

RESSALVA

Atendendo solicitação do autor, o texto completo desta tese será disponibilizado somente a partir de 23/10/2021.

RODRIGO DA PONTE CAUN

**FORMULAÇÃO $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ DO CONTROLE LQR
ROBUSTO APLICADO A DOMÍNIOS CONVEXOS
E FECHADOS**

Ilha Solteira - SP
2019



RODRIGO DA PONTE CAUN

**FORMULAÇÃO $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ DO CONTROLE LQR
ROBUSTO APLICADO A DOMÍNIOS CONVEXOS
E FECHADOS**

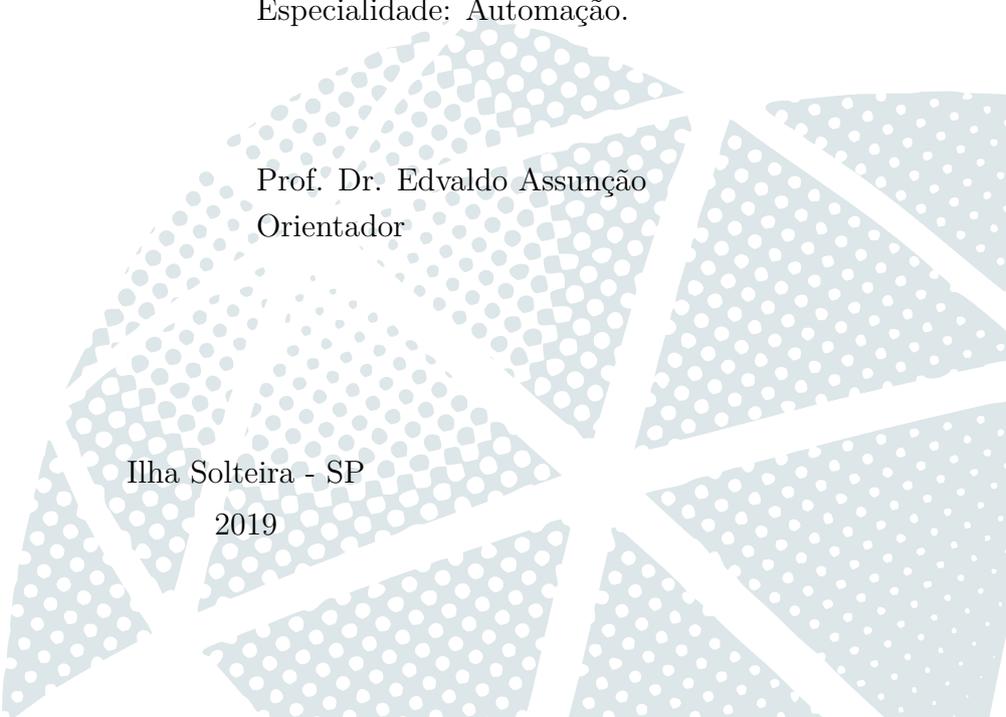
Tese apresentada à Faculdade de Engenharia do Câmpus de Ilha Solteira - UNESP como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Especialidade: Automação.

Prof. Dr. Edvaldo Assunção
Orientador

Ilha Solteira - SP

2019



FICHA CATALOGRÁFICA

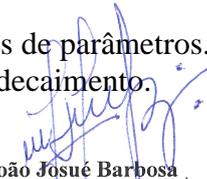
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

C373f Caun, Rodrigo da Ponte.
Formulação $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ do controle LQR robusto aplicado a domínios convexos e fechados / Rodrigo da Ponte Caun. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2019
148 f. : il.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2019

Orientador: Edvaldo Assunção
Inclui bibliografia

1. LQR. 2. LMI. 3. Funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. 4. Controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 5. Controle *gain scheduling*. 6. Taxa de decaimento.


João Josué Barbosa
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação
Diretor Técnico
CRB 8-5642

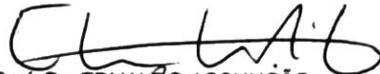
CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: **Formulação H_2/H_∞ do Controle LQR Robusto Aplicado a Domínios Convexos e Fechados**

AUTOR: RODRIGO DA PONTE CAUN

ORIENTADOR: EDVALDO ASSUNÇÃO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP



Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP



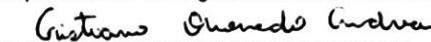
Prof. Dr. DIOGO RAMALHO DE OLIVEIRA

Câmpus de Três Lagoas / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul - IFMS



Prof. Dr. MÁRCIO ROBERTO COVACIC

Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade Estadual de Londrina - UEL



Prof. Dr. CRISTIANO QUEVEDO ANDREA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia / Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Ilha Solteira, 23 de outubro de 2019

Aos meus pais, Hélio (in memoriam) e Maria.

A minha família, Tatiana e Kauany.

*Aos(as) filhos(as) que, ainda,
não estão conosco.*

Ao meu irmão, Alessandro.

Amo todos vocês.

Agradecimentos

A **Deus**, uno e trino, que me moldou a cada dia feito barro na mão do oleiro e, pela sua graça, me permite viver em plenitude as maravilhas deste mundo que criastes para a humanidade;

Aos meus pais **Hélio** (*in memoriam*) e **Maria**, que na simplicidade de suas vidas me dedicaram mais que suas orações e preocupações;

A minha esposa **Tatiana**, por compartilharmos juntos os desafios desta longa jornada;

A minha filha **Kauany**, por revelar o verdadeiro sentido da palavra felicidade;

Ao meu irmão **Alessandro**, pelo eterno carinho;

Ao Prof. Dr. **Edvaldo Assunção**, por permitir o desenvolvimento das pesquisas a distância e na unidade familiar, pela paciência de anos de orientação e entender as limitações de um aluno entusiasta que conciliava a família, o trabalho e o doutoramento. Agradeço a Deus por seus valores morais e espirituais que tanto me ajudaram a concluir esta tese;

Aos Profs. Drs. **Marcelo C. M. Teixeira** e **Rodrigo Cardim**, pelo acompanhamento nas bancas examinadoras (Estudos Especiais, Qualificação e Tese) e suas sugestões, minha eterna gratidão;

Aos colegas de laboratório **Lázaro I. H. Llins** e **Marco A. L. Beбето** pelo apoio nas implementações práticas, meu reconhecimento;

A **Universidade Tecnológica Federal do Paraná**, em especial ao Câmpus Toledo, pela oportunidade e apoio na conclusão deste trabalho.

*”Comece fazendo o que é necessário,
depois o que é possível,
em breve estarás fazendo o impossível.”*

São Francisco de Assis

”Menor que meu sonho não posso ser.”

Lindolf Bell

Resumo

A principal contribuição dessa tese é propor a representação $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ do regulador linear quadrático (LQR) para sistemas lineares invariantes no tempo e incertos. A motivação está em atender simultaneamente a minimização da função custo garantido e dos efeitos de entradas exógenas. De início, apresenta-se uma revisão da formulação do problema LQR usando-se a função de Lyapunov quadrática e, posteriormente, sua extensão aos modelos de incertezas. Neste ponto, a literatura volta-se exclusivamente ao uso de funções de Lyapunov com uma única matriz P para testar a estabilidade de todo o domínio de incerteza politópica, que naturalmente conduz a algum conservadorismo. Em vista de reduzir o pressuposto conservadorismo explorou-se técnicas de relaxação matricial através de lemas consolidados na literatura, i.e. Lema de Finsler e Lema da Projeção Recíproca. As novas formulações de síntese robusta permitem obter condições suficientes em desigualdades matriciais lineares (LMIs) por meio de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, embora não considere os efeitos da perturbação no processo de síntese de controle. Logo, o estudo da rejeição à perturbações permitiu obter condições LMIs inéditas envolvendo as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Adicionalmente, é proposto o estudo da robustez da planta em malha fechada, via descrição combinada de incertezas nas matrizes de estados e de entradas, e do controlador, aplicando técnicas de fragilidade via incertezas limitadas por norma. Por fim, propõe-se um método de controle LQR *gain scheduling* aplicado a sistemas lineares variantes no tempo. Nesta proposta utilizou-se a estabilidade quadrática das formulações por Lema de Finsler. Uma abordagem mais geral permitiu projetar controladores *gain scheduling* robustos, o qual é *scheduling* a falhas estruturais e robusto no que se refere as matrizes paramétricas do sistema. Ainda, as formulações matriciais permitem atribuir *a priori* uma restrição no tempo de estabelecimento dos sinais de estados. Aplicações práticas demonstram o desempenho dos teoremas propostos, cuja validação envolve testes de factibilidade sujeito a variação limite da taxa de decaimento, análise do comportamento temporal dos sinais de interesse e custo computacional dos algoritmos de controle.

Palavras-chave: LQR. LMI. Funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. Controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Controle *gain scheduling*. Taxa de decaimento.

Abstract

The main contribution of this thesis is to propose the $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ representation of the Linear Quadratic Regulator (LQR) for linear time-invariant uncertain systems. The motivation is to achieve the minimization of guaranteed cost and the effects of exogenous inputs, simultaneously. Initially, a review of the LQR problem formulation using the quadratic Lyapunov function is presented and after, its extension to the uncertain models. At this point, the literature turns to the use of Lyapunov functions with only one matrix P to test the stability of the whole polytopic domain, which naturally leads to some conservatism. The proposed to reduce the assumption conservatism allowed to explore techniques of matrix relaxation through classic lemmas in the literature, i.e. Finsler and Reciprocal Projection lemmas. The new robust synthesis formulations allow to obtain sufficient conditions in Linear Matrix Inequalities (LMIs) control by means of parameter-dependent Lyapunov functions; however, do not consider the perturbation effects on the control synthesis process. Thus, the study of disturbance rejection allowed to obtain new sufficient conditions via mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control. Furthermore, robustness studies of the closed-loop plant are proposed based on a mixed representation of uncertainties in the state and input matrices, and the controller robustness, by applying non-fragile theories via norm-bounded uncertainty. Finally, an LQR gain scheduling control method applied to linear time-varying systems is proposed. In this case, the quadratic stability was used in Finsler's Lemma formulations. A general approach allowed to design a robust gain scheduling controllers, which is scheduling to structural failures and robust to plant parametric matrices. The matrix formulations still allow assigning a priori a constraint in the setting time of state signals. Practical applications evaluate the performance of the proposed theorems, whose validation addresses tests of feasibility subject to variation limit of the decay rate, analysis of the temporal behaviour of interest signals and computational effort of the control algorithms.

Keywords: LQR. LMI. Parameter-dependent Lyapunov functions. $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control. Gain scheduling control. Decay rate.

Lista de Figuras

1.1	Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.	20
2.1	Regiões de modelos de incerteza.	29
2.2	Região de α -estabilidade dos autovalores.	33
2.3	Sistema Massa-Mola-Amortecedor.	39
2.4	Teste de factibilidade em função da variação da taxa de decaimento.	40
2.5	Evolução no tempo do sinal de controle $u(t)$, obtido pelo Teorema 2.3.	41
2.6	Evolução no tempo do sinal de estado $x_1(t)$, obtido pelo Teorema 2.3.	42
2.7	Evolução no tempo do sinal de estado $x_2(t)$, obtido pelo Teorema 2.3.	42
2.8	(a) Helicóptero 3-DOF. (b) Modelo esquemático.	43
2.9	Comportamento dos três graus de liberdade (ε , ρ , λ) referente a implementação prática dos Teoremas 2.1 e 2.2.	47
2.10	Implementação prática do controlador K , obtido pelo Teorema 2.2, ao sistema incerto sob falha no motor traseiro.	48
3.1	Teste de factibilidade em função da variação da taxa de decaimento enquadrando o Teorema 3.2.	63
3.2	Evolução no tempo do sinal de controle $u(t)$, obtido pelo Teorema 3.2.	64
3.3	Evolução no tempo do sinal de estado $x_1(t)$, obtido pelo Teorema 3.2.	64
3.4	Evolução no tempo do sinal de estado $x_2(t)$, obtido pelo Teorema 3.2.	65
3.5	Regiões limítrofes de α em função das matrizes de ponderação.	65
3.6	Comportamento transitório do estado $x_1(t)$ para diferentes ϱ , obtido pelo Teorema 3.2.	66
3.7	Comportamento transitório do controle $u(t)$ para diferentes ϱ , obtido pelo Teorema 3.2.	67
3.8	Curvas de α (<i>versus</i>) \mathcal{J}_∞ em função de b para incertezas limitadas por norma.	68
3.9	\mathcal{J}_∞ (<i>versus</i>) α para incertezas limitadas por norma.	68
3.10	α (<i>versus</i>) b para incertezas limitadas por norma.	69

3.11	Regiões de α -estabilidade do helicóptero 3-DOF.	70
3.12	Normas dos controladores refletindo os efeitos da variação de α	71
3.13	Nuvem de autovalores da malha fechada do sistema incerto.	72
3.14	Comportamento dos três graus de liberdade ($\varepsilon, \rho, \lambda$) referente à implementação prática do Teorema 2.2.	73
3.15	Comportamento dos três graus de liberdade ($\varepsilon, \rho, \lambda$) referente à implementação prática do Teorema 3.1.	74
3.16	Curvas de α (<i>versus</i>) \mathcal{J}_∞ em função de b para incertezas politópicas.	75
3.17	\mathcal{J}_∞ (<i>versus</i>) α para incertezas politópicas.	75
3.18	α (<i>versus</i>) b para incertezas politópicas.	76
4.1	(a) Suspensão ativa. (b) Modelo esquemático.	96
4.2	Aplicação prática do Teorema 4.2 na condição de $\alpha = 0, \gamma = 7$ e $M_s = 1,455\text{kg}$	99
4.3	Aplicação prática de modelos politópicos na condição de $\alpha = 0, \gamma = 7$ e $M_s = 2,45\text{kg}$	100
4.4	Análise da influência da taxa de decaimento na condição de $M_s = 1,455\text{kg}$	101
4.5	Comportamento temporal da força de controle $F_c(t)$ sujeito a variações da taxa de decaimento.	102
4.6	Análise comparativa da aplicação prática na condição de $\alpha = 0$ e $M_s = 2,45\text{kg}$	103
4.7	Análise de resiliência do controlador via Teorema 4.4 na condição $\alpha = 0, \gamma = 7,8$ e $M_s = 2,45\text{kg}$	104
4.8	Resposta ao degrau de $w(t)$ na condição de $\alpha = 0, \gamma = 7$ e $M_s = 1,455\text{kg}$ via modelo de incerteza politópica.	105
4.9	Resposta ao degrau de $w(t)$ na condição de $\alpha = 0, \gamma = 7$ e $M_s = 1,455\text{kg}$ via modelo de incerteza limitada por norma.	105
4.10	Resposta em frequência do sistema na condição de $\alpha = 0, \gamma = 7$ e $M_s = 2,45\text{kg}$	106
4.11	Magnitude da função de transferência entre a deflexão da suspensão e a pista na condição de $M_s = 2,45\text{kg}$	108
4.12	Magnitude da função de transferência entre a deflexão do pneu e a pista na condição de $M_s = 2,45\text{kg}$	108
4.13	Magnitude da função de transferência entre a velocidade da massa do pneu e a pista na condição de $M_s = 2,45\text{kg}$	109
4.14	Estudo da característica $\ K\ $ <i>versus</i> α e κ <i>versus</i> α do Teorema 4.2(a).	110
5.1	Aplicação prática do controlador projetado via Teorema 5.1 na condição de $\alpha = 0$ e $M_s = 2,45\text{kg}$	120

5.2	Aplicação prática do controlador projetado via Teorema 5.1 na condição de $\alpha = 0$ e $M_s = 1,455\text{kg}$	121
5.3	Análise da influência da frequência via Teorema 5.1 na condição de $\alpha = 0$ e $M_s = 2,45\text{kg}$	122
5.4	Aplicação prática do controlador projetado via Teorema 5.2 na condição de $\alpha = 0$	123
5.5	Análise da influência da frequência via Teorema 5.2 na condição de $\alpha = 0$ e $M_s = 2,45\text{kg}$	124

Lista de Tabelas

2.1	Complexidade numérica dos modelos de incertezas.	41
2.2	Parâmetros do helicóptero.	45
3.1	Complexidade numérica para incertezas limitadas por norma.	67
3.2	Complexidade numérica para incertezas politópicas.	74
4.1	Parâmetros da suspensão ativa.	97

Abreviaturas e Acrônimos

CLQR	<i>Constrained Linear Quadratic Regulator</i>
DC	<i>Direct Current</i>
DLQR	<i>Discrete-Time Linear Quadratic Regulator</i>
DNLDI	<i>Diagonal Norm-Bound LDIs</i>
DOF	<i>Degree of Freedom</i>
ISE	<i>Integral Square Error</i>
LDIs	<i>Linear Differential Inclusions</i>
LPC	Laboratório de Pesquisa em Controle
LPV	<i>Linear Parameter-Varying</i>
LMILab	<i>Solver LMI Control Toolbox</i>
LMIs	<i>Linear Matrix Inequalities</i>
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
LTI	<i>Linear Time-Invariant</i>
LTV	<i>Linear Time-Varying</i>
MPC	<i>Model Predictive Control</i>
NLDIs	<i>Norm-Bound LDIs</i>
PDLF	<i>Parameter-Dependent Lyapunov Function</i>
PID	<i>Proportional-Integral-Derivative</i>
PLDIs	<i>Polytopic LDIs</i>
RDE	<i>Riccati Differential Equation</i>
RLQR	<i>Robust Linear Quadratic Regulator</i>
Yalmip	<i>Yet Another LMI Parser</i>

Lista de Símbolos

α	Taxa de decaimento
$\Lambda_i, \hat{\Lambda}_i$	Variáveis do <i>S-Procedure</i>
\mathcal{Z}	Matriz de realimentação invariante no tempo e incerta
μ, ν	Limitantes superiores da função custo garantido
Ω	Subconjunto de $\Re^{n \times n}$
Ω_P, Ω_x	Conjuntos descritos pelos vértices do politopo
Ω_N	Conjunto descrito pela imagem da norma matricial sob mapeamento linear-fractionário
ς	Incerteza paramétrica variante no tempo
ξ	Incerteza paramétrica invariante no tempo
ζ	Incerteza paramétrica limitada por norma invariante no tempo
$A(\zeta)$	Matriz de estados com incertezas limitadas e ganho de realimentação invariante no tempo
Co	Denota uma envoltória convexa
$H_{wz}(s)$	Operador distúrbio/saída
I	Matriz identidade
\mathcal{J}_∞	Função custo garantido
K_{fault}	Controlador robusto sujeito a falha no atuador
K_α	Controlador robusto que garante a α -estabilidade do sistema
0	Matriz nula
$p(t), q(t)$	Variáveis representando os parâmetros incertos
\mathcal{Q}	Matriz de ponderação dos estados
\mathcal{R}	Matriz de ponderação das entradas de controle
$V(x)$	Função de Lyapunov quadrática
$V(x, \xi)$	Função de Lyapunov dependente de parâmetros

X'	Operador de matriz transposta
X^{-1}	Operador de matriz inversa
X^\perp	Denota base do espaço nulo de X
$X > 0$	Denota que X é definida positiva
$X \geq 0$	Denota que X é semi-definida positiva

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	REGULADORES LINEARES QUADRÁTICOS USANDO LMIs	27
2.1	LMIs EM MODELOS DE INCERTEZA	28
2.2	FORMULAÇÃO POR FUNÇÃO DE LYAPUNOV QUADRÁTICA	30
2.3	O REGULADOR LINEAR E A ESTABILIDADE RELATIVA	32
2.3.1	Taxa de decaimento	32
2.3.2	Formulação por incerteza politópica	33
2.3.3	Formulação por incerteza limitada por norma	35
2.4	EXEMPLOS	39
2.4.1	Massa-mola-amortecedor	39
2.4.2	Helicóptero 3-DOF Quanser [®]	42
2.5	COMENTÁRIOS FINAIS	48
3	REGULADORES LINEARES QUADRÁTICOS VIA FUNÇÃO DE LYAPUNOV DEPENDENTE DE PARÂMETROS	50
3.1	MATRIZ DE LYAPUNOV DEPENDENTE DE PARÂMETROS	50
3.1.1	Formulação por incerteza politópica: Lema de Finsler	51
3.1.2	Formulação por incerteza limitada por norma: Lema de Finsler	55
3.1.3	Derivação do limitante superior	59
3.1.4	Formulação por incerteza politópica: Lema da Projeção Recíproca	60
3.2	EXEMPLOS	62
3.2.1	Massa-mola-amortecedor	62
3.2.2	Helicóptero 3-DOF Quanser [®]	69
3.3	COMENTÁRIOS FINAIS	76

4	FORMULAÇÃO $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ DO CONTROLE LQR ROBUSTO	78
4.1	EXTENSÃO A SISTEMAS LINEARES INVARIANTES NO TEMPO E INCERTOS	81
4.1.1	Representação combinada de incertezas politópicas e limitadas por norma	85
4.1.2	Fragilidade de controladores	90
4.2	EXEMPLO	95
4.2.1	Suspensão ativa Quanser [®]	95
4.3	COMENTÁRIOS FINAIS	110
5	LQR <i>GAIN SCHEDULING</i>	112
5.1	EXTENSÃO A SISTEMAS LPV E INCERTEZA LIMITADA POR NORMA	116
5.2	EXEMPLO	119
5.2.1	Suspensão ativa Quanser [®]	119
5.3	COMENTÁRIOS FINAIS	124
6	CONCLUSÃO	125
6.1	PERSPECTIVAS FUTURAS	126
6.2	PUBLICAÇÕES	126
	REFERÊNCIAS	129
A	RESULTADOS ENVOLVENDO DESIGUALDADES MATRICIAIS	143
	ÍNDICE REMISSIVO	147

INTRODUÇÃO

A teoria moderna de controle ótimo envolvendo a realimentação de estados tem avançado, nos últimos anos, em aplicações a sistemas dinâmicos de natureza elétrica (OLALLA *et al.*, 2009), mecânica (YUE; AN; SUN, 2016; GRITLI; BELGHITH, 2017), química (KHAIRY; ELSHAFEI; EMARA, 2010) e biológica (SAFAEI; HESPANHA; PROULX, 2012), cujas vantagens concentram-se na simplicidade de adotar valores reais de ganhos de controle sem a utilização de realimentação dinâmica de polos e zeros (OLALLA *et al.*, 2008). Dentre as classes de decisões, os índices baseados em funções quadráticas se destacam por apresentar versatilidade na medida do desempenho, pois utilizam funções de erro ou de energia (OGATA, 1985).

Neste contexto, a técnica de controle *off-line* (KANEV; VERHAEGEN, 2002) denominada Regulador Linear Quadrático (do inglês, *Linear Quadratic Regulator* – LQR) surgiu devido a seguinte combinação de fatores: (a) uso de equações diferenciais de primeira ordem, conhecida por abordagem em espaço de estados; (b) advento de sistemas computacionais (microcontroladores, por exemplo); (c) lançamento das bases da teoria de controle ótimo e, por fim, (d) o marco da publicação do artigo “*On the General Theory of Control Systems*”, na Conferência de Moscou no final da década de 50, no qual R. E. Kalman propõe um método de síntese para problemas de controle linear ótimo multivariável (BENNETT, 1996).

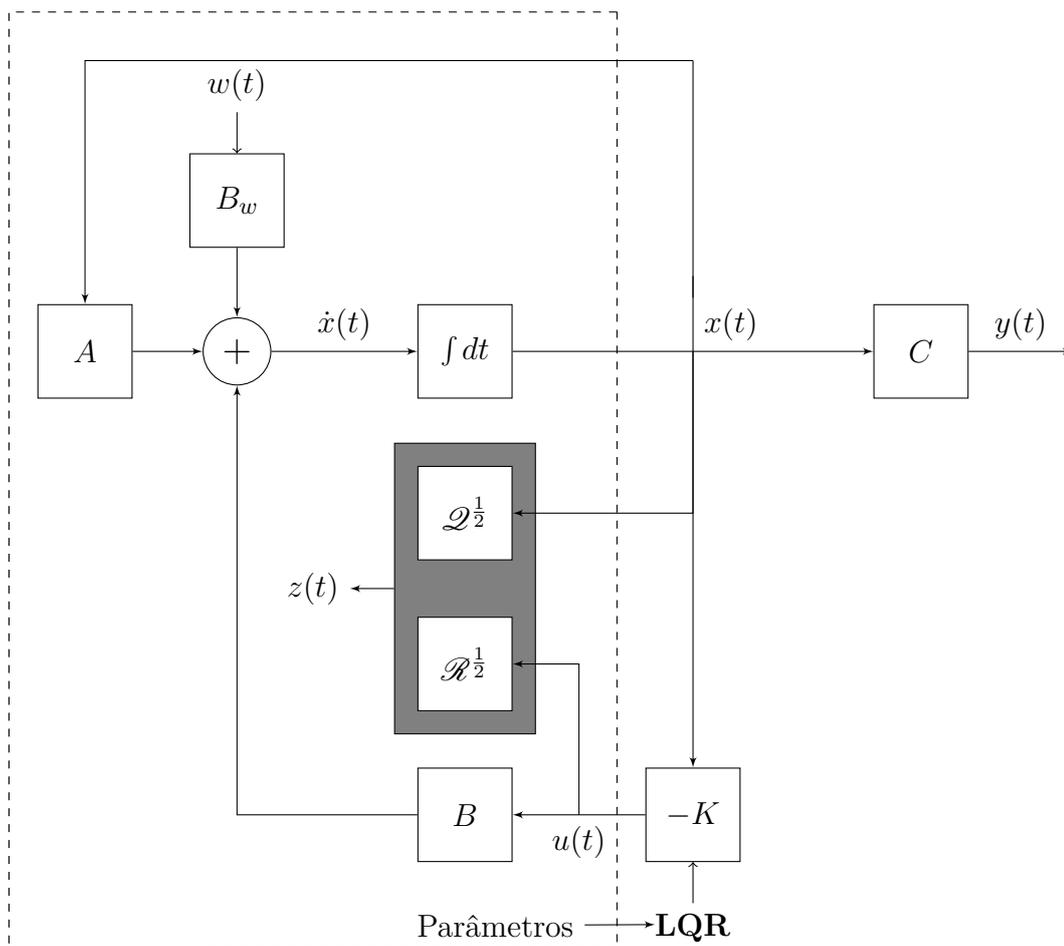
A metodologia adotada no problema LQR envolve, essencialmente, uma função de controle ótima de realimentação de estados de horizonte infinito (LEE; KWON; CHO, 1998), que minimize a função custo garantido (NIEL *et al.*, 2017):

$$\mathcal{J}_\infty = \int_0^\infty (x(t)^T \mathcal{Q}x(t) + u(t)^T \mathcal{R}u(t)) dt.$$

Nota-se que o índice de desempenho \mathcal{J}_∞ é parametrizado pelas matrizes simétricas

definidas positivas $\{\mathcal{Q}, \mathcal{R}\}$ em relação aos vetores de estado $(x(t))$ e controle $(u(t))$, respectivamente (DAS; PAN; DAS, 2015). A Figura 1.1 ilustra um sistema linear contínuo invariante no tempo (do inglês, *Linear Time-Invariant* – LTI) sob a ação do sinal de controle ótimo, sendo $w(t)$ a perturbação, $y(t)$ a saída de interesse e $z(t)$ a saída de desempenho cuja energia deve ser minimizada. As propriedades estruturais da planta a ser controlada (Parâmetros) são obtidas pelas matrizes de estados (A), de entradas (B) e de perturbações (B_w), além da matriz de saídas (C).

Figura 1.1 - Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.



Fonte: Adaptado de (ZHANG *et al.*, 2015).

É importante destacar, ainda, algumas propriedades interessantes do controle LQR aplicado a sistemas em malha fechada, tais como, otimalidade e robustez garantindo margens infinitas de ganhos (OLALLA *et al.*, 2009) operando na faixa de $[0, 5, \infty)$ dB (GUO; XU; LEE, 2014) e margens de fase de no mínimo 60° (HONG; YANG; RAY, 2000), ganhos de transição entre baixas e altas frequências com amplas margens de estabilidade (TURKI; DUC; CLEMENT, 2004) e, por fim, ajuste simples das matrizes \mathcal{Q} e \mathcal{R} (MAHMOUD; ALYAZIDI; ABOUHEAF, 2017). Esta última apresenta um contraponto, pois a

escolha dos elementos das matrizes de ponderação é fortemente dependente da experiência do projetista, podendo conduzir a um problema LQR infactível, dado que as opções são ilimitadas. Neste caso, algumas propostas de sintonia podem ser encontradas em (MONTAGNER; DUPONT, 2010; YANG; GAO; SHI, 2010; DONGMEI; XINGANG; LI, 2012).

Não obstante, o problema de regulação ótima é uma técnica que remonta suas influências desde a década de 40. Neste período, o surgimento de métodos matemáticos e computacionais eficientes tem impulsionado a aplicação do regulador linear a diversos problemas de controle (BOYD; CRUSIUS; HANSSON, 1998; LEE, 2007; PAKSHIN; EMELIANOVA, 2016).

Esta é a motivação para a apresentação de um breve histórico que se inicia com as propostas emergentes de Hall (HALL, 1943) e Wiener (WIENER, 1949), que utilizavam um índice de desempenho na forma de integral do erro quadrático (do inglês, *Integral-Square Error* – ISE) aplicado à teoria de realimentação. Após uma década, retomaram-se as bases de sistemas de controle através do critério ISE na publicação do livro “*Analytical Design of Linear Feedback Controls*”. Entretanto, algumas desvantagens inerentes ao método de projeto analítico (do inglês, *Analytical Design Method*) envolveram um número reduzido de índices de desempenho e, em especial, a complexidade matemática que cresce rapidamente. Este último incorreu no desencorajamento de engenheiros que aplicavam o método em problemas práticos (NEWTON; GOULD; KAISER, 1957).

Após a difusão da teoria de controle baseado em índices de desempenho, Kalman propôs condições fortemente inovadoras e influentes ao chamado controle realimentado linear quadrático (que, posteriormente, tornou-se controle LQR) (KALMAN, 1960b, 1960a). Nestes trabalhos, as contribuições de Kalman foram, dentre outras: (a) apresentar, de um ponto de vista matemático, uma teoria completa para o problema do regulador linear a tempo contínuo e discreto, também conhecido por LQR discreto (do inglês, *Discrete-Time LQR* – DLQR) (BALANDAT; ZHANG; ABATE, 2012; NAKAJIMA; KOBAYASHI; YAMASHITA, 2016, 2017); (b) introduzir o conceito de estabilidade da equação diferencial de Riccati (do inglês, *Riccati Differential Equation* – RDE); (c) obter um algoritmo relacionado ao uso de sistemas computacionais para síntese do controle ótimo quadrático por realimentação de estados e (d) relacionar condições suficientes de estabilidade assintótica ao segundo método de Lypunov. Por outro lado, as desvantagens das propostas resumiam-se a: (a) dificuldades de aplicação em plantas industriais, devido à precisão dos modelos matemáticos e sua respectiva formulação em termos da aproximação por espaço de estados; (b) disponibilidade dos estados do sistema por amostragem ou estimação (HWANG *et al.*, 2010; CAICEDO *et al.*, 2012) e, (c) inoperância com restrições e perturbações (MAHMOUD; ALYAZIDI; ABOUHEAF, 2017).

A partir dos resultados de Kalman, fomentaram-se diversas pesquisas relacionadas à equação de Riccati, em particular, no desenvolvimento de pacotes computacionais dedicados a resolver a equação matricial por meio de programação convexa (WILSON; NEKOU; HALIKIAS, 1998; MONTAGNER; DUPONT, 2010). Essa estreita relação entre os conjuntos convexos e a álgebra matricial, no estudo de controle ótimo, favoreceu a aplicação de soluções em termos de desigualdades matriciais proposto por (YAKUBOVICH, 1962). Em 1994, o surgimento do livro influente “*Interior-point Polynomial Algorithms in Convex Programming*” escrito por Nesterov e Nemirovskii, apresentou uma ferramenta altamente eficiente para obter soluções numéricas (NESTEROV; NEMIROVSKY, 1994).

Em meados da década de 90, Stephen Boyd e colaboradores reuniram diversos problemas de controle de relevância prática na forma de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities – LMIs*) (BOYD *et al.*, 1994). Consequentemente, surgiram algumas derivações de terminologias de controle LMI do problema LQR, tais como: LQR por realimentação da saída (do inglês, *LQR-Output Feedback*) que objetiva um ganho estabilizante de realimentação estática da saída (IWASAKI; SKELTON; GEROMEL, 1994; SYRMOS *et al.*, 1997; ASSADIAN, 2000; TZES; NIKOLAKOPOULOS, 2004; PAKSHIN; PEAUCELLE, 2009; POLYAK; KHLEBNIKOV; SHCHERBAKOV, 2013); LQR robusto (do inglês, *Robust LQR – RLQR*) que garante a estabilidade assintótica para um domínio de incerteza (MARSH; WEI, 1996; GAJDÁR *et al.*, 1997; MONTAGNER; DUPONT, 2010; NIEL *et al.*, 2017); LQR restrito (do inglês, *Constrained LQR – CLQR*) que corresponde ao problema LQR com restrições nos sinais de estado e controle (LEE; KWON; CHO, 1998; MCKERNAN; WHIDBORNE; PAPADAKIS, 2005; OHTA *et al.*, 2005; LEE; KHARGONEKAR, 2007; SHAFI; GHADAMI, 2013; ALMEIDA *et al.*, 2017; CAPRON; ODLOAK, 2018) e, mais recentemente, LQR fuzzy (do inglês, *Fuzzy LQR*) que aplica o problema LQR a sistemas baseados em modelo fuzzy (REN; YANG, 2004; ADELI; ZARABADIPOUR; SHOOREHDELI, 2011); LQR estocástico (do inglês, *Stochastic LQR*) que trata o controle de sistemas dinâmicos estocásticos lineares (FISHER; BHATTACHARYA, 2009; SONG; PARK, 2016); LQR chaveado (do inglês, *Switched LQR*) que opera em sistemas lineares chaveados (NIKOLAKOPOULOS *et al.*, 2005, 2007; VAGIA; NIKOLAKOPOULOS; TZES, 2008; BALANDAT; ZHANG; ABATE, 2012; LI; JAIN; ALLEYNE, 2012; PETERSON; KWATNY, 2014; CLAEYS; DAAFOUZ; HENRION, 2016); LQR probabilístico (do inglês, *Probabilistic LQR*) que utiliza uma aproximação probabilística para projetar controladores robustos (KHAN; AWAN; LIAQUAT, 2015; SCHILDBACH; GOULART; MORARI, 2015) e LQR derivativo (do inglês, *Derivative LQR*) que utiliza a realimentação da derivada dos estados (ALI; ALI, 2017; ALI, 2017; YAZICI; SEVER, 2017; SEVER *et al.*, 2017; BETETO *et al.*, 2018).

Além disso, a formulação LQR-LMI tornou-se mais atrativa devido ao enquadramento dos critérios clássicos (por exemplo, amortecimento da oscilação e tempo de estabeleci-

mento). Neste caso, os conceitos da \mathcal{D} -estabilidade aplicados ao controle por realimentação de estados apresentam-se em duas linhas, quais sejam: (a) restrições na forma de LMIs (CHILALI; GAHINET, 1996; CHILALI *et al.*, 1999; SATOH; SAITOH, 2004), no qual tem-se recentemente considerado aplicações de amortecimento de oscilações (RAMOS; ALBEDO; BRETAS, 2004) aliado ao tempo de estabelecimento (SOLIMAN *et al.*, 2011) em sistemas de potência e a caracterização do desempenho transitório em malha fechada que, por sua vez, limite o sobressinal, a frequência de oscilação, o tempo de atraso, o tempo de subida e o tempo de estabelecimento de forma a garantir um nível de desempenho para sistemas incertos a tempo contínuo (FAIRUS *et al.*, 2015; FARD; ALDEEN, 2016b); (b) inclusão das condições de estabilidade marginal na matriz de estados de sistemas discretos (ZHOU *et al.*, 2006) e contínuos (ASCHEMANN; KERSTEN, 2017), cuja matriz de Lyapunov é obtida pela solução da equação de Riccati. No entanto, este método não envolve a otimização da função custo garantido.

Na indústria, as plantas podem ser afetadas por falhas estruturais que ocasionam problemas de segurança, como a perda de eficiência em atuadores e sensores (KANEV; VERHAEGEN, 2002; HMIDI *et al.*, 2018), e por leis de controle que apresentam saturação (AGRAWAL *et al.*, 1997; LIMON *et al.*, 2005). Esta preocupação tem impulsionado aplicações práticas do LQR baseado em LMIs. Assim, despontaram-se as aplicações na área de Engenharia Elétrica, envolvendo sistemas de potência (ISHIMARU *et al.*, 2002), máquinas elétricas (GUPTA; BANDYOPADHYAY; KULKARNI, 2003; SIVANANDAKUMAR; RAMAKRISHNAN, 2006; KOROISHI *et al.*, 2016), geração de energia (KO *et al.*, 2006, 2008), conversores de energia (OLALLA *et al.*, 2009; MONTAGNER; DUPONT, 2010; BEID; DOUBABI, 2014; AMRITHA; PAI, 2015), controle de frequência de sistemas de geração (PANDEY *et al.*, 2013, 2014) e de potência via ambiente *smart grid* (SINGH; KISHOR; SAMUEL, 2016) e, por fim, sistema fotovoltaicos (FARD; ALDEEN, 2016a). Na Engenharia Química, explorou-se a sintonia de controladores proporcional-integral-derivativo (do inglês, *Proportional-Integral-Derivative* – PID) em reatores de tanque agitado (GONÇALVES; PALHARES; TAKAHASHI, 2008), tanque de cone invertido (GE; CHIU; WANG, 2002) e reatores em unidades de tratamento de emissões de NO_x (SINGH; NIKOLAOU, 2013). Outras aplicações envolvem problemas de controle de vibração estrutural (JOHNSON; ERKUS, 2002, 2005, 2007), controle de veículos aéreos (FISHER; BHATTACHARYA, 2009; PAKSHIN; PEAUCELLE, 2009; KONDO; OCHI, 2010; MAYER; DEHNERT; TIBKEN, 2013; TSAI *et al.*, 2013; PRADHAN; GHOSH, 2015; NIEL *et al.*, 2017), terrestres (MENHOUR; CHARARA; LECHNER, 2014; ALCALA *et al.*, 2018) e aquáticos (BHOPALE *et al.*, 2016; SOMAN; GOPMANDAL; GHOSH, 2018), controle de sistemas multiagentes (ZHANG *et al.*, 2013; FENG *et al.*, 2015), controle de temperatura de um ar condicionado *split* (YANG Y.; WU; CHANG, 2010; YANG; WU; CHANG, 2014), controle robótico (DALLALI *et*

al., 2014, 2015), controle de postura humana (PRIESS *et al.*, 2014) e controle de câmeras (EVREN; UNEL, 2016; HAN; UNEL, 2017).

Mais especificamente na indústria automotiva, há um forte interesse em projetos de suspensão ativa que remonta os anos 1960 (HROVAT, 1997). A função deste sistema é prover conforto aos passageiros, segurança ao veículo e diminuir os desgastes da suspensão causados por irregularidades na pista (DU; LAM; SZE, 2003). Uma característica intrínseca de operação destes sistemas dinâmicos é a robustez perante as incertezas nos parâmetros da planta, que deprecia o desempenho de controle (DU; LAM; SZE, 2005). Em vista disto, muitos pesquisadores têm entrelaçado a teoria de Lyapunov, as normas de sistemas (norma \mathcal{H}_∞ , norma \mathcal{H}_2) e a otimização convexa das LMIs na síntese de controladores por realimentação de estados. O objetivo é garantir a estabilidade robusta e o menor grau de influência no sinal de saída de um dado sistema (ZHANG *et al.*, 2011). Este fato consolida, na última década, uma tendência de superar a inoperância do LQR com perturbações (MAHMOUD; ALYAZIDI; ABOUHEAF, 2017). A proposta é combinar, também, as características do regulador linear em termos de desempenho transitório (CHAKRABORTY; RAY-CHAUDHURI, 2017). Neste contexto, surgiram a representação \mathcal{H}_2 do problema LQR estocástico (KO *et al.*, 2006, 2008; PANDEY *et al.*, 2013, 2014; HUANG *et al.*, 2013), o controle LQR/ \mathcal{H}_∞ (POURSHAGHAGHI *et al.*, 2007; HUANG *et al.*, 2011; MENCHOUR; CHARARA; LECHNER, 2014; ALI, 2015) e o controle LMI baseado no problema DLQR via algoritmo de controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ (YANG; WU; CHANG, 2014).

Contudo, a literatura científica aponta, predominantemente, para o uso de condições suficientes de estabilidade quadrática na formulação do problema de otimização. De um ponto de vista de teoria de controle, o uso de funções de Lyapunov com uma única matriz P conduz a algum conservadorismo e, portanto, naturalmente surgiram algumas aplicações de relaxações matriciais. Atualmente, encontra-se apenas uma proposição, ou seja, a aplicação do Lema da Projeção (do inglês, *Projection Lemma*) em problemas DLQR com realimentação da saída (LEE, 2007). De outro modo, é possível obter condições relaxadas através da técnica de ganho escalonado (do inglês, *gain scheduling*), no qual a dinâmica do sistema linear variante no tempo (do inglês, *Linear Time-Varying* - LTV) varia em toda uma gama de condições de operação. Neste caso, um único ganho implementável não garante condições desejáveis de desempenho e estabilidade (MONTAGNER *et al.*, 2004). Uma alternativa é a síntese de controladores LQR com dependência afim de parâmetros. As atuais propostas se dividem pelo método de cálculo da matriz de realimentação de estados, seja utilizando funções de Lyapunov dependentes de parâmetros (do inglês, *Parameter Dependent Lyapunov Functions* – PDLF) (AKTAS; SEVER; YAZICI, 2016; LIU *et al.*, 2017), seja pelo uso de funções de Lyapunov quadráticas (ALCALA *et al.*, 2017, 2018). Esta última proposição é mais interessante, dado que não há a inversão

de uma matriz literal no cálculo do ganho escalonado, ainda que a matriz B seja independente do conjunto de variáveis *scheduling* nas referências citadas. Outras aplicações de relevância do *gain scheduling* na estrutura LQR-*Output Feedback* podem ser vistas em (WU, 1995; NIKOLAKOPOULOS *et al.*, 2005; VESELÝ; ILKA, 2017).

Em termos de estabilidade robusta, os modelos de incertezas utilizados se resumem as inclusões diferenciais lineares politópicas (do inglês, *Polytopic Linear Differential Inclusions* – PLDIs). Por outro lado, o uso das incertezas limitadas por norma (do inglês, *Norm-Bounded Linear Differential Inclusions* – NLDIs) podem ser preferíveis, pois apresentam menor complexidade computacional devido ao fato de que a dimensão da ordem das LMIs aumenta linearmente à medida que as incertezas são incluídas (BOYD *et al.*, 1994). Novamente, as referências são escassas e, atualmente, existe uma única proposta que considera o LQR-*Output Feedback* aplicado a sistemas não lineares via modelos NLDIs (RODRIGUES; KUIAVA; RAMOS, 2011).

Portanto, o objetivo dessa tese é obter condições suficientes e menos conservadoras da teoria LQR, sob estrutura de LMIs, de sistemas lineares em domínios convexos e fechados estendidas ao controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ e *gain scheduling*. Embora as propostas de síntese sejam robustas em relação às incertezas do sistema, podem apresentar sensibilidade às próprias incertezas (erros de implementação, por exemplo) (DU; LAM; SZE, 2003). Este problema é conhecido na literatura por fragilidade de controladores e, portanto, um objetivo adicional é obter condições inéditas de estabilidade quadrática que garanta projetos resilientes as variações limitadas por norma na matriz de realimentação de estados. Algumas pesquisas sobre o problema de fragilidade do controlador LQR/ \mathcal{H}_∞ estão disponíveis na literatura, como por exemplo (XIAOJIE, 2006, 2008; HUANG *et al.*, 2011; XIAOJIE, 2013). Uma aplicação prática no helicóptero 3-DOF da Quanser[®] permite avaliar as propostas de estabilidade quadrática, estendida e projetiva. O modelo de um quarto de carro da Quanser[®] é usado no estudo da suspensão ativa, no qual condições simuladas de falhas em atuadores e fragilidade de controladores são requisitos de desempenho avançados na avaliação dos teoremas. Por fim, a taxa de decaimento é um critério opcional de projeto, cuja finalidade é limitar a dependência da *expertise* do engenheiro na escolha das matrizes de ponderação $\{\mathcal{Q}, \mathcal{R}\}$. Por outro lado, em aplicações práticas de controle robusto, o custo computacional do processo de otimização pode inviabilizar a implementação de soluções em tempo real, que motivou a incorporação da taxa de decaimento a formulação original das propostas deste trabalho.

A tese está organizada na seguinte ordem. No Capítulo 2, as formulações de síntese LQR baseada em LMIs propostas por (BOYD *et al.*, 1994) são revistas. Nas seções posteriores, as condições LMIs são estendidas a sistemas incertos contínuos no tempo e vinculadas a teoria de maior expoente de Lyapunov. O Capítulo 3 traz propostas

menos conservadoras do problema LQR robusto pela aplicação de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. A formulação $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ do controle LQR é discutida no Capítulo 4. Outras contribuições deste capítulo envolvem a caracterização de equações por variáveis de estados na representação combinada de incertezas politópicas e limitadas por norma, além do estudo da robustez do controlador. E, no Capítulo 5, propõem-se projetos de controladores *gain scheduling* baseado na ação simultânea de parâmetros incertos variantes e invariantes no tempo. Finalmente, as conclusões encerram o trabalho.

Capítulo 6

CONCLUSÃO

Este trabalho apresenta estudos do controle LQR baseado no custo quadrático irrestrito usando formulações por LMIs. De início, as estratégias propostas permitem obter ganhos de realimentação de estados inferindo uma taxa de decaimento na formulação original, avaliando os prós e contras em termos do custo computacional para diferentes modelos de incerteza. O conservadorismo da função de Lyapunov quadrática é superado através de formulações relaxadas via Lemas de Finsler e da Projeção Recíproca, que permitem alcançar factibilidade aumentada e, por consequência, a expansão dos níveis aplicáveis de taxa de decaimento. O objetivo resume-se a obter um controlador invariante no tempo e menos conservador na presença de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. Em contrapartida, os métodos propostos exigem um maior esforço computacional, que pode ser crescente de forma linear ou exponencial, conforme a abordagem de incerteza escolhida.

Os modelos foram escolhidos com base em sistemas reais descritos por equações de variáveis de estado a tempo contínuo. Optou-se, prioritariamente, por ensaios práticos através de protótipos disponíveis no Laboratório de Pesquisa em Controle. Em especial, a implementação de falhas estruturais em atuadores, no sistema de suspensão ativa, permitiu o estudo prático deste parâmetro variante no tempo em projetos de controle LQR *gain scheduling*. Por consequência, a metodologia é estendida ao caso da coexistência de incertezas paramétricas variantes e invariantes no tempo, motivando a enunciação do controle LQR *gain scheduling* robusto, cujas matrizes de estados e controle são descritas por modelos de incerteza limitada por norma. A vantagem está no projeto do controlador que não depende da inversão de uma matriz de Lyapunov literal, além de reduzir o conservadorismo da estabilidade quadrática pelo uso do Lema de Finsler.

Além disso, é proposto o estudo da influência de distúrbios na planta, originando uma proposta de controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ do problema LQR. Nesse caso, pode-se garantir um

compromisso entre o valor do critério quadrático de otimização (norma \mathcal{H}_2) e o nível de rejeição da perturbação (norma \mathcal{H}_∞). Em uma abordagem inovadora, propõem-se a representação por espaço de estados de modelos combinados de incertezas e, conseqüentemente, formulações originais são obtidas para duas estratégias. Todavia, até este ponto, as restrições LMIs são baseadas em parâmetros incertos que atuam na planta. Este fato motivou a aplicação do critério de robustez à controladores e, portanto, foi possível garantir um nível de resiliência na presença de variações limitadas por norma na matriz de realimentação de estados.

6.1 PERSPECTIVAS FUTURAS

- Considerar o uso de uma função de erro no índice de desempenho \mathcal{J}_∞ em problemas de rastreamento ótimo de trajetórias de referências.
- Estender as metodologias de controle LMI do problema LQR discutidas para o caso da realimentação derivativa dos estados e à sistemas lineares a tempo discreto.
- Em termos de sistemas contínuos variantes no tempo, de modo geral, poderia-se incorporar taxas de variações limitadas nos parâmetros.
- Reduzir o conservadorismo da formulação $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ do problema LQR introduzindo estratégias de controle *gain scheduling*.
- Reduzir o conservadorismo das propostas apresentadas no Capítulo 5 pelo uso de funções de Lyapunov dependente de parâmetros.
- Obter formulações do controle LQR *gain scheduling* robusto para sistemas lineares politópicos.

6.2 PUBLICAÇÕES

- Publicações diretamente relacionadas com o conteúdo da tese.

(a) *Artigos completos publicados em periódicos:*

1. CAUN, R. P.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CAUN, A. P. LQR-LMI Control Applied to Convex-bounded Domains. *Cogent Engineering*, v. 5, 27 p. 2018.

(b) *Trabalhos completos publicados em anais de congressos:*

1. CAUN, R. P.; ASSUNÇÃO, E.; LLINS, L. I. H.; TEIXEIRA, M. C. M. Controlador LQR via Aproximação LMI com Restrição de Taxa de Decaimento Aplicado ao Helicóptero 3-DOF de Bancada. In: XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2015, Natal/RN. XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - SBAI 2015, 2015. v. 1. p. 49-54.
 2. CAUN, R. P.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CAUN, A. P. Projeto de Controladores LQR-LMI com Restrição de Taxa de Decaimento e Estabilidade Estendida. In: XXI Congresso Brasileiro de Automática, 2016, Vitória/ES. Anais do XXI Congresso Brasileiro de Automática, 2016. p. 72-79.
 3. CAUN, R. P.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CAUN, A. P. Relaxação de Controladores Robustos LQR-LMI Sujeito a Restrição de Taxa de Decaimento via Lema da Projeção Recíproca. In: 12th IEEE/IAS Internacional Conference on Industry Applications - INDUSCON 2016, 2016, Curitiba/PR. Anais do 12th IEEE/IAS Internacional Conference on Industry Applications - INDUSCON 2016, 2016. p. 1-7.
- Publicações indiretamente relacionadas ao conteúdo da tese:
 - (a) *Trabalhos completos publicados em anais de congressos:*
 1. BETETO, M. A. L.; SILVA, E. R. P.; BUZACHERO, L. F. S.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CAUN, R. P. Síntese de Controlador LQR-Derivativo Robusto via LMI: Sintonia Através de Algoritmo Genético. In: XXI Congresso Brasileiro de Automática - CBA 2016, 2016, Vitória/ES. Anais do XXI Congresso Brasileiro de Automática, 2016. v. 1. p. 1416-1421.
 2. BETETO, M. A. L.; SILVA, E. R. P.; BUZACHERO, L. F. S.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CAUN, R. P. Síntese de Controlador LQR-Derivativo Robusto via LMI com Restrição na Taxa de Decaimento : Sintonia Através de Algoritmo Genético. In: 12th IEEE/IAS Internacional Conference on Industry Applications - INDUSCON 2016, 2016, Curitiba/PR. Anais do 12th IEEE/IAS Internacional Conference on Industry Applications - INDUSCON 2016, 2016. p. 1-8.
 3. BETETO, M. A. L.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; SILVA, E. R. P.; BUZACHERO, L. F. S.; CAUN, R. P. Design of Robust LQR-derivative Controllers for the \mathcal{D} -stabilization of Linear Systems. In: XXII Congresso Brasileiro de Automática, 2018, João Pessoa/PB. Anais do XXII Congresso Brasileiro de Automática, 2018. p. 1-6.

4. ALVES, U. N. L. T.; OLIVEIRA, D. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; CAUN, R. P. Projeto de Controlador com Estrutura Variável para Minimização de Custo Quadrático Utilizando a Função Mínimo. In: XXII Congresso Brasileiro de Automática, 2018, João Pessoa/PB. Anais do XXII Congresso Brasileiro de Automática, 2018. p. 1-8.
5. BETETO, M. A. L.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; SILVA, E. R. P.; BUZACHERO, L. F. S.; CAUN, R. P. New Design of Robust LQR-State Derivative Controllers via LMIs. In: 9th IFAC Symposium on Robust Control Design and 2nd IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems, 2018, Florianópolis/SC. 9th IFAC Symposium on Robust Control Design and 2nd IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems, 2018. v. 1. p. 612-617.

REFERÊNCIAS

- ADELI, M.; ZARABADIPOUR, H.; SHOOREHDELI, M. A. Crane control via parallel distributed fuzzy LQR controller using genetic fuzzy rule selection. In: THE INTERNATIONAL 2nd CONFERENCE ON CONTROL, INSTRUMENTATION AND AUTOMATION, 2, 2011, Shiraz. *Proceedings of the [...]* Shiraz: IEEE, 2011. p. 390 – 395.
- AGRAWAL, A. K.; YANG, J. N.; SCHMITENDORF, W. E.; JABBARI, F. Stability of actively controlled structures with actuator saturation. *Journal of Structural Engineering*, Reston, v. 123, p. 505 – 512, Apr. 1997.
- ALI, H. Mixed LQR/H-infinity controller design for uncertain multivariable systems. *Emirates Journal for Engineering Research*, Al Ain, v. 20, p. 101 – 107, Oct. 2015.
- AKTAS, A.; SEVER, M.; YAZICI, H. Gain scheduling LQR control of linear parameter varying overhead crane. In: NATIONAL CONFERENCE ON ELECTRICAL, ELECTRONICS AND BIOMEDICAL ENGINEERING, 2016, Turquia. *Proceedings of the [...]*. Turquia: IEEE, 2016. p. 232 – 236.
- ALCALA, E.; PUIG, V.; QUEVEDO, J.; ESCOBET, T. Gain scheduling LPV control scheme for autonomous guidance problem using a dynamic modelling approach. *IET Research Journals*, p. 1 – 10, Dec. 2017. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/321487914_Gain_Scheduling_LPV_Control_Scheme_for_the_Autonomous_Guidance_Problem_using_a_Dynamic_Modelling_Approach. Acesso em: 29 out. 2019.
- ALCALA, E.; PUIG V.; QUEVEDO, J.; ESCOBET, T.; COMASOLIVAS, R. Autonomous vehicle control using a kinematic Lyapunov-based technique with LQR-LMI tuning. *Control Engineering Practice*, Oxford, v. 73, p. 1 – 12, 2018.
- ALI, H. I. \mathcal{H}_2 -optimal control synthesis using state derivative feedback. *Al-Nahrain Journal for Engineering Sciences*, Baghdad, v. 20, n. 5, p. 1057 – 1063, 2017.
- ALI, H. I.; ALI, M. Z. M. LQR and \mathcal{H}_2 controllers design using state derivative feedback for multivariable systems. *American Scientific Research Journal for Engineering, Technology, and Sciences*, Raipur, v. 37, n. 1, p. 118 – 128, Oct. 2017.
- ALMEIDA, J.; MENDONÇA, T.; ROCHA, P.; RODRIGUES, L. Controller design for

- neuromuscular blockade level tracking based on optimal control. *Control Engineering Practice*, Oxford, v. 59, p. 151 – 158, 2017.
- AMRITHA, A.; PAI, A. D. A comparative study of controllers used for interleaved double dual boost converter. In: *INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL, COMMUNICATION & COMPUTING*, 2015, Trivandrum. *Proceedings of the [...]*. Trivandrum: IEEE, 2015. p. 101 – 106.
- APKARIAN, P.; TUAN, H. D.; BERNUSSOU, J. Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and \mathcal{H}_2 synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterizations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 46, p. 1941 – 1946, Dec. 2001.
- ASCHEMANN, H.; KERSTEN, J. Active damping and drive train control for a wind turbine with a hydrostatic transmission and a PMSG. *IFAC-PapersOnLine*, v. 50, n. 1, p. 9920 – 9925, 2017.
- ASSADIAN, F. Static output feedback: An approach to compare optimal partial state linear controllers. *IFAC Intelligent Components and Instruments for Control Applications*, v. 33, p. 149 – 154, Sep. 2000.
- AZIZI, S.; TORRES; B, L. A.; PALHARES, R. M. Regional robust stabilisation and domain-of-attraction estimation for MIMO uncertain nonlinear systems with input saturation. *International Journal of Control*, Abingdon, v. 91, n. 1, p. 215 – 229, 2018.
- BALANDAT, M.; ZHANG, W.; ABATE, A. On infinite horizon switched LQR problems with state and control constraints. *Systems & Control Letters*, Amsterdam, v. 61, n. 4, p. 464 – 47, 2012.
- BARBOSA, K. A. *Técnicas LMI para sistemas com restrições algébricas no estado*. 1999. 70 f. Dissertação (Mestrado em Controle, Automação e Informática Industrial) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1999.
- BEID, S.; DOUBABI, S. DSP-based implementation of fuzzy output tracking control for a boost converter. *IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS*, Piscataway, v. 61, n. 1, p. 196 – 209, Jan. 2014.
- BENNETT, S. A brief history of automatic control. *IEEE Control Systems*, Piscataway, v. 16, p. 17 – 25, Jun. 1996.
- BETETO, M. A. L.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; SILVA, E. R. P.; BUZACHERO, L. F. S.; CAUN, R. P. New design of robust LQR-state derivative controllers via LMIs. In: *IFAC SYMPOSIUM ON ROBUST CONTROL DESIGN AND, 9, IFAC WORKSHOP ON LINEAR PARAMETER VARYING SYSTEMS, 2*, 2018, Florianópolis. *Proceedings of the [...]*. Florianópolis: [s.n.], 2018. v. 1, p. 612 – 617.
- BHOPALE, P. S.; BAJARIA, P. K.; KAZI, F. S.; SINGH, N. M. LMI based depth control for autonomous underwater vehicle. In: *INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL, INSTRUMENTATION, COMMUNICATION AND COMPUTATIONAL TECHNOLOGIES*, 2016, Kumaracoil. *Proceedings of the [...]*. Kumaracoil: IEEE, 2016. p. 477 – 481. 2016.

- BOMBOIS, X. *Connecting prediction error identification and robust control analysis: a new framework*. Tese (Doutorado) — Université Catholique de Louvain, 2000. Doctoral dissertation.
- BOYD, S.; CRUSIUS, C.; HANSSON, A. Control applications of nonlinear convex programming. *Journal of Process Control*, London, v. 8, n. 5, p. 313 – 324, Jun. 1998.
- BOYD, S.; FERON, E.; GHAOUI, L.; BALAKRISHNAN, V. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. 193 p. Disponível em: <http://web.stanford.edu/~boyd/lmibook/>. Acesso em: 30 out. 2019.
- BUZACHERO, L. F. S.; ASSUNÇÃO, E. ; TEIXEIRA, M. C. M.; SILVA, E. R. P. D. New techniques for optimizing the norm of robust controllers of polytopic uncertain linear systems. In: SERRA, G. L. (ed.). *Frontiers in advanced control systems*. [S.l.]: IntechOpen, 2012. cap. 4, p. 75 – 100.
- CADALSO, M. R. R. *Projeto via LMI de controladores gain scheduling com restrição de \mathcal{D} -estabilidade*. 2016. 74 f. Dissertação (Mestrado em Automação) — Faculdade de Engenharia - Câmpus de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2016. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/151098/rodriguez_cadalso_mr_me_ilha.pdf?sequence=3&isAllowed=y. Acesso em: 30 out. 2019.
- CAICEDO, M. A. R.; SENAME, O.; WITRANT, E.; CAILLOL, C.; HIGELIN, P. A parameter varying observer for the enclosed mass in a spark ignited engine. In: IFAC WORKSHOP ON ENGINE AND POWERTRAIN CONTROL, SIMULATION AND MODELING, 3, 2012, Rueil Malmaison. *Proceedings of the [...]*. Rueil Malmaison: IFAC, 2012. v. 45, p. 318 – 325, Oct. 2012.
- CAPRON, B. D. O.; ODLOAK, D. A robust LQR-MPC control strategy with input constraints and control zones. *Journal of Process Control*, London, v. 64, p. 89 – 99, 2018.
- CARNIATO, L. A.; CARNIATO, A. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; MAINARDI JR, E. I.; ASSUNÇÃO, E. Output control of continuous-time uncertain switched linear systems via switched static output feedback. *International Journal of Control*, London, v. 0, n. 0, p. 1 – 20, 2018.
- CASTELAN, E. B.; TARBOURIECH, S.; SILVA, J. M. G. da; QUEINNEC, I. \mathcal{L}_2 -stabilization of continuous-time linear systems with saturating actuators. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Oxford, v. 16, n. 18, p. 935 – 944, 2006.
- CHAKRABORTY, S.; RAY-CHAUDHURI, S. Equivalence of optimal gain between \mathcal{H}_2 norm minimization and LQR control of a linear system. *Journal of Engineering Mechanics*, New York, v. 143, p. 1 – 3, Jun. 2017.
- CHILALI, M.; GAHINET, P.; ; APKARIAN, P. Robust pole placement in LMI regions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 44, n. 12, p. 2257 – 2270, Dec. 1999.
- CHILALI, M.; GAHINET, P. \mathcal{H}_∞ design with pole placement constraints: An LMI

approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 41, p. 358 – 367, Mar. 1996.

CLAEYS, M.; DAAFOUZ, J.; HENRION, D. Modal occupation measures and LMI relaxations for nonlinear switched systems control. *Automatica*, Oxford, v. 64, p. 143 – 154, Jun. 2016.

DAAFOUZ, J.; BERNUSSOU, J. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems & Control Letters*, Amsterdam, v. 43, n. 5, p. 355 – 359, 2001.

DALLALI, H.; LEE, J.; TSAGARAKIS, N. G.; CALDWELL, D. G. Experimental study on linear state feedback control of humanoid robots with flexible joints. *IFAC-PapersOnLine*, v. 48, n. 19, p. 130 – 135, 2015.

DALLALI, H.; MEDRANO-CERDA, G.; KASHIRI, N.; TSAGARAKIS, N.; CALDWELL, D. Decentralized feedback design for a compliant robot arm. In: EUROPEAN MODELLING SYMPOSIUM, 8, 2014, Pisa. *Proceedings of the [...]*. Pisa: [s.n.], 2014. p. 269 – 274.

DAS, S.; PAN, I.; DAS, S. Multi-objective LQR with optimum weight selection to design FOPIID controllers for delayed fractional order processes. *ISA Transactions*, New York, v. 58, p. 35 – 49, 2015.

DONGMEI, Z.; XINGANG, W.; LI, M. Consensus for multi-agent dynamic systems: An LQR perspective. In: PROCEEDINGS OF THE CHINESE CONTROL CONFERENCE, 31, 2012, Hefei. *Proceedings of the [...]*. Hefei: [s.n.], 2012. p. 6261 – 6266.

DU, H.; LAM, J.; SZE, K. Y. Non-fragile output feedback \mathcal{H}_∞ vehicle suspension control using genetic algorithm. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Oxford, v. 16, p. 667 – 680, 2003.

DU, H.; LAM, J.; SZE, K. Y. Design of non-fragile \mathcal{H}_∞ controller for active vehicle suspensions. *Journal of Vibration and Control*, London, v. 11, p. 225 – 243, 2005.

EVREN, S.; UNEL, M. Stabilization of a pan-tilt system using a polytopic quasi-LPV model and LQR control. In: ANNUAL CONFERENCE OF THE IEEE INDUSTRIAL ELECTRONICS SOCIETY, 42, 2016, Forence. *Proceedings of the [...]*. Forence: IEEE, 2016. p. 636 – 641.

FAIRUS, M. A.; MOHAMED, Z.; AHMAD, M. N.; LOI, W. S. LMI-based multiobjective integral sliding mode control for rotary inverted pendulum system under load variations. *Jurnal Teknologi*, Johor Darul Takzim, v. 73, n. 6, p. 125 – 137, 2015.

FARD, M.; ALDEEN, M. Linear quadratic regulator design for a hybrid photovoltaic-battery system. In: AUSTRALIAN CONTROL CONFERENCE, 2016, Newcastle. *Proceedings of the [...]*. Newcastle: IEEE, 2016. p. 347 – 352

FARD, M.; ALDEEN, M. Robust control design for a boost converter in a photovoltaic system. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON POWER ELECTRONICS FOR DISTRIBUTED, GENETRATION SYSTEMS, 7, 2016, Vancouver. *Proceedings of*

the [...]. Vancouver: IEEE, 2016. p. 1 – 9..

FENG, T.; ZHANG, H.; LUO, Y.; LIAN, H. Consensus rate regulation for general linear multi-agent systems under directed topology. *Applied Mathematics and Computation*, Philadelphia, v. 271, p. 845 – 859, 2015.

FISHER, J.; BHATTACHARYA, R. Linear quadratic regulation of systems with stochastic parameter uncertainties. *Automatica*, Oxford, v. 45, n. 12, p. 2831 – 2841, 2009.

GAJDÁR, T.; SUDA, Y.; SZABÓ, Z.; KORONDI, P. Gain scheduling robust \mathcal{H}_∞ controllers for intelligent railway vehicle systems. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 30, n. 16, p. 273 – 278, 1997.

GE, M.; CHIU, M.; WANG, O. Robust PID controller design via LMI approach. *Journal of Process Control*, London, v. 12, n. 1, p. 3 – 13, 2002.

GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H. Analysis and synthesis of robust control systems using linear parameter dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 51, p. 1984 – 1989, 2006.

GONÇALVES, E. N.; PALHARES, R. M.; TAKAHASHI, R. H. C. A novel approach for $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ robust PID synthesis for uncertain systems. *Journal of Process Control*, London, v. 18, n. 1, p. 19 – 26, 2008.

GRITLI, H.; BELGHITH, S. Robust feedback control of the underactuated inertia wheel inverted pendulum under parametric uncertainties and subject to external disturbances: LMI formulation. *Journal of the Franklin Institute*, Oxford, p. 1 – 42, 2017. Special Issue on 2010-2012 Advances in Variable Structure Systems and Sliding Mode Algorithms.

GUO, Z.; XU, J.; LEE, T. H. Design and implementation of a new sliding mode controller on an underactuated wheeled inverted pendulum. *Journal of the Franklin Institute*, Oxford, v. 351, n. 4, p. 2261 – 2282, 2014. Special Issue on 2010-2012 Advances in Variable Structure Systems and Sliding Mode Algorithms.

GUPTA, R.; BANDYOPADHYAY, B.; KULKARNI, A. M. Design of power system stabiliser for single-machine system using robust periodic output feedback controller. *IEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution*, Stevenage, v. 150, p. 211 – 216, Mar. 2003.

HALL, A. C. *The analysis and synthesis of linear servomechanisms*. Cambridge, MA: The Technology Press, 1943.

HAN, S. E.; UNEL, M. Stabilization of pan-tilt systems using acceleration based LMI-LQR controller. In: ASIAN CONTROL CONFERENCE, 11, 2017, Gold Coast. *Proceedings of the [...]*. Gold Coast: [s.n.], 2017. p. 2552 – 2557.

HMIDI, R.; BRAHIM, A. B.; HMIDA, F. B.; SELLAMI, A. Robust fault tolerant control for lipschitz nonlinear systems with simultaneous actuator and sensor faults. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ADVANCED SYSTEMS AND ELECTRIC TECHNOLOGIES - ICASET, 2018, Hammamet. *Proceedings of the [...]*. Hammamet:

IEEE, 2018. p. 277 – 283.

HONG, B.; YANG, V.; RAY, A. Robust feedback control of combustion instability with modeling uncertainty. *Combustion and Flame*, New York, v. 120, n. 1, p. 91 – 106, 2000.

HROVAT, D. Survey of advanced suspension developments and related optimal control applications. *Automatica*, Oxford, v. 33, n. 10, p. 1781 – 1817, 1997.

HUANG, H.; LI, D.; XI, Y. The improved robust model predictive control with mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control approach. *Acta Automatica Sinica*, Beijing, v. 38, n. 6, p. 944 – 949, Jun. 2012.

HUANG, Y.; SUN, C.; WANG, L.; XIA, J. Mixed LQR/ \mathcal{H}_∞ non-fragile control with regional pole placement for flight kinematics system. In: CHINESE CONTROL AND DECISION CONFERENCE, 2011, Mianyang. *Proceedings of the [...]*. Mianyang: IEEE, 2011. p. 1410 – 1414.

HUANG, Y.; SUN, C.; XUE, L.; YANG, W. Multi-objective switching tracking control for a flexible air-breathing hypersonic vehicle. In: PROCEEDINGS OF THE CHINESE CONTROL CONFERENCE, , 32, 2013, Xi'an. *Proceedings of the [...]*. Xi'an: IEEE, 2013. p. 5414 – 5419.

HWANG, C.; HUANG, K.; LIN, K.; LEE, B. Observer base linear quadratic regulation with estimated state feedback control. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON MACHINE LEARNING AND CYBERNETICS, 2010, Qingdao. *Proceedings of the [...]*. Qingdao: IEEE, 2010. p. 2802 – 2805

ISHIMARU, M.; YOKOYAMA, R.; SHIRAI, G.; NIIMURA, T. Robust thyristor-controlled series capacitor controller design based on linear matrix inequality for a multi-machine power system. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, London, v. 24, n. 8, p. 621 – 629, 2002.

IWASAKI, T.; SKELTON, R. E.; GEROMEL, J. C. Linear quadratic suboptimal control with static output feedback. *Systems & Control Letters*, Amsterdam, v. 23, n. 6, p. 421 – 430, 1994.

JIWEI, L.; DEWEI, L.; YUGENG, X.; JIANBO, L. Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ model predictive control for systems with energy-bounded disturbance. In: PROCEEDINGS OF THE CHINESE CONTROL CONFERENCE, , 32, 2013, Xi'an. *Proceedings of the [...]*. Xi'an: IEEE, 2013. p. 4052 – 4056.

JOHNSON, E. A.; ERKUS, B. Structural control with dissipative damping devices. In: PROCEEDINGS OF THE AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2002, Anchorage. *Proceedings of the [...]*. Anchorage: IEEE, 2002. p. 2463 – 2468. May 2002.

JOHNSON, E. A.; ERKUS, B. Investigation of dissipativity for control of smart dampers via LMI synthesis. In: PROCEEDINGS OF THE AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2005, Portland. *Proceedings of the [...]*. Portland: IEEE, 2005. p. 3084 – 3089.

JOHNSON, E. A.; ERKUS, B. Dissipativity and performance analysis of smart dampers

- via LMI synthesis. *Structural Control Health Monitoring*, Oxford, v. 14, n. 3, p. 471 – 496, 2007.
- KALMAN, R. E. Contributions to the theory of optimal control. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, Basel, v. 5, p. 102 – 119, 1960.
- KALMAN, R. E. On the general theory of control systems. In: PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL CONGRESS AUTOMATIC CONTROL, 1, 1960, Moscow. *Proceedings of the [...]*. Moscow: [s.n.], 1960. p. 481 – 491.
- KANEV, S.; VERHAEGEN, M. Reconfigurable robust fault-tolerant control and state estimation. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 35, n. 1, p. 95 – 100, 2002.
- KEEL, L. H.; BHATTACHARYYA, S. P. Robust, fragile, or optimal? *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 42, n. 8, p. 1098 – 1105, 1997.
- KHAIRY, M.; ELSHAFEI, A. L.; EMARA, H. M. LMI based design of constrained fuzzy predictive control. *Fuzzy Sets and Systems*, Amsterdam, v. 161, n. 6, p. 893 – 918, 2010. Theme: "Fuzzy Control".
- KHAN, M. M.; AWAN, A. U.; LIAQUAT, M. Improving vehicle handling and stability under uncertainties using probabilistic approach. *IFAC-PapersOnLine*, v. 48, n. 25, p. 42 – 247, 2015.
- KO, H.; JATSKEVICH, J.; DUMONT, G.; YOON, G. An advanced LMI-based-LQR design for voltage control of grid-connected wind farm. *Electric Power Systems Research*, Amsterdam, v. 78, n. 4, p. 539 – 546, 2008.
- KO, H. S.; DUMONT, G. A.; JATSKEVICH, J.; MOSHREF, A. A new LMI representation of LQR based voltage control of grid-connected wind farm. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2006, Minneapolis. *Proceedings of the [...]*. Minneapolis: [s.n.], 2006. p. 851 – 856.
- KONDO, H.; OCHI, Y. Design of a model-following PID control system for an MAV. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 43, n. 15, p. 13 – 18, 2010.
- KOROISHI, E. H.; LARA-MOLINA, F. A.; BORGES, A. S.; JR., V. S. Robust control in rotating machinery using linear matrix inequalities. *Journal of Vibration and Control*, London, v. 22, n. 17, p. 3767 – 3778, 2016.
- KUNNEE, V.; BANJERDPONGCHAI, D. Robust constrained model predictive control for linear time-varying systems with norm-bounded uncertainty. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ELECTRICAL ENGINEERING/ELECTRONICS, COMPUTER, TELECOMMUNICATIONS AND INFORMATION TECHNOLOGY, 2008, Krabi. *Proceedings of the [...]*. Krabi: IEEE, 2008. p. 589 – 592.
- LEE, J.; KHARGONEKAR, P. P. Constrained infinite-horizon linear quadratic regulation of discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 52, p. 1951 – 1958, Oct. 2007.
- LEE, J.; KWON, W. H.; CHO, H. S. Exponential stability and feasibility of receding

- horizon control for constrained systems. *IFAC System Structure and Control*, Nantes, França, p. 317 – 322, 1998.
- LEE, K. H. Suboptimal digital LQ output feedback control design via LMI relaxations. *Optimal Control Applications and Methods*, Oxford, v. 28, p. 451 – 465, 2007.
- LEE, S. M.; PARK, J. H.; JI, D. H.; WON, S. C. Robust model predictive control for LPV systems using relaxation matrices. *IET Control Theory & Applications*, Stevenage, v. 1, p. 1567 – 15738, Nov. 2007.
- LI, B.; JAIN, N.; ALLEYNE, A. G. LMI control design for nonlinear vapor compression cycle systems. *Dynamic Systems and Control Conference*, v. 2, p. 711 – 718, Oct. 2012. Disponível em: <https://engineering.purdue.edu/JainResearchLab/pdf/lmi-control-design-nonlinear-vapor-compression-cycle.pdf>. Acesso em: 30 out. 2019.
- LIMON, D.; SILVA, J. M. G.; ALAMO, T.; CAMACHO, E. F. Improved MPC design based on saturating control laws. *European Journal of Control*, Amsterdam, v. 11, n. 2, p. 112 – 122, 2005.
- LIU, Z.; THEILLIOL, D.; GU, F.; HE, Y.; YANG, L.; HAN, J. State feedback controller design for affine parameter-dependent LPV systems. *IFAC-PapersOnLine*, v. 50, n. 1, p. 9760 – 9765, Oct. 2017.
- LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. *n: PROCEEDINGS IN IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION, 2004*, New Orleans. *Proceedings of the [...]*. New Orleans: IEEE, 2004. 2004. p. 284 – 289.
- MAHMOUD, M. S.; ALYAZIDI, N. M.; ABOUHEAF, M. I. Adaptive intelligent techniques for microgrid control systems: A survey. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, London, v. 90, p. 292 – 305, 2017.
- MÄKILÄ, P. M. Comments on 'robust, fragile, or optimal?'. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 43, n. 9, p. 1265 – 1267, 1998.
- MARSH, C.; WEI, H. Robustness bounds for systems with parametric uncertainty. *Automatica*, Oxford, v. 32, n. 10, p. 1447 – 1453, 1996.
- MAYER, S.; DEHNERT, R.; TIBKEN, B. Controller synthesis of multi dimensional, discrete LTI systems based on numerical solutions of linear matrix inequalities. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2013, Washington. *Proceedings of the [...]*. Washington: IEEE, 2013. p. 2386 – 2391.
- MCKERNAN, J.; WHIDBORNE, J. F.; PAPADAKIS, G. Minimisation of transient perturbation growth in linearised lorenz equations. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 38, n. 1, p. 342 – 347, 2005.
- MENHOUR, L.; CHARARA, A.; LECHNER, D. Switched LQR/ \mathcal{H}_∞ steering vehicle control to detect critical driving situations. *Control Engineering Practice*, Oxford, v. 24, p. 1 – 14, 2014.

- MONTAGNER, V. F.; DUPONT, F. H. A robust LQR applied to a boost converter with response optimized using a genetic algorithm. In: *CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA*, 18, 2010, Bonito. *Anais [...]* Bonito: SBA, 2010. p. 2297 – 2302.
- MONTAGNER, V. F.; LEITE, V. J. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F. de; PERES, P. L. D. Controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados linear variante com parâmetros: Uma abordagem LMI. In: *CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA*, 15, 2010, Gramado. *Anais [...]*. Gramado: SBA, 2004. p. 1 – 6.
- MONTAGNER, V. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; LEITE, V. J. S.; PERES, P. L. D. Gain scheduled state feedback control of discrete systems with time-varying uncertainties: an LMI approach. In: *PROCEEDINGS OF THE IEEE CONFERENCE ON DECISION, 44, AND CONTROL EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, ECC*, 2005, Seville. *Proceedings of the [...]*. Seville: IEEE, 2005. p. 4305 – 4310.
- MONTAGNER, V. F.; PERES, P. L. D. State feedback gain scheduling for linear systems with time-varying parameters. In: *PROCEEDINGS OF THE AMERICAN CONTROL CONFERENCE*, 2004, Boston. *Proceedings of the [...]*. Boston: IEEE, 2004. p. 2004 – 2009. Boston, Massachusetts, p. 2004 – 2009, Jul. 2004.
- NAKAJIMA, K.; KOBAYASHI, K.; YAMASHITA, Y. Linear quadratic regulator with decentralized event-triggering. In: *ANNUAL CONFERENCE OF THE IEEE INDUSTRIAL ELECTRONICS SOCIETY*, 42, 2016, Florence. *Proceedings of the [...]*. Florence: IEEE, 2016. p. 5374 – 5379.
- NAKAJIMA, K.; KOBAYASHI, K.; YAMASHITA, Y. Linear quadratic regulator with decentralized event-triggering. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics Communications and Computer Sciences*, E100-A, Tokyo, n. 2, p. 414 – 420, 2017.
- NESTEROV, Y.; NEMIROVSKY, A. *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. Disponível em: <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9781611970791>. Acesso em: 30 out. 2019.
- NEWTON, G. C.; GOULD, L. A.; KAISER, J. F. *Analytical design of linear feedback controls*. London: Chapman and Hall, 1957. 418 p.
- NIEL, F.; SEURET, A.; ZACCARIAN, L.; FAGLEY, C. Robust LQR control for stall flutter suppression: a polytopic approach. *IFAC-PapersOnLine*, v. 50, n. 1, p. 11367 – 11372, 2017.
- NIKOLAKOPOULOS, G.; PANOUSOPOULOU, A.; TZES, A.; LYGEROS, J. Multi-hopping induced gain scheduling for wireless networked controlled systems. In: *IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL*, 44, 2005, Seville. *Proceedings of the [...]*. Seville: IEEE, 2005. p. 470 – 475.
- NIKOLAKOPOULOS, G.; PANOUSOPOULOU, A.; TZES, A.; LYGEROS, J. Multi-hopping induced gain scheduling for wireless networked controlled systems. *Asian Journal of Control*, Hoboken, v. 9, n. 4, p. 450 – 457, 2007.
- OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1985. 930p.

- OHTA, Y.; MORI, K.; YUKIMOTO, K.; MISHIO, R. On-line reference management for discrete-time servo systems under state and control constraints. In: ANNUAL CONFERENCE OF IEEE INDUSTRIAL ELECTRONICS SOCIETY, 31, 2005, [Piscataway]. *Proceedings of the [...]*. [Piscataway]: IEEE, 2005. p. 183 – 188.
- OLALLA, C.; LEYVA, R.; AROUDI, A.; QUEINNEC, I. LMI control applied to non-minimum phase switched power converters. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON INDUSTRIAL ELECTRONICS, 2008, Cambridge. *Proceedings of the [...]*. Cambridge: IEEE, 2008. p. 154 – 159.
- OLALLA, C.; LEYVA, R.; AROUDI, A.; QUEINNEC, I. Robust LQR control for PWM converters: An LMI approach. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Piscataway, v. 56, p. 2548 – 2558, 2009.
- OLIVEIRA, M. C. de. Novos testes de estabilidade para sistemas lineares. *Revista Controle & Automação*, Campinas, v. 15, n. 1, p. 17 – 23, 2004.
- OLIVEIRA, M. C. de; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. In: MOHEIMANI, S. R. (ed.). *Perspectives in robust control*. London: Springer London, 2001. p. 241 – 257.
- ORUKPE, P. E.; JAIMOUKHA, I. M. Robust model predictive control based on mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control approach. *Proceedings of the European Control Conference*, Budapest, Hungary, p. 2223 – 2228, Aug. 2009.
- ORUKPE, P. E.; JAIMOUKHA, I. M.; EL-ZOBAIDI, H. M. H. Model predictive control based on mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control approach. In: IEEE AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2007, New York. *Proceedings of the [...]*. New York: IEEE, 2007. p. 6147 – 6150.
- PAKSHIN, P.; EMELIANOVA, J. An experience of using LMI technique in control education. *IFAC-PapersOnLine*, v. 49, n. 6, p. 115 – 120, 2016.
- PAKSHIN, P.; PEAUCELLE, D. LQR parametrization of static output feedback gains for linear systems with Markovian switching and related robust stabilization and passification problems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 48, CHINESE CONTROL CONFERENCE, 28, 2009, Shanghai. *Proceedings of the [...]*. Shanghai: IEEE, 2009. p. 1157 – 1162.
- PANDEY, S. K.; MOHANTY, S. R.; KISHOR, N.; CATALÃO, J. P. S. *An Advanced LMI-based-LQR design for load frequency control of an autonomous hybrid generation system*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013. p. 371 - 381
- PANDEY, S. K.; MOHANTY, S. R.; KISHOR, N.; CATALÃO, J. P. S. Frequency regulation in hybrid power systems using particle swarm optimization and linear matrix inequalities based robust controller design. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, London, v. 63, p. 887 – 900, 2014.
- PETERSON, E.; KWATNY, H. G. Multi-model adaptive regulation for a family of systems containing different zero structures. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 47, n. 3, p. 389 – 394, 2014.

- PIPELEERS, G.; DEMEULENAERE, B.; SWEVER, J.; VANDENBERGHE, L. Extended LMI characterizations for stability and performance of linear systems. *Systems & Control Letters*, Amsterdam, v. 58, n. 7, p. 510 – 518, 2009.
- POLYAK, B.; KHLEBNIKOV, M.; SHCHERBAKOV, P. An LMI approach to structured sparse feedback design in linear control systems. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 2013, Zurich. *Proceedings of the [...]*. Zurich: IEEE, 2013. p. 833 – 838.
- POURSHAGHAGHI, H. R.; JAHED-MOTLAGH, M. R.; MONTAZER, A.; POSHTAN, J.; JALALI, A. A. Optimized multiobjective \mathcal{H}_∞ control applied to inverted pendulum. In: ANNUAL CONFERENCE OF THE IEEE INDUSTRIAL ELECTRONICS SOCIETY, 33, 2007, Taipei. *Proceedings of the [...]*. Taipei: IEEE, 2007. p. 938 – 943.
- PRADHAN, J. K.; GHOSH, A. Multi-input and multi-output Proportional-Integral-Derivative controller design via linear quadratic regulator-linear matrix inequality approach. *IET Control Theory & Applications*, Stevenage, v. 9, p. 2140 – 2145, 2015.
- PRIESS, M. C.; CONWAY, R.; CHOI, J.; POPOVICH, J. M.; RADCLIFFE, C. Solutions to the inverse LQR problem with application to biological systems analysis. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Piscataway, v. 23, p. 770 – 777, 2014.
- QUANSER. *3-DOF Helicopter - Reference Manual*. [S.l.], 2002.
[Http://www.quanser.com/english/html/products/fs_product_echallenge.asp?lang_code=english&pcat_code=exp-spe&prod_code=S1-3dofheli&tmpl=1](http://www.quanser.com/english/html/products/fs_product_echallenge.asp?lang_code=english&pcat_code=exp-spe&prod_code=S1-3dofheli&tmpl=1). Acesso em: 25 jun. 2018.
- RAMOS, R. A.; ALBERTO, L. F. C.; BRETAS, N. G. A new LMI-based procedure for the design of robust damping controllers for power systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 43, 2004, Nassau. *Proceedings of the [...]*. Nassau: IEEE, 2004. p. 4467 – 4472.
- REN, J.; YANG, Y. Fuzzy gain scheduling attitude control for Hydrofoil Catamaran. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2011, Boston. *Proceedings of the [...]* Boston: IEEE, 2004. p. 1103 – 1108.
- RODRIGUES, C. R.; KUIAVA, R.; RAMOS, R. A. Design of a linear quadratic regulator for nonlinear systems modeled via norm-bounded linear differential inclusions. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 44, n. 1, p. 7352 – 7357, 2011.
- SAFAEI, F. R. P.; HESPANHA, J. P.; PROULX, S. R. Infinite horizon linear quadratic gene regulation in fluctuating environments. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 51, 2012, Maui. *Proceedings of the [...]*. Maui: IEEE, 2012. p. 2298 – 2303.
- SATO, T.; SAITO, N. Design of critical control systems using genetic algorithms and LMI-based regional pole assignment technique. In: IEEE CONFERENCE ON ROBOTICS, AUTOMATION AND MECHATRONICS, 2004, Singapore. *Proceedings of the [...]*. Singapore: IEEE, 2004. p. 1014 – 1019.
- SCHILDBACH, G.; GOULART, P.; MORARI, M. Linear controller design for chance

constrained systems. *Automatica*, Oxford, v. 51, n. 1, p. 278 – 284, 2015.

SEVER, M.; SEDUR, H. S.; YAZICI, H.; ARSLAN, M. S. Electro hydraulic suspension system design wiht optimal state derivative feedback controller. *Journal of Science and Technology - Applied Sciences and Engineering*, West Bengal, v. 18, n. 04, p. 777 – 787, 2017.

SHAFAI, B.; GHADAMI, R. A two-step procedure for optimal constrained stabilization of linear continuous-time systems. In: MEDITERRANEAN CONFERENCE ON CONTROL AND AUTOMATION, 21, 2013, Chania. *Proceedings of the [...]*. Chanai: IEEE, 2013. p. 910 – 915.

DA SILVA, E. R. P.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; BUZACHERO, L. F. Parameter-dependent Lyapunov functions for state-derivative feedback control in polytopic linear systems. *International Journal of Control*, Abingdon, v. 84, n. 8, p. 1377 – 1386, 2011.

SINGH, A. P.; NIKOLAOU, M. Control of a process with unmeasured disturbances that change its steady-state gain sign. *Journal of Process Control*, London, v. 23, n. 3, p. 294 – 305, 2013.

SINGH, V. P.; KISHOR, N.; SAMUEL, P. Load frequency control with communication topology changes in smart grid. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, Piscataway, v. 12, n. 05, p. 1943 – 1952, Oct. 2016.

SIVANANDAKUMAR, D.; RAMAKRISHNAN, K. LMI based digital state feedback controller for a wound rotor induction drive with guaranteed closed loop stability. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON POWER ELECTRONIC, DRIVES AND ENERGY SYSTEMS, 2006, New Delhi. *Proceedings of the [...]*. New Delli: IEEE, 2006. p. 1 – 6

SOLIMAN, H. M.; DABROUM, A.; MAHMOUD, M. S.; SOLIMAN, M. Guaranteed-cost reliable control with regional pole placement of a power system. *Journal of the Franklin Institute*, Oxford, v. 348, n. 5, p. 884 – 898, 2011.

SOMAN, R. S.; GOPMANDAL, F.; GHOSH, A. MIMO PID compensation for dynamic positioning of a ship. In: INDIAN CONTROL CONFERENCE, 2018, Kanpur. *Proceedings of the [...]*. Kanpur: IEEE, 2018. p. 137 – 142.

SONG, X.; PARK, J. H. Linear quadratic regulation problem for discrete-time systems with multi-channel multiplicative noise. *Systems & Control Letters*, Amsterdam, v. 89, p. 74 – 82, 2016.

SYRMOS, V. L.; ABDALLAH, C. T.; DORATO, P.; GRIGORIADIS, K. Static output feedback - A survey. *Automatica*, Oxford, v. 33, n. 2, p. 125 – 137, 1997.

TARBOURIECH, S.; SOUÈRES, P.; GAO, B. A multicriteria image-based controller based on a mixed polytopic and norm-bounded representation of uncertainties. In: PROCEEDINGS OF THE IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, AND EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 44, 2005, Seville. *Proceedings of the [...]*. Seville: IEEE, 2005. p. 5385 – 5390.

- TSAI, S.; HUO, C.; YANG, Y.; SUN, T. Variable feedback gain control design based on particle swarm optimizer for automatic fighter tracking problems. *Applied Soft Computing*, Amsterdam, v. 13, n. 1, p. 58 – 75, 2013.
- TURKI, M. A.; DUC, G.; CLEMENT, B. Robust control of a space launcher by introducing LQG/LTR ideas in the NCF robust stabilisation problem. *IFAC Proceedings Volumes*, Saint-Petersburg, Russia, v. 37, n. 6, p. 1003 – 1008, Jun. 2004.
- TZES, A.; NIKOLAKOPOULOS, G. LQR-output feedback gain scheduling of mobile networked controlled systems. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2004, Boston. *Proceedings of the [...]*. Boston: IEEE, 2004. p. 4325 – 4329.
- VAGIA, M.; NIKOLAKOPOULOS, G.; TZES, A. Design of a robust PID-control switching scheme for an electrostatic micro-actuator. *Control Engineering Practice*, Oxford, v. 16, n. 11, p. 1321 – 1328, 2008.
- VESELÝ, V.; ILKA, A. Generalized robust gain-scheduled PID controller design for affine LPV systems with polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, Amsterdam, v. 105, p. 6 – 13, 2017.
- WIENER, N. *Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series*. Cambridge: The Technology Press, 1949.
- WILSON, D. A.; NEKOUI, M. A.; HALIKIAS, G. D. An LQR weight selection approach to the discrete generalized \mathcal{H}_2 control problem. *International Journal of Control*, Abingdon, v. 71, n. 1, p. 93–101, 1998.
- WU, F. *Control of linear parameter varying systems*. Tese (Doutorado) — University of California, 1995. Doctoral dissertation.
- WU, F. A generalized LPV system analysis and control synthesis framework. *International Journal of Control*, Abingdon, v. 74, n. 7, p. 745–759, 2001.
- XIAOJIE, X. Non-fragile mixed LQR/ \mathcal{H}_∞ control problem for linear systems with controller uncertainty. In: CHINESE CONTROL CONFERENCE. 2006, Harbin. *Proceedings of the [...]*. Harbin: IEEE, 2006. p. 579 – 583.
- XIAOJIE, X. Characterization of all static state feedback mixed LQR/ \mathcal{H}_∞ controllers for linear continuous-time systems. *27th Chinese Control Conference*, Kunming, China, p. 678 – 682, Jul. 2008.
- XIE, W. Multi-objective \mathcal{H}_{inf} / α -stability controller synthesis of LTI systems. *IET Control Theory Applications*, Stevenage, v. 2, n. 1, p. 51–55, Jan. 2008.
- XIAOJIE, X. Structural constrained mixed LQR/ \mathcal{H}_∞ controllers for continuous-time systems. In: PROCEEDINGS OF THE CHINESE CONTROL CONFERENCE, 32, 2013,[s.l.]. *Proceedings of the [...]*. [s.l.]: IEEE, 2013. p. 2727 – 2732.
- XIE, L.; SOUZA, C. E. \mathcal{H}_∞ filtering for linear periodic systems with parameter uncertainty. *System & Control Letters*, Amsterdam, v. 17, p. 343 – 350, 1991.
- YAKUBOVICH, V. A. The solution to certain matrix inequalities. *Automatic Control*,

Dokl Akad Nauk, v. 143, p. 1304 – 1307, 1962.

YANG, X.; GAO, H.; SHI, P. Robust orbital transfer for low earth orbit spacecraft with small-thrust. *Journal of the Franklin Institute*, Oxford, v. 347, n. 10, p. 1863 – 1887, 2010.

YANG, Y.; WU, M.; CHANG, Y. Temperature control of the four-zone split inverter air conditioners using LMI expression based on LQR for mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. *Applied Energy*, Oxford, v. 113, p. 912 – 923, 2014.

YANG Y.; WU, M.; CHANG, Y. Linear matrix inequalities based on linear quadratic regulator for the $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control of the inverter split air conditioner temperature. In: INTERNATIONAL REFRIGERATION AND AIR CONDITIONING CONFERENCE, 2010. Purdue. *Proceedings of the [...]*. Purdue: [s.n.]. p. 1 – 8. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/84d5/e1258e201070d4b1b6420ec163fdb4c23.pdf>. Acesso em: 30 out. 2019.

YAZICI, H.; SEVER, M. Design of an optimal state derivative feedback LQR controller and its application to an offshore steel jacket platform. *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications*, New York, v. 8, n. 1, p. 84 – 91, 2017.

YUE, M.; AN, C.; SUN, J. Zero dynamics stabilisation and adaptive trajectory tracking for WIP vehicles through feedback linearisation and LQR technique. *International Journal of Control*, Abingdon, v. 89, p. 2533 – 2542, 2016.

ZHANG, D.; OU, L.; MENG, L.; WANG, X. LQR control for homogeneous agents with multi-graph topology. *Acta Automatica Sinica*, Beijing, v. 39, n. 6, p. 913 – 919, 2013.

ZHANG, H.; JUNMIN, W. Vehicle lateral dynamics control through AFS/DYC and robust gain-scheduling approach. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Piscataway, v. 65, n. 1, p. 489 – 494, 2016.

ZHANG, H.; WU, Y.; HE, D.; ZHAO, H. Model predictive control to mitigate chatters in milling processes with input constraints. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, New York, v. 91, p. 54 – 61, 2015.

ZHANG, H.; ZHANG, X.; JUNMIN, W. Robust gain-scheduling energy-to-peak control of vehicle lateral dynamics stabilisation. *International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, [s.l.], v. 52, n. 3, p. 309 – 340, 2014.

ZHANG, Q.; YE, S.; LI, Y.; WANG, X. An enhanced LMI approach for mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ flight tracking control. *Chinese Journal of Aeronautics*, Beijing, v. 24, n. 3, p. 324 – 328, 2011.

ZHOU, H.; SHIEH, L.; WANG, Q.; LIU, C. R. State-space digital PI controller design for linear stochastic multivariable systems with input delay. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, Hoboken, v. 84, p. 230 – 238, Apr. 2006.