

Augusto Enrique Rueda Chumbes

# Modelos não-lineares de dois campos e aplicações em cenários de mundos-brana

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Mestre em Física na área de Partículas e Campos

**Orientador: Prof. Dr. Marcelo Batista Hott**

Guaratinguetá

2009

Chumbes, Augusto Enrique Rueda  
C559m Modelos não-lineares de dois campos e aplicações em cenários de mundos-brana. / Augusto Enrique Rueda Chumbes. - Guaratinguetá : [s.n.], 2009.  
78f.: il.  
Bibliografia: f. 71-74

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2009.  
Orientador: Prof. Dr. Marcelo Batista Hott

1. Teoria quântica de campos I. Título

CDU 530.145

*AUGUSTO ENRIQUE RUEDA CHUMBES*

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
"MESTRE EM FÍSICA"

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

  
Prof. Dr. Marcelo Batista Hott  
Coordenador

*BANCA EXAMINADORA:*

  
Prof. Dr. MARCELO BATISTA HOTT  
Orientador / Unesp-Feg

  
Prof. Dr. DENIS DALMAZI  
Unesp-Feg

  
Prof. Dr. FABRÍCIO AUGUSTO BARONE RANGEL  
UNIFEI

*Julho de 2009*

# DADOS CURRICULARES

AUGUSTO ENRIQUE RUEDA CHUMBES

**NASCIMENTO** 08 / 08 / 1974 - **LIMA, PERU**

**FILIAÇÃO** Hernan Rueda Velasco  
Delia Emperatriz Chumbes Arias

**1994 / 2001** Curso de Graduação - Bacharelado em Física  
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática  
Universidad Nacional del Callao - UNAC, Lima Peru.

**2007 / 2009** Curso de Pós-Graduação em Física, nível Mestrado  
Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá  
Universidade Estadual Paulista - UNESP, Guaratinguetá - SP  
Brasil.

# DEDICATÓRIA

*Esta dissertação vai dedicada à memória de minha mãe  
**Delia Emperatriz.***

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por suas bênçãos e por proporcionar harmonia em minha vida; a minha mãe **Delia Imperatriz** por haver me ensinado a ter perseverança, coragem e saber enfrentar as dificuldades com calma e firmeza, a quem dedico esta dissertação de maneira especial; a meu pai, avós, tios, primos pelo aconchego profundo de amor e carinho; também agradeço a Angela pelo amor e carinho que me proporciona.

Saindo do âmbito familiar, agradeço a meu orientador, Professor Doutor Marcelo Batista Hott, pelo incentivo e pela formação que ele tem me proporcionado. Obrigado professor pela oportunidade de desenvolver este trabalho de mestrado.

Agradeço aos professores do grupo de partículas e campos da Unesp-Campus de Guaratinguetá. Professores Doutores : Antonio Soares de Castro, Alvaro de Souza Dutra, Denis Dalmazi e Marcelo Batista Hott, e ao Professor do departamento de Matemática Doutor Rodolpho Vilhena de Moraes, todos eles Professores formadores e amigos os quais me aconselharam e me orientaram nesta etapa do mestrado.

Agradeço aos meus amigos da República: João, Elias, Jarbas, André, Cleber, Leonardo, com quem compartilho uma boa amizade; aos meus conterrâneos peruanos, Benito, Elver, Carlos e Gretta, pela confiança e amizade.

Aos funcionários do curso de Pós-Graduação, pela convivência durante o tempo de trabalho: Christina, Elisa, Regina, Sidney e Adriano.

À Reitoria da Unesp, em especial ao Programa da Pós-Graduação em Física da Unesp-Campus de Guaratinguetá e a agência de fomento à formação de pessoal em nível superior CAPES pelo apoio financeiro 01/08/2007 ao 01/08/2009, e à Pró-Reitoria de Pós-Graduação pelo apoio financeiro parcial para minha participação no evento *“Fifth International School on Field Theory and Gravitation”*, ocorrido na cidade de Cuiabá - Mato Grosso.

Este trabalho contou com o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - **CAPES**

*“Minhas idéias levaram as pessoas a reexaminarem a física de Newton. Naturalmente alguém um dia irá reexaminar minhas próprias idéias. Se isto não acontecer haverá uma falha grosseira em algum lugar.”*

***Albert Einstein***

Chumbes, A. E. R.. **Modelos não-lineares de dois campos e aplicações em cenários de mundos-brana**. 2009. 78 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2009

## Resumo

Nesta dissertação analisamos modelos não-lineares envolvendo campos escalares em  $d + 1$  dimensões do espaço-tempo. Damos ênfase à questão da estabilidade das soluções clássicas de alguns modelos não-lineares que envolvem interação de dois campos escalares em  $1 + 1$  dimensões, onde mostramos nossa discordância com os argumentos de estabilidade desenvolvidos por Boya e Casahorran, e Bazeia et al., particularmente no que diz respeito ao desacoplamento das equações para as flutuações dos campos escalares. Revisamos a proposta de Bazeia et al. para eludir o argumento de Derrick. Observamos que a hamiltoniana de estabilidade expressa em  $d$  dimensões espaciais não pode ser fatorada como o produto de dois operadores adjuntos um do outro, portanto não podemos garantir que o operador hamiltoniano seja positivo definido. Por último construímos modelos efetivos de um campo escalar acoplado à gravidade em  $(4,1)$  dimensões do espaço-tempo. Estes modelos efetivos podem ser aplicados para o caso de cenários cosmológicos, onde o universo é tratado como imerso em uma parede de domínio em uma dimensão extra. O estudo das soluções destes modelos possui uma grande importância para a construção de cenários cosmológicos e melhor entendimento de nosso universo, como por exemplo a formação de branas espessas e a separação de branas.

**PALAVRAS - CHAVE:** Estabilidade das soluções solitônicas. Mundos-brana.

Chumbes, A. E. R.. **Nonlinear models of two fields and applications in scenarios of world-brane**. 2009. 78 f. Dissertation (Master in Physics) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2009

## Abstract

In this dissertation we analyze nonlinear models involving scalars fields in  $d + 1$  space-time dimensions. We put emphasis on the question of the stability of classical solutions of some models, where we show our disagreement with the arguments of stability developed by Boya and Casahorran and Bazeia et al.; particularly on the decoupling of the differential equations for the fluctuations of the scalars fields. We review the proposal of Bazeia et al. to circumvent the Derrick argument. In our analysis we observe that the Hamiltonian associated to the stability of the systems in  $d$  space dimensions can not be factorized as the product of two operators which are adjoint of each other, therefore the positiveness of the Hamiltonian operator is not guaranteed. Finally we build effective models with a scalar field coupled to gravity in  $(4.1)$  dimensions of the space-time. Those models, the effective model can be applied to cosmological scenarios, where our universe is taken as imbeded in a domain wall in an extra dimension. The study of the solutions of those models has a great importance for the construction of cosmological scenarios and for the better understanding of our universe, for example, the formation of thick branes and the separation of branes.

**KEYWORDS:** Stability of solitonic solution. World brane.

# Lista de Figuras

2.1	Potencial do modelo polinomial para os parâmetros: $\beta = 1$ e $\alpha = 1/2$ . . . .	23
2.2	A solução de tipo kink no modelo polinomial para: $\beta = 1$ , $\alpha = 1/2$ e $v = a$ . . . .	23
4.1	Potencial efetivo no caso $\lambda = \mu$ para $a = 1$ e $b = -1,001$ (linha sólida) e $b = -1,3$ (linha tracejada). . . . .	57
4.2	Perfis do tipo kink, para $a = 1$ e $b = -1,001$ correspondem às soluções de kink duplo (linha contínua) e $b = -1,2$ correspondente a um kink simples (linha tracejada). . . . .	58
4.3	Perfil do tipo kink para $a = 1$ e $d = 0,062499$ corresponde à solução do tipo kink duplo (linha sólida contínua) e para $d = 0,0615$ corresponde a uma solução tipo kink simples (linha tracejada) . . . . .	58
4.4	Perfil do defeito radial para $d = 2$ dimensões, para $b = -1,001$ (linha sólida contínua) e para $b = -1,1$ (linha tracejada). . . . .	61
4.5	Perfil do defeito radial para $d = 3$ dimensões, para $b = -1,001$ (linha sólida contínua) e para $b = -1,1$ (linha tracejada) . . . . .	61
4.6	Perfil das soluções radiais para $d = 2$ dimensões no modelo $\lambda = 4\mu$ , para $d = 0,06249$ (linha sólida contínua), e para $d = 0,0624$ (linha tracejada). . . .	62
4.7	Soluções de tipo kink para $d = 3$ dimensões, para $d = 0,062499$ (linha sólida contínua), e para $d = 0,0615$ (linha tracejada). . . . .	62
4.8	Fator de deformação avaliada para dois valores diferentes de $b$ , um deles perto o valor crítico $b = -1,001$ (linha sólida) e outro afastado do valor crítico $b = -1,3$ (linha fina) . . . . .	65
4.9	Potencial efetivo na equação efetiva de Schrödinger para flutuações da métrica avaliado para $b = -1,001$ correspondente à (linha sólida) e $b = -1,2$ correspondente à (linha fina). . . . .	67

4.10 Densidade de energia da matéria para o caso  $\lambda = \mu$  para  $a = 1$ ,  $b = -1,001$   
(linha fina) e para  $b = -1,3$  (linha sólida) . . . . . 68

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Aspectos gerais dos sólitons</b>	<b>16</b>
2.1	Soluções tipo kink . . . . .	18
2.2	Método de Bogomol'nyi . . . . .	19
2.2.1	Outros exemplos . . . . .	21
2.3	Estabilidade das soluções de Bogomol'nyi sob pequenas flutuações lineares	24
2.4	Argumento de Derrick . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Modelos de dois campos escalares interagentes</b>	<b>29</b>
3.1	Dois modelos com dois campos interagentes: equação de órbita e soluções clássicas . . . . .	30
3.2	Breve análise de estabilidade das soluções sob pequenas flutuações lineares	37
<b>4</b>	<b>Defeitos e campos escalares em d dimensões</b>	<b>45</b>
4.1	Defeitos topológicos em mais dimensões . . . . .	45
4.1.1	Extensão para modelos com dois campos escalares . . . . .	50
4.2	Modelos com um campo escalar construídos a partir de um modelo com dois campos interagentes . . . . .	53
4.2.1	Casos particulares . . . . .	56
4.2.2	Modelos de campos escalares em mais de uma dimensão . . . . .	60
4.3	Aplicações em cenário de mundos-brana . . . . .	63
4.3.1	Estabilidade e modos zero . . . . .	65

<b>5</b>	<b>Conclusões e comentários</b>	<b>69</b>
<b>A</b>	<b>Operadores não-adjuntos</b>	<b>75</b>
<b>B</b>	<b>Equações de movimento</b>	<b>77</b>

# Capítulo 1

## Introdução

As estruturas solitônicas tipo kink aparecem em meios cuja descrição dinâmica se dá em termos de equações diferenciais não-lineares. O comportamento não-linear desempenha um papel fundamental na obtenção dessas estruturas. Um sóliton por definição é uma estrutura tipo onda solitária que se propaga sem perder suas propriedades ao longo do tempo, mesmo que ocorram processos de colisão ao longo do seu caminho. Ademais o nome de sóliton será adotado também para o caso das soluções independentes do tempo, o qual é amplamente estudada na literatura [2]-[13], [35], [36].

Entre as décadas dos 60 e 70, cientistas usaram modelos não-lineares para identificar estruturas solitônicas com partículas. Na atualidade, sóliton do tipo paredes magnéticas têm ganhado espaço na Física da Matéria Condensada, e no estudo das branas mais recentemente, têm se mostrado bastante útil no contexto de uma teoria de unificação das forças fundamentais denominada Teoria das Supercordas bem como no contexto da Cosmologia.

Os novos modelos cosmológicos para nosso universo são construídos para a examinar os efeitos físicos das dimensões extras. Esta nova forma de entender a estrutura e evolução do universo é conhecida como *cosmologia de branas*, esta é caracterizada por estarmos vivendo em uma fatia (uma membrana) de um espaço-tempo com dimensões extras, onde a gravidade pode viajar livremente através dessas dimensões extras. Portanto, pensaríamos que apenas usando sinais gravitacionais podemos perceber a existência de tais dimensões. Nesse modelo cosmológico, basta que a gravidade esteja de alguma forma confinada a um espaço suficientemente restrito em torno da brana para que não haja violações da lei de Newton até uma escala de 1mm. De fato, recentemente, mostrou-se que, se as dimensões forem o suficientemente curvadas para o confinamento da gravidade perto da membrana, eles podem não ser compactas, e podem ser infinitas. Mesmo assim, que tais

dimensões sejam infinitas, como a gravidade penetra muito pouco nas dimensões extras, não podemos utilizar hoje sinais gravitacionais para perceber essa existência.

Um modelo importante descrevendo uma dimensão extra foi proposto por Lisa Randall e Raman Sundrum [42]. Eles consideraram uma só dimensão extra e que pode ser infinita. O argumento que mostram é que a tal dimensão seja curva o suficiente como para confinar a gravidade por perto da brana [1]. Mas sendo assim, hoje não seria possível utilizar sinais gravitacionais para percebermos a dimensão extra. Na cosmologia de mundos-brana, as sinais gravitacionais encontrariam atalhos através das dimensões extras suficientemente efetivos para que seu alcance fosse maior que a fração do universo observável, levando desta forma informação entre pedaços não conectados por sinais de luz.

Organizamos esta dissertação da seguinte maneira. No Capítulo 2 descrevemos os aspectos gerais dos sólitons. Apresentamos o estudo da estabilidade de soluções de Bogomol'nyi sob pequenas flutuações lineares, e complementamos nosso estudo de estabilidade com o argumento de Derrick [22], [38], [49] e [12], mostrando que as soluções clássicas são estáveis somente para uma dimensão.

No capítulo 3 discutimos a estabilidade linear para dois campos escalares. Estes estudos iniciam com Rajaraman [44, 45], quem desenvolveu um método para encontrar soluções solitônicas exatas, usando o método de tentativa de órbita para desacoplar dois campos escalares, estabelecendo algumas restrições entre seus parâmetros onde pode encontrar-se estabilidade. Este trabalho foi seguido e desenvolvido por Boya e Casahorram em [15], onde desenvolve os cálculos de desacoplamento dos campos escalares. Posteriormente uma análise de estabilidade daquele modelo foi feita por Bazeia et al. [5] e confrontada com a análise desenvolvida em [15]. Mostramos nestes dois casos de tentativa de desacoplar os campos escalares uma discordância com respeito aos critérios utilizados na forma de diagonalizar e desacoplar os campos escalares. Apresentamos os argumentos pelos quais divergimos dos critérios de estabilidade utilizados em [15], [5].

As implicações cosmológicas da quebra espontânea de simetria foram apontadas inicialmente por Kirzhnits [37], posteriormente por Weinberg [50], que pesquisou sobre a possibilidade de ter formações de paredes de domínio na transição de fase no universo primordial. Everett e Zel'dovich [52] foram os primeiros a considerar quantitativamente as implicações potenciais das paredes de domínio, considerando os efeitos gravitacionais e sua interação com a matéria.

No capítulo 4 discutimos os modelos com dois campos interagentes, em  $d > 1$  dimensões espaciais, onde encontramos soluções topológicas em dimensões mais altas, evitando o teorema de Derrick. Este procedimento foi desenvolvido por Bazeia et al. [12],

e será estendido para análise em dois campos onde analisamos as flutuações ao redor das soluções clássicas. Apresentamos também exemplos como é o caso do Modelo- $p$  sugerido em [12], onde observamos que é instável para certos valores do parâmetro  $p$ , mostrando ter alguma certa discordância com a teoria supersimétrica. Neste modelo em menção, notamos particularmente que o operador hamiltoniano não pode ser expresso como o produto de dois operadores adjuntos um do outro, portanto não podemos garantir que o operador  $H$  seja positivo definido, a menos que trabalhemos em uma dimensão espacial. Nossa observação está feita no apêndice A.

Um ponto de grande interesse nesta dissertação é construir modelos não-lineares com um único campo escalar e que apresenta estruturas topológicas deformáveis. Estes modelos são construídos a partir de modelos de dois campos escalares interagentes. Um destes modelos em particular será aplicado em cenários de mundos-brana, e pode ser usado para descrever a separação das branas finas, como foi mostrado na referência [18]. Observamos que as propriedades do potencial no modelo efetivo são controláveis através da mudança contínua do parâmetro  $b$  associada às soluções clássicas do sistema, permitindo analisar as deformações geométricas do espaço e a localização de gráviton na brana.

Finalmente no Capítulo 5 encerramos com as conclusões e as perspectivas desta dissertação.

# Capítulo 2

## Aspectos gerais dos sólitons

Neste capítulo introduzimos as idéias fundamentais sobre os sólitons, discutimos suas características. Os sólitons representam configurações de campo com energia finita e localizada que se deslocam sem mudança de forma nem diminuição de velocidade. Essas ondas aparecem tipicamente em teorias de campos não-lineares [38] e foram discutidas originalmente por J. Scott Russell em 1844, que assim relatou seu primeiro contato com o fenômeno, ocorrido em agosto de 1834: *“Eu estava observando o movimento de um barco, que era puxado rapidamente ao longo de um canal estreito por um par de cavalos, quando o barco parou de repente - mas não a massa de água no canal que ele havia posto em movimento; esta acumulou-se ao redor da proa do barco num estado de violenta agitação e, em seguida, deixando-o repentinamente para trás, rolou para frente a grande velocidade, assumindo a forma de uma grande elevação solitária, um monte de água arredondado, suave e bem definido, que continuou seu curso ao longo do canal aparentemente sem mudança de forma ou diminuição da velocidade. Eu a segui a cavalo e a alcancei ainda rolando a uma velocidade de umas oito ou nove milhas por hora, preservando seu contorno original de uns trinta pés e de comprimento por um pé a um pé e meio de altura. Sua altura diminuiu gradualmente e, depois de uma perseguição por uma ou duas milhas, eu a perdi nos meandros do canal”*. Referência [40].

O relato feito por Scott Russell foi a primeira publicação sobre este tipo de fenômeno, que o próprio autor denominou como onda de translação; considerada como uma entidade dinâmica auto-suficiente, própria da hidrodinâmica. Estas ondas de traslação, diferente das ondas de choque é regular em todas partes, sem mostrar singularidade. A onda solitária não é dispersiva, e estável, portanto é diferente de qualquer pacote de onda formado por ondas planas [38]. Por outro lado, a questão na época era saber se tais soluções estáveis, não-singulares e não-dispersivas, poderiam existir em outros domínios da física, fora da hidrodinâmica, como é indicado na referência [21]. Em meados de 1960,

a onda solitária como foi denominada por Scott Russell, já era considerada de grande importância no estudo de alguns sistemas não-lineares. As ondas não-lineares hoje em dia aparecem em diversas áreas de investigação, tais como, Física de Partículas Elementares, Física de Plasma, Física de Matéria Condensada, em modelos da Biologia, Química e outros, tal como apontadas nas referências [32], [17], [49].

Em contexto geral, as ondas solitárias e sólitons, referem-se a certas soluções de onda não-lineares.

Para expressar as propriedades destas ondas; consideremos as mais simples destas equações de onda relativistas, á chamada de equação de D'Lambert, onde podemos expressar:

$$\square\phi = \partial^\mu\partial_\mu\phi = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi(x, t) = 0, \quad (2.1)$$

onde  $\phi(x, t)$  é um campo escalar real expressa em  $(1 + 1)$  dimensões do espaço-tempo, e  $c$  representa-a velocidade da luz no vácuo. As propriedades desta equação são conhecidas, ele apresenta comportamento tipo linear e não apresenta dispersão alguma.

Um conjunto completo das soluções expressas em (2.1) é localizado e bem comportado, pelo que podemos escrever como

$$f(x - ct) = \int dk(b_1 \cos(kx - wt) + b_2 \text{sen}(kx - wt)), \quad (2.2)$$

onde  $f(x, ct)$ , representa um pacote de onda que desloca-se da esquerda para direita sem modificar sua forma.

Observemos que o acréscimo de um termo mais simple (como uma constante) na equação (2.1) destroi sua comportamento linear e sua não-dispersividade. Por exemplo, consideremos a equação de Klein-Gordon em  $(1+1)$  dimensões,

$$(\square + m^2c^2)\phi(x, t) \equiv \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2c^2\right)\phi(x, t). \quad (2.3)$$

Mas agora temos  $\omega^2 = k^2c^2 + m^2c^4$ , ou seja, diferentes cumprimentos de onda se propagam com diferentes velocidades  $\omega(k)/k$ , e por tanto a equação (2.3) será dispersiva.

Podemos definir em geral uma onda solitária como uma solução singular localizada de qualquer equação de campo não-linear cuja densidade de energia, também é localizada, e tem dependência espaço-tempo.

Soluções das equações de campo do tipo sóliton em  $(1+1)$  dimensões, para campos escalares do modelos  $\lambda\phi^4$  ou Sine-Gordon são chamados de kinks como veremos na seção

2.1. Outros tipos de soluções como: vórtices, monopolos magnéticos e instântons, que são também soluções do tipo sóliton, aparecem comumente na Teoria de Campos e em Teorias de Calibre.

## 2.1 Soluções tipo kink

As soluções tipo kink, são caracterizadas por manter conservada sua carga topológica. Estes podem ser classificados em kink do tipo  $Z_2$ , baseado na teoria de campos. A ação do sistema é definida como:

$$S = \int d^2x \left[ \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) \right], \quad (2.4)$$

para  $\mu = 0, 1$ . Consideremos um potencial na forma  $V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - a^2)^2$ , para soluções em 1+1 dimensões, com parâmetros  $\lambda$  e  $a$  associados à constante de acoplamento e aos mínimos do potencial, respectivamente.

A densidade lagrangiana é invariante sob a transformação  $\phi \rightarrow -\phi$ , isto ocorre se possui simetria reflexiva. Tomemos o potencial  $\phi$  como

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - a^2)^2 = -\frac{\lambda}{2}a^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \frac{\lambda}{4}a^4, \quad (2.5)$$

onde podemos associar o termo de massa da energia cinética com a constante de auto-interação do potencial  $m^2 = \lambda a^2$ . Observa-se que o potencial possui dois mínimos:  $\phi = \pm a$  chamados de vácuos.

A densidade lagrangiana pode ser escrita na forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi), \quad (2.6)$$

onde determinamos as equações de movimento em 1 + 1 dimensões

$$\square \phi + \lambda \phi(\phi^2 - a^2) = \frac{d^2 \phi}{dt^2} - \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \lambda \phi(\phi^2 - a^2) = 0, \quad (2.7)$$

para casos de soluções independentes do tempo, a equação de movimento se reduz na forma

$$\frac{d^2 \bar{\phi}}{dx^2} = \lambda \bar{\phi}(\bar{\phi}^2 - a^2),$$

cujas soluções em particular são chamadas de kink ou anti-kink, respetivamente

$$\bar{\phi}(x) = \pm a \tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}ax\right). \quad (2.8)$$

Aplicando invariância relativista podemos fazer a substituição  $x \rightarrow \gamma(x - vt)$  com  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ , onde obtemos uma solução dependente do tempo

$$\bar{\phi}(x, t) = \pm a \tanh\left(a\gamma\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(x - vt)\right). \quad (2.9)$$

As soluções do tipo kink para soluções estáticas mantêm sua energia finita o que implica que são estáveis em todo o espaço

$$\mathcal{H}_0 = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - a^2)^2, \quad (2.10)$$

pelo que nós permite determinar sua energia, o qual é dada por

$$E_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_0 dx = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\lambda}a^3}{3}. \quad (2.11)$$

## 2.2 Método de Bogomol'nyi

Partimos da definição do energia do sistema:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + V(\phi) \right]. \quad (2.12)$$

Nota-se que a energia pode ser reescrita como:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx} \mp \sqrt{2V(\phi)}\right)^2 \pm \sqrt{2V(\phi)}\frac{d\phi}{dx} \right] = \quad (2.13)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx} \mp \sqrt{2V(\phi)}\right)^2 \right] \pm \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} d\phi \sqrt{2V(\phi)}, \quad (2.14)$$

Na expressão acima para obter a energia mínima, fixamos os valores de campo  $\phi$  nos extremos assintóticos  $\pm\infty$ , com a finalidade de interpolar os mínimos do potencial  $V(\phi)$ , chamados de vácuos. A energia se torna mínima quando o primeiro termo vai para zero [16],[49].

$$\frac{d\phi}{dx} \mp \sqrt{2V(\phi)} = 0. \quad (2.15)$$

O valor mínimo da energia é dado

$$E_B = \pm \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} d\phi \, 2V(\phi), \quad (2.16)$$

consideremos o potencial dado por

$$\sqrt{V(\phi)} = \sqrt{\frac{\lambda}{4}} (\phi^2 - a^2), \quad (2.17)$$

substituindo nesta última expressão determinamos a energia de Bogomol'nyi

$$E_B = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\lambda} a^3 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m^3}{\lambda}, \quad (2.18)$$

onde este termo nós representa a massa do sóliton.

Uma maneira mais simples de poder escrever o potencial  $V$  é em função de um superpotencial  $W$ , onde pode-se observar com facilidade que as soluções com energia mínima da equação diferencial de segunda ordem para soluções estáticas em  $(1 + 1)$  dimensões, podem ser obtidas através de equações de primeira ordem.

Pode-se observar que o potencial para modelo de tipo  $\lambda\phi^4$  pode ser escrita em termos do superpotencial  $W$ :

$$W(\phi) = -\lambda a^2 \phi + \frac{\lambda}{3} \phi^3, \quad (2.19)$$

da seguinte forma

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \left( \frac{dW(\phi)}{d\phi} \right)^2. \quad (2.20)$$

Podemos expressar a energia em termos deste superpotencial como

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + W_\phi^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \left( \frac{d\phi}{dx} \pm W_\phi \right)^2 \mp 2 \frac{d\phi}{dx} W_\phi \right]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde a energia de Bogomol'nyi se torna mínima quando o primeiro termo vai zero

$$\frac{d\phi}{dx} = \mp W_\phi.$$

obtendo as equações de primeira ordem.

A energia de Bogomol'nyi está associada à diferença dos superpotenciais avaliados

nos extremos assintóticos

$$E_B = \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} d\phi W_\phi = |W(\phi(+\infty)) - W(\phi(-\infty))|. \quad (2.22)$$

Uma característica dos kinks de classe  $Z_2$  é a presença de cargas conservadas, chamadas cargas topológicas, com valor que depende somente dos limites assintóticos do campo. Definimos uma densidade de corrente como

$$J^\mu = \frac{1}{2a} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu W(\phi), \quad (2.23)$$

onde  $W(\phi)$  é uma função analítica ímpar em  $\phi$ . Verifica-se que  $\partial_\mu J^\mu = 0$ , não por que seja originada a partir de uma simetria do modelo, via teorema de Noether, mas porque, em vez disto, é identicamente conservada. Isto pode ser verificado se notarmos que

$$\partial_\mu J^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu W(\phi) = \epsilon^{\nu\mu} \partial_\nu \partial_\mu W(\phi) = -\epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu W(\phi) \quad \therefore \quad \partial_\mu J^\mu = 0, \quad (2.24)$$

onde usamos  $\epsilon^{\nu\mu} = -\epsilon^{\mu\nu}$  com  $\epsilon^{01} = 1$  e  $\partial_\nu \partial_\mu \phi = \partial_\mu \partial_\nu \phi$ .

Um exemplo particular é  $W(\phi) = \phi$ , para a qual a carga conservada é

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dx J^0 = \frac{1}{2a} [\phi(x = +\infty) - \phi(x = -\infty)] = \frac{E_B}{2a} = 1. \quad (2.25)$$

Tais correntes e leis de conservação são chamadas topológicas, uma vez que a conservação transcorre das propriedades topológicas das configurações de campo e não diretamente das simetrias da teoria [48].

As soluções do tipo não-topológica  $Q = 0$  são chamadas de *lump* ou soluções não-BPS. Exemplos relevantes de soluções de tipo não-topológica aparecem em modelos do tipo  $\lambda\phi^3$ , que apresentam instabilidade.

## 2.2.1 Outros exemplos

### Modelo de Sine-Gordon

Consideremos o modelo de Sine-Gordon, o qual é um dos mais usados em teoria de campos. A dinâmica do mesmo é governada pela seguinte densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\alpha}{\beta^2} (1 - \cos(\beta\phi)), \quad (2.26)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros reais. Este modelo tem sido usado no estudo de uma variedade de fenômenos, como o caso de movimento de paredes de Bloch em cristais magnéticos.

A soluções do tipo kink (anti-kink) é representada por

$$\bar{\phi}(x) = \pm \frac{4}{\beta} \arctan \left( \exp \sqrt{\alpha}(x - x_0) \right). \quad (2.27)$$

Note que, devido ao fato da densidade lagrangiana ser um invariante de Lorentz, e uma vez obtidas as soluções estáticas (2.27), podemos obter soluções dependentes do tempo. Substituindo  $(x - x_0)$  por  $(x - x_0 - vt)/\sqrt{1 - v^2}$ , onde restringimos a velocidade do sóliton a  $-1 < v < 1$  e (tomando  $c = 1$ ), obtemos:

$$\bar{\phi}(x, t) = \pm \frac{4}{\beta} \arctan \left[ \exp \left( \sqrt{\alpha} \frac{(x - x_0 - vt)}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]. \quad (2.28)$$

No caso estático, o superpotencial, dado por  $W(\phi) = \frac{4}{\beta^2} \sqrt{\alpha} \cos(\frac{\beta}{4}\phi)$ , pode ser escrito em termos da coordenada como:

$$W[\phi(x)] = \pm \frac{4}{\beta^2} \sqrt{\alpha} \cos \left( \arctan \left( \exp \sqrt{\alpha}(x - x_0) \right) \right), \quad (2.29)$$

sendo que  $W(\phi(\infty)) = \frac{4}{\beta^2} \sqrt{\alpha}$  e  $W(\phi(-\infty)) = -\frac{4}{\beta^2} \sqrt{\alpha}$  nos extremos. Assim a energia que satura o limite Bogomol'nyi é dada por

$$E_{SG} = \frac{8\sqrt{\alpha}}{\beta^2}. \quad (2.30)$$

### Potencial de tipo polinomial

Um dos modelos polinomiais de importância que analisamos nesta subseção é o modelo tomado em [39]. Este modelo é caracterizado pelo seguinte potencial de auto-interação:

$$V(\phi) = \alpha \phi^2 (\phi^\beta - v^\beta)^2, \quad (2.31)$$

e cuja densidade de lagrangiana é dada na forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \alpha \phi^2 (\phi^\beta - v^\beta)^2, \quad (2.32)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $v$  são constantes do potencial consideradas positivas. Um perfil do potencial como função de  $\phi$  está representado na Figura 2.1, para os parâmetros  $\beta = 1$  e  $\alpha = 1/2$ .

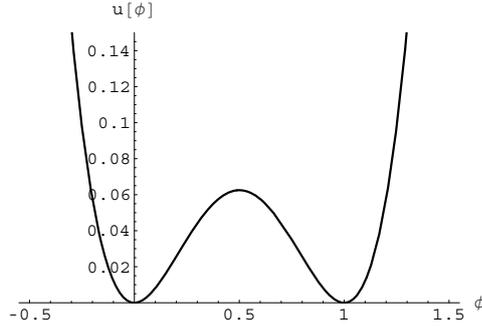


Figura 2.1: Potencial do modelo polinomial para os parâmetros:  $\beta = 1$  e  $\alpha = 1/2$ .

Cuja solução da equação do movimento é dada na forma

$$\bar{\phi} = v \left( \frac{1 + \tanh(\beta\mu x/2)}{2} \right)^{1/\beta}. \quad (2.33)$$

Onde  $\mu = \sqrt{2\alpha v^\beta}$ . Para  $\beta = 1$ , obtemos o potencial de tipo  $\phi^4$ , com dois mínimos em  $\phi = 0$  e  $\phi = +v$ . Para o caso de  $\beta = 2$ , obtemos um potencial de tipo  $\phi^6$  com três mínimos, um em  $\phi = 0$  e os outros dois em  $\phi = \pm v$ . Para  $\beta = 0$  o modelo se manifesta como um campo livre massivo.

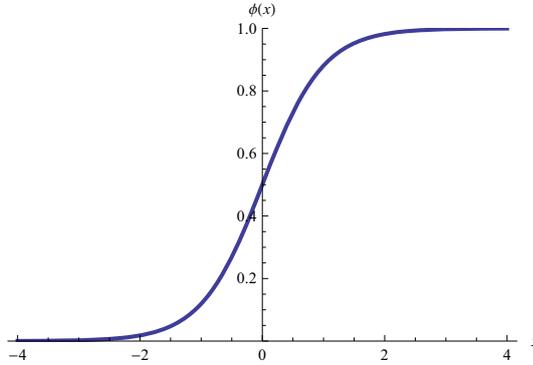


Figura 2.2: A solução de tipo kink no modelo polinomial para:  $\beta = 1$ ,  $\alpha = 1/2$  e  $v = a$ .

Para casos particulares de  $\beta = 1$  encontramos a solução clássica para o modelo  $\phi^4$

$$\bar{\phi}(x) = \frac{a}{2} (\tanh(\mu x/2) + 1). \quad (2.34)$$

Para  $\beta = 2$  encontramos as soluções clássicas para o modelo  $\phi^6$

$$\bar{\phi}(x) = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{\tanh\left(\frac{\mu x}{2}\right) + 1}, \quad (2.35)$$

$$\bar{\phi}(x) = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{\tanh(\mu x) + 1}, \quad (2.36)$$

Podemos expressar o potencial polinomial (2.31) em termos do superpotencial  $W$ , na forma

$$W[\phi(x)] = \sqrt{2\alpha}\phi^2 \left( \frac{\phi^\beta}{\beta+2} - \frac{v^\beta}{2} \right), \quad (2.37)$$

o qual, substituído na equação (2.22), fornece a energia de Bogomol'nyi

$$E_B = W[\phi(\infty)] - W[\phi(-\infty)] = \frac{\sqrt{2\alpha}\beta v^{\beta+2}}{2(\beta+2)}. \quad (2.38)$$

## 2.3 Estabilidade das soluções de Bogomol'nyi sob pequenas flutuações lineares

Consideremos aqui a análise da estabilidade das soluções de Bogomol'nyi também chamadas de BPS, para modelos não-lineares com somente um campo escalar. A análise da estabilidade é realizada a fim de verificar se pequenas perturbações podem destruir a estabilidade do sóliton. Sendo o método bem conhecido, nos deteremos a reproduzi-lo fundamentado na referência [36].

Uma maneira de se formular a estabilidade clássica, é usando o cálculo variacional. Impomos que o funcional densidade de energia (2.12) seja extremizado sob pequenas flutuações do campo escalar, isto é:

$$\frac{\delta E(\phi)}{\delta \phi(x)} = -\phi_{xx} + V_\phi(\phi) = 0. \quad (2.39)$$

A equação acima nos fornece a equação de movimento estática para o campo. Para poder assegurar a estabilidade, a variação funcional de segunda ordem da energia

$$\frac{\delta^2 E(\phi)}{\delta \phi(x)\delta \phi(y)} = \left[ -\frac{d^2}{dx^2} + V_{\phi\phi}(\bar{\phi}) \right] \delta(x-y), \quad (2.40)$$

avaliada na solução clássica  $\bar{\phi}$ , deve resultar em um operador não-negativo. Isto é o mesmo que dizer que os autovalores do operador que aparece à direita da equação logo acima devem ser não-negativos. Esta formulação é equivalente a implementarmos pequenas flutuações em torno da solução clássica da forma

$$\phi(x, t) = \bar{\phi}(x) + \zeta_n(x)e^{i\omega_n t}, \quad (2.41)$$

substituindo na equação de movimento  $-\phi_{xx} + V_\phi(\phi) = 0$ . Isto nos leva à seguinte equação

para os modos de flutuação

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_{\phi\phi}(\bar{\phi})\right)\zeta_n(x) = \omega_n^2\zeta_n(x). \quad (2.42)$$

Esta equação é similar à equação de Schrödinger independente do tempo. Claramente vemos que qualquer autovalor  $\omega_n^2$  deve ser não-nulo para termos estabilidade. De outra forma,  $\omega_n$  é imaginário e implica em perturbações que crescem ou decrescem exponencialmente com o tempo, ou seja o sóliton se torna instável.

A estabilidade das soluções BPS em modelos em 1+1 dimensões com um único campo escalar é simples de ser demonstrada. Para estes casos o potencial de auto-interação do modelo, pode ser escrito em termos de um superpotencial  $W(\phi)$  como em (2.20). Neste caso a equação de primeira ordem, fica reescrita como

$$\phi_x = \pm W_\phi. \quad (2.43)$$

Desta forma é possível mostrar que o operador hamiltoniano da equação de estabilidade

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_{\phi\phi}(\bar{\phi}) = -\frac{d^2}{dx^2} + \overline{W}_{\phi\phi}^2 + \overline{W}_\phi \overline{W}_{\phi\phi\phi}, \quad (2.44)$$

pode ser fatorado como o produto de dois operadores adjuntos um do outro

$$\hat{H} = \mathcal{S}^\dagger \mathcal{S}, \quad (2.45)$$

onde

$$\mathcal{S}^\dagger = \frac{d}{dx} \mp W_{\phi\phi} \quad \text{e} \quad \mathcal{S} = -\frac{d}{dx} \mp W_{\phi\phi}. \quad (2.46)$$

Para o n-ésimo estado normalizado  $|n\rangle$  de  $\hat{H}$  com energia  $\omega_n^2$ , isto é:

$$\hat{H}|\zeta_n\rangle = \omega_n^2|\zeta_n\rangle = \mathcal{S}^\dagger \mathcal{S}|\zeta_n\rangle, \quad (2.47)$$

temos

$$\omega_n^2 = \langle n|\hat{H}|n\rangle = \omega_n^2 = \langle n|\mathcal{S}^\dagger \mathcal{S}|n\rangle = \|\mathcal{S}|n\rangle\|^2 \geq 0, \quad (2.48)$$

Como o lado direito da última igualdade é não-negativo, então  $\omega_n^2 \geq 0$ .

**Exemplo:** Consideremos o modelo cujo potencial é dado por (2.31). Neste caso o

potencial de estabilidade da equação (2.42) fica dado por

$$U(x) = V_{\phi\phi}(\bar{\phi}) = \mu^2 \left[ \frac{\beta^2 + 1}{2} + \frac{\beta^2 - 1}{2} \tanh\left(\frac{\mu\beta x}{2}\right) - \frac{(2\beta + 1)(\beta + 1)}{4 \cosh^2(\mu\beta x/2)} \right], \quad (2.49)$$

que foi obtido da solução (2.33). O potencial de estabilidade apresenta a forma do potencial Rosen-Morse II (hiperbólico) segundo à classificação da referência [19]. Nesta última referência este potencial é escrito como

$$U(x) = A^2 + B^2/A^2 - A(A + \alpha)\operatorname{sech}^2(\alpha x) + 2B \tanh(\alpha x), \quad (2.50)$$

e o espectro de energia é dado por

$$\omega_n^2 = A^2 - (A - n\alpha)^2 + \frac{B^2}{A^2} - \frac{B^2}{(A - n\alpha)^2}, \quad (2.51)$$

sendo  $n$  inteiro e  $n < A/\alpha$ .

No caso particular em que  $\beta = 1$  e  $\mu = 1$ , que corresponde ao modelo  $\phi^4$ , este potencial se reduz a

$$U(x) = 1 - \frac{3}{2}\operatorname{sech}^2(x/2). \quad (2.52)$$

Podemos expressar o produto dos operadores  $\mathcal{S}^\dagger \mathcal{S}$  como

$$\mathcal{S}^\dagger \mathcal{S} = \left[ -\frac{d}{dx} + \tanh \frac{x}{2} \right] \left[ \frac{d}{dx} + \tanh \frac{x}{2} \right], \quad (2.53)$$

o qual admite dois estados ligados com energias  $\omega_0^2 = 0$  e  $\omega_1^2 = 3/4$ . Não existe nenhum estado com  $\omega_n^2 < 0$ .

Para  $\beta = 2$  e  $\mu = 1$ , temos o modelo  $\phi^6$

$$U(x) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \tanh(x) - \frac{15}{4} \operatorname{cosh}^{-2}(x). \quad (2.54)$$

Podemos expressar o produto dos operadores, como

$$\mathcal{S}^\dagger \mathcal{S} = \left[ -\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}(1 + 3 \tanh x) \right] \left[ \frac{d}{dx} + \frac{1}{2}(1 + 3 \tanh x) \right], \quad (2.55)$$

este caso só admite um estado ligado  $\omega_0^2 = 0$ .

O estado ligado de mais baixa energia esta associado ao modo zero

$$\mathcal{S}^\dagger \psi_0 = \left( -\frac{d}{dx} + W_{\phi\phi} \right) \psi_0 = 0,$$

$$\frac{d\psi_o}{dx} = W_{\phi\phi}\psi_o, \quad (2.56)$$

para o modelo  $\phi^4$  obtemos dois estados ligados  $\psi_0, \psi_1$ , onde:

$$\psi_0 = \sqrt{2} \left[ \cosh^2 \left( \frac{x}{2} \right) \right], \quad (2.57)$$

e para determinar o seguinte estado  $\psi_1$ , fazemos uso do operador de criação  $\mathcal{S}$ ,  $\psi_1 = c\mathcal{S}\psi_0$ , o qual resulta em

$$\psi_1 = \sqrt{2} \sinh(x). \quad (2.58)$$

Para o modelo  $\phi^6$  encontramos somente um estado ligado dado por

$$\psi_0 = \exp \left( \frac{1}{2}x \right) \cosh^3(x). \quad (2.59)$$

Embora seja relativamente simples de mostrar a estabilidade de soluções independentes do tempo, com energia finita de equações de onda não-lineares em uma dimensão espacial, o mesmo não se aplica aos casos de mais de uma dimensão espacial. Isto foi demonstrado por G. H. Derrick [22]. Abaixo reproduzimos o argumento levantado por ele com base nas referências [36], [38] e [49].

## 2.4 Argumento de Derrick

Considere a ação em  $d$  dimensões espaciais e um número  $N$  arbitrário de campos escalares, expressamos:

$$S = \int d^{d+1}r \left[ \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N (\partial_\mu \phi^a)^2 - V(\phi^a) \right], \quad (2.60)$$

onde o potencial deve satisfazer à condição  $V(\phi^a) \geq 0$ . Talvez o caso mais simples, seja aquele em que não exista termos de interação entre os  $N$  campos no potencial. Consideramos que soluções estáticas e de energia finita  $\bar{\phi}_0^a(r)$ , existam. Definimos estas soluções reescaladas, na forma:

$$\bar{\phi}_0^a(r) = \bar{\phi}_0^a(\lambda r), \quad (2.61)$$

onde  $\lambda \geq 0$  é o parâmetro de reescalamento. A energia dos campos reescalados é dada por:

$$E[\bar{\phi}_0^a(\lambda r)] = \int d^d r \left( \frac{1}{2} (\nabla \bar{\phi}_0^a(\lambda r))^2 + V(\bar{\phi}_0^a(\lambda r)) \right), \quad (2.62)$$

Definindo  $r' = \lambda r$ , temos a seguinte expressão para a energia:

$$E[\phi_0^a(r')] = \int d^d r' \left( \frac{\lambda^{2-d}}{2} (\nabla \bar{\phi}_0^a(r'))^2 + \lambda^{-d} V(\bar{\phi}_0^a(r')) \right). \quad (2.63)$$

Podemos escrever a energia total da forma,  $E[\phi_0^a] = E_{grad}[\phi_0^a] + E_{pot}[\phi_0^a]$ , separando-a em duas partes: cinética(*grad*) e potencial(*pot*),

$$E_{grad}[\phi_0^a(r')] = \frac{1}{2} \int (\nabla \bar{\phi}^a(r'))^2 d^d r = \lambda^{2-d} E_{grad}[\phi_0^a(r)], \quad (2.64)$$

$$E_{pot}[\phi_0^a(r')] = \frac{1}{2} \int (\bar{\phi}^a(r')) d^d r = \lambda^{-d} E_{pot}[\phi_0^a(r)]. \quad (2.65)$$

Para analisar a estabilidade das soluções, derivamos a energia com respeito ao parâmetro  $\lambda$ , e tomamos  $\lambda = 1$ , para poder reproduzir o caso inicial, assim temos

$$\frac{dE^d(\lambda r)}{d\lambda} = (2-d)E_{grad}[\phi_0^a(r)] - dE_{pot}[\phi_0^a(r)] = 0, \quad (2.66)$$

para assegurar a estabilidade, a segunda derivada da energia deve ser positiva

$$\left. \frac{d^2 E(\lambda r)}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=1} = (2-d)(1-d)E_{grad}[\phi_0^a(r)] + d(d+1)E_{pot}[\phi_0^a(r)] > 0. \quad (2.67)$$

Da condição (2.66), obtemos a seguinte igualdade  $(2-d)E_{grad}[\phi_0^a(r)] = dE_{pot}[\phi_0^a(r)]$ , agora substituindo na condição (2.67), temos:

$$2(2-d)E_{grad}[\phi_0^a(r)] > 0.$$

Como  $E_{grad}[\phi_0^a(r)] > 0$ , observamos que não obtemos soluções estáveis para  $d \geq 2$ . Pelo que podemos afirmar deste argumento que somente existe soluções estáveis em uma dimensão espacial.

Existe uma proposta em particular dada por Bazeia et al.[12], com a finalidade de eludir este argumento e encontrar soluções clássicas estáveis em dimensões espaciais maiores que um no caso de modelos com somente campos escalares, o qual trataremos no capítulo 4 .

## Capítulo 3

# Modelos de dois campos escalares interagentes

Neste capítulo tratamos com modelos não-lineares envolvendo dois campos escalares interagentes em  $1 + 1$  dimensões do espaço-tempo. Estamos interessados particularmente em revisar a questão da estabilidade das soluções clássicas de energia finita sob pequenas flutuações lineares. Nossa atenção é voltada somente para dois modelos. Um deles foi introduzido por Rajaraman [44] e o outro, o qual é um caso particular do primeiro, foi tratado inicialmente, até onde temos conhecimento, por Bazeia, Santos e Ribeiro [2, 3].

No segundo modelo, que pode ser considerado como o setor bosônico de uma teoria supersimétrica, o potencial de interação pode ser escrito em termos de um superpotencial que é função dos dois campos, assim como nos modelos com um único campo que abordamos no capítulo anterior. Com esta característica especial, não só é mais simples encontrar as soluções BPS para ambos os campos, mas também determinar uma equação de órbita geral que relaciona os dois campos, a qual permite apontar a existência de um variedade de soluções BPS para os campos, como foi feito por de Souza Dutra [25]. A estabilidade das soluções BPS sob pequenas flutuações lineares neste segundo modelo também é simples de ser tratada, uma vez que o operador hamiltoniano associado à equação de estabilidade pode ser fatorado como o produto de dois operadores adjuntos um do outro, de forma similar à que foi desenvolvida no capítulo anterior para modelos com somente um campo escalar. No caso do modelo introduzido por Rajaraman, a equação de órbita que relaciona os dois campos tem que ser sugerida, para que possamos encontrar as soluções solitônicas estáticas. A estabilidade das soluções de energia finita sob pequenas flutuações lineares foi analisada por Boya e Casahorran [15]. Mais tarde um análise de estabilidade daquele modelo foi feita também por Bazeia, Nascimento, Ribeiro e Toledo [5] e confrontada com a análise desenvolvida em [15].

Nossa intenção aqui é mostrar as particularidades que devemos ter em conta na análise de estabilidade e apontar o procedimento equivocado adotado nas referências [15] e [5] para verificar a estabilidade do primeiro modelo. Foi adotada naquelas referências uma diagonalização inadequada do operador hamiltoniano, cujos detalhes são mostrados abaixo. Também evidenciamos algum ceticismo em relação ao procedimento usado para demonstrar a estabilidade no segundo modelo. Este ceticismo nos levou a procurar por soluções normalizáveis para as flutuações dos dois campos que são as únicas compatíveis com o fato da energia do sistema ser finita. Para isto procuramos diagonalizar as equações de estabilidade. Embora soluções explícitas para as flutuações não tenham sido encontradas, com exceção do caso particular em que a solução clássica de um dos campos é nula, verificamos que em um caso particular de soluções clássicas é possível diagonalizar o operador hamiltoniano e desacoplar as flutuações, mas as soluções não são conseguidas.

Inicialmente mostramos os modelos e as soluções clássicas já encontradas para os mesmos, depois desenvolvemos a análise de estabilidade de cada um deles explicitando nossas considerações sobre a questão.

### 3.1 Dois modelos com dois campos interagentes: equação de órbita e soluções clássicas

O primeiro modelo que vamos considerar aqui é caracterizado pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 - V(\sigma, \rho), \quad (3.1)$$

com potencial dado por

$$V(\sigma, \rho) = \frac{1}{4}(\sigma^2 - 1)^2 + \frac{1}{2}f\rho^2 + \frac{1}{4}\lambda\rho^4 + \frac{1}{2}d\rho^2(\sigma^2 - 1),$$

onde  $d$ ,  $f$  e  $\lambda$  são parâmetros reais. Em Boya e Casahorran [15], o potencial apresenta dois mínimos, em  $\sigma = \pm 1$  e  $\rho = 0$ , se  $d$ ,  $f$  e  $\lambda$  são positivos e  $\lambda > (d - f)^2$ .

As equações de movimento no caso estático são dadas por

$$\begin{aligned} \sigma'' &= -\sigma + \sigma^3 + d\rho^2\sigma, \\ \rho'' &= f\rho + \lambda\rho^3 + d\rho(\sigma^2 - 1), \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde os símbolos primos designam segunda derivada com respeito à coordenada espacial. Estas equações são desacopladas e soluções estáticas são encontradas por meio do método

de tentativa de órbita desenvolvido em [44], [45]. Em geral é assim que se procede em modelos com dois campos escalares acoplados. Neste caso particular uma órbita encontrada em [15] que permite desacoplar os campos e encontrar soluções estáticas, de energia finita e que vão assintoticamente para os mínimos do potencial mencionados acima é uma semi-elipse no plano  $(\sigma, \rho)$

$$\rho^2 + \frac{1-2f}{d}(\sigma^2 - 1) = 0, \quad (3.3)$$

e as soluções solitônicas são

$$\bar{\sigma}_{II}(x) = \tanh(\sqrt{f}(x - x_0)), \quad \bar{\rho}(x) = \sqrt{\frac{1-2f}{d}} \operatorname{sech}(\sqrt{f}(x - x_0)), \quad (3.4)$$

desde que

$$\lambda = d(d - 2f)/(1 - 2f) \quad \text{e} \quad f < 1/2. \quad (3.5)$$

Nas soluções,  $x_0$  é uma constante de integração que pode ser feita igual a zero de forma que as soluções sejam simétricas em relação à origem. A solução  $\bar{\sigma}_{II}(x)$  é chamada de kink e a solução  $\bar{\rho}(x)$ , algumas vezes chamada de *lump*. Estas soluções são chamadas em [15] de kink do tipo-II. Esta nomenclatura foi adotada para soluções similares de outros modelos em outras referências e nós a adotaremos aqui também. Ela é necessária para diferir as diversas soluções clássicas possíveis em um dado modelo. Por exemplo, as soluções chamadas kink do tipo-I

$$\bar{\sigma}_I(x) = \pm \tanh \left[ (x - x_0)/\sqrt{2} \right], \quad \bar{\rho}_I(x) = 0, \quad (3.6)$$

também encontradas neste modelo.

Estas soluções são as encontradas em [15]. Talvez outras possam ser descobertas, mas sempre devemos fazer uma tentativa de órbita e verificar quais condições sobre os parâmetros nos fornecerá soluções de energia finita com comportamento assintótico adequado. Em modelos como o próximo, cujas soluções de energia mínima satisfazem equações diferenciais de primeira ordem, uma órbita bem geral é sugerida a partir das equações BPS. Eles são caracterizados por uma densidade de lagrangiana como a seguinte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - V(\phi, \chi), \quad (3.7)$$

onde o potencial é positivo e pode ser escrito em termos de um superpotencial  $W(\phi, \chi)$  da seguinte forma

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial W(\phi, \chi)}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial W(\phi, \chi)}{\partial \chi} \right)^2 \right]. \quad (3.8)$$

Assim, a energia para as configurações de campo estáticas

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\chi}{dx} \right)^2 + \left( \frac{\partial W(\phi, \chi)}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial W(\phi, \chi)}{\partial \chi} \right)^2 \right], \quad (3.9)$$

pode ser reescrita como

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx [(\phi' \mp W_\phi)^2 + (\chi' \mp W_\chi)^2 \pm 2(W_\phi \phi' + W_\chi \chi')]. \quad (3.10)$$

Na última expressão adotamos uma notação mais econômica onde o símbolo primado é para derivada em relação a  $x$  e os sub-índices  $\phi$  e  $\chi$  para a derivada de  $W$  com respeito a  $\phi$  e  $\chi$  respectivamente.

Como nos modelos com um campo escalar mencionados no capítulo anterior, vemos aqui que as soluções das equações de primeira ordem

$$\phi' = \pm W_\phi \quad \text{e} \quad \chi' = \pm W_\chi, \quad (3.11)$$

são aquelas que saturam o limite de Bogomol'nyi e também são soluções das equações de movimento estáticas:

$$\phi'' = V_\phi \quad \text{e} \quad \chi'' = V_\chi. \quad (3.12)$$

A energia BPS fica dada por

$$E_B = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} dx (W_\phi \phi' + W_\chi \chi') = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dW}{dx} = |W(\bar{\phi}_j, \bar{\chi}_j) - W(\bar{\phi}_i, \bar{\chi}_i)| \quad (3.13)$$

onde  $(\bar{\phi}_j, \bar{\chi}_j)$  e  $(\bar{\phi}_i, \bar{\chi}_i)$  são os valores assintóticos das soluções BPS para os quais o potencial é nulo, também chamadas de vácuos do modelo no contexto de teoria quântica de campos. Gostaríamos de lembrar que os modelos que estamos tratando apresentam pelo menos dois conjuntos de pontos  $(\bar{\phi}_i, \bar{\chi}_i)$  nos quais o potencial é mínimo, ou seja, dois vácuos, assim como nos modelos com somente um campo escalar do capítulo anterior.

Voltando ao que mencionamos acima a respeito da equação de órbita, esta pode ser sugerida a partir das equações BPS (3.11). Considerando o elemento  $dx$  como um invariante paramétrico [25] temos

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi}{W_\chi}, \quad (3.14)$$

a qual pode ser integrada fornecendo uma equação (equação de órbita) que relaciona as soluções das equações de primeira ordem (3.11).

Estamos interessados no modelo estudado nas referências [2, 3, 4, 5, 25] e aplicado em

muitas situações diferentes conforme mencionado ao longo desta dissertação. Não mencionamos todas as aplicações já realizadas com este modelo, mas sugerimos as referências [7], [6],[10] e [26] para ver mais aplicações deste modelo. De fato este modelo é novamente abordado no capítulo seguinte, onde o aplicamos em casos de dimensões espaciais maiores que um, bem como na construção de modelos efetivos com somente um campo escalar. Lá também mencionamos outras referências que fazem uso do modelo cujo superpotencial é dado por

$$W(\phi, \chi) = \phi \left[ \lambda \left( \frac{\phi^2}{3} - a^2 \right) + \mu \chi^2 \right], \quad (3.15)$$

que também aparece em versões ligeiramente modificadas com  $a^2 = 1$  e com somente um parâmetro  $r = \lambda/\mu$ .

Neste caso o potencial (3.8) fica dado por

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \left[ (\lambda (\phi^2 - a^2) + \mu \chi^2)^2 + 4\mu^2 \phi^2 \chi^2 \right]. \quad (3.16)$$

É fácil verificar que o potencial possui quatro mínimos formados pelos conjuntos  $(\phi = \pm a, \chi = 0)$  e  $(\phi = 0, \chi = \pm \sqrt{ra})$ .

As equações de movimento estáticas ficam

$$\begin{aligned} \phi'' &= 2\phi \{ 2\mu^2 \chi^2 + \lambda [\lambda (\phi^2 - a^2) + \mu \chi^2] \}, \\ \chi'' &= 2\chi \{ 2\mu^2 \phi^2 + \mu [\lambda (\phi^2 - a^2) + \mu \chi^2] \}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

enquanto que as equações de primeira ordem ficam escritas como

$$\phi' = \pm [\lambda (\phi^2 - a^2) + \mu \chi^2] \quad \text{e} \quad \chi' = \pm 2\mu \phi \chi. \quad (3.18)$$

As soluções kink tipo I, que são soluções também das equações BPS, estão presentes aqui e são dadas por

$$\bar{\phi}_I(x) = \pm a \tanh(\lambda ax); \quad \bar{\chi}_I(x) = 0, \quad (3.19)$$

com uma órbita semi-reta no eixo- $\phi$  do plano  $(\phi, \chi)$  e com extremos em  $\phi = \pm a$ .

Estamos interessados em soluções não triviais que podem ser obtidas após termos a equação de órbita mais geral que é obtida a partir da seguinte equação diferencial

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{\lambda (\phi^2 - a^2) + \mu \chi^2}{2\mu \phi \chi}. \quad (3.20)$$

Esta equação pode ser integrada e possui duas soluções como equações de órbita; uma

que é válida para  $r = 2$  e outra que é válida para  $r \neq 2$ . Parece que a primeira não é considerada na literatura, ela também não foi analisada em [25]. Já que estamos até aqui só expondo, para consistência da própria dissertação, os resultados conhecidos da literatura, nos deteremos somente com a segunda das soluções que é escrita como

$$\phi^2 - a^2 = c_0 \chi^r - \frac{1}{r-2} \chi^2, \quad (3.21)$$

onde  $c_0$  é uma constante de integração a princípio arbitrária. Por meio de tentativa órbitas, geralmente o termo com  $c_0$  é deixado de lado, atentando-se somente para a órbita elíptica. Mas a inclusão deste termo, que foi obtido de uma forma muito natural, leva a mais soluções estáticas e evidencia a riqueza deste modelo, e portanto, maior potencial de aplicação dele em diversos contextos.

A órbita acima é substituída na segunda das equações em (3.18) e obtemos a seguinte equação diferencial para o campo  $\chi(x)$

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm 2\mu\chi\sqrt{a^2 + c_0\chi^r - \frac{1}{r-2}\chi^2}, \quad (r \neq 2). \quad (3.22)$$

Na referência [25] várias soluções são encontradas para a equação acima sendo que cada uma destas soluções é substituída na equação de órbita para se encontrar a solução corresponde para o campo  $\phi(x)$ . Abaixo nós listamos os conjuntos de soluções, sendo que escolhemos uma constante de integração da equação (3.22) adequadamente, de forma a ter as soluções com perfis simétricos em torno da origem.

O primeiro destes conjuntos de soluções é o kink tipo-II, o qual é encontrado tomando-se  $c_0 = 0$  em (3.22):

$$\bar{\chi}_{II}(x) = a\sqrt{r-2}\operatorname{sech}(2\mu ax), \quad (3.23)$$

pode se observar que  $\bar{\chi}_{II}(x = \pm\infty) \rightarrow 0$ , mas devemos ter  $r > 2$ , enquanto que a solução (anti-)kink é

$$\bar{\phi}_{II}(x) = \mp a \tanh(2\mu ax). \quad (3.24)$$

A solução com sinal superior, também chamada de anti-kink, tem o seguinte comportamento assintótico:  $\bar{\phi}_{II}(x = \pm\infty) \rightarrow \mp a$ ; enquanto que o kink comporta-se como:  $\bar{\phi}_{II}(x = \pm\infty) \rightarrow \pm a$ . A energia BPS para este conjunto de soluções é  $E_B = (4/3)\lambda a^3$ . Nós chamamos este conjunto de soluções de kink tipo-IIA para distingui-lo de outros conjuntos cujas soluções exibem comportamento similar.

Se tomarmos  $c_0 \neq 0$  temos mais conjuntos de soluções que exibem comportamentos

interessantes. Foi encontrado em [25] o seguinte conjunto para  $r = 1$  e  $c_0 < -2a$ :

$$\bar{\chi}_{IIA}^{(1)}(x) = \frac{2a}{\sqrt{c_0^2 - 4a^2 \cosh(2\mu ax) - c_0}}, \quad (3.25)$$

e

$$\bar{\phi}_{IIA}^{(1)}(x) = \mp a \frac{\sqrt{c_0^2 - 4a^2} \sinh(2\mu ax)}{\sqrt{c_0^2 - 4a^2 \cosh(2\mu ax) - c_0}}. \quad (3.26)$$

Temos aqui também o mesmo comportamento assintótico exibido pelas soluções (3.23) e (3.24) respectivamente. Observa-se também um comportamento de (anti-)kink duplo para  $\bar{\phi}_{IIA}^{(1)}(x)$  para  $c_0 \leq -2a$ ; comportamento este que está detalhado e bastante comentado no capítulo 4 desta dissertação. Estas soluções são exploradas no trabalho [27] no contexto de mundos-brana, onde mostra-se a formação e a influência de branas críticas e degeneradas sobre a geometria de um espaço com uma dimensão extra, bem como no trabalho [29] que trata de um modelo de expansão do universo determinado por colisões de partículas, que são excitações do campo  $\chi(x)$ , com as paredes de uma brana.

Este perfil de (anti-)kink duplo para  $\bar{\phi}_{IIA}^{(1)}(x)$  é comumente chamado de dois-kinks na literatura e aqui o denominamos de kink duplo para distinguir de soluções de dois kinks que comentamos logo abaixo que ocorrem quando  $c_0$  assume o valor crítico,  $c_0 = -2a$ ; caso este que deve ser tratado separadamente e não tomando o valor crítico nas soluções (3.25) e (3.26).

Comportamento similar ao do conjunto expresso pelas soluções (3.25) e (3.26) também é notado para o caso  $r = 4$  e  $c_0 < 1/16a^2$ . Neste caso o campo  $\chi(x)$  tem também um comportamento denominado tipo *lump* (aglomerado):

$$\bar{\chi}_{IIA}^{(2)}(x) = -\frac{2a}{\sqrt{\sqrt{1 - 16a^2c_0} \cosh(4\mu ax) + 1}}, \quad (3.27)$$

enquanto que a solução (anti-)kink para o campo  $\phi(x)$  pode ser escrita como

$$\bar{\phi}_{IIA}^{(2)}(x) = \mp \sqrt{1 - 16a^2c_0} \frac{a \sinh(4\mu ax)}{\sqrt{1 - 16a^2c_0} \cosh(4\mu ax) + 1}, \quad (3.28)$$

que exibe um perfil de (anti-)kink duplo para  $c_0 \lesssim 1/16a^2$ .

Finalmente, soluções solitônicas interessantes ocorrem para  $r = 1$  e  $c_0 = -2a$  e para  $r = 4$  e  $c_0 = 1/16a^2$ . A novidade nestes casos é que ambos os campos apresentam perfis de (anti-)kink. De fato são soluções que conectam o primeiro ao segundo conjunto de mínimos e vice-versa. Elas não seriam obtidas se trabalhássemos somente com a órbita

elíptica ( $c_0 = 0$ ). Para  $r = 1$  e  $c_0 = -2a$  temos:

$$\bar{\chi}_{IIB}^{(1)}(x) = \frac{a}{2} (1 \pm \tanh(\mu a x)), \quad (3.29)$$

onde o sinal (inferior) superior é para a solução (anti-)kink, e

$$\bar{\phi}_{IIB}^{(1)}(x) = \frac{a}{2} (\tanh(\mu a x) \mp 1). \quad (3.30)$$

Para  $r = 4$  e  $c_0 = 1/16a^2$  o seguinte conjunto de soluções é obtido:

$$\bar{\chi}_{IIB}^{(2)}(x) = -\sqrt{2}a \frac{\cosh(\mu a x) \pm \sinh(\mu a x)}{\sqrt{\cosh(2\mu a x)}}, \quad (3.31)$$

e

$$\bar{\phi}_{IIB}^{(2)}(x) = \frac{a}{2} (1 \mp \tanh(2\mu a x)). \quad (3.32)$$

Para ambos os conjuntos de kink tipo-IIB a energia BPS é metade da energia BPS dos conjuntos kink tipo-IIA. Imaginando que qualquer destes conjuntos representem torções em uma cadeia de spin unidimensional, as soluções kink tipo-IIB seriam meia torção da cadeia, haja vista o comportamento assintótico das mesmas; o que gastaria menos energia do que uma torção completa. A junção de duas meia torções resultaria numa torção completa, por isto o dobro da energia. Esta visualização fica mais clara com as soluções do campo  $\phi(x)$  fazendo-se uma comparação das soluções (3.28) com as correspondentes (3.32), por exemplo.

Podemos visualizar outros cenários de aplicação destas soluções. Por exemplo, ainda no contexto de cadeia de spins, podemos pensar na solução (3.26) como simulando a transição entre dois domínios magnéticos, um com magnetização contrária ao do outro; a região entre eles é a parede de domínio, a qual pode ser mais larga ou mais estreita dependendo do valor de  $c_0$  mais larga é a parede quanto mais próximo  $c_0$  estiver do valor crítico. Para  $c_0$  igual ao crítico teríamos uma separação completa destes domínios, eles não seriam mais conectados e teríamos a formação de quatro domínios separados por paredes mais finas; em cada domínio a magnetização seria metade da magnetização nos domínios antes da separação. Um cenário similar a este, porém no contexto de mundos-brana é explorado no capítulo 4 desta dissertação, onde vislumbramos uma separação de branas como uma transição de fase que é descrita por meio de um modelo efetivo construído a partir deste segundo modelo com dois campos escalares.

Até aqui nos atemos às soluções para os dois modelos apresentados, na próxima seção teremos algumas considerações sobre a análise de estabilidade destas soluções.

## 3.2 Breve análise de estabilidade das soluções sob pequenas flutuações lineares

A estabilidade para modelos de dois campos sob pequenas flutuações lineares em torno das soluções clássicas é feita da mesma forma que em modelos com um único campo escalar, ou seja, implementamos as flutuações da seguinte forma

$$\phi_i(x, t) = \bar{\phi}_i(x) + \zeta_{n,(i)}(x) \exp(-i\omega_{n,(i)}t) \quad \text{com } i = 1, 2, \quad (3.33)$$

ou na densidade de lagrangiana ou diretamente nas equações de Euler-Lagrange

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi_i = -\frac{\partial V(\phi_1, \phi_2)}{\partial \phi_i}. \quad (3.34)$$

De acordo com os mesmos argumentos expostos no capítulo anterior devemos ter  $\omega_{n,(i)}^2 \geq 0$ , para que o dubleto de soluções estáticas de energia finita sejam estáveis.

Vejam os que ocorre quando fazemos isto no caso do primeiro modelo. Assim, vamos direto ao assunto.

Fazendo a expansão diretamente nas equações de Euler-Lagrange temos as seguintes equações diferenciais para as flutuações

$$\begin{aligned} (\omega^2 \zeta + \zeta'')e^{-i\omega t} &= [3 \bar{\sigma}^2 + d \bar{\rho}^2 - 1]\zeta e^{-i\omega t} + 2d \bar{\rho} \bar{\sigma} \xi e^{-i\omega' t}, \\ (\omega'^2 \xi + \xi'')e^{-i\omega' t} &= [f + 3\lambda \bar{\rho}^2 + d (\bar{\sigma}^2 - 1)]\xi e^{-i\omega' t} + 2d \bar{\rho} \bar{\sigma} \zeta e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde chamamos de  $\zeta(x)$  e  $\xi(x)$  a amplitude da flutuação associada ao campo  $\sigma(x, t)$  e  $\rho(x, t)$  respectivamente. Também deixamos explícito a dependência temporal, mostrando que as frequências das flutuações não precisam ser idênticas. Este último ponto é importante, mas quase nada é comentado na literatura. Temos conhecimento somente do trabalho [44] que explicita este fato. Não obstante, de forma a tentar desacoplar as equações (3.35) parece ser necessário considerar  $\omega = \omega'$ ; mesmo na referência [44] esta é a consideração feita. Assim as exponenciais dependentes do tempo são eliminadas das equações. Ficamos somente com equações estáticas e com somente uma constante a ser fixada. As duas equações diferenciais acopladas podem ser escritas na forma matricial da seguinte forma

$$\left( -\frac{d^2}{dx^2} \mathbb{I} + \mathbb{U}(x) \right) \begin{pmatrix} \zeta(x) \\ \xi(x) \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} \zeta(x) \\ \xi(x) \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

onde  $\mathbb{I}$  representa a matrix identidade  $2 \times 2$  e  $\mathbb{U}(x)$  é uma matriz  $2 \times 2$  dada por

$$\mathbb{U}(x) = \begin{pmatrix} U_{11}(x) & U_{12}(x) \\ U_{21}(x) & U_{22}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\bar{\sigma}^2 + d\bar{\rho}^2 - 1 & 2d\bar{\rho}\bar{\sigma} \\ 2d\bar{\rho}\bar{\sigma} & f + 3\lambda\bar{\rho}^2 + d(\bar{\sigma}^2 - 1) \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

sendo que a dependência na coordenada espacial vem do fato de que  $\bar{\sigma}$  e  $\bar{\rho}$  são as soluções clássicas, as quais só dependem de  $x$ . Observamos então que a equação diferencial (3.36) se assemelha a uma equação de Schrödinger independente do tempo, porém na forma matricial. Entendemos que os autovalores são os mesmos para cada componente do vetor coluna, ou seja, um valor de energia para cada autovetor com componente superior  $\zeta(x)$  e componente inferior  $\xi(x)$ , pois esta foi a assunção feita acima no procedimento de separação de variáveis. Se tivermos mais de um autovalor, como pode ocorrer, cada um deve corresponder a um autovetor diferente. Não podemos admitir misturas que podem surgir, como veremos adiante.

O caso mais simples de se tratar é aquele correspondente às soluções kink tipo-I dadas nas expressões (3.29) e (3.30). Já que  $\bar{\rho} = 0$  temos a matriz potencial diagonal:

$$\mathbb{U}_I(x) = \begin{pmatrix} 3\bar{\sigma}^2 - 1 & 0 \\ 0 & f + d(\bar{\sigma}^2 - 1) \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

e as equações para as flutuações ficam desacopladas. Mas isto é simplesmente assumir que temos somente um campo. Neste caso não precisamos assumir que  $\omega = \omega'$ , pois as equações ficam desacopladas e dadas por

$$-\zeta'' - \left(3\text{sech}^2(x/\sqrt{2}) - 2\right)\zeta = \omega^2\zeta, \quad (3.39)$$

$$-\xi'' - \left(d\text{sech}^2(x/\sqrt{2}) - f\right)\xi = \omega'^2\xi. \quad (3.40)$$

Cada uma destas equações é como se fosse um problema de Schrödinger com potencial tipo Pöschl-Teller, o qual tem solução conhecida. Como explicitado em [15], a primeira equação possui duas autofunções relativas ao espectro discreto, ou seja, dois estados ligados com autovalores  $\omega_0^2 = 0$  e  $\omega_1^2 = 3/2$  e estados de espalhamento com  $\omega^2 \geq 2$  e não admite nenhum estado com  $\omega^2 < 0$ . A segunda equação tem somente estados ligados correspondentes a  $\omega'^2 \geq 0$ , se  $d = f(f + 1/\sqrt{2})$ , sendo que no caso  $f = \sqrt{2}$  temos dois estados ligados com  $\omega_0'^2 = 0$  e  $\omega_1'^2 = 3/2$  como os autovalores da primeira equação.

No caso em que as soluções clássicas são kink tipo-II a situação é mais complicada e nós não encontramos como diagonalizar a equação (3.36). Em [15] foi feita uma diagonalização da matriz potencial  $\mathbb{U}(x)$  e esta foi considerada equivocadamente, como sendo

a diagonalização da equação de estabilidade. As palavras dos autores são mais ou menos as seguintes: *depois de uma tarefa fácil mas cansativa e tendo em mente as condições escritas em (3.3) e (3.5) nós podemos ver que com a escolha  $d = 1 - f/2$  a matriz hessiana (3.37) adota a forma diagonal*

$$\mathbb{U}_D(x) = \begin{pmatrix} 6f\bar{\sigma}^2 + 2(1 - 3f) & 0 \\ 0 & 3f\bar{\sigma}^2 - 2f \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Os autores continuam sua análise ao longo do trabalho, tirando conclusões sobre quais devem ser os limites para o parâmetro  $f$  de forma a termos estabilidade. A partir desta diagonalização eles concluem até mesmo que o menor valor de  $\omega'^2$  na equação (3.40) é negativo dentro dos limites de valores do parâmetro  $f$  e que, portanto, o modelo é estável. Algo sem sentido, que não está em acordo com a análise simples que fizemos acima. Verificamos que a matriz diagonalizada  $\mathbb{U}_D(x)$  que eles apresentam é de fato a diagonalização de (3.37) implementada pela operação

$$\mathbb{D}\mathbb{U}(x)\mathbb{D}^{-1} = \mathbb{U}_D(x),$$

onde  $\mathbb{D}$  é a matriz de diagonalização que depende das coordenadas. Neste processo devemos levar em conta a equação de órbita (3.3), as condições (3.5) e tomar  $d = 1 - f/2$ . De fato, com os programas o Maple ou o Mathematica, esta tarefa não é tão cansativa assim, mas não apresentamos aqui as expressões explícitas dos elementos da matriz  $\mathbb{D}(x)$ , porque elas são expressões grandes e pouco esclarecedoras. Mas, se  $\mathbb{D} = \mathbb{D}(x)$ , provavelmente ela não diagonaliza o operador diferencial matricial da equação (3.36). Vejamos o que teria de ocorrer para que  $\mathbb{D}(x)$  seja a matriz de diagonalização da equação (3.36). Multiplicando ambos os lados de (3.36) por  $\mathbb{D}(x)$  e usando a identidade  $\mathbb{D}^{-1}\mathbb{D} = \mathbb{I}$  temos

$$\mathbb{D} \left( -\frac{d^2}{dx^2} \mathbb{I} + \mathbb{U}(x) \right) \mathbb{D}^{-1} \mathbb{D} \begin{pmatrix} \zeta(x) \\ \xi(x) \end{pmatrix} = \omega^2 \mathbb{D} \begin{pmatrix} \zeta(x) \\ \xi(x) \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

O resultado esperado seria

$$\left( -\frac{d^2}{dx^2} \mathbb{I} + \mathbb{U}_D(x) \right) \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}(x) \\ \tilde{\xi}(x) \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}(x) \\ \tilde{\xi}(x) \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

onde

$$\begin{pmatrix} \tilde{\zeta}(x) \\ \tilde{\xi}(x) \end{pmatrix} = \mathbb{D} \begin{pmatrix} \zeta(x) \\ \xi(x) \end{pmatrix},$$

não precisa ser explicitado em termos de  $\bar{\sigma}(x)$  e  $\bar{\rho}(x)$ ; basta encontrá-lo para cada auto-

valor  $\omega^2$ . Um ponto fundamental que passou despercebido, e por causa disto, tornam as conclusões do trabalho [15] não válidas é que

$$\mathbb{D} \frac{d^2}{dx^2} \mathbb{I} \mathbb{D}^{-1} \neq \frac{d^2}{dx^2} \mathbb{I} .$$

Temos explicitamente que

$$\begin{aligned} \mathbb{D} \frac{d^2}{dx^2} \mathbb{D}^{-1} &= \mathbb{D} \frac{d}{dx} \left( (\mathbb{D}^{-1})' + \mathbb{D}^{-1} \frac{d}{dx} \right) = \\ &= \mathbb{D} \left( (\mathbb{D}^{-1})'' + 2(\mathbb{D}^{-1})' \frac{d}{dx} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \mathbb{I} . \end{aligned}$$

Como  $\mathbb{D}^{-1} \mathbb{D} = \mathbb{D} \mathbb{D}^{-1} = \mathbb{I}$ , temos  $(\mathbb{D}^{-1} \mathbb{D})' = 0 = (\mathbb{D}^{-1})' \mathbb{D} + \mathbb{D}^{-1} \mathbb{D}'$ , então

$$\begin{aligned} \mathbb{D} \frac{d^2}{dx^2} \mathbb{D}^{-1} &= \mathbb{D} (\mathbb{D}^{-1})'' - 2 \mathbb{D}' \mathbb{D}^{-1} \frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2} \mathbb{I} = \\ &= -\mathbb{D}'' \mathbb{D}^{-1} + 2 (\mathbb{D}' \mathbb{D}^{-1})^2 - 2 \mathbb{D}' \mathbb{D}^{-1} \frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2} \mathbb{I} , \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde usamos a igualdade  $(\mathbb{D}^{-1})'' = -\mathbb{D}^{-1} [\mathbb{D}'' \mathbb{D}^{-1} - 2 (\mathbb{D}' \mathbb{D}^{-1})^2]$ , obtida de  $(\mathbb{D} \mathbb{D}^{-1})'' = 0$ .

Vemos então que a diagonalização só se realizaria em circunstâncias muito especiais. Deveria haver uma espécie de cancelamento nas soluções clássicas e suas derivadas para que os três primeiros termos após a segunda igualdade da equação (3.44) fossem nulos. Se  $\mathbb{D}$  fosse uma matriz constante isto seria facilmente verificável, mas mesmo com a ajuda de programas que executam cálculos alfa-numéricos a tarefa de verificar isto se torna ingrata. Foi necessário fazer somente a verificação que  $\mathbb{D}' \mathbb{D}^{-1} \neq 0$  para o caso das soluções kink tipo-II expressas em (3.4), para nos convencer de que a igualdade  $\mathbb{D} \frac{d^2}{dx^2} \mathbb{D}^{-1} = \frac{d^2}{dx^2} \mathbb{I}$ , assumida equivocadamente em [15], não é válida. A mesma assunção foi feita no trabalho [5] para mostrar sob quais condições sobre os parâmetros teríamos a estabilidade das soluções kink tipo-II. Os resultados encontrados lá não concordam com os resultados divulgados em [15], mas de qualquer forma eles adotaram um procedimento de diagonalização da equação de estabilidade equivocada. Podemos dizer que não há um resultado definitivo e correto sobre a estabilidade das soluções kink tipo-II do primeiro modelo exposto aqui. Nós tentamos fazer a diagonalização da equação de estabilidade mas a tarefa se tornou ingrata, pois não encontramos uma matriz que diagonalizasse a equação (3.36) livrando-nos de termos de derivada primeira na equação de estabilidade, os quais mudam substancialmente o potencial ao qual as flutuações ficam efetivamente submetidas.

A situação é mais simples quando tratamos com o segundo modelo, como descreveremos a seguir. Pelo fato do potencial poder ser escrito em termos de derivadas de um

superpotencial em relação aos campos, como expresso em (3.8), a matriz  $\mathbb{U}(x)$  tem os seus elementos dados por

$$\begin{aligned} U_{11}(x) &= \bar{W}_{\phi\phi}^2 + \bar{W}_{\phi\chi}^2 + \bar{W}_\phi \bar{W}_{\phi\phi\phi} + \bar{W}_\chi \bar{W}_{\phi\phi\chi}, \\ U_{22}(x) &= \bar{W}_{\chi\chi}^2 + \bar{W}_{\phi\chi}^2 + \bar{W}_\phi \bar{W}_{\phi\chi\chi} + \bar{W}_\chi \bar{W}_{\chi\chi\chi}, \\ U_{12}(x) &= U_{21}(x) = \bar{W}_{\phi\phi} \bar{W}_{\phi\chi} + \bar{W}_\phi \bar{W}_{\chi\chi} \bar{W}_{\chi\chi}^2 + \bar{W}_\phi \bar{W}_{\phi\phi\chi} + \bar{W}_\chi \bar{W}_{\phi\chi\chi}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde a barra sobre os termos de derivadas de  $W(\phi, \chi)$  em relação aos campos significa que estas quantidades têm que ser tomadas nas soluções clássicas para as quais se quer analisar a estabilidade.

Foi mostrado nas referências [3, 4] que a equação de estabilidade pode ser fatorada como o produto de dois operadores adjuntos um do outro, ou seja, que a equação (3.36), com os elementos de  $\mathbb{U}(x)$  dados por (3.45), pode ser reescrita como

$$\mathbb{S}^\dagger \mathbb{S} \begin{pmatrix} \zeta_n(x) \\ \xi_n(x) \end{pmatrix} = \left( \frac{d}{dx} \mathbb{I} + \mathbb{W} \right) \left( -\frac{d}{dx} \mathbb{I} + \mathbb{W} \right) \begin{pmatrix} \zeta_n(x) \\ \xi_n(x) \end{pmatrix} = \omega_n^2 \begin{pmatrix} \zeta_n(x) \\ \xi_n(x) \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

onde estamos considerando  $\zeta_n(x)$  e  $\xi_n(x)$  como os modos normais das flutuações do campo  $\phi(x, t)$  e  $\chi(x, t)$  respectivamente, e  $\mathbb{W}$  é a matriz

$$\mathbb{W}(x) = \begin{pmatrix} \bar{W}_{\phi\phi} & \bar{W}_{\phi\chi} \\ \bar{W}_{\phi\chi} & \bar{W}_{\chi\chi} \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

A matriz  $\mathbb{W}(x)$  funciona como uma matriz superpotencial do problema quântico não-relativístico e ela não é diretamente proporcional ao superpotencial funcional dos campos,  $W(\phi, \chi)$  expresso em (3.15). Preferimos usar a mesma letra para denotar ambas, pois geralmente se usa a letra dablíu na literatura para representar superpotenciais. Note que em  $\mathbb{W}(x)$  as derivadas de  $W(\phi, \chi)$  devem ser tomadas nas soluções clássicas e ficamos com elementos que só dependem das coordenadas. Pode se verificar que

$$\mathbb{U}(x) = \frac{d\mathbb{W}(x)}{dx} + [\mathbb{W}(x)]^2. \quad (3.48)$$

Então existe uma outra matriz dada por

$$\mathbb{U}_-(x) = -\frac{d\mathbb{W}(x)}{dx} + [\mathbb{W}(x)]^2. \quad (3.49)$$

que possui, à exceção o modo zero, o mesmo espectro de  $\mathbb{U}(x)$ .

Com esta fatoração foi demonstrada em [3, 4] que  $\omega_n^2 \geq 0$ . Seguindo o mesmo proce-

dimento do capítulo anterior para modelos com um só campo escalar, consideremos  $|n\rangle$  um autovetor normalizado de  $\mathbb{S}^\dagger\mathbb{S}$  com autovalor  $\omega_n^2$ , isto é  $\mathbb{S}^\dagger\mathbb{S}|n\rangle = \omega_n^2|n\rangle$ , então

$$\omega_n^2 = \langle n|\mathbb{S}^\dagger\mathbb{S}|n\rangle = \|\mathbb{S}|n\rangle\|^2 \geq 0. \quad (3.50)$$

Nesta demonstração temos que assumir que  $\omega_n^2$  é o mesmo para ambos componentes,  $\zeta_n$  e  $\xi_n$ , do autovetor  $|n\rangle$ .

No caso das soluções kink tipo-I expressas em (3.19),  $\mathbb{U}(x)$  é diagonal. Então as equações diferenciais não são acopladas. Explicitamente temos [2]:

$$-\zeta'' - \left[6\lambda^2\text{sech}^2(x/\sqrt{2}) - 4\lambda^2a^2\right]\zeta = \omega^2\zeta, \quad (3.51)$$

$$-\xi'' - 2\left[\mu(\lambda + 2\mu)\text{sech}^2(x/\sqrt{2}) - 2\mu^2a^2\right]\xi = \omega'^2\xi. \quad (3.52)$$

Novamente temos que os potenciais de estabilidade são do tipo Pöschl-Teller, cujo espectro é conhecido. No caso particular em que  $\lambda = 3\mu$  temos soluções localizadas para  $\zeta(x)$  correspondentes ao modo zero e a  $\omega_1^2 = (3/4)9\mu^2a^2$ , e soluções de espalhamento começando em  $\omega^2 = 9\mu^2a^2$ ; solução localizada para  $\xi(x)$  só a de modo zero. Então, para  $\lambda = 3\mu$  as soluções são estáveis sob flutuações lineares.

O caso de soluções kink tipo-II também foi considerado em [5], mas eles procedem com a diagonalização da equação de estabilidade também de maneira equivocada. As palavras dos autores são, de certa forma, as seguintes: *tomamos vantagem da presença dos operadores de primeira ordem  $\mathbb{S}^\dagger$  e  $\mathbb{S}$ , tal que a tarefa de encontrar os modos normais de flutuação é bastante simplificada. Isto é porque nós podemos lidar com a tarefa mais simples de diagonalizar apenas a matriz  $\mathbb{W}$  que aparece nos operadores de primeira ordem.* Os autores mostram que os operadores de primeira ordem  $\mathbb{S}^\dagger$  e  $\mathbb{S}$  ficam simplesmente diagonalizados como

$$\mathbb{S}^\dagger = \left(\frac{d}{dx}\mathbb{I} + \mathbb{W}_D\right) \quad \text{e} \quad \mathbb{S} = \left(-\frac{d}{dx}\mathbb{I} + \mathbb{W}_D\right), \quad (3.53)$$

onde

$$\mathbb{W}_D(x) = \begin{pmatrix} \bar{W}_+ & 0 \\ 0 & \bar{W}_- \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

com

$$\bar{W}_\pm = \frac{1}{2}(\bar{W}_{\phi\phi} + \bar{W}_{\chi\chi}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\bar{W}_{\phi\phi} - \bar{W}_{\chi\chi})^2 + \bar{W}_{\phi\chi}^2}. \quad (3.55)$$

Reconhecemos que a diagonalização de  $\mathbb{S}^\dagger$  é a mesma de  $\mathbb{S}$  e que esta leva à diagonalização de  $\mathbb{U}(x)$ . Chamemos novamente de  $\mathbb{D}$  a matriz de diagonalização de  $\mathbb{W}(x)$ ,

então:

$$\begin{aligned} \mathbb{D} \left( -\frac{d^2}{dx^2} \mathbb{I} + \mathbb{U}(x) \right) \mathbb{D}^{-1} \mathbb{D} \begin{pmatrix} \zeta_n(x) \\ \xi_n(x) \end{pmatrix} &= \omega_n^2 \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}_n(x) \\ \tilde{\xi}_n(x) \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{D} \left( \frac{d}{dx} \mathbb{I} + \mathbb{W} \right) \mathbb{D}^{-1} \mathbb{D} \left( -\frac{d}{dx} \mathbb{I} + \mathbb{W} \right) \mathbb{D}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}_n(x) \\ \tilde{\xi}_n(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Se  $\mathbb{D} \left( \frac{d}{dx} \mathbb{I} + \mathbb{W} \right) \mathbb{D}^{-1} = \left( \frac{d}{dx} \mathbb{I} + \mathbb{W}_D \right)$ , onde  $\mathbb{W}_D$  é diagonal, temos:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dx} \mathbb{I} + \mathbb{W}_D \right) \left( -\frac{d}{dx} \mathbb{I} + \mathbb{W}_D \right) \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}_n(x) \\ \tilde{\xi}_n(x) \end{pmatrix} &= \\ = \left( -\frac{d^2}{dx^2} \mathbb{I} + \mathbb{U}_D(x) \right) \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}_n(x) \\ \tilde{\xi}_n(x) \end{pmatrix} &= \omega_n^2 \begin{pmatrix} \tilde{\zeta}_n(x) \\ \tilde{\xi}_n(x) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

onde  $\mathbb{U}_D(x) = \mathbb{W}'_D + \mathbb{W}_D^2$  é diagonal. Mas para isto é necessário verificar se

$$\mathbb{D} \left( \frac{d}{dx} \mathbb{I} \right) \mathbb{D}^{-1} = \frac{d}{dx} \mathbb{I}. \quad (3.58)$$

Verificamos que isto não é verdade em geral para qualquer conjunto de soluções kink tipo-II. Observa-se que

$$\mathbb{D} \left( \frac{d}{dx} \mathbb{I} \right) \mathbb{D}^{-1} = \mathbb{D} (\mathbb{D}^{-1})' + \frac{d}{dx} \mathbb{I}. \quad (3.59)$$

Assim, para (3.58) seja satisfeita é necessário que  $\mathbb{D} (\mathbb{D}^{-1})' = -\mathbb{D}' \mathbb{D}^{-1} = 0$ . Isto não é verdade para o conjunto de soluções kink tipo-II expressas em (3.23) e (3.24) com o qual a referência [5] trabalha explicitamente por meio desta “diagonalização”.

Então concluímos que a diagonalização de  $\mathbb{W}$  não toma conta da diagonalização da equação de estabilidade, como foi assumido equivocadamente em [5]. Certamente é mais simples verificar a diagonalização de  $\mathbb{W}$  do que a de  $\mathbb{U}$ . Isto é uma vantagem dos modelos cujo potencial pode ser escrito em termos de um superpotencial como em (3.8), mas o problema da diagonalização do operador  $\frac{d}{dx} \mathbb{I}$ , concomitante com a diagonalização de  $\mathbb{W}$  permanece em aberto.

Verificamos se para algum dos conjuntos de soluções kink tipo-II (II-A, II-B) poderíamos ter  $\mathbb{D}' \mathbb{D}^{-1} = 0$ . Ao que tudo indica devemos ter  $\mathbb{D}$  independente das coordenadas, ou seja,  $\mathbb{D}' = 0$ . Não vamos detalhar os cálculos aqui, mas parece que isto só ocorre com o último conjunto de soluções que chamamos soluções kink tipo-IIB.

Gostaríamos de finalizar esta breve análise comentando sobre os modos zero ( $\omega_0^2 = 0$ )

das equações de estabilidade (3.46). Neste caso é simples ver que

$$\mathbb{S} \begin{pmatrix} \zeta_0(x) \\ \xi_0(x) \end{pmatrix} = \left( -\frac{d}{dx} \mathbb{I} + \mathbb{W} \right) \begin{pmatrix} \zeta_0(x) \\ \xi_0(x) \end{pmatrix} = 0 \quad (3.60)$$

e que as soluções para esta equação são

$$\zeta_0(x) = N\bar{W}_\phi, \quad \xi_0(x) = N\bar{W}_\chi, \quad (3.61)$$

onde  $N$  é uma constante de normalização. Assim, como no caso de modelos com um único campo escalar, a flutuação de cada campo correspondente à energia nula obedecem equações de estabilidade de primeira ordem resultantes de proceder com as perturbações em torno das soluções clássicas diretamente nas equações BPS (3.11).

Como as soluções BPS são soluções de energia mínima assumimos que as flutuações correspondentes com energia nula ( $\omega_0^2 = 0$ ) são as de menor energia, desde que estas sejam normalizáveis. De fato elas são normalizáveis, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx (\zeta_0^2 + \xi_0^2) = N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx (\bar{W}_\phi^2 + \bar{W}_\chi^2) = N^2 E_B. \quad (3.62)$$

Como  $E_B$  é finita e não-nula (ver (3.13)), as flutuações de modo zero são normalizáveis. Podemos adotar  $N = \pm 1/\sqrt{E_B}$ . Esta normalização é também adotada em modelos com um único campo.

Aqui temos uma sutileza que é o fato de  $\xi_0(x) = N\bar{W}_\chi = N\bar{\chi}'$  apresentar um nó, como pode ser verificado com  $\bar{\chi}_{II}(x)$  apresentada em (3.23). Em problemas de mecânica quântica não-relativística vemos este comportamento como um indicativo de que deve existir ao menos uma solução da equação de Schrödinger independente do tempo correspondente à energia negativa, ou seja,  $\xi_0(x)$  não seria o estado de menor energia e teríamos outro estado com energia negativa, levando-nos a concluir que o sistema seria instável sob flutuações lineares. No entanto, estamos considerando os auto-estados como formados por dois componentes,  $\zeta_n(x)$  e  $\xi_n(x)$ . Então devemos observar como se comporta a “densidade de probabilidade”  $\rho_n(x) = \zeta_n^2(x) + \xi_n^2(x)$  associada ao  $n$ -ésimo auto-estado. Verifica-se que  $\rho_0(x) = \zeta_0^2(x) + \xi_0^2(x)$  só se anula em  $x \rightarrow \pm\infty$  para qualquer conjunto de soluções kink-tipoII, sendo que para o valor de  $x$  em que  $\xi_0^2(x) = 0$  temos  $\zeta_0^2(x) \neq 0$  e não há pontos em uma região finita para os quais  $\zeta_0^2(x)$  é nulo. Assim podemos afirmar que não existem estados com energia negativa. Conclui-se que, de fato,  $\omega_n^2 \geq 0$ . O que significa que todas as soluções clássicas do segundo modelo são estáveis sob flutuações lineares.

# Capítulo 4

## Defeitos e campos escalares em $d$ dimensões

Neste capítulo trabalhamos ainda com modelos com dois campos escalares interagentes, particularmente aquele considerado no capítulo 3, cujo potencial é dado pela equação (3.16). Tratamos também da aplicação deste modelo em  $d > 1$  dimensões espaciais, encontrando as soluções topológicas a partir do mesmo procedimento adotado por Bazeia e colaboradores [12], que é uma proposta para evitar o teorema de Derrick [22].

Mostramos também neste capítulo como construir modelos com um só campo a partir de modelos de dois campos. Estes modelos efetivos exibem soluções do tipo kink que podem ser continuamente deformados em soluções do tipo kink-duplo, ou soluções de dois-kinks, como foram nominadas em algumas referências. Depois disto aplicamos um destes modelos efetivos em um cenário de mundos-brana, onde analisamos a influência de campos escalares na deformação da geometria do espaço, ou seja, no fator de deformação (*warp factor*) bem como na localização da gravidade em uma brana. Também sugerimos um cenário de separação de branas a partir deste modelo efetivo, baseando-nos na referência [18].

### 4.1 Defeitos topológicos em mais dimensões

Investigamos a presença de defeitos em sistemas descritos por dois campos escalares interagentes em  $d + 1$  dimensões do espaço-tempo. Vimos no capítulo 2 o argumento desenvolvido por Derrick [22] para mostrar que não existem soluções estáticas estáveis com energia finita em teorias clássicas não-lineares em dimensões espaciais  $d > 1$ . De fato, este argumento é válido para campos escalares não importando o número destes. Soluções

estáticas estáveis são encontradas em dimensões mais altas com a introdução de campos que carregam spin, como campos vetoriais e/ou espinoriais, como mencionado por Jackiw [36] e Vachaspaty [49].

Não obstante, D. Bazeia, J. Menezes e R. Menezes [12], encontraram uma maneira interessante de evitar o teorema de Derrick, ou seja, construir uma maneira de ter modelos com somente campos escalares em  $d > 1$  que ainda suporta soluções topológicas estáveis com energia finita.

Abaixo reproduzimos o argumento desenvolvido na referência [12] e tratamos de forma simples e direta com o caso de modelos com dois campos escalares interagentes.

A proposta feita na referência [12] considera modelos que são caracterizados por uma densidade de lagrangiana como a seguinte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi), \quad (4.1)$$

com um potencial específico dependente explicitamente das coordenadas espaciais da seguinte forma

$$V(\phi) = \frac{1}{2r^N} W_\phi^2, \quad (4.2)$$

onde  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}$  representa a coordenada radial, sendo  $r \in [0, \infty)$ . A equação de movimento estática é dada por:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^N} W_\phi W_{\phi\phi}, \quad (4.3)$$

enquanto que a energia das soluções desta equação tem a forma:

$$E = \Omega_d \int_0^\infty \frac{1}{2} \left( (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{r^N} W_\phi^2 \right) r^{d-1} dr, \quad (4.4)$$

onde  $\Omega_d$  representa a generalização do ângulo sólido para  $d$  dimensões espaciais e estamos supondo que as soluções só dependem da coordenada radial, ou seja, não há aparecimento de dependência angular e características como vorticidade de soluções.

Tomando em consideração o reescalonamento da solução estática, pode-se definir:  $\phi^\lambda(r) = \phi(\lambda r)$ , onde  $\lambda$  é o fator de reescalonamento com  $\lambda > 0$ .

Podemos escrever a energia total na forma,  $E_{t(\lambda)}^d = E_{grad(\lambda)}^d + E_{pot(\lambda)}^d$ , onde

$$E_{grad(\lambda)}^d = \frac{1}{2} \int (\nabla(\lambda\phi))^2 d^d r = \lambda^{2-d} E_{grad}^d, \quad (4.5)$$

$$E_{pot(\lambda)}^d = \int \frac{1}{r^N} V(\lambda\phi) d^d r = \lambda^{N-d} E_{pot}^d. \quad (4.6)$$

Para analisar a estabilidade das soluções, derivamos a energia com respeito ao parâmetro  $\lambda$ , e tomamos  $\lambda = 1$  para poder reproduzir o caso inicial. Assim temos

$$\left. \frac{dE_{t(\lambda)}^d}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = (2-d)E_{grad}^d + (N-d)E_{pot}^d = 0. \quad (4.7)$$

Para assegurar a estabilidade a segunda derivada da energia deve ser maior ou igual a zero, ou seja

$$\left. \frac{d^2 E_{t(\lambda)}^d}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=1} = (2-d)(1-d)E_{grad}^d + (N-d)(N-d-1)E_{pot}^d \geq 0. \quad (4.8)$$

Da condição (4.7) temos  $(2-d)E_{grad}^d = -(N-d)E_{pot}^d$ . Esta igualdade é substituída na equação (4.8), de onde obtemos:

$$(2-d)(2-N)E_{grad}^d \geq 0.$$

Como  $E_{grad}^d > 0$ , temos a condição  $(d-2)(N-2) \geq 0$ . Baseados nesta condição encontramos que o argumento de Derrick é eludido, de modo que a configuração de campo para  $d > 1$ , é estável se  $N \geq 2$ .

Partimos da energia do sistema, onde demonstraremos a energia de Bogomol'nyi

$$E = \frac{1}{2}\Omega_d \int_0^\infty \left[ \left( \frac{d\phi}{dr} \pm \frac{W_\phi}{r^{N/2}} \right)^2 \mp 2 \frac{W_\phi}{r^{N/2}} \frac{d\phi}{dr} \right] r^{d-1} dr. \quad (4.9)$$

Para encontrar a energia mínima do sistema, fazemos que o primeiro termo seja zero, ou seja

$$r^{N/2} \frac{d\phi}{dr} = \mp W_\phi. \quad (4.10)$$

Assim temos

$$E = \mp \Omega_d \int_0^\infty \left( W_\phi \frac{d\phi}{dr} \right) r^{d-1-N/2} dr. \quad (4.11)$$

Substituindo (4.10) em (4.11) temos:

$$E = \Omega_d \int_0^\infty r^{d-1-N/2} \frac{dW}{dr} dr, \quad (4.12)$$

de onde observa-se que a energia de Bogomol'nyi em  $d$  dimensões é uma carga topológica,

se fizermos  $N = 2(d - 1)$ :

$$E_B = \Omega_d \int_0^\infty \frac{dW}{dr} dr = \Omega |W(\infty) - W(0)|. \quad (4.13)$$

A equação de primeira-ordem (4.10), pode ser reescrita como

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{1}{r^{(d-1)}} W_\phi. \quad (4.14)$$

Derivando esta última expressão, e multiplicando por  $1/r^{d-1}$ , podemos construir a equação de movimento

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^{d-1}} \frac{d}{dr} (r^{d-1} \frac{d\phi}{dr}) = \frac{1}{r^{2(d-1)}} W_\phi W_{\phi\phi}. \quad (4.15)$$

Tomemos as pequenas flutuações em torno da solução clássica em  $d$  dimensões, temos

$$\phi(r, t) = \bar{\phi}(r) + \sum_n \zeta_n(r) \exp(i\omega_n t), \quad (4.16)$$

e substituimos na equação de movimento  $\nabla^2 \phi + V_\phi(\phi) = 0$ . Isto nos leva à equação para os modos de flutuação

$$\hat{H} \zeta_n(r) = (-\nabla^2 + V_{\phi\phi}(r)) \zeta_n(r) = \omega_n^2 \zeta_n(r), \quad (4.17)$$

onde o operador  $H$  pode ser escrita na forma

$$\hat{H} \zeta_n(r) = \left( -\frac{1}{r^{d-1}} \frac{d}{dr} (r^{d-1} \frac{d}{dr}) + \frac{1}{r^{2(d-1)}} (W_{\phi\phi}^2 + W_\phi W_{\phi\phi\phi}) \right) \zeta_n(r). \quad (4.18)$$

Observa-se que o operador  $\hat{H}$  pode ser fatorado como o produto de dois operadores  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , não necessariamente adjuntos um do outro. Estes operadores serão adjuntos para um caso especial  $d = 1$ , nossa observação está dada no Apêndice A.

$$\hat{H} = \frac{1}{r^{2(d-1)}} \left( -r^{d-1} \frac{d}{dr} \mp W_{\phi\phi} \right) \left( r^{d-1} \frac{d}{dr} \mp W_{\phi\phi} \right) = \frac{1}{r^{2(d-1)}} \mathcal{A} \mathcal{B}. \quad (4.19)$$

Explicitamente temos

$$\mathcal{A} = \left( -r^{d-1} \frac{d}{dr} \mp W_{\phi\phi} \right) \quad \text{e} \quad \mathcal{B} = \left( r^{d-1} \frac{d}{dr} \mp W_{\phi\phi} \right).$$

Podemos determinar os estados de mais baixa energia na forma

$$\mathcal{B}\zeta_0 = \frac{1}{r^{d-1}} \left( r^{d-1} \frac{d}{dr} \mp W_{\phi\phi} \right) \zeta_0 = 0,$$

onde obtemos a seguinte equação de primeira ordem

$$r^{d-1} \frac{d\zeta_0}{dr} = \pm W_{\phi\phi} \zeta_0, \quad (4.20)$$

onde obtemos os modos zero da energia

$$\zeta_0(r) = k \exp \left( \pm \int dr r^{1-d} W_{\phi\phi} \right), \quad (4.21)$$

onde  $k$  representa a constante de normalização.

Em [12] foi proposto um modelo com potencial dado por

$$V_p(\phi) = \frac{1}{2r^{2(d-1)}} \phi^2 (\phi^{-1/p} - \phi^{1/p})^2 = \frac{1}{2r^{2(d-1)}} W_\phi^2, \quad (4.22)$$

onde  $p$  é um inteiro. Este modelo pode expressar-se em termos de um superpotencial na forma

$$W = 2p \left[ \frac{\phi^{(2p-1)/p}}{2p-1} - \frac{\phi^{(2p+1)/p}}{2p+1} \right]. \quad (4.23)$$

Analizamos para um caso em particular  $d = 2$ , onde a solução clássica é dada da seguinte maneira

$$\bar{\phi}_\pm^{(2,p)}(r) = \pm \left( \frac{r^{2/p} - 1}{r^{2/p} + 1} \right)^p. \quad (4.24)$$

A energia BPS para este caso em particular está dada na forma

$$E_B = 2\pi[W(\infty) - W(0)] = \frac{8\pi p}{4p^2 - 1}. \quad (4.25)$$

Os modos zero de energia  $\zeta_0 = k\bar{W}_\phi$  podem ser encontrados, e para o caso de  $p = 1$  está dada da seguinte maneira:

$$\zeta_0^{(2,1)}(r) = k \frac{4r^2}{(r^2 + 1)^2}, \quad (4.26)$$

onde o fator  $k$  é o fator de normalização.

Agora normalizando sobre todo o espaço temos  $\Omega_d \int \zeta_0 \zeta_0^\dagger r^{d-1} dr = 1$

$$k^2 \int d\Omega \int_0^\infty r dr \left[ \frac{4r^2}{(r^2 + 1)^2} \right]^2 = 1. \quad (4.27)$$

observamos que para o caso de  $p = 1$  a solução é normalizável

$$k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}}. \quad (4.28)$$

Foi mostrado na referência [12] que para  $p = 2$  o modelo é instável. Uma maneira de ilustrar este procedimento para  $p = 2$  é observando que o modo zero não é normalizável, e pode ser verificado que a flutuação de energia nula possui um nó, e que existe outro estado de energia negativa sem nós. Então não vamos tratar com este caso explicitamente, mas gostaríamos de mencionar que para  $d > 1$  a constante de normalização, não é proporcional ao inverso da energia  $E_B$ .

Os modos zero para o caso de  $p = 2$  pode ser expresso na forma

$$\zeta_0^{(2,2)}(r) = k \overline{W}_\phi = k \frac{4r(r-1)}{(r+1)^3}, \quad (4.29)$$

e por sua vez, tentamos normalizar e calcular os modos zero, para esta condição em especial

$$2\pi k^2 \int_0^\infty r dr \frac{16r^2(r-1)^2}{(r+1)^6} = 1, \quad (4.30)$$

onde observamos que a integral mostra ter divergência, portanto as soluções clássicas do sistema para  $p = 2$ , apresenta instabilidade.

#### 4.1.1 Extensão para modelos com dois campos escalares

No caso de dois campos escalares podemos escrever o potencial  $V(\phi, \chi)$  na forma:

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2r^N} [(W_\phi)^2 + (W_\chi)^2], \quad (4.31)$$

onde  $N = 2(d-1)$  para termos soluções solitônicas estáveis, como no caso com somente um campo escalar. O procedimento para demonstrar que  $N$  deve satisfazer a equação acima é o mesmo que fizemos para o caso de um único campo escalar, sendo que devemos utilizar o mesmo fator de reescalonamento para ambos os campos ou seja  $\phi^\lambda(r) = \phi(\lambda r)$  e  $\chi^\lambda(r) = \chi(\lambda r)$ . Além disto supomos também que as soluções clássicas das equações de

movimento estáticas

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^N} (W_\phi W_{\phi\phi} + W_\chi W_{\chi\phi}), \quad (4.32)$$

e

$$\nabla^2 \chi = \frac{1}{r^N} (W_\phi W_{\phi\chi} + W_\chi W_{\chi\chi}), \quad (4.33)$$

são radiais.

Estamos interessados aqui, assim como no caso de um só campo, em soluções das equações de primeira ordem

$$r^{(d-1)} \frac{d\phi}{dr} = \pm W_\phi, \quad (4.34)$$

e

$$r^{(d-1)} \frac{d\chi}{dr} = \pm W_\chi, \quad (4.35)$$

que são também soluções das equações de segunda ordem. É simples mostrar que estas soluções são aquelas que saturam o limite de Bogomol'nyi. Basta verificar que a energia associada a soluções estáticas

$$E = \frac{1}{2} \int d\Omega \int_0^\infty r^{d-1} dr \left[ ((\nabla\phi)^2 + (\nabla\chi)^2) + \frac{1}{r^{2(d-1)}} (W_\phi^2 + W_\chi^2) \right], \quad (4.36)$$

pode ser reescrita como

$$E = \frac{1}{2} \int d\Omega \int_0^\infty r^{d-1} dr \left[ \left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \left( \frac{d\chi}{dr} \right)^2 + \left( \frac{1}{r^{d-1}} W_\phi \right)^2 + \left( \frac{1}{r^{d-1}} W_\chi \right)^2 \right], \quad (4.37)$$

na qual completamos quadrados, e obtemos:

$$E = \frac{1}{2} \int d\Omega \int_0^\infty r^{d-1} dr \left[ \left( \frac{d\phi}{dr} \mp \frac{W_\phi}{r^{d-1}} \right)^2 + \left( \frac{d\chi}{dr} \mp \frac{W_\chi}{r^{d-1}} \right)^2 \pm 2 \left( \frac{W_\phi}{r^{d-1}} \frac{d\phi}{dr} + \frac{W_\chi}{r^{d-1}} \frac{d\chi}{dr} \right) \right]. \quad (4.38)$$

Para termos energia mínima os dois primeiros termos em (4.38), devem ser nulos, ou seja, as equações de primeira ordem (4.34) e (4.35) devem ser satisfeitas. Então a energia mínima fica dada por

$$\begin{aligned} E_B &= \mp \Omega_d \int \left( W_\phi \frac{d\phi}{dr} + W_\chi \frac{d\chi}{dr} \right) dr = \Omega \int_0^\infty \frac{dW}{dr} dr = \\ &= \Omega |W(\infty) - W(0)|. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Pelo argumento de Derrick e o desenvolvimento levado a cabo em [12] as soluções são estáveis mas, como no caso com somente um campo escalar, não é possível mostrar que o operador hamiltoniano associado à estabilidade das flutuações lineares em torno

das soluções clássicas tem somente autovalores positivos. Como argumentado acima e mostrado no apêndice A, a hamiltoniana é fatorada, como na equação (4.19), em um produto de dois operadores que não necessariamente são adjuntos um do outro. No caso de dois campos escalares a situação fica ainda pior, já que estes operadores assumem a forma matricial e, como descrito no capítulo 3, desta dissertação a diagonalização da hamiltoniana se torna uma tarefa muito difícil; teríamos que proporcionar um caso com soluções clássicas não-nulas, cuja hamiltoniana de estabilidade seja diagonalizável e exatamente solúvel. Mesmo assim, não poderíamos dizer que a estabilidade é garantida para todos os casos.

Suponhamos flutuações lineares em torno das soluções clássicas

$$\phi(r, t) = \bar{\phi}(r) + \sum_n \eta_n(r) \cos(\omega_n t), \quad (4.40)$$

e

$$\chi(r, t) = \bar{\chi}(r) + \sum_n \rho_n(r) \cos(\omega_n t), \quad (4.41)$$

onde  $\bar{\phi}(r)$  e  $\bar{\chi}(r)$  são soluções das equações (4.34) e (4.35) respectivamente. Podemos mostrar que as flutuações obedecem à seguinte equação de estabilidade.

$$\hat{H} \begin{pmatrix} \eta_n \\ \rho_n \end{pmatrix} = \omega_n^2 \begin{pmatrix} \eta_n \\ \rho_n \end{pmatrix}, \quad (4.42)$$

com o operador hamiltoniano  $\hat{H}$  expresso como um produto de dois operadores da forma:

$$\hat{H} = \frac{1}{r^{2(d-1)}} \left( -r^{d-1} \frac{d}{dr} \mathbb{I} - \mathbb{W} \right) \left( r^{d-1} \frac{d}{dr} \mathbb{I} - \overline{\mathbb{W}} \right), \quad (4.43)$$

onde  $\overline{\mathbb{W}}$  é o superpotencial dado pela matriz

$$\overline{\mathbb{W}} = \begin{pmatrix} \overline{W}_{\phi\phi} & \overline{W}_{\phi\chi} \\ \overline{W}_{\chi\phi} & \overline{W}_{\chi\chi} \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

A equação (4.42) resulta em duas equações acopladas, que podem ou não ser desacopladas dependendo do modelo e das soluções clássicas deste. No entanto, podemos sugerir que as flutuações de energia nula (modos zero) ( $\omega_0 = 0$ ), satisfazem à equação diferencial de primeira ordem

$$\left( r^{d-1} \frac{d}{dr} \mathbb{I} - \overline{\mathbb{W}} \right) \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \rho_0 \end{pmatrix} = 0, \quad (4.45)$$

ou seja, os modos zero são aniquilados pelo operador  $\mathbb{A} = r^{d-1} \frac{d}{dr} \mathbb{I} - \mathbb{W}$ . De fato é possível mostrar que as equações acima são resultantes de implementarmos as flutuações de modo zero diretamente nas equações de primeira ordem (4.34) e (4.35). As soluções para as equações (4.45) são dadas por  $\eta_0 = k \overline{W}_\phi$  e  $\rho_0 = k \overline{W}_\chi$ , onde  $k$  é uma constante de normalização, que pode ser obtida impondo que a norma seja igual a unidade, isto é

$$k^2 \int (\eta_0^2 + \rho_0^2) r^{d-1} dr d\Omega = k^2 \Omega_d \int_0^\infty (\overline{W}_\phi^2 + \overline{W}_\chi^2) r^{d-1} dr = 1. \quad (4.46)$$

Por outro lado a energia de Bogomol'nyi  $E_B$  pode ser reescrita como:

$$E_B = \Omega \int_0^\infty dr \frac{1}{r^{d-1}} \left[ \overline{W}_\phi^2 + \overline{W}_\chi^2 \right]. \quad (4.47)$$

Nota-se que para  $d = 1$  temos  $k^2 = E_B^{-1}$ , enquanto para  $d > 1$  isto não ocorre. Então, como a energia BPS é finita e envolve um fator  $r^{-(d-1)}$  no integrando, as flutuações de energia zero podem não ser normalizáveis.

## 4.2 Modelos com um campo escalar construídos a partir de um modelo com dois campos interagentes

Nosso propósito nesta seção é construir modelos com um só campo escalar que exibem soluções clássicas com perfil de kink duplo a partir do modelo com interação de dois campos que tratamos no capítulo 3 desta dissertação. De fato, podemos considerar qualquer modelo de dois campos em 1+1 dimensões, cuja densidade de lagrangiana seja dada pela equação (3.7) com o potencial escrito em termos de um superpotencial como em (3.8).

Nestes casos, as soluções estáticas das equações de primeira ordem dadas por  $\frac{d\phi}{dx} = W_\phi$  e  $\frac{d\chi}{dx} = W_\chi$ , são soluções das equações de movimento estáticas, que minimizam a energia do sistema a energia BPS. A partir destas equações de primeira ordem podemos proceder como na referência [25], e considerar que o elemento diferencial  $dx$ , seja um invariante de tal forma que obtemos uma equação diferencial que relaciona os dois campos

$$\frac{d\chi}{d\phi} = \frac{W_\chi}{W_\phi}. \quad (4.48)$$

Se esta equação, embora não-linear, puder ser integrada, teremos uma relação entre os campos, ou seja, uma equação de órbita, que pode ser usada para eliminar um dos

campos em favor do outro, e assim poderemos resolver as equações de primeira ordem, se não analítica, pelo menos numericamente. Este procedimento foi adotado em [25] para obter uma equação de órbita geral como foi mostrado no capítulo anterior.

Para os casos em que a equação geral da órbita é obtida analiticamente, podemos escrever o campo escalar  $\chi$  em termos de  $\phi$ , tal como  $\chi = f(\phi)$ , e isto pode ser usado para eliminar  $\chi$  em termos de  $\phi$  na densidade lagrangiana (3.7), ou seja,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(1 + f_\phi^2)\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - V(\phi), \quad (4.49)$$

onde  $f_\phi = \frac{df}{d\phi} = \frac{d\chi}{d\phi} = \frac{W_\chi}{W_\phi}$  e ambos,  $W_\phi$  e  $W_\chi$ , são escritos em termos só do campo  $\phi$ .  $V(\phi)$ , é o potencial  $V(\phi, \chi)$  com  $\chi$  escrito em termos de  $\phi$ . Devido à estrutura peculiar do potencial dado em (3.8) e também devido à equação diferencial (4.48) temos que  $V(\phi)$  é dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(1 + f_\phi^2)W_\phi^2. \quad (4.50)$$

A equação de movimento para o modelo de um só campo escalar fica então

$$(1 + f_\phi^2)\partial_\mu\partial^\mu\phi + f_\phi f_{\phi\phi}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (4.51)$$

e a energia associada com as soluções clássicas estáticas é expressa como

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left( \frac{1}{2}(1 + f_\phi^2)\phi'^2 + V(\phi) \right), \quad (4.52)$$

onde  $\phi'$  representa  $\frac{d\phi}{dx}$ . De forma a encontrar a energia mínima, podemos reescrever  $E$  como

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ ((1 + f_\phi^2)^{1/2}\phi' \pm \sqrt{2V})^2 \mp 2(1 + f_\phi^2)^{1/2}\phi'\sqrt{2V} \right], \quad (4.53)$$

e conseqüentemente, as soluções clássicas com energia mínima satisfazem à equação diferencial de primeira ordem

$$\phi' = \mp \left( \frac{2V}{1 + f_\phi^2} \right)^{1/2} = \mp W_\phi, \quad (4.54)$$

onde  $W_\phi = \frac{dW(\phi, \chi)}{d\phi}$  e substituímos  $\chi$  pela função  $f(\phi)$ . É fácil mostrar que as soluções da equação diferencial da primeira ordem são também soluções da equação de movimento estática

$$(1 + f_\phi^2)\phi'' + f_\phi f_{\phi\phi}\phi'^2 = \frac{dV}{d\phi}, \quad (4.55)$$

e a energia BPS é dada por:

$$E_B = \int_{-\infty}^{\infty} dx((1 + f_\phi^2)\phi'W_\phi(\phi, f(\phi))) = |W(\bar{\phi}, f(\bar{\phi}))(+\infty) - W(\bar{\phi}, f(\bar{\phi}))(-\infty)|, \quad (4.56)$$

onde as soluções clássicas  $\bar{\phi}(x)$  são tomadas em  $(+\infty$  e  $-\infty)$ .

Este procedimento assemelha-se ao da referência [24], onde se provou a equivalência entre os modelos de Sine-Gordon, Liouville e outros [33]. Naquela referência as soluções BPS dos modelos em consideração são usadas para construir mapeamentos entre os campos de dois modelos, cuja equivalência entre eles se quer demonstrar. De fato se deforma um modelo conhecido usando-se a função de mapeamento e obtem-se outro modelo conhecido. Naquela referência se mostrou que os modelos possuem a mesma energia BPS quando a deformação é realizada na densidade lagrangiana, o que contrasta quando as deformações são implementadas diretamente nas equações diferenciais como foi feito por Bazeia et al. [11]. Já que não estamos interessados em provar a equivalência entre dois modelos, nos limitamos a trabalhar com lagrangianas efetivas cujas estruturas são do tipo energia cinética menos energia potencial, ou seja,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - U_{ef}(\phi) = \frac{1}{2}\{\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \tilde{W}_\phi^2(\phi)\}, \quad (4.57)$$

onde  $\tilde{W}_\phi(\phi) = W_\phi(\phi, \chi = f(\phi))$ , em vez de trabalhar com densidades de lagrangiana do tipo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(1 + f_\phi^2)\{\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - W_\phi^2(\phi)\}. \quad (4.58)$$

Este procedimento é usado na referência [11] e é mais conveniente quando trabalhamos com campos escalares interagentes com a gravitação, como consideraremos na penúltima seção deste capítulo.

Frisamos o fato de que a equação estática de Euler-Lagrange  $\phi'' = \frac{dU_{ef}}{d\phi}$  resultante da densidade de lagrangiana (4.57), tem as mesmas soluções da equação (4.55). De fato elas são equivalentes.

Observemos que a equação clássica dada em (4.54) leva a

$$\phi'' = \frac{1}{1 + f_\phi^2} \left( V_\phi - \frac{2f_\phi f_{\phi\phi} V}{1 + f_\phi^2} \right), \quad (4.59)$$

que satisfaz as equações de segunda ordem  $\phi'' = W_\phi W_{\phi\phi}$ , indicando-nos que a equação estática  $\phi'' = \frac{dU_{ef}}{d\phi}$  é cumprida.

## 4.2.1 Casos particulares

Nós consideramos o mesmo modelo de interação de dois campos escalares aplicados em cenários de mundos-brana; dados nas referências [13] e [27], cujo superpotencial é da forma da equação (3.15).

Foi mostrado na publicação [25] que as equações de órbita, que relaciona os dois campos podem ser obtidas de maneira explícita e podem ser escritas como:

$$\rho(\chi) = \phi^2 - a^2 = c_0 \chi^{\lambda/\mu} - \frac{\mu}{\lambda - 2\mu} \chi^2, \quad \text{para } \lambda \neq 2\mu, \quad (4.60)$$

$$\rho(\chi) = \phi^2 - a^2 = \chi^2 (\ln(\chi) + c_1), \quad \text{para } \lambda = 2\mu, \quad (4.61)$$

onde  $c_0$  e  $c_1$  são constantes arbitrárias de integração. Em geral só a primeira das equações de órbita (4.60) pode ser utilizada para obter soluções clássicas bem comportadas. Pode verificar-se por exemplo que a segunda equação de órbita (4.61), falha ao reproduzir corretamente os mínimos do modelo,  $\phi = \pm a$  e  $\chi = 0$ , e  $\phi = 0$  e  $\chi = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} a$ . Consideramos  $a > 0$ .

A primeira das equações de órbita pode ser utilizada para construir modelos com um só campo escalar e que apresentam as principais características deste modelo com dois campos escalares interagentes. Como exemplo consideremos a situação para  $\mu = \lambda$ . Neste caso a equação de órbita é dada

$$\chi^2 + c_0 \chi - (\phi^2 - a^2) = 0, \quad (4.62)$$

e o campo  $\chi$  pode ser expressado em termos de  $\phi$  como:

$$\chi = f(\phi) = -\frac{c_0}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{c_0^2 + 4(\phi^2 - a^2)}. \quad (4.63)$$

Substituindo (4.63) com o sinal positivo, na expressão dada  $W_\phi(\phi, \chi = f(\phi))$ , obtemos a seguinte derivada do superpotencial

$$W_\phi(\phi) = 2\mu \left( \phi^2 + b^2 - a^2 + b \sqrt{\phi^2 + b^2 - a^2} \right) \quad \text{com } b = \frac{c_0}{2} < -a. \quad (4.64)$$

Podemos trabalhar com um modelo descrito pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - U_{\text{ef}}, \quad (4.65)$$

com potencial efetivo  $U_{\text{ef}} = W_\phi^2/2$ . Neste modelo a equação diferencial de primeira

ordem que satisfaz  $\phi(x)$  é  $\phi' = \mp W_\phi$ , e as soluções para o campo  $\phi$  são as mesmas obtidas no modelo com dois campos escalares interagentes [25, 27], descrita pela densidade lagrangiana (3.7) com um superpotencial  $W(\phi, \chi)$  dado em (3.15).

Se tomarmos o sinal negativo da expressão (4.63) obtemos um potencial efetivo  $U_{\text{ef}} = W_\phi^2/2$ , com somente um mínimo, nós estamos interessados em potenciais efetivos com ao menos dois mínimos.

A constante  $b = c_0/2$ , deve satisfazer a desigualdade  $b < -a$ , tal que tenhamos soluções não-singulares e um potencial efetivo que apresenta dois mínimos globais e um mínimo local para uma certa região do parâmetro  $b$ . Por outro lado, para  $b = -a$ , temos um potencial efetivo com três mínimos globais. É mostrado na figura 4.1, o comportamento do potencial efetivo dado em unidades de  $\mu^2$ , como função de  $\phi$ , para dois diferentes valores de  $b$  e  $a = 1$ . Podemos observar que para  $b < -a$  o potencial do modelo efetivo, tende a exibir três mínimos à medida que  $b$  se aproxima de  $-a$ . Na realidade para  $b = -a$  o potencial efetivo se torna  $U(\phi) = 2\mu^2(\phi^2 - a|\phi|)^2$ , o qual apresenta um mínimo também em  $\phi = 0$ .

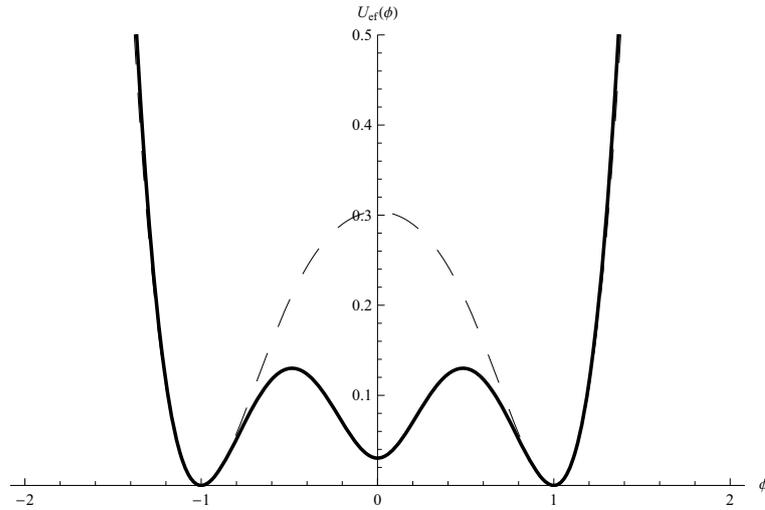


Figura 4.1: Potencial efetivo no caso  $\lambda = \mu$  para  $a = 1$  e  $b = -1,001$  (linha sólida) e  $b = -1,3$  (linha tracejada).

As soluções clássicas da equação diferencial de primeira ordem dada em (4.54), para  $b < -a$  pode ser escrita como

$$\bar{\phi}_+(x) = \pm a \frac{\sinh(2\mu a x)}{\cosh(2\mu a x) - b/f}, \quad (4.66)$$

onde  $f = \sqrt{b^2 - a^2}$  e os sinais positivo e negativo correspondem a soluções kink e antikink respectivamente. A figura 4.2 mostra o perfil da solução clássica topológica, para um valor suficientemente grande de  $|b|$  - com perfil de kink simples - e exibe perfil de kink

duplo para valores de  $b$  perto do valor crítico  $-a$ . Esta classe de soluções surge também nos modelos introduzidos nas referências [13] e [28].

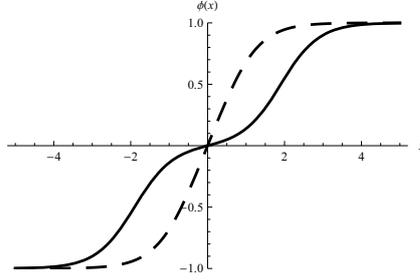


Figura 4.2: Perfis do tipo kink, para  $a=1$  e  $b= -1,001$  correspondem às soluções de kink duplo (linha contínua) e  $b= -1,2$  correspondente a um kink simples (linha tracejada).

Outra escolha do parâmetro  $\lambda$  é  $\lambda = 4\mu$ , conduzindo também a um potencial efetivo não-polinomial que é similar ao caso de  $\lambda = \mu$ . Neste caso a equação da órbita pode ser escrita na forma

$$\chi^2 = \frac{1}{4c_0} [1 \pm \sqrt{1 + 16c_0(\phi^2 - a^2)}], \quad (4.67)$$

Escolhendo a sinal positivo da expressão (4.67), obtemos o seguinte potencial efetivo

$$W_\phi = 4\mu \left( \phi^2 - d^2 + dc\sqrt{\phi^2 - d^2} \right), \quad (4.68)$$

onde  $d = a/\sqrt{c^2 - 1}$  e  $c = 1/\sqrt{1 - 16c_0a^2}$ . Com a finalidade de ter um modelo bem definido, a constante de integração da equação de órbita  $c_0$  deve satisfazer à desigualdade  $c_0 < 1/16a^2$  e as soluções são dadas por

$$\bar{\phi} = \pm a \frac{\sinh(4\mu ax)}{\cosh(4\mu ax) + d}. \quad (4.69)$$

Na figura 4.3 mostramos o perfil da soluções clássicas, para dois valores diferentes do parâmetro  $b$ , mostrando um comportamento similar ao grafico anterior.

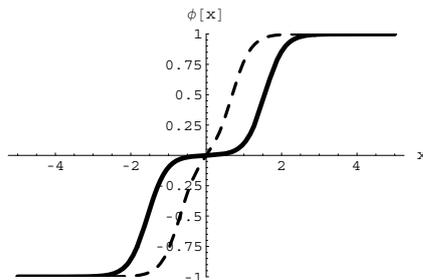


Figura 4.3: Perfil do tipo kink para  $a=1$  e  $d= 0,062499$  corresponde à solução do tipo kink duplo (linha sólida contínua) e para  $d= 0,0615$  corresponde a uma solução tipo kink simples (linha tracejada)

Vale a pena mencionar que o modelo construído neste caso ( $\lambda = 4\mu$ ) é muito similar ao proposto na referência [28], para  $\mu = 1/4$ , se fizermos uma identificação entre o parâmetro  $d$  daqui com o parâmetro  $b_0$  daquela referência. O comportamento do potencial efetivo como uma função de  $\phi$  é também idêntico ao apresentado no caso prévio. Além disso, se o valor crítico é  $c_0 = 1/16a^2$  obtemos um potencial efetivo  $U_{ef} = 8\mu^2(\phi^2 - a|\phi|)^2$ , com três mínimos.

Potenciais efetivos polinomiais também podem ser obtidos a partir do modelo descrito pela densidade lagrangiana (3.7), com  $W(\chi, \phi)$  dado em (3.15). Isto é feito usando a primeira equação de órbita de (4.60) e expressando o campo  $\phi$  como função do campo  $\chi$ . Reescrevemos a órbita convenientemente como:

$$\phi = g(\chi) = \pm \sqrt{c_0 \chi^{\lambda/\mu} - \frac{\mu}{\lambda - 2\mu} \chi^2 + a^2}, \quad (4.70)$$

e obtemos o potencial efetivo dado por:

$$U_{ef} = \frac{1}{2} W_\chi^2 = 2\mu^2 \chi^2 \left( c_0 \chi^{\lambda/\mu} - \frac{\mu}{\lambda - 2\mu} \chi^2 + a^2 \right). \quad (4.71)$$

Este potencial tem ao menos um mínimo em  $\chi = 0$ , e nós temos que fixar  $\lambda/\mu = n$ , onde  $n$  é um inteiro positivo ( $n \neq 2$ ), para termos potenciais bem definidos com pelo menos dois mínimos. Esta última condição conduz a algumas restrições sobre os valores de  $c_0$ . Notemos que para  $\lambda/\mu = 1$  e  $c_0 = \pm 2a$  temos um potencial definido positivo com dois mínimos, agora para  $\lambda/\mu = 4$  e  $c_0 = 1/16a^2$  encontramos um potencial definido positivo com três mínimos, os quais são  $\chi = 0, \pm 2a$ .

Procuramos os valores críticos de  $c_0$  correspondentes a diferentes valores de  $n$ , a fim de ter potenciais efetivos positivos definidos  $U_{ef}(\chi)$  com mais de um mínimo. Notamos que os potenciais efetivos do tipo  $U_{ef}(\phi) = (\phi^2 - a|\phi|)^2$  apresentam soluções clássicas que conectam os mínimos em  $\phi = 0$  com o mínimo  $\phi = +a$  ou  $\phi = -a$  e vice-versa, como foi mencionado no capítulo 3, nas equações (3.30) e (3.32) do tipo kink-IIB. Além disso, recordamos que estes potenciais polinomiais são construídos por substituição da equação de órbita  $\chi = f(\phi)$  em  $W_\phi = \lambda(\phi^2 - a^2) + \mu\chi^2$  e este, por sua vez, é substituído em  $U_{ef} = W_\phi^2/2$ , o qual é positivo definido em todas partes. Se  $\phi = 0$  é um mínimo do potencial efetivo, este deve corresponder a  $\chi = \pm\sqrt{na}$  devido à equação da órbita. Substituindo um desses valores de  $\chi$  no potencial  $U_{ef}(\chi)$  e impondo que sejam mínimos deste último potencial, temos que o valor crítico de  $c_0$  é encontrado na forma

$$c_0^{-1} = a^{n-2} \left( \frac{n}{2} - 1 \right) n^{n/2} \quad (4.72)$$

Exceto para  $n = 1$ , que apresenta dois mínimos, encontra-se potenciais efetivos positivos definidos com três mínimos somente para  $n$  par. Tais tipos de potenciais polinomiais já foram amplamente discutidos na literatura [39]. Estes potenciais polinomiais possuem tipicamente soluções tipo kink as quais conectam os mínimos  $\chi = 0$ , com os outros dois mínimos  $\chi = \pm\sqrt{na}$  e vice-versa. Para  $n = 4$ , temos

$$\bar{\chi}_{II B}^{(2)} = \mp\sqrt{2a} \left( \frac{\cosh(\mu ax) \pm \sinh(\mu ax)}{\sqrt{\cosh(2\mu ax)}} \right). \quad (4.73)$$

Esta última solução tem um perfil kink similar às soluções das equações diferenciais de primeira ordem, para os modelos efetivos do tipo  $U(\phi) = (\phi^2 - a|\phi|)^2$ . Estas soluções podem ser vistas como meia-torção em uma cadeia de spins, e também possuem um perfil similar àqueles que surgem, como soluções auto-consistentes para condensados quirais não-homogêneos, em modelos de Nambu-Jona-Lasinio em  $1 + 1$  dimensões espaço-tempo, [47].

## 4.2.2 Modelos de campos escalares em mais de uma dimensão

Nesta subseção discutimos as soluções do tipo kink em mais dimensões espaciais, tal como foi discutida nas referências [28] e [12]. Tomamos a densidade lagrangiana dada em (4.1) e o potencial dado em (4.2).

Para realizar a análise em mais dimensões, consideramos a seguinte mudança de variável  $dx = \pm r^{1-d} dr$ . Para nosso estudo em  $d$  dimensões espaciais apresentamos os superpotenciais definidos em (4.64) e (4.68) respectivamente.

Para o caso  $d = 2$  fazemos a seguinte mudança de variável  $x = \ln r$  e para os casos em que  $d \geq 3$  fazemos  $x = \frac{r^{2-d}}{2-d}$ .

A solução clássica para  $d = 2$  dimensões, no modelo expressado em (4.64) é dado

$$\phi(r) = a \frac{r^{4\mu a} - 1}{r^{4\mu a} + 1 - 2br^{2\mu a}}, \quad (4.74)$$

apresenta soluções do tipo kink duplo, este tipo de soluções encontradas são similares às soluções apresentadas em [28].

Nas figuras 4.4 e 4.5 mostramos os perfis das soluções para  $d = 2$  e  $d = 3$  respectivamente. Observando que a solução encontrada para  $d = 2$  apresenta uma aparência de kink duplo

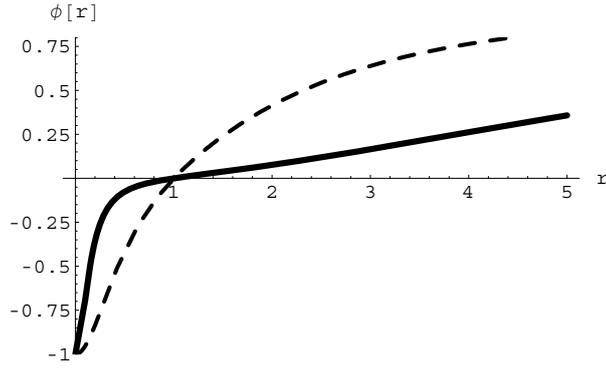


Figura 4.4: Perfil do defeito radial para  $d= 2$  dimensões, para  $b= -1,001$  (linha sólida contínua) e para  $b= -1,1$  (linha tracejada).

A solução clássica para  $d = 3$  dimensões

$$\phi(r) = a \frac{\sinh(-2\mu a/r)}{\cosh(2\mu a/r) - b/f} \quad (4.75)$$

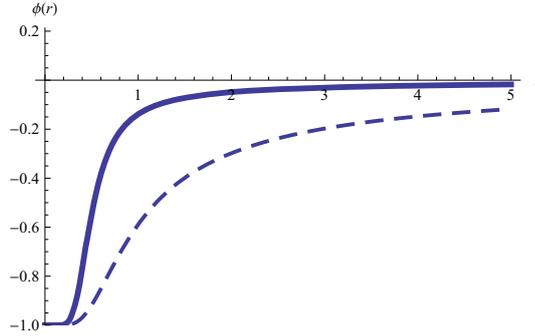


Figura 4.5: Perfil do defeito radial para  $d= 3$  dimensões , para  $b= -1,001$  (linha sólida contínua) e para  $b=-1,1$  (linha tracejada)

No seguinte modelo extraído da equação (4.68) para  $(\lambda = 4\mu)$  a solução para  $d = 2$  é dada por:

$$\phi(r) = a \left( \frac{r^{8\mu a} - 1}{r^{8\mu a} + 1 + 2d'r^{4\mu a}} \right), \quad (4.76)$$

(usamos  $d'$  para não que o parâmetro não seja confundido com o número de dimensões espaciais). A solução encontrada também tem a mesma aparência de kink duplo para uma certa região de valores de  $d'$  e é similar àquela encontrada no trabalho [28].

Na fig 4.6 mostramos dois perfis das soluções para  $d = 2$ , observando que cada perfil apresenta uma aparência de kink duplo

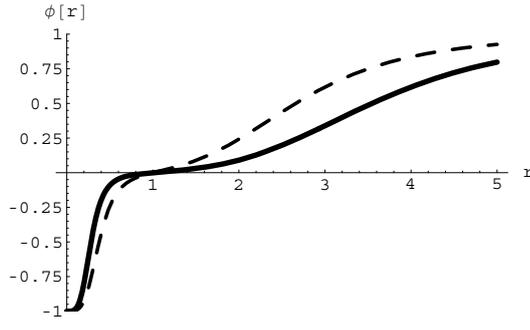


Figura 4.6: Perfil das soluções radiais para  $d = 2$  dimensões no modelo  $\lambda = 4\mu$ , para  $d = 0,06249$  (linha sólida contínua), e para  $d = 0,0624$  (linha tracejada).

A solução estática para três dimensões é expressada na forma

$$\phi(r) = a \left( \frac{\sin(-4\mu a/r)}{\cos(4\mu a/r) + d} \right), \quad (4.77)$$

este tipo de soluções guardam uma similitude com a classe de soluções dadas na referência [28].

Na figura 4.7 mostramos dois perfis das soluções para  $d = 3$ , um primeiro perfil perto do valor crítico (linha sólida contínua) e outro afastado do valor crítico (linha tracejada).

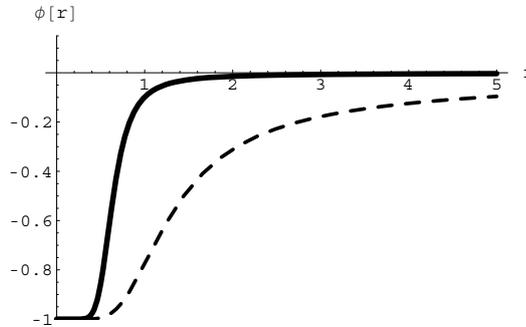


Figura 4.7: Soluções de tipo kink para  $d = 3$  dimensões, para  $d = 0,062499$  (linha sólida contínua), e para  $d = 0,0615$  (linha tracejada).

### 4.3 Aplicações em cenário de mundos-brana

Na última década o estudo de branas espessas tem recebido considerável atenção [23]. Poucos anos atrás, foi observado que algumas classes de modelos, com interação de dois campos escalares, podem ser usados para descrever a separação de branas espessas, como uma transição da fase de primeira ordem em espaço-tempo com geometria deformada [18]. Recentemente foi mostrado que branas espessas podem também aparecer usando modelos com interação de dois campos escalares, que podem ser naturalmente incorporadas em teorias supersimétricas. Além disso, contrário aos cenários apresentados em [18], e [13], onde a separação das branas é controlada por constantes associadas ao potencial de interação, foi mostrado que a espessura de branas pode ser controlada por um parâmetro chamado “parâmetro de degenerescência”, o qual não está presente na densidade lagrangiana do modelo; em vez disto ele é uma das constantes de integração da equação diferencial da órbita [27].

Recentemente um modelo com um só campo escalar que incorpora branas finas e espessas foi proposto por [27]. Este é caracterizado por um potencial de interação não-polinomial com constante de acoplamento que controla a espessura da brana. Esta última propriedade, além do fato de ser não-polinomial, é compartilhada com o Modelo- $p$  introduzido nas referências [12] e [13]. Mas no Modelo- $p$ , as mudanças do parâmetro só podem ser em saltos, o que implica não só em uma mudança no modelo de origem, mas também no fato que só para alguns valores do parâmetro  $p$  a estrutura de kink-duplo pode ser manifestada. Ao contrário, no modelo introduzido em [28], o parâmetro que controla a deformação da brana é um acoplamento do modelo, assim sua variação não modifica a estrutura do modelo e soluções do tipo kink simples podem ser continuamente deformadas em soluções do tipo kink duplo.

Nesta seção aplicamos um dos modelos efetivos construídos na seção anterior em um cenário de mundos-brana e conseguimos realizar, assim como em [28], branas com espessura variável, sendo que a variação da espessura também está associada à variação de uma constante do potencial. A variação da espessura da brana está diretamente associada à variação do perfil do kink (solução clássica das equações de primeira ordem do campo escalar) atingindo um ponto em que se configura, como mencionado no capítulo 3, uma separação de branas, como em uma transição de fase.

Consideremos um campo escalar acoplado à gravidade em (4,1) dimensões do espaço-tempo cuja dinâmica é governada pela ação

$$S = \int d^4x dy \sqrt{|g|} \left( -\frac{1}{4}R + \frac{1}{2}\partial_a\phi g^{ab}\partial_b\phi - V(\phi) \right), \quad (4.78)$$

onde  $g \equiv \text{Det}(g_{ab})$  e a métrica é dada por

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = e^{2A(r)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dr^2, \quad a, b = 0, \dots, 4. \quad (4.79)$$

onde  $r = x^4$  representa a dimensão extra, e  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica minkowskiana com os índices gregos que vão de 0 a 3. O factor  $e^{2A(r)}$  é chamado de factor de deformação e depende somente da dimensão extra.

As equações de movimento estáticas provém da ação (4.77) e para que o campo escalar dependente somente da dimensão extra, podemos escrever:

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + 4\frac{dA}{dr}\frac{d\phi}{dr} = \frac{dV(\phi)}{d\phi}, \quad (4.80)$$

$$\frac{d^2A}{dr^2} = -\frac{2}{3}\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2, \quad (4.81)$$

$$\left(\frac{dA}{dr}\right)^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 - \frac{1}{3}V(\phi). \quad (4.82)$$

Considerando que o potencial pode ser escrito na forma

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\left(\frac{dW(\phi)}{d\phi}\right)^2 - \frac{4}{3}(W(\phi))^2, \quad (4.83)$$

onde  $W(\phi)$  é um superpotencial do tipo não-polinomial.

As seguintes equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{dW(\phi)}{d\phi} \quad \text{e} \quad \frac{dA}{dr} = -\frac{2}{3}W(\phi), \quad (4.84)$$

são as soluções das equações diferenciais de segunda ordem dadas pelas equações (4.80), (4.81) e (4.82).

Podemos determinar o superpotencial  $W(\phi)$  integrando (4.64)

$$W(\phi) = 2\mu \left[ \phi\left(\frac{\phi^2}{3} + f^2 + \frac{b}{2}\sqrt{\phi^2 + f^2}\right) + \frac{df^2}{2}\sinh^{-1}\left(\frac{\phi}{f}\right) \right]. \quad (4.85)$$

Determinamos o fator de deformação pela integração da segunda equação (4.84) com solução clássica (4.66) substituída em  $W(\phi)$ . Mostramos na figura 4.8 dois perfis do fator de deformação para dois valores diferentes do parâmetro  $b$ , um deles perto e outro longe do valor crítico. Observamos que para  $b$  perto a do valor crítico o fator de deformação apresenta uma região plana o qual torna notável a presença da métrica minkowskiana

dentro da parede de domínio. Enquanto que o parâmetro  $b$  distante do valor crítico, o fator de deformação apresenta a forma de um sino dentro da parede de domínio.

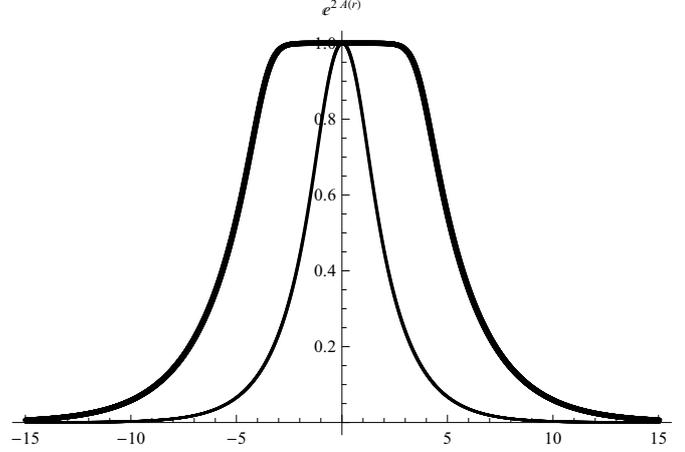


Figura 4.8: Fator de deformação avaliada para dois valores diferentes de  $b$ , um deles perto o valor crítico  $b=-1,001$  (linha sólida) e outro afastado do valor crítico  $b=-1,3$  (linha fina)

### 4.3.1 Estabilidade e modos zero

Consideremos a estabilidade do sistema analisando as equações de movimento para pequenas flutuações ao redor das soluções clássicas. Este assunto é importante para realizar a localização da gravidade dentro da parede de domínio [41, 30, 31]. Isto é feito por meio de uma perturbação da métrica, tal como foi mencionado nas referências [13, 30, 31], ou seja,

$$ds^2 = e^{2A(r)}(\eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu - dr^2, \quad (4.86)$$

onde  $\varepsilon$  é um número pequeno e  $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(r, x_\mu)$  representa as flutuações da métrica. Tomamos também pequenas perturbações ao redor das soluções clássicas  $\phi \rightarrow \phi(r) + \varepsilon \tilde{\phi}(r, x_\mu)$ , realizando perturbações na densidade lagrangiana, e expandindo até ordem  $\theta(\varepsilon)$ , obtemos a seguinte equação de movimento para a flutuação do campo escalar

$$e^{-2A} \square \tilde{\phi} - 4 \frac{dA}{dr} \frac{d\tilde{\phi}}{dr} - \frac{d^2 V}{d\phi^2} \tilde{\phi} = \frac{1}{2} \frac{d\phi}{dr} \eta^{\mu\nu} \frac{dh_{\mu\nu}}{dr}, \quad (4.87)$$

e para o caso das flutuações da métrica, temos:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} + e^{2A} \left( \frac{1}{2} \frac{d}{dr} + 2 \frac{dA}{dr} \right) \frac{dh_{\mu\nu}}{dr} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (\partial_\mu \partial_\nu h_{\alpha\beta} - \partial_\mu \partial_\nu h_{\beta\nu} - \partial_\nu \partial_\alpha h_{\beta\mu}) + \\ & + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} e^{2A} \frac{dA}{dr} \partial_r (\eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}) + \frac{4}{3} e^{2A} \eta_{\mu\nu} \frac{dV}{d\phi} \tilde{\phi} = 0. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Em geral, se torna difícil levar em conta as flutuações lineares de todos os componentes da métrica em conjunto com as flutuações da brana a fim de ter uma visão ampla da estabilidade linear de todo o sistema. Isto é devido ao fato de que o referido conjunto de equações diferenciais acopladas é muito difícil de ser resolvido. Ainda assim é possível mostrar que a parte transversal e de traço nulo das flutuações da métrica ( $\bar{h}_{\mu\nu}$ ) desacoplam das flutuações do campo escalar [31] e [30]. Construindo  $\bar{h}_{\mu\nu} = P_{\mu\nu\alpha\beta} h^{\alpha\beta}$  a partir do projetor

$$P_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}(\pi_{\mu\alpha}\pi_{\nu\beta} + \pi_{\mu\nu}\pi_{\alpha\beta}) - \frac{1}{3}\pi_{\mu\nu}\pi_{\alpha\beta}, \quad (4.89)$$

com  $\pi_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square}$ , temos que a equação (4.88), pode ser simplificada para

$$\frac{d^2 \bar{h}_{\mu\nu}}{dr^2} + 4 \frac{dA}{dr} \frac{d\bar{h}_{\mu\nu}}{dr} - e^{-2A} \partial_\rho \partial^\rho \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (4.90)$$

Usando separação de variáveis e expressando  $\bar{h}_{\mu\nu}$  convenientemente como

$$\bar{h}_{\mu\nu} = e^{ik_\mu x^\mu} e^{-\frac{3}{2}A(r)} \xi_{\mu\nu}(r), \quad (4.91)$$

nós encontramos, fazendo uso da transformação de variável  $z = \int e^{-A(r)} dr$ , que  $\xi_{\mu\nu}(z)$  satisfaz a equação de estabilidade do tipo Schrödinger

$$-\frac{d^2 \xi_{\mu\nu}}{dz^2} + V_{ef}(z) \xi_{\mu\nu} = k^2 \xi_{\mu\nu}, \quad (4.92)$$

onde o potencial efetivo é dado por:

$$V_{ef}(z) = \frac{9}{4} \left( \frac{dA}{dz} \right)^2 + \frac{3}{2} \frac{d^2 A}{dz^2}, \quad (4.93)$$

Mostramos na figura 4.9 o potencial efetivo versus a variable  $r$  para dois diferentes valores de  $b$ ; um deles perto e outro afastado do valor crítico. É possível notar que a forma do potencial efetivo para valores de  $b$  muito afastados do valor crítico é similar à forma do potencial apresentada em [41]. Assim, a única solução de estado ligado corresponde a de modo zero, a qual pode ser vista como a localização da gravidade dentro da parede de domínio. Os modos mais elevados de energia são estados não-localizados que podem escapar da parede de domínio e propagar-se ao longo da dimensão extra. Em qualquer caso, não importa quão grande seja o valor de  $|b|$ , não existe espaço para modos taquionicos ( $k^2 < 0$ ). O operador diferencial na equação (4.92), pode ser fatorado como o produto de dois operadores, um adjunto do outro:

$$a^\dagger a \xi_{\mu\nu}(z) \equiv \left( \frac{d}{dz} + \frac{3}{2} \frac{dA}{dz} \right) \left( -\frac{d}{dz} + \frac{3}{2} \frac{dA}{dz} \right) \xi_{\mu\nu}(z) = k^2 \xi_{\mu\nu}(z), \quad (4.94)$$

Os autovalores  $k^2 \geq 0$  devem ser não-nulo para termos de estabilidade.

Particularmente a autofunção de energia nula não-normalizada é dada por  $\xi_{\mu\nu}^{(0)}(z) = e^{(3/2)A(z)}$  e a correspondente parte transversal e de traço nulo da flutuação da métrica não apresenta dependência com a dimensão extra.

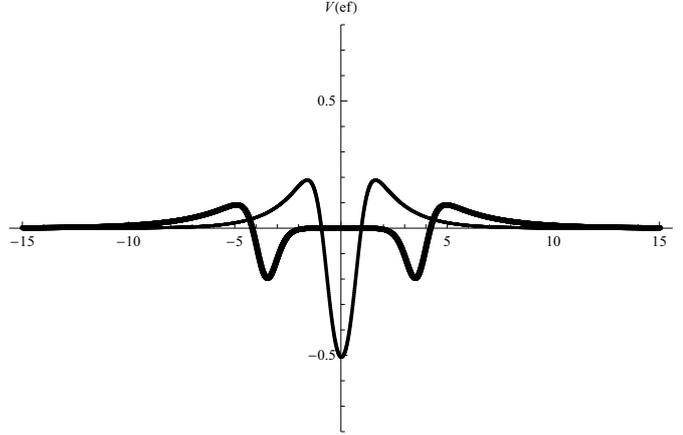


Figura 4.9: Potencial efetivo na equação efetiva de Schrödinger para flutuações da métrica avaliado para  $b = -1,001$  correspondente à (linha sólida) e  $b = -1,2$  correspondente à (linha fina).

Outro aspecto dos modelos não-polinomiais, que é compartilhado com outros modelos, é o comportamento da densidade de energia da matéria. Esta é dado por:

$$\epsilon(r) = e^{4A(x)} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d\bar{\phi}(r)}{dx} \right)^2 + V(\bar{\phi}(r)) \right), \quad (4.95)$$

onde  $V(\bar{\phi}(r))$  é o potencial dado em (4.83) avaliado na solução clássica.

O comportamento da densidade de energia da matéria é mostrado na figura 4.10, para dois diferentes valores do parâmetro  $b$ . As características que têm em comum com outros modelos são: o pico de densidade de energia ao redor da brana fina, que pode ser visto para valores de  $b$  muito afastados do valor crítico a presença de regiões fora das paredes do domínio onde a densidade de energia da matéria é negativa. Esta é também uma característica comum nos modelos com branas espessas, tal como foi observado nas referências [27, 13].

Observemos que, apesar da energia de matéria ser negativa, o funcional de energia [46]

$$F = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{4A(r)} \left[ \left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2 + 2V(\phi) - 6 \left( \frac{dA}{dr} \right)^2 \right], \quad (4.96)$$

sempre é definido positivo. Este funcional de energia gera as equações de Euler-Lagrange (4.80)-(4.82), e é mínimo para soluções das equações diferenciais da primeira ordem (4.83),

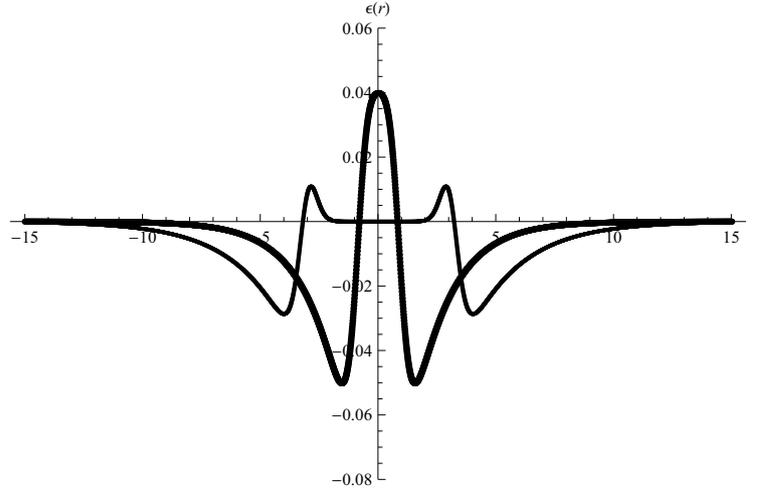


Figura 4.10: Densidade de energia da matéria para o caso  $\lambda = \mu$  para  $a = 1$ ,  $b = -1,001$  (linha fina) e para  $b = -1,3$  (linha sólida)

uma vez que podemos reescrevê-lo como:

$$F = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dr \left[ e^{4A(r)} \left[ \left( \frac{d\phi}{dr} \mp W_{\phi} \right)^2 - 6 \left( \frac{dA}{dr} \pm \frac{2}{3} W \right)^2 \right] \pm \frac{d}{dr} (e^{4A(r)} W) \right] \quad (4.97)$$

$$F = \pm e^{4A(r)} (W(\phi(\infty)) - W(\phi(-\infty))).$$

Note-se que  $(W|_{\phi(\infty)} - W|_{\phi(-\infty)})$  é maior (menor) que zero se escolhermos o sinal positivo (negativo). Esta energia desempenha um papel de energia topológica  $E_{BPS}$  neste cenário de interação de campos escalares com a gravitação em (4,1) dimensões com deformação espaço-tempo.

# Capítulo 5

## Conclusões e comentários

Neste trabalho estudamos a estabilidade de soluções topológicas presentes em alguns modelos de teoria de campos com dois campos interagentes. Estudamos como podemos ter estabilidade desta soluções de energia finita que se propagam sem se deformar, chamadas de sólitons. O estudo foi feito considerando soluções de modelos em uma dimensão espacial e uma dimensão temporal, estudadas por Rajaraman [43] e outros autores na literatura. Tais autores discutiram a questão da estabilidade das soluções clássicas com energia finita sob pequenas flutuações lineares. Fizemos uma breve revisão no capítulo 2 sobre o argumento de Derrick que restringe a estabilidade de modelos com somente campos escalares ao caso de uma dimensão espacial.

No capítulo 3, discutimos a estabilidade para dois campos escalares, enfocando nosso interesse em demonstrar que o argumento da estabilidade desenvolvido nas referências [15] e [5] não concordam com os argumentos que desenvolvemos pelo que discordamos com a análise da estabilidade feita na aquelas referências.

No capítulo 4, continuamos com a análise da estabilidade em  $d$  dimensões. Reproduzimos a proposta de Bazeia et al. [12], para eludir o argumento de Derrick.. Em nossa análise observamos que a hamiltoniana de estabilidade em  $d$  dimensões espaciais não pode ser fatorada como o produto de dois operadores adjuntos um do outro, e portanto não a positividade dos autovalores associados ao operador hamiltoniano não é garantida independentemente do modelo considerado, como se afirma em [12]. Analisamos também o modelo  $p$  estabelecido por Bazeia et al. [12], observando que este modelo não é completamente estável para todos os valores de  $p$ , contradizendo os argumentos de estabilidade que eles apresentam.

Construímos modelos efetivos com somente um campo escalar auto-interagente a partir de modelos com dois campos escalares. Aplicamos um destes modelos efetivos em um

cenário de mundos-brana com uma dimensão extra em (4,1) dimensões espaço-tempo, onde analisamos a influência de soluções estáticas de um campo escalar sobre a deformação geométrica do espaço e a localização da gravidade em uma brana que representa uma parede de domínio. Enfatizamos nossa análise no estudo da separação das branas e conjecturamos que estas podem descrever a formação de dois universos. Estes modelos efetivos não-polinomiais podem descrever uma transição de fase caracterizada por uma separação de domínios, por meio da variação de um dos parâmetros do modelo, onde este parâmetro pode depender da temperatura.

Nosso trabalho pode ser estendido para construir modelos efetivos com um campo escalar provenientes de modelos de dois campos escalares ricos em estrutura. Um dos modelos de nosso interesse é dado por o potencial  $V(\phi, \chi) = \bar{\lambda}\phi + \bar{\mu}\chi - \lambda/4(\phi^4 + \chi^4 + 6\phi^2\chi^2)$ . Este modelo efetivo a construir será aplicado em cenários de mundos-brana, para analisar os aspectos gerais da separação da espessura das branas.

Podemos analisar também o caso das branas críticas para o potencial efetivo na forma  $U_{ef}(\phi) = 2\mu^2(\phi^2 - |a|)^2$ , quando a brana se separa em duas. Suponhamos que a brana tenha uma distância  $2L$ , localizada ao redor do núcleo de cada uma das soluções clássicas do tipo  $\phi_-(r) = -a/2(1 - \tanh[2\mu a(r + L)])$  e  $\phi_+(r) = a/2(1 + \tanh[2\mu a(r - L)])$ . Nosso interesse é analisar o que acontece com o fator de deformação e as flutuações da métrica sob a influência de ambos campos escalares simultaneamente. Esta análise poderá ser feita seguindo a mesma aproximação numérica adotada na referência [51], onde foi obtido o espectro de férmions em interação com um kink e um antikink, que estão muito distantes um do outro. Pensamos que o potencial efetivo para as flutuações da métrica terá a forma de dois vulcões, cujas crateras estão separadas de uma distância  $2L$  uma da outra. Este potencial efetivo pode suportar autovalores e autofunções de modo zero, que pode ter picos ao redor de cada brana ou um pico na região entre as branas.

Outro ponto de interesse é analisar as correções quânticas da energia BPS em modelos com dois campos escalares interagentes entre si, incluindo-se termos de interação de férmions com os campos escalares. A idéia aqui é investigar como as flutuações quânticas fermiônicas influenciam na energia BPS de dois campos escalares interagentes. Nesta análise esperamos encontrar que os modos zero fermiônicos tenham papel fundamental no fracionamento no número fermiônico [51].

# Referências Bibliográficas

- [1] ABDALA, E.. Teoria quântica da gravitação: Cordas e teoria M. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v.27, p.147-155, 2005.
- [2] BAZEIA, D.; dos SANTOS, M. J.; RIBEIRO, R. F.. Solitons in systems of coupled scalar fields. **Physical Letter A**, v.208, p.84-88, 1995.
- [3] BAZEIA, D.; SANTOS, M. M.. Classical stability of solitons in systems of coupled scalar fields. **Physics Letters A**, v.217, p.28-30, 1996.
- [4] BAZEIA, D.; RIBEIRO, R. F., SANTOS, M. M.. Solitons in a class of systems two coupled real scalar fields. **Physical Review E**, v.54, p.2943-2948, 1996.
- [5] BAZEIA, D.; NASCIMENTO J.; RIBEIRO, R.; TOLEDO, D.. Soliton stability in systems of two real scalar fields. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v.30, p.8157-8166, 1997.
- [6] BAZEIA, D; VENTURA, E.. Topological twistons in crystalline polyethylene. **Chemical Physics Letters**, v.303, p.341-346, 1999.
- [7] BAZEIA, D.; BOSCHI-FILHO, H.; BRITO, F.A.. Domain defects in systems of two real scalar fields. **The Journal of High Energy Physics**, v.04, p.028, 1999.
- [8] BAZEIA, D.; BRITO, F. A.. Bags, junctions, and network of BPS and non-BPS defects. **Physical Review D**, v.61, p.5019, 2000.
- [9] BAZEIA, D.; LEITE, V. D. P.; LIMA, B. H. B; MORAES, F.. Soliton model for proton conductivity in Langmuir films. **Chemical Physics Letters**, v.340, p.205-210, 2001.
- [10] BAZEIA, D.. Scalar Fields: From Domain Walls to nanotubes and fullerenes. **Brazilian Journal of Physics**, v.32, p.869-879, 2002.
- [11] BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MALBOUISSON, J. M. C.. Deformed defects. **Physical Review D**, v.66, p.1701, 2002.

- [12] BAZEIA, D.; MENEZES, J; MENEZES, R.. New global defect structure. **Physical Review Letters**. v.91, p.1601, 2003.
- [13] BAZEIA, D.; GOMES A.. Bloch Brane. **The Journal of High Energy Physics**. v.0405, p.012, 2004.
- [14] BAZEIA, D.; FURTADO, C.; GOMES A.. Brane structure from a scalar field in warped spacetime. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v.02, p.002, 2004.
- [15] BOYA, L. J.; CASAHORRAN, J.. Normal-mode diagonalization for two-component topological kink. **Physical Review A**, v.39, p.4298-4300, 1989.
- [16] BOGOMOL'NYI, E. A.. The stability of classical solutions. **Soviet Journal of Nuclear Physics**, v.24, p.449-454, 1976.
- [17] BULLOUGH, R. K.; CAUDREY, P. J.. **Topics in Currents Physics**, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1980.
- [18] CAMPOS, A.. Critical phenomena of Thick Branes in warped spacetimes. **Physical Review Letters**, v.88, p.141602, 2002.
- [19] COOPER, F.; KHARE, A.; SUKHATME, U.. Supersymmetry and Quantum Mechanics. **Physics Reports**, v.251, p.267-385, 1995.
- [20] CHUMBES, A. R.; HOTT, M. B.. Non-polynomial potentials with deformable topological structure. arXiv:0905.4715v1 [hep-th], 2009.
- [21] DODD, R. K.; EILBEK, J. D.; GIBBON, J.D.; MORRIS, H.C.. **Solitons and non-linear wave equation**, Academic Press, London, England, 1982.
- [22] DERRICK, G. H.. Comments on nonlinear wave equations as model for elementary particles. **Journal of Mathematical and Physics**, v.5, p.1252-1254, 1964.
- [23] DZHUNUSHALIEV, V.; FOLOMEEV, V.; MINAMITSUJI, M.. Thick Brane solutions. arXiv:gr-qc/0904.1775v3, 2009.
- [24] de SOUZA DUTRA, A.; FARIA JR., A. C.. Classical versus quantum equivalence between Sine-Gordon, Liouville and other solitons. **Czechoslovak Journal of Physics**, v.54, p.1229-1234, 2004.
- [25] de SOUZA DUTRA, A.. General solutions for some classe of interacting two field kinks. **Physics Letters B**, v.626, p.249-255, 2005.

- [26] de SOUZA DUTRA, A.; HOTT, M. B.; BARONE, F. A. Two field BPS solutions for generalized Lorentz breaking models. **Physical Review D**, v.74, p.085030, 2006.
- [27] de SOUZA DUTRA, A.; FARIA JR., A. C.; HOTT, M. B.. Degenerate and critical Bloch branes. **Physical Review D**, v.78, p.043526, 2008.
- [28] de SOUZA DUTRA, A. .Continuously deformable topological structure. **Physica D**, v.238, p.798, 2009.
- [29] de SOUZA DUTRA, A.; FARIA JR., A. C.; HOTT, M. B.. Degenerate and critical domain walls and accelerating universes driven by bulk particles, arXiv:0903.5533 [hep-th], 2009
- [30] DEWOLFE, O.; FREEDMAN, D. Z.. Notes on Fluctuations and Correlation Functions in Holographic Renormalization Group Flows, arXiv:0002226v1 [hep-th], 2000.
- [31] DEWOLFE, O.; FREEDMAN, D. Z.; GUDSER, S. S.; KARCH, A.. Modeling the fifth dimension with scalars and gravity. **Physical Review D**, v.62, p.046008, 2000.
- [32] ELLENBERGER, G. E.. **Solitons: Mathematical Methods for Physicists**, Springer-Verlag, New York, United State of America, 1993.
- [33] FARIA JR., A. C.. **Equivalência Clássica e Quântica entre Sólitos**, Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2005.
- [34] FARIA JR., A. C.. **Gravitação e Sólitos**, Tese (Doutorado em Física) – Faculdade Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2008.
- [35] JACKIW, R.; REBBI, C.. Solitons with fermion number 1/2. **Physical Review D**, v.13, p.3398-3408, 1976.
- [36] JACKIW, R.. Quantum meaning of classical field theory. **Review of Modern Physics**, v.49, p.681-705, 1977.
- [37] KIRZHNITS, D. A.. Weinberg Model of the Universe. **Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters**, Translated from Zh. Eksp. Teor. Fiz., Pis'ma Red, v.15, p.745, 1972.
- [38] LEE, T. D.. **Particle Physics and Introduction to Field Theory**, Harwood Academic Publishers, Amsterdam, Holland. 1988.

- [39] LOHE, M. A.; O'BRIEN, D. M.. Soliton mass corrections and explicit models in two dimensions. **Physical Review D**, v.23, p.1771-1780, 1981.
- [40] LEMOS, N.. **Mecânica Analítica**, Editoria Livraria da Física 2ª edição, São Paulo, Brasil, 2007. RUSSELL, S. J. **Report on Waves**, 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, John Murray, London, England, 1844.
- [41] GREMM, M.. Four-dimensional gravity on a thick domain wall. **Physics Letters B**, v.478, p.434-438, 2000.
- [42] RANDALL, L.; SUNDRUM, R.. Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension. **Physical Review Letters**, v.83, p.3370, 1999. An Alternative to Compactification. **Physical Review Letters**, v.83, p.4690, 1999.
- [43] RAJARAMAN, R.; WEINBERG, E.. Internal symmetry and the semiclassical method in quantum field theory. **Physical Review D**, v.11, p.2950-2966, 1975.
- [44] RAJARAMAN, R.. Solitons of coupled Scalar Field Theories in Two Dimensions. **Physical Review Letters**, v.42, p.200-204, 1979.
- [45] RAJARAMAN, R.. **An introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory**, North-Holland Press, Amsterdam, Holland, 1982.
- [46] SKENDERIS, K.; TOWNSEND, P. K.. Gravitational stability and renormalization-group flow. **Physics Letters B**, v.468, p.46-51, 1999.
- [47] SHEI, S. S.. Semiclassical bound states in a model with Chiral symmetry. **Physical Review D**, v.14, p.535-546, 1976.
- [48] SKYRME, T. H.. **A Non-Linear Field Theory**. Proceedings of the Royal Society A, v.262, p.237, 1961.
- [49] VACHASPATY, T.. **Kinks and Domain Walls: An Introduction to Classical and Quantum Solitons**, Cambridge University Press, Cambridge, England, 2006.
- [50] WEINBERG, S.. Gauge and global symmetries at high temperature. **Physical Review D**, v.9, p.3357-3378, 1974.
- [51] YI-ZEN C.; VACHASPATY, T.. Fermions on one or fewer kinks. **Physical Review D**, v.77, p.025006, 2008.
- [52] ZEL'DOVICH, YA. B.; NOVIKOV, I. D.. **Relativistic Astrophysics, The Structure and Evolution of the Universe**, University of Chicago Express, Chicago, United State of America, v.2, 1983.

# Apêndice A

## Operadores não-adjuntos

A equação (4.19), expressa a hamiltoniana como o produto de dois operadores  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , dados por:

$$\mathcal{B} = r^{d-1} \frac{d}{dr} + \overline{W}_{\phi\phi}, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathcal{A} = -r^{d-1} \frac{d}{dr} + \overline{W}_{\phi\phi}, \quad (\text{A.2})$$

ou seja,

$$\hat{H} = \frac{1}{r^{2(d-1)}} \mathcal{A}\mathcal{B} \quad (\text{A.3})$$

Mostramos que os operadores  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , só são adjuntos um do outro em circunstâncias muito especiais. Considere a integral

$$\mathcal{I} = \Omega \int_0^\infty \left( \psi^\dagger \left( r^{d-1} \frac{d}{dr} + \overline{W}_{\phi\phi} \right) \psi \right)^\dagger r^{d-1} dr = \quad (\text{A.4})$$

$$= \Omega \int_0^\infty \psi \left( r^{d-1} \frac{d}{dr} \psi^\dagger + \overline{W}_{\phi\phi} \psi^\dagger \right) r^{d-1} dr. \quad (\text{A.5})$$

Esta integral pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \Omega \int_0^\infty \left( \frac{d}{dr} (r^{2(d-1)} \psi \psi^\dagger) - \psi^\dagger \frac{d}{dr} (r^{2(d-1)} \psi) + r^{d-1} \overline{W}_{\phi\phi} \psi^\dagger \psi \right) dr = \\ &= \Omega [r^{2(d-1)} \psi \psi^\dagger |_0^\infty - \int_0^\infty \psi^\dagger r^{d-1} \left( \frac{d}{dr} \psi \right) r^{d-1} dr - \\ &\quad - \int_0^\infty \psi^\dagger \psi 2(d-1) r^{2d-3} dr + \int_0^\infty r^{d-1} \overline{W}_{\phi\phi} \psi^\dagger \psi dr]. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Reagrupando os termos, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \Omega \int_0^\infty \psi^\dagger \left( -r^{d-1} \frac{d}{dr} + \overline{W}_{\phi\phi} \right) \psi r^{d-1} dr \\
&- \Omega \left( 2(d-1) \int_0^\infty \psi^\dagger \psi r^{2d-3} dr + r^{2(d-1)} \psi^\dagger \psi \Big|_0^\infty \right), \\
&= \Omega \left( \int_0^\infty \psi^\dagger A \psi r^{d-1} dr - \left( 2(d-1) \int_0^\infty \psi^\dagger \psi r^{2d-3} dr + r^{2(d-1)} \psi^\dagger \psi \Big|_0^\infty \right) \right). \quad (\text{A.7})
\end{aligned}$$

Observamos que os operadores  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  não são adjuntos um do outro devido a fato que o segundo e terceiro termos da equação (A.7) são, em geral, diferentes de zero. Se tomássemos  $d = 1$  em (A.7), o segundo e terceiro seriam nulos, já que estamos considerando  $\psi$  uma função de quadrado integrável e bem comportadas nos extremos. Assim não se pode garantir que  $\widehat{H}$  como escrito em (A.3) não tem sempre autovalores positivos como acontece quando  $d = 1$  como discutido no capítulo 2. Assim a abordagem feita em [12] para se ter modelos estáveis com somente campos escalares em  $d$  dimensões espaciais ( $d > 1$ ) não implica que, independentemente do modelo utilizado, as soluções clássicas de energia finita serão estáveis sob flutuações lineares. A positividade do operador hamiltoniano deve ser analisada caso a caso.

# Apêndice B

## Equações de movimento

Demonstramos como obter as equações de movimento para o campo escalar escrito, a partir da equação (4.80), bem como as equações (4.81) e (4.82), seguimos o procedimento adotado na referência [34]. Demonstraremos as equações de Euler-Lagrange, a partir da ação (4.78)

$$\partial^a \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta [\partial_a \phi(x)]} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi(x)} = 0. \quad (\text{B.1})$$

Considerando somente a ação do campo escalar, incluindo o fator de deformação  $\exp[A(r)]$ , temos

$$S_{esc} = \int d^4x dr e^{4A(r)} \left[ \frac{1}{2} e^{2A(r)} \left( \sum_{i=1}^3 (\partial_i \phi)^2 - (\partial_0 \phi)^2 \right) + \frac{1}{2} (\partial_r \phi)^2 - V(\phi) \right]. \quad (\text{B.2})$$

Então, para o caso estático e considerando que  $\phi$  é função somente da variável  $r$ , temos

$$\partial^a \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_a \phi)} \right) = -4 \frac{dA}{dr} e^{4A} \frac{d\phi}{dr} - e^{4A} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right), \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} = -e^{4A} \frac{dV}{d\phi}. \quad (\text{B.4})$$

De forma que obtemos a equação de movimento

$$\partial^a \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_a \phi)} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} = e^{4A} \left( -4 \frac{dA}{dr} \frac{d\phi}{dr} - \frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{dV}{d\phi} \right) = 0, \quad (\text{B.5})$$

da qual resulta a equação (4.80), ou seja

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + 4\frac{dA}{dr}\frac{d\phi}{dr} = \frac{dV}{d\phi}. \quad (\text{B.6})$$

Também argumentamos como obter as equações (4.81), (4.82), a partir das equações de Einstein. Seguindo o procedimento feito nas referências [34] e [31].

Levando-se em conta a dimensão extra consideremos a equação de Einstein em (4,1) dimensões

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi GT_{ab}, \quad (\text{B.7})$$

onde  $G$  é a constante de Newton,  $R_{ab}$  e  $R$  representa o tensor de Ricci e o escalar de curvatura, respectivamente. O tensor de Ricci é dado por

$$R_{ab} = R_{acb}^c = \partial_c\Gamma_{ba}^c - \partial_b\Gamma_{ca}^b + \Gamma_{ba}^d\Gamma_{cd}^e - \Gamma_{ca}^d\Gamma_{bd}^e, \quad (\text{B.8})$$

onde  $\Gamma_{ca}^b$  são os símbolos de Christoffel e estão dados por

$$\Gamma_{ca}^b \equiv \frac{1}{2}g^{bd}(\partial_c g_{da} + \partial_a g_{dc} - \partial_d g_{ca}). \quad (\text{B.9})$$

Como  $g_{00} = e^{2A(r)} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33}$  e  $g_{44} = -1$ , encontramos que os elementos não nulos do tensor de Ricci são

$$R_{\mu\nu} = e^{2A} \left( 4 \left( \frac{dA}{dr} \right)^2 + \left( \frac{d^2A}{dr^2} \right) \right) \eta_{\mu\nu}, \quad (\text{B.10})$$

onde  $\mu, \nu = 0, \dots, 3$ . O escalar de curvatura fica então dado por

$$R = R_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}. \quad (\text{B.11})$$

Como

$$T_{ab} = T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2}(\partial_\alpha\phi)^2 - V(\phi) \right), \quad (\text{B.12})$$

a equação (B.7) resulta nas seguintes equações

$$\frac{d^2A}{dr^2} = -\frac{2}{3} \left( \frac{d\phi}{dr} \right), \quad (\text{B.13})$$

e

$$\left( \frac{dA}{dr} \right) = \frac{1}{6} \left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2 - \frac{1}{3}V(\phi). \quad (\text{B.14})$$