

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"**  
**CAMPUS DE GUARATINGUETÁ**

**LUANA LIBERATO MENDES**

**Estabilidade e formação de planetas terrestres em regiões coorbitais**

Guaratinguetá

2019

**Luana Liberato Mendes**

**Estabilidade e formação de planetas terrestres em regiões coorbitais**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Conselho de Pós Graduação em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Física .

Orientador: Prof<sup>o</sup> Dr. Othon Cabo Winter

Guaratinguetá

2019

Mendes, Luana Liberato  
M538e Estabilidade e formação de planetas terrestres em regiões coorbitais. /  
Luana Liberato Mendes – Guaratinguetá, 2019.  
76 f : il.  
Bibliografia: f. 68-70

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de  
Engenharia de Guaratinguetá, 2019.  
Orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter

1. Planetas – Órbitas 2. Exoplanetas 3. Astronomia I. Título.

CDU 523.4(043)

Ana Cristina Figueiredo Loureiro  
Bibliotecária CRB-8/7094

**LUANA LIBERATO MENDES**

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
“MESTRE EM FÍSICA”**

**PROGRAMA: FÍSICA**

**APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**



**Prof. Dr. Konstantin Georgiev Kostov**  
Coordenador

**BANCA EXAMINADORA:**



**Prof. Dr. OTHON CABO WINTER**  
Orientador/UNESP/FEG



**Prof.ª. Dr.ª. DANIELA CARDOZO MOURÃO**  
UNESP/FEG

**Prof.ª. Dr.ª. MARIA HELENA MOREIRA MORAIS**  
UNESP/IGCE-RIO CLARO



## **DADOS CURRICULARES**

### **LUANA LIBERATO MENDES**

**NASCIMENTO** 08/11/1994 - Guaratinguetá-SP

**FILIAÇÃO** Gilberto Liberato Mendes Junior  
Ruth Nascimento Santos Mendes

**2012 - 2017** Bacharelado em Física  
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá - UNESP

**2017 - 2019** Mestrado Acadêmico em Física  
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá - UNESP

Em memória de meus amados avós Maria e José Ventura.

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus por tudo que Ele me concedeu ao longo de todo meu caminho na área acadêmica.

Ao meu orientador, Prof<sup>o</sup> Dr. Othon Cabo Winter, por toda a paciência, dedicação, incentivo, e por tudo que me ensinou ao longo desta jornada.

A Prof<sup>a</sup> Dra. Daniela Mourão pelas explicações e por toda a ajuda no desenvolvimento das ferramentas que foram essenciais para este trabalho.

Aos membros da banca por aceitarem o convite, por dedicarem um tempo ao meu trabalho e pelas valiosas sugestões que serão dadas.

A minha família, meus pais Ruth e Gilberto, minha irmã Kátia e meu cunhado Marcos por me incentivarem a ir adiante, por sempre acreditarem em meu sucesso e por serem meu porto seguro.

Ao meu marido, Lucas, por ser o melhor companheiro de todos. Obrigada por sempre me ajudar a continuar na luta, por sempre acreditar em mim e por sempre me apoiar. Esta conquista é sua também pois sem todo seu suporte eu não teria conseguido.

Aos meus amigos Gustavo, Victor e Tiago que me acompanham desde a graduação. Obrigada por sempre me ajudarem e por fazerem meus dias mais alegres e mais leves.

Aos meus bebês, Thor e Doguinho, por me acompanharem nas longas noites de escrita e análise de dados, por sempre me tranquilizarem e por serem fonte inesgotável de amor e carinho.

Agradeço a todos os colegas e professores que de alguma forma contribuíram com meu trabalho e me transmitiram um pouco de seu conhecimento.

Este trabalho contou com o apoio da(s) seguinte(s) entidade(s):

FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo

CAPES - O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior- Brasil (CAPES) - código de financiamento 001.

E do projeto CEPID-CeMEAI através da utilização do Cluster Euler.

*La matematica è l'alfabeto col quale Dio ha scritto l'universo.*  
*(Galileo Galilei)*

## RESUMO

Encontrar um planeta como a Terra fora do Sistema Solar parece ser difícil. Quando olhamos para os dados dos quase 4000 exoplanetas descobertos até o momento vemos que nenhum deles é similar à Terra. Uma alternativa para encontrar um outro planeta como a Terra seria olhar para as regiões coorbitais dos exoplanetas gigantes, sendo que sistemas coorbitais podem ser descritos como os sistemas onde dois ou mais corpos compartilham uma mesma órbita média.

Nosso objetivo neste trabalho é formar um planeta com a massa da Terra que seja coorbital a um corpo bastante massivo, como um planeta gigante ou uma anã marrom. Para isso nós fizemos várias simulações utilizando o pacote Mercury de integração numérica para o problema de N-corpos. Com os resultados analisamos como a razão de massa do sistema e a separação entre os corpos afetam a região de estabilidade coorbital, e então determinamos seus limites radial e angular.

Tendo a região de estabilidade coorbital bem definida para cada um dos sistemas estudados, nós fizemos novas simulações numéricas distribuindo dentro da região de estabilidade coorbital 500 planetesimais que cujas massas somadas totalizam 2 ou  $3M_{\oplus}$ .

Nossos resultados mostraram que é possível formar planetas terrestres com massas iguais ou maiores que a da Terra nas regiões coorbitais. Esta formação é mais provável para os sistemas cujo corpo secundário possui uma órbita com semi-eixo maior menor que  $1ua$ , sendo que os diferentes valores de razão de massa não afetam o processo de formação planetária nas regiões coorbitais.

**PALAVRAS-CHAVE:** Sistemas coorbitais. Estabilidade. Formação planetária.

## ABSTRACT

Finding an Earth-like planet outside Solar System seems to be a difficult task. When we look at the data from the almost 4000 exoplanets discovered until now we see that none of them is similar to our Earth. An alternative to find other planet like Earth would be to look at the co-orbital regions of the giants exoplanets, being that co-orbital systems can be described as those systems where two or more bodies share the same mean orbit.

Our main goal in this work is to form a planet co-orbiting with another massive body, like a giant planet, with the same mass of the Earth. To do that we have performed a series of numerical simulations with the package of computational integrators for the N-body problem called Mercury. With the results we have analyzed how the stable co-orbital region is affected by the system's mass ratio and by the radial separation between bodies, and then we have determined the radial and angular limits of the stable co-orbital region.

Having this region well determined for each one of the studied systems, we have performed new numerical simulations distributing 500 planetesimals within the stable co-orbital region, in which the sum of the planetesimals's masses are equal to 2 or  $3M_{Earth}$ .

Our results have shown that it is possible to form terrestrial planets with masses equals or bigger than the Earth's inside the stable co-orbital regions. This formation is more likely to happen for the systems in which the secondary body has an orbit with semi-major axis smaller than  $1au$ , being that the variety of values of the secondary body's mass ratio does not affect the planetary formation process inside the stable co-orbital regions .

**KEYWORDS:** Co-orbital systems. Stability. Planetary formation.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Gráfico de massa versus período orbital dos exoplanetas descobertos até o momento. Cada ponto preto representa um exoplaneta e o quadrado azul representa a localização da Terra no gráfico.	16
Figura 2	Representação planar da relação entre as coordenadas da partícula no sistema inercial $(\xi, \eta, \zeta)$ e no sistema girante $(x, y, z)$ . O centro de massa se localiza na origem $O$ e os eixos $z$ e $\zeta$ coincidem com o eixo de rotação do sistema. . . . .	21
Figura 3	Gráficos de $x$ versus $y$ representando curvas de velocidade zero. Cada gráfico mostra a curva associada à constante de Jacobi indicada no canto superior esquerdo. Foram usados os parâmetros $n = 1$ , $\mu_1 = 0.9$ e $\mu_2 = 0.1$ . O círculo amarelo representa o corpo central $M_1$ e o círculo marrom representa o corpo $M_2$ . As cores das linhas são para diferenciar os valores de $C_J$ e as áreas cinzas são as regiões “proibidas” às partículas. . . . .	26
Figura 4	Esquema representando a localização dos pontos lagrangianos (pontos pretos). O círculo amarelo representa o corpo central $M_1$ e o círculo marrom representa o corpo $M_2$ . . . . .	27
Figura 5	Esquema para ilustrar uma órbita de um objeto do tipo quase-satélite. O ponto e a curva pretos representam o corpo $M_2$ e sua órbita, o ponto e a curva vermelhos representam o corpo $M_3$ e sua órbita, e o círculo amarelo representa o corpo central $M_1$ . Na figura da esquerda vemos a órbita do quase-satélite a partir do referencial inercial, já na figura da direita vemos a órbita a partir do referencial girante. As setas indicam a direção do movimento do corpo na órbita. . . . .	29
Figura 6	Esquema para ilustrar o formato de órbitas hipotéticas de partículas coorbitais no sistema girante. A órbita azul é a do tipo ferradura, as órbitas verdes são do tipo girino. O círculo amarelo representa o corpo central $M_1$ e o círculo marrom representa o corpo $M_2$ . Os pontos pretos representam as localizações dos pontos de equilíbrio lagrangianos. . . . .	30

Figura 7	Gráficos de semi-eixo maior versus excentricidade das larguras de libração de algumas ressonâncias internas a um planeta do tipo Júpiter com diferentes valores de massa em cada um dos gráficos, utilizando um modelo analítico baseado no PR3C. . . . .	33
Figura 8	Gráficos de massa do corpo secundário versus número de partículas no final da simulação. As cores representam os diferentes valores de semi-eixo maior do corpo secundário. . . . .	44
Figura 9	Gráficos de massa do corpo secundário versus número de partículas no final da simulação. A curva vermelha representa a média do número de corpos sobreviventes para cada valor de massa do corpo secundário. A linha preta com triângulos mostra a os valores obtidos para $\xi_{ua}$ ao fazermos simulações para outros valores de massa do corpo secundário. . . . .	45
Figura 10	Gráficos de $x$ versus $y$ das posições iniciais das partículas que sobreviveram até o fim da simulação. Cada quadro apresenta os resultados das simulações para diferentes valores de massa do corpo secundário. O círculo amarelo representa o corpo central como uma estrela do tipo Sol com $M_1 = 1M_{\odot}$ , o círculo marrom representa o corpo secundário $M_2$ e os pontos cinzas representam as posições iniciais das partículas que sobreviveram até o fim da simulação. . . . .	46
Figura 11	Gráfico de massa do corpo secundário versus distância angular mínima e máxima da região estável. As cores representam os diferentes valores de semi-eixo maior do corpo secundário. A linha reta vermelha localizada em $23.9^{\circ}$ indica o $\phi_{min}$ da separatriz. As linhas pretas e tracejadas indicam as curvas de ajuste cujas equações estão descritas na legenda. . . . .	49
Figura 12	Gráfico de semi-eixo maior do corpo secundário em escala logarítmica versus razão entre largura radial da região de estabilidade na vizinhança do $L_4$ e o semi-eixo maior de $M_2$ . As cores diferentes nas linhas e pontos representam os diferentes valores de massa do corpo secundário. . . . .	50

Figura 13	Gráfico de massa $M_2$ versus razão entre a largura radial da região de estabilidade na vizinhança do $L_3$ e do $L_4$ sobre $a_2$ . Os pontos representam a média dos resultados para os diferentes valores de semi-eixo maior do corpo secundário. As cores indicam se os valores pertencem à medição nos pontos $L_3$ ou $L_4$ . A curva preta indica a equação apresentada na legenda. . . . .	53
Figura 14	Gráficos semi-eixo maior versus massa do corpo secundário para cada caso de sistema coorbital simulado. A paleta de cores indica a média do número de corpos formados por simulação que foram considerados planetas. O gráfico superior apresenta os resultados para o caso onde a massa total dos planetesimais é $2M_{\oplus}$ , e o gráfico inferior para o caso com $3M_{\oplus}$ . . . . .	57
Figura 15	Gráficos semi-eixo maior versus massa do corpo secundário. A paleta de cores indica a a massa do planeta mais massivo que foi formado em cada um dos caso de sistema coorbital simulado. O gráfico superior apresenta os resultados para o caso onde a massa total dos planetesimais é $2M_{\oplus}$ , e o gráfico inferior para o caso com $3M_{\oplus}$ . . . . .	60
Figura 16	Gráficos semi-eixo maior versus massa do maior corpo formado para alguns casos de massa do corpo secundário para o caso com $2M_{\oplus}$ na região coorbital. As curvas pretas indicam os ajustes das equações indicadas na legenda. . . . .	61
Figura 17	Gráficos semi-eixo maior versus massa do maior corpo formado para alguns casos de massa do corpo secundário para o caso com $3M_{\oplus}$ na região coorbital. As curvas pretas indicam os ajustes das equações indicadas na legenda. . . . .	62
Figura 18	Gráficos semi-eixo maior versus massa do corpo secundário para cada caso simulado. A paleta de cores indica a média do número de corpos formados por simulação que foram considerados planetas. O gráfico superior apresenta a comparação entre os resultados para o caso onde a massa total dos planetesimais é $2M_{\oplus}$ no primeiro método e $4M_{\oplus}$ no segundo método, e o gráfico inferior apresenta a comparação entre os resultados para o caso com $3M_{\oplus}$ no primeiro método e $6M_{\oplus}$ no segundo. . . .	64

Figura 19 Gráficos semi-eixo maior versus massa do corpo secundário. A paleta de cores indica a a massa do planeta mais massivo que foi formado em cada um dos casos simulados. O gráfico superior apresenta a comparação entre os resultados para o caso onde a massa total dos planetesimais é  $2M_{\oplus}$  no primeiro método e  $4M_{\oplus}$  no segundo método, e o gráfico inferior apresenta a comparação entre os resultados para o caso com  $3M_{\oplus}$  no primeiro método e  $6M_{\oplus}$  no segundo. . . . . 65

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	–	Condições iniciais das simulações de estabilidade. . . . .	41
Tabela 2	–	Número de partículas restantes ao final das simulações para o caso com semi-eixo maior do corpo secundário igual a $5ua$ . . . . .	45
Tabela 3	–	Valores médios da mínima e máxima separação angular entre a região de estabilidade e o corpo secundário. . . . .	48
Tabela 4	–	Valores médios da largura radial da região de estabilidade na vizinhança do ponto $L_4$ obtidos a partir das simulações . . . . .	51
Tabela 5	–	Valores médios da largura radial da região de estabilidade na vizinhança dos pontos $L_3$ e $L_4$ utilizando os dois métodos de eliminação de partículas. . . . .	54
Tabela 6	–	Valores médios da mínima e máxima separação angular entre a região de estabilidade coorbital e o corpo secundário, utilizando os dois métodos de eliminação de partículas. . . . .	54

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>SISTEMAS COORBITAIS</b> . . . . .	<b>20</b>
2.1	PROBLEMA RESTRITO DE 3-CORPOS . . . . .	20
2.2	CURVAS DE VELOCIDADE ZERO . . . . .	25
2.3	PONTOS DE EQUILÍBRIO LAGRANGIANOS . . . . .	26
2.4	TIPOS DE ÓRBITAS E CAOS . . . . .	28
<b>2.4.1</b>	<b>Quase-Satélites</b> . . . . .	<b>28</b>
<b>2.4.2</b>	<b>Órbitas Girino e Ferradura</b> . . . . .	<b>29</b>
<b>2.4.3</b>	<b>Caos</b> . . . . .	<b>32</b>
2.5	FORMAÇÃO DE EXOPLANETAS COORBITAIS . . . . .	34
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b> . . . . .	<b>37</b>
3.1	PACOTE MERCURY . . . . .	37
3.2	ADAPTAÇÕES NO PACOTE MERCURY . . . . .	37
<b>3.2.1</b>	<b>Limite Angular</b> . . . . .	<b>38</b>
<b>3.2.2</b>	<b>Limite Interno Para o Raio Orbital</b> . . . . .	<b>39</b>
3.3	SISTEMA ESTUDADO E CONDIÇÕES INICIAIS DAS SIMULAÇÕES . . . . .	40
<b>3.3.1</b>	<b>Simulações de Estabilidade</b> . . . . .	<b>41</b>
<b>3.3.2</b>	<b>Simulações de Formação Planetária</b> . . . . .	<b>42</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b> . . . . .	<b>43</b>
4.1	ESTABILIDADE DA REGIÃO COORBITAL . . . . .	43
<b>4.1.1</b>	<b>Número de Partículas Sobreviventes</b> . . . . .	<b>43</b>
<b>4.1.2</b>	<b>Limite entre Regimes de Órbitas</b> . . . . .	<b>46</b>
<b>4.1.3</b>	<b>Largura Angular</b> . . . . .	<b>47</b>
<b>4.1.4</b>	<b>Largura Radial em <math>L_4</math></b> . . . . .	<b>50</b>
<b>4.1.5</b>	<b>Largura Radial em <math>L_3</math></b> . . . . .	<b>52</b>
<b>4.1.6</b>	<b>Simulações Para Estudo da Região de Estabilidade Coorbital Utilizando um Parâmetro Angular Diferente para Eliminação de Partículas</b> . . . . .	<b>53</b>

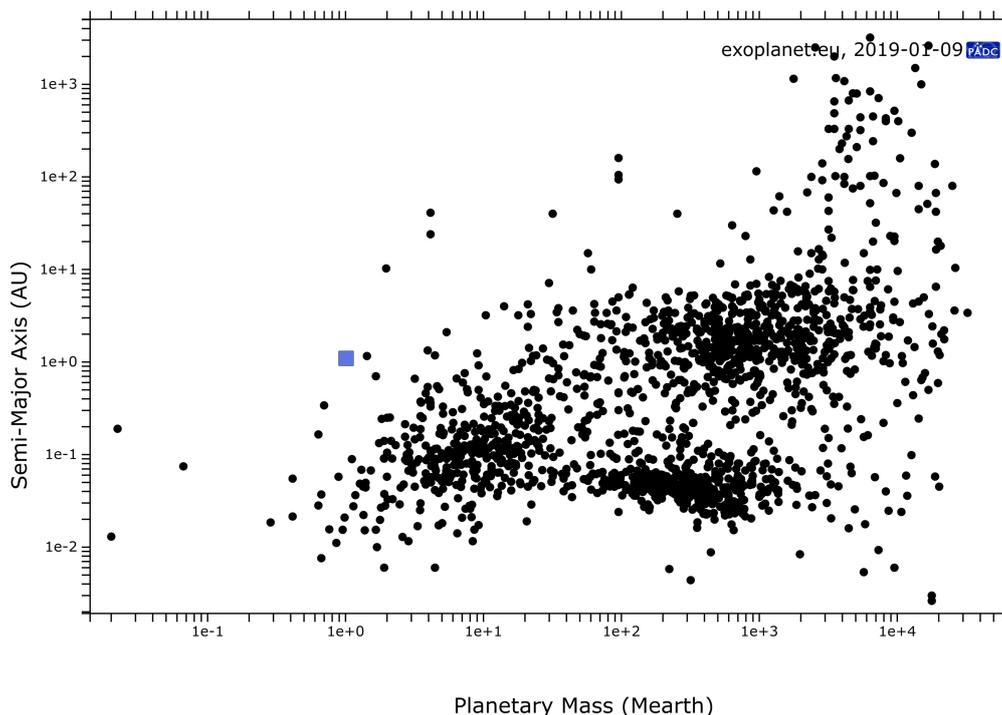
4.2	FORMAÇÃO DE PLANETAS TERRESTRES NA REGIÃO CO- ORBITAL . . . . .	56
4.2.1	<b>Número de Corpos Formados . . . . .</b>	<b>56</b>
4.2.2	<b>Massa dos Planetas Formados . . . . .</b>	<b>58</b>
4.2.3	<b>Simulações Para Estudo Formação de Planetas Terrestres na Região Coorbital Utilizando um Parâmetro Angular Diferente para Eliminação de Partículas . . . . .</b>	<b>63</b>
5	<b>COMENTÁRIOS FINAIS E CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>66</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>68</b>
	<b>APÊNDICE A – ROTINA <i>MXX_EJEC</i> DO PACOTE MER- CURY ADAPTADA . . . . .</b>	<b>71</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Por centenas de anos os únicos planetas que a humanidade conhecia eram aqueles contidos dentro do Sistema Solar. Sendo assim todo o estudo feito na área de formação planetária era feito de acordo com as características da Terra e dos planetas vizinhos. Porém, com a evolução da tecnologia fomos capazes de olhar mais longe no universo, e com isso encontramos ao redor de outras estrelas milhares de outros planetas.

O primeiro exoplaneta foi descoberto no início dos anos 90 em uma órbita bem próxima a um pulsar (WOLSZCZAN; FRAIL, 1992), então em 1995 foi descoberto o primeiro exoplaneta ao redor de uma estrela da sequência principal (MAYOR; QUELOZ, 1995) e hoje são mais de 3900 exoplanetas descobertos (SCHNEIDER, ).

Figura 1 – Gráfico de massa versus período orbital dos exoplanetas descobertos até o momento. Cada ponto preto representa um exoplaneta e o quadrado azul representa a localização da Terra no gráfico.



fonte: exoplanet.eu (2019)

Desde o início da ciência os pesquisadores se perguntam o que levou a vida a se desenvolver na Terra, portanto para os cientistas planetários encontrar vida em outro planeta seria o primeiro passo para entender este problema, além de mostrar que não estamos sozinhos no universo. Para isso é necessário encontrar um planeta análogo à

Terra, porém nenhum dos exoplanetas que conhecemos até a data de hoje (02/2019) se encaixa perfeitamente nos parâmetros adequados.

Na Figura 1 vemos um gráfico de massa planetária em massas da Terra,  $M_{\oplus}$ , versus semi-eixo maior em unidades astronômicas,  $ua$ , onde cada ponto representa um exoplaneta. Nela temos a Terra representada pelo quadrado azul e bem próximo a ela não existem exoplanetas detectados. Enquanto isso vemos que corpos com massas parecidas são, até o momento, a minoria e foram observados orbitando mais próximos às estrelas. Em contrapartida os planetas gigantes parecem ser a maioria no universo. Estes foram detectados em órbitas parecidas com a da Terra, sendo que muitos deles estão dentro da zona habitável de seu respectivo sistema, que é definida como a região ao redor de uma estrela onde pode existir água no estado líquido na superfície de um planeta, similar à Terra (KASTING; WHITMIRE; REYNOLDS, 1993).

Ainda não sabemos por qual motivo um planeta como a Terra ainda não foi descoberto, mesmo com toda a tecnologia utilizada atualmente. Mas, de qualquer forma, uma possível alternativa seria tentar encontrá-lo coorbital a um planeta gigante, sendo um sistema coorbital composto por objetos que orbitam ao redor dos pontos de equilíbrio lagrangianos de um determinado corpo, chamado de corpo secundário, que está em uma órbita ao redor de um corpo mais massivo chamado de corpo primário.

Sabemos que as estruturas não planetárias como os cometas (KIEFER et al., 2014) e o cinturão de Kuiper (MORO-MARTIN et al., 2008) já foram encontradas em alguns sistemas extrassolares, então apesar de os projetos de busca (Lillo-Box, J. et al., 2018) ainda não terem encontrado estruturas coorbitais sabemos que elas também devem (ou no mínimo podem) existir fora do Sistema Solar.

Após a descoberta do primeiro asteroide coorbital do Sistema Solar feita por Max Wolf em 1906, o 588 Achilles que compartilha a órbita com Júpiter, mais de 6500 outros corpos coorbitais a Júpiter foram descobertos e são chamados de Troianos. Também foram encontrados corpos coorbitais à Terra (WIEGERT; INNANEN; MIKKOLA, 1997), à Venus (NAMOUNI; CHRISTOU; MURRAY, 1999), e em Saturno vários sistemas de satélites coorbitais como Janus-Epimeteu, Telesto-Calipso-Tétis e Polydeuces-Helena-Dione. Devido a essas descobertas foram feitos inúmeros trabalhos sobre corpos coorbitais e anéis estreitos, porém já há algum tempo que os pesquisadores têm estudado sobre exoplanetas coorbitais.

Alguns trabalhos trataram sobre a estabilidade de planetas hipotéticos coorbitais a um gigante gasoso (SCHWARZ et al., 2007; CRESSWELL; NELSON, 2009; FUNK et al., 2012) e em todos os casos concluíram que os planetas troianos fictícios teriam

órbitas estáveis, com isso surgiram alguns possíveis cenários para explicar a formação destes planetas.

São sugeridos os cenários de captura de objetos para os pontos  $L_4/L_5$  (pontos de equilíbrio linearmente estáveis sobre a órbita de um corpo, serão melhor explicados no capítulo seguinte) por varios mecanismos diferentes e de formação in-situ a um companheiro coorbital, possivelmente devido a uma densidade elevada de material sólido na vizinhança dos pontos lagrangianos  $L_4$  e  $L_5$  de um planeta muito massivo. Esse cenário de formação in-situ (LAUGHLIN; CHAMBERS, 2002) é o conceito base para nosso estudo. Ele foi posteriormente estudado por outros autores que, sob certas condições, provaram ser plausível a formação de corpos nas regiões coorbitais, como por exemplo planetas troianos para o sistema Sol-Júpiter (BEAUGÉ et al., 2007), ou satélites troianos para um sistema Saturno- proto satélite (IZIDORO; WINTER; TSUCHIDA, 2010).

De acordo com as teorias mais aceitas de formação planetária até o momento, no início do processo de formação dos planetas existe uma nuvem de gás e poeira que se assenta em um disco ao redor da estrela e, com o passar do tempo e devido a vários fatores, o gás se dissipa. Nos primeiros estágios da formação as partículas de poeira têm desde tamanhos sub-micrométricos até a ordem de centímetros. Gradualmente o gás e a poeira geram corpos maiores através de colisões levando a aglomeração. Encontros entre os aglomerados resultam em uma grande quantidade de estruturas da ordem de metros. A colisão entre estas estruturas geram os planetesimais da ordem de quilômetros. Como esta etapa é difícil de funcionar, as propostas mais recentes envolvem o acúmulo de “pebbles”, que são corpos da ordem de dezenas de centímetros que se agrupam para gerar os corpos bem maiores da ordem de quilômetros (WEIDENSCHILLING, 1977). Os encontros entre planetesimais levam à formação de planetas primordiais com tamanhos da ordem da Terra ou até 10 vezes mais (ARMITAGE, 2007).

Similar ao estudo feito por Beaugé et. al. (2007), nosso objetivo neste trabalho é analisar quais são os parâmetros necessários em um sistema planetário para formar um planeta do tipo Terra coorbital a um corpo muito massivo. Então, primeiramente identificamos a estabilidade da região coorbital e determinamos os seus limites radial e angular. Consideramos um amplo intervalo de valores para a massa do corpo secundário, bem como da distância entre ele e o corpo central. Tendo a região de estabilidade coorbital bem determinada, nós então distribuimos planetesimais dentro dela e consideramos um sistema nos últimos estágios de formação planetária. Nosso

modelo consiste de um corpo central do tipo Sol, um corpo secundário muito massivo completamente formado e uma nuvem de planetesimais em órbitas do tipo girino ao redor do ponto de equilíbrio lagrangiano  $L_4$ , tendo o gás já sido dissipado do sistema. As colisões são consideradas inelásticas e é através deste processo de acreção que os planetas devem se formar na região coorbital.

Nosso trabalho está organizado da seguinte forma: No capítulo 2 apresentamos o estudo de trabalhos teóricos sobre sistemas coorbitais que é necessário para o desenvolvimento do trabalho. No capítulo 3 apresentamos quais os programas e adaptações computacionais foram utilizados durante o trabalho e apresentamos as características do sistema estudado. No capítulo 4 estão apresentados os resultados obtidos com as simulações de estabilidade e de formação planetária nos sistemas estudados e as análises dos mesmos. Por fim, no capítulo 5, apresentamos nossos comentários finais e conclusões.

## 2 SISTEMAS COORBITAIS

Neste capítulo apresentaremos um estudo das teorias existentes na literatura e que são necessárias para o desenvolvimento do trabalho. Apresentaremos o que é o Problema Restrito de 3-Corpos e os cálculos para encontrar sua solução analítica e o caso das curvas de velocidade zero. Explicaremos o que são os pontos de equilíbrio lagrangianos, falaremos sobre as órbitas ao redor destes pontos e sobre o caos nas regiões coorbitais.

### 2.1 PROBLEMA RESTRITO DE 3-CORPOS

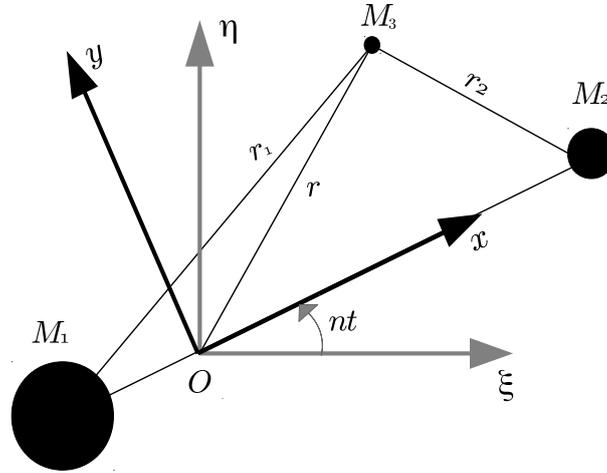
O problema de N-corpos é o problema de conseguir determinar os movimentos de cada um dos N corpos celestes que interagem gravitacionalmente entre si, de acordo com as leis de Newton do movimento e da gravitação universal. Para o caso com 2 corpos, que é o caso mais simples, este problema possui uma solução geral analítica. Porém, para sistemas com mais de dois corpos este problema não é integrável e por isso não é possível obter uma solução analítica, a não ser que considerações sejam feitas como no caso do problema restrito de 3-corpos, ou PR3C.

O PR3C estuda o movimento de uma partícula  $M_3$  e de dois corpos,  $M_2$  e  $M_1$ , ao redor do centro de massa entre eles, sendo  $M_3 \ll M_2 < M_1$  (Figura 2). Pelo fato de a partícula  $M_3$  possuir uma massa tão pequena em relação aos outros dois corpos esta pode ter sua massa desprezada, o que significa que ela irá se mover sob a influência dos campos gravitacionais dos dois corpos massivos,  $M_2$  e  $M_1$ , mas não os afetará gravitacionalmente, logo eles terão seus movimentos descritos pelo Problema de 2-Corpos. Com esta restrição o problema se torna mais simples e pode-se então encontrar uma solução analítica.

Pode parecer que este problema não tenha muita aplicação nos estudos de sistemas planetários, já que a maioria dos corpos celestes não tem órbitas coplanares e muitas vezes o corpo  $M_3$  não possui uma massa tão pequena quanto se espera de uma partícula, entretanto a solução deste problema pode ser aplicada como uma boa aproximação a vários sistemas pois consegue representar o comportamento dinâmico dos corpos.

Seguindo as considerações feitas por Murray e Dermott (1999) apresentamos o cálculo para encontrar as equações do movimento para o PR3C. Para simplificar os

Figura 2 – Representação planar da relação entre as coordenadas da partícula no sistema inercial  $(\xi, \eta, \zeta)$  e no sistema girante  $(x, y, z)$ . O centro de massa se localiza na origem  $O$  e os eixos  $z$  e  $\zeta$  coincidem com o eixo de rotação do sistema.



fonte: Murray; Dermott (1999)

cálculos assumimos que os corpos se movem em órbitas circulares. Consideramos então os eixos  $\xi, \eta, \zeta$  como nosso sistema de referência inercial centrado no centro de massa do sistema. No tempo  $t = 0$  o eixo  $\xi$  coincide com a linha que liga o corpo  $M_1$  ao corpo  $M_2$ . Neste sistema as coordenadas do corpo  $M_1$  são  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ , do corpo  $M_2$  são  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ , e da partícula  $M_3$  são  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Os dois corpos massivos possuem uma separação constante e a mesma velocidade angular. Sabendo que  $M_1 > M_2$  definimos

$$\bar{\mu} = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \quad (1)$$

e normalizamos a unidade de massa na forma

$$\mu = G(M_1 + M_2) = 1, \quad (2)$$

onde  $G = 6.67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$  é a constante gravitacional universal, então de acordo com a nossa normalização os dois corpos têm massas

$$\mu_1 = GM_1 = 1 - \bar{\mu} \quad e \quad \mu_2 = GM_2 = \bar{\mu} \quad (3)$$

A separação constante entre as massas também é normalizada de forma que a esta unidade de separação seja unitária, com isso o movimento médio comum às duas

massas  $n$  também é unitário. A partir do gráfico podemos ver que :

$$r_1^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2, \quad (4)$$

$$r_2^2 = (\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2 + (\zeta_2 - \zeta)^2, \quad (5)$$

então, ao igualarmos a equação da segunda lei de Newton ( $\vec{F} = m\vec{a}$ ) com a da gravitação universal ( $\vec{F} = \frac{M \times m}{r^3} \vec{r}$ ) encontramos as forças resultantes sobre a partícula:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{GM_1}{r_1^3} \vec{r}_1 + \frac{GM_2}{r_2^3} \vec{r}_2 \quad (6)$$

sendo que as equações para cada componente são:

$$\ddot{\xi} = \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} \mu_1 + \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3} \mu_2 \quad (7)$$

$$\ddot{\eta} = \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} \mu_1 + \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3} \mu_2 \quad (8)$$

$$\ddot{\zeta} = \frac{\zeta_1 - \zeta}{r_1^3} \mu_1 + \frac{\zeta_2 - \zeta}{r_2^3} \mu_2 \quad (9)$$

Estas equações são válidas para o P3C geral, já que não têm nenhuma restrição sobre o movimento das duas massas. Logo, se as duas massas se movem em órbitas circulares então a distância entre elas é fixa e elas se movem ao redor do centro de massa comum a uma velocidade angular também fixa, o movimento médio  $n$ . Para simplificarmos, passaremos do sistema de referência inercial onde as massas se movem, para o sistema girante onde as massas permanecem inertes. Os dois sistemas de coordenadas compartilham da mesma origem, porém o novo sistema de coordenadas  $(x,y,z)$  gira com uma velocidade constante  $n$  na direção positiva (veja Figura 2). O eixo  $x$  é escolhido para que as massas estejam sempre sobre o mesmo e com coordenadas  $(x_1, y_1, z_1) = (-\mu_2, 0, 0)$  e  $(x_2, y_2, z_2) = (\mu_1, 0, 0)$ . Utilizando as considerações feitas temos então:

$$r_1^2 = (x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2, \quad (10)$$

$$r_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2, \quad (11)$$

onde as coordenadas destas equações e as coordenadas do sistema  $(\xi, \eta, \zeta)$  estão

relacionadas pela rotação

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(nt) & -\text{sen}(nt) & 0 \\ \text{sen}(nt) & \cos(nt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Se diferenciarmos duas vezes cada componente da equação anterior nós obtemos

$$\begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(nt) & -\text{sen}(nt) & 0 \\ \text{sen}(nt) & \cos(nt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y \\ \ddot{z} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Desta rotação temos então :

$$\ddot{\xi} = (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x)\cos(nt) - (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y)\text{sen}(nt), \quad (14)$$

$$\ddot{\eta} = (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x)\text{sen}(nt) + (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y)\cos(nt), \quad (15)$$

$$\ddot{\zeta} = \ddot{z}. \quad (16)$$

Igualando as equações (14) com (7), (15) com (8) e (16) com (9) temos:

$$(\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x)\cos(nt) - (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y)\text{sen}(nt) = \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3}\mu_1 + \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3}\mu_2, \quad (17)$$

$$(\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x)\text{sen}(nt) + (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y)\cos(nt) = \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3}\mu_1 + \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3}\mu_2, \quad (18)$$

$$\ddot{z} = \frac{\zeta_1 - \zeta}{r_1^3}\mu_1 + \frac{\zeta_2 - \zeta}{r_2^3}\mu_2. \quad (19)$$

Lembrando da matriz de rotação (12), substituímos as componentes do sistema de coordenadas inercial  $(\xi, \eta, \zeta)$  deixando apenas as componentes do sistema de

coordenadas girante  $(x, y, z)$ .

$$\begin{aligned} & (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x)\cos(nt) - (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y)\sin(nt) = \\ & \left[ \frac{x_1 - x}{r_1^3}\mu_1 + \frac{x_2 - x}{r_2^3}\mu_2 \right] \cos(nt) + \left[ \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y\sin(nt) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x)\sin(nt) + (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y)\cos(nt) = \\ & \left[ \frac{x_1 - x}{r_1^3}\mu_1 + \frac{x_2 - x}{r_2^3}\mu_2 \right] \sin(nt) - \left[ \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y\cos(nt), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\ddot{z} = - \left[ \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] z, \quad (22)$$

lembrando que  $y_1, y_2, z_1$  e  $z_2$  são nulos,  $x_1 = -\mu_2$  e  $x_2 = \mu_1$ .

Multiplicamos a equação (20) por  $\cos(nt)$  e a equação (21) por  $\sin(nt)$  e somamos, e então multiplicamos a equação (20) por  $-\sin(nt)$  e a equação (21) por  $\cos(nt)$  e somamos. Com isso obtemos as equações do movimento no referencial girante:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = - \left[ \mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \right], \quad (23)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = - \left[ \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y, \quad (24)$$

$$\ddot{z} = - \left[ \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] z. \quad (25)$$

Estas acelerações podem ser escritas como o gradiente de uma função escalar  $U$ :

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (26)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (27)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (28)$$

onde  $U = U(x, y, z)$  é dada por:

$$U = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}. \quad (29)$$

Se multiplicarmos a equação (26) por  $\dot{x}$ , a equação (27) por  $\dot{y}$  e a equação (28) por  $\dot{z}$  e somarmos as três equações resultantes teremos:

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z} = \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (30)$$

Note que  $U$  não é um potencial real e é melhor definido como uma função escalar de onde algumas das acelerações sentidas pela partícula no referencial girante podem ser derivadas, como por exemplo a aceleração centrífuga e a gravitacional. Por isso  $U$  é chamado de “pseudo-potencial”.

## 2.2 CURVAS DE VELOCIDADE ZERO

Utilizando as equações do movimento descritas na seção anterior, e lembrando do sistemas de coordenadas apresentados na Figura 2 vemos que integral da equação (30) resulta em:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U - C_J = v^2, \quad (31)$$

onde  $C_J$  é uma constante de integração e  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v^2$ , sendo  $v$  a velocidade da partícula do referencial girante. Isolando  $C_J$  e substituindo a equação (29) da função escalar  $U$  temos

$$C_J = n^2(x^2 + y^2) + 2 \left( \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2. \quad (32)$$

Com isso encontramos a Integral de Jacobi, também conhecida como Constante de Jacobi, e é a única quantidade conservada no PCR3C, e por isso tem um papel importante nos estudos de mecânica celeste. Para nós, o caso mais importante são as curvas de velocidade zero. Estas são obtidas quando zeramos as componentes da velocidade na equação e esta fica então na forma:

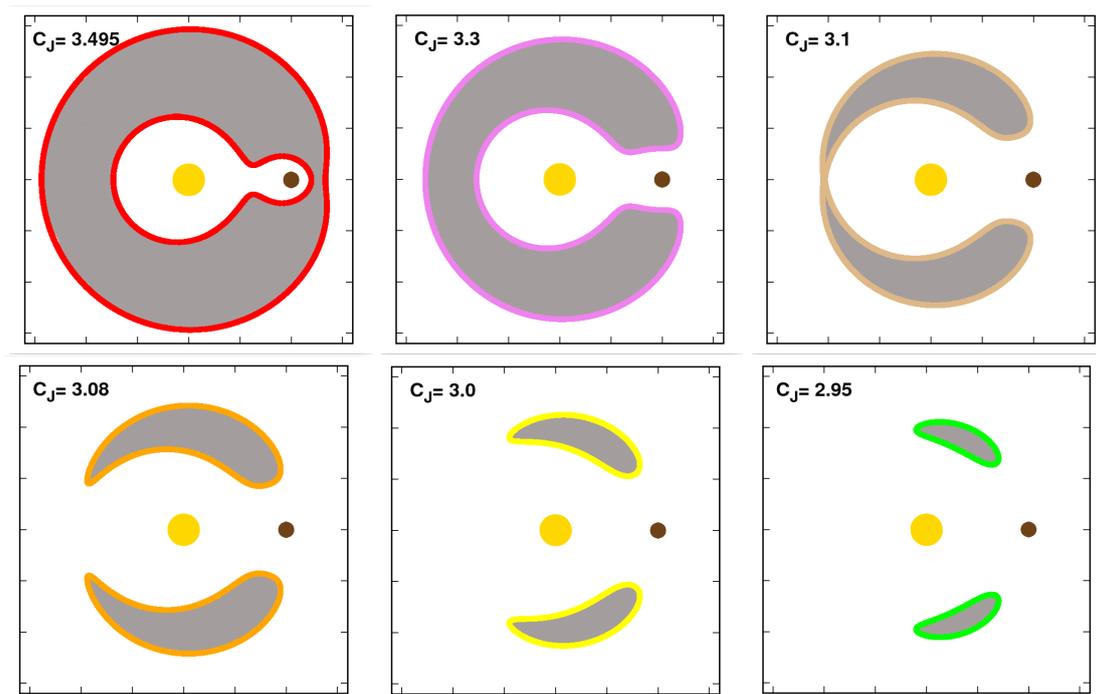
$$C_J = n^2(x^2 + y^2) + 2 \left( \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right), \quad (33)$$

Ao plotarmos esta equação em um gráfico variando os valores de  $C_J$  e mantendo  $n$ ,  $\mu_1$  e  $\mu_2$  constantes, para todos os valores de  $x$  e  $y$ , nós obtemos uma série de curvas chamadas de Curvas de Velocidade Zero.

Dentro de cada curva se encontra a região “proibida” para as partículas e fora a região “permitida”, isso significa que as partículas que possuem como constante de

Jacobi um determinado valor só poderão orbitar fora da região delimitada pela curva de velocidade zero associada àquele valor da constante.

Figura 3 – Gráficos de  $x$  versus  $y$  representando curvas de velocidade zero. Cada gráfico mostra a curva associada à constante de Jacobi indicada no canto superior esquerdo. Foram usados os parâmetros  $n = 1$ ,  $\mu_1 = 0.9$  e  $\mu_2 = 0.1$ . O círculo amarelo representa o corpo central  $M_1$  e o círculo marrom representa o corpo  $M_2$ . As cores das linhas são para diferenciar os valores de  $C_J$  e as áreas cinzas são as regiões “proibidas” às partículas.



fonte: Produção da Autora (2019).

A Figura 3 mostra um exemplo de curvas de velocidade zero para o caso com  $n = 1$ ,  $\mu_1 = 0.9$  e  $\mu_2 = 0.1$  onde a única coisa que muda de uma curva para outra é o valor da constante de Jacobi. Nesta figura é possível observar que para um mesmo sistema existem órbitas girino, ferradura e uma separatriz ( $C_J = 3.1$ ) que, como o próprio nome diz, separa os regimes e delimita as regiões onde podem existir cada tipo de órbita.

### 2.3 PONTOS DE EQUILÍBRIO LAGRANGIANOS

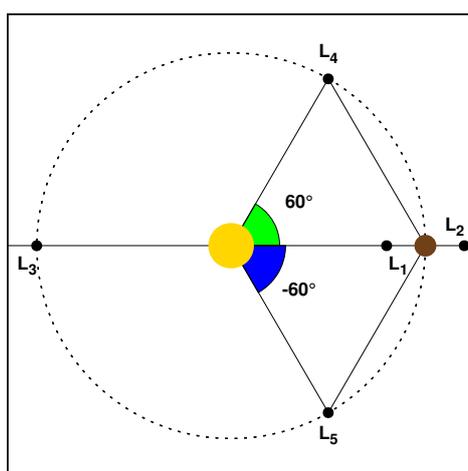
Em 1765, o matemático suíço Leonhard Euler mostrou a existência de três pontos de equilíbrio linearmente instáveis ( $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ ) colineares ao planeta (Figura 4). Alguns anos depois, em 1772, o matemático e astrônomo italiano Joseph-Louis Lagrange, que na época estudava o sistema Sol-Terra-Lua e os satélites de Júpiter,

apresentou novos resultados em uma publicação sobre o P3C que abriram diversas portas na área da astronomia, logo os resultados apresentados por Lagrange eram a peça que faltava no estudo do PR3C, pois mostravam existir pontos de equilíbrio linearmente estáveis onde corpos poderiam permanecer compartilhando a órbita com o planeta por um tempo relativamente longo ( $L_4$  e  $L_5$ , ver Figura 4). Em 1843, Gabriel Gascheau encontrou uma propriedade fundamental enquanto estudava a configuração dos triângulos equiláteros formados com  $L_4$  e  $L_5$  (Figura 4). Ele provou que para o movimento circular de três corpos, quando estes estivessem localizados nos vértices de um triângulo equilátero ( $L_4$  ou  $L_5$ ), teriam essa configuração como estável se suas massas satisfizessem a seguinte inequação:

$$\frac{(M_3 + M_2 + M_1)^2}{M_3M_2 + M_3M_1 + M_2M_1} > 27 \quad (34)$$

Para o caso onde a menor massa,  $M_3$ , é negligenciável em relação às outras duas, a inequação se transforma em  $\mu(1 - \mu) < 1/27$  onde  $\mu = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \approx 0.0385$ . Isso significa que sistemas onde a razão de massa entre o corpo secundário e a massa total do sistema (primário mais secundário) é maior que 0.0385 os pontos lagrangianos  $L_4$  e  $L_5$  se tornam instáveis e deixam de ser capazes de manter partículas orbitando nestas regiões por um longo período de tempo.

Figura 4 – Esquema representando a localização dos pontos lagrangianos (pontos pretos). O círculo amarelo representa o corpo central  $M_1$  e o círculo marrom representa o corpo  $M_2$



fonte: Produção da autora (2019).

As soluções analíticas encontradas são os cinco pontos lagrangianos, nomeados de  $L_1$  a  $L_5$  em homenagem a Lagrange, que são pontos de equilíbrio sobre a órbita

descrita pelo corpo  $M_2$ . Destes,  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  são pontos de equilíbrio linearmente instáveis que se localizam sobre a linha do eixo que une  $M_1$  a  $M_2$ . O fato destes pontos serem linearmente instáveis significa que uma partícula cuja órbita é ao redor de um destes pontos permanecerá por pouco (ou nenhum) tempo nesta região desde que não estejam em órbitas periódicas do tipo Lyapunov, Lissajous ou halo, que não fazem parte dos interesses deste trabalho. Já os pontos chamados de  $L_4$  e  $L_5$  são linearmente estáveis desde que  $\mu \leq 0.0385$ , conforme discutido anteriormente, e se localizam na mesma órbita porém estão defasados angularmente em  $\pm 60^\circ$  em relação ao corpo  $M_2$ , formando então um triângulo equilátero tendo como vértices  $L_4$  ou  $L_5$ , o corpo central  $M_1$  e o corpo secundário  $M_2$  como pode ser visto na Figura 4.

## 2.4 TIPOS DE ÓRBITAS E CAOS

Um sistema onde dois ou mais corpos estão confinados em um mesmo semi-eixo maior médio, em que não ocorre captura nem colisão, é chamado de sistema coorbital. Nestes casos dizemos que os corpos estão confinados em uma ressonância de movimento médio 1:1, isso significa que os períodos orbitais dos corpos são aproximadamente iguais e portanto eles completarão uma volta ao redor do corpo central ao mesmo tempo. Existem três tipos de órbitas nesta configuração, e elas são classificadas de acordo com o ângulo do centro de libração do argumento crítico que é definido pela equação  $\sigma = \lambda - \lambda'$ , sendo  $\lambda$  longitude média da partícula e  $\lambda'$  é a longitude média do corpo secundário. Temos então que a classificação dos tipos de órbitas são:

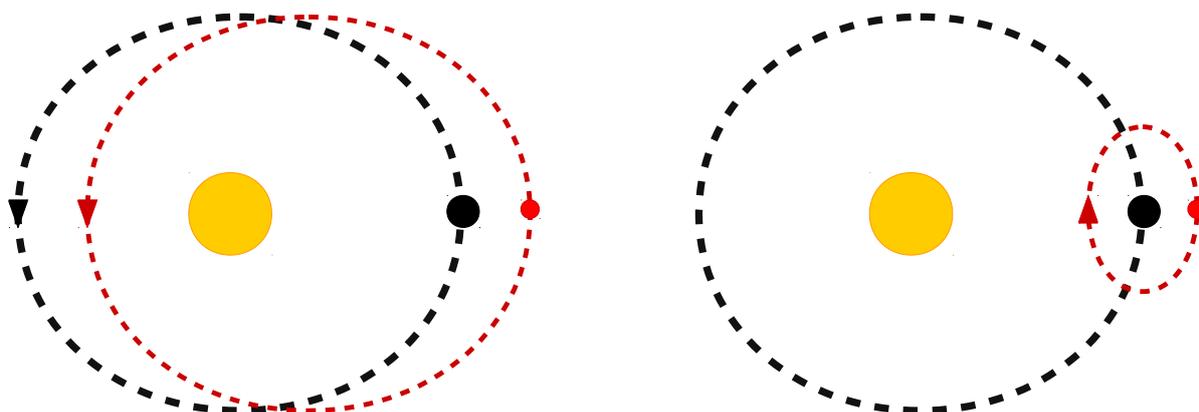
- Órbitas girino com argumento crítico librando em torno de  $\pm 60^\circ$ ;
- Órbitas ferradura com argumento crítico librando em torno de  $180^\circ$ ;
- Órbitas quase-satélite com argumento crítico librando em torno de  $0^\circ$ .

### 2.4.1 Quase-Satélites

Os quase-satélites, ou QS, são corpos que orbitam o corpo central como mostra a Figura 5, diferente dos satélites que orbitam o corpo secundário. Entretanto, no referencial girante os quase-satélites descrevem uma órbita oblonga e retrógrada ao redor dos pontos lagrangianos  $L_1$  e  $L_2$  do corpo secundário.

Esta forma de órbita aparece porque estamos considerando o referencial no

Figura 5 – Esquema para ilustrar uma órbita de um objeto do tipo quase-satélite. O ponto e a curva pretos representam o corpo  $M_2$  e sua órbita, o ponto e a curva vermelhos representam o corpo  $M_3$  e sua órbita, e o círculo amarelo representa o corpo central  $M_1$ . Na figura da esquerda vemos a órbita do quase-satélite a partir do referencial inercial, já na figura da direita vemos a órbita a partir do referencial girante. As setas indicam a direção do movimento do corpo na órbita.



fonte: Produção da autora (2019).

sistema que gira com o corpo secundário, logo como o corpo central e o corpo secundário são estacionários neste sistema, o terceiro corpo é o único que se move e gera este formato de órbita. Sendo que no referencial inercial, onde todos os corpos estão livres para se mover, o terceiro corpo volta a descrever uma órbita elíptica ao redor do corpo central.

Apesar de as órbitas dos quase-satélites permanecerem mais próximas ao corpo secundário quando comparadas a outros tipos de órbitas na ressonância de movimento médio 1:1, elas ainda permanecem para fora do raio de Hill do corpo secundário (raio da esfera de influência onde o campo gravitacional do corpo é dominante no sistema), o que favorece que os corpos não sejam capturados por seu campo gravitacional e portanto não se tornem satélites (KINOSHITA; NAKAI, 2007).

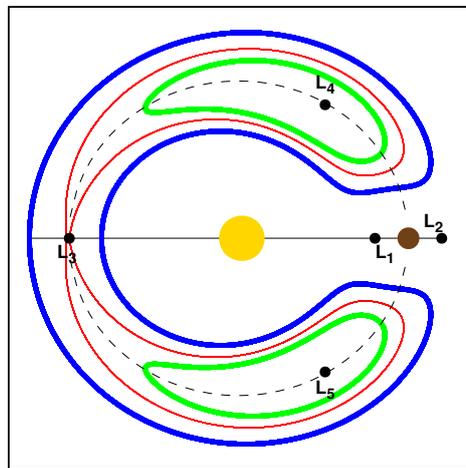
## 2.4.2 Órbitas Girino e Ferradura

Outros tipos importantes de órbitas descritas por corpos na ressonância 1:1 são as órbitas do tipo Girino e Ferradura. No ano de 1911, Ernest Brown provou ser possível que os corpos nesta configuração ressonante tivessem órbitas estáveis e periódicas ao redor dos pontos de equilíbrio lagrangianos  $L_3$ ,  $L_4$  e  $L_5$ . De acordo com (BROWN,

1911) dois tipos de órbitas podem ser vistos na Figura 6 e suas características são:

- Órbitas girino, são órbitas ao redor de apenas um dos pontos triangulares, seja  $L_4$  ou  $L_5$ , com um formato que lembra um girino ou uma gota;
- Órbitas ferradura, são órbitas cujo caminho engloba os pontos  $L_3$ ,  $L_4$  e  $L_5$  e seu formato lembra a forma de uma ferradura.

Figura 6 – Esquema para ilustrar o formato de órbitas hipotéticas de partículas coorbitais no sistema girante. A órbita azul é a do tipo ferradura, as órbitas verdes são do tipo girino. O círculo amarelo representa o corpo central  $M_1$  e o círculo marrom representa o corpo  $M_2$ . Os pontos pretos representam as localizações dos pontos de equilíbrio lagrangianos.



fonte: Produção da autora (2019).

Os autores (DERMOTT; MURRAY, 1981) apresentaram em seu artigo um estudo detalhado sobre as características gerais das órbitas girino e ferradura.

Os principais resultados obtidos por (DERMOTT; MURRAY, 1981) são:

- A largura radial da órbita descrita pela partícula é duas vezes a largura radial da curva de velocidade zero associada, tanto para órbitas do tipo ferradura quanto para do tipo girino. A largura da órbita ferradura pode ser descrita pela seguinte equação, onde  $a_2$  e  $M_2$  são o semi-eixo maior e a massa do corpo secundário, e  $M_1$  a massa do corpo central:

$$r_{ferradura}^{max} = \frac{a_2(M_2/M_1)^{1/3}}{2} \quad (35)$$

- De acordo com as equações (22) e (25) do artigo a largura radial da órbita girino é proporcional a  $(M_2/M_1)^{1/2}$  e da ferradura proporcional a  $(M_2/M_1)^{1/3}$ . Conforme a massa do corpo secundário diminui, a largura radial das órbitas ferradura diminui mais lentamente do que a largura radial das órbitas girino. Isso mostra que é mais provável existirem órbitas ferradura do que girino em sistemas onde razão de massa  $\mu_2$  é pequena.
- A inequação  $\Gamma \lesssim (M_1 T/M_2)^{(5/3)}$  relaciona o tempo de vida das partículas em uma órbita ferradura com o período orbital  $T$  e a razão das massas  $M_1$  e  $M_2$ . Através dela é possível notar que quanto menor for a massa do corpo secundário mais capaz ele é de manter as partículas confinadas nestas órbitas por um longo período de tempo.

Muitos pesquisadores estudaram as órbitas periódicas ao redor dos pontos de equilíbrio lagrangianos utilizando diferentes abordagens matemáticas e com diferentes considerações teóricas (BROWN, 1911; GARFINKEL, 1977; YODER et al., 1983). Por exemplo, Brown (1911) e Garfinkel (1977) estudaram o sistema Sol-Júpiter-troianos e Yoder et. al. (1983) estudou o sistema Saturno-Jano-Epimeteo. Um dos conceitos abordados por estes estudos que é de grande importância para o nosso trabalho é o conceito de mínima separação angular, que pode ser explicada como a distância angular entre o ponto mais próximo da órbita da partícula ao corpo secundário, ou no caso do trabalho do Yoder et. al. (1983), a menor distância entre as órbitas dos dois satélites. Partindo da equação (YODER et al., 1983):

$$E = -\frac{1}{6} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \frac{\epsilon^2 n_0^2}{2 \text{sen}(\frac{\phi}{2})} [1 + 4 \text{sen}^3(\frac{\phi}{2})], \quad (36)$$

onde  $E$  é a energia constante equivalente,  $\phi$  é a distância angular entre a partícula e o corpo secundário,  $\epsilon^2 = (M_3 + M_2)/M_1$ ,  $n_0$  é o movimento médio da partícula. Sabendo que em  $\phi = 180^\circ$  está localizado um ponto de equilíbrio e que neste ponto  $d\phi/dt = 0$ , substituímos estes valores na equação para  $E$  e encontramos:

$$E = -\frac{5\epsilon^2 n_0^2}{2}. \quad (37)$$

Porém nos pontos de mínima separação angular  $\phi_{min}$ , a relação  $d\phi/dt = 0$

também é válida, logo:

$$E = -\frac{\epsilon^2 n_0^2}{2 \operatorname{sen}(\frac{\phi}{2})} [1 + 4 \operatorname{sen}^3(\frac{\phi}{2})]. \quad (38)$$

Como a energia é constante, podemos igualar à energia encontrada em  $\phi = 180^\circ$ :

$$-\frac{5\epsilon^2 n_0^2}{2} = -\frac{\epsilon^2 n_0^2}{2 \operatorname{sen}(\frac{\phi}{2})} [1 + 4 \operatorname{sen}^3(\frac{\phi}{2})], \quad (39)$$

então:

$$4 \operatorname{sen}^3 \frac{\phi}{2} - 5 \operatorname{sen}(\frac{\phi}{2}) + 1 = 0. \quad (40)$$

Como esta é uma equação de 3º grau, existem três raízes:  $\operatorname{sen}(\frac{\phi_1}{2}) = 1$ ;  $\operatorname{sen}(\frac{\phi_2}{2}) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $\operatorname{sen}(\frac{\phi_3}{2}) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Para a primeira raiz fazemos  $\phi_1 = 2 \operatorname{arcsen}(1)$  e encontramos  $\phi_1 = 180^\circ$  que é o valor da máxima separação angular; temos para a segunda raiz  $\phi_2 = 2 \operatorname{arcsen}(-1.2071068)$  que pode ser descartado matematicamente uma vez que o valor do arco seno só é definido no intervalo  $[-1;1]$ ; e para a terceira raiz encontramos  $\phi_3 = 2 \operatorname{arcsen}(0.2071068) \approx 23.91$ , que é o valor da mínima aproximação angular da separatriz. O interessante sobre este resultado é que ele não depende nem do semi-eixo maior e nem da razão de massa, ou seja, a mínima separação angular da separatriz será sempre de aproximadamente  $24^\circ$ .

Com a equação (36) é possível encontrar o valor da energia de partículas em diferentes órbitas a partir do valor de sua mínima separação angular,  $\phi_{min}$ . O processo contrário também é possível, ou seja, sabendo o valor da energia da partícula podemos encontrar o valor de  $\phi_{min}$ , basta rearranjar a equação (36) em função da energia que fica na forma:

$$4 \operatorname{sen}^3 \left( \frac{\phi_{min}}{2} \right) + \frac{2E}{\epsilon^2 n_0^2} \operatorname{sen} \left( \frac{\phi_{min}}{2} \right) + 1 = 0 \quad (41)$$

### 2.4.3 Caos

O estudo das órbitas nos sistemas coorbitais nos ajudam a analisar melhor as regiões onde as partículas podem permanecer em órbitas estáveis por um longo período de tempo, mas devemos olhar também para as regiões instáveis, ou seja, caóticas.

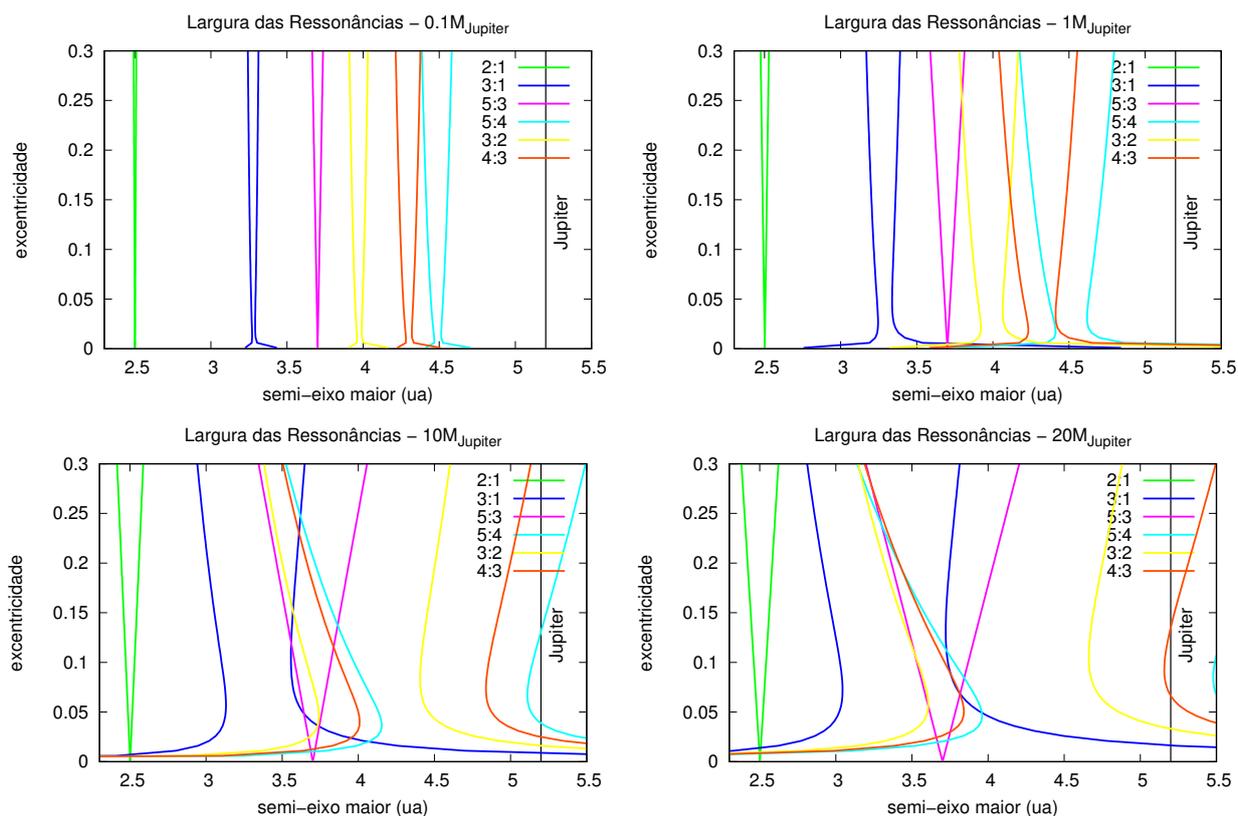
De acordo com Wisdom (1980), nas regiões externas às orbitas girino e ferradura

existe uma sobreposição de ressonâncias que faz com que as partículas que adentram a essa região sejam ejetadas da região coorbital. A largura da região caótica, ou gap, é dada pela equação (WISDOM, 1980) :

$$W_{gap} \sim 2.1\mu_2^{(1/3)}a_2, \quad (42)$$

onde  $\mu_2$  e  $a_2$  são a razão de massa e o semi-eixo maior do corpo  $M_2$ , e a região caótica vai de  $a_2 - W_{gap}$  até  $a_2 + W_{gap}$ . Apesar de muito útil para ajudar na análise, esta equação só é realmente válida na vizinhança do planeta, onde não existem órbitas girino nem ferradura. Portanto ao realizarmos uma análise do caos devemos levar em conta que as regiões caóticas não são bem determinadas longe do corpo secundário.

Figura 7 – Gráficos de semi-eixo maior versus excentricidade das larguras de libração de algumas ressonâncias internas a um planeta do tipo Júpiter com diferentes valores de massa em cada um dos gráficos, utilizando um modelo analítico baseado no PR3C.



fonte: Produção da autora (2019).

Sabemos da teoria de perturbações ressonantes no PR3C (MURRAY; DERMOTT, 1999) que conforme a razão de massa do sistema aumenta, a largura das ressonâncias de movimento médio também aumentam fazendo com que a região de sobreposição entre elas fique grande o suficiente para se sobrepor à região das órbitas ferradura,

fazendo com essas não sejam mais acessíveis às partículas.

Se aumentarmos ainda mais a razão de massa, a largura da região de sobreposição das ressonâncias pode crescer ao ponto de se sobrepor totalmente à região de estabilidade coorbital e então transformá-la em caótica.

Na Figura 7, temos um exemplo das larguras de algumas das ressonâncias de movimento médio de primeira e segunda ordem indicadas na legenda, para uma estrela central de  $1M_{\odot}$ , e um planeta com os mesmos elementos orbitais de Jupiter e massas de 0.1, 1, 10 e 20 Massas de Jupiter respectivamente para cada um dos gráficos. Vemos que no primeiro gráfico, para  $0.1M_{Jupiter}$  e até excentricidades iguais a 0.3, as ressonâncias indicadas não chegam a se sobrepor e suas larguras são pequenas, fazendo com que elas permaneçam distantes do planeta, cuja localização está indicada pela linha preta vertical.

No segundo gráfico para  $1M_{Jupiter}$  notamos que as larguras das ressonâncias mais próximas do planeta começam a se sobrepor e suas bordas começam a se aproximar da órbita do planeta.

No terceiro gráfico, para  $10M_{Jupiter}$ , vemos que das 6 ressonâncias representadas, 5 se sobrepõem e que a borda de uma das ressonâncias cruza a órbita do planeta.

E no último quadro para um planeta com  $20M_{Jupiter}$  a região da sobreposição das ressonâncias cresce ainda mais e que a região coorbital ao planeta é afetada por duas ressonâncias.

Logo, o caos na região coorbital e na vizinhança do corpo secundário é devido, principalmente, à razão de massa do sistema.

## 2.5 FORMAÇÃO DE EXOPLANETAS COORBITAIS

Como até o momento nenhum troiano foi encontrado em outro sistema planetário, ainda não temos uma certeza de quais mecanismos de formação são os mais comuns. Por isso existem várias teorias sobre como estes corpos poderiam se formar.

Para a formação de satélites coorbitais existem alguns modelos de formação baseados na migração dos planetesimais (CHANUT; WINTER; TSUCHIDA, 2008), na formação por acreção de corpos (IZIDORO; WINTER; TSUCHIDA, 2010) e até por ruptura de um grande satélite dando origem a satélites menores (TREFFENSTÄDT; MOURÃO; WINTER, 2015).

Para a formação de planetas coorbitais alguns autores sugerem um cenário de captura de corpos existentes para os pontos  $L_4/L_5$  através de uma variedade de meca-

nismos: A colisão de dois objetos próximos aos pontos lagrangianos triângulares ou a captura para órbitas troianas devido a rápida acreção de massa do corpo secundário (CHIANG; LITHWICK, 2005); rápida migração convergente entre um planeta gasoso e múltiplos planetas rochosos levando diretamente a uma configuração coorbital (THOMMES, 2005); espalhamento de objetos existentes na direção do  $L_4/L_5$  devido a uma grande instabilidade entre os planetas existentes no sistema, similar ao que teria ocorrido com os troianos de Júpiter (MORBIDELLI et al., 2005), ou devido ao efeito gravitacional de um violento relaxamento de um sistema planetário muito compacto (CRESSWELL; NELSON, 2006; CRESSWELL; NELSON, 2008).

Porém, o cenário que acreditamos que explicaria melhor a formação de um planeta do tipo Terra coorbital a um corpo muito massivo é o mecanismo de formação in-situ (LAUGHLIN; CHAMBERS, 2002). Este mecanismo de formação foi estudado por Beaugé et. al. (2007) cujo objetivo do trabalho era analisar sob quais circunstâncias planetesimais que estivessem presos na vizinhança de um dos pontos  $L_4/L_5$  se acretariam para formar um corpo como um planeta terrestre, se um cenário com gás influenciaria na formação do planeta troiano e se a migração interna afetaria o planeta formado.

Para isso os autores assumiram um sistema composto por uma estrela central com 1 massa do Sol,  $M_\odot$ , um planeta gigante igual a um Júpiter (mesma massa e elementos orbitais atuais) e uma nuvem de planetesimais ao redor do ponto de equilíbrio lagrangiano  $L_4$ . A nuvem é composta por 500 planetesimais com massas iguais totalizando  $1.5M_\oplus$  e com elementos orbitais escolhidos aleatoriamente dentro dos seguintes limites:

$$\begin{array}{lll} 5.1ua \leq a \leq 5.3ua & 0.01 \leq e \leq 0.1 & 0^\circ \leq I \leq 5^\circ \\ M = 0 & 40^\circ \leq \varpi \leq 80^\circ & 0^\circ \leq \Omega \leq 360^\circ \end{array}$$

sendo  $a$  o semi-eixo maior,  $e$  a excentricidade,  $I$  a inclinação,  $M$  a anomalia média,  $\varpi$  a longitude do pericentro e  $\Omega$  a longitude do nodo ascendente. Para as simulações os autores utilizaram um integrador Bulirsh-Stoer com passo variável e sempre que a distância entre dois corpos era menor do que cinco vezes o raio físico mútuo eles eram acretados. A massa do novo corpo formado era a soma das massas dos dois corpos que colidiram e a órbita era dada pela aproximação do centro de massa entre eles. Devido a essa consideração a escala de tempo não poderia ser diretamente considerada pois os corpos tendem a se formar bem mais rápido.

Foram feitas várias simulações variando o número de corpos na nuvem de planetesimais entre 100 e 1000 e sua massa total entre 1 e  $3 M_{\oplus}$ . Os resultados obtidos pelos autores mostraram que a massa final do planeta formado não dependia significativamente da massa inicial total da nuvem de planetesimais, nem da quantidade de corpos contida nela. Os autores fizeram também simulações considerando massas menores para o planeta gigante, mas a massa do planeta troiano formado permanecia sempre por volta de  $0.3M_{\oplus}$ , nunca ultrapassando  $0.6M_{\oplus}$ . Os autores concluíram que somente o processo de acreção não é suficiente para formar um planeta com a massa da Terra e que a formação de corpos ao redor de  $L_4/L_5$  parece ter um limite de massa.

No estudo com o gás os autores concluíram que o arrasto gasoso não afeta consideravelmente a formação dos planetas na vizinhança dos pontos  $L_4/L_5$ , pois os resultados mostraram que a massa dos corpos formados permaneciam similares nos casos com e sem gás. Concluíram também que a migração interna do planeta gigante não parece dificultar o processo de formação para a população de planetesimais troianos e não causa instabilidade orbital na região das órbitas girino. Então, se um planeta se formar na vizinhança do ponto  $L_4$  de um planeta gigante antes da sua migração interna em direção à zona habitável do sistema, é possível que o planeta troiano sobreviva ao processo de migração e permaneça na mesma configuração estável constituindo um planeta que poderia satisfazer algumas condições de habitabilidade.

### 3 METODOLOGIA

Nesta seção apresentamos o pacote Mercury, que é o programa que utilizamos para realizar as integrações numéricas do nosso trabalho. Mostramos as modificações que fizemos no código e em seguida mostramos as condições iniciais utilizadas nas simulações e comentamos sobre como foram realizadas.

#### 3.1 PACOTE MERCURY

O Pacote Mercury (CHAMBERS, 1999) é um conjunto de programas escrito em Fortran 77 desenvolvido para fazer integração de problemas de N-corpos. Seu objetivo é calcular a evolução das orbitas de corpos que movem ao redor de um corpo central. Dentro do Mercury existem cinco tipos de integradores que são:

- MVS (Mixed-variable symplectic)
- BS (General Bulirsch-Stoer)
- Conservative Bulirsch-Stoer
- RADAU
- Hybrid

Para o nosso trabalho utilizamos o integrador General Bulirsch-Stoer pois, apesar de este não ser o integrador mais veloz, é o integrador que possui a maior precisão nos cálculos.

#### 3.2 ADAPTAÇÕES NO PACOTE MERCURY

Como nossas simulações estavam demandando muito tempo de CPU, e logo se tornaria inviável terminar o estudo, foram necessárias algumas modificações no pacote numérico que utilizaríamos para realizar as simulações a fim de agilizar o processo de integração.

Sabemos que na região coorbital de um sistema existem órbitas estáveis e bem determinadas, como as órbitas girino ao redor dos pontos  $L_4$  ou  $L_5$ , e órbitas ferradura ao redor dos pontos  $L_3, L_4$  e  $L_5$ . Sabemos também que as partículas que não

estão nestas configurações possuem órbitas caóticas e se movem ao longo de toda a região coorbital. A configuração do Mercury original desenvolvido por Chambers (CHAMBERS, 1999) remove uma partícula da simulação em três casos:

- A partícula colidiu com o corpo central;
- A partícula colidiu com um corpo massivo;
- A partícula adquiriu um semi-eixo maior acima do limite externo de ejeção determinado pelo usuário.

Para o nosso problema apenas estes três métodos de ejeção não são suficientes pois não eliminam as partículas caóticas da região coorbital, portanto nós implementamos mais dois mecanismos de ejeção que são apresentados nas sub-seções a seguir.

### 3.2.1 Limite Angular

Sabemos da teoria que as partículas que possuem órbitas estáveis ao redor de um dos pontos de equilíbrio não saem da vizinhança de um ponto para outro. Por exemplo uma partícula que orbita ao redor do ponto  $L_4$  permanecerá nesta região por toda a simulação se esta estiver em uma órbita estável. Já uma partícula que possui uma órbita caótica passará um tempo orbitando o ponto  $L_4$ , depois migrará para a região do ponto  $L_5$ , voltará para  $L_4$ , e assim por diante. Com isso é fácil determinar quais partículas são estáveis e quais são caóticas.

Lembrando do sistema coorbital descrito no capítulo 2, temos um corpo central  $M_1$ , um corpo secundário  $M_2$  e partículas coorbitais a  $M_2$ . Sendo assim, chamaremos de região coorbital superior a região cujo ângulo polar  $\phi$  está entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$  à frente de  $M_2$ , e região coorbital inferior a região com  $\phi$  entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$  atrás de  $M_2$ . O ponto  $L_4$  está localizado em  $60^\circ$  na região coorbital superior e o ponto  $L_5$  em  $-60^\circ$  na região coorbital inferior. Como os sistemas coorbitais são simétricos em relação ao eixo  $M_1$ - $M_2$ , a estabilidade da região coorbital superior deve ser igual à estabilidade da região coorbital inferior.

Implementamos então uma adaptação na sub-rotina do pacote Mercury que analisa as ejeções, a *mx\_x\_ejec* apresentada no apêndice A. Esta sub-rotina tem como objetivo calcular o raio  $r$  da órbita de um corpo a partir dos valores das componentes cartesianas  $(x, y, z)$  do seu vetor posição e então sinalizá-lo como ejetado do sistema caso seu raio seja maior do que o limite determinado pelo usuário.

Nossa adaptação consiste na modificação do código computacional para que o usuário escolha se quer manter os corpos da região superior, da região inferior ou se não deseja utilizar este recurso. Caso o usuário deseje ativar esta opção, o código da sub-rotina irá calcular primeiro o valor de  $\phi$  da partícula e  $\phi$  do corpo secundário, e em seguida calcular a diferença entre os dois. Se a diferença angular estiver fora dos limites  $-180^\circ \leq \Delta\phi \leq 180^\circ$  o programa a corrige somando  $2\pi$  para  $\Delta\phi \leq -180^\circ$ , ou subtraindo  $2\pi$  para  $\Delta\phi \geq 180^\circ$ . Com o valor da diferença angular corrigido o programa analisa se o corpo está dentro ou fora da região em que o usuário escolheu manter as partículas. Caso esteja fora o programa irá sinalizar esta partícula como ejetada, caso contrário ela será mantida e seguirá para os próximos cálculos.

Por exemplo:

Supomos que o usuário escolheu manter as partículas localizadas na região superior. Supomos também que o corpo secundário possui  $\phi_{M_2} = 35^\circ$  e que existem duas partículas coorbitais, uma com  $\phi_{p_1} = -165^\circ$  e outra com  $\phi_{p_2} = -130^\circ$ . Calculando a diferença entre os ângulos  $\Delta\phi_{1,2} = \phi_{p_{1,2}} - \phi_{M_2}$  o programa obtém  $\Delta\phi_1 = -200^\circ$  e  $\Delta\phi_2 = -165^\circ$ . Corrigindo o  $\Delta\phi_1$  para dentro se encaixar nos limites  $-180^\circ \leq \Delta\phi \leq 180^\circ$  o programa obtém  $\Delta\phi_1 = 160^\circ$ . O programa então irá manter a partícula  $p_1$  já que ela está na região superior, e irá marcar  $p_2$  como ejetada do sistema.

### 3.2.2 Limite Interno Para o Raio Orbital

Ao longo da evolução do sistema estudado existem os corpos que adquirem órbitas fora da região coorbital ao corpo secundário e não são afetados por nenhum tipo de perturbação, portanto estes tendem a permanecer no sistema até o fim da simulação. Entretanto, eles não têm valor algum para nosso estudo e apenas fazem nossas simulações demandar mais tempo de CPU, por isso é necessário um mecanismo que elimine estas partículas do sistema.

Como foi dito anteriormente, o pacote Mercury já possui implementado um limite externo de raio orbital  $r$  para ejeção de partículas, entretanto somente este mecanismo não é suficiente pois ainda permite que permaneçam partículas na região interna do sistema.

Para solucionar este problema implementamos um limite de ejeção interno de raio orbital  $r$ , sendo que cada vez que uma partícula tiver  $r$  menor do que o valor determinado pelo usuário esta será considerada como ejetada do sistema. Sendo assim, delimitamos uma região em forma de disco onde permitimos que as partículas

permaneçam até o fim da simulação.

Fizemos esta adaptação utilizando a mesma lógica do limite de ejeção externo. Onde havia a rotina para ejeção de corpos com  $r$  superior ao limite externo nós acrescentamos o limite interno, como pode ser visto na sub-rotina *mx\_x\_ejec* do pacote Mercury contida no apêndice A.

O programa irá calcular então o raio orbital  $r$  da partícula a partir da coordenadas  $(x, y, z)$  do seu vetor posição através da equação  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  e compará-lo com os limites interno e externo de raio orbital determinados pelo usuário.

Com as adaptações feitas é possível determinar com mais precisão a região de estabilidade coorbital do sistema, pois após um certo tempo de integração todas as partículas caóticas e as que não são coorbitais são eliminadas e restam apenas as que possuem órbitas dentro da região de estabilidade coorbital. Além disso, estas modificações permitem reduzir consideravelmente o tempo de CPU necessário para finalizar a simulação, que foi a principal motivação para implementá-las.

### 3.3 SISTEMA ESTUDADO E CONDIÇÕES INICIAIS DAS SIMULAÇÕES

O sistema que nós estudamos consiste de uma estrela como corpo central, um corpo muito massivo como corpo secundário, e corpos na região coorbital. A estrela é do tipo Sol com a massa de  $1M_{\odot}$  e raio igual a  $1R_{\odot}$ . O corpo secundário possui valores de massa iguais a 0.1, 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 8.0, 10.0, 12.0, 15.0, 18.0, 20.0 e 25.0 massas de Júpiter ( $M_J$ ), e orbita a estrela com valores de semi-eixo maior iguais a 0.1ua, 0.3ua, 0.5ua, 1ua, 3ua, 5ua, 8ua, 10ua, 12ua, 14ua, 16ua, 18ua e 20ua. A densidade do corpo secundário foi considerada sendo  $1.33g/cm^3$ , que é a mesma densidade de Júpiter, e outros elementos orbitais de  $M_2$  foram considerados inicialmente nulos.

Sabemos que para  $M_2 \geq 12M_J$  os corpos passam a ser considerados anãs marrons e não mais planetas gigantes, mas isso não é um problema. Escolhemos normalizar o nosso sistema utilizando uma estrela do tipo Sol como corpo central, entretanto este estudo ainda é válido para outros sistemas com o corpo central com diferentes massas pois, como apresentamos no capítulo 2, a teoria foi desenvolvida com base na razão de massa do sistema coorbital e não com base na massa do corpo secundário.

### 3.3.1 Simulações de Estabilidade

Combinamos os valores de massa e semi-eixo maior do corpo secundário e fizemos 5 simulações para cada caso. As simulações foram integradas por 700 mil períodos orbitais do corpo secundário com passo de  $1/20$  do seu período orbital.

Para cada simulação de estabilidade foram distribuídas aleatoriamente 5000 partículas sem massa totalizando 25000 partículas na região de estabilidade de cada sistema. Seus valores de semi-eixo maior foram dados dentro do intervalo  $a_2 \pm r_{gap}$ , sendo  $r_{gap}$  o tamanho radial da região de caos apresentado na seção 2.4.3. O argumento do pericentro  $\omega$  das partículas também foi distribuído aleatoriamente entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ , e os outros elementos orbitais como longitude do nodo ascendente  $\Omega$ , excentricidade  $e$ , anomalia média  $M$  e inclinação  $I$  foram dados como nulos.

Utilizamos a versão adaptada do pacote Mercury onde escolhemos manter as partículas na região coorbital superior. Os limites de ejeção interno e externo foram dados por  $a_2 \pm 1.1r_{gap}$ . Nossas condições iniciais estão sumarizadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Condições iniciais das simulações de estabilidade.

Parâmetro/Corpo	Corpo Secundário $M_2$	Partículas
$a(ua)$	0.1,0.3,0.5,1, 3, 5, 8, 10, 12, 14, 16, 18 e 20	$a_2 \pm r_{gap}$
$e$	0	0
$I(\text{graus})$	0	0
$\omega(\text{graus})$	0	[0,180]
$\Omega(\text{graus})$	0	0
$M(\text{graus})$	0	0
massa( $M_J$ )	0.1, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 15, 18, 20 e 25	sem massa
densidade ( $g/cm^3$ )	1.33	–

fonte: Produção da autora (2019).

Sabemos do PR3C que a largura radial da região de estabilidade coorbital tem uma dependência linear com o semi-eixo maior do corpo secundário. Podemos interpretá-lo então como um fator de escala, ou seja, para um sistema com  $\mu_2 = 9.548 \times 10^{-6}$  temos  $r_{ferradura} = 1.06 \times 10^{-2} ua$  para  $a_2 = 1ua$ , e  $r_{ferradura} = 1.06 \times 10^{-1} ua$  para  $a_2 = 10 ua$ . Sendo assim, poderíamos ter feito as simulações de estabilidade para apenas um valor de  $a_2$  e então utilizado os outros valores como fator de escala nos dando uma região de estabilidade aproximada. Entretanto, como iríamos utilizar os resultados para as simulações de formação planetária, escolhemos fazer simulações de estabilidade para todos os casos de  $a_2$ . Desta forma teríamos a região de estabilidade coorbital muito bem definida para todos os casos e teríamos também a segurança de

saber que os corpos estariam distribuídos aleatoriamente somente na região estável, evitando uma perda de massa em regiões caóticas no início da simulação.

### 3.3.2 Simulações de Formação Planetária

Para as simulações de formação planetária atribuímos para o corpo secundário e para a estrela as mesmas condições iniciais das simulações para a estabilidade, e utilizamos também os mesmos parâmetros computacionais como tempo de integração, passo, limites de ejeção, etc. As condições serão diferentes apenas para os planetesimais, já que não utilizaremos mais partículas sem massa.

Para cada caso de massa e semi-eixo maior do corpo secundário nós listamos as componentes dos vetores das posições iniciais de todas as partículas que sobreviveram até o final nas 5 simulações de estabilidade. A partir desta lista nós selecionamos aleatoriamente 500 posições e em cada uma delas incluímos um planetesimal.

Cada um dos planetesimais têm  $4 \times 10^{-3} M_{\oplus}$  para o caso com massa total dos planetesimais igual a  $2M_{\oplus}$ , ou  $6 \times 10^{-3} M_{\oplus}$  para o caso com massa total dos planetesimais igual a  $3M_{\oplus}$ . A densidade dos planetesimais foi considerada como sendo  $3.344g/cm^3$ , que é a densidade média da Lua. Para cada combinação de massa e semi-eixo maior do planeta foram feitas 20 simulações de formação planetária, sendo 10 para a massa total dos planetesimais igual a  $2M_{\oplus}$  e 10 simulações para  $3M_{\oplus}$ .

Em alguns casos, como será mostrado mais adiante no capítulo 4, de todas as 25000 partículas simuladas para a análise da estabilidade dos sistemas, menos de 500 sobreviveram até o fim da simulação. Nestes raros casos nós fizemos o mesmo processo de atribuição de planetesimais descrito anteriormente, porém dividimos a massa total dos planetesimais,  $2M_{\oplus}$  ou  $3M_{\oplus}$ , pela quantidade disponível de partículas. No pior dos casos onde sobreviveram apenas 108 partículas das 25000 simuladas, as massas dos planetesimais foram  $5.561 \times 10^{-8} M_{\odot}$  que equivale a cerca de 1.85% da massa da Terra para o caso com massa total dos planetesimais igual a  $2M_{\oplus}$ , e  $8.342 \times 10^{-8} M_{\odot}$  que equivale a cerca de 2.78% da massa da Terra para o caso com massa total dos planetesimais igual a  $3M_{\oplus}$ .

As colisões entre os corpos foram consideradas colisões inelásticas, então quando dois deles colidem a massa do corpo menor é somada à massa do corpo maior dando origem a um novo corpo. A posição e velocidade do corpo formado é considerada como sendo a posição e velocidade do centro de massa entre os corpos originários no momento da colisão.

## 4 RESULTADOS

Neste capítulo apresentamos os resultados que obtivemos com as 4290 simulações feitas, sendo 910 para análise de estabilidade e 3380 para análise de formação planetária.

Na primeira seção apresentamos os resultados das simulações de estabilidade e mostramos como a região coorbital é afetada pela massa do corpo secundário. Para isso fizemos uma análise dos parâmetros de largura radial da região coorbital no  $L_4$ , largura angular da região coorbital e largura radial da região coorbital no  $L_3$  quando existem órbitas do tipo ferradura.

Na segunda seção apresentamos os resultados das simulações de formação planetária e mostramos o estudo feito sobre quais fatores afetam de forma mais significativa a formação de planetas terrestres. Para isso nós analisamos qual a relação entre a quantidade e a massa dos corpos formados com o semi-eixo maior do corpo secundário, a massa do corpo secundário e a quantidade de massa disponível para acreção na região coorbital.

### 4.1 ESTABILIDADE DA REGIÃO COORBITAL

O objetivo deste estudo não é saber quais são as condições e parâmetros da região de estabilidade após um certo tempo, mas sim saber qual a região onde é possível inserir uma partícula para que ela sobreviva até o final da simulação, e assim determinamos a região de estabilidade coorbital.

Para isso nós analisamos quais foram as partículas que sobreviveram até o fim de cada simulação, em seguida selecionamos as suas respectivas posições iniciais e é a partir destes dados que fazemos a análise dos parâmetros da região de estabilidade coorbital.

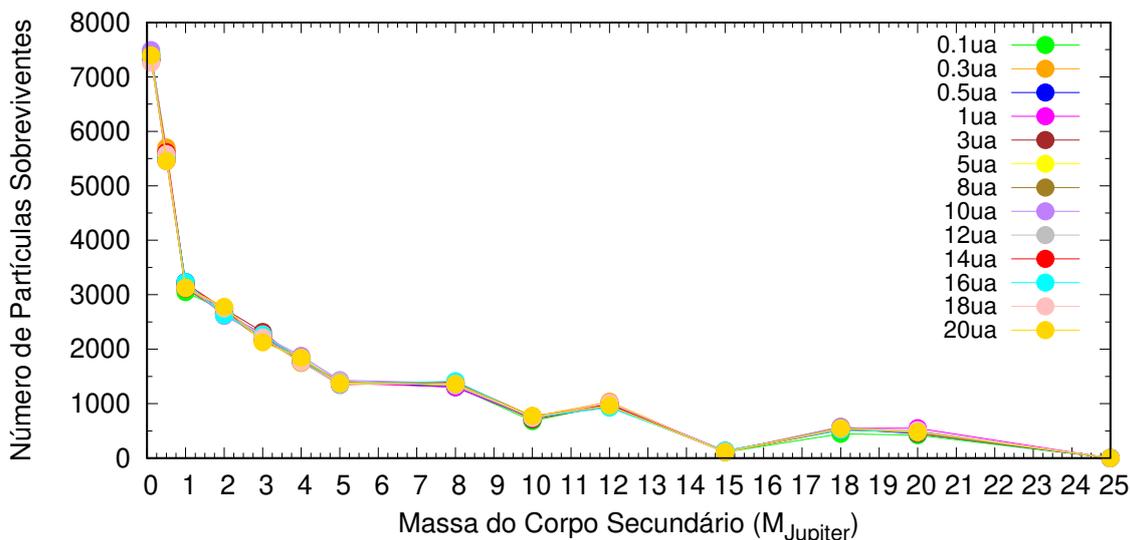
#### 4.1.1 Número de Partículas Sobreviventes

A primeira coisa que observamos nos resultados obtidos foi o número de corpos que sobreviveram em cada um dos casos simulados.

Notamos que em alguns casos o número de partículas ao final da simulação não condizia com o esperado como podemos ver na Figura 8. Sabemos que semi-eixo maior do corpo secundário não afeta a região de estabilidade, logo a quantidade de

partículas que sobrevivem até o fim da simulação também não é muito afetada por este parâmetro.

Figura 8 – Gráficos de massa do corpo secundário versus número de partículas no final da simulação. As cores representam os diferentes valores de semi-eixo maior do corpo secundário.



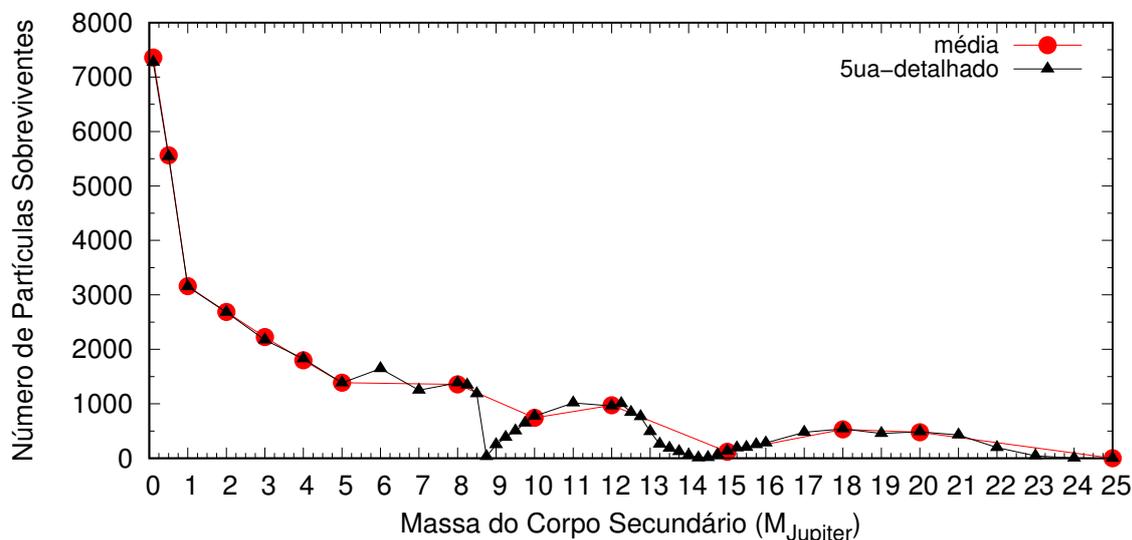
fonte: Produção da autora (2019).

Portanto analisamos a média do número de corpos sobreviventes e vimos que a massa do corpo secundário afeta bastante o resultado final.

Olhando para a curva vermelha na Figura 9 vemos que para massas de  $M_2$  até  $5M_J$  o número de corpos cai conforme a massa aumenta, porém a partir deste valor vemos que isso já não é mais verdade. O número de corpos em  $8M_J$  é quase igual ao número de corpos em  $5M_J$ , em  $10M_J$  volta a cair e em  $12M_J$  sobe novamente. Em seguida em  $15M_J$  vemos uma queda brusca em que quase não sobram partículas, já em  $18M_J$  o número sobe novamente, cai levemente em  $20M_J$  e em  $25M_J$  não resta nenhuma partícula na região coorbital.

Precisávamos verificar se estas oscilações eram fruto de algum erro nas simulações ou se os pontos vizinhos acompanhariam a tendência da curva demonstrando ser um efeito real. Para isso fizemos simulações de 1 em 1 massa de Júpiter de 1 a  $25 M_J$ , e nos pontos onde encontramos quedas bruscas fizemos simulações de 0.25 em 0.25 massas de Júpiter para os pontos vizinhos. Como o semi-eixo maior não afeta o resultado escolhemos utilizar  $5ua$ , que é o semi-eixo maior aproximado de Júpiter. Os resultados obtidos são apresentados na curva preta na Figura 9 e na Tabela 2.

Figura 9 – Gráficos de massa do corpo secundário versus número de partículas no final da simulação. A curva vermelha representa a média do número de corpos sobreviventes para cada valor de massa do corpo secundário. A linha preta com triângulos mostra a os valores obtidos para  $5ua$  ao fazermos simulações para outros valores de massa do corpo secundário.



fonte: Produção da autora (2019).

Tabela 2 – Número de partículas restantes ao final das simulações para o caso com semi-eixo maior do corpo secundário igual a  $5ua$

Massa $M_2$	Número de partículas	Massa $M_2$	Número de partículas	Massa $M_2$	Número de partículas
0.1	7271	9.5	502	14.75	66
0.5	5541	9.75	644	15	131
1	3150	10	772	15.25	190
2	2681	11	1015	15.5	198
3	2171	12	960	15.75	248
4	1825	12.25	1003	16	281
5	1383	12.5	843	17	477
6	1647	12.75	763	18	538
7	1251	13	489	19	454
8	1385	13.25	258	20	485
8.25	1342	13.5	183	21	426
8.5	1183	13.75	122	22	196
8.75	32	14	57	23	45
9	248	14.25	7	24	2
9.25	382	14.5	14	25	0

fonte: Produção da autora (2019).

Com os dados detalhados podemos notar que a partir de  $25M_J$  não restam mais partículas no sistema. Isso mostra que para a razão de massa  $\mu_2 \geq 0.0233$  a região coorbital deixa de possuir regiões estáveis e passa a ser totalmente caótica. Os

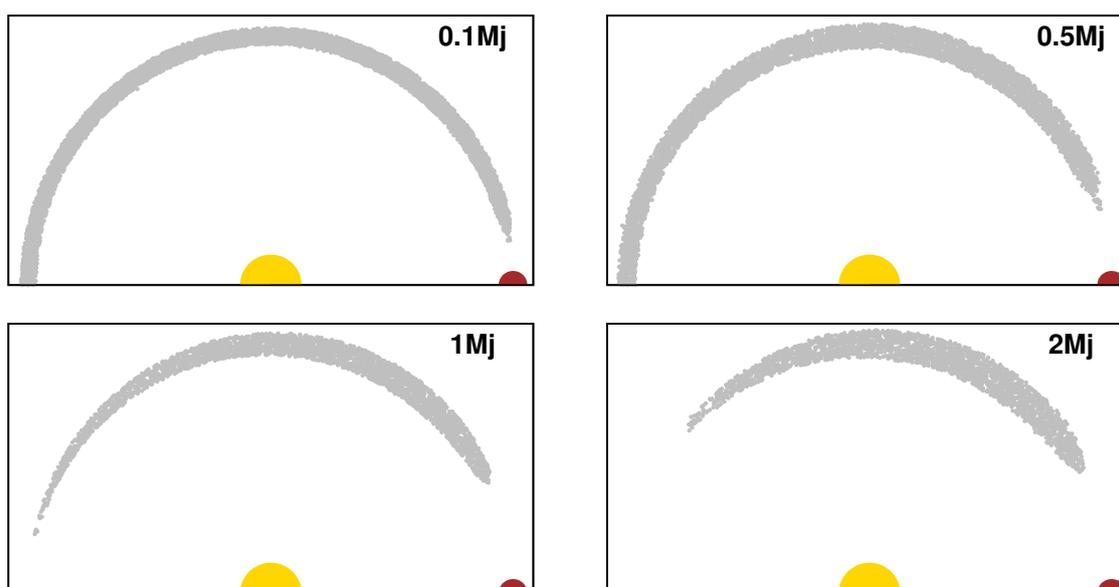
resultados mostram também que as quedas são suaves e que existem mais oscilações do que a curva média mostra, então podemos concluir que esse comportamento não é fruto de um erro nas simulações. Mesmo ainda não sabendo a natureza deste fenômeno, sabemos que não é devido à não linearidade dos pontos lagrangianos pois todas as massas simuladas estão dentro do limite de razão de massa de Gascheau  $\mu_2 \leq 0.038$ , apresentado na seção 2.3.

#### 4.1.2 Limite entre Regimes de Órbitas

Antes de partirmos para a análise dos parâmetros, primeiro escolhemos olhar para as formas obtidas com as nossas simulações das regiões de estabilidade coorbitalis.

Na Figura 10 temos os resultados de algumas simulações, sendo que cada quadro representa as posições iniciais das partículas que sobreviveram até o fim da simulação. Vemos que a região coorbital permanece preenchida até o ponto de equilíbrio

Figura 10 – Graficos de  $x$  versus  $y$  das posições iniciais das partículas que sobreviveram até o fim da simulação. Cada quadro apresenta os resultados das simulações para diferentes valores de massa do corpo secundário. O círculo amarelo representa o corpo central como uma estrela do tipo Sol com  $M_1 = 1M_\odot$ , o círculo marrom representa o corpo secundário  $M_2$  e os pontos cinzas representam as posições iniciais das partículas que sobreviveram até o fim da simulação.



fonte: Produção da autora (2019).

lagrangiano  $L_3$ , indicando uma órbita do tipo ferradura, somente nos casos onde as massas do corpo secundário são menores que  $1M_J$ , sendo esta relação independente

do valor do semi-eixo maior. Notamos então que estas órbitas do tipo ferradura não parecem ser mais permitidas para sistemas com razão de massa  $\mu_2 \gtrsim 10^{-3}$ .

Este resultado está em concordância a teoria descrita em Dermott & Murray(1981a), pois de acordo com a inequação  $\Gamma \lesssim \{T/(M_2/M_1)\}^{5/3}$ , o tempo de vida das partículas em órbitas do tipo ferradura em um sistema com razão de massa  $\mu_2 \approx 10^{-3}$  seria de  $\approx 10^6$  anos. Devido a isso, para sistemas com razões de massa grandes a probabilidade de conseguir manter partículas neste tipo de órbita por muito tempo é baixa.

Vemos que mesmo com o periodo orbital variando consideravelmente devido ao aumento do semi-eixo maior, este não é capaz de aumentar significativamente o tempo de vida das partículas para razões de massa grandes.

Concluimos então que deve existir um valor limite de razão de massa do corpo secundário até onde é possível encontrar órbitas do tipo ferradura e que este valor deve ser entre  $4.77 \times 10^{-4} \leq \mu_{2lim} \leq 9.54 \times 10^{-4}$ .

### 4.1.3 Largura Angular

O primeiro parâmetro que analisamos foi a largura angular da região de estabilidade. Como foi explicado na seção 2.4.2, utilizando a equação (41) podemos encontrar os ângulos dos pontos de retorno da órbita, ou seja, os valores de mínimo e máximo. O ponto de mínimo é chamado de mínima separação angular  $\phi_{min}$ , que é o valor da menor distância angular entre a partícula e o corpo secundário. E o ponto de máximo é chamado de máxima separação angular  $\phi_{max}$ , que é o valor da maior distância angular entre a partícula e o corpo secundário.

Da saída dos dados obtemos a posição das partículas em coordenadas cartesianas  $(x, y)$ , sendo  $z = 0$  pois nosso sistema é coplanar. Convertemos estes valores para coordenadas polares e obtemos então os valores de  $r$  e  $\theta$ . Como as excentricidades das partículas, que são inicialmente nulas, evoluem ao longo da simulação para pequenos valores da ordem de  $10^{-3}$  ou  $10^{-4}$ , acreditamos que  $r$  e  $\theta$  são uma boa aproximação para os valores de semi-eixo maior  $a$  e argumento do pericentro  $\omega$ .

Tendo a lista dos raios e ângulos orbitais das partículas nós consideramos como a mínima separação angular o ângulo de menor valor, e como máxima separação angular o ângulo de maior valor. Os valores médios obtidos estão apresentados na Tabela 3, e os nossos resultados estão sumarizados na Figura 11.

Tabela 3 – Valores médios da mínima e máxima separação angular entre a região de estabilidade e o corpo secundário.

Massa de $M_2(M_J)$	$\phi_{min}$ médio	$\phi_{max}$ médio
0.1	10.599	179.971
0.5	18.175	179.967
1	26.479	165.561
2	29.506	142.437
3	33.187	128.640
4	33.402	112.041
5	35.721	102.625
8	39.812	106.918
10	41.396	87.556
12	43.658	93.123
15	52.192	70.787
18	45.258	85.671
20	49.098	84.504

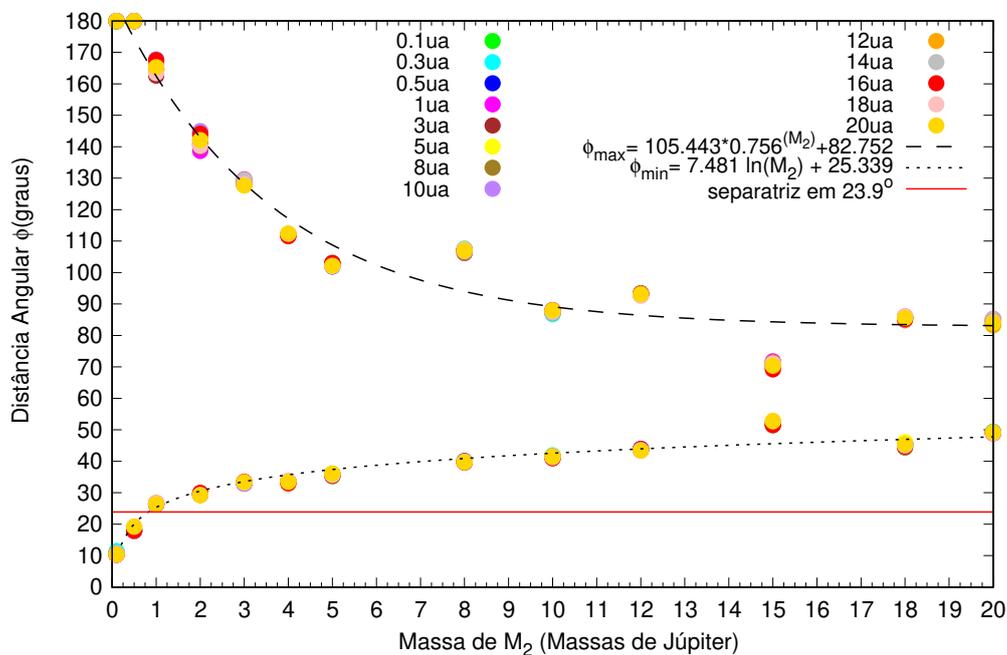
fonte: Produção da autora (2019).

Já sabemos que a equação para encontrar os pontos de mínima e máxima distância angular depende da energia da partícula, que por sua vez depende de  $\epsilon^2 n_0^2 \approx GM_2/a_3^3$  (YODER et al., 1983). Seria esperado então que a mínima separação angular variasse conforme mudamos os valores de  $M_2$  e  $a_3$ , mas não é bem o que observamos. A Figura 11 nos mostra que a massa do planeta tem uma grande influência sobre a região de estabilidade.

Conforme aumentamos a razão de massa do corpo secundário o valor de  $\phi_{min}$  aumenta e o  $\phi_{max}$  diminui. Significa que conforme a razão de massa do corpo secundário aumenta a largura angular da região de estabilidade diminui. Entretanto, a separação radial entre os corpos não influencia consideravelmente este parâmetro. Vemos que para cada valor de massa do corpo secundário os pontos que indicam os valores da distância angular permanecem muito próximos, mostrando que há pouca diferença numérica entre eles.

Quando analisamos as ordens de grandeza das variáveis da energia no S.I. vemos que a massa possui valores com ordens de  $10^{26} Kg$  até  $10^{29} Kg$ , enquanto que o semi-eixo maior varia de valores da ordem de  $10^{10} m$  até  $10^{13} m$ . Logo é possível notar que a variável que mais afeta o comportamento angular da região de estabilidade é, de fato, a massa do corpo secundário.

Figura 11 – Gráfico de massa do corpo secundário versus distância angular mínima e máxima da região estável. As cores representam os diferentes valores de semi-eixo maior do corpo secundário. A linha reta vermelha localizada em  $23.9^\circ$  indica o  $\phi_{min}$  da separatriz. As linhas pretas e tracejadas indicam as curvas de ajuste cujas equações estão descritas na legenda.



fonte: Produção da autora (2019).

Apesar de já existir a equação para encontrar os valores de  $\phi_{min}$  e  $\phi_{max}$  como mostrado na seção 2.4.2, com nossos dados conseguimos fazer duas curvas de ajuste e encontramos então duas novas equações. Estas são consideravelmente mais simples e mais diretas para encontrar os valores aproximados dos ângulos limites das regiões de estabilidade coorbitais.

A equação  $\phi_{max} = (105.44 \times 0.76^{M_2}) + 82.75$  está representada pela curva preta tracejada na Figura 11. Apesar de os pontos de dados divergirem um pouco da curva, esta ainda aparenta ser um bom ajuste para encontrar a máxima separação angular média das partículas.

Já a equação  $\phi_{min} = (\ln(M_2) \times 7.84) + 25.34$ , representada pela curva preta pontilhada, é um ajuste excelente para os pontos. Vimos na seção anterior que deve existir um limite de razão de massa para o corpo secundário e que este deve estar entre  $4.77 \times 10^{-4} \leq \mu_{2lim} \leq 9.54 \times 10^{-4}$ . Sabendo que a mínima separação angular da separatriz é  $\approx 23.9^\circ$ , substituímos este valor na equação e encontramos  $M_2 = 0.825M_J$ , o que nos dá uma razão de massa limite igual a  $\mu_{2lim} = 7.87 \times 10^{-4}$ . Com isso conseguimos determinar em um sistema se podem ou não haver órbitas do

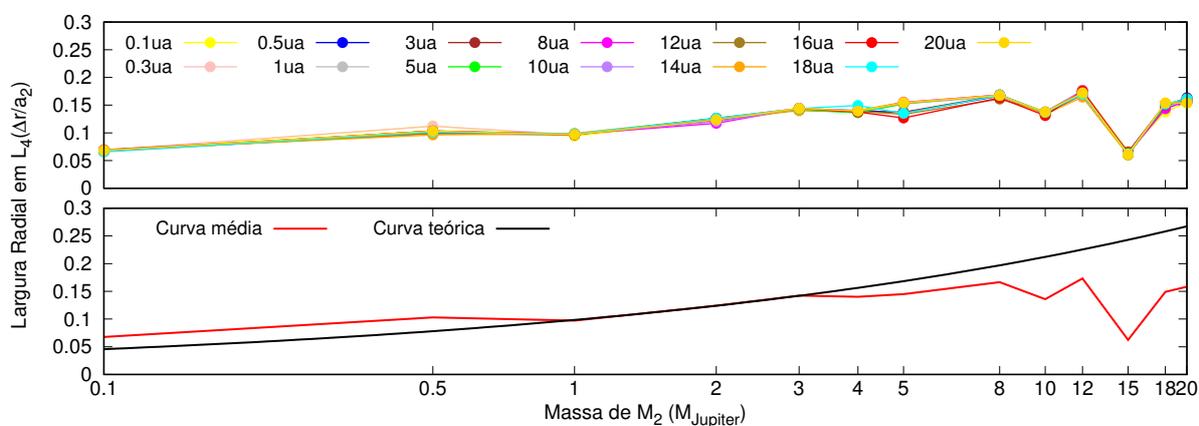
tipo ferradura na região coorbital a partir da razão de massa do corpo secundário.

#### 4.1.4 Largura Radial em $L_4$

Outro parâmetro importante a ser analisado em nossas simulações é a largura radial  $\Delta r$  das regiões de estabilidade na vizinhança do ponto  $L_4$ , uma vez que a maior largura radial da região coorbital é dada em  $60^\circ$  (MURRAY; DERMOTT, 1999). Utilizamos uma metodologia similar à aplicada na medição da largura angular, porém neste caso nós separamos apenas as partículas cujos ângulos polares estivessem entre  $58^\circ$  e  $62^\circ$ . Das partículas selecionadas nós consideramos como os limites radiais da região de estabilidade os raios orbitais  $r_3$  da partícula mais interna e da partícula mais externa e, subtraindo o menor valor do maior, nós obtemos a largura  $\Delta r$ .

Como já era previsto na teoria, de acordo com a equação  $r_{ferradura} = \frac{a_2}{2} \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{1/3}$

Figura 12 – Gráfico de semi-eixo maior do corpo secundário em escala logarítmica versus razão entre largura radial da região de estabilidade na vizinhança do  $L_4$  e o semi-eixo maior de  $M_2$ . As cores diferentes nas linhas e pontos representam os diferentes valores de massa do corpo secundário.



fonte: Produção da autora (2019).

(DERMOTT; MURRAY, 1981) conforme aumentamos o semi-eixo maior do corpo secundário  $a_2$  a largura  $r_{ferradura}$  máxima da região de estabilidade também aumenta. Este aumento na região coorbital é proporcional ao aumento de  $a_2$  como pode ser visto na Figura 12 e na Tabela 4, onde os valores médios obtidos estão apresentados.

No gráfico superior vemos no eixo vertical o valor da razão entre a largura da região de estabilidade em  $60^\circ$  sobre o semi-eixo maior do corpo secundário, e no eixo horizontal temos a massa do corpo secundário. Podemos notar que todas as curvas seguem o mesmo comportamento e têm valores muito parecidos, indicando que a

largura  $\Delta r$  na vizinhança do ponto  $L_4$  medida nas simulações não dependem de  $a_2$ , concordando com a teoria.

Vemos mais uma vez que a massa do corpo secundário, ou a razão de massa  $\mu_2$ , possui grande influência sobre a região de estabilidade sendo que estas curvas não são bem comportadas, principalmente para valores de massa do corpo  $M_2$  a partir de  $5M_J$ . Estas variações estão relacionadas com o fenômeno apresentado na subseção 4.1.1 e ainda não sabemos o que causa as oscilações na largura radial conforme a massa aumenta.

Entretanto já sabíamos que as equações existentes na teoria (DERMOTT; MURRAY, 1981) não funcionariam perfeitamente pois estas foram desenvolvidas sob a condição de que a razão de massa  $\mu_2$  fosse muito pequena, sendo no máximo da ordem de  $10^{-8}$  fazendo  $\Delta r \ll 1$ , como podemos ver no gráfico inferior da Figura 12.

Observamos que nossos resultados possuem a tendência de crescimento prevista quando a massa do corpo secundário aumenta, entretanto apenas para valores de  $M_2$  pequenos. Concluimos então que nossos resultados para a largura da região coorbital na vizinhança do  $L_4$  concordam parcialmente com a teoria pois trabalhamos com ordens de grandeza maiores do que os limites definidos.

Tabela 4 – Valores médios da largura radial da região de estabilidade na vizinhança do ponto  $L_4$  obtidos a partir das simulações

Massa de $M_2(M_J)$	$\Delta r$ médio
0.1	0.0675639845
0.5	0.1030475065
1	0.0972317547
2	0.1241449704
3	0.142383423
4	0.140071739
5	0.1449442395
8	0.1665164681
10	0.135788956
12	0.1732410292
15	0.0624673566
18	0.149152847
20	0.1584469682

fonte: Produção da autora (2019).

### 4.1.5 Largura Radial em $L_3$

Sabemos a partir da teoria (MURRAY; DERMOTT, 1999) que, assim como a região de maior largura radial é nos pontos  $L_4/L_5$ , a região mais estreita radialmente é na vizinhança do ponto  $L_3$ . Este é um dado interessante a ser analisado e comparado com a largura em  $L_4$ .

Utilizamos uma metodologia similar à aplicada na largura radial no  $L_4$ , porém selecionamos apenas as partículas entre  $178^\circ$  e  $180^\circ$  e a partir destas consideramos os limites radiais externo e interno como o maior e o menor raio orbital das partículas listadas. Este estudo só é possível para os casos com massa do corpo secundário menor que  $1M_J$  pois, como mostramos anteriormente, é somente nestes casos que as órbitas do tipo ferradura são permitidas às partículas. Nossos resultados estão sumarizados na Figura 13.

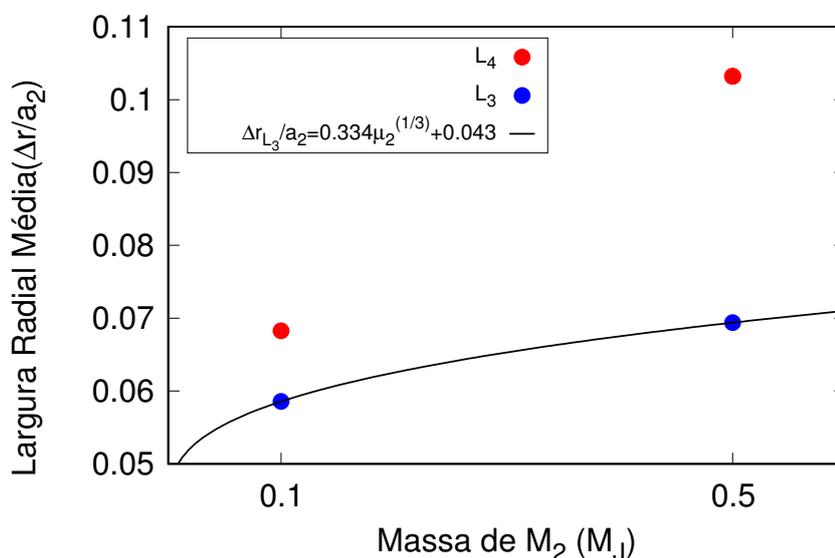
Na figura temos os pontos em azul que representam as larguras radial da região de estabilidade na vizinhança de  $L_3$ , e a título de comparação temos em vermelho os valores de largura radial na vizinhança do ponto  $L_4$ .

Como esperávamos, a largura radial em  $L_3$  é sempre menor que a largura em  $L_4$ , para um mesmo valor de massa do corpo secundário, sendo que a largura em  $L_4$  é em média 14% maior que a largura em  $L_3$  para  $M_2 = 0.1M_J$ , e em média 45% maior para  $M_2 = 0.5M_J$ .

Baseado na equação  $r_{ferradura} = (a_2/2)(M_2/M_1)^{1/3}$ , que nos dá a largura radial máxima da órbita ferradura, fizemos um ajuste dos parâmetros para encontramos uma equação que descrevesse a largura radial da região de estabilidade no ponto  $L_3$  em função da razão de massa. Com isso encontramos  $\Delta r_{L_3}/a_2 = 0.334\mu_2^{1/3} + 0.043$ , porém esta equação só é válida para os casos onde  $M_2 \lesssim 0.825M_J$ , pois é onde podemos encontrar órbitas do tipo ferradura.

Mais uma vez nossos resultados mostraram estar em concordância com a teoria. Isso nos indica que encontramos limites bem determinados para as regiões de estabilidade coorbitais e que podemos então utilizar com uma certa segurança estes dados nas simulações para a formação planetária.

Figura 13 – Gráfico de massa  $M_2$  versus razão entre a largura radial da região de estabilidade na vizinhança do  $L_3$  e do  $L_4$  sobre  $a_2$ . Os pontos representam a média dos resultados para os diferentes valores de semi-eixo maior do corpo secundário. As cores indicam se os valores pertencem à medição nos pontos  $L_3$  ou  $L_4$ . A curva preta indica a equação apresentada na legenda.



fonte: Produção da autora (2019).

#### 4.1.6 Simulações Para Estudo da Região de Estabilidade Coorbital Utilizando um Parâmetro Angular Diferente para Eliminação de Partículas

A título de comparação nós decidimos utilizar um segundo método de eliminação de partículas no Mercury. Como no primeiro método restam apenas partículas em metade da região coorbital (entre 0 e  $180^\circ$ ), algumas partículas em órbitas do tipo ferradura são eliminadas. Então, para podermos analisar se esse efeito afeta os parâmetros da região coorbital nós fizemos algumas simulações utilizando um segundo método. Neste segundo método nós eliminamos as partículas que estejam até  $8^\circ$  à frente ou atrás do corpo secundário, ou seja, as partículas não serão eliminadas se a diferença entre seu ângulo orbital e o do corpo secundário estiver entre  $8^\circ$  e  $352^\circ$  ( $8^\circ \leq \phi_{particula} - \phi_{M_2} \leq 352^\circ$ ). Desta forma, permitimos que toda a região coorbital seja acessível às partículas em órbitas do tipo ferradura, e as partículas caóticas que venham a se aproximar demais do corpo secundário sejam eliminadas.

Fizemos então uma simulação para cada caso semi-eixo maior do corpo secundário e com valores de massas 0.1 e  $0.5M_J$ , onde distribuimos 10 mil partículas aleatoriamente na região coorbital entre 0 e  $360^\circ$  e utilizando todos os outros parâme-

tros iguais aos das simulações feitas com o primeiro método (Tabela 1).

Apresentamos a seguir a tabela 5 que apresenta a comparação entre os resultados obtidos com ambos os métodos para as larguras radiais em  $L_3$  e  $L_4$ , e a tabela 6 que apresenta os valores da mínima separação angular.

Tabela 5 – Valores médios da largura radial da região de estabilidade na vizinhança dos pontos  $L_3$  e  $L_4$  utilizando os dois métodos de eliminação de partículas.

Massa de $M_2$ ( $M_J$ )	$\Delta r$ médio em $L_3$		$\Delta r$ médio em $L_4$	
	1º Método	2º Método	1º Método	2º Método
0.1	0.0586	0.0524	0.0676	0.0628
0.5	0.0694	0.0605	0.1031	0.0945

fonte: Produção da autora (2019).

Tabela 6 – Valores médios da mínima e máxima separação angular entre a região de estabilidade coorbital e o corpo secundário, utilizando os dois métodos de eliminação de partículas.

Massa de $M_2$ ( $M_J$ )	$\phi_{min}$ médio		$\phi_{max}$ médio	
	1º Método	2º Método	1º Método	2º Método
0.1	10.599	11.798	180.000	348.404
0.5	18.175	19.467	180.000	340.469

fonte: Produção da autora (2019).

Notamos que os novos resultados para as larguras radiais em  $L_3$  e  $L_4$ , obtidos com o segundo método, são em média 10% menores do que os obtidos anteriormente, o que indica que neste caso a região de estabilidade coorbital é mais estreita radialmente. Já para os valores de separação angular vemos que o  $\phi_{min}$  para o segundo método é cerca de 10% maior do que os resultados anteriores, isso significa que a região de estabilidade coorbital fica angularmente 10% mais distante do corpo secundário. Entretanto, quando analisamos a extensão angular da região de estabilidade coorbital vemos que a diferença deste parâmetro nos dois métodos é de apenas  $\approx 0.75\%$ . Observe que para o segundo método de eliminação utilizado nas simulações nós pudemos obter os valores de  $\phi_{max}$  além de  $180^\circ$  pois neste caso nós simulamos a órbita ferradura completa, e no caso anterior nós eliminamos todas as partículas com  $\phi > 180^\circ$ .

Com isso vemos que, apesar de haver uma diferença entre os resultados, esta não é suficientemente grande, principalmente se considerarmos o fato de que para o primeiro método foram feitas 10 simulações para cada caso, e para o segundo método foi feita 1 simulação para cada caso. Como os resultados, mesmo com uma ligeira diferença, parecem concordar entre si, podemos concluir que método utilizado para realizar o estudo feito anteriormente é válido.

## 4.2 FORMAÇÃO DE PLANETAS TERRESTRES NA REGIÃO COORBITAL

Utilizando a metodologia descrita no capítulo 3, e partindo do estudo feito anteriormente para a região de estabilidade, nós realizamos simulações para analisarmos sob quais condições um planeta do tipo Terra se formaria coorbital a um corpo muito massivo.

Para isso nós analisamos os corpos formados que sobreviveram até o fim de cada simulação e investigamos quais foram as condições do sistema em que o corpo foi formado.

### 4.2.1 Número de Corpos Formados

Em 109 das 3380 simulações feitas para formação planetária nenhum corpo sobreviveu na região coorbital até o fim dos 700 mil períodos orbitais.

Apesar do fato de em alguns casos sobreviverem até 4 corpos no sistema, a maioria deles possui massas pequenas. Por isso, decidimos então considerar o corpo formado como um planeta terrestre caso este possuísse uma massa igual ou superior a 10% da massa da Terra, que é aproximadamente a massa de Marte. Os corpos com massas menores que este limite foram desconsiderados.

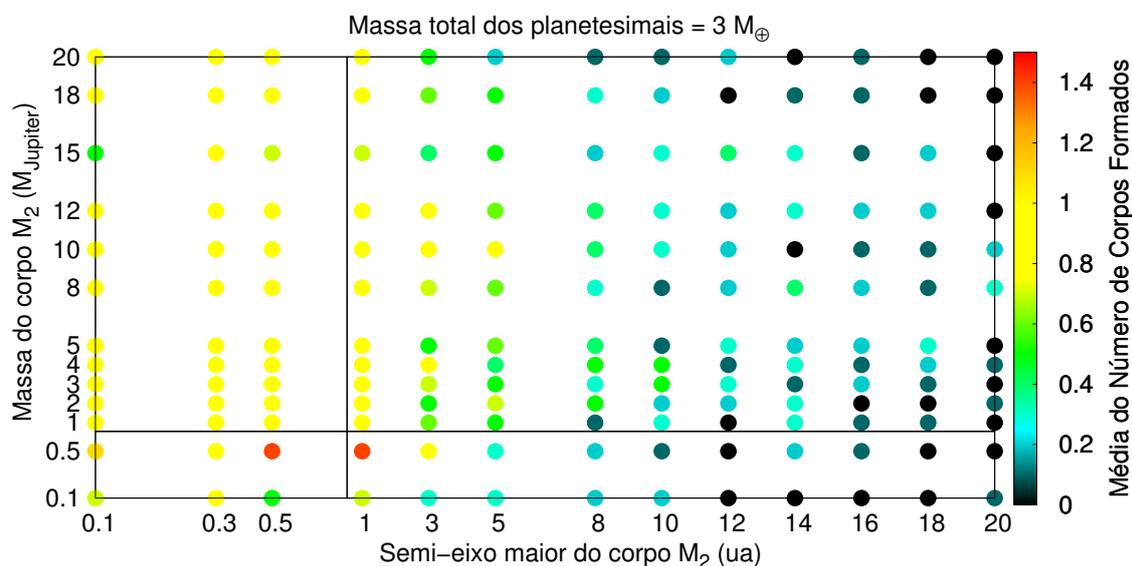
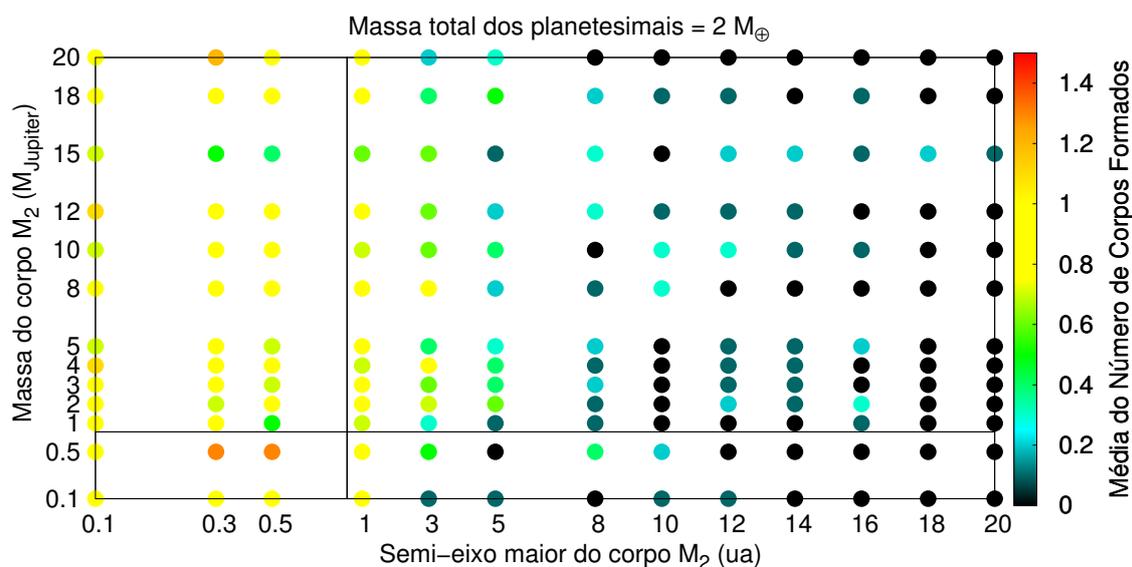
Nossos resultados estão apresentados na Figura 14 onde podemos ver a relação entre a quantidade média de corpos formados por simulação com a massa de  $M_2$ , com o semi-eixo maior  $a_2$  e com a quantidade de massa disponível para acreção na região coorbital.

Observando os gráficos podemos notar que a massa de  $M_2$  praticamente não afeta a formação de planetas na região coorbital, pois para praticamente todos os valores de massa observamos a distribuição dos valores de médias de corpos parecidos, mostrando que quase não existe variação de um valor de massa de  $M_2$  para outro.

Entretanto, observamos uma clara relação entre a média do número de corpos formados e o semi-eixo maior do corpo secundário. Vemos que até  $3ua$  todos os sistemas formaram planetas e a média de corpos formados fica em cerca de 1 corpo por simulação. Para valores de semi-eixo maior acima de  $3ua$  alguns casos passam a não formar nenhum planeta coorbital e a média de corpos formados cai conforme o semi-eixo maior aumenta.

Comparando os dois gráficos na Figura 14 podemos ver que para cada valor de semi-eixo maior no caso com  $3M_{\oplus}$  na região coorbital, a média do número de corpos formados é maior do que quando existem  $2M_{\oplus}$ .

Figura 14 – Gráficos semi-eixo maior versus massa do corpo secundário para cada caso de sistema coorbital simulado. A paleta de cores indica a média do número de corpos formados por simulação que foram considerados planetas. O gráfico superior apresenta os resultados para o caso onde a massa total dos planetesimais é  $2M_{\oplus}$ , e o gráfico inferior para o caso com  $3M_{\oplus}$ .



fonte: Produção da autora (2019).

Com estas informações podemos concluir que é mais fácil formar planetas co-orbitais quando a órbita do corpo secundário é  $\leq 3ua$  e quando existe mais massa disponível para acreção na região coorbital, independente da massa do corpo secun-

dário. Desta forma determinamos em qual a região de um sistema é mais provável existirem planetas terrestres coorbitais.

#### 4.2.2 Massa dos Planetas Formados

Além de saber qual é a melhor região para a formação de um planeta coorbital, queremos saber também se é possível encontrar um planeta similar à Terra dentro das regiões descritas como sendo mais propensas à formação de planetas coorbitais.

Como em alguns casos foram formados muitos planetas coorbitais, decidimos analisar qual seria a maior massa possível para cada um dos casos simulados. Os resultados estão apresentados na Figura 15.

Nela vemos que a maior parte dos corpos formados possuem massas entre  $0.1M_{\oplus}$  e  $0.6M_{\oplus}$ , que são limites parecidos com os encontrados por Beaugé et. al. (2007). Mais uma vez notamos que a massa de  $M_2$  não tem uma grande influência na formação de planetas coorbitais.

Comparando os gráficos da Figura 15 observamos que quando existem  $3M_{\oplus}$  inicialmente na região coorbital é possível formar corpos com pelo menos  $1M_{\oplus}$ . Neste caso 21 planetas formados possuem massas iguais ou superiores à da Terra, o que já não acontece quando a massa total disponível na região coorbital é igual a  $2M_{\oplus}$ , onde foi possível formar somente 8 planetas com massas iguais ou maiores que  $1M_{\oplus}$ .

Dos casos estudados vemos que um sistema precisa estar no máximo até  $0.5ua$  e ter no mínimo  $3M_{\oplus}$  em planetesimais na região coorbital, ou ter um semi-eixo maior de até  $0.3ua$  e  $2M_{\odot}$  na região coorbital para que seja possível a formação de um planeta troiano como a Terra.

Logo é possível ver que quanto menor  $a_2$ , menos massa na região coorbital é necessária para formar um corpo com  $1M_{\oplus}$ . Em contrapartida conforme o  $a_2$  aumenta passa a ser cada vez mais difícil formar corpos com massas próximas a da Terra.

A fim de obter uma equação que pudesse expressar a massa média que é possível ser formada em um planeta coorbital fizemos análise da sua dependência com a massa disponível na região coorbital e com o semi-eixo maior do corpo secundário. Notamos na Figura 16 e na Figura 17 que as curvas para os diferentes valores de massa de  $M_2$  não são bem comportadas, entretanto a média é uma curva bem suave.

A partir delas pudemos encontrar a seguinte equação aproximada:

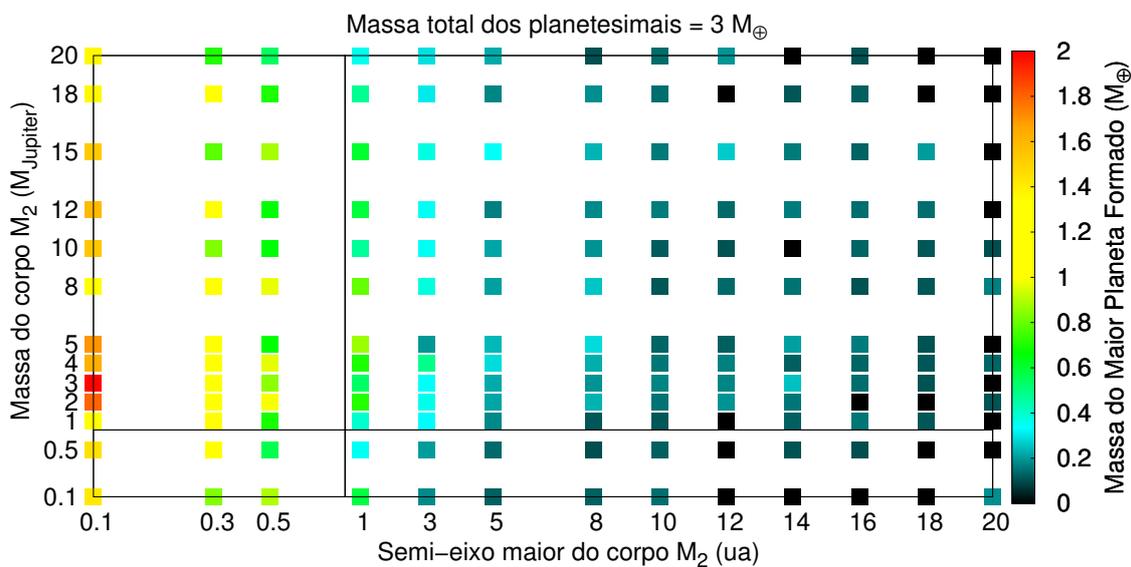
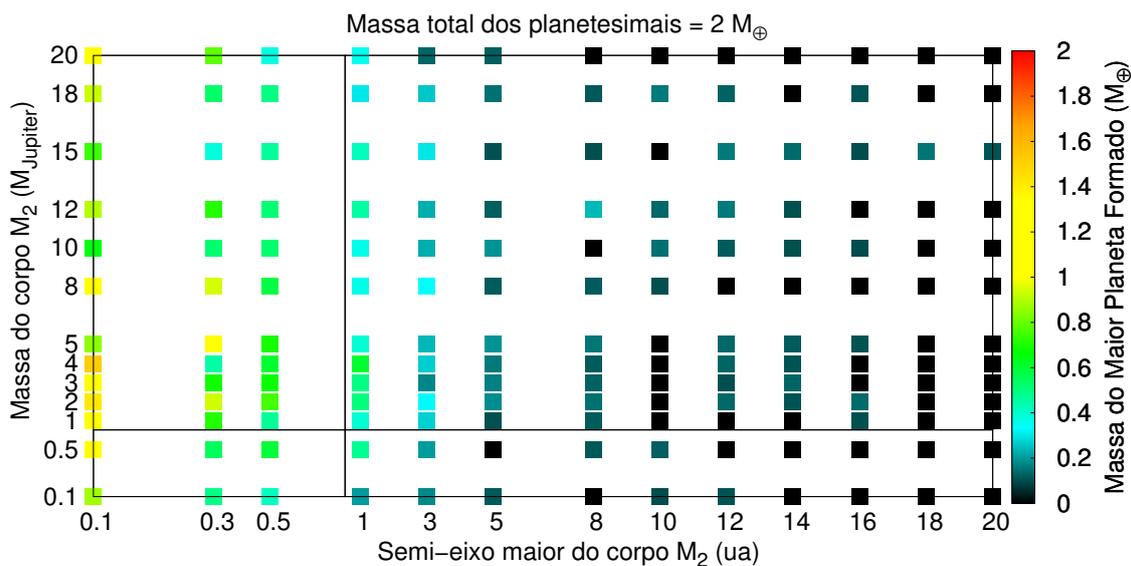
$$M_3 = \frac{0.175M_{inicial}}{\sqrt{a_2}}, \quad (1)$$

sendo  $M_3^{medio}$  a massa do planeta coorbital formado,  $M_{inicial}$  é a massa inicial disponível para acreção na região coorbital e  $a_2$  o semi-eixo maior do corpo secundário.

Vemos na Figura 16 e na Figura 17 que esta equação expressa, com segurança, a massa média que um corpo pode ter ao se formar na região coorbital e, como esperado, não depende da massa do corpo secundário. Notamos também que os resultados obtidos por Beaugé et. al. (2007), representados pelo retângulo tracejado, estão contidos em nossos resultados mostrando que os estudos concordam entre si.

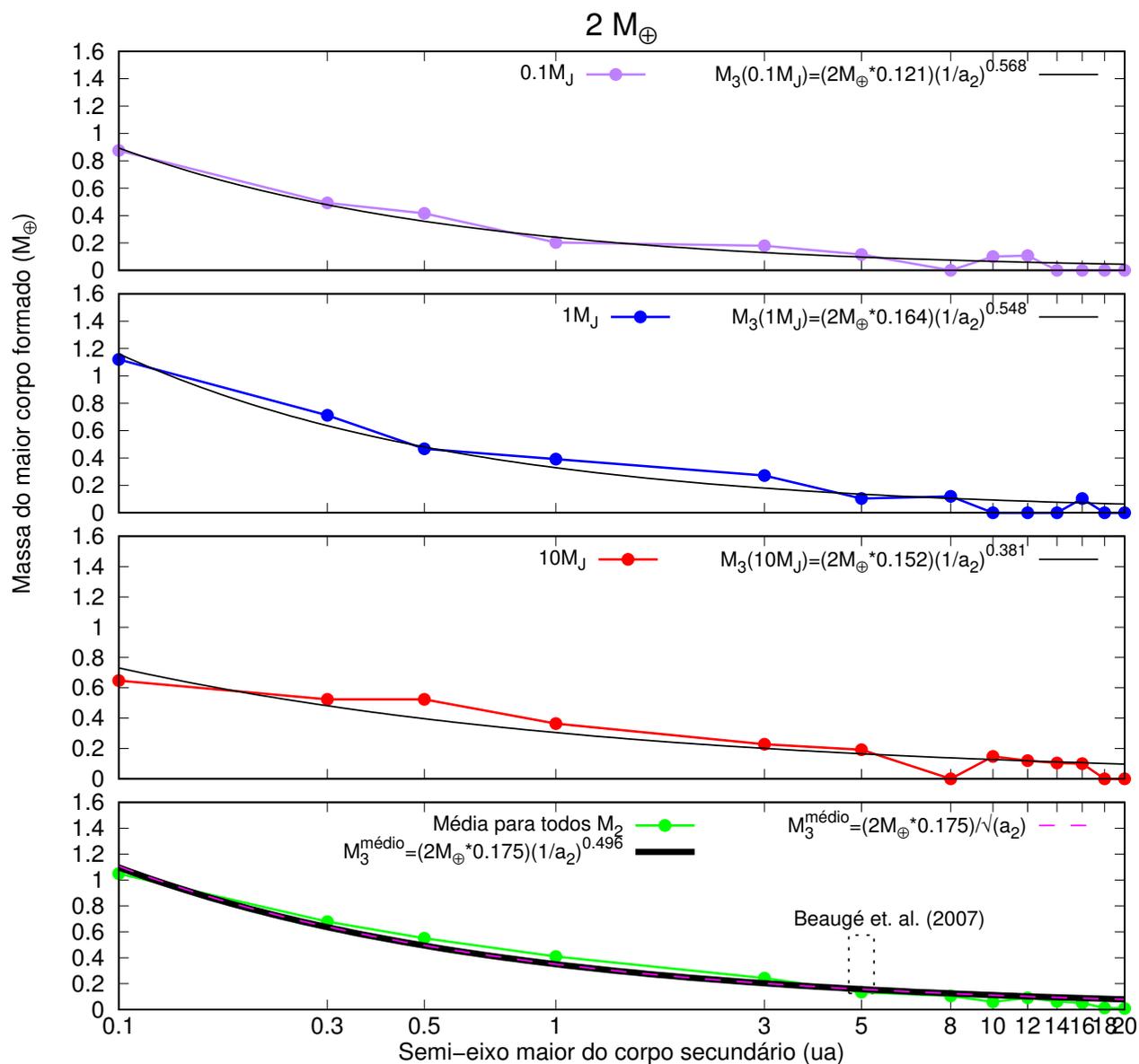
Concluimos que assim como a probabilidade de formação de planetas coorbitais diminui conforme  $a_2$  aumenta, a massa do planeta formado também diminui conforme o corpo secundário se distancia do corpo central. Então a maior chance de encontrar um planeta como a Terra na região coorbital de um sistema acontece quando o corpo secundário está em uma órbita bem próxima ao corpo central.

Figura 15 – Gráficos semi-eixo maior versus massa do corpo secundário. A paleta de cores indica a a massa do planeta mais massivo que foi formado em cada um dos caso de sistema coorbital simulado. O gráfico superior apresenta os resultados para o caso onde a massa total dos planetesimais é  $2M_{\oplus}$ , e o gráfico inferior para o caso com  $3M_{\oplus}$ .



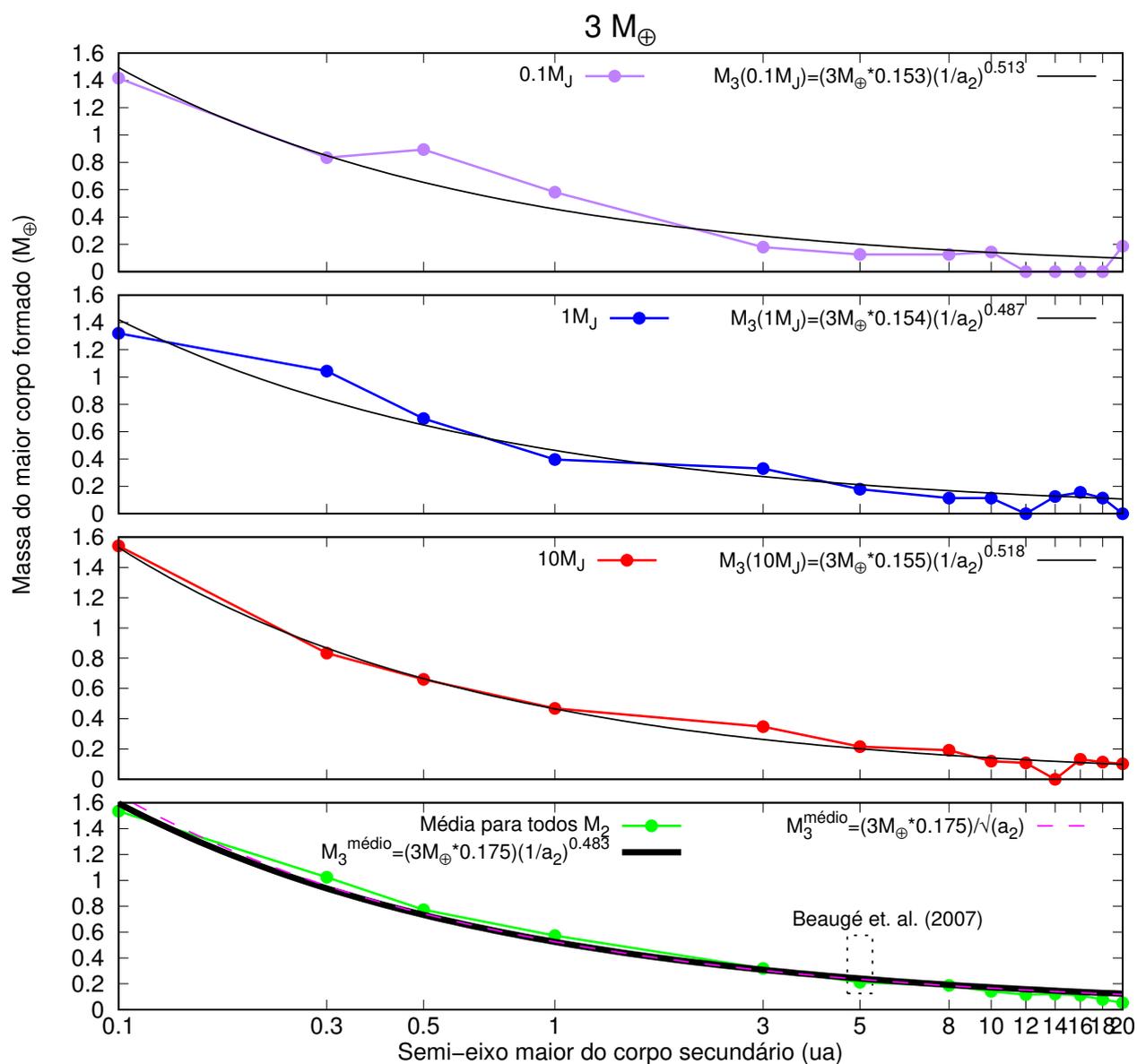
fonte: Produção da autora (2019).

Figura 16 – Gráficos semi-eixo maior versus massa do maior corpo formado para alguns casos de massa do corpo secundário para o caso com  $2M_{\oplus}$  na região coorbital. As curvas pretas indicam os ajustes das equações indicadas na legenda.



fonte: Produção da autora (2019).

Figura 17 – Gráficos semi-eixo maior versus massa do maior corpo formado para alguns casos de massa do corpo secundário para o caso com  $3M_{\oplus}$  na região coorbital. As curvas pretas indicam os ajustes das equações indicadas na legenda.



fonte: Produção da autora (2019).

### 4.2.3 Simulações Para Estudo Formação de Planetas Terrestres na Região Co-orbital Utilizando um Parâmetro Angular Diferente para Eliminação de Partículas

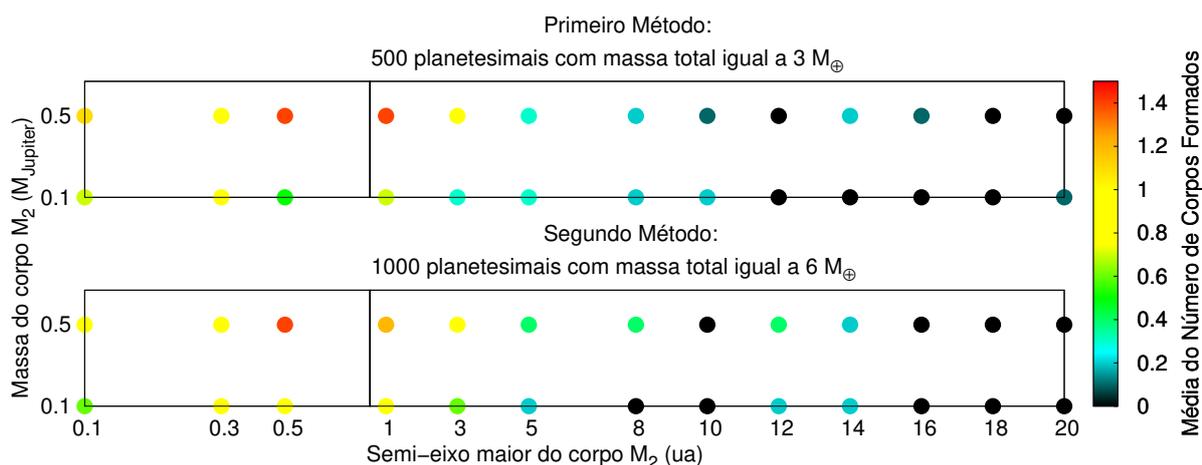
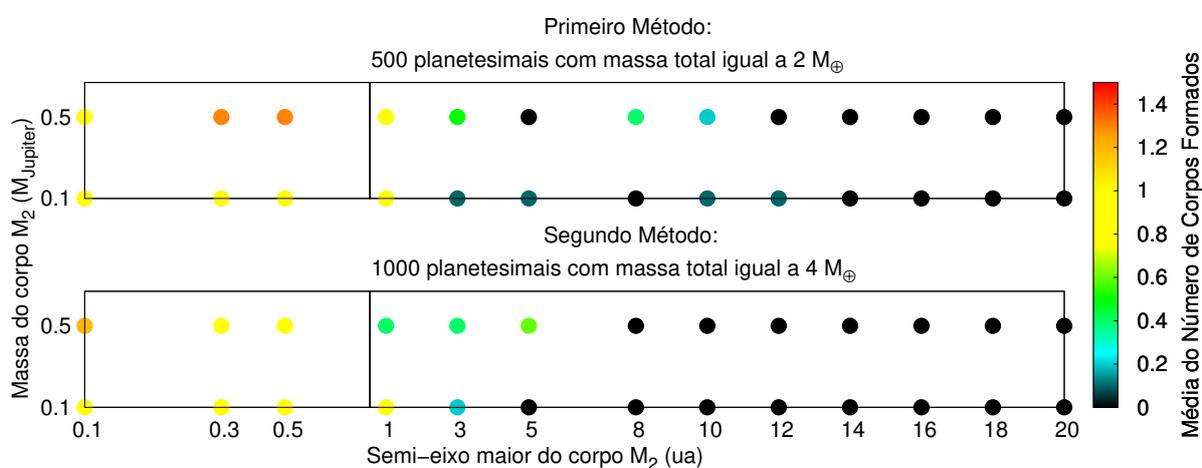
Como vimos na subseção 4.1.6, os resultados obtidos no estudo da região de estabilidade coorbital utilizando o segundo método para estudar os casos com  $M_2 < 1M_J$  concorda com os resultados obtidos utilizando o primeiro método. Com isso, decidimos fazer também algumas simulações para formação de planetas terrestres coorbitais utilizando os resultados obtidos como o segundo método, e então comparar com os obtidos com o primeiro método.

Para criar as condições iniciais das simulações nós utilizamos a mesma metodologia apresentada na subseção 3.3.2. Como neste caso a região coorbital é angularmente duas vezes maior do que a anterior, nós utilizamos o dobro do número de planetesimais (1000 corpos) e o dobro da massa total dos corpos ( $4$  e  $6 M_{\oplus}$ ), desta forma a densidade de planetesimais na região coorbital e suas massas individuais seriam mantidas iguais nos dois métodos utilizados. Os resultados obtidos estão sumarizados nas Figuras 18 e 19, que apresentam gráficos similares aos das Figuras 14 e 15, e que mostram a comparação entre os resultados obtidos com ambos os métodos para os casos estudados.

Observando as Figuras 18 e 19 notamos que não aparenta haver uma diferença significativa entre os resultados obtidos com os dois métodos. Ao olharmos para a Figura 18, no gráfico superior, vemos que a média do número de corpos formados para os casos com  $2M_{\oplus}$  e  $4M_{\oplus}$  permanece similar, sendo mais fácil formar corpos na região mais interna do sistema. Uma análise similar pode ser feita para o gráfico inferior da Figura 18, sendo  $3M_{\oplus}$  e  $6M_{\oplus}$  as massas totais dos planetesimais neste caso.

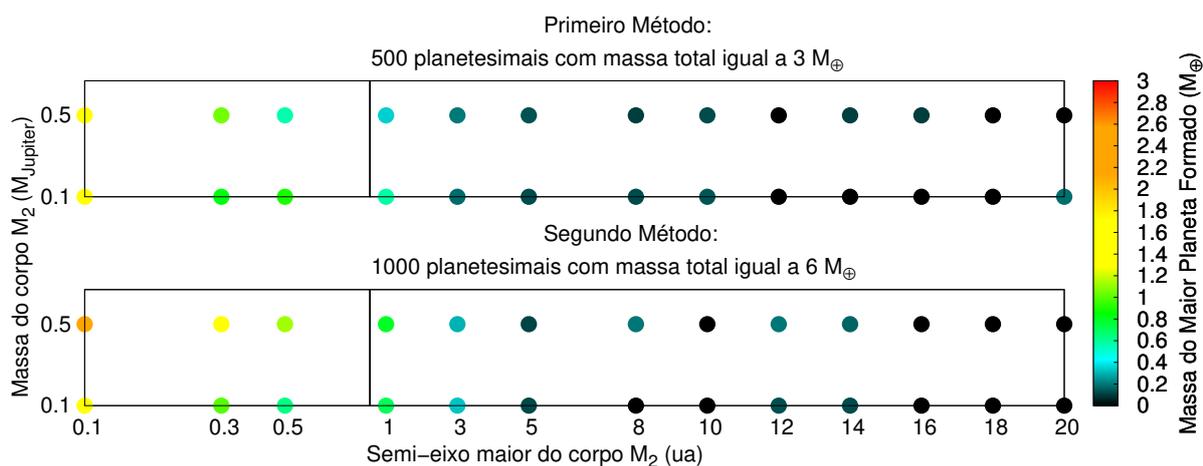
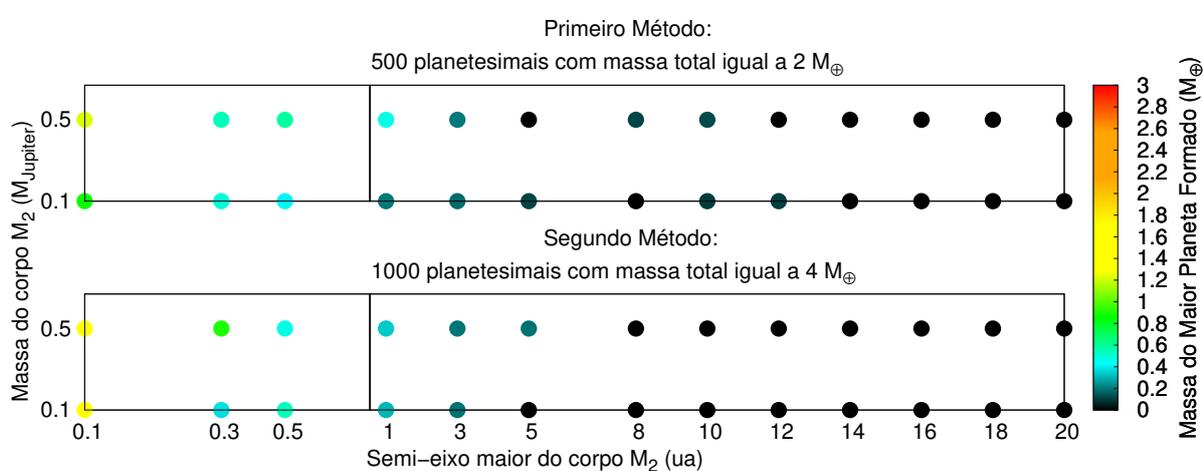
Analogamente podemos ver que esta conclusão também é válida para os gráficos superior e inferior da Figura 19, onde os pontos representam a massa do maior planeta formado em cada caso. É natural que hajam alguns pontos ligeiramente diferentes pois as condições iniciais não são exatamente iguais e a quantidade de simulações é bem menor, mas mesmo assim podemos notar que o comportamento dos resultados é muito parecido em ambos os métodos utilizados. Portanto, concluímos que ambos os métodos utilizados são válidos, logo o estudo feito neste trabalho utilizando o primeiro parâmetro angular para a eliminação de partículas pode ser utilizado com segurança e não gera uma diferença significativa nos resultados finais.

Figura 18 – Gráficos semi-eixo maior versus massa do corpo secundário para cada caso simulado. A paleta de cores indica a média do número de corpos formados por simulação que foram considerados planetas. O gráfico superior apresenta a comparação entre os resultados para o caso onde a massa total dos planetesimais é  $2M_{\oplus}$  no primeiro método e  $4M_{\oplus}$  no segundo método, e o gráfico inferior apresenta a comparação entre os resultados para o caso com  $3M_{\oplus}$  no primeiro método e  $6M_{\oplus}$  no segundo.



fonte: Produção da autora (2019).

Figura 19 – Gráficos semi-eixo maior versus massa do corpo secundário. A paleta de cores indica a a massa do planeta mais massivo que foi formado em cada um dos casos simulados. O gráfico superior apresenta a comparação entre os resultados para o caso onde a massa total dos planetesimais é  $2M_{\oplus}$  no primeiro método e  $4M_{\oplus}$  no segundo método, e o gráfico inferior apresenta a comparação entre os resultados para o caso com  $3M_{\oplus}$  no primeiro método e  $6M_{\oplus}$  no segundo.



fonte: Produção da autora (2019).

## 5 COMENTÁRIOS FINAIS E CONCLUSÕES

Ao longo do trabalho encontramos alguns resultados interessantes. O primeiro resultado da parte de análise de estabilidade é o fato de o tamanho da região de estabilidade coorbital oscilar conforme a razão de massa  $\mu_2$  aumenta. Este parece ser um fenômeno real pois, além dos resultados apresentados neste trabalho, fizemos estudos anteriores utilizando outros dados e métodos e obtivemos sempre o mesmo comportamento. Nosso próximo passo será encontrar uma explicação para este fenômeno inesperado.

Outro dado importante que obtivemos foi o limite de razão de massa do corpo secundário  $\mu_2 \sim 7.87 \times 10^{-4}$  para que possam existir órbitas do tipo ferradura no sistema. Encontramos também duas novas equações empíricas para achar os valores de mínima e máxima separação angular entre a região coorbital e o corpo secundário em função da massa do corpo secundário. Apesar de descrever o mesmo parâmetro que a equação encontrada por Yoder et. al. (1983) esta é bem mais simples de ser resolvida.

Na parte de formação planetária vimos que Beaugé et. al. (2007) tentou formar um planeta do tipo Terra coorbital a um sistema Sol-Júpiter distribuindo entre 1 e  $3M_{\oplus}$  na região coorbital e os corpos formados por ele tinham de 0.3 a  $0.6M_{\oplus}$ . Mesmo utilizando condições iniciais e integradores diferentes dos dele, os nossos resultados condizem com os obtidos pelos autores, sendo nosso trabalho muito mais abrangente.

Vimos que a massa do corpo secundário desempenha um papel importante na determinação dos limites angulares da região de estabilidade coorbital, porém não afeta a formação de planetas na mesma. Significa que a razão de massa do sistema não influencia fortemente o processo de acreção.

Já o semi-eixo maior do corpo secundário juntamente com a quantidade de massa disponível na região coorbital são os parâmetros chave do problema. É a combinação deles que determina se será possível ou não formar um planeta na região coorbital e qual será a massa deste planeta. Para isso encontramos uma simples equação que dá a média da massa do planeta formado em função apenas do semi-eixo maior do corpo secundário e da massa inicial na região coorbital.

Quanto menor o semi-eixo maior do corpo secundário, maior é a probabilidade de formar um planeta como a Terra, e isso se deve provavelmente devido ao fato de que uma região de estabilidade coorbital pequena favorece a colisão e a acreção entre os

planetesimais.

Após todos os estudos feitos podemos concluir que, ao contrário do que dizem os outros trabalhos, é possível sim formar um planeta com massa igual ou maior que a da Terra coorbital a um corpo muito massivo, como por exemplo um planeta gigante ou uma anã marrom.

Nossos estudos apresentam resultados muito mais gerais do que os existente atualmente, podendo ser usados para estudo de formação de corpos em regiões coorbitais a planetas, estrelas satélites, e quaisquer outros corpos cujas razões de massa respeitem o limite de Gascheau.

Nossos resultados poderão também ajudar nas futuras missões de busca por exoplanetas coorbitais. Sabemos que grande parte dos exoplanetas encontrados são do tipo Hot Jupiters (planetas do tipo Júpiter que orbitam muito próximos à estrela) e esta é exatamente a configuração que nós descobrimos ser a mais provável para a formação de um exoplaneta terrestre coorbital. Então agora sabemos que há a possibilidade de existir um planeta similar à Terra coorbital a um Hot Jupiter possivelmente localizado dentro da zona habitável de seu sistema.

## REFERÊNCIAS

- ARMITAGE, P. J. Lecture notes on the formation and early evolution of planetary systems. **arXiv preprint astro-ph/0701485**, 2007.
- BEAUGÉ, C. et al. Co-orbital terrestrial planets in exoplanetary systems: a formation scenario. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 463, n. 1, p. 359–367, 2007.
- BROWN, E. W. Orbits, periodic, on a new family of periodic orbits in the problem of three bodies. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 71, p. 438–454, 1911.
- CHAMBERS, J. E. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Blackwell Science Ltd Oxford, UK, v. 304, n. 4, p. 793–799, 1999.
- CHANUT, T.; WINTER, O.; TSUCHIDA, M. Nebular gas drag and co-orbital system dynamics. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 481, n. 2, p. 519–527, 2008.
- CHIANG, E.; LITHWICK, Y. Neptune trojans as a test bed for planet formation. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 628, n. 1, p. 520, 2005.
- CRESSWELL, P.; NELSON, R. On the evolution of multiple protoplanets embedded in a protostellar disc. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 450, n. 2, p. 833–853, 2006.
- CRESSWELL, P.; NELSON, R. P. Three-dimensional simulations of multiple protoplanets embedded in a protostellar disc. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 482, n. 2, p. 677–690, 2008.
- CRESSWELL, P.; NELSON, R. P. On the growth and stability of trojan planets. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 493, n. 3, p. 1141–1147, 2009.
- DERMOTT, S. F.; MURRAY, C. D. The dynamics of tadpole and horseshoe orbits: I. theory. **Icarus**, Elsevier, v. 48, n. 1, p. 1–11, 1981.
- FUNK, B. et al. On the stability of possible trojan planets in the habitable zone: an application to the systems hd 147513 and hd 210277. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 423, n. 4, p. 3074–3082, 2012.
- GARFINKEL, B. Theory of the trojan asteroids. i. **The Astronomical Journal**, v. 82, p. 368–379, 1977.

- IZIDORO, A.; WINTER, O.; TSUCHIDA, M. Co-orbital satellites of saturn: congenital formation. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, The Royal Astronomical Society, v. 405, n. 4, p. 2132–2140, 2010.
- KASTING, J. F.; WHITMIRE, D. P.; REYNOLDS, R. T. Habitable zones around main sequence stars. **Icarus**, Elsevier, v. 101, n. 1, p. 108–128, 1993.
- KIEFER, F. et al. Two families of exocomets in the  $\beta$  pictoris system. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 514, p. 462–464, out. 2014.
- KINOSHITA, H.; NAKAI, H. Quasi-satellites of jupiter. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, Springer, v. 98, n. 3, p. 181–189, 2007.
- LAUGHLIN, G.; CHAMBERS, J. E. Extrasolar trojans: the viability and detectability of planets in the 1: 1 resonance. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 124, n. 1, p. 592, 2002.
- Lillo-Box, J. et al. The troy project: Searching for co-orbital bodies to known planets - i. project goals and first results from archival radial velocity. **Astronomy & Astrophysics**, v. 609, p. A96, 2018.
- MAYOR, M.; QUELOZ, D. A jupiter-mass companion to a solar-type star. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 378, n. 6555, p. 355, 1995.
- MORBIDELLI, A. et al. Chaotic capture of jupiter's trojan asteroids in the early solar system. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 435, n. 7041, p. 462, 2005.
- MORO-MARTIN, A. et al. Extrasolar kuiper belt dust disks. **The Solar System Beyond Neptune**, University of Arizona Press, p. 465, 2008.
- MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar system dynamics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1999.
- NAMOUNI, F.; CHRISTOU, A.; MURRAY, C. Coorbital dynamics at large eccentricity and inclination. **Physical review letters**, APS, v. 83, n. 13, p. 2506, 1999.
- SCHNEIDER, J. **The Extrasolar Planets Encyclopaedia**. <<http://exoplanet.eu/catalog.php>>.
- SCHWARZ, R. et al. Stability of fictitious trojan planets in extrasolar systems. **Astronomische Nachrichten**, v. 328, n. 8, p. 785–788, 2007.
- THOMMES, E. W. A safety net for fast migrators: Interactions between gap-opening and sub-gap-opening bodies in a protoplanetary disk. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 626, n. 2, p. 1033, 2005.

TREFFENSTÄDT, L. L.; MOURÃO, D. C.; WINTER, O. C. Formation of the janus-epimetheus system through collisions. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 583, p. A80, 2015.

WEIDENSCHILLING, S. Aerodynamics of solid bodies in the solar nebula. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, The Royal Astronomical Society, v. 180, n. 2, p. 57–70, 1977.

WIEGERT, P. A.; INNANEN, K. A.; MIKKOLA, S. An asteroidal companion to the earth. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 387, n. 6634, p. 685, 1997.

WISDOM, J. The resonance overlap criterion and the onset of stochastic behavior in the restricted three-body problem. **The Astronomical Journal**, v. 85, p. 1122–1133, 1980.

WOLSZCZAN, A.; FRAIL, D. A. A planetary system around the millisecond pulsar psr1257+ 12. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 355, n. 6356, p. 145, 1992.

YODER, C. et al. Theory of motion of saturn's coorbiting satellites. **Icarus**, Elsevier, v. 53, n. 3, p. 431–443, 1983.

## APÊNDICE A – ROTINA *MXX\_EJEC* DO PACOTE MERCURY ADAPTADA

```

C%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
C%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
C
C      MXX_EJEC.FOR      (ErikSoft   2 November 2000)
C
C%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
C%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
C
C Author: John E. Chambers
C
C Calculates the distance from the central body of each object
C with index
C I >= I0. If this distance exceeds RMAX, the object is flagged
C for ejection
C (STAT set to -3). If any object is to be ejected, EJFLAG =
C 1 on exit,
C otherwise EJFLAG = 0.
C
C Also updates the values of EN(3) and AM(3)---the change in energy and
C angular momentum due to collisions and ejections.
C
C
C N.B. All coordinates must be with respect to the central body!!
C ===
C
C-----
C-----
C
C      subroutine mxx_ejec (time,tstart,rmax,en,am,jcen,i0,nbod,
C      nbig,
C      % m,x,v,s,stat,id,opt,ejflag,outfile,mem,lmem,rmin,lpnt,
C      % masslim,nplan)
C
C      implicit none
C      include 'mercury.inc'
C
C Input/Output
C      integer i0, nbod, nbig, stat(nbod), opt(11), ejflag
C      integer lmem(NMESS),lpnt ,nplan
C      real*8 time, tstart, rmax, en(3), am(3), jcen(3),rmin,ma
C      sslim
C      real*8 m(nbod), x(3,nbod), v(3,nbod), s(3,nbod)
C      character*80 outfile, mem(NMESS)
C      character*8 id(nbod)
C
C
C Local
C      integer j, year, month,meionsml,inicial
C      real*8 r2,rmax2,t1,e,l,rmin2,meiopi, angulo
C      character*38 flost
C      character*6 tstring

```

```

c
c-----
c-----
c
  if (i0.le.0) i0 = 2

  ejflag = 0
  rmax2 = rmax * rmax
  rmin2 = rmin * rmin

c
c Calculate initial energy and angular momentum
  call mxx_en (jcen,nbod,nbig,m,x,v,s,e,l)
c
c Flag each object which is ejected, and set its mass to zero

  if (opt(11).eq.1) then

1234  do j = i0, nbod
      angulo = datan2(x(2,j),x(1,j))-datan2(x(2,2),x(1,2))
      if (angulo.le.(-PI)) angulo=angulo+2.d0*PI
      if (angulo.ge.(PI)) angulo=angulo-2.d0*PI
      r2 = x(1,j)*x(1,j) + x(2,j)*x(2,j) + x(3,j)*x(3,j)

c If Lagrangian point is L4 then the particle's angle minus t
c he planet's angle must be between 0 and PI, otherwise it will
c be ejected
      if (lpnt.eq.4) then
      if ((angulo.gt.-PI).and.(angulo.lt. 0)) then
        write (*,*) nbod, nbig, lpnt
        ejflag = 1
        stat(j) = -3
        m(j) = 0.d0
        s(1,j) = 0.d0
        s(2,j) = 0.d0
        s(3,j) = 0.d0

c
c Write message to information file
20  open (23,file=outfile,status='old',access='append',
err=20)
      if (opt(3).eq.1) then
        call mio_jd2y (time,year,month,t1)
        flost = '(1x,a8,a,i10,1x,i2,1x,f8.5,a) '
        write (23,flost) id(j),mem(68)(1:lmem(68)),year,mo
nth,t1,"C"
      else
        if (opt(3).eq.3) then
          t1 = (time - tstart) / 365.25d0
          tstring = mem(2)
          flost = '(1x,a8,a,f18.7,a,a8) '
        else

```

```

        if (opt(3).eq.0) t1 = time
        if (opt(3).eq.2) t1 = time - tstart
        tstring = mem(1)
        flost = '(1x,a8,a,f18.5,a,a8)'
    end if
    write (23,flost) id(j),mem(68)(1:lmem(68)),t1,tstr
ing,"C"
    end if
    close (23)

```

```

else if ((r2.gt.rmax2).or.(r2.lt.rmin2)) then
    if (stat(j) .eq. -3) go to 1234
    write (*,*) nbod
    ejflag = 1
    stat(j) = -3
    m(j) = 0.d0
    s(1,j) = 0.d0
    s(2,j) = 0.d0
    s(3,j) = 0.d0

```

c Write message to information file

```

30    open (23,file=outfile,status='old',access='append',
err=30)

```

```

    if (opt(3).eq.1) then
        call mio_jd2y (time,year,month,t1)
        flost = '(1x,a8,a,i10,1x,i2,1x,f8.5)'
        write (23,flost) id(j),mem(68)(1:lmem(68)),year,mo
nth,t1

```

```

    else

```

```

        if (opt(3).eq.3) then
            t1 = (time - tstart) / 365.25d0
            tstring = mem(2)
            flost = '(1x,a8,a,f18.7,a)'
        else
            if (opt(3).eq.0) t1 = time
            if (opt(3).eq.2) t1 = time - tstart
            tstring = mem(1)
            flost = '(1x,a8,a,f18.5,a)'
        end if
        write (23,flost) id(j),mem(68)(1:lmem(68)),t1,tstr
ing

```

```

    end if

```

```

    close (23)

```

```

end if

```

c If Lagrangian point is L5 then the particle's angle minus the planet's angle must be between 0 and -PI, otherwise it will be ejected

```

else if (lpnt.eq.5) then
    if ((angulo.lt.PI).and.(angulo.gt. 0)) then
        write (*,*) nbod, nbig, lpnt
        ejflag = 1
        stat(j) = -3

```

```

        m(j) = 0.d0
        s(1,j) = 0.d0
        s(2,j) = 0.d0
        s(3,j) = 0.d0
c
c Write message to information file
  40      open (23,file=outfile,status='old',access='append',
err=40)
        if (opt(3).eq.1) then
            call mio_jd2y (time,year,month,t1)
            flost = '(1x,a8,a,i10,1x,i2,1x,f8.5,a)'
            write (23,flost) id(j),mem(68)(1:lmem(68)),year,mo
nth,t1,"C"
        else
            if (opt(3).eq.3) then
                t1 = (time - tstart) / 365.25d0
                tstring = mem(2)
                flost = '(1x,a8,a,f18.7,a,a8)'
            else
                if (opt(3).eq.0) t1 = time
                if (opt(3).eq.2) t1 = time - tstart
                tstring = mem(1)
                flost = '(1x,a8,a,f18.5,a,a8)'
            end if
            write (23,flost) id(j),mem(68)(1:lmem(68)),t1,tstr
ing,"C"
        end if
        close (23)

    else if ((r2.gt.rmax2).or.(r2.lt.rmin2)) then
        if (stat(j).eq. -3) go to 1234
        write (*,*) nbod
        ejflag = 1
        stat(j) = -3
        m(j) = 0.d0
        s(1,j) = 0.d0
        s(2,j) = 0.d0
        s(3,j) = 0.d0

c Write message to information file
  50      open (23,file=outfile,status='old',access='append',
err=50)
        if (opt(3).eq.1) then
            call mio_jd2y (time,year,month,t1)
            flost = '(1x,a8,a,i10,1x,i2,1x,f8.5)'
            write (23,flost) id(j),mem(68)(1:lmem(68)),year,mo
nth,t1
        else
            if (opt(3).eq.3) then
                t1 = (time - tstart) / 365.25d0
                tstring = mem(2)
                flost = '(1x,a8,a,f18.7,a)'
            end if
        end if
    end if
end do

```

```

        else
            if (opt(3).eq.0) t1 = time
            if (opt(3).eq.2) t1 = time - tstart
            tstring = mem(1)
            flost = '(1x,a8,a,f18.5,a)'
            end if
            write (23,flost) id(j),mem(68)(1:lmem(68)),t1,tstr
ing
        end if
        close (23)
    end if

end if
end do
else
do j = i0, nbod
    r2 = x(1,j)*x(1,j) + x(2,j)*x(2,j) + x(3,j)*x(3,j)
    if (r2.gt.rmax2) then
        ejflag = 1
        stat(j) = -3
        m(j) = 0.d0
        s(1,j) = 0.d0
        s(2,j) = 0.d0
        s(3,j) = 0.d0
c
c Write message to information file
        60 open (23,file=outfile,status='old',access='append',
err=60)
        if (opt(3).eq.1) then
            call mio_jd2y (time,year,month,t1)
            flost = '(1x,a8,a,i10,1x,i2,1x,f8.5)'
            write (23,flost) id(j),mem(68)(1:lmem(68)),year,mo
nth,t1
        else
            if (opt(3).eq.3) then
                t1 = (time - tstart) / 365.25d0
                tstring = mem(2)
                flost = '(1x,a8,a,f18.7,a)'
            else
                if (opt(3).eq.0) t1 = time
                if (opt(3).eq.2) t1 = time - tstart
                tstring = mem(1)
                flost = '(1x,a8,a,f18.5,a)'
            end if
            write (23,flost) id(j),mem(68)(1:lmem(68)),t1,tstr
ing
        end if
        close (23)
    end if
end do
end if

```

```
C*****  
****  
C  
C If ejections occurred, update ELOST and LLOST  
  if (ejflag.ne.0) then  
    call mxx_en (jcen,nbod,nbig,m,x,v,s,en(2),am(2))  
    en(3) = en(3) + (e - en(2))  
    am(3) = am(3) + (l - am(2))  
  end if  
C*****  
****  
C  
C-----  
---  
  return  
  end  
C
```