas sim levá-lo a estabelecer relações com o Cálculo diferencial, como é conhecido hoje, de forma que a História seja parte do processo de fomento do raciocínio matemático.

Pode ainda ser um acionador de um a série de estudos e discussões acerca do tema: Equações Diferenciais, conduzindo os graduandos s outros estudos.

5- REFERÊNCIAS

BOYER, Carl Benjamin. História da Matemática. Trad. de Elza F. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BARON, Margaret E. e BOS, H. J. M. Curso de História da Matemática: Origens e desenvolvimento do Cálculo. Vol. 5. Trad. De José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Mª José M. M. Mendes. Brasília: Universidade de Brasília, 1985.

BURROWES,M.; FARINA, C. Sobre o pêndulo isócrono de Christiaan Huygens. Revista Brasileira de Ensino de Física. Vol.7. no. 2. São Paulo, Abr/Jun 2005. Disponível em: www.scielo.br/scielo.php Acessado em: 29/08/07.

COBRA, Rubens Queiroz. Filosofia Moderna: Resumos Biográficos. Site www.cobra.pages.nom.br , INTERNET, Brasília, 1997. Acessado em 13/08/07.

EVES, Haword. Introdução à História da Matemática. Campinas: Unicamp, 1997.

GALILEI, Galileu. Duas Novas Ciências, incluindo: Da Força de Percussão. Tradução de Letizio Mariconda e Pablo R. Mariconda. São Paulo: Nova Stella e Ched Editorial, 1935.

KATZ, Victor J. A History of Mathematics: an Introduction. 2nd ed. Addison-WesleyEducational Publishers, Inc, 1998.

Œuvres Completes de Christiaan Huygens. Publiées par la Société Hollandaise des Sciences: Martinus Nijhoff, La Haye, 1929, tomo XVI, pp 392-413. Disponível em: http://gallica.bnf.fr

Œuvres Completes de Christiaan Huygens. Publiées par la Société Hollandaise des Sciences: Martinus Nijhoff, La Haye, 1929, tomo XXII, pp 777-779. Disponível em: http://gallica.bnf.fr

O'CONNOR, J. J. and ROBERTSON, E. F. The MacTutor History of Mathematics archive. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk

SMITH, David E. History of Mathematics. Vol.1. New York: Dover Publicacions, INC, 1958.

STRUIK, D. J. A Source Book in Mathematics 1200 – 1800. Oxford: Princeton University Press, 1990.

YODER, G. J. Unrolling Time – Christiaan Huygens and the Mathematization of Nature. Cambrigde: Cambrigde University Press, 1988.

6- ANEXOS

Anexo 1- Publicações de Mersenne[60]

1. *L'usage de la raison* (Paris 1623).
2. *L'analyse de la vie spirituelle* (Paris 1623) (still undiscovered).
3. *Quaestiones celeberrimae in Genesim* (Paris 1623) -- defended orthodox theology against deists and atheists.
4. *Observationes ...* (Paris 1623) - *Suite manuscrite des Quaestiones in Genesim* -- second half of *Quaestiones in Genesim* that stopped after Chapter 6.*Commentaire manuscript sur l'Evangile.*
5. *L'impiété des Déistes* (Paris 1624)
6. *De Gaferello judicium* (Paris 1625).
7. *La vérité des Sciences* (Paris 1625) -- an account against Science Sceptics.
8. *Synopsis mathematica* (Paris 1626).
9. *Traité de l'Harmonie Universelle* (Paris 1627) -- a work on music, acoustics and instruments which he continued to improve throughout his life. *Esquisse manuscrite d'un Traité de Son* -- an outline of *Traité du Son.*
10. *Petri Gassendi theology epistolica exercitatio* (Paris 1630).
11. *Questions inouyes* (Paris 1634).
12. *Questions Harmoniques* (Paris 1634) -- includes many remarkable findings in Physics, Ethics and other Sciences.
13. *Les questions theologiques* (Paris 1634) -- physics, ethics and mathematics.

---

60 Lista retirada do site de História da Matemática: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk

14. *Les mechaniques de Galilée* (Paris 1634) (a translation into French of Galileo's *Dialogo).*

15. *Les préludes de l'Harmonie Universelle* (Paris 1634) -- useful questions for astrologers, theologians, doctors, philosophers and preachers.

16. *Harmonicorum libri* (Paris, 1635).

17. *Harmonie universelle* (Paris 1636) -- the theory and practice of music including the nature of sound, movement, key, voice, mood and harmonic instruments.

18. *Les nouvelles pensées de Galilée* (Paris 1639) -- a work on natural and violent movement and the more subtle ideas of mechanics and physics (a translation into French of Galileo's *Discorsi).*

19. *Lettre à Naudé sur l'aimant* (Paris 1639).

20. *Universe Geometiae synopsis* (Paris 1644).

21. *Cogitata Physico-Mathematica* (Paris 1644).

22. *Novarum observationum physicomathematicorum* (Paris 1647).

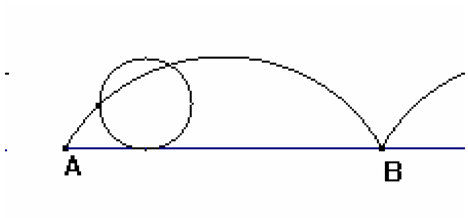
23. *Liber Novus Praelusorius* (Paris 1648).

24. *Harmonicorum libri* XII (Paris 1648).

25. *L'optique et la catoptrique* (Paris 1651).

26. Brouillon d'un ouvrage inachevé sur l'optique.

Anexo 2- Ciclóide[61]



Equação Cartesiana Paramétrica

$$x = at - h\ \mathrm{sen}(t),\ y = a - h\cos(t)$$

A ciclóide é o lugar geométrico de um ponto na distância h do centro de um círculo de raio **a** rolando ao longo de uma linha reta. Se **h<a,** então é *curtate cycloid* enquanto que se **h>a** então é *prolate cycloid*. A curva extraída acima tem **a=h**.

A ciclóide foi estudada primeiramente por Cusa quando estava tentando encontrar a área de um círculo pela integração.

Mersenne deu a primeira definição apropriada da ciclóide e indicou as propriedades óbvias tais como o comprimento da base é igual ao do circulo que rola. Tentou encontrar a área sob a curva pela integração mas falhou. Propôs essa questão a outros matemáticos.

A curva foi nomeada por Galileu em 1599. Em 1639 escreveu a Torricelli sobre a ciclóide, declarando que tinha estudado suas propriedades por 40 anos. Galileu tentou encontrar a área comparando-a à área do círculo gerador. Depois que não encontrou um método matemático recorreu pesar as partes de metal cortadas na forma de ciclóide. Encontrou que a relação dos pesos era aproximadamente 3 para 1, mas decidido que não era exatamente 3, tal fato que supôs (errado) que a relação não era racional.

61 Essa é uma tradução livre do texto de O'CONNOR e ROBERTSON, retirada da página da internet: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk

Mersenne propôs o problema da área a Roberval em 1628 e, embora falhasse no início, foi resolvido por Roberval em 1634. Se a = h então a área sob um arco será $3\pi a^2$. Roberval, orgulhoso de seu resultado, escreveu a Descartes narrando-o.

Descartes desafiou Roberval a encontrar um método de extrair uma tangente a ciclóide que descobrisse como construir uma. Roberval falhou mas Fermat, que foi incluído no desafio, obteve sucesso.

Vale a pena anotar que Torricelli descobriu a área da ciclóide e que Viviani encontrou um método para construir uma tangente.

Em 1658 Pascal, após um período longo devotado à religião quando ignorou a matemática, voltou a pensar sobre problemas matemáticos numa noite que não conseguia dormir em conseqüência de dores. Resolveu o problema da área qualquer segmento de ciclóide e do centro de gravidade de qualquer segmento. Resolveu também os problemas do volume e da área de superfície do sólido de revolução formado pela rotação da ciclóide sobre o eixo x. Pascal publicou suas próprias soluções a seus problemas do desafio junto com uma extensão do resultado encontrados por Wren.

Pascal publicou um desafio (não sob seu próprio nome mas sob o nome de Dettonville) que oferecia dois prêmios pelas soluções destes problemas. Wallis e Lalouère entraram mas a solução de Lalouère estava errada e Wallis não foi bem sucedido também. Sluze, Ricci, Huygens, Wren e Fermat todos comunicaram suas descobertas a Pascal sem entrar em competição. A contribuição de Wren foi o mais notável porque encontrou o que o comprimento do arco é 8a.

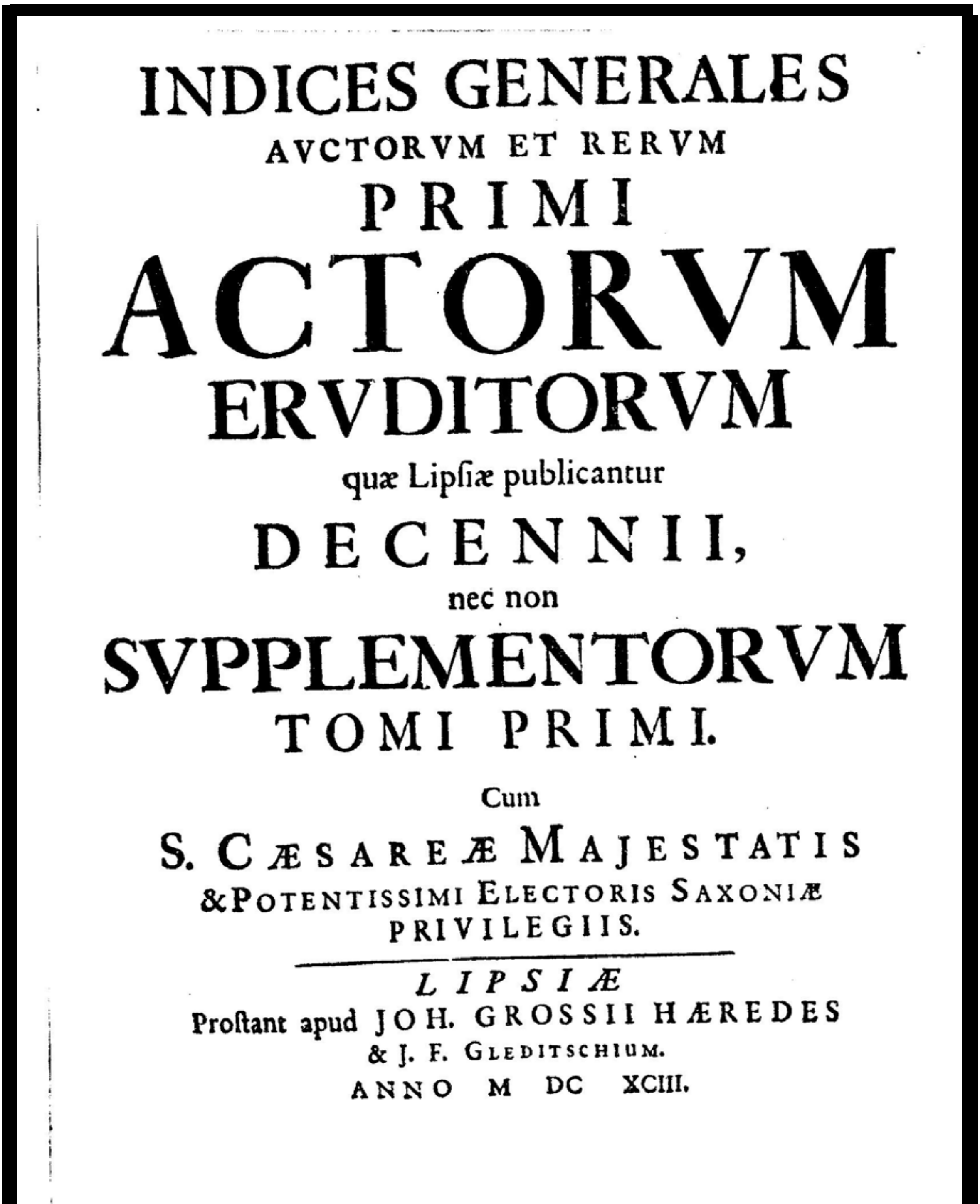
A ciclóide tem a propriedade que uma partícula P que desliza em uma ciclóide descreverá o movimento harmônico simples e o período será independente do ponto de partida. Esta é a propriedade da tautócrona e foi descoberta por Huygens em 1673 (*Horologium Oscillatorium)*. Ele construiu o primeiro relógio de pêndulo com esse dispositivo para assegurar-se de que o pêndulo fosse isocrônico forçando o pêndulo a balançar em um arco cicloidal. Entretanto apresentou muitos problemas mecânicos para fazê-lo prático.

Desargues propôs dentes cicloidais para a engrenagem de roda por volta dos anos 1630's.

Em 1696, Johann Bernoulli, no *Acta Eruditorum,* questionou qual a curva que satisfaz à propriedade da braquistócrona. Já sabia a propriedade da braquistócrona da ciclóide e publicou sua solução em 1697. Foi mostrada também por Leibniz, Newton, Jacob Bernoulli e L'Hôpital. Era um dos problemas variacional avançado e sua investigação era o ponto de partida para o desenvolvimento do cálculo de variações.

A evoluta e a involuta de uma ciclóide são uma ciclóide idêntica. De fato, a ciclóide foi estudada por Huygens e por causa de seu trabalho sobre ciclóide desenvolveu uma teoria geral das evolutas das curvas.

Anexo 3- Indice da Acta Eruditorum

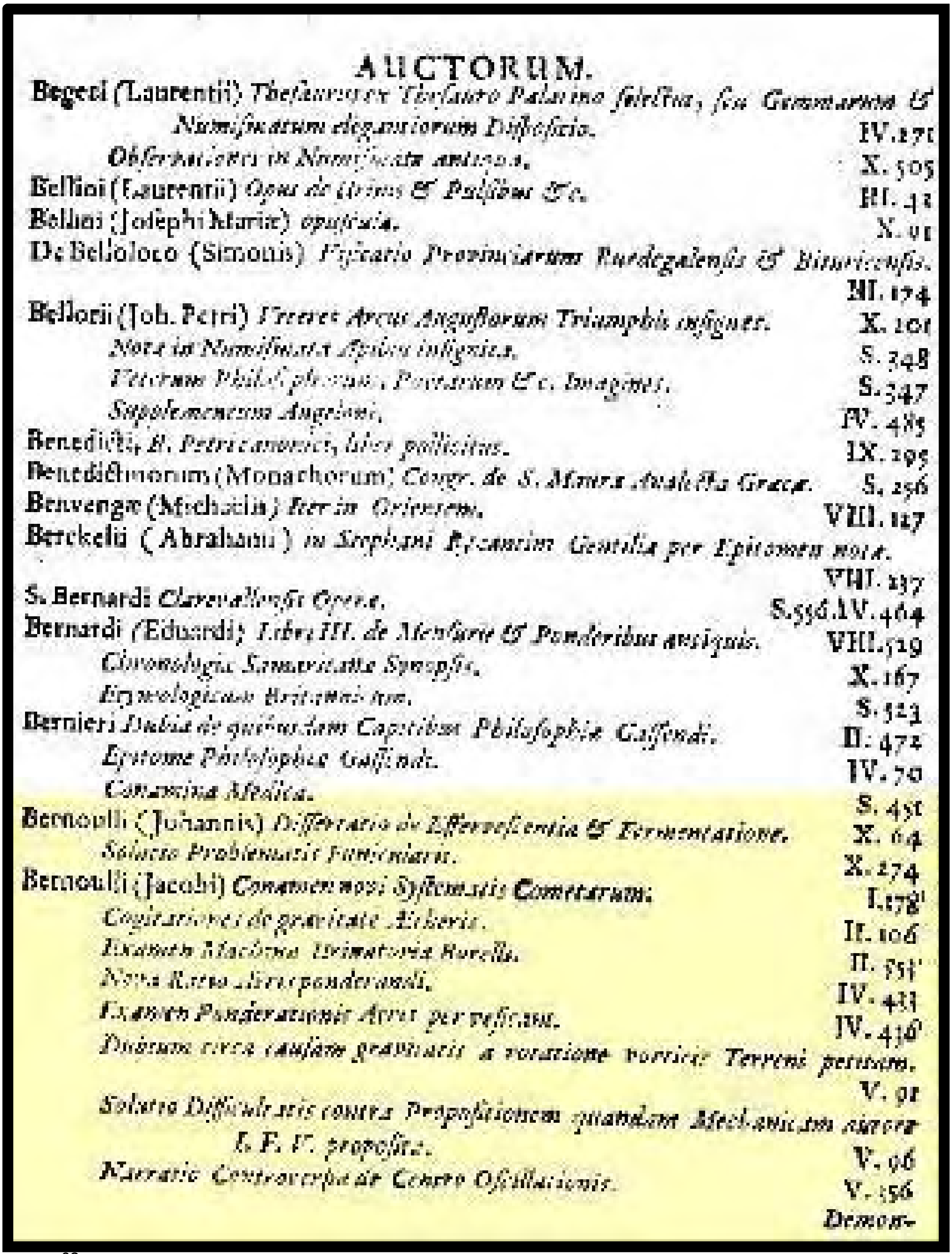


INDICES GENERALES
AVCTORVM ET RERVM
PRIMI
ACTORVM
ERVDITORVM
quæ Lipſiæ publicantur
DECENNII,
nec non
SVPPLEMENTORVM
TOMI PRIMI.
Cum
S. CÆSAREÆ MAJESTATIS
&POTENTISSIMI ELECTORIS SAXONIÆ
PRIVILEGIIS.

LIPSIÆ
Proſtant apud JOH. GROSSII HÆREDES
& J. F. GLEDITSCHIUM.
ANNO M DC XCIII.

Figura[62]

[62] Índice da *Acta Eruditorum* de trabalhos publicados entre 1682 a 1693. Retirado do site da Biblioteca Nacional da França - http://gallica.bnf.fr/



AUCTORUM.

Demon-

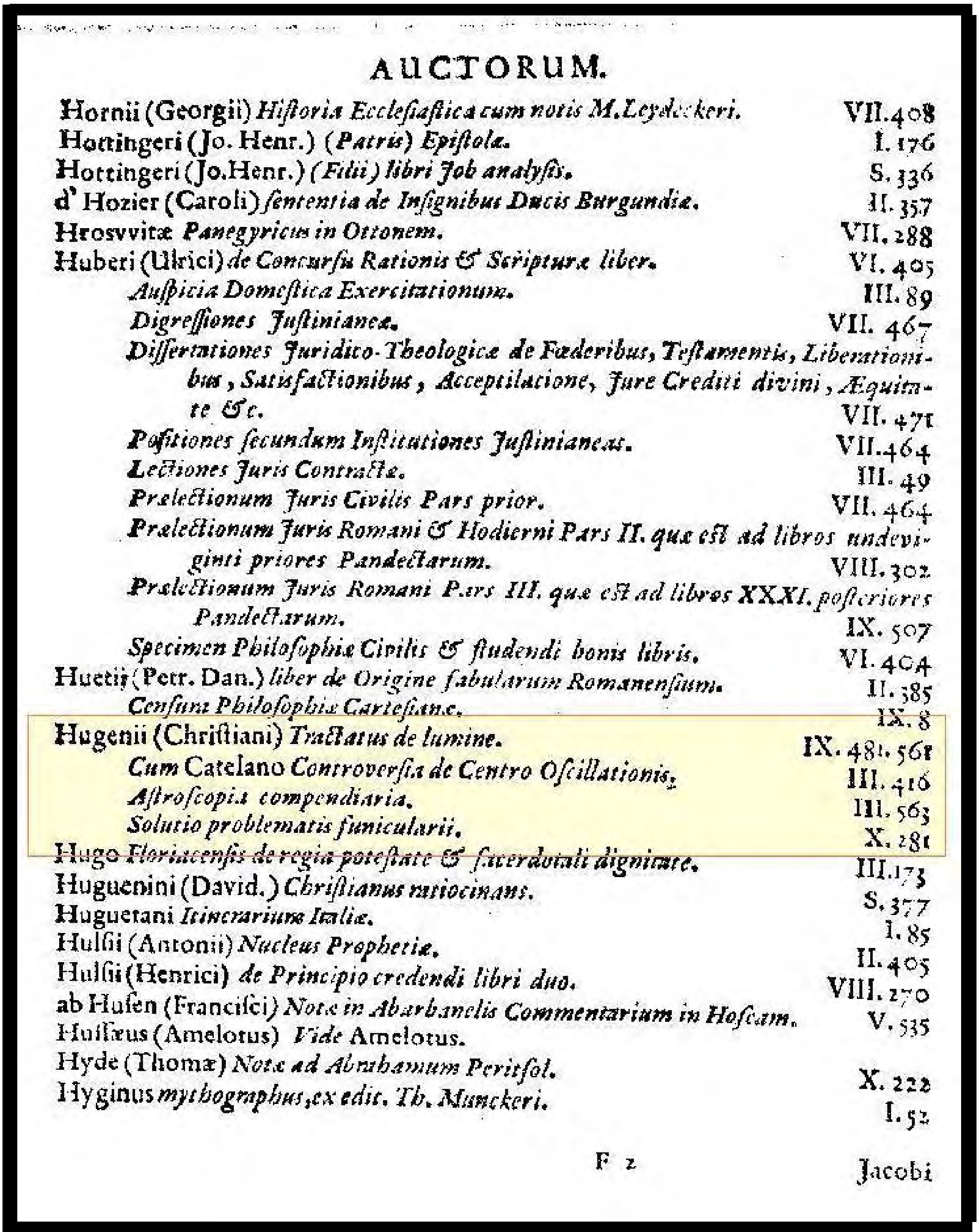
Figura[63]

[63] Índice da *Acta Eruditorum* de trabalhos publicados entre 1682 a 1693. Retirado do site da Biblioteca Nacional da França - http://gallica.bnf.fr/

INDEX I.

Figura[64]

[64] Índice da *Acta Eruditorum* de trabalhos publicados entre 1682 a 1693. Retirado do site da Biblioteca Nacional da França - http://gallica.bnf.fr/



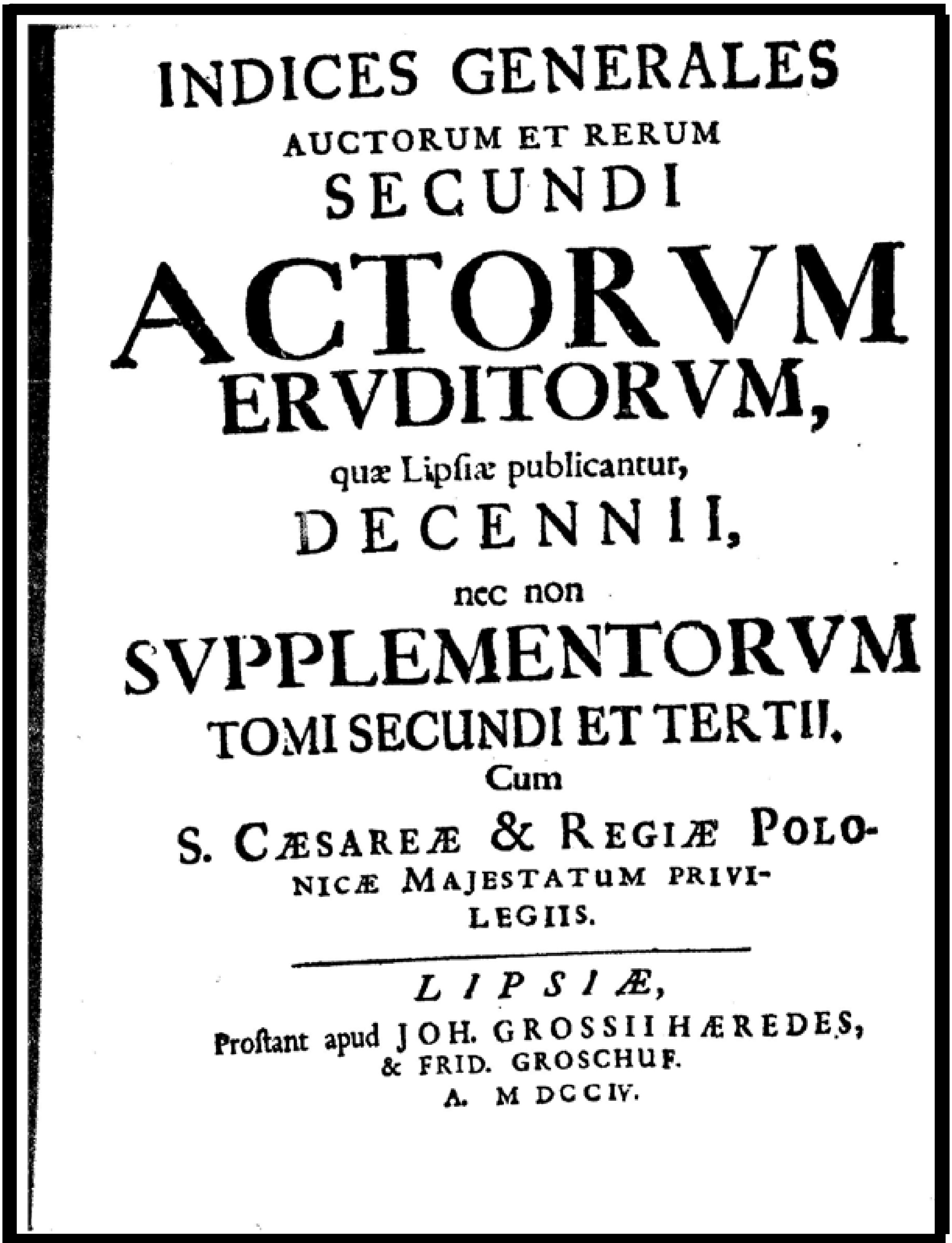
AUCTORUM.

Hornii (Georgii) *Historia Ecclesiastica cum notis M. Leydeckeri.*	VII.408
Hottingeri (Jo. Henr.) (*Patris*) *Epistolæ.*	I.176
Hottingeri (Jo. Henr.) (*Filii*) *libri Job analysis.*	S.336
d'Hozier (Caroli) *sententia de Insignibus Ducis Burgundiæ.*	II.357
Hrosvvitæ *Panegyricus in Ottonem.*	VII.288
Huberi (Ulrici) *de Concursu Rationis & Scripturæ liber.*	VI.405
Auspicia Domestica Exercitationum.	III.89
Digressiones Justinianeæ.	VII.467
Dissertationes Juridico-Theologicæ de Fœderibus, Testamentis, Liberationibus, Satisfactionibus, Acceptilatione, Jure Crediti divini, Æquitate &c.	VII.471
Positiones secundum Institutiones Justinianeas.	VII.464
Lectiones Juris Contractæ.	III.49
Prælectionum Juris Civilis Pars prior.	VII.464
Prælectionum Juris Romani & Hodierni Pars II. quæ est ad libros undeviginti priores Pandectarum.	VIII.302
Prælectionum Juris Romani Pars III. quæ est ad libros XXXI. posteriores Pandectarum.	IX.507
Specimen Philosophiæ Civilis & studendi bonis libris.	VI.404
Huetii (Petr. Dan.) *liber de Origine fabularum Romanensium.*	II.385
Censura Philosophiæ Cartesianæ.	IX.8
Hugenii (Christiani) *Tractatus de lumine.*	IX.481.561
Cum Catelano *Controversia de Centro Oscillationis.*	III.416
Astroscopia compendiaria.	III.563
Solutio problematis funicularii.	X.281
Hugo *Floriacensis de regia potestate & sacerdotali dignitate.*	III.173
Huguenini (David.) *Christianus ratiocinans.*	S.377
Huguetani *Itinerarium Italiæ.*	I.85
Hulsii (Antonii) *Nucleus Prophetiæ.*	II.405
Hulsii (Henrici) *de Principio credendi libri duo.*	VIII.270
ab Husen (Francisci) *Notæ in Abarbanelis Commentarium in Hoseam.*	V.535
Hussæus (Amelotus) *Vide* Amelotus.	
Hyde (Thomæ) *Notæ ad Abrahamum Peritsol.*	X.222
Hyginus *mythographus, ex edit. Th. Munckeri.*	I.52

F 2 Jacobi

Figura[65]

65 Índice da *Acta Eruditorum* de trabalhos publicados entre 1682 a 1693. Retirado do site da Biblioteca Nacional da França - http://gallica.bnf.fr/

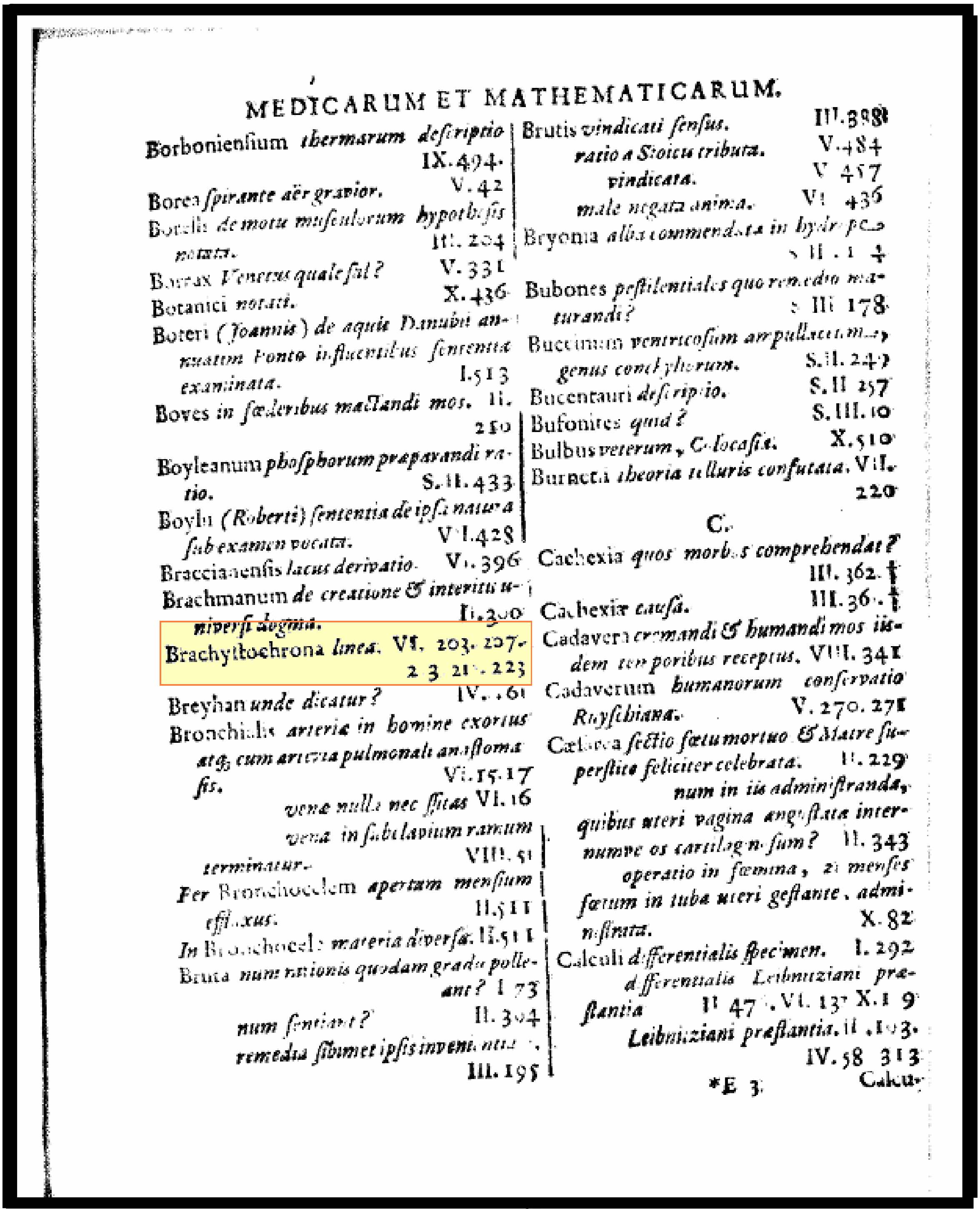


INDICES GENERALES
AUCTORUM ET RERUM
SECUNDI
ACTORVM
ERVDITORVM,
quæ Lipsiæ publicantur,
DECENNII,
nec non
SVPPLEMENTORVM
TOMI SECUNDI ET TERTII.
Cum
S. CÆSAREÆ & REGIÆ POLO-
NICÆ MAJESTATUM PRIVI-
LEGIIS.

LIPSIÆ,
Proſtant apud JOH. GROSSII HÆREDES,
& FRID. GROSCHUF.
A. M DCCIV.

Figura[66]

[66] Índice da *Acta Eruditorum* de trabalhos publicados entre 1692 a 1701. Retirado do site da Biblioteca Nacional da França - http://gallica.bnf.fr/

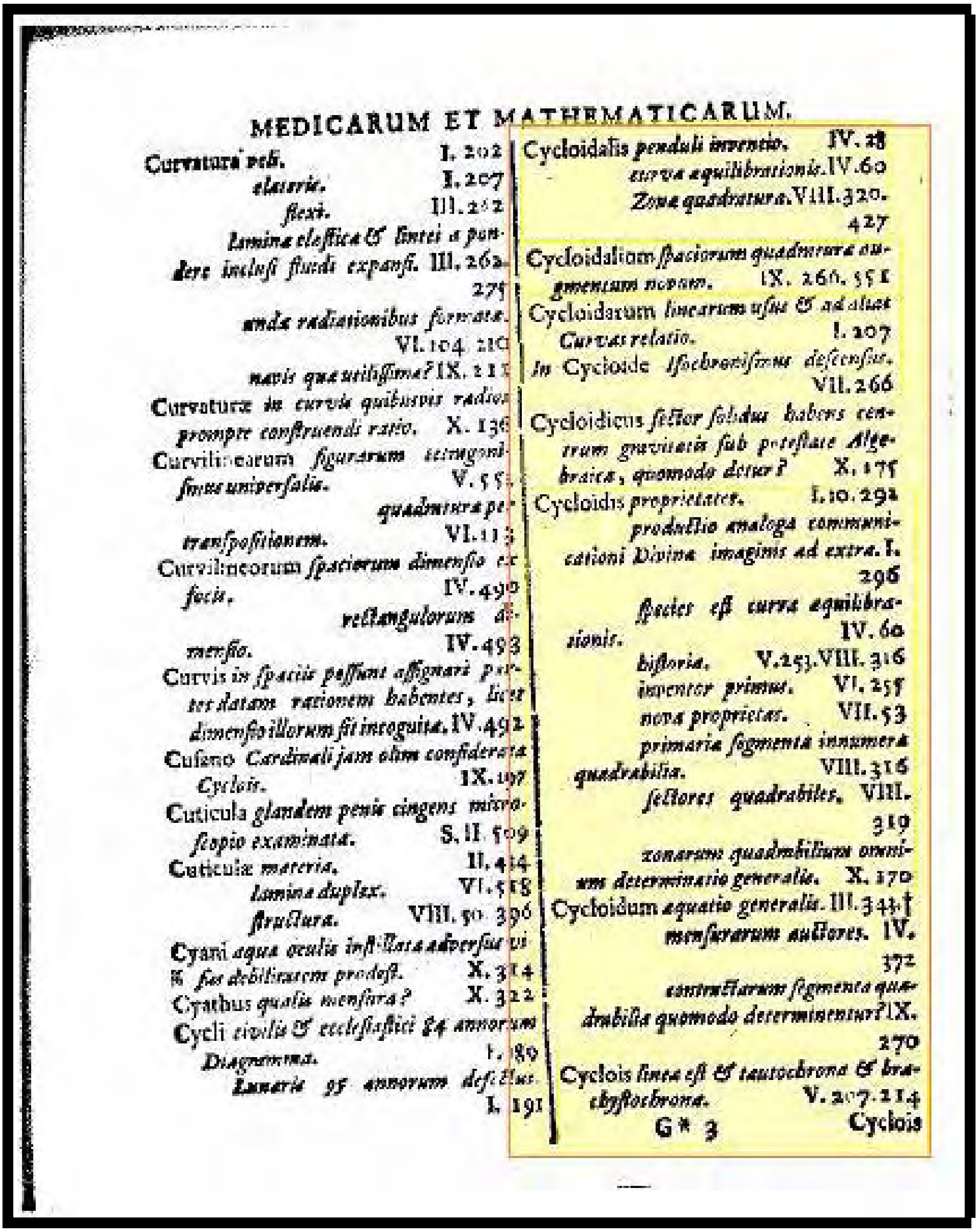


MEDICARUM ET MATHEMATICARUM.

*E 3 Calcu-

Figura [67]

[67] Índice da *Acta Eruditorum* de trabalhos publicados entre 1692 a 1701. Retirado do site da Biblioteca Nacional da França - http://gallica.bnf.fr/



MEDICARUM ET MATHEMATICARUM.

G* 3 Cyclois

Figura [68]

[68] Índice da *Acta Eruditorum* de trabalhos publicados entre 1692 a 1701. Retirado do site da Biblioteca Nacional da França - http://gallica.bnf.fr/

MEDICARUM ET MATHEMATICARUM.

Iridis *circa candelas origo.* IV. 498
oculorum arteriola. IX. 437
rationes, phaenomena, dimensiones & colores. S. III. 78. 403
Iris *an fuerit ante lapsum?* VI. 543
Irrationalium *quantitatum fons* I. 3. 5
Ischiadicum *malum mercu curatum.* II. 182
Ischiadicus *dolor ab ustione sedatus.* IV. 126
Ischuriae *desperata signa.* IX. 370
Isdegirdica *Persarum aera.* V. 528
Isochrona *linea. Vid.* Curva *geometricae non construibilis.* IV. 545
per quodvis datum punctum assignabilis. IV. 543
supra-centralis an in spiram convolvatur circa centrum? IV. 545
Isochronae *curvae constructio Bernoulliana an reprehensibilis?* IV. 542
constructio per elasticam cur tolleranda? IV. 542
infiniti plexus seu meandri. IV. 544
Isochronismus *descensus in cycloide.* VII. 266
Isoperimetrorum *figurarum quae maximum comprehendant spatium?* VI. 214
Isoperimetrici *problematis solutio.* IX. 261
Analyseos parum usus. X. 227
Isopyrum *Dioscoridis num Trifolium febrinum?* X. 310
Israelitarum *vestes in deserto non detritae.* III. 335

Italiae *Chorographia.* V. 214
Itinerarium. IX. 54
Iter *Suratam 1689 susceptum.* S. III. 446
Judicium *non intellectus, sed voluntatis operatio.* VI. 442
Julapae *praestantia & usus.* S. III. 430
Juliopuleos *nomen duabus urbibus commune.* IV. 329
Juniperi *oleum geminum oleo succini.* S. III. 196
Jupiter *cur citius circa axem revolvatur quam tellus?* VI. 4

K.

Καταιβάτης *unde Jupiter dictus?* X. 36
Καταποτισμός. III. 265
Kirchii (*Godfr.*) *Calendarium caeleste novum.* III. 93
Kunckeliani *Phosphori urentis praeparatio.* S. II. 232

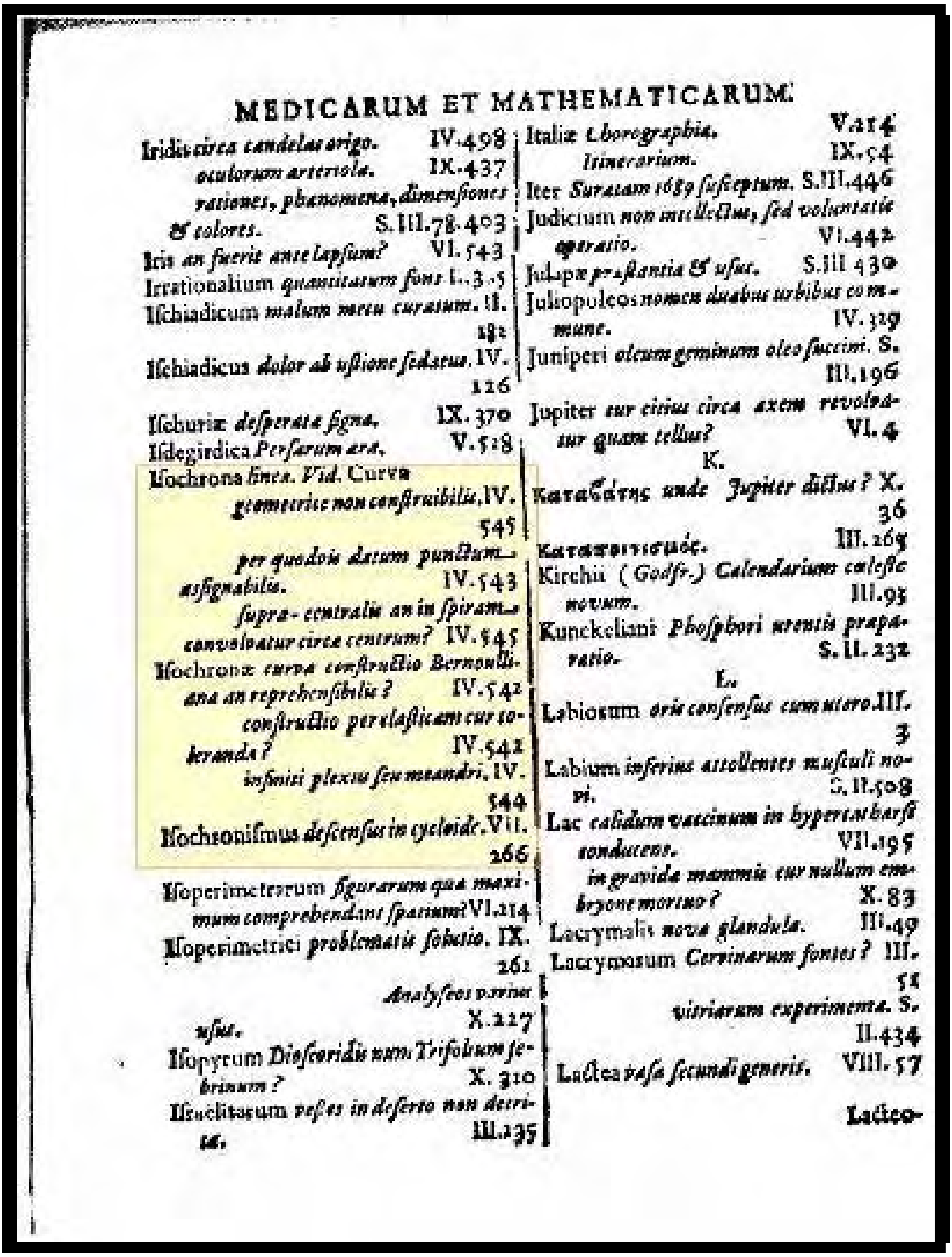
L.

Labiorum *oris consensus cum utero.* III. 3
Labium *inferius attollentes musculi novi.* S. II. 508
Lac *calidum vaccinum in hypertarbarsi conducens.* VII. 195
in gravida mammis cur nullum embryone mortuo? X. 83
Lacrymalis *nova glandula.* III. 49
Lacrymosum *Cervinarum fontes?* III. 51
vitriarum experimenta. S. II. 434
Lactea *vasa secundi generis.* VIII. 57

Lacteo-

Figura[69]

69 Índice da *Acta Eruditorum* de trabalhos publicados entre 1692 a 1701. Retirado do site da Biblioteca Nacional da França - http://gallica.bnf.fr/


MEDICARUM ET MATHEMATICARUM.

Iridis circa candelas origo. IV.498
oculorum arteriola. IX.437
rationes, phænomena, dimensiones & colores. S.III.78.403
Iris an fuerit ante lapsum? VI.543
Irrationalium quantitatum fons I..3..5
Ischiadicum malum motu curatum. II. 182
Ischiadicus dolor ab ustione sedatus. IV. 126
Ischuriæ desperata signa. IX.370
Isdegirdica Persarum æra. V.528
Isochrona linea. Vid. Curva
geometricæ non construibilis. IV. 545
per quodvis datum punctum assignabilis. IV.543
supra-centralis an in spiram convolvatur circa centrum? IV.545
Isochronæ curvæ constructio Bernoulliana an reprehensibilis? IV.542
constructio per elasticam cur tolleranda? IV.542
infiniti plexus seu meandri. IV. 544
Isochronismus descensus in cycloide. VII. 266
Isoperimetrorum figurarum quæ maximum comprehendant spatium? VI.214
Isoperimetrici problematis solutio. IX. 261
Analyseos varior usus. X.227
Isopyrum Dioscoridis num Trifolium fibrinum? X.310
Israelitarum vestes in deserto non detritæ. III.235

Italiæ Chorographia. V.214
Itinerarium. IX.54
Iter Suratam 1689 susceptum. S.III.446
Judicium non intellectus, sed voluntatis operatio. VI.442
Julapæ præstantia & usus. S.III.430
Juliopoleos nomen duabus urbibus commune. IV.329
Juniperi oleum geminum oleo succini. S. III.196
Jupiter cur citius circa axem revolvatur quam tellus? VI.4

K.

Καταιβάτης unde Jupiter dictus? X. 36
Καταποντισμός. III.269
Kirchii (Godfr.) Calendarium cæleste novum. III.93
Kunckeliani Phosphori urentis præparatio. S.II.232

L.

Labiorum oris consensus cum utero. III. 3
Labium inferius attollentes musculi novi. S.II.508
Lac calidum vaccinum in hyperemesi conducens. VII.195
in gravida mammis cur nullum embryone mortuo? X.83
Lacrymalis nova glandula. III.49
Lacrymarum Cervinarum fontes? III. 51
vitriarum experimenta. S. II.434
Lactea vasa secundi generis. VIII.57

Lacteo-

Figura[70]

---

[70] Índice da *Acta Eruditorum* de trabalhos publicados entre 1692 a 1701. Retirado do site da Biblioteca Nacional da França - http://gallica.bnf.fr/

Anexo 4- Tomo XVI (p.392 a 413)

III [1].

[1659] [2].

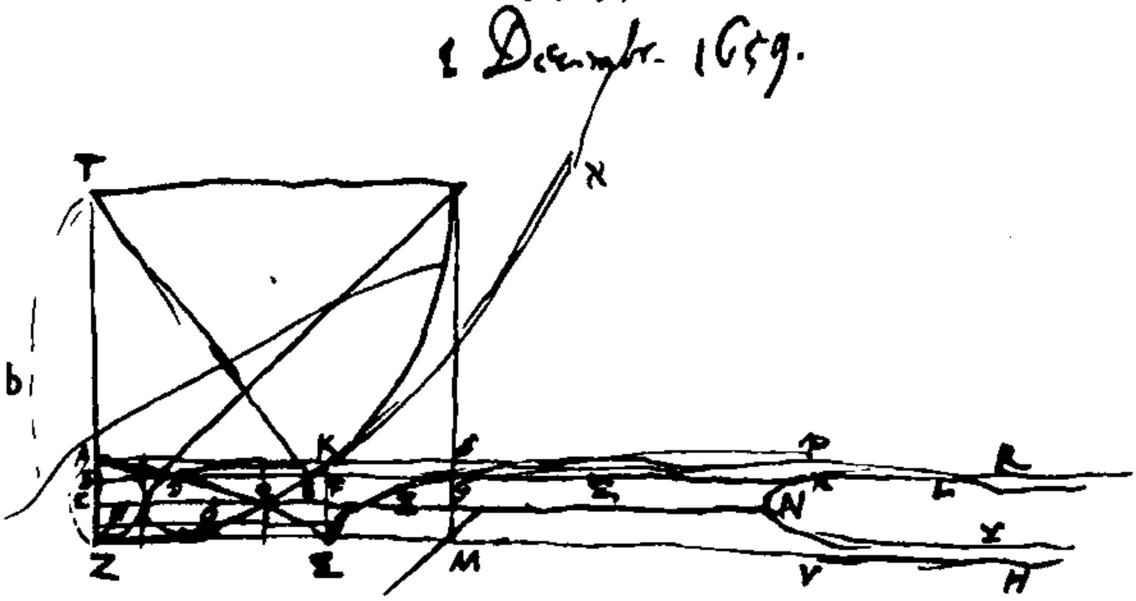
[Première Partie] [3].

1 Decembr. 1659.

Hinc data fuit occasio inventi de Cycloide.

Quæritur quam rationem habeat tempus minimæ oscillationis penduli ad tempus casus perpendicularis ex penduli altitudine [4].

[Fig. 6.] [5]



[1]) La Pièce, qui traite du tautochronisme de la cycloïde, est empruntée aux p. 72—74 du Recueil „Chartæ Mechanicæ" (la numération des feuilles de ce Recueil date de 1928) et aux p. 187—188 du Manuscrit A.

Elle a été publiée par l'un de nous avec une traduction néerlandaise („De Ontdekking van het Tautochronisme der Cycloidale Valbeweging, eene bijdrage tot de 300e herdenking van den geboortedag van Christiaan Huygens op 14 April 1929", door E. J. Dijksterhuis, Euclides, Afl. 5. jaargang 1928/29, P. Noordhoff, Groningen); dans cette publication on retrouvera les figures de Huygens, mais plus correctement dessinées.

Tempus per particulam E [6]), ex K cadentis [Fig. 6], est ad tempus per particulam B cum celeritate ex AZ in ratione composita ex longitudine E ad B, hoc est ex ratione TE seu GB ad EB, et ex ratione ZΣ seu BF ad BΔ [7]), quæ ratio composita est quæ ▭ GBF ad ▭ EBD.

Ut ▭ EBD ad ▭ FBG ita BF ad BX, unde ut omnes BX ad omnes BF ita tempus per KZ ad tempus per AZ cum celeritate ex AZ [8]). Et tempus per KZ

---

[2]) La Première et la Cinquième Partie de cette Pièce ont été datées par Huygens.

[3]) „Chartæ Mechanicæ", p. 72 recto. Outre le texte imprimé ici la feuille contient différents calculs biffés qui nous paraissent étrangers au problème de la cycloïde.

[4]) Il apparaît donc que c'est la considération de la période d'une oscillation suivant un très petit arc de cercle qui a conduit aux recherches dont est sorti la découverte du tautochronisme de la chute suivant des arcs cycloïdaux.

Galilée s'était déjà sérieusement occupé du mouvement d'un corps grave suivant une circonférence de cercle verticale; voir la Giorn. III des „Discorsi", surtout la Prop. XXXVI (Ed. Naz. VIII, p. 261 et suiv.). À la p. 73 verso des „Chartæ mechanicæ" Huygens se propose de calculer le temps d'une oscillation circulaire de 180°, mais sans succès; il remarque: „Quæritur tempus per quadrantem circumferentiæ quod dubito an inveniri possit". Il ne réussit que plus tard à trouver une solution approchée de ce problème (voir le début de la Pars Prima de l'„Horologium oscillatorium").

[5]) Dans la Fig. 6 T est le centre et TZ le rayon d'un quart de circonférence, K un point quelconque de ce dernier. L'arc ZK de la circonférence est censé coïncider avec l'arc ZK d'une parabole ZKℵ à sommet Z et „latus rectum" 2TZ. AQΣ est une parabole congruente avec la parabole ZKℵ ayant son sommet en A. La genèse des autres courbes de la figure est expliquée dans le texte.

[6]) E est une partie infiniment petite de l'arc KZ, B sa projection sur AZ. L'auteur compare le temps t_1 d'une chute suivant E, lorsque le mobile part de K avec une vitesse nulle, avec le temps t_2 correspondant à un mouvement uniforme suivant B d'un point possédant une vitesse égale à celle que possède en Z un mobile tombant parti de A avec une vitesse nulle. Nous désignerons cette dernière vitesse par v_2.

[7]) Il faut lire: BD. Voir le premier Théorème de la Deuxième Partie qui suit (note 2 de la p. 398).

[8]) L'auteur introduit donc une ordonnée BX telle que $\frac{t_1}{t_2} = \frac{BX}{BF}$ (voir sur les temps t_1 et t_2 la note 6). Par conséquent, si l'on considère les éléments successifs B comme égaux entre eux, de sorte que t_2 est une constante, les ordonnées BX mesureront les temps t_1. Le temps de la chute suivant KZ, considéré comme la somme des temps t_1, sera donc représenté par la surface ASPR..NT..HVZA [Fig. 6] considérée comme la somme de toutes les ordonnées BX. On a par conséquent

$$\frac{\text{temps de la chute suivant KZ}}{t_2\,(\text{c. à. d. temps de parcours d'un élément déterminé B avec la vitesse } v_2)} = \frac{\text{omnes BX}}{\text{BF}}.$$

Mais on a aussi

$$\frac{\text{temps de parcours de AZ avec la vitesse } v_2}{t_2} = \frac{\text{omnes BF}}{\text{BF}};$$

donc

$$\frac{\text{temps de la chute suivant KZ}}{\text{temps de parcours de AZ avec la vitesse } v_2} = \frac{\text{omnes BX}}{\text{omnes BF}} = \frac{\text{surf. AR..N..HZA}}{\square\ \text{KZ}}.$$

ad tempus per AZ [1]) ut ſpatium infinitum [2]) ASPRLNϒHVMZA ad 2 □ KZ [3]).

$$\text{CO} \text{ --- } \text{CG} \text{ --- } \text{CF} \text{ --- } \text{CN}\ ^{4)} \qquad \text{CO} \infty \tfrac{1}{2}\text{CF}$$

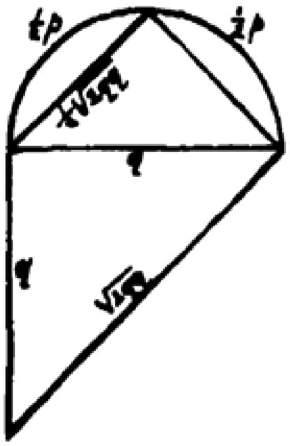
$$\text{ergo CN} \infty 2\text{BG}.$$

$$\text{ſit AZ} \infty c \qquad \text{CF} \qquad \text{CN} \infty 2\text{BG} \qquad \text{CI}$$

$$\text{ZM, TZ} \infty b. \qquad \sqrt{2bc} \text{ --- } 2b \text{ --- } \tfrac{1}{2}c \quad \frac{bc}{\sqrt{2bc}}\ ^{5)}$$

$$\text{ſive } \sqrt{\tfrac{1}{2}bc} \text{ hæc eſt ipſa CO} \infty \tfrac{1}{2}\text{CF}.$$

conſideratur AK applicata in circumferentia tanquam æqualis applicatæ in parabola ZKℵ, cujus $\frac{1}{2}$ lat. rectum TZ, cui eadem eſt parabola AQΣ. hoc eſt ſupponitur AK ∞ ZΣ [6]).



$$\text{C}\Pi$$

$$p \text{ --- } q \text{ --- } \tfrac{1}{2}c \text{ --- } \frac{\tfrac{1}{2}cq}{p}$$

$$\text{CI} \qquad \text{CF} \qquad \text{C}\Pi\ ^{7)}$$

$$\tfrac{1}{2}c \text{ --- } \sqrt{2bc} \text{ --- } \frac{\tfrac{1}{2}cq}{p} \quad \text{aliud } \left.\begin{array}{c}\square\, \dfrac{q\sqrt{2bc}}{p} \\ 2\end{array}\right\} \text{m.}$$

$$\frac{2q\sqrt{2bc}}{p}$$

$$\text{CN}$$

$$2b \text{ --- } \frac{2q}{p}\sqrt{2bc}$$

---

[1]) In margine: „tempus per AZ est æquale tempori motus æquabilis per AZ cum $^1/_2$ celeritate ex AZ".

[2]) C. à. d. un espace qui s'étend jusqu'à l'infini.

[3]) En effet, on a

$$\frac{\text{temps de parcours de AZ avec la vitesse } v_z \text{ (note 6 de la p. 393)}}{\text{temps de parcours de AZ lorsque le mobile tombant part du repos en A}} = \frac{1}{2}$$

(Galilée, De Motu Accelerato, Prop. I. „Discorsi", Giorn. III. Ed. Naz. VIII, p. 208).

[4]) F et G doivent être considérées ici comme des lettres courantes: lorsque B vient en C, F et

G seront les intersections de CN avec $K\Sigma$ et SM respectivement.

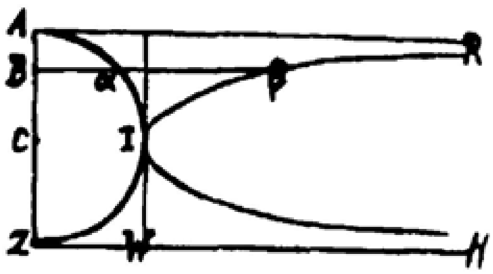
La définition de BX (note 8 de la p. 393), appliquée au point C au lieu de B, donne $\frac{CQ^2}{CF \cdot CG} = \frac{CF}{CN}$, où $CQ^2 = \frac{1}{2} Z\Sigma^2 = \frac{1}{2} CF^2$. Il s'ensuit que $CN = 2CG$.

Quant au raisonnement du texte, il faut l'entendre comme suit. Une droite CO est construite comme troisième proportionnelle à CF et à CQ. De $\frac{CQ^2}{CF^2} = \frac{1}{2}$, on tire donc $CO = \frac{1}{2} CF$. Dans la suite aussi l'auteur construit souvent des lignes ne servant qu'à représenter des expressions composées ayant la dimension d'une longueur (telles que l'expression $\frac{CQ^2}{CF}$ dans le cas considéré).

[5]) Dans la suite, aucun usage n'est fait de cette relation.

[6]) On vérifiera aisément que cette supposition revient à celle-ci: la circonférence (T; TZ) oscule en Z la parabole ZKN.

[7]) Dans ce qui suit l'auteur fait usage de la courbe à sommet I (voir la Fig. 6 et la Fig. ci-jointe).



La genèse de cette courbe est expliquée dans la quatrième Proposition de la Deuxième Partie de cette Pièce, à laquelle nous empruntons dès maintenant ce qui suit: $B\alpha$ étant une ordonnée quelconque de la demi-circonférence AZ, on détermine $B\beta$ de telle manière que

$$\frac{B\alpha}{CI} = \frac{CI}{B\beta}.$$

La Proposition citée dit en outre que la surface comprise entre la courbe ainsi construite, les asymptotes AR, ZH et la droite AZ est à celle du rectangle AW dans un rapport égal à celui de la demi-circonférence p au diamètre q.

Appelant cette surface O_2 et le „spatium infinitum" AR..N..HZA, considéré plus haut [Fig. 6], O_1, nous savons (voir la note 3, et la note 8 de la p. 393):

$$\frac{\text{temps de la chute suivant KZ}}{\text{temps de parcours de AZ, lorsque le mobile tombant part du repos en A}} = \frac{O_1}{2\square KZ}$$

et, d'après ce qui vient d'être dit, $\frac{O_2}{\square AW} = \frac{p}{q}$.

Remplaçons $\frac{O_1}{2\square KZ}$ par $\frac{O_1}{O_2} \cdot \frac{O_2}{\square AW} \cdot \frac{\square AW}{2\square KZ}$ (1).

On peut remarquer que les ordonnées correspondantes BX et $B\beta$ sont dans un rapport constant, égal à celui des surfaces O_1 et O_2. En effet, suivant la troisième Proposition de la Deuxième Partie, on a la relation $\frac{BE \cdot BD}{CQ^2} = \frac{B\alpha}{CI}$,

de sorte que $$BX = \frac{BF^2 \cdot BG}{BE \cdot BD} = \frac{BF^2 \cdot BG \cdot CI}{CQ^2 \cdot B\alpha},$$

tandis que $$B\beta = \frac{CI^2}{B\alpha}.$$

Dans le rapport $\frac{BX}{B\beta}$ la seule grandeur variable, $B\alpha$, disparaît. Pour déterminer ce rapport nous prenons le point B en C; il s'ensuit que $\frac{O_1}{O_2} = \frac{CN}{CI}$. L'équation (1) nous donne alors

$$\frac{O_1}{2\square KZ} = \frac{CN}{CI}\cdot\frac{p}{q}\cdot\frac{CI}{2AK} = \frac{CN\cdot p}{q\cdot 2AK} = \frac{2b}{\frac{2q}{p}\cdot AK},$$

où $AK = \sqrt{AZ\cdot 2TZ}$, si l'on considère AK comme ordonnée de la parabole ZKN. Puisque $TZ = b$ et $AZ = c$, on trouve en effet pour le rapport cherché la valeur $2b : \frac{2q}{p}\sqrt{2bc}$.

Chez Huygens le raisonnement n'est pas absolument le même: il se conforme évidemment aux règles de la théorie des rapports suivant Euclide, telles qu'on les trouve dans le Cinquième Livre des Éléments. Suivant cette théorie la transformation des équations doit s'accomplir en appliquant la conclusion δι' ἴσου („ex aequo" ou „ex aequali") — Euclide V, 23 — d'après laquelle on dérive des équations

$$\left\{\begin{array}{l} a:b = c:d \\ b:e = d:f \\ e:g = f:h \end{array}\right.$$

l'équation $a:g = c:h$.

Or, on sait
$$\left\{\begin{array}{l} O_1 : O_2 = CN : CI \\ O_2 : \square AW = p : q \\ \square AW : \square KZ = CI : CF. \end{array}\right.$$

Pour tirer de ces équations une nouvelle équation „ex aequo", il faut d'abord transformer la deuxième équation de telle manière que son troisième terme devienne CI ou $\frac{1}{2}c$. C'est ce qu'on obtient en posant $p:q = \frac{1}{2}c : C\Pi$ d'où l'on tire $C\Pi = \frac{\frac{1}{2}cq}{p}$.

Il faut ensuite transformer la troisième équation de telle manière que son troisième terme devienne $C\Pi$. On pose donc

$$CI : CF = C\Pi : \text{une quatrième longueur.}$$

Cette dernière est multipliée par 2, puisqu'il s'agit de comparer O_1 avec $2\square KZ$ (non pas avec $\square KZ$); on obtient ainsi $\frac{2q\sqrt{2bc}}{p}$. Le rapport cherché devient maintenant „ex aequo"

$$CN : \frac{2q\sqrt{2bc}}{p}.$$

Nous avons donc expliqué la signification de toutes les proportions qu'on trouve dans le texte.

ita erit ſpatium infinitum vertice N ad duplum $\square$ KZ, hoc eſt ita tempus per KZ ad tempus per AZ.

ſed tempus per AZ eſt ad tempus per TZ ut $\sqrt{2bc}$ ad $\sqrt{2bb}$ [1]) hoc eſt ut $\frac{2q}{p}\sqrt{2bc}$ ad $\frac{2q}{p}\sqrt{2bb}$

Ergo ex æquo tempus per KZ arcum ad tempus per TZ ut $2b$ ad $\frac{2q}{p}\sqrt{2bb}$ ſive ut b ——— $\frac{q}{p}\sqrt{2bb}$ hoc eſt ut p — $\sqrt{2qq}$. hoc eſt ut quadrans circumferentiæ ad ſuam ſubtenſam.

Quum AZ pro arbitrio ſumta ſit, fiatque ſemper tempus per KZ ad tempus per TZ ut p ad $\sqrt{2qq}$. ponendo nempe puncta K et E eſſe in parabola cujus vertex Z, $\frac{1}{2}$ lat. rectum TZ, hinc vidi opus eſſe, ſi curvam velimus per cujus arcus quosvis in Z terminatos, tempora deſcenſus ſint æqualia, ut ſit ejus naturæ, ut quemadmodum ET curvæ perpendicularis ad applicatam EB, ita faciendo rectam datam ut GB ad aliam EB, cadat punctum E in parabolam vertice Z. Hoc autem Cycloidi convenire inveni ex cognita tangentis ducendæ ratione [2]).

[1]) D'après la Prop. I du traité „De Motu Accelerato" de Galilée („Discorsi", Giorn. III, Ed. Naz. VIII, p. 208).

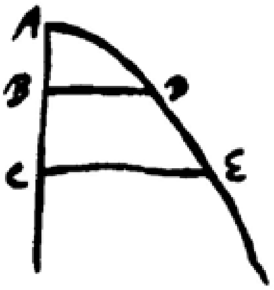
[2]) Ce dernier alinéa contient la découverte du tautochronisme de la chute cycloïdale. L'auteur observe que le résultat obtenu serait exact, si le point E se trouvait réellement sur la parabole ZKN et non pas sur la circonférence de cercle. Or, dans le cours du raisonnement E n'a été considéré qu'une seule fois comme un point de cette circonférence, savoir là où le rapport des éléments E et B (voir la note 6 de la p. 393) a été remplacé par $\frac{TE}{BE}$ ou $\frac{GB}{BE}$. Lorsqu'on substitue une autre courbe à la circonférence de cercle, de sorte que TE représente la normale en E, limitée par la verticale passant par Z, on n'aura plus TE = la longueur constante GB.

Mais si l'on pose $\frac{TE}{BE} = \frac{GB}{BE'}$ (GB étant une longueur constante donnée), où BE' correspond à la „alia BE" du texte, et que E' est situé exactement sur la parabole ZKN, le raisonnement du texte reste valable en entier et le tautochronisme trouvé devient un tautochronisme exact.

Huygens remarque qu'il en sera ainsi, lorsque le point E se trouve sur une cycloïde (voir la cinquième Proposition de la Deuxième Partie qui suit).

[Deuxième Partie] [1]).

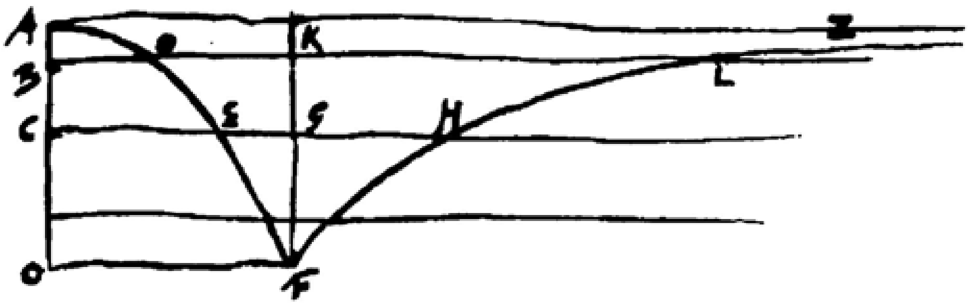
[Fig. 7.]



Sine quibus motus æquabilis in cava cycloide inveniri non poterat.

velocitates gravis cadentis ex A per AC [Fig. 7], eſſe in punctis ſingulis B, C, ſicut applicatæ in parabola BD, CE [2]).

[Fig. 8.]



Tempora quibus grave ex A cadens [Fig. 8] particulas æquales conficit, puta in B et C, eſſe inter ſe ſicut applicatæ BL, CH in curva FHL, ejus naturæ ut ſemper ſint continue proportionales BD, BK, linea certa, et BL [3]).

Dictæ curvæ ſpatium infinitum OFHLZA eſſe duplum rectanguli AF [4]).

[1]) Chartæ Mechanicæ" p. 73 recto.

[2]) Cette Proposition est facile à démontrer: d'une part dans la parabole les ordonnées sont proportionnelles aux carrés des abscisses, d'autre part les distances parcourues par un mobile tombant à partir du repos sont proportionnelles aux carrés des temps, donc aussi aux carrés des vitesses.

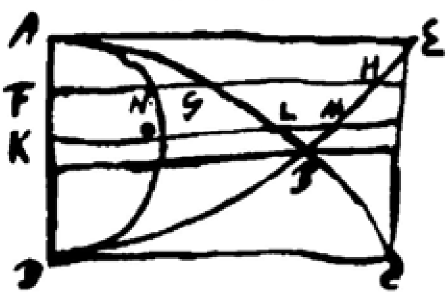
[3]) Comme BK est une constante, tout aussi bien que la „linea certa", la Proposition dit que BL est inversement proportionnelle à BD. Cette Proposition est une conséquence de la précédente. En effet, puisque les temps considérés sont inversement proportionnels aux vitesses, ils le sont aussi aux ordonnées correspondantes de la parabole. C. à. d. on a BL . BD = CH . CE, etc.

[4]) En effet, on a

$$\frac{2}{1} = \frac{\text{temps de la chute suivant AO d'un mobile partant du repos}}{\text{temps de parcours de AO avec la vitesse constante } v_0 \text{ [vitesse finale de la chute suivant AO]}} =$$

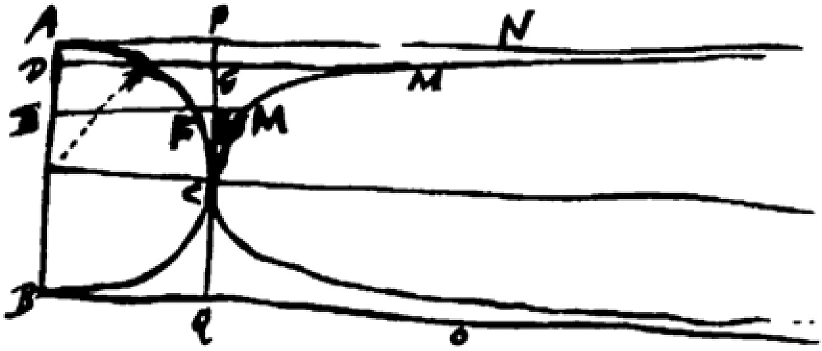
$$\frac{\text{omnes BL}}{\text{omnes OF}} = \frac{\text{surf. OFHLZA}}{\text{surf.} \ \square \text{AF}}.$$

[Fig. 9.]



Si ſint duæ ſemi-parabolæ [Fig. 9] quæcunque ad eundem axem ſed contrario ſitu, ut ABC, DBE, et ducantur applicatæ communes FGH, KLM, eandem eſſe rationem rectanguli HFG ad MKL quæ eſt partium dictarum applicatarum, ſemicirculo ſuper AD interceptarum, nempe quæ NF ad OK [5]).

[Fig. 10.]



Si ſemicirculum ACB [Fig. 10] tangat in vertice recta PCQ, ductisque ordinatis DFG, fiat ſicut DF ad DG ita hæc ad DM Eſſe ſpatium inter curvam CMM et aſymptotos ejus NA, OB, rectamque AB interjectum ad rectangulum AQ, ut ſemiperipheria AĊB ad rectam AB [6]).

Si PQ diſtet a vertice C; tamen ſpatium curvæ quæ tunc orietur datum eſſe, poſita ſcilicet quadratura circuli [7]).

---

[5]) On a en effet $\frac{FG.FH}{KL.KM} = \frac{\sqrt{AF.DF}}{\sqrt{AK.DK}} = \frac{FN}{KO}$.

[6]) Nous émettons l'hypothèse suivante sur la méthode de démonstration de ce théorème par Huygens. Comparons les temps dans lesquels un mobile parcourt d'une part la demi-circonférence, d'autre part le diamètre AB, avec la même vitesse constante; ces temps seront entre eux comme p (la demi-circonférence): q (le diamètre). Or, on trouve une autre expression du même rapport en comparant un élément F de l'arc AB avec sa projection D sur le diamètre AB et en remarquant que

$$\frac{\text{le temps de parcours de F}}{\text{le temps de parcours de D}} = \frac{VF}{DF} = \frac{CV}{DF} = \frac{DM}{VC},$$

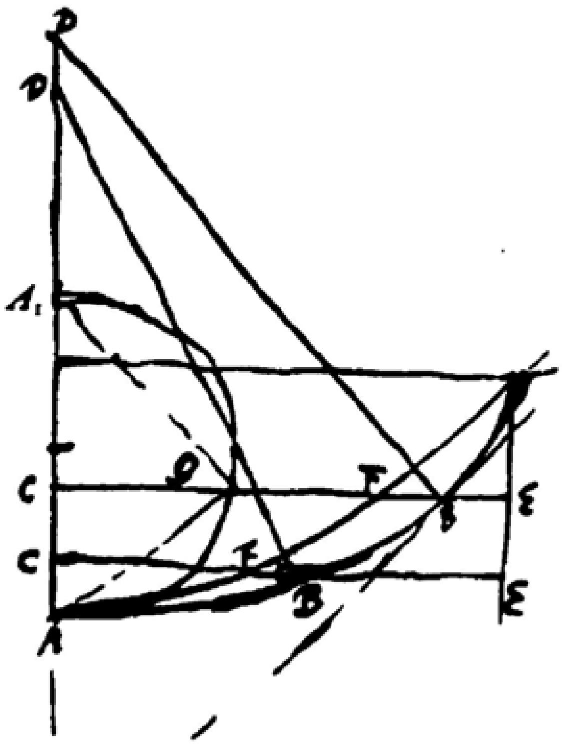
V étant le centre de la circonférence de cercle.

On en conclut, comme dans la note 8 de la p. 393, que

$$\frac{p}{q} = \frac{\text{le temps de parcours de la demi-circonférence AB}}{\text{le temps de parcours du diamètre AB}} = \frac{\text{omnes DM}}{\text{omnes VC}} = \frac{\text{surf. ANMCOQBA}}{\text{surf. }\square\text{AQ}}.$$

[7]) Ce cas se présente dans la Fig. 6. Le „spatium infinitum" AR .. NT .. HZA est un „spatium datum"; c. à. d. une surface de grandeur calculable.

[Fig. 11.][1])



Curvam AB [Fig. 11] quæ ſit ejus naturæ, ut ductâ ipſi BD ad ang. rectos, quæ occurrat axi AD in D, faciendoque ut BD ad applicatam ordinatim BC, ita ſit recta quævis EC ad CF in eadem ordinata ſumptam, ſit FFA parabola; eam curvam eſſe Cycloidem [2]).

[1]) Nous avons ajouté à la Fig. 11 les lettres A_1 et G.

[2]) Considérons cette Proposition conjointement avec la remarque qui clôt la Première Partie de cette Pièce (voir la p. 397); tandis que l'auteur disait à cet endroit que la cycloïde possède la propriété en question, il avance ici qu'une courbe possédant cette propriété est nécessairement une cycloïde. Il peut avoir démontré la vérité du premier théorème de la façon suivante. AA_1 étant le cercle générateur de l'arc de cycloïde ABB [Fig. 11], et B un point quelconque de cet arc correspondant à la normale BD, on a suivant la propriété bien connue des tangentes à la cycloïde (voir à la p. 374 et suiv. du T. XIV la démonstration de Huygens): BD est parallèle à GA_1, lorsque BG est horizontale (parallèle à la tangente au point A_1 à la circonférence AA_1) et que G se trouve sur la circonférence AA_1. Par conséquent $\frac{BD}{BC} = \frac{A_1G}{CG} = \frac{AG}{AC}$. Or, si l'on prend F de telle manière que $\frac{BD}{BC} = \frac{CE}{CF}$, où CE est une longueur constante arbitraire, il s'ensuit que $\frac{AG}{AC} = \frac{CE}{CF}$ ou bien $CF^2 = \frac{AC^2 . CE^2}{AG^2} = \frac{AC^2 . CE^2}{AA_1 . AC} = \frac{CE^2}{AA_1} AC$, d'où l'on conclut que le lieu des points F est une parabole.

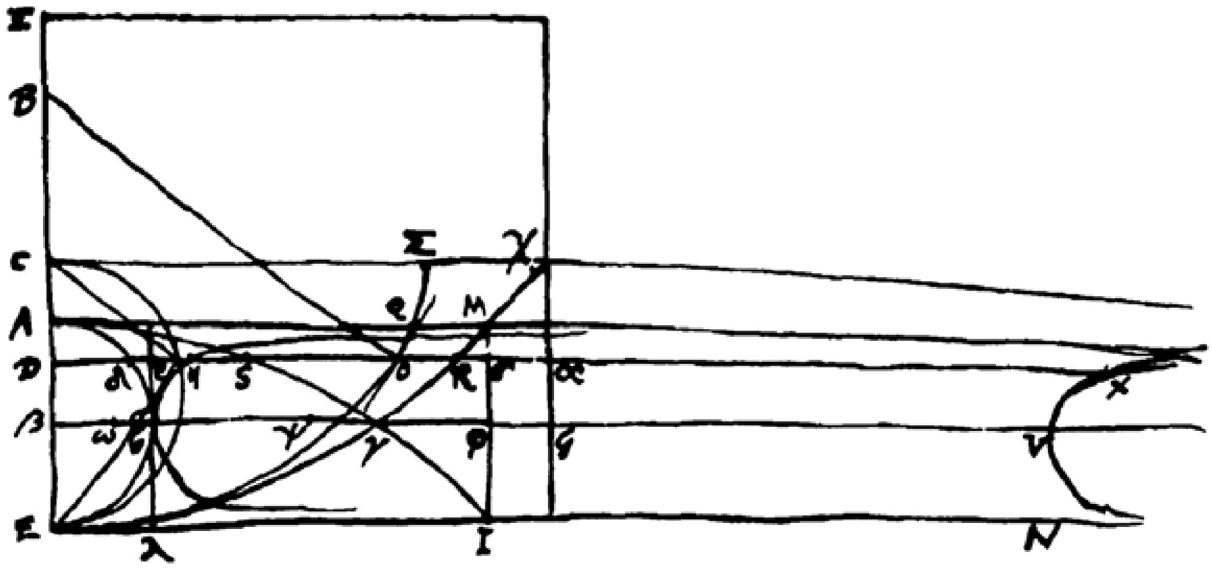
Quant au second théorème, Huygens peut l'avoir établi comme suit, en commençant par admettre que la courbe considérée possède le sommet A et l'axe de symétrie AD.

Le „latus rectum" de la parabole qui doit provenir de la construction étant p, prenons une longueur AA_1 telle que $CE^2 = p . AA_1$; puisse le cercle à diamètre AA_1 engendrer une cycloïde en roulant sur une perpendiculaire en A, à l'axe AD. La tangente au point d'intersection de cette cycloïde avec le prolongement de CG est parallèle à AG. Mais la tangente en B

[Troisième Partie.] [3])

Sed ſpatium infinitum $\zeta\eta$ eſt ad $\square$ $A\lambda$ ut ſemicircumferentia $A\zeta E$ ad AE, hoc eſt (ſi fiat ut $\frown$ $A\zeta E$ ad AE ita $\beta\zeta$ ad $\beta\omega$) ut $\beta\zeta$ ad $\beta\omega$. Ergo ex æquo erit ſpatium infinitum VX ad $\square$ $A\lambda$ ut $V\beta$ ad $\beta\omega$ hoc eſt ut $2b$ ad $\frac{1}{2}\frac{cc}{p}$. nam $V\beta$ eſt ∞ $2b$ et $\beta\omega$ ∞ $\frac{1}{2}\frac{cc}{p}$. ſit ut $\square$ $A\lambda$ ad $\square$ AI, hoc eſt ut $\beta\zeta$ ad $\beta\varphi$ ita $\beta\omega$ ad $\beta\psi$

[Fig. 12.]



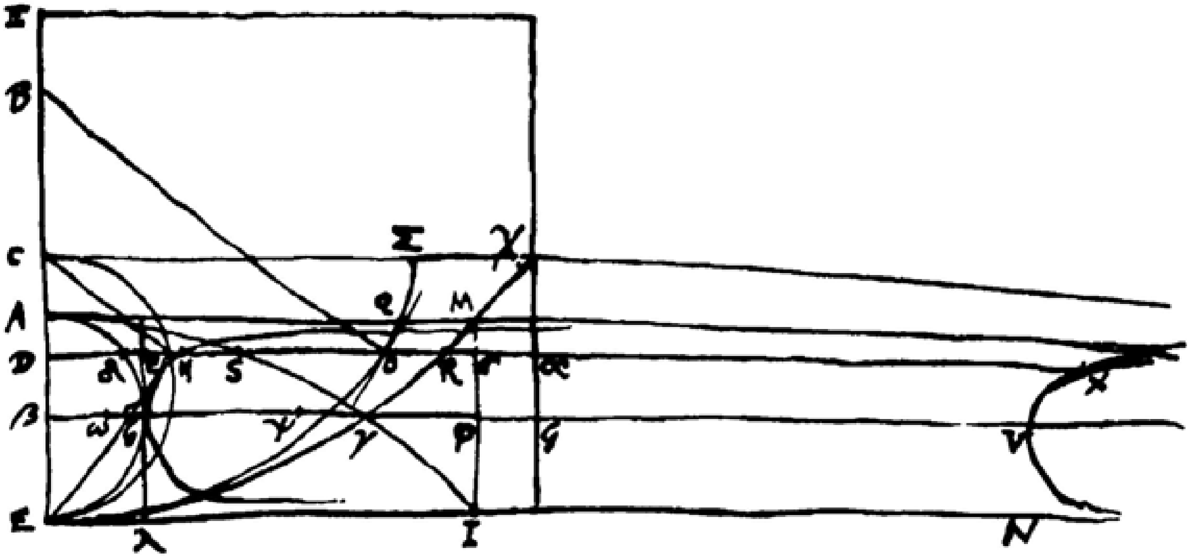
à la courbe primitive (lieu des points B) est également parallèle à AG: en effet, on a $\frac{CF^2}{CE^2} = \frac{AC}{AA_1}$, donc $\frac{AC}{AA_1} = \frac{BC^2}{BD^2}$ ou $\frac{AG}{AA_1} = \frac{BC}{BD}$ ou bien $\frac{CG}{A_1G} = \frac{BC}{BD}$, d'où l'on conclut que A_1G est parallèle à DB, partant AG parallèle à la tangente en B.

Du point A partent donc deux courbes possédant des tangentes parallèles entre elles en leurs points d'intersection avec une ordonnée quelconque perpendiculaire à AD. Huygens peut avoir reconnu intuitivement que ces courbes doivent être identiques, et il aurait pu donner, s'il l'eût fallu, une démonstration exacte de cette identité d'après une méthode analogue à celle par laquelle il prouve dans la Prop. III de la Pars III de l'„Horologium oscillatorium" une proposition du même genre pour deux courbes possédant des normales communes.

[3]) La Troisième Partie est empruntée à la p. 74 recto des „Chartæ Mechanicæ". Elle contient

51

[Fig. 12.]



[ut $\beta\zeta$ ad $\beta\varphi$ ita $\beta\omega$ ad $\beta\psi$]

$$\frac{1}{2}c \text{ ------ } \sqrt{2bc} \text{ -- } \frac{1}{2}\frac{cc}{p} \Big| \frac{c\sqrt{2bc}}{p}$$

Ergo ſpatium infinitum VX ad $\square$ AI ut $V\beta$ ad $\beta\psi$

$$2b \text{ ---- } c\frac{\sqrt{2bc}}{p}$$

unde ſpatium infinitum VX ad 2 $\square$ AI
hoc eſt tempus per QOE ad tempus per AE ut b ---- $\frac{c}{p}\sqrt{2bc}$.

Sed tempus per AE eſt ad tempus per CE, hoc eſt, per dimidiam EΞ ut AM ad Cχ, hoc eſt, ut $\sqrt{2bc}$ ad b, hoc eſt ut $\frac{c}{p}\sqrt{2bc}$ ad $\frac{bc}{p}$.

Ergo ex æquo erit tempus per QOE ad tempus per CE ut b ad $\frac{bc}{p}$ hoc eſt ut p ad c.

Ergo ex quocunque puncto Q mobile deſcendat per curvam ΣQE erit tempus

un fragment d'un raisonnement analogue à celui de la p. 72 recto (voir la Première Partie de cette Pièce) mais formulé plus correctement. C'est le début qui fait défaut; celui-ci se trouvait sans doute sur une feuille brûlée, dont le dernier reste à bords carbonisés est attaché à la defcenfus ad tempus defcenfus per perpendicularem CE ut p ad c, hoc eft ut femicircumferentia ad diametrum.

Ergo ex quocunque puncto curvæ defcenderit usque in E, femper æquale tempus impendet.

p. 74; on y lit de la main de Huygens: „pertinebat ad inventum de Cycloides Isochronismo".

La partie manquante de la déduction se reconstruit aisément (comparez à ce sujet le deuxième alinéa de la note de la p. 404):

Dans la Fig. 12 on a $C\chi = E\Sigma = 2\,CE$; $C\chi$ est la base de la cycloïde; $E\Sigma$ est l'arc de cycloïde donné, Q le point où commence la chute avec une vitesse nulle, O un point quelconque de l'arc QE. La parabole $E\chi$ est le lieu des points R, déterminés par l'équation $\frac{BO}{DO} = \frac{C\chi}{DR}$. $C\chi$ est donc la longueur constante arbitraire qui s'appelait CE dans la cinquième Proposition de la Deuxième Partie (voir la Fig. 11 à la p. 400). ASI est une parabole à sommet A, congruente avec la parabole $E\chi$.

On a donc, en raisonnant comme dans le cas de la p. 72 recto (voir aux p. 393—397 les notes de la Première Partie):

$$\frac{\text{temps de parcours de l'élément O pour le mobile parti de Q}}{\text{temps de parcours de l'élément D avec la vitesse constante } v_E} =$$

$$\frac{BO}{DO} \cdot \frac{v_E}{v_D} = \frac{D\alpha}{DR} \cdot \frac{EI}{DS} = \frac{D\alpha \,.\, D\sigma}{DR \,.\, DS}.$$

Posons

$$\frac{D\alpha \,.\, D\sigma}{DR \,.\, DS} = \frac{DX}{D\sigma};$$

on aura alors, comme dans la Première Partie,

$$\frac{\text{temps de parcours de l'arc QE}}{\text{temps de la chute suivant AE}} = \frac{\text{omnes DX}}{2 \,.\, \text{omnes } D\sigma} = \frac{\text{surface AQ..XV..NEA}}{2.\ \text{surface} \sqsubset\!\sqsupset \text{AI}}.$$

Construisant ensuite $D\eta$ de telle manière que $D\delta : D\varepsilon = D\varepsilon : D\eta$, on aura

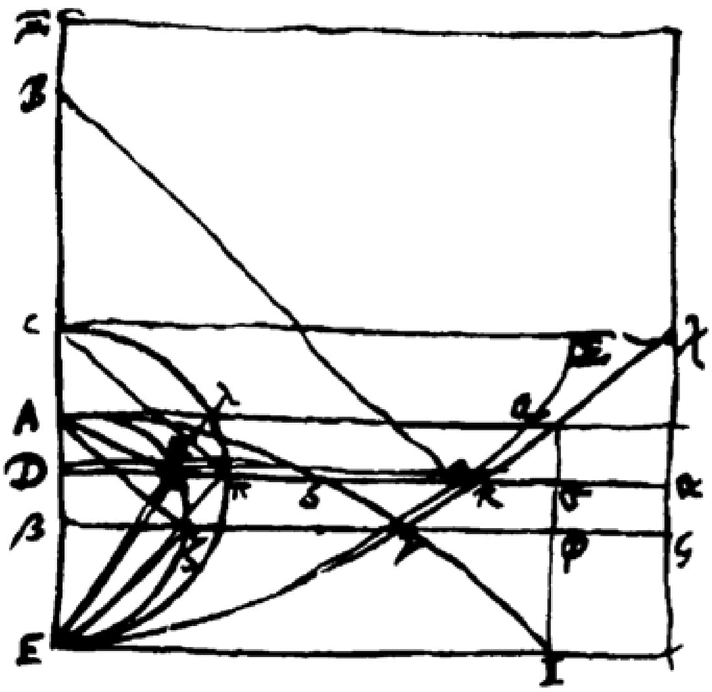
$$\frac{\text{surface AQ..}\eta\zeta\text{..NEA}}{\text{surface} \sqsubset\!\sqsupset \text{A}\lambda} = \frac{\text{demi-circonférence}}{\text{diamètre}}$$

(4ième Proposition de la Deuxième Partie, deuxième alinéa de la p. 399).

C'est par cette dernière proportion que commence le texte imprimé de notre Troisième Partie; la surface AQ..$\eta\zeta$..NEA y est désignée par $\zeta\eta$. Le reste du raisonnement est entièrement comparable à celui de la p. 72 recto (voir la Première Partie de cette Pièce). Pour faciliter la comparaison nous observons que $\beta\omega$ [Fig. 12] correspond à Cn [Fig. 6], et c à q.

Quatrième Partie [1]).

[Fig. 13.]



Ponimus mobile deſcendere per cycloidem ex puncto aliquo Q [Fig. 13] usque in E; et comparandum ſit tempus hujus deſcenſus cum tempore quo mobile cadit ex A in E motu naturaliter accelerato vel cum tempore huic æquali, quo nempe percurreret lineam AE motu æquabili et celeritate dimidia ejus quam acquirit in fine caſus per AE.

ΞEI angulus rectus. CE ∞ CΞ. ERχ eſt parabola cujus latus rectum ∞ 2EΞ. cui ſimilis eſt oppoſita ASI.CΠE eſt circulus genitor cycloidis EOQΣ.AζE ſemicirculus. Aβ ∞ βE.

Tempus per particulam cycloidis in O, puncto quolibet, ad tempus per particulam perpendicularis in D, ponendo utramque particulam ijsdem parallelis horizontalibus includi, et celeritatem mobilis in O eſſe eam quam acquirit cadendo ex Q ſive ex altitudine AD, celeritatem vero mobilis in D eſſe dimidiam ejus quam acquirit cadendo ex AE; illud ergo tempus ad hoc habebit rationem compoſitam ex ratione particulæ O ad particulam D, et ex ratione celeritatis qua peragitur particula D ad celeritatem qua peragitur O. per propoſ... Galilei de motu

[1]) Les pages examinées contiennent encore différentes rédactions ou projets de rédaction de la preuve de la propriété tautochrone de la cycloïde. En faisant suivre ici le fragment qu'on trouve à la p. 187 du Manuscrit A, nous observons l'ordre chronologique: ce fragment doit être postérieur aux Parties précédentes et antérieur aux deux démonstrations complètes qui suivent. En effet, dans le raisonnement considéré ici la parabole Eχ joue encore un rôle, tandis que dans la démonstration plus correcte elle ne paraîtra plus; mais d'autre part l'auteur cherche déjà à s'affranchir de l'emploi des courbes à sommets V et ζ de la Fig. 12.

Le raisonnement initial de cette p. 187 est conforme au début reconstruit du raisonnement qui se poursuit dans le morceau de la p. 74 recto des „Chartæ Mechanicæ" (voir la Troisième Partie qui précède et, à la p. 403, le deuxième alinéa de la note 3 de la p. 401); il confirme donc æquabili. hoc eſt, et ex ratione celeritatis dimidiæ acquiſitæ caſu per AE ad celeritatem acquiſitam caſu per QO ſive AD. hoc eſt, et ex ratione dimidiæ EI ad DS, quia ASI eſt parabola. Eſt autem particula O ad D, ut OB (quæ cycloidi occurrit ὀρθογώνιως) ad OD. hoc eſt ut CΠ ad ΠD, (nam CΠ eſt parall. BO). hoc eſt ut CE ad EΠ, hoc eſt in ſubduplicata ratione CE ad ED, ac propterea eadem quam habet $C\chi$ ad DR. Ergo tempus dictum per particulam O ad tempus per D particulam, habet rationem compoſitam ex ratione $\frac{1}{2}$ EI ad DS, et $C\chi$ ad DR. hoc eſt eam quam $\frac{1}{2} \square\, C\chi$, EI, ſive $\frac{1}{2} \square\, \alpha D\sigma$ ad $\square$ RDS. hanc autem dico eſſe eandem quæ $\frac{1}{4}$ EI ad $D\delta$. nam quia $\square\, \alpha D$, $\frac{1}{2} D\sigma$ ad qu. $\beta\gamma$, ſive ad $\square$ ſub $A\beta$ et $2\alpha D$ (nempe latus rectum parabolæ) ſive ad $\square$ AE, αD, eſt ut $\frac{1}{2} D\sigma$ ſive $\frac{1}{2}$ EI ad AE ſive ut $\frac{1}{4}$ EI ad $\zeta\beta$. quadratum vero $\beta\gamma$ ad $\square$ RDS ut $\zeta\beta$ ad δD: erit ex æquo $\frac{1}{2} \square\, \alpha D\sigma$ ad $\square$ RDS ut $\frac{1}{4}$ EI ad $D\delta$.

[Cinquième Partie] [2]).

15 Dec. 1659.

Demonſtratio melior huc tandem redacta.

Sit dimidia cycloides ABC vertice A deorſum ſpectante et axe AD ad perpendic. [Fig. 14].

Et ex quocunque ejus puncto B deſcendat per ipſam mobile usque in A. Dico

---

cette reconstruction. La déviation commence là où le rapport $\frac{OB}{OD}$ est égalé à $\frac{C\Pi}{D\Pi}$, c. à. d. au rapport de deux longueurs se rapportant au cercle CE qui engendre la cycloïde. On passe de là à la parabole $ER\chi$ en posant $\sqrt{\frac{EC}{ED}} = \frac{C\chi}{DR}$.

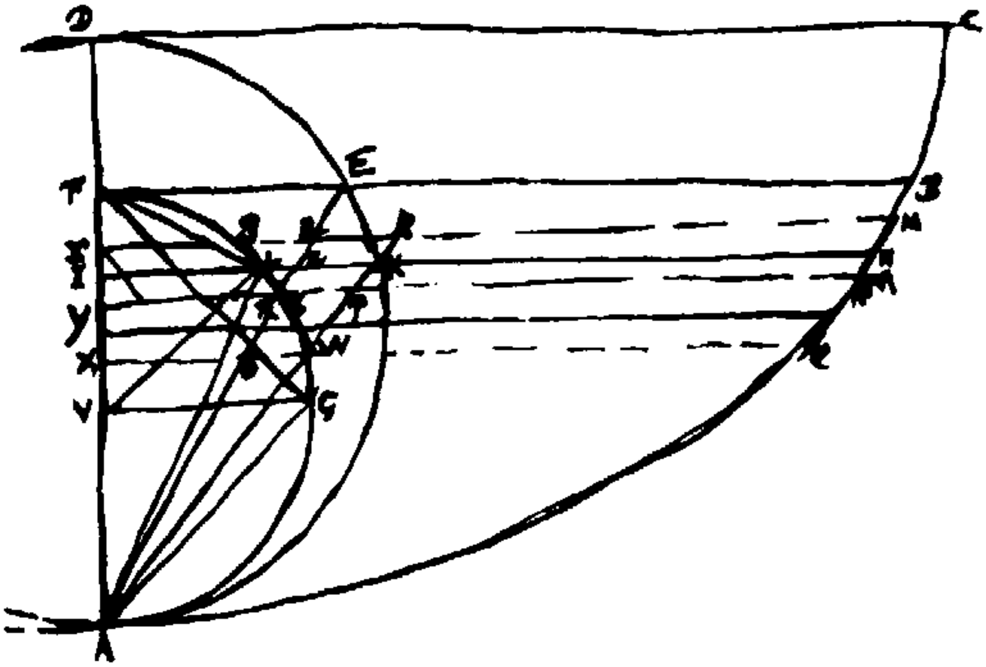
L'auteur trouve ensuite que l'expression $\frac{\frac{1}{2} D\alpha . D\sigma}{DR . DS}$ est égale au rapport $\frac{\frac{1}{4} EI}{D\delta}$, de sorte que la courbe à ordonnées DX [Fig. 12] n'est plus introduite; mais il ne va pas plus loin: le morceau est resté à l'état fragmentaire.

[2]) Cette Partie est empruntée aux p. 188—191 du Manuscrit A. Elle contient une preuve complète de la propriété tautochrone de la cycloïde, preuve qui, il est vrai, ne satisfait pas

tempus hujus defcenfus ad tempus cafus perpendicularis ex D in A, fore ut femiperipheria circuli ad diametrum. Ideoque ex quovis cycloidis puncto tempora defcenfus æqualia effe [1]). Sit enim BF parallela CD, quam fecet femicirculus genitor DEA in E et ducatur AE [2]).

Magna nec ingenijs inveftigata priorum [3]).

[Fig. 14.]



Quia igitur tempori cafus per DA æquale eft tempus defcenfus per planum inclinatum EA *, five tempus quo tranfitur eadem EA motu æquabili et celeri-

---

encore aux conditions rigoureuses que l'auteur s'est imposées en rédigeant la démonstration définitive de l'„Horologium oscillatorium".

On trouve une deuxième rédaction de cette preuve aux p. 76—77 des „Chartæ Mechanicæ"; mais elle diffère trop peu de celle publiée ici pour qu'il soit nécessaire de la reproduire in extenso. Nous nous contenterons de la citer dans quelques notes et d'en emprunter les trois derniers alinéas (voir la note 1 de la p. 410).

[1]) On lit à la p. 76 recto des „Chartæ Mechanicæ" deux énoncés de cette proposition; ils ont été biffés tous les deux. Les voici:

„Tempora reciprocationum quibus mobile per cavam cycloidem naturali impetu descendit ascenditque, a quocunque cycloidis puncto dimissum illud fuerit sunt æqualia; Habentque singula eam rationem ad tempus casus perpendicularis per axem cycloidis quam circumferentia circuli ad diametrum".

„Tempora lationum reciprocarum mobilis per quoslibet cycloidis arcus inter tate dimidia ejus quam acquirit mobile cadendo per EA *, vel per FA * perpendiculariter; Oſtendendum nobis eſt, tempus per partem cycloidis BA eſſe ad dictum tempus motus æquabilis per EA, ut ſemicircumferentia circuli ad diametrum.

Deſcribatur ſuper FA ſemicirculus FGA, et intelligatur ei circumſcriptum polygonum ex tangentibus cujus unum latus ſit SLS. Poteſt autem tot laterum fieri ut à peripheria ipſa FLA quamlibet parum differat. Per contactum L ducatur ILKH recta parall. DC, cui item parallelæ ducantur TM, intercipientes polygoni latus SS, ut et rectam MHM, tangentem cycloidem in H, rectæ vero AE partem RR. Quod ſi ſingulis porro lateribus polygoni circa FLA deſcripti, eodem modo tangentes cycloidis reſpondentes conſtituantur, hæ tandem ſi infinitus numerus earum fuerit ipſam curvam conficient, et tempus deſcenſus mobilis per omnes ejusmodi tangentes idem erit cum tempore deſcenſus per curvam BHA ſecundum ante expoſita [6]). Tempus deſcenſus per ſingulas earum ponimus non differre a tempore motus æquabilis per easdem celeritate ea quæ acquiritur caſu ex puncto B usque ad punctum contactus cujusque tangentis. Veluti pro tempore deſcenſus per MM uſurpabimus tempus quo tranſiretur MM motu æquabili, celeritate vero quanta acquiritur caſu per BH ſive per perpend. FI; nam hæ celeritates eædem ſunt ut oſtenſum eſt. atque ita in ſingulis tangentibus fieri intelligendum.

---

se sunt æqualia, habentque singula ad tempus casus perpendicularis per axem cycloidis eam rationem quam circumferentia circuli ad diametrum".

On lit encore en marge: „Theorema hoc proponatur ijs verbis quibus positum est in fine pag. præcedentis". Il s'agit apparemment de la p. 74 recto (voir, à la p. 401, la Troisième Partie de cette Pièce).

[2]) Ici il y a un signe de renvoi qu'on retrouve à la p. 189 du Manuscrit A.

[3]) Ovide, Métamorphoses, XV, 146.

[4]) Voir „Discorsi", Giorn. III, Ed. Naz. VIII, p. 221 (Prop. VI) et p. 208 (Prop. I).

[5]) Chez Galilée ceci n'est pas une proposition, mais un postulat; voir „Discorsi", Giorn. III, Ed. Naz. VIII, p. 205.

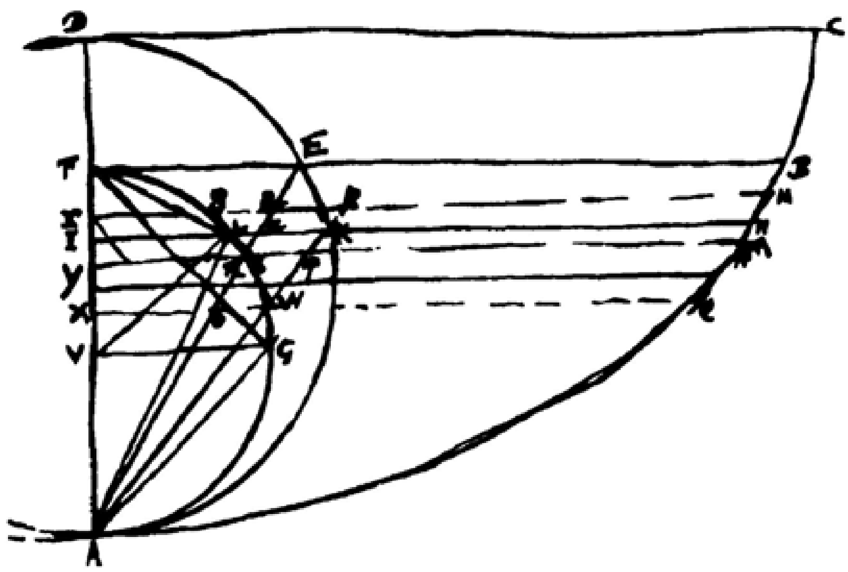
[6]) Voir la p. 411. Après cette phrase les mots „secundum quæ etiam" ont été intercalés. Ce sont les premiers mots de la remarque qu'on trouve in margine: „secundum quæ etiam tempus motus accelerati per singulas adæquabimus tempori cuidam motus æquabilis, videlicet ut pro tempore motus accelerati per MM sumatur".

À la p. 76 verso des „Chartæ Mechanicæ" une phrase qui exprime à peu près la même chose fait partie du texte lui-même. On y lit: „... per curvam BHA, secundum ante exposita. Secundum quæ etiam pro tempore descensus per MN usurpabimus tempus quo transiretur eadem MN motu æquabili, celeritate vero quanta acquiritur casu per BH".

Porro jungatur AK, et fecet in PP parallelas TM. Jungantur item FL, LA, ut et FG, GA, fecto prius femicirculo FGA bifariam lineâ VG ex centro eductâ. Quoniam itaque lineam MM tranfiri ponimus celeritate æquabili quanta acquiritur cafu per FI, lineam vero RR, celeritate æquabili dimidia ejus quæ acquiritur cafu per FA, habebit tempus per MM ad tempus per RR rationem eam quæ componitur ex ratione MM ad RR et ex ratione dimidiæ celeritatis acquifitæ cafu per FA ad celeritatem acquifitam cafu per FI *. Atqui celeritas tota ex cafu per FA eft ad celeritatem ex cafu per FI in fubduplicata [ratione] fpatiorum FA ad FI [1]) ac proinde eadem quæ FA ad FL, ergo dimidia celeritas ex cafu per FA

* Galilei theor… de motu Æquab.

[Fig. 14.]



ad celeritatem ex cafu per FL ut VF ad FL. Itaque tempus dictum per MM ad tempus per RR habebit rationem compofitam ex ratione MM ad RR et ex ratione VF ad FL. Eft autem MM tangens [2]) cycloidem in puncto H parallela rectæ AK*, ideoque PP æqualis MM. Ergo tempus dictum per MM ad tempus per RR habebit rationem compofitam ex ratione PP ad RR, hoc eft, KA ad ZA, hoc eft EA ad KA *, et ex ratione VF ad FL. Eft autem ut EA ad KA, ita FA ad AL;

* theorema de tangente in hoc libro [2]) fupra demons.

* nam tres hasce EA, KA, ZA proportionales effe facile oftendi poteft.

[1]) À la p. 76 verso des „Chartæ Mechanicæ" on trouve ici un renvoi à la Prop. 2 Galilei de motu accelerato. Voir „Discorsi", Giorn. III, Ed. Naz. VIII, p. 209.

[2]) On trouve ici les mots: „vide pag. præced. ad signum…". On trouve en effet le même signe au début du passage qui suit, à la p. 188 du Manuscrit A.

nam quia EA quadr. eſt æquale □° DAF, et KA qu. □° DAI, eſtque □ DAF ad □ DAI ut FA ad AI, hoc eſt ut qu. FA ad qu. AL; ergo et qu. EA ad qu. KA ut qu. FA ad qu. AL, ideoque EA ad AK ut FA ad AL, ſicut dicebamus. Ratio itaque temporis per MM ad tempus per RR, eadem eſt compoſitæ ex ratione FA ad AL et ex ratione VF ad FL, ac proinde eadem erit quæ □ AFV ſive $\frac{1}{2}$ qu. AF ad □ AL, LF. ſive, ſumtis horum dimidijs, eadem quæ trianguli FGA ad triangulum FLA. Sunt autem triangula hæc ſuper eadem baſi AF, ac proinde inter ſe ut altitudines GV ad LI. Ergo tandem tempus per MM ad tempus per RR erit ſicut GV ſive VL ad LI, hoc eſt ut tangens SS ad ΥΥ[4]). hoc enim facile apparet[5]).

Eodem modo oſtendetur tempus deſcenſus motus accelerati per ſequentem cycloidis tangentem NQ eſſe ad tempus æquabile per RO, particulam rectæ AE inter easdem parallelas horizontales cum dicta tangente interceptam, ſicut tangens circuli SW ad rectam ΥX, quarum utraque inter easdem quoque iſtas parallelas interjicitur, atque ita de cæteris omnibus. Quia autem lineam totam EA, ac proinde ſingulas quoque partes ejus ponimus motu æquabili percurri, ſcilicet velocitate dimidia ejus quæ acquiritur caſu per FA, Idcirco neceſſario erit tempus per RR ad tempus per RO, ut ipſa longitudo RR ad RO, hoc eſt ut ΥΥ[4]) ad ΥX. atque ita ſimiliter cætera tempora per particulas rectæ EA inter ſe, ſicut particulæ ipſis reſpondentes in recta FA.

Sunt itaque magnitudines quædam rectæ ΥY, YX &c. et totidem aliæ tempora ſcilicet quibus percurruntur rectæ RR, RO &c., quarum unaquæque in prioribus ad ſuam ſequentem eadem proportione refertur qua unaquæque poſteriorum ad ſuam ſequentem. Quibus autem proportionibus priores ad alias totidem nempe ad tangentes circuli, SS, SW referuntur ijsdem proportionibus et eodem ordine poſteriores ad alias totidem referuntur, nempe ad tempora motus qualem diximus, per tangentes cycloidis MM, MQ. Ergo * quam rationem habent omnes ſimul priores ad omnes eas ad quas referuntur, hoc eſt quam tota FA recta ad totam ſemicircumferentiam FLA, eam habebunt omnes poſteriores ad omnes ad quas ipſæ ſimiliter referuntur, hoc eſt tempus quo tota EA percurritur motu æquabili, velocitate autem dimidia ejus quæ acquiritur caſu per FA, ſive, quod idem eſt, tempus motus accelerati per EA vel per DA; ad tempora omnia motus qualem diximus per tangentes cycloidis, hoc eſt ad tempus deſcensus per totam cycloidis portionem BHA. quod erat demonſtrandum.

---

3) C. à. d. dans le Manuscrit A. Voir la p. 374 du T. XIV, déjà nommée dans la note 2 de la p. 400.

4) La figure [Fig. 14] a une fois la lettre Υ et une fois la lettre Y.

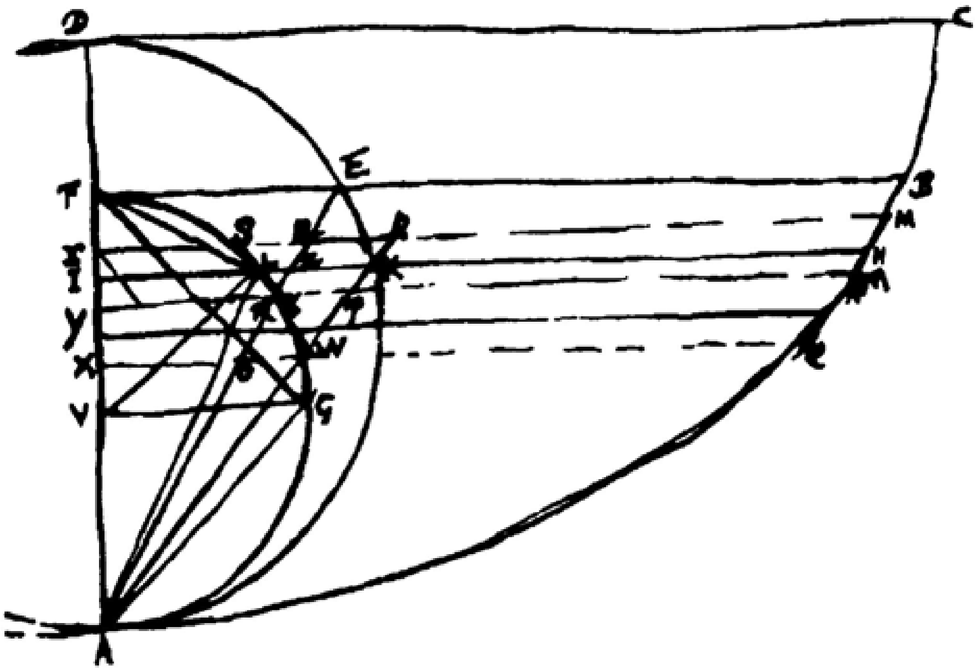
5) On lit ici: „Vide fol. sequens versum, ad signum ...". Le texte indiqué, qui suit, se trouve en effet à la p. 190 du Manuscrit A.

6) C'est la Prop. I dans l'édition moderne de J. L. Heiberg (Archim. Opera Omnia, Lipsiæ, in æd. B. G. Teubneri).

Coroll. tempus casus per BH est ad tempus casus reliqui per HA ut arcus FL ad arcum LA [1]).

Ex his facile etiam colligitur descendente mobili ex B ad A, (sumtum autem est punctum B ad lubitum) tempora descensus per partes quaslibet curvæ BA eam inter se rationem habere quam habent arcus circumferentiæ FGA ijsdem parallelis horizontalibus intercepti quibus singulæ earum partium continentur. Ita nimirum tempus per arcum BH erit ad tempus reliquum per arcum HA sicut arcus circumferentiæ FL ad arcum LA.

[Fig. 14.]



Constat porro ubi grave per arcum cycloidis BA descenderit, continuato motu per æqualem huic arcum ex altera parte axis ascensurum temporaque utriusque motus æqualia futura, adeo ut in cavo cycloidis per quoslibet arcus reciprocationum singularum tempora futura sint ad tempus lapsus perpendicularis per axem cycloidis sicut circumferentia circuli ad diametrum [2]).

[1]) Les trois alinéas qui suivent sont empruntés à la p. 77 verso des „Chartæ Mechanicæ". Comparez, à la p. 406, le deuxième alinéa de la note 2 de la p. 405.

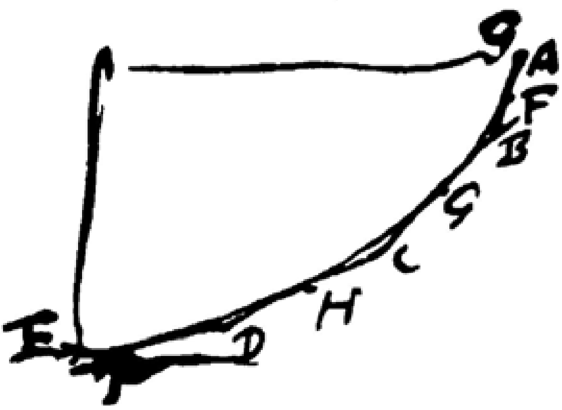
[2]) Cette Proposition s'exprime en notations modernes par la formule de la période d'une demi-oscillation cycloïdale $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, où l est le double du diamètre de la circonférence qui engendre la cycloïde.

Eadem vero omnia etiam in cycloide quæ in plano inclinato ſita ſit contingere manifeſtum eſt, ita nempe ut axem ad plani lineam horizontalem perpendicularem habeat. Eadem enim utrobique eſt demonſtratio.

hæc ante præcedens theorema legenda [3]).

De motu per cycloidem acturus curvam hanc quaſi ex infinita multitudine tangentium conſtare conſiderabo. Et rurſus pro tempore deſcenſus accelerati per omnes hasce tangentes, conſidero ſummam temporum quibus ſingulæ tangentes percurrerentur motu æquabili et velocitate quanta acquiritur ex caſu a principio deſcenſus ad usque punctum earum contactus. Ut hoc clarius fiat utque appareat ſummam iſtorum temporum non differre à tempore deſcenſus naturalis per tangentes infinitas ſint tangentes infinitæ ex quibus conſtat curva AB, BC, CD &c. [Fig. 15].

[Fig. 15.]



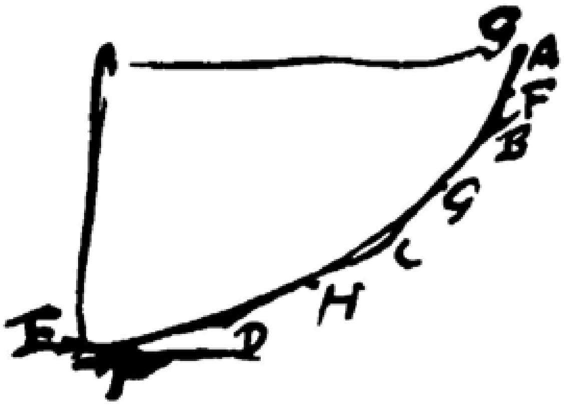
Primò igitur tempus deſcenſus accelerati per curvam AGE non differre ſumo à tempore deſcenſus cum per omnes rectas AB, BC, CD &c. mobile decurrit, nusquam videlicet offendendo, hoc eſt, ut velocitatem quam acquiſivit in fine cujusque lineæ, eam habeat moveri incipiens in linea ſequenti, ac deinceps eandem ſecundum leges motus acceleret. Quum autem tali deſcenſu unaquæque tangens velut CD percurratur motu paulatim accelerato, (nam cum ad finem ejus D pervenit mobile celerius utique movetur quam in principio C) ſi ponamus totam CD percurri motu æquabili celeritate illa majori quam habet mobile cum pervenit deſcendendo ad finem dictæ tangentis D, veniens ſcilicet ex A, hoc enim et in ſequentibus ſemper intelligi debet; conſtat tempus hujus motus brevius fore quam tempus quo mobile percurrit CD velocitate creſcenti ſeu deſcenſu naturali.

At contra, ſi totam CD percurri ponam motu æquabili et celeritate ea tantum quam habet in C, tempus hujus motus erit longius tempore motus accelerati per CD, quo fertur ſcilicet ex A veniens. Sed quoniam tangentem infinitè parvam pono ratione totius AE, ideo et diſcrimen celeritatis quam acquirit mobile, ſive deſcendat ex A usque in C, ſive ex A usque in D, ſive denique etiam ex A usque in H punctum, ubi CD curvam tangit, tanquam nullum eſt reputandum. Quare et tempus quod longius eſſe dictum eſt tempore deſcenſus natu-

[3]) Manuscrit A, p. 191.

ralis per CD ab illo tempore quod brevius esse dictum est, non differre existimandum: Ideoque nec utrumvis eorum à tempore descensus naturalis per CD. Unde itaque nec tempus motus æquabilis per CD, celeritate quæ acquiritur ex casu per AH, quod scilicet tempus inter illud longius breviusque medium quodammodo est, differre quicquam censendum est à tempore descensus naturalis per CD. Tale ergo medium tempus in singulis tangentibus pro tempore descensus naturalis per easdem tangentes ponimus; omniumque istorum temporum summam pro tempore per totam curvam usurpabimus.

[Fig. 15.]

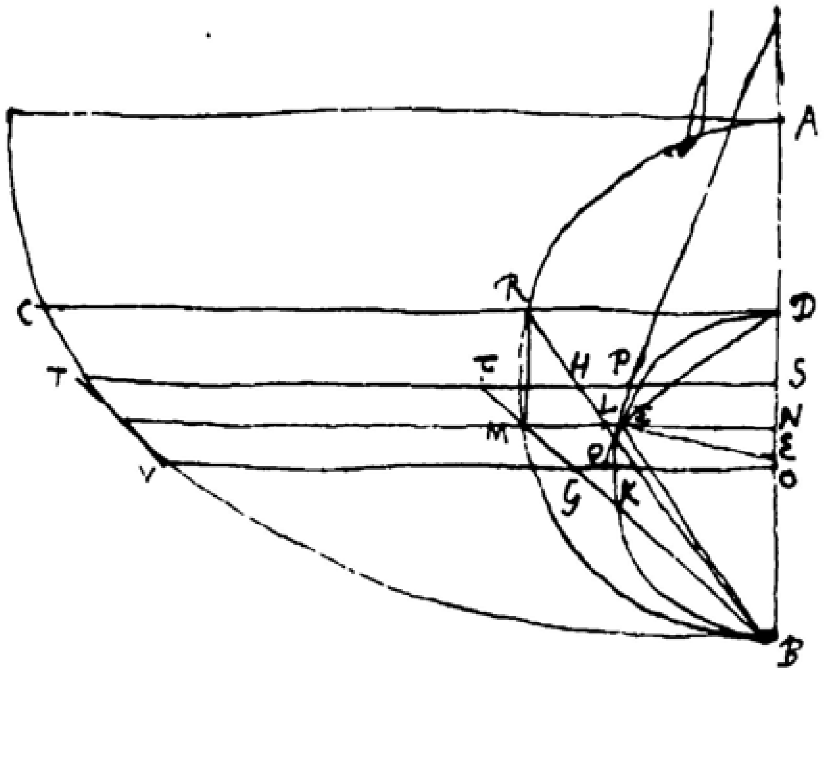


Quod tuto fieri posse periti geometræ facile perspicient neque desiderabunt puto ut longo ambitu illa exsequamur quæ ad demonstrationem more veterum geometrarum conscribendam hic requirerentur.

[Sixième Partie] [1]).

Magna nec ingenijs investigata priorum [2]).

[Fig. 15bis.]



Caſus per AB [Fig. 15bis] ∞ per RB ∞ æquabilis per RB cum dimidia celeritate ex RB vel DB. Oſtende tempus per TV ſeu FG cum celeritate ex DN eſſe ad tempus per HK cum celeritate dimidia ex DB ut PQ ad SO.

illud tempus eſt ad hoc in ratione compoſita ex ratione FG ad HK, hoc eſt, MB ad BL hoc eſt RB ad BM hoc eſt DB ad BΣ, hoc eſt, DΣ ad ΣN et ex ratione ED ad DΣ. Ergo eadem quæ ED ſive EΣ ad ΣN hoc eſt PQ ad SO.

[1]) Cette Partie est empruntée à une feuille détachée datant probablement de la même époque (Chartæ Astronomicæ, p. 224 recto). La démonstration indiquée brièvement dans le texte correspond à celle de la Cinquième Partie qui précède.

[2]) Comparez la note 3 de la p. 407.

Anexo 5- Testamento

TESTAMENT.

Nous reproduiſons le Teſtament d'après la copie qui ſe trouve dans la collection-Huygens à Leiden. Le notaire déclare qu'elle eſt conforme à l'original [1]).

IN DEN NAMEN DES HEEREN. *Amen.*

Ick onderges[r]. overdenckende de ſeeckerheijt des doodts, de onſeeckere tijt ende wijze vandien, en ſoude dienvolgende niet geerne uijt deſe werelt ſcheijden, ſonder van de tijdelijcke Goederen mij van Godt Almagtigh verleent gediſponeerd te hebben, alvooren daer toe te coomen, beveele ick eerſtelijck ende voor aff mijne onſterffelijcke ziele inde Bermhertige Handen van Godt Almagtigh, mijne Lichaem de Aerde met een Chriſtelijcke begraeffeniſſe, wijders te revoceeren, caſſeren, doodt ende te niette doende bij deeſen alle voorgaende diſpoſitien van uijtterſten wille bij mij gepaſſeert. Ende bij deeſen op nieuws diſponerende, ſoo verclare Ick onderges[r]. ſonder inductie ofte perſuatie van Imandt:

Eerſtelijck: te prelegateren aen Chriſtiaen Huygens, ſoon van mijn Broeder de Gecommitteerde Raet int Collegie ter Admiraliteijt, dien ick gegeven heb boven ſijn Erffgedeelte een van mijn Silvere Lampetten, omdat geen pillegiſt van mijn gehadt heeſt;

Aen mijn Nigte Madame de la Ferté, Legatere ick de ſomme van twee duyſent guldens, en noch vijff hondert guldens aen haer oudſte Dogter die ick ten Doop geheven hebbe;

Aen mijn Nigt, Juff[r]. Ida van Dorp, Legateere ick vijff hondert guldens;

Aen Mons[r]. Johan Wiljeth, twee hondert guldens;

Aen Hendrick mijn Knegt, omdat hij mij wel gedient heeſt, Legateere ick hondert rijxdaelders;

Aen Anna mijn Dienſtmeijt legateere ick hondert en vijſtigh guldens;

Aen Matthijs mijn Tuijnman, hondert guldens, mede ſoo veel aen Grietie ſijn Suſter.

Mijne ſchriſten van Mathematique, leggende meeſte part in de onderſte laeijen van mijn grootſte Cabinet, op Hoſwijck, beſtaende in negen Ingebonde Boecken met de letters van A tot I gemerckt, En voorts in veel Tractaten, dien ick onder handen

---

[1]) Accordeert naer Collatie jegens de minute onder mij Notaris berustende, desen 15 July 1695. Quod Attestor, A. v. d. Smalingh, Not[s]. publ. 1695.

hadde, Legateere ick aende Accademije ofte Biblioteecq van Leijden, en verſoeck aende Heeren Profeſſoren de Volder tot Leijden, ende Fullenius tot Francker, die te willen doorſien, en 'tgeen daerin ſoude mogen weeſen bequaem om gepubliceert te werden, hetſelve willen beſorgen ten beſten ſij ſullen connen, gelijck daer is de Dioptrika daerop gesr: ſtaet, dat een tractaet vande parelia daer ſoude bij gecoomen hebben, Item de Leges percuſſionis in Occurſu corporum etc., Item de konſt van Glaeſen tot verrekijckers te ſlijpen, in duijts; gemelte Heeren ſullen Ider een gedeelte van die Schriften naer haer nemen, ende met deſelve gedaen hebbende, die dan reciproce aen malckanderen overgeven, ende eijndelijck weder ter hande ſtellen aen die geene die opſich hebben op de gemelte Biblioteecq van Leijden; Ick legateere mede aen deſelve Biblioteecq, de pacquetten daerop geſchreeven ſtaet Literæ Doctorum off Eruditorum, leggende op een ſtoel in mijn Cabinet op Hoffwijck, alsmede de Franſche brieven van Mons^r. Leibnitz en den Marquis de l'Hoſpital, leggende int groote Sakerdane Cabinet tot Hoffwijck in eene laeije apart, waerbij ſijn mijne antwoorden; aen de Heeren de Volder en Fullenius make ick ijder duijſent guldens, tot recompenſe van hare moeijte.

Het Tractaet opgeſchreeven Coſmotheoros, leggende in mijn Cabinet inden Haegh, behalven drie a vier bladen die ick geſonden hadde aenden Drucker Ramazijn, recommandeere ick aen mijn broeder den Heer van Zuijlichem, aen wien het gededuceerd is, te beſorgen dat het voortgedruckt wert, gelijck begonnen is bij Mons^r. Moetjes, tſelve recommandeere ick aen d'Heeren Executeurs van deſe mijn laeſte wil, hier nae te nomineeren.

Wijders verclare ick onderges^r. in alle de verdere Goederen ſoo roerende als onroerende, Actien, Crediten ende Geregtigheden, egene [ſic] van dien uijtgeſondert, dewelcke ick metter doodt zal coomen te ontruijmen ende naer te laeten, bij deſen tot mijne eenige ende Univerſeele Erffgenaemen te nomineren ende te inſtitueren, mijne Broeders ende Suſters kinderen in Capita, met dien veſtande nochtans, dat de oudſte Soon van mijn Broeder van Zuijlichem, ende de oudſte Soon van mijn Broeder Huygens Admiraliteijts Heer, met haer beijden ſullen looten wie hebben ſal de Heerlijckheijt van Zeelhem, en aen dewelcke deſelve Heerlijckheijt ſal te beurte vallen, die ſal daermede voor ſijn erffportie int geheel gecontenteert ſijn, hem daer inne Inſtitueerende bij deeſen, het Octrooy om daer van te moogen diſponeren, beruſt onder den Rent^m. Adriaen Cools [1]).

[1]) Le sort fut favorable à Constantyn fils de Lodewijk (1675—1739) puisque celui-ci signe „Heer van Zeelhem" après la mort de son oncle. C'est à lui, à en juger d'après l'écriture, que nous devons les „Apographa" des lettres de Christiaan Huygens ainsi que — comme l'a déjà remarqué F. Kaiser, T. XV, p. 20 — différents catalogues; voyez la p. 593 du T. XV; et en outre le „Memorie" cité dans le présent Tome ainsi qu'à la p. 7 (note 3) du T. XVIII, et la courte biographie de son oncle où il fait mention du portrait par Bourguignon, p. 754 qui précède; elle contient aussi le passage cité dans la note 10 de la p. 743.