

Daisy Paes Silva

**Funções Penalidade para o Tratamento das  
Variáveis Discretas do Problema de Fluxo  
de Potência Ótimo Reativo**

**Bauru – SP**

**Março de 2016**

**Daisy Paes Silva**

**Funções Penalidade para o Tratamento das Variáveis  
Discretas do Problema de Fluxo de Potência Ótimo  
Reativo**

Dissertação apresentada à Faculdade de  
Engenharia de Bauru para obtenção do título  
de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Automação

Linha de Pesquisa: Sistemas de Ener-  
gia

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"

Faculdade de Engenharia de Bauru – FEB

Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica

Orientador: Professora Doutora Edilaine Martins Soler

Bauru – SP

Março de 2016

Silva, Daisy Paes.

Funções penalidade para o tratamento das variáveis discretas do problema de fluxo de potência ótimo reativo / Daisy Paes Silva, 2016.

115 f.

Orientador: Edilaine Martins Soler

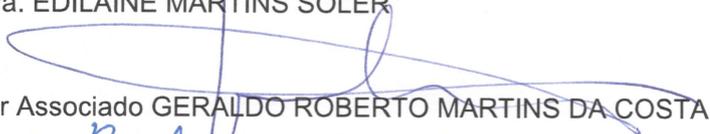
Dissertação (Mestrado)- Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2016

1. Problema de fluxo de potência ótimo reativo. 2. Programação não-linear. 3. Variáveis discretas. 4. Funções penalidade polinomiais. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. II. Título.

**ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE DAISY PAES SILVA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, DA FACULDADE DE ENGENHARIA.**

Aos 29 dias do mês de março do ano de 2016, às 10:00 horas, no(a) Anfiteatro da Seção Técnica de Pós-graduação da FEB, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Profa. Dra. EDILAINE MARTINS SOLER - Orientador(a) do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru - UNESP, Professor Associado GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA do(a) Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação / Universidade de São Paulo/São Carlos, Profa. Dra. EDMEA CASSIA BAPTISTA do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru - UNESP, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de DAISY PAES SILVA, intitulada **FUNÇÕES PENALIDADE PARA O TRATAMENTO DAS VARIÁVEIS DISCRETAS DO PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO REATIVO**. Após a exposição, a discente foi arguida oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

  
Profa. Dra. EDILAINE MARTINS SOLER

  
Professor Associado GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA

  
Profa. Dra. EDMEA CASSIA BAPTISTA

*À minha mãe, Ligia Maria Campos Paes Silva, pelo amor incondicional e por me incentivar sempre a estudar e tornar possível os meus objetivos;*

*Ao meu pai “in memoriam”, Erasmo Santos Silva, presente em meu coração, pelo amor incondicional e por me servir como exemplo de esforço e dedicação;*

*Ao meu namorado e indispensável colaborador no desenvolvimento deste trabalho, Augusto Cesar Pereira, pelo amor e por estar ao meu lado nos meus momentos de dificuldades me dando forças;*

*Às crianças adultas que, quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

*Dedico este trabalho com amor, admiração e gratidão.*

# Agradecimentos

À Deus pelas pessoas que colocou em meu caminho e que, direta ou indiretamente, participaram da realização deste trabalho!

À minha irmã, Dayane Paes Silva, pelo amor e pelos conselhos valiosos.

Ao meu irmão de coração, Flávio Aparecido Bertoni, por ser um anjo especial colocado por Deus para alegrar a minha família.

Aos meus avós, pela família maravilhosa e sempre unida.

À minha melhor amiga, Michele Jaqueline Portes, pelo amor de irmã e pelos momentos de descontração.

À minha amiga, Sandra Armida Contrucci, pela companhia em Bauru e por me considerar como filha.

Aos meus professores que me serviram de exemplo, em especial aos meus professores do Departamento de Matemática e do Departamento de Engenharia Elétrica.

À Professora Doutora Edilaine Martins Soler, por acreditar no meu potencial, pela excelente orientação, pela minha formação como pesquisadora e pela amizade que construímos durante este trabalho e claro, durante as conversas e estudos de madrugadas, fins de semana, feriados e momentos em que vivemos perigosamente!

Ao Professor Adjunto Leonardo Nepomuceno, à Professora Adjunta Edméa Cássia Baptista, Professor Titular Geraldo Roberto Martins da Costa por aceitarem o convite para participarem da banca examinadora, pelos ensinamentos e pela críticas construtivas para a evolução deste trabalho e à Professora Doutora Sônia Cristina Poltroniere Silva.

Aos amigos, alunos da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"(UNESP), campus de Bauru, da Matemática e da Engenharia Elétrica pelos estudos e amizade, e aos alunos do Mestrado e do Laboratório de Otimização e Estudos Econômicos em Sistemas de Potência (LOESP).

Ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica pela oportunidade de realização do curso de mestrado e aos funcionários, em particular, ao Gustavo de Oliveira Rodrigues pelas informações e presteza.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela concessão de bolsa de mestrado e pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

À UNESP pela oportunidade de ensino de alta qualidade.

*“Jamais considere seus estudos como uma obrigação,  
mas como uma oportunidade invejável para aprender  
a conhecer a influência libertadora da beleza do reino  
do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito  
da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer...”*

*(Albert Einstein)*

# Resumo

O problema de Fluxo de Potência Ótimo (FPO) é considerado um importante problema da Engenharia Elétrica desde a década de 1960. A partir de então, muitos trabalhos foram publicados com diferentes formulações e abordagens para a resolução deste problema. Muitas destas abordagens desconsiderava a natureza discreta das variáveis de controle e consideram todas as variáveis do problema como contínuas. Estas formulações são aproximações do problema de FPO, pois, algumas variáveis podem somente ser ajustadas por passos discretos, conforme a realidade do sistema. No problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo (FPOR), caso particular do problema de FPO, as variáveis relacionadas à potência ativa são fixadas e a otimização somente considera as variáveis relacionadas à potência reativa. O problema de FPOR pode ser modelado matematicamente como um problema de programação não-linear com variáveis discretas e contínuas. Neste trabalho, propõem-se das abordagens para resolução do problema FPOR que consideram a natureza discreta das variáveis do problema. Nas abordagens propostas são utilizadas funções penalidade associadas a um método de pontos interiores, combinando as vantagens de ambos para a resolução do problema de FPOR. Desenvolvem-se funções penalidade polinomiais para tratar as variáveis de controle discretas do problema, *taps* dos transformadores e bancos de capacitores e de reatores *shunt*, obtendo-se uma sequência de problemas contínuos, diferenciáveis e penalizados, que são resolvidos pelo método de pontos interiores implementado no *solver* gratuito IPOPT. As soluções de tais problemas convergem para a solução do problema original. Os testes numéricos foram realizados com os sistemas elétricos IEEE 14, 30, 118 e 300 barras para verificar a eficiência das abordagens propostas.

**Palavras-chave:** Fluxo de Potência Ótimo Reativo. Programação Não-Linear. Variáveis Discretas. Funções Penalidade Polinomiais.

# Abstract

The Optimal Power Flow Problem (OPF) is considered an important problem of the electrical engineering since the 1960s. From that moment, many papers were published with different formulations and approaches for solving this problem. Many of these approaches disregard the discrete nature of the control variables and consider all the variables of the problem as continuous. These formulations are approximations of the OPF problem, because some variables can be adjusted only by discrete steps, according to the system reality. In the Reactive Optimal Power Flow problem (ROPF), particular case of the OPF problem, the variables related to the active power are fixed and the optimization only considers the variables related to the reactive power. The ROPF problem can be mathematically modeled as a nonlinear programming problem with discrete and continuous variables. In this work, two approaches are presented for solving the ROPF problem considering the discrete nature of its variables. In the presented approaches, penalty functions are used associated with an interior-point method, combining the advantages of both for solving the ROPF problem. Polynomial penalty functions are used to treat the discrete control variables of the problem, transformers taps and shunt susceptances, obtaining a sequence of continuous, differentiable and penalized problems, which are solved by the interior-point method implemented in the IPOPT free solver. The solution of such problems converge to the solution of the original problem. The numerical tests were performed in the electrical systems IEEE 14, IEEE 30 and IEEE 118 buses to show the efficiency of the proposed methods.

**Keywords:** Reactive Optimal Power Flow. Non-Linear Programming. Discrete Variables. Polynomial Penalty Functions.

# Lista de ilustrações

Figura 2.1 – Sistema elétrico de potência típico . . . . .	32
Figura 2.2 – Modelo $\pi$ de uma linha de transmissão . . . . .	33
Figura 2.3 – Modelo de um transformador . . . . .	34
Figura 4.1 – Função penalidade senoidal $P(y)$ . . . . .	52
Figura 4.2 – Função obtida via interpolação polinomial $\Phi(y)$ . . . . .	53
Figura 4.3 – Função penalidade polinomial via interpolação $P(y) = [\Phi(y)]^2$ . . . . .	54
Figura 4.4 – Função $P(y)$ com foco na região de interesse do seu domínio . . . . .	54
Figura 4.5 – Função polinomial $p(y)$ . . . . .	56
Figura 4.6 – Função polinomial $P(y) = [p(y)]^2$ . . . . .	56
Figura 5.1 – Solução obtida para as variáveis contínuas pela abordagem FPSP aplicada ao sistema elétrico IEEE 14 barras . . . . .	61
Figura 5.2 – Solução obtida para as variáveis contínuas pela abordagem FPP aplicada ao sistema elétrico IEEE 14 barras . . . . .	63
Figura 5.3 – Solução obtida para as variáveis contínuas pela abordagem FPSP aplicado ao sistema elétrico IEEE 30 barras . . . . .	65
Figura 5.4 – Solução obtida para as variáveis contínuas pela abordagem FPP aplicada ao sistema elétrico IEEE 30 barras . . . . .	67
Figura 5.5 – Solução obtida para as variáveis contínuas pela abordagem FPSP aplicada ao sistema elétrico IEEE 118 barras . . . . .	70
Figura 5.6 – Solução obtida para as variáveis contínuas pela abordagem FPP aplicada ao sistema elétrico IEEE 118 barras . . . . .	72
Figura 5.7 – Solução obtida para as variáveis contínuas pela abordagem FPSP aplicada ao sistema elétrico IEEE 300 barras . . . . .	77
Figura 5.8 – Solução obtida para as variáveis contínuas pela abordagem FPP aplicada ao sistema elétrico IEEE 300 barras . . . . .	78

# Lista de tabelas

Tabela 5.1 – Solução obtida para as variáveis discretas pela abordagem FPSP aplicada ao sistema elétrico IEEE 14 barras . . . . .	61
Tabela 5.2 – Solução obtida para as variáveis discretas pela abordagem FPP aplicada ao sistema elétrico IEEE 14 barras . . . . .	62
Tabela 5.3 – Solução obtida para as variáveis discretas pela abordagem FPSP aplicado ao sistema elétrico IEEE 30 barras . . . . .	65
Tabela 5.4 – Solução obtida para as variáveis discretas pela abordagem FPP aplicada ao sistema elétrico IEEE 30 barras . . . . .	66
Tabela 5.5 – Pontos intermediários utilizados para construção das funções penalidade dos bancos de capacitores e de reatores <i>shunt</i> . . . . .	69
Tabela 5.6 – Solução obtida para as variáveis discretas pela abordagem FPSP aplicada ao sistema elétrico IEEE 118 barras . . . . .	70
Tabela 5.7 – Solução obtida para as variáveis discretas pela abordagem FPP aplicada ao sistema elétrico IEEE 118 barras . . . . .	72
Tabela 5.8 – Pontos intermediários utilizados para construção das funções penalidade dos bancos de capacitores e de reatores <i>shunt</i> . . . . .	75
Tabela 5.9 – Solução obtida para as variáveis discretas pela abordagem FPSP aplicada ao sistema elétrico IEEE 300 barras . . . . .	76
Tabela 5.10–Solução obtida para as variáveis discretas pela abordagem FPP aplicada ao sistema elétrico IEEE 300 barras . . . . .	79
Tabela 5.11–Comparação entre os métodos propostos (FPP e FPSP) e métodos clássicos da literatura (Arredondamento, BONMIN e DICOPT). . . . .	80
Tabela B.1–Dados de barra do sistema elétrico IEEE 14 barras. . . . .	95
Tabela B.2–Dados de linhas do sistema elétrico IEEE 14 barras. . . . .	95
Tabela B.3–Dados de barra do sistema elétrico IEEE 30 barras. . . . .	96
Tabela B.4–Dados de linhas do sistema elétrico IEEE 30 barras. . . . .	96
Tabela B.5–Dados de barra do sistema elétrico IEEE 118 barras. . . . .	97
Tabela B.6–Dados de linhas do sistema elétrico IEEE 118 barras. . . . .	99
Tabela B.7–Dados de barra do sistema elétrico IEEE 300 barras. . . . .	102
Tabela B.8–Dados de linha do sistema elétrico IEEE 300 barras. . . . .	107

# Lista de abreviaturas e siglas

AG	Algoritmo Genético
BF	Barra Final
BI	Barra Inicial
BONMIN	<i>Basic Open-source Non-linear Mixed INteger programming</i>
B&B	<i>Branch-and-Bound</i>
COIN-OR	<i>COmputational INfrastructure for Operational Research</i>
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
DE	Despacho Econômico
DICOPT	<i>DIcrete and Continuous OPTimizer</i>
FORTTRAN	<i>FORmula TRANslation System</i>
FP	Fluxo Potência
FPO	Fluxo Potência Ótimo
FPOA	Fluxo Potência Ótimo Ativo
FPOR	Fluxo Potência Ótimo Reativo
FPP	Função Penalidade Polinomial via Fatores do Primeiro Grau
FPSP	Função Penalidade Senoidal e Polinomial via Interpolação
GAMS	<i>General Algebraic Modeling System</i>
GB	<i>Gigabyte</i>
GH	Gigahertz
IEEE	<i>Institute of Electric and Electronic Engineers</i>
IPOPT	<i>Interior Point OPTimizer</i>
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
LOESP	Laboratório de Otimização e Estudos Econômicos em Sistemas de Potência

LTC	<i>Load Tap Changing</i>
MATLAB	<i>MATrix LABoratory</i>
MATPOWER	<i>MATlab POWER System Simulation Package</i>
MVA <sub>r</sub>	Mega-volt-ampère-reactivo
MW	Megawatt
OA	<i>Outer Approximation</i>
PIM	Problema de Programação Inteira Mista
PL	Problema de Programação Linear
PNL	Problema de Programação Não-Linear
<i>pu</i>	Por unidade
rad	Radiano
RAM	<i>Random Access Memory</i>
s	Segundo
SEP	Sistema Elétrico de Potência
SP	São Paulo
UNESP	Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>16</b>
1.1	Motivação	16
1.2	Objetivo	17
1.3	Justificativa	17
1.4	Organização do Trabalho	18
<b>2</b>	<b>Problema de FPO com Variáveis Discretas e Contínuas</b>	<b>19</b>
2.1	Histórico do Problema de Fluxo de Potência Ótimo	19
2.2	Estrutura do Fluxo de Potência em dos Sistemas Elétricos de Potência	31
2.2.1	Cálculo de Fluxo de Potência em Sistemas Elétricos de Potência	31
2.2.1.1	Modelagem de Elementos de Ramo: Cálculo das Correntes	32
2.2.1.2	Transformadores	33
2.2.1.3	Modelagem dos Elementos de Ramo: Cálculo dos Fluxos de Potência	35
2.2.1.4	Transformadores	36
2.3	Problema de Fluxo de Potência Ótimo	39
2.3.1	Nomenclatura	39
2.3.1.1	Conjuntos	39
2.3.1.2	Constantes	39
2.3.1.3	Variáveis	40
2.3.2	Formulação Matemática do Problema de FPOR	40
2.3.2.1	Função Objetivo	40
2.3.2.2	Restrições Físicas	41
2.3.2.3	Restrições Operacionais do Sistema	41
<b>3</b>	<b>Métodos de Otimização da Literatura</b>	<b>43</b>
3.1	Método de Função Penalidade	43
3.2	Método <i>Branch-and-Bound</i>	44
3.3	Método <i>Outer Approximation</i>	46
<b>4</b>	<b>Abordagens Propostas para a Resolução do Problema de FPOR com Variáveis Discretas e Contínuas</b>	<b>49</b>
4.1	Tratamento das Variáveis do Problema de FPOR via Funções Penalidade	49
4.2	Funções Penalidade Propostas	51

4.2.1	Primeira Proposta: Abordagem FPSP . . . . .	51
4.2.1.1	Função Penalidade Senoidal . . . . .	51
4.2.1.2	Exemplo Numérico de Aplicação 5.1 . . . . .	51
4.2.1.3	Função Penalidade Polinomial via Interpolação . . . . .	52
4.2.1.4	Exemplo Numérico de Aplicação 5.2 . . . . .	53
4.2.2	Segunda Proposta: Abordagem FPP . . . . .	55
4.2.2.1	Exemplo Numérico de Aplicação 5.3 . . . . .	55
4.3	Método de Pontos Interiores . . . . .	55
4.3.1	<i>Solver</i> IPOPT . . . . .	58
4.4	Algoritmo de Solução . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Resultados Numéricos . . . . .</b>	<b>59</b>
5.1	Sistema Elétrico 14 Barras . . . . .	59
5.1.1	Abordagem FPSP Aplicada ao Sistema IEEE 14 Barras . . . . .	60
5.1.2	Abordagem FPP Aplicada ao Sistema IEEE 14 Barras . . . . .	62
5.2	Sistema Elétrico 30 Barras . . . . .	62
5.2.1	Abordagem FPSP Aplicada ao Sistema IEEE 30 Barras . . . . .	64
5.2.2	Abordagem FPP Aplicada ao Sistema IEEE 30 Barras . . . . .	66
5.3	Sistema Elétrico 118 Barras . . . . .	67
5.3.1	Abordagem FPSP Aplicada ao Sistema IEEE 118 Barras . . . . .	68
5.3.2	Abordagem FPP Aplicada ao Sistema IEEE 118 Barras . . . . .	71
5.4	Sistema Elétrico 300 Barras . . . . .	73
5.4.1	Abordagem FPSP Aplicada ao Sistema IEEE 300 Barras . . . . .	74
5.4.2	Abordagem FPP Aplicada ao Sistema IEEE 300 Barras . . . . .	75
5.5	Análise e Discussão dos Resultados . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Conclusões . . . . .</b>	<b>82</b>
<b>7</b>	<b>Trabalhos Publicados . . . . .</b>	<b>84</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>86</b>
	<b>Apêndices . . . . .</b>	<b>90</b>
	<b>APÊNDICE A Interpolação Polinomial: Forma de Lagrange . . . . .</b>	<b>91</b>
A.1	Conceito de Interpolação . . . . .	91
A.2	Interpolação Polinomial . . . . .	92
A.3	Forma de Lagrange para se obter o Polinômio Interpolador . . . . .	93

<b>APÊNDICE B Banco de Dados dos Sistemas Elétricos Utilizados . . .</b>	<b>95</b>
B.1 Sistema IEEE 14 Barras . . . . .	95
B.2 Sistema IEEE 30 Barras . . . . .	96
B.3 Sistema IEEE 118 Barras . . . . .	97
B.4 Sistema IEEE 300 Barras . . . . .	102

# 1 Introdução

## 1.1 Motivação

Os Sistemas Elétricos de Potência (SEP) são considerados um dos sistemas mais complexos construídos pelo homem, devido à sua dimensionalidade geográfica e equipamentos utilizados (ALRASHIDI; EL-HAWARY, 2007). Estes sistemas têm a função de fornecer energia elétrica com o mínimo de interrupções, com custo mínimo, de qualidade adequada e no momento solicitado pelos consumidores (NEPOMUCENO, 1997). Os operadores de tais sistemas precisam de ferramentas especiais para otimamente analisar, monitorar e controlar diferentes aspectos deste sistema sofisticado. Algumas dessas ferramentas são o Despacho Econômico (DE), o *unit commitment* e o Fluxo de Potência Ótimo (FPO) (ALRASHIDI; EL-HAWARY, 2007).

Segundo Monticelli (1983) o cálculo de Fluxo de Potência (FP) consiste essencialmente na determinação do estado do sistema, da distribuição dos fluxos e de algumas outras grandezas. Neste tipo de problema, a modelagem do sistema é estática, isto é, as variações no tempo são suficientemente lentas de maneira que se possa ignorar os efeitos transitórios. Desta forma, o cálculo do FP é realizado por um conjunto de equações e inequações algébricas não-lineares que correspondem, respectivamente, às leis de Kirchhoff e a um conjunto de restrições operacionais do sistema de energia elétrica e de seus componentes. O conjunto de equações do problema de FP é formulado por equações que representam o fato de que a potência injetada em uma barra é igual à soma dos fluxos que deixam a barra, através de linhas de transmissão, transformadores, etc, com a potência consumida na barra, imposição da Primeira Lei de Kirchhoff (balanço de potência). A Segunda Lei de Kirchhoff é utilizada para expressar o FP nos componentes internos como funções das tensões de suas barras terminais. O conjunto de inequações é formado pelas restrições das magnitudes das tensões nas barras, pelos limites nas injeções de potência reativa das barras, etc.

O cálculo do FP é, geralmente, realizado utilizando-se métodos computacionais desenvolvidos especificamente para a resolução do conjunto de equações e inequações algébricas que constituem o modelo estático do sistema. Devido ao crescimento destes sistemas e o número de interligações entre estes, operá-los de modo eficiente tornou-se uma tarefa complexa. Um modo eficiente de determinar o estado ótimo de um sistema é através da resolução do problema de FPO. O problema de FPO determina um ponto de operação de um sistema elétrico através do ajuste dos controles que otimize uma função objetivo e respeite um conjunto de restrições físicas e operacionais do sistema (SOLER; ASADA; COSTA, 2013). Segundo Sousa (2006) o FPO tem aplicações em vários problemas

de planejamento da operação, como a minimização de perdas de potência ativa nas linhas de transmissão de energia elétrica.

O problema de Fluxo de Potência Ótimo Ativo e Reativo, isto é, o problema de FPO completo, é um termo genérico que representa um amplo conjunto de subproblemas e que pode ser basicamente subdividido em Fluxo de Potência Ótimo Ativo (FPOA), conhecido como Despacho Econômico, e Fluxo de Potência Ótimo Reativo (FPOR) (PALEXOPOULOS; IMPARATO; WU, 1989). Vários métodos vêm sendo desenvolvidos com o objetivo de se obter boas soluções para estes problemas em tempos computacionais aceitáveis (LIMA, 2000). Neste trabalho, investiga-se do problema de FPOR, em que os controles associados à potência ativa são fixados e as variáveis relacionadas à potência reativa são ajustadas para minimizar as perdas de potência ativa nas linhas de transmissão de energia elétrica.

Neste trabalho, o problema de FPOR é modelado matematicamente como um problema de programação não-linear, estático, não-convexo, restrito e com variáveis discretas e contínuas. Notoriamente, o FPOR é um problema de difícil resolução e, portanto, desafiador para realização deste trabalho.

## 1.2 Objetivo

O objetivo deste trabalho é desenvolver abordagens eficientes para resolver o problema de FPOR com variáveis discretas e contínuas. Duas abordagens são propostas baseadas em funções penalidade associadas a um método de pontos interiores, combinando as vantagens de ambos. As funções penalidade propostas são utilizadas para ajustar as variáveis de controle discretas, *taps* dos transformadores e bancos de capacitores e de reatores *shunt*, em problemas de FPOR.

## 1.3 Justificativa

As abordagens propostas são convenientes por suas implicações práticas, uma vez que resolvem o problema de FPOR e trata de maneira adequada as variáveis discretas e contínuas. Desta forma, é possível minimizar as perdas de potência ativa nas linhas de transmissão de energia elétrica, fornecendo resultados que podem ser utilizados em sistemas reais.

A relevância da pesquisa é justificada pela importância do problema de FPOR e a dificuldade em resolvê-lo de modo a ajustar as variáveis discretas e contínuas.

## 1.4 Organização do Trabalho

Este trabalho está organizado em 8 capítulos descritos conforme segue. Dedicase este capítulo à introdução. No Capítulo ?? o problema de FP em SEP é exposto. No Capítulo 2 é descrito o histórico e a formulação do problema de FPOR com variáveis discretas e contínuas. No Capítulo 3 são apresentados os métodos de solução da literatura envolvidos neste trabalho. No Capítulo 4 as abordagens de solução propostas para a resolução do problema de FPOR são detalhadas. No Capítulo 5 são analisados, comparados e discutidos os resultados dos testes numéricos para comprovar a eficiência da abordagem de solução proposto para a resolução do problema de FPOR com variáveis discretas e contínuas. No Capítulo 6 são relatadas as conclusões deste trabalho. No capítulo 7 são expostos os trabalhos publicados durante a realização desta pesquisa.

## 2 Problema de FPO com Variáveis Discretas e Contínuas

### 2.1 Histórico do Problema de Fluxo de Potência Ótimo

A partir de Davison (1922), na década de 1920, surgiu o interesse em operar os SEP satisfazendo critérios econômicos (LIMA, 2000). O problema de FPO foi reconhecido como um problema de grande importância para o planejamento e operações práticas destes sistemas (NIE et al., 2015). A partir da década de 1960, Carpentier (1962) definiu propriamente o problema de FPO e desde então, muitos trabalhos foram publicados com diferentes formulações matemáticas e abordagens de solução para o mesmo. O tratamento eficiente das variáveis discretas em problemas de FPO tem sido reconhecido como um problema desafiador e tem recebido significativa atenção desde a década de 1960 (PAPALEXOPOULOS; IMPARATO; WU, 1989; GRANVILLE, 1994). Devido à dificuldade de solução imposta pelas variáveis discretas em problemas de FPO, a maioria das abordagens da literatura não considera a natureza discreta das variáveis do problema, tratando o problema como contínuo. Apresenta-se, a seguir, uma descrição dos trabalhos notórios na área de FPO desde a primeira formulação do problema em 1962 até os trabalhos mais atuais, e dos trabalhos que abordaram as variáveis discretas destes problemas.

Carpentier (1962) propôs uma nova formulação para o problema de DE adicionando ao modelo as restrições de FP. A partir de então, o problema de DE tornou-se um caso particular do problema de FPO. Surge, desta forma a primeira formulação rigorosa do problema de FPO como um modelo de programação não-linear, restrita, não-convexo e de grande porte. O objetivo deste problema é determinar o ponto ótimo de operação de um sistema elétrico sujeito às restrições de igualdade, FP, e de desigualdade, restrições funcionais e de variáveis de otimização. Para resolver o problema de FPO, Carpentier (1962) propôs transformá-lo em um problema irrestrito pela utilização da função lagrangiana clássica. O mínimo é obtido aplicando-se as condições necessárias de primeira ordem, o que resulta em um sistema não-linear. Este sistema é resolvido pelo método de Gauss-Seidel e a solução do sistema é a solução do problema de FPO.

Dommel e Tinney (1968) propuseram o método do gradiente reduzido para resolver o problema de FPO. Este método baseia-se na busca de uma solução ótima através de um algoritmo de passo descendente. O método proposto consiste em uma abordagem de primeira ordem para determinar os ajustes ótimos para as variáveis de controle do problema. Neste método as restrições de desigualdade do problema são tratadas por parâmetros de penalidade e as equações de FP são incorporadas à função objetivo pela

utilização dos multiplicadores de Lagrange. Os testes foram realizados com um sistema elétrico de 3 barras. O método do gradiente reduzido, apesar do seu rigor matemático, possui algumas limitações que podem comprometer a convergência. Dentre estas limitações destacam-se: determinação do tamanho do passo das variáveis de controle; sensibilidade quanto ao tamanho do passo do gradiente reduzido; convergência lenta “zigzagueando” na vizinhança da solução ótima e a baixa eficiência computacional do método de otimização de primeira ordem.

Sasson, Vilorio e Aboytes (1973) utilizaram o método da função penalidade para resolução do problema de FPO. Este foi o primeiro trabalho a utilizar a matriz hessiana da função lagrangiana na resolução do problema de FPO. O problema de FPO restrito é transformado em um problema irrestrito, penalizando todas as restrições de igualdade e desigualdade que forem violadas. O método proposto consiste em uma técnica quadrática em que as variáveis são todas atualizadas simultaneamente, utilizando a matriz hessiana da função objetivo penalizada. A cada iteração os valores das penalidades são aumentados e a matriz hessiana da função penalidade é calculada. O processo se repete até que todas as restrições sejam satisfeitas. O método é eficiente e robusto independentemente do tamanho do sistema elétrico, do número de restrições ativas na solução e o esforço computacional é proporcional ao tamanho do sistema elétrico.

Sun et al. (1984) propuseram o método de Newton com penalidade para a resolução do problema de FPO associado aos sistemas elétricos de grande porte. Desacoplaram o problema em dois subproblemas: subproblema de potência ativa e subproblema de potência reativa. Assim, as restrições são divididas em dois grupos: o grupo das restrições penalizadas e o grupo das restrições consideradas ativas na solução. As restrições de igualdade, ativas, são incorporadas à função objetivo por meio da utilização dos multiplicadores de Lagrange, as restrições de desigualdade por meio de multiplicadores de Lagrange e fatores de penalidade. O método do conjunto ativo foi utilizado para identificar as restrições ativas na solução. O ponto ótimo do problema ocorre quando as condições necessárias de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) forem satisfeitas, e as equações do FP atendem a uma tolerância estabelecida.

Tinney et al. (1988) apontaram as deficiências dos métodos de resolução de problemas de FPO, até então publicados na literatura, que necessitam ser corrigidas. Tais deficiências limitam a sua utilidade prática e o escopo de aplicações, degradando a sua precisão realista. Dentre as deficiências, destacam-se: a utilização de problemas equivalentes que pode provocar grandes erros nas soluções, os métodos para ajustar as variáveis discretas, que não fornecem soluções ótimas e o número de ações de controle utilizadas na resolução do problema, que é muito grande para ser executado em um sistema real, segundo os autores. Problemas equivalentes causam imprecisões nas soluções do problema de FPO, sendo, portanto, necessário manter estes erros dentro de limites aceitáveis. Destacam que

é preferível obter soluções quase ótimas para problemas reais do que soluções ótimas para problemas equivalentes. Também apontaram que algumas das variáveis do problema de FPO devem ser ajustadas por passos discretos, mas os métodos de solução propostos consideram todas as variáveis como contínuas. Deste modo, o ajuste para valores discretos feito por arredondamento após o processo de otimização pode fornecer soluções subótimas e até mesmo soluções infactíveis.

Na década de 1990 foi proposto o primeiro método de otimização para o problema de FPO considerando a natureza discreta das variáveis deste problema. No trabalho de Liu, Papalexopoulos et al. (1992) os autores propuseram um algoritmo de discretização, que utiliza uma função penalidade que é uma aproximação linear da penalidade quadrática, para ajustar as variáveis discretas, os controles *shunt* associados com capacitores e reatores, respectivamente, em um problema de FPO. O método consiste em tratar todas as variáveis do problema como contínuas e considerar apenas as restrições de igualdade do problema de FPO. São aplicadas as condições necessárias de primeira ordem para a função lagrangiana associada a este problema. O problema restrito é transformado em um problema irrestrito pelo método de multiplicadores de Lagrange. A função penalidade é adicionada à função lagrangiana no decorrer das iterações para obrigar as variáveis discretas serem arredondadas para o valor discreto mais próximo. São aplicadas as condições necessárias de primeira ordem para a função lagrangiana. O sistema obtido é resolvido pelo método de Newton desacoplado, e sua solução fornece passos para a atualização das variáveis. À medida que as variáveis se aproximam de valores discretos estas se fixam nestes valores. O algoritmo converge quando todas as variáveis discretas do problema de FPO assumirem valores discretos. O método consiste basicamente de um arredondamento no decorrer das iterações do método de Newton. A dificuldade está em “quando” e “como” adicionar a penalidade durante o método de Newton. Além disso, não é garantido que o algoritmo encontre a solução ótima do problema, mas para aplicações reais, as soluções subótimas são suficientes, desde que sejam obtidas em tempo computacional aceitável. Os testes foram realizados com os sistemas elétricos IEEE 100 e 1700 barras para avaliar a eficiência do método.

Granville (1994) utilizou pela primeira vez o método de pontos interiores denominado método primal-dual barreira logarítmica e apresentou técnicas para a escolha do passo, para a redução do parâmetro de barreira e para o uso de um método previsor-corretor para a resolução do problema de FPOR contínuo. O problema de FPOR é transformado em um problema irrestrito. O método consiste em associar multiplicadores de Lagrange às restrições de igualdade, separar as restrições de desigualdade em duas igualdades e acrescentar as variáveis de folga positivas. Essas variáveis são incorporadas à função objetivo por meio da função lagrangiana e penalizadas com um parâmetro de barreira que tenderá a zero durante o processo de otimização. Calcula-se o passo para a atualização das variáveis duais e primais. O passo deve manter as variáveis de folga estritamente positivas e satisfazer as condições de KKT para os multiplicadores de Lagrange. O problema de

barreira é resolvido pelo método de Newton. Quando todas as restrições forem satisfeitas e o parâmetro de barreira tender a zero, a solução do problema de FPO é encontrada. Este método exige que a estimativa inicial da solução do problema seja factível e apresenta muita sensibilidade quanto à escolha inicial do parâmetro de barreira, podendo divergir em alguns casos. A solução é encontrada quando todas as restrições do problema original forem satisfeitas. Os testes numéricos foram realizados com os sistemas elétricos de grande porte, sistema Sul/Sudeste brasileiro de 1832 barras e sistema norte-americano de 3467 barras para mostrar a eficiência do método proposto.

Ding e Wang (1994) propuseram um método de pontos interiores e uma extensão do método primal-dual, barreira logarítmica, e também utilizaram uma variação do método de Newton-Raphson, conhecido como método previsor-corretor. O método difere do método primal-dual puro na introdução de termos não-lineares de segunda ordem nas condições necessárias de primeira ordem. Técnicas de esparsidade são aplicadas para resolver o sistema obtido ao se aplicar as condições necessárias de KKT. O problema de FPO possui duas funções objetivo: minimização dos custos de geração potência ativa e minimização das perdas de potência ativa nas linhas e transmissão de energia elétrica. No caso da função objetivo custo, funções quadráticas foram utilizadas. Os testes numéricos foram realizados com os sistemas elétricos de 9 e 2423 barras. O método previsor-corretor tem convergência mais rápida quando comparada ao método puro de pontos interiores, como proposto em Granville (1994), que utiliza termos lineares de primeira ordem.

Torres e Quintana (1998) utilizaram o método de pontos interiores (GRANVILLE, 1994) com coordenadas retangulares, e não polares, de tensão, para resolver problemas de FPO de grande porte. Desta forma justificaram que a função objetivo e as restrições são quadráticas. Modelaram o problema de FPO como um problema contínuo. As vantagens das funções quadráticas, como matriz hessiana constante e expansão em série de Taylor até segunda ordem sem erro de truncamento, foram exploradas. Estas características quadráticas facilitam incorporar informações de alta ordem em um procedimento previsor-corretor que geralmente melhora o desempenho do método de pontos interiores. Os autores apresentaram técnicas para a escolha do passo, para a redução do parâmetro de barreira e para a utilização de um procedimento previsor-corretor. Este procedimento foi implementado no algoritmo. Concluem que o desempenho computacional dos métodos de pontos interiores na forma retangular é bom e praticamente igual a forma polar, pois convergem com o mesmo número de iterações.

Bakirtzis et al. (2002) propuseram um Algoritmo Genético (AG) modificado na resolução do problema de FPO considerando as variáveis de controle discretas, *taps* dos transformadores e dispositivos *shunt* chaveáveis, e as variáveis contínuas, a potência ativa e a magnitude de tensão nas barras conectadas aos geradores. O algoritmo consiste inicialmente em gerar soluções candidatas aleatoriamente, denominada de população inicial,

em que as variáveis contínuas respeitem seus limites mínimos e máximos e se as variáveis forem discretas assumam valores discretos. Porém, estas restrições podem não satisfazer as demais restrições do problema, isto é, restrições físicas e operacionais do sistema. Assim, as restrições são adicionadas como penalidade na função aptidão, que avalia a qualidade da solução candidata. A função aptidão designa um valor para cada solução candidata. Ocorre o processo de seleção, cruzamento, mutação e cálculos específicos para o problema. As simulações foram realizadas com sistemas elétricos IEEE 30 e 76 barras e IEEE RTS96, sistemas de pequeno e médio porte, respectivamente. As melhores soluções são apresentadas após 20 gerações para cada caso. O método tem como desvantagens a não garantia de encontrar a solução ótima e o grande esforço computacional quando aplicado a sistemas de grande porte. Segundo os autores, o tempo computacional requerido pelo método e a qualidade das soluções deterioram para os problemas de FPO de grande porte.

Liu, Tso e Cheng (2002) apresentaram um método primal-dual de pontos interiores modificado com uma função penalidade quadrática, que penaliza as variáveis discretas quando estas divergem de valores discretos, a qual é utilizada no decorrer das iterações para a resolução do problema de FPOR com variáveis discretas e contínuas em sistemas elétricos de grande porte. O método proposto incorpora uma função penalidade em um método de pontos interiores primal-dual. A função penalidade apresentada é quadrática e não diferenciável nos pontos definidos como centros de vizinhança. Associa-se ao problema a função lagrangiana aumentada que é composta pela função lagrangiana e pela função penalidade. Aplicam-se as condições necessárias de primeira ordem e o sistema não-linear obtido é resolvido pelo método de Newton. Assume-se que os parâmetros de penalidade são nulos para todas as variáveis, e posteriormente, estas variáveis são atualizadas. Depois que o método de Newton converge para uma solução, se as variáveis assumirem valores discretos os parâmetros de penalidade permanecem nulos, caso contrário, são penalizadas. A função penalidade pode ser introduzida na função lagrangiana aumentada antes, durante ou após a convergência para a solução contínua. No primeiro caso, a função lagrangiana é perturbada. No segundo caso, afeta o desempenho do método. E, no terceiro caso, são necessárias mais iterações para obter uma solução discreta. Os testes foram realizados com os sistemas elétricos IEEE 14, 30, 68 e 118 barras e com um sistema elétrico chinês de 538 barras. O método mostrou-se eficiente, pois encontrou uma solução próxima à solução ótima e teve boa convergência em tempo computacional aceitável.

Adibi et al. (2003) propuseram um método para ajustar o conjunto de tensões nas barras que tem geração satisfazendo os limites operacionais do sistema e ajustar os *taps* dos transformadores, cujas posições devem assumir valores discretos, via função lagrangiana aumentada barreira modificada e arredondamento, para a resolução do problema de FPO. O método proposto consiste em uma combinação do método da lagrangiana aumentada para restrições de igualdade de Hestenes (1969), Powell (1967) e do método de barreira modificada de Polyak (1992) para as restrições de desigualdade. As restrições de

desigualdade foram tratadas com um termo de barreira modificada e as igualdade com um termo de lagrangiana aumentada. Assim, o método proposto consiste em resolver o problema contínuo por meio da função lagrangiana aumentada barreira modificada, a solução obtida é arredondada, fixam-se estes valores e um novo problema é resolvido. Os testes foram realizados com um sistema elétrico de 160 barras. Segundo os autores, geralmente arredondamento para passos discretos mais próximos não fornece a solução ótima, e pode-se obter pontos inactiváveis problemas que não podem ser completamente corrigidos pelas variáveis contínuas.

Lin, Ho e Lin (2004) resolveram o problema de FPO com variáveis discretas e contínuas, a fim de minimizar o custo de geração, ao utilizar um algoritmo baseado em teoria de otimização ordinal (do inglês, *ordinal optimization theory-based algorithm*). O algoritmo é baseado em um procedimento de busca e consiste em três etapas. Primeiro, seleciona-se de forma heurística um grande conjunto de soluções candidatas. Para isso a relaxação contínua do problema de FPO é resolvida. O conjunto de soluções candidatas é constituído de todas as possíveis combinações de arredondamento de cada variável na solução obtida, arredondamento para o valor discreto mais próximo inferiormente ou superiormente. Ao utilizar uma heurística baseada no teorema da sensibilidade são selecionadas as potenciais soluções, reduzindo ainda mais o conjunto de soluções candidatas. Em seguida, resolve-se um modelo simplificado do problema de FPO a fim de se encontrar um conjunto reduzido de soluções candidatas e promissoras. Por fim, avaliam-se as soluções candidatas do subconjunto reduzido utilizando o modelo completo do problema de FPO e assim obtém-se uma solução para o problema de FPO com variáveis discretas e contínuas. Os testes foram realizados com os sistemas elétricos IEEE 118 e 244 barras. Os autores mostraram que com a solução encontrada as melhorias para a minimização do custo de geração ou para a minimização das perdas perdas de potência ativa nas linhas e transmissão de energia elétrica são de 28% em média. O método proposto sempre fornece uma solução boa o suficiente e em baixo tempo computacional.

Ding, Wang e Song (2004) resolveram o problema de FPO com variáveis de controle discretas, *taps* dos transformadores, utilizando um método de planos de corte com pontos interiores. O método proposto realiza uma sequência de linearizações do problema de FPO. Tradicionalmente, nos métodos de plano de corte os problemas lineares são resolvidos pelo método simplex, porém no algoritmo proposto é resolvido por um método de pontos interiores. O método resolve o problema de FPO com variáveis discretas fixas, obtendo-se uma solução inicial factível. O problema de FPO é linearizado na vizinhança da solução inicial factível, obtendo-se um Problema de Programação Linear (PL). Se o problema for inactivável, o processo é finalizado. Caso contrário, o problema de FPO linearizado é resolvido. Se o *tap* assumir um valor discreto, fixa-se o valor. Caso contrário, um plano de corte é gerado e define-se um novo Problema de Programação Linear (PNL), até que algum *tap* assumira um valor discreto e essa variável seja fixada. O processo repete-se até que todas

as variáveis assumam valores discretos. As simulações foram realizadas com os sistemas elétricos 14, 57, 118 e 300 barras. Para os sistemas elétricos IEEE 14, 57 e 118 o problema foi resolvido em baixo tempo computacional. Porém, para o sistema elétrico IEEE 300 barras o tempo computacional foi alto, pois este sistema, diferentemente dos demais, possui grande quantidade de variáveis discretas, *taps* dos transformadores. O método mostrou-se com rápida convergência, mais simples e mais eficiente que o método de planos de corte, quando utilizado com simplex para a resolução de problemas de programação linear, quando aplicados ao problema de FPO.

Zhao, Guo e Cao (2005) utilizaram o algoritmo do enxame de partículas, uma técnica de computação evolucionária com base em sistemas multi-agentes para a resolução do problema de FPO com variáveis discretas e contínuas. O problema é tratado como um problema de otimização combinatória complexa que envolve funções não-lineares que apresentam mínimos locais múltiplos e restrições descontínuas. A fim de obter uma solução rapidamente, cada agente compete e coopera com seus vizinhos interagindo ou trabalhando juntos para que a informação seja transferida. Geralmente para alcançar seu objetivo, a busca de início é global, tornando-se local quando o processo aproxima-se do final. O método é avaliado nos sistemas elétricos IEEE 30 e 118 barras. Os resultados numéricos mostram que o método adotado converge para uma boa solução mais rapidamente do que as abordagens registradas anteriormente.

Yan et al. (2006) inovaram com um AG com pontos interiores, combinando as vantagens de ambos para resolver o problema de FPOR com variáveis discretas e contínuas. O objetivo do problema de FPOR é minimizar as perdas de potência ativa das linhas de transmissão de energia elétrica e manter o perfil de tensão da sistema. O método proposto pode ser dividido em duas partes. Na primeira parte resolve-se o problema de FPOR relaxando as variáveis discretas. Na segunda parte o problema de FPOR original é decomposto em dois subproblemas: otimização contínua e otimização discreta. O AG resolve a otimização discreta e as variáveis contínuas são fixadas. O método de pontos interiores resolve a otimização contínua e as variáveis discretas são fixadas. A solução ótima pode ser obtida resolvendo os dois subproblemas alternadamente. Os testes foram realizados com os sistemas elétricos IEEE 30 e 118 barras e o sistema elétrico Chongqing 161 barras para mostrar que o método proposto é muito eficaz para resolver o problema de FPOR.

AlRashidi e El-Hawary (2007) propuseram um algoritmo de otimização por enxame de partículas híbrido na resolução do problema de FPO com variáveis discretas e contínuas sob diferentes formulações. O algoritmo híbrido combina otimização por enxame de partículas, conhecido pela sua capacidade de pesquisas globais, com o algoritmo de Newton-Raphson. O problema é classificado como um problema de programação não-linear inteira mista. As funções objetivo são as perdas de potência ativa nas linhas e

transmissão de energia elétrica, custo de combustível e as emissões gasosas das unidades geradoras termelétricas. As restrições de desigualdade são tratadas por um mecanismo que preserva a factibilidade. O algoritmo proposto trata o problema de FPO em três etapas principais. Primeiro, as combinações ótimas das variáveis de controle discretas e contínuas são tratadas pelo algoritmo discreto proposto para otimizar funções objetivo convexas e não-convexas. Segundo, as restrições de igualdade são minimizados utilizando o método Newton-Raphson em uma subrotina separada. Terceiro, as restrições de desigualdade são tratadas pelo mecanismo híbrido proposto para preservar a factibilidade das soluções. Os testes numéricos foram realizados com o sistema elétrico IEEE 30 barras com seis unidades geradoras para mostrar a robustez do método proposto. Porém, o desempenho e robustez do algoritmo proposto na busca pela solução ótima dependem altamente dos ajustes dos parâmetros utilizados e do critério a ser otimizado. As comparações dos resultados foram realizadas com a solução obtida pelo *solver MATrix LABoratory Power System Simulation Package* (MATPOWER), algoritmo de programação quadrática sequencial para resolver o problema de FPO.

Subbaraj e Rajnarayanan (2009) utilizaram o *self-adaptive real coded genetic algorithm* para resolver o problema de FPOR considerando as variáveis contínuas (reguladores automáticos de tensão), discretas (*tap* dos transformadores variáveis) e binárias (capacitores e reatores *shunt*) deste problema. O objetivo do problema é minimizar as perdas de potência ativa nas linhas e transmissão de energia elétrica e melhorar os perfis de tensão. O AG é uma técnica de busca que é motivada por princípios darwinianos de evolução natural. A autoadaptação é um fenômeno que torna a busca de algoritmos evolutivos flexível e mais perto da evolução natural. O objetivo do problema de FPOR é minimizar as perdas de potência ativa nas linhas e transmissão de energia elétrica e melhorar os perfis de tensão do sistema de energia. Os testes numéricos foram realizados com os sistemas elétricos IEEE 14 e 30 barras para demonstrar a aplicabilidade e a eficiência do método proposto. O desempenho do método proposto é comparado com a programação evolutiva e converge para soluções próximas do ótimo em menor tempo computacional.

Liu et al. (2009) propuseram o método de planos de corte com pontos interiores "melhorado" para resolver o problema de FPO com variáveis discretas, *tap* do transformador e capacitores e reatores *shunt*. Apresentaram um método associado que possui as vantagens do método de pontos interiores e do método de planos de corte. Inicialmente o método considera todas as variáveis do problema como contínuas. O método emprega um processo de linearização sucessiva e resolve iterativamente problemas de programação linear inteira mista, utilizando planos de corte de Gomory. Estudos comprovam que se o problema tem várias soluções, as soluções vão convergir para o interior da face ótima e os planos de cortes não podem ser gerados devido à falha em identificar a base ótima. O algoritmo proposto não só pode lidar adequadamente com vários tipos de objetivos, mas também amplia significativamente a sua área de aplicação. No entanto, o tempo de cálculo do

algoritmo aumenta para sistemas de grande porte.

Macfie et al. (2010) dizem que o problema de FPOR contém um grande número de variáveis discretas, bem como de dispositivos discretos *shunt*, que frequentemente, são arredondados para o seu valor discreto mais próximo na iteração final, podendo degradar a otimalidade e criar infactibilidades. Para resolver efetivamente o problema de FPOR os autores apresentam métodos inovadores baseados em abordagens de limites adaptativos e probabilísticos (do inglês, *probabilistic and adaptive threshold approaches*). O método proposto consiste em duas etapas. Na primeira etapa, um método probabilístico é descrito, o qual corrige um subconjunto de derivações ao seu valor discreto mais próximo em cada iteração, com uma probabilidade determinada pela proximidade do *shunt* a um valor discreto. Já na segunda etapa, um método adaptativo limitado é descrito, o qual define um valor *shunt* discreto mais próximo. Os testes foram realizados com os sistemas elétricos padrão IEEE até 118 barras, um sistema elétrico de grande porte da Grã-Bretanha e um sistema teste de 6 barras de Ward Hale. As técnicas propostas foram comparadas com as soluções obtidas por algoritmos de programação não-linear inteira mista e com o método padrão de arredondamento, mostrando que podem conseguir uma melhor minimização das perdas de potência ativa nas linhas e transmissão de energia elétrica. Com o sistema da Grã-Bretanha alcançaram 2,3% de redução das perdas de potência ativa nas linhas e transmissão de energia elétrica.

Capitanescu e Wehenkel (2010) apresentaram três abordagens baseadas em técnicas de sensibilidade e heurísticas, para lidar com as variáveis discretas do problema de FPO. A primeira abordagem possui duas etapas. A primeira consiste em resolver a relaxação contínua do problema de FPO, utilizando-se um método de pontos interiores. Em seguida, utilizando-se informações da primeira etapa, resolve-se um problema de programação linear inteira mista através de um algoritmo *branch-and-cut*. Esta segunda etapa fornece os valores das variáveis discretas do problema. A segunda abordagem é análoga à primeira, porém é utilizado um procedimento baseado na função de mérito. A terceira abordagem explora os multiplicadores de Lagrange associados às restrições para as variáveis discretas. As simulações foram realizadas com o sistema elétrico IEEE 300 barras e com os sistemas elétricos reais 60, 618, 1203 barras mostrando que a segunda abordagem é superior às demais abordagens apresentadas.

Soler, Sousa e Costa (2012) desenvolveram um método primal-dual barreira logarítmica modificada implementado em *FORmula TRANslation System* (FORTRAN) para a resolução do problema de FPO. O método foi escolhido por ter rápida convergência. O problema é modelado como um problema de programação não-linear inteiro misto. O objetivo é controlar as variáveis de natureza discreta, como os *taps* dos transformadores, e de natureza contínua, como a magnitude e o ângulo de tensão nas barras. O método consiste em incluir à função objetivo uma função penalidade para lidar com as variáveis

de controle discretas. Assim, uma sequência de problemas não-lineares e contínuos são gerados. As soluções obtidas convergem para a solução do problema misto. As soluções obtidas pelo método proposto foram comparadas com alguns métodos de otimização comerciais. O método proposto obteve uma solução mais realista nas comparações, em tempo computacional razoável. Os testes foram realizados com os sistemas elétricos IEEE 14, 30, 118 e 300 barras e mostraram que o método é adequado para problema de FPO de grande porte.

Moreira et al. (2013) propuseram um algoritmo baseado em *Branch-and-Bound* (B&B) com o auxílio do poder da computação paralela que os computadores pessoais podem fornecer para a resolução do problema de FPO com variáveis discretas. O problema é modelado com um problema não-convexo e não-linear inteiro misto. O algoritmo baseia-se em um processo de enumeração que utiliza uma árvore binária cujos nós estão associados com subproblemas restritos a variáveis contínuas, semelhante a técnica do B&B utilizada para resolver problemas de programação linear inteira mista. A estratégia proposta permite a gestão dos subproblemas inviáveis de forma robusta e uma implementação paralela, que permite acelerar a busca ao executar vários problemas de FPO com todas as variáveis simultaneamente contínuas em vários processos centrais. Os testes foram realizados com os sistemas elétrico IEEE 118 e 300 barras e um sistema elétrico real espanhol. O algoritmo proposto: gerencia naturalmente as infactibilidades que poderiam ocorrer ao longo dos ajustes das variáveis discretas; permite especificar e limitar o erro máximo na solução com a seleção e a execução paralela dos vários nós com tempo computacional significativamente reduzido; o número maior de combinações entre as variáveis é explorado e as melhores soluções podem ser obtidas; visa tomar vantagem da tendência atual para incluir o número crescente de núcleos nos processadores.

Soler, Asada e Costa (2013) propuseram um método baseado em função penalidade e método de pontos interiores para o tratamento das variáveis discretas, como os *taps* dos transformadores e os bancos de capacitores e de reatores *shunt* do problema de FPOR. Inicialmente, as variáveis discretas são tratadas como contínuas e adicionam-se funções penalidade senoidais e diferenciáveis à função objetivo do problema de FPOR. As funções são controladas por uma série de parâmetros de penalidade que crescem gradativamente até que estas se anulem quando as variáveis discretas do problema original assumem valores discretos. As simulações com diferentes sistemas elétricos, IEEE 14, 30, 118 e 300 barras, mostraram que o método proposto obteve solução equivalente, ou melhor, em termos de tempo computacional, em relação aos métodos clássicos, método de arredondamento, método B&B e método *Outer Approximation* (OA). Estes métodos levaram um tempo computacional alto ou até mesmo falharam na resolução de problemas de grande porte.

Ghasemi et al. (2014) desenvolveram um algoritmo híbrido baseado no algoritmo competitivo imperialista modificado e a otimização de ervas invasoras (do inglês, *algorithm*

based on hybrid modified imperialist competitive algorithm and invasive weed optimization) para resolver o problema de FPOR com variáveis discretas e contínuas. O algoritmo competitivo imperialista é um algoritmo simples que muitas vezes converge para ótimos locais, mas poderoso no campo da otimização evolutiva superando muitos algoritmos estocásticos existentes e técnicas de otimização de busca direta por soluções globais. Os testes foram realizados com os sistemas elétricos IEEE 30, 57 e 118 barras. O método proposto mostrou-se confiável, eficaz e com resultados melhores, pois equilibra de forma mais eficiente a capacidade de pesquisa global e a velocidade de convergência em comparação com o algoritmo competitivo imperialista original e outros métodos da literatura.

Pinheiro et al. (2015) propuseram um método de pontos interiores-exteriores barreira logarítmica modificada primal-dual previsor-corretor com convergência global e que utiliza estratégias de ajuste cúbico para resolver o problema de FPOR contínuo. O objetivo do problema de FPOR neste artigo é de minimizar as perdas de potência ativa nas linhas e transmissão de energia elétrica. O método de pontos interiores-exteriores é uma filosofia do método primal-dual de "reescalamento" não-linear. A estratégia de convergência global produz somente direções de descida, mesmo se o problema de otimização é não-linear e não-convexo. A estratégia de ajuste cúbico para as funções barreiras logarítmicas modificadas preservam a continuidade e as derivadas de primeira e segunda ordem da barreira logarítmica nas regiões próximas às fronteiras da região factível. Algumas regras de atualização para os multiplicadores de Lagrange estimados são avaliadas numericamente e teoricamente. Testes numéricos e comparações são realizadas com os métodos de pontos interiores clássico envolvendo os sistemas elétricos 3 e 9 barras, e IEEE 14, 30, 57, 118, 162 e 300 barras que demonstram a robustez e eficiência do método proposto. As contribuições do método proposto são as seguintes: as condições de KKT são plenamente satisfeitas com grande precisão e *gap* de dualidade nulo; a estratégia de convergência global garante a descida primal mais íngreme em todas as iterações e em todas as direções, por sua vez, garante que mínimos ideais são sempre encontrados; problemas de mau condicionamento associados com a matriz hessiana são também substancialmente minimizados por meios da estratégia de convergência global; e a estratégia para a atualização do multiplicador de Lagrange reduz o número de iterações para a convergência e permite a obtenção de soluções ótimas com os parâmetros de barreira não muito próximo a zero, favorecendo a estabilidade numérica do método.

Phan (2015) investigou um problema de dualidade lagrangiana para encontrar o mínimo global para o problema de FPO com variáveis discretas e contínuas em coordenadas retangulares. Para o caso em que a dualidade forte não se sustenta, os autores propõem duas classes de algoritmos B&B para resolver o problema de otimização. A região viável é subdividida utilizando o biseção elipsoidal ou retangular. O desempenho numérico foi avaliado utilizando vários sistemas elétricos com tamanhos diferentes, incluindo os sistemas elétricos IEEE padrão. O *gap* nulo do problema dual foi essencialmente alcançado para

todos os conjuntos de dados, portanto, o algoritmo foi capaz de encontrar rapidamente o ótimo global.

Ghasemi et al. (2015) inovaram o método de otimização baseado em ensino-aprendizagem (do inglês, *novel teaching-learning-based optimization algorithm*), utilizando o algoritmo de Gauss para resolver o problema de FPOR, com o objetivo de minimizar as perdas na transmissão de energia elétrica. O problema de FPOR é considerado um problema não-linear, de grande porte, estático, com combinação de variáveis discretas e contínuas. O método proposto consiste em melhorar a pesquisa local por uma solução ótima global e algumas modificações são propostas para aumentar a taxa de convergência do algoritmo, para alcançar uma melhor qualidade de solução. Os testes foram realizados nos sistemas elétricos padrão IEEE 14, 30, 57, 118 e 300 barras, e dois sistemas elétricos realistas, o peruano de 464 barras e o Sul/Sudeste brasileiro de 2236 barras. A comparação dos resultados das simulações revela eficácia do algoritmo em relação à algoritmos bem conceituados, como o exame de partículas.

Nie et al. (2015) propuseram um modelo do problema de FPOR quadrático com variáveis de controle discretas baseado em coordenadas retangulares. Funções penalidade quadráticas são incorporadas para tratar as variáveis discretas e é utilizado o método de pontos interiores primal-dual previsor-corretor. O somatório da potência ativa injetada na barra de referência é a função objetivo do problema. Emprega-se para modelar o transformador do tipo *Load Tap Changing* (LTC) um nó fictício localizado entre o transformador ideal e uma impedância série para construir o modelo do problema de FPO em coordenadas retangulares. A tensão do nó artificial e as injeções de corrente na barra nos dois nós finais, deste transformador, são utilizadas para descrever suas equações de ramo, e as restrições de igualdade relativas às injeções de correntes e tensões entre dois dos lados, são determinados. Em seguida, as equações de tensão nodais e as restrições de energia das barras são mantidas. E por fim, as funções penalidade quadráticas são incorporadas no modelo proposto para lidar com as variáveis de controle discretas. São apresentados resultados experimentais com os sistemas elétricos IEEE de 14 a 118 barras e comparados com a discretização convencional, as quais demonstram a validade e a maior eficiência, especialmente para sistemas de grande porte.

Huang (2015) propuseram um algoritmo híbrido de inteligência artificial imunológico e de recozimento simulado (do inglês, *hybrid artificial intelligence algorithm - hybrid immune and simulated annealing algorithm*) para resolver a injeção de corrente equivalente para o problema de FPO não-convexo, de grande porte, com variáveis discretas e contínuas em aplicações práticas. O método proposto pesquisa na vizinhança o mínimo local e global para minimizar o custo, ajustando os *taps* dos transformadores e os capacitores *shunt*. Os testes foram realizados com o sistema elétrico IEEE 30 barras e mostram que o método proposto tem melhor desempenho, em termos de robustez e eficiência, na qualidade da

solução, na taxa de convergência e no tempo computacional, para problemas de FPO. Segundo o autor, o método tem um potencial significativo para aplicação em problemas de programação não-linear no planejamento e operação de sistemas de energia.

Nas seções 2.3.1 e 2.3.2 são descritas a nomenclatura e a formulação matemática do problema de FPOR com variáveis discretas e contínuas adotadas neste trabalho, respectivamente.

## 2.2 Estrutura do Fluxo de Potência em dos Sistemas Elétricos de Potência

Um SEP tem como objetivo gerar, transmitir e distribuir energia elétrica de maneira segura, confiável e econômica. Um SEP típico divide-se em três subsistemas (ABARI et al., 2010):

- Sistema de geração: responsável por gerar a energia elétrica através de diversas fontes (hidráulica, térmica, solar, eólica, etc);
- Sistema de transmissão: responsável por transmitir a energia gerada por longas distâncias, até sistemas de distribuição ou centros de carga. Composto principalmente por transformadores e linhas de transmissão;
- Sistema de distribuição: responsável por entregar a energia gerada aos usuários finais (cargas). Composto principalmente por cargas e transformadores de distribuição.

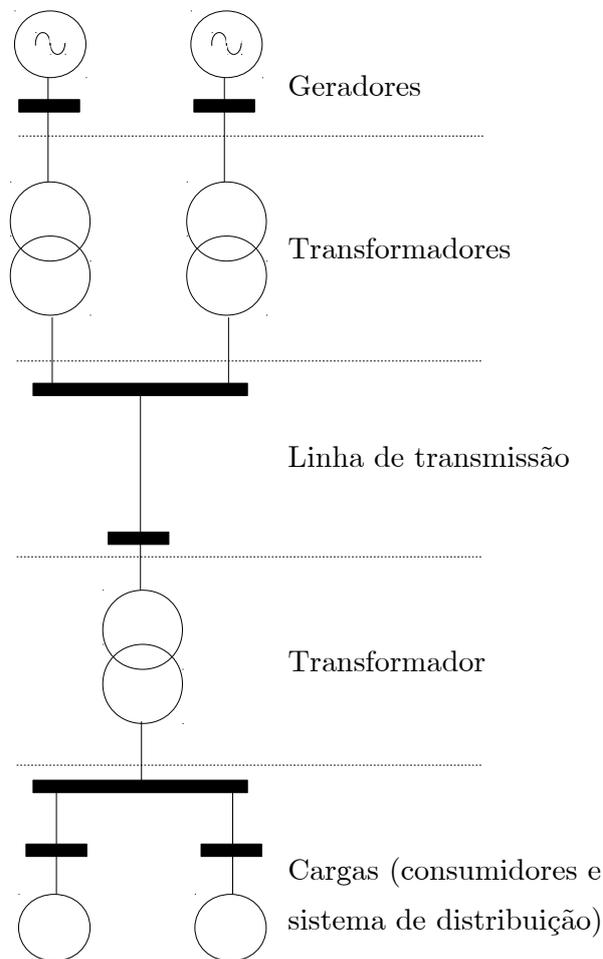
A Figura 2.1 ilustra o diagrama unifilar de um SEP típico.

Além dos dispositivos citados acima, um SEP pode conter vários outros dispositivos, como bancos de capacitores e de reatores *shunt*, compensadores síncronos, dispositivos de proteção, etc. Os transformadores são dispositivos extremamente importantes em SEP e podem ser utilizados para modificar a magnitude e o ângulo (fase) da tensão. Os transformadores que modificam apenas a magnitude da tensão são os mais comuns e são conhecidos como transformadores reguladores em fase. Já os segundos, conhecidos como transformadores defasadores, modificam o defasamento angular da tensão nas barras em que é conectado. Os transformadores e as linhas de transmissão são ditos elementos de ramo do sistema. Já os geradores e as cargas são ditos elementos de barra (nós) do sistema.

### 2.2.1 Cálculo de Fluxo de Potência em Sistemas Elétricos de Potência

O cálculo do FP, em um SEP consiste basicamente na determinação do estado do sistema, representado pelas tensões fasoriais nas barras do sistema, da distribuição dos

Figura 2.1 – Sistema elétrico de potência típico



Fonte: Adaptado de Grainger e Stevenson (1994)

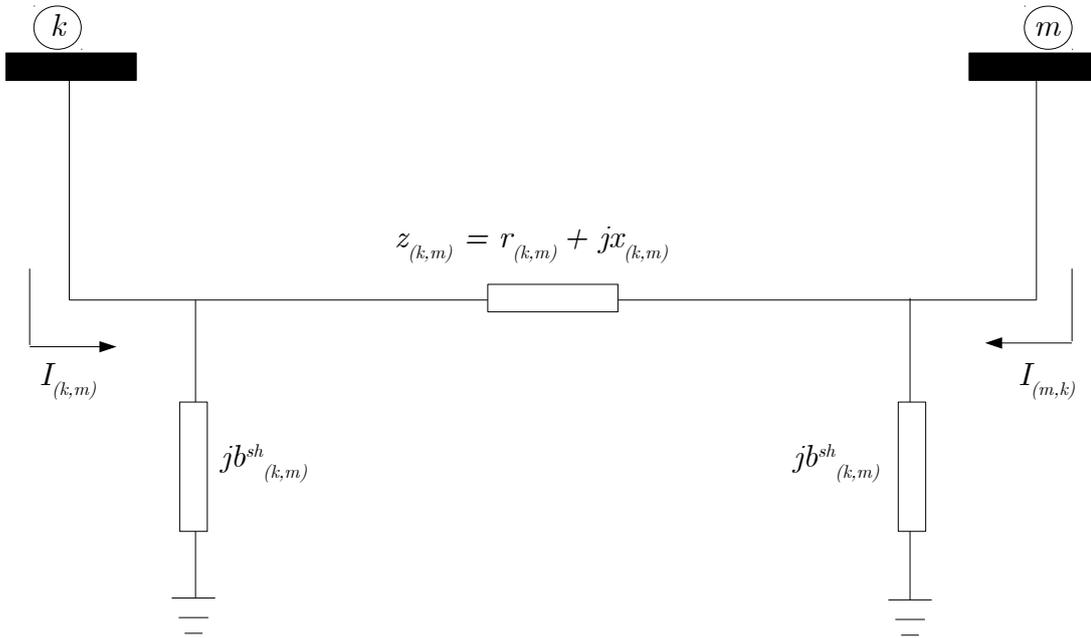
fluxos e das perdas nas linhas de transmissão de energia elétrica (GÓMEZ-EXPÓSITO; CONEJO; CAÑIZARES, 2011; ABARI et al., 2010). O cálculo de FP é, em geral, realizado através de métodos computacionais desenvolvidos especificamente para a resolução do sistema de equações e inequações algébricas que compõem o modelo do sistema. Entretanto, antes do equacionamento do problema de FP é necessário descrever o modelo dos elementos que constituem o SEP, por meio de suas equações de corrente e potência.

### 2.2.1.1 Modelagem de Elementos de Ramo: Cálculo das Correntes

#### *Linhas de Transmissão*

Em estudos de FP, as linhas de transmissão são modeladas através do modelo equivalente  $\pi$ , conforme Figura 2.2.

O modelo é composto por uma resistência série  $r_{(k,m)}$ , uma reatância série  $x_{(k,m)}$  e

Figura 2.2 – Modelo  $\pi$  de uma linha de transmissão


Fonte: Adaptado de Grainger e Stevenson (1994)

a susceptância *shunt*  $b_{(k,m)}^{sh}$ . A impedância série total é, portanto,  $z_{(k,m)} = r_{(k,m)} + jx_{(k,m)}$ .

A admitância série da linha é dada conforme a equação (2.1):

$$y_{(k,m)} = z_{(k,m)}^{-1} = g_{(k,m)} + jb_{(k,m)}. \quad (2.1)$$

A corrente  $I_{(k,m)}$ , fluindo da barra  $k$  para a barra  $m$  possui uma componente série e uma componente *shunt* e é dada por:

$$I_{(k,m)} = y_{(k,m)} (E_k - E_m) + jb_{(k,m)}^{sh} E_k. \quad (2.2)$$

Analogamente, a corrente  $I_{(m,k)}$  é dada por:

$$I_{(m,k)} = y_{(k,m)} (E_m - E_k) + jb_{(k,m)}^{sh} E_m, \quad (2.3)$$

em que

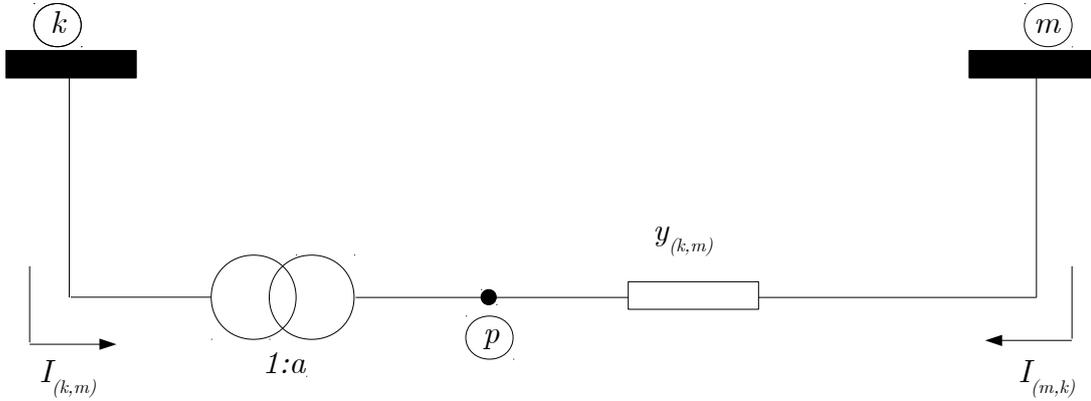
$$E_k = V_k \angle \theta_k,$$

$$E_m = V_m \angle \theta_m.$$

### 2.2.1.2 Transformadores

Um transformador é representado por uma admitância série e uma relação de transformação  $1 : a$ , com  $a = t \angle \varphi$ , conforme Figura 2.3.

Figura 2.3 – Modelo de um transformador



Fonte: Adaptado de Grainger e Stevenson (1994)

Para transformadores em fase, temos  $t = a$ , já que o ângulo de defasamento  $\varphi$  é nulo:

$$\frac{E_p}{E_k} = \frac{V_p \angle \theta_p}{V_k \angle \theta_k} = a, \quad (2.4)$$

com  $\theta_p = \theta_k$ .

Para transformadores defasadores, temos  $t = a \angle \varphi$ :

$$\frac{E_p}{E_k} = \frac{V_p \angle \theta_p}{V_k \angle \theta_k} = a \angle \varphi, \quad (2.5)$$

com  $\theta_p - \theta_k = \varphi$  e  $a = 1$ .

As correntes que fluem em um transformador em fase são dadas conforme mostrado em (2.6) e (2.7), (MONTICELLI, 1983):

$$I_{(k,m)} = a^2 y_{(k,m)} E_k + (-a y_{(k,m)}) E_m, \quad (2.6)$$

$$I_{(m,k)} = (-a y_{(k,m)}) E_k + y_{(k,m)} E_m. \quad (2.7)$$

Já para transformadores defasadores, as correntes são dadas por:

$$I_{(k,m)} = y_{(k,m)} E_k + (-t^* y_{(k,m)}) E_m, \quad (2.8)$$

$$I_{(m,k)} = (-t y_{(k,m)}) E_k + y_{(k,m)} E_p. \quad (2.9)$$

#### Expressões Gerais para Correntes

Examinando as expressões (2.2), (2.6) e (2.8), pode-se identificar uma expressão geral para as correntes  $I_{(k,m)}$  e  $I_{(m,k)}$  dadas em (2.10) e (2.11):

$$I_{(k,m)} = (a^2 y_{(k,m)} + j b_{(k,m)}^{sh}) E_k + (-t^* y_{(k,m)}) E_m, \quad (2.10)$$

$$I_{(m,k)} = \left(-ty_{(k,m)}\right) E_k + \left(y_{(k,m)} + jb_{(k,m)}^{sh}\right) E_m. \quad (2.11)$$

As expressões gerais acima podem ser utilizadas desde que os parâmetros apresentados assumam os seguintes valores:

- Linha de transmissão:  $a = 1$  e  $\varphi_{(k,m)} = 0$ ;
- Transformador defasador:  $a = 1$  e  $b_{(k,m)}^{sh} = 0$ ;
- Transformador em fase:  $b_{(k,m)}^{sh} = 0$  e  $\varphi_{(k,m)} = 0$ .

### 2.2.1.3 Modelagem dos Elementos de Ramo: Cálculo dos Fluxos de Potência

#### *Linhas de Transmissão*

A potência aparente que flui por uma linha  $(k, m)$  é dada por:

$$S_{(k,m)} = P_{(k,m)} + jQ_{(k,m)} = E_k I_{(k,m)}^*. \quad (2.12)$$

Substituindo a corrente dada por (2.2) em (2.12) e separando a parte real (potência ativa) e a parte imaginária (potência reativa), temos:

$$P_{(k,m)} = V_k^2 g_{(k,m)} - V_k V_m g_{(k,m)} \cos(\theta_{(k,m)}) - V_k V_m b_{(k,m)} \text{sen}(\theta_{(k,m)}), \quad (2.13)$$

$$Q_{(k,m)} = -V_k^2 (b_{(k,m)} + b_{(k,m)}^{sh}) + V_k V_m b_{(k,m)} \cos(\theta_{(k,m)}) - V_k V_m g_{(k,m)} \cos(\theta_{(k,m)}), \quad (2.14)$$

em que

$$\theta_{(k,m)} = \theta_k - \theta_m.$$

Analogamente, podemos definir os fluxos de potência ativa e reativa no sentido contrário, respectivamente:

$$P_{(m,k)} = V_m^2 g_{(k,m)} - V_k V_m g_{(k,m)} \cos(\theta_{(k,m)}) + V_k V_m b_{(k,m)} \text{sen}(\theta_{(k,m)}), \quad (2.15)$$

$$Q_{(m,k)} = -V_m^2 (b_{(k,m)} + b_{(k,m)}^{sh}) + V_k V_m b_{(k,m)} \cos(\theta_{(k,m)}) + V_k V_m g_{(k,m)} \cos(\theta_{(k,m)}). \quad (2.16)$$

Repare que as equações do fluxo de potência (2.13) e (2.14) podem ser obtidas a partir das equações (2.15) e (2.16), respectivamente, se os índices  $k$  e  $m$  forem trocados. Isso indica que as expressões (2.13) e (2.14) ou (2.15) e (2.16) são expressões gerais para os fluxos de potência ativa e reativa, respectivamente, nas linhas.

As perdas de potência ativa e reativa, respectivamente, são dadas pelo balanço de potência na linha, somando-se os fluxos de potência ativa dados em (2.13) e (2.15), e os fluxos de potência reativa, dados em (2.14) e (2.16), respectivamente:

$$P_{\text{loss}} = P_{(k,m)} + P_{(m,k)} = g_{(k,m)} \left[ V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m - 2V_k V_m \cos(\theta_{(k,m)}) \right], \quad (2.17)$$

$$Q_{\text{loss}} = Q_{(k,m)} + Q_{(m,k)} = -b_{(k,m)}^{sh} (V_k^2 + V_m^2) - b_{(k,m)} \left[ V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos(\theta_{(k,m)}) \right]. \quad (2.18)$$

### 2.2.1.4 Transformadores

A obtenção de expressões para os fluxos de potência ativa e reativa, respectivamente, para transformadores, quer sejam em fase ou defasadores, é análoga à obtenção dos fluxos de potência em linhas de transmissão. Assim, para os transformadores em fase, temos:

$$P_{(k,m)} = (aV_k)^2 g_{(k,m)} - (aV_k) V_m g_{(k,m)} \cos(\theta_{(k,m)}) - (aV_k) V_m b_{(k,m)} \text{sen}(\theta_{(k,m)}), \quad (2.19)$$

$$Q_{(k,m)} = -(aV_k)^2 (b_{(k,m)} + b_{(k,m)}^{sh}) + (aV_k) V_m b_{(k,m)} \cos(\theta_{(k,m)}) - (aV_k) V_m g_{(k,m)} \cos(\theta_{(k,m)}), \quad (2.20)$$

$$P_{(m,k)} = V_m^2 g_{(k,m)} - (aV_k) V_m g_{(k,m)} \cos(\theta_{(k,m)}) - (aV_k) V_m b_{(k,m)} \text{sen}(\theta_{(k,m)}), \quad (2.21)$$

$$Q_{(m,k)} = -V_m^2 b_{(k,m)} + (aV_k) V_m b_{(k,m)} \cos(\theta_{(k,m)}) - (aV_k) V_m g_{(k,m)} \cos(\theta_{(k,m)}). \quad (2.22)$$

Repare que as equações dos fluxos de potência (2.19) e (2.20) não podem ser obtidas a partir das equações (2.21) e (2.22), respectivamente, se os índices  $k$  e  $m$  forem trocados. Isso indica que as expressões (2.19) e (2.20) ou (2.21) e (2.22) não são expressões gerais para os fluxos de potência ativa e reativa, respectivamente, nos transformadores.

As expressões gerais para os fluxos de potência ativa e reativa nos transformadores em fase são da forma de (2.23) e (2.24):

$$P_{(k,m)} = \begin{cases} \text{expressão (2.19) se a barra } k \text{ está ligada no lado do tap do transformador,} \\ \text{expressão (2.21), caso contrário.} \end{cases} \quad (2.23)$$

$$Q_{(k,m)} = \begin{cases} \text{expressão (2.20) se a barra } k \text{ está ligada no lado do tap do transformador,} \\ \text{expressão (2.22), caso contrário.} \end{cases} \quad (2.24)$$

Já para os transformadores defasadores:

$$P_{(k,m)} = (aV_k)^2 g_{(k,m)} - (aV_k) V_m g_{(k,m)} \cos(\theta_{(k,m)} + \varphi_{(k,m)}) - (aV_k) V_m b_{(k,m)} \operatorname{sen}(\theta_{(k,m)} + \varphi_{(k,m)}), \quad (2.25)$$

$$Q_{(k,m)} = - (aV_k)^2 (b_{(k,m)} + b_{(k,m)}^{sh}) + (aV_k) V_m b_{(k,m)} \cos(\theta_{(k,m)} + \varphi_{(k,m)}) - (aV_k) V_m g_{(k,m)} \cos(\theta_{(k,m)} + \varphi_{(k,m)}). \quad (2.26)$$

$$P_{(m,k)} = V_m^2 g_{(k,m)} - (V_k) V_m g_{(k,m)} \cos(\theta_{(k,m)} + \varphi_{(k,m)}) - (V_k) V_m b_{(k,m)} \operatorname{sen}(\theta_{(k,m)} + \varphi_{(k,m)}), \quad (2.27)$$

$$Q_{(m,k)} = -V_m^2 b_{(k,m)} + (V_k) V_m b_{(k,m)} \cos(\theta_{(k,m)} + \varphi_{(k,m)}) - (V_k) V_m g_{(k,m)} \cos(\theta_{(k,m)} + \varphi_{(k,m)}). \quad (2.28)$$

Repare que as equações dos fluxos de potência (2.25) e (2.26) não podem ser obtidas a partir das equações (2.27) e (2.28), respectivamente, se os índices  $k$  e  $m$  forem trocados. Isso indica que as expressões (2.25) e (2.26) ou (2.27) e (2.28) não são expressões gerais para os fluxos de potência ativa e reativa, respectivamente, nos transformadores.

As expressões gerais para os fluxos de potência ativa e reativa nos transformadores defasadores são da forma de (2.29) e (2.36):

$$P_{(k,m)} = \begin{cases} \text{expressão (2.25) se a barra } k \text{ está ligada no lado do tap do transformador,} \\ \text{expressão (2.27), caso contrário.} \end{cases} \quad (2.29)$$

$$Q_{(k,m)} = \begin{cases} \text{expressão (2.26) se a barra } k \text{ está ligada no lado do tap do transformador,} \\ \text{expressão (2.28), caso contrário.} \end{cases} \quad (2.30)$$

*Expressões Gerais para Fluxos de Potência*

Assim como ocorre para os cálculos de correntes, pode-se determinar expressões gerais para fluxos de potência ativa e reativa, respectivamente, respeitando os parâmetros  $a$ ,  $\varphi_{(k,m)}$  e  $b_{(k,m)}^{sh}$ :

$$P_{(k,m)} = (aV_k)^2 g_{(k,m)} - (aV_k) V_m g_{(k,m)} \cos(\theta_{(k,m)} + \varphi_{(k,m)}) - (aV_k) V_m b_{(k,m)} \text{sen}(\theta_{(k,m)} + \varphi_{(k,m)}), \quad (2.31)$$

$$Q_{(k,m)} = -(aV_k) (b_{(k,m)} + b_{(k,m)}^{sh}) + (aV_k) V_m b_{(k,m)} \cos(\theta_{(k,m)} + \varphi_{(k,m)}) - (aV_k) V_m g_{(k,m)} \text{sen}(\theta_{(k,m)} + \varphi_{(k,m)}), \quad (2.32)$$

$$P_{(k,m)} = \begin{cases} \text{expressão (2.31) se a barra } k \text{ está ligada no lado do tap do transformador,} \\ \text{expressão (2.34), caso contrário.} \end{cases} \quad (2.33)$$

$$P_{(m,k)} = g_{(m,k)} V_k^2 - (aV_m) V_k g_{(m,k)} \cos(\theta_{(m,k)} + \varphi_{(m,k)}) + (aV_m) V_k b_{(m,k)} \text{sen}(\theta_{(m,k)} + \varphi_{(m,k)}), \quad (2.34)$$

$$Q_{(m,k)} = -(b_{(m,k)} + b_{(m,k)}^{sh}) V_k^2 + (aV_m) V_k b_{(m,k)} \cos(\theta_{(m,k)} + \varphi_{(m,k)}) + (aV_m) V_k g_{(m,k)} \text{sen}(\theta_{(m,k)} + \varphi_{(m,k)}). \quad (2.35)$$

$$Q_{(k,m)} = \begin{cases} \text{expressão (2.32) se a barra } k \text{ está ligada no lado do tap do transformador,} \\ \text{expressão (2.35), caso contrário.} \end{cases} \quad (2.36)$$

Pode-se notar que as equações (2.34) e (2.35) não são obtidas ao inverter-se os índices  $k$  e  $m$  nas equações (2.31) e (2.32). Assim, não há uma expressão geral que expresse os fluxos de potência ativa e reativa em um ramo genérico  $(k, m)$  do sistema. É necessário, portanto, que se trabalhe com os dois conjuntos de equações, notando que a barra  $k$  das expressões (2.31)–(2.35) é a barra inicial na Figura 2.2 e que a barra  $m$  é necessariamente a barra final naquela figura. A barra inicial é aquela que está conectada no lado da variação do tap do transformador, já a barra final é aquela que está conectada no lado oposto de variação do tap do transformador.

As expressões gerais das perdas são obtidas analogamente ao que foi feito para os fluxos de potência.

## 2.3 Problema de Fluxo de Potência Ótimo

O problema de FPO resulta da modelagem do problema de FP como um problema de otimização, em que existem:

- Função objetivo: minimização de custos, minimização de perdas de potência ativa nas linhas e transmissão de energia elétrica, ajuste de perfil de tensões, etc;
- Restrições de igualdade: balanços de potência ativa e reativa;
- Restrições de desigualdade: limites operacionais de tensão, injeções de potência ativa e reativa, limites em variáveis canalizadas, etc.

A formulação matemática do problema de FPOR, caso particular do FPO, é detalhada em 2.3.2.

### 2.3.1 Nomenclatura

#### 2.3.1.1 Conjuntos

- $BS$  barras do sistema;
- $BCCR$  barras de carga e controle de reativo;
- $BC$  barras de carga;
- $BCR$  barras de controle de reativo;
- $T$  transformadores com  $tap$  variável;
- $BSS$  barras com bancos de capacitores e de reatores  $shunt$  variável;
- $D_{t_{(k,m)}}$  valores discretos que o  $tap$  do transformador  $(k, m)$  pode assumir, tal que  $D_{t_{(k,m)}} = \{\underline{t}_{(k,m)}, \underline{t}_{(k,m)} + p, \underline{t}_{(k,m)} + 2p, \dots, \underline{t}_{(k,m)} + np\}$ , em que  $p$  representa o tamanho do passo discreto, com  $(k, m) \in T$ ;
- $D_{b_k^{sh}}$  valores discretos que o banco de capacitores ou de reator  $shunt$   $k$  pode assumir,  $\forall k \in BSS$ ;
- $\Omega$  linhas de transmissão;
- $\Omega_k$  barras conectadas à barra  $k$ ,  $\forall k \in BC$ .

#### 2.3.1.2 Constantes

- $\underline{Q}_k, \overline{Q}_k$  limites mínimos e máximos de geração de potência reativa na barra  $k$ , respectivamente, com  $k \in BCR$  ( $pu$ );
- $\underline{V}_k, \overline{V}_k$  limites mínimos e máximos das magnitudes das tensões na barra  $k$ , respectivamente, com  $k \in BS$  ( $pu$ );
- $g_{(k,m)}$  condutância série da linha  $(k, m)$ ,  $\forall (k, m) \in \Omega$  ( $pu$ );
- $b_{(k,m)}$  susceptância série da linha  $(k, m)$ ,  $\forall (k, m) \in \Omega$  ( $pu$ );

- $b_{(k,m)}^{sh}$  susceptância *shunt* da linha  $(k, m)$ ,  $\forall (k, m) \in \Omega (pu)$ ;  
 $P_k^G, P_k^C$  potência ativa gerada e consumida na barra  $k$ , respectivamente,  $\forall k \in BCR (pu)$ ;  
 $Q_k^G, Q_k^C$  potências reativas geradas e consumidas na barra  $k$ , respectivamente,  $\forall k \in BCR (pu)$ .

### 2.3.1.3 Variáveis

- $\theta_k$  ângulo de tensão da barra  $k$  (variável contínua),  $\forall k \in BS (pu)$ ;  
 $V_k$  magnitude de tensão da barra  $k$  (variável contínua),  $\forall k \in BS (pu)$ ;  
 $t_{(k,m)}$  *tap* do transformador da linha  $(k, m)$  (variável discreta),  $\forall (k, m) \in T (pu)$ ;  
 $b_k^{sh}$  bancos de capacitores e de reatores *shunt* da barra  $k$  (variável discreta),  $\forall k \in BSS (pu)$ .

## 2.3.2 Formulação Matemática do Problema de FPOR

Na formulação adotada neste trabalho o problema de FPOR é modelado como um problema de programação estático, não-convexo, com função objetivo não-linear, com um conjunto de restrições de igualdade e desigualdade lineares e não-lineares e com variáveis discretas e contínuas. A formulação matemática do problema de FPOR objetiva minimizar as perdas de potência ativas nas linhas de transmissão de energia elétrica e é dada por (2.37):

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad f(V, \theta) \\
 & \text{s.a. :} \quad \Delta P_k(V, \theta, t) = 0, \forall k \in BCCR \\
 & \quad \Delta Q_k(V, \theta, t, b^{sh}) = 0, \forall k \in BC \\
 & \quad \underline{Q}_k \leq Q_k(V, \theta, t, b^{sh}) \leq \overline{Q}_k, \forall k \in BCR \\
 & \quad \underline{V}_k \leq V_k \leq \overline{V}_k, \forall k \in BS \\
 & \quad t_{(k,m)} \in \left\{ \underline{t}_{(k,m)}, \underline{t}_{(k,m)} + p, \underline{t}_{(k,m)} + 2p, \dots, \underline{t}_{(k,m)} + np \right\}, \forall (k, m) \in T, \forall n \in \mathbb{N} \\
 & \quad b_k^{sh} \in D_{b_k^{sh}}, \forall k \in BSS.
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

A seguir descrevem-se a função objetivo e o conjunto de restrições físicas e operacionais dos sistema associadas ao problema (2.37).

### 2.3.2.1 Função Objetivo

A função escalar  $f(V, \theta)$ , dada por (2.38), representa as perdas de potência ativa nas linhas de transmissão de energia elétrica.

$$f(V, \theta) = \sum_{(k,m) \in \Omega_k} g_{(k,m)}(V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos(\theta_{(k,m)})). \tag{2.38}$$

### 2.3.2.2 Restrições Físicas

As equações de FP do sistema, baseadas nas leis de Kirchhoff, são apresentadas em (2.39) e (2.40), respectivamente.

- Balanço de potência ativa para as barras de carga e de controle de reativo:

$$\Delta P_k(V, \theta, t) = P_k^G - P_k^C - \sum_{m \in \Omega_k} P_{(k,m)}(V, \theta, t), \forall k \in BCCR, \quad (2.39)$$

em que

$$P_{(k,m)} = (t_{(k,m)} V_k)^2 g_{(k,m)} - t_{(k,m)} V_k V_m (g_{(k,m)} \cos(\theta_{(k,m)}) + b_{(k,m)} \text{sen}(\theta_{(k,m)})).$$

- Balanço de potência reativa para as barras de carga:

$$\Delta Q_k(V, \theta, t, b^{sh}) = Q_k^G - Q_k^C - b_k^{sh} V_k^2 - \sum_{m \in \Omega_k} Q_{(k,m)}(V, \theta, t, b^{sh}), \quad (2.40)$$

$$\forall j \in BC,$$

em que

$$Q_{(k,m)} = -(t_{(k,m)} V_k)^2 (b_{(k,m)} + b_{(k,m)}^{sh}) + t_{(k,m)} V_k V_m (b_{(k,m)} \cos(\theta_{(k,m)}) - g_{(k,m)} \text{sen}(\theta_{(k,m)})).$$

- Potência reativa injetada nas barras de controle de reativo:

$$\underline{Q}_k \leq Q_k(V, \theta, t, b^{sh}) \leq \bar{Q}_k, \forall k \in BCR, \quad (2.41)$$

em que

$$Q_k(V, \theta, t, b^{sh}) = Q_k^C - b_k^{sh} V_k^2 + \sum_{m \in \Omega_k} [-(t_{(k,m)} V_k)^2 (b_{(k,m)} + b_{(k,m)}^{sh}) + t_{(k,m)} V_k V_m (b_{(k,m)} \cos(\theta_{(k,m)}) - g_{(k,m)} \text{sen}(\theta_{(k,m)}))]. \quad (2.42)$$

### 2.3.2.3 Restrições Operacionais do Sistema

Os limites de tensão nas barras, o conjunto dos *taps* dos transformadores e o conjunto dos bancos de capacitores e de reatores *shunt* são apresentados em (2.43)–(2.45).

- Limites mínimos e máximos da magnitude da tensão nas barras:

$$\underline{V}_k \leq V_k \leq \bar{V}_k, \forall k \in BS. \quad (2.43)$$

- Os *taps* dos transformadores devem pertencer aos conjuntos discretos com passos constantes:

$$t_{(k,m)} \in \{ \underline{t}_{(k,m)}, \underline{t}_{(k,m)} + p, \underline{t}_{(k,m)} + 2p, \dots, \underline{t}_{(k,m)} + np \}, \forall l \in T, \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (2.44)$$

- Os bancos de capacitores e de reatores *shunt* devem pertencer aos conjuntos discretos com passos distintos:

$$b_k^{sh} \in D_{b_k^{sh}}, \forall k \in BSS. \quad (2.45)$$

O modelo matemático apresentado em (2.37) é de difícil resolução, devido às variáveis de controle discretas e as equações e inequações não-lineares e não-convexas. Além disso, a função objetivo (2.38) é não-linear, não-separável e não permite simplificações, e segundo Monticelli e Liu (1992), isto dificulta ainda mais a resolução do problema de FPOR.

No Capítulo 3 são apresentados os métodos de otimização da literatura, envolvidos neste trabalho, para a resolução do problema de FPOR com variáveis discretas e contínuas.

## 3 Métodos de Otimização da Literatura

Nas abordagens propostas neste trabalho, apresentadas no Capítulo 4, utilizou-se o método de penalidade e o método de pontos interiores. Os resultados obtidos foram comparados com os métodos de arredondamento, B&B (GUPTA; RAVINDRAN, 1985) e OA (DURAN; GROSSMANN, 1986). Assim, neste capítulo, são descritos brevemente os métodos de penalidade, os métodos de pontos interiores, o método B&B e o método OA.

### 3.1 Método de Função Penalidade

Conforme apresentado na seção anterior, o problema de FPOR apresenta como variáveis discretas os *taps* dos transformadores e os bancos de capacitores e de reatores *shunt*. Devido à grande complexidade de solução de problemas de programação não-linear com variáveis discretas e contínuas, propõe-se um método baseado em função penalidade para o tratamento das variáveis discretas.

Os métodos de função penalidade transformam um problema de programação não-linear restrito (3.1) em um problema irrestrito (3.6) (LUENBERGER; YE, 1984).

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p \\ & g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, q, \end{aligned} \quad (3.1)$$

em que  $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ ;  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ , com  $p, q \leq n$  e as funções  $f, g$  e  $h$  são da classe  $C^2$ .

O método consiste em adicionar as restrições à função objetivo do problema, multiplicadas por um parâmetro de penalidade, de modo a penalizar qualquer violação das restrições. Este método gera uma sequência de soluções ineficazes até convergirem para a solução do problema restrito (3.1). A função resultante da adição da função penalidade à função objetivo é denominada função auxiliar.

A função auxiliar tem a forma de  $f(x) + \omega P(x)$ , sendo  $\omega$  o parâmetro de penalidade e  $P$  a função penalidade, que é dada por (3.2).

$$P(x) = \sum_{i=1}^p \alpha(h_i(x)) + \sum_{j=1}^q \varphi(g_j(x)), \quad (3.2)$$

em que  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas em  $y \in \mathbb{R}$ , tais que:

$$\alpha(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y = 0 \\ \delta > 0, & \text{se } y \neq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \varphi(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y \leq 0 \\ \delta > 0, & \text{se } y > 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

A função  $\alpha$  penaliza a violação das restrições de igualdade, enquanto que a função  $\varphi$  penaliza a violação das restrições de desigualdade. As funções  $\alpha$  e  $\varphi$  tradicionalmente assumem as formas (3.4) e (3.5), respectivamente.

$$\alpha(y) = |y|^\beta, \quad (3.4)$$

$$\varphi(y) = (\max\{0; y\})^\beta, \quad (3.5)$$

em que  $\beta \in \mathbb{Z}_+$ . Em particular, a função penalidade é denominada quadrática quando  $\beta = 2$ .

Logo, tem-se o problema irrestrito dado por (3.6).

$$\underset{x}{Min} \quad f(x) + \omega P(x), \quad (3.6)$$

em que  $\omega > 0$  é suficientemente grande e  $x \in X$ .

Caso  $\omega P(x)$  não seja menor que a tolerância de convergência  $\varepsilon$  estabelecida, o parâmetro de penalidade  $\omega$  é atualizado por um fator multiplicador, parâmetro de atualização de penalidade  $c > 1$ , determinado por uma heurística. O problema irrestrito (3.6) é resolvido novamente.

À medida que  $\omega \rightarrow \infty$  e  $P(x) \rightarrow 0$ , a solução do problema irrestrito (3.6) converge para a solução do problema restrito (3.1).

Uma abordagem do método de função penalidade para tratar as variáveis de natureza discretas em problemas de programação não-linear é considerá-las como contínuas e penalizar a função objetivo quando estas variáveis assumem valores não discretos.

Para  $\omega$  suficientemente grande, a solução do problema penalizado (3.6) será próxima a solução do problema original (3.1). No entanto, para valores muito grandes de  $\omega$ , a matriz hessiana poder tornar se mau condicionada. Para valores muito grandes de  $\omega^0$ , valores iniciais do parâmetro de penalidade  $\omega$ , e  $c$  há uma maior ênfase sobre a factibilidade e o método pode se mover rapidamente para um ponto factível, não ótimo, causando um término prematuro. Logo, a escolha dos valores iniciais de  $\omega$  e de  $c$  deve ser criteriosa, uma vez que afeta a convergência do método e pode comprometer o processo de otimização, não havendo garantias de que a solução encontrada seja ótima.

## 3.2 Método *Branch-and-Bound*

O método B&B, também conhecido como método de avaliação e separação, foi originalmente proposto para problemas de programação linear inteira mista. No entanto, Gupta e Ravindran (1985) utilizaram este método para problemas de programação não-linear.

A estratégia do método consiste em dividir o problema original em subproblemas menores, a fim de se obter a solução ótima. Separa-se o problema inicial com variáveis inteiras/discretas em vários subproblemas contínuos. Cada um destes subproblemas pode ser resolvido por algum método de otimização contínuo.

Tomemos um problema inicial com variáveis discretas e contínuas(3.7):

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad f(x) \\
 & \text{s.a. :} \quad h(x, y_i) = 0 \\
 & \quad \quad \quad g(x, y_i) \leq 0 \\
 & \quad \quad \quad \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\
 & \quad \quad \quad y_i \in D_{y_i}, i = 1, 2, \dots, n_y.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

O método B&B inicia-se resolvendo a relaxação contínua do problema (3.9) dada por (3.8):

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad f(x) \\
 & \text{s.a. :} \quad h(x, y) = 0 \\
 & \quad \quad \quad g(x, y) \leq 0 \\
 & \quad \quad \quad \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\
 & \quad \quad \quad \underline{y}_i \leq y_i \leq \bar{y}_i, i = 1, 2, \dots, n_y,
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

em que  $\underline{y}_i = \text{Min} \{D_{y_i}\}$  e  $\bar{y}_i = \text{Max} \{D_{y_i}\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_y$ .

Se na solução deste problema for obtido  $y_i \in D_{y_i}$ , então a solução encontrada é ótima para o problema (3.7). Caso contrário, escolhe-se uma variável  $y_L$  e a região factível do problema  $PL0$  é dividida em duas subregiões (*branch*), fornecendo os dois subproblemas (3.9) e (3.10).

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad f(x) \\
 & \text{s.a. :} \quad h(x, y_i) = 0 \\
 & \quad \quad \quad g(x, y_i) \leq 0 \\
 & \quad \quad \quad \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\
 & \quad \quad \quad \underline{y}_i \leq y_i \leq \bar{y}_i \\
 & \quad \quad \quad y_L \leq s^{\text{inf}},
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad f(x) \\
 & \text{s.a. :} \quad h(x, y_i) = 0 \\
 & \quad \quad \quad g(x, y_i) \leq 0 \\
 & \quad \quad \quad \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\
 & \quad \quad \quad \underline{y}_i \leq y_i \leq \bar{y}_i \\
 & \quad \quad \quad y_L \geq s^{\text{sup}},
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

em que  $s^{\text{inf}}$  é o valor discreto mais próximo inferiormente de  $y_L$  e  $s^{\text{sup}}$  é o valor discreto mais próximo superiormente de  $y_L$ .

Cada subproblema é um nó na árvore B&B. A solução de cada subproblema fornece um limitante (*bound*) para a subregião. Se a solução do subproblema é discreta para as variáveis discretas, então esta subregião não é mais explorada. Uma subregião em que a melhor solução discreta encontrada até o momento é melhor que seu limitante, é descartada, caso contrário é explorada recursivamente. Desta forma, uma árvore de subproblemas é criada e o método para quando não há mais subregiões a serem exploradas.

A eficiência do método B&B depende da qualidade dos seus limitantes para que subregiões possam ser descartadas e o método não se torne exaustivo, e da facilidade de resolução dos subproblemas. Porém, estes dois atributos são geralmente antagônicos, ou seja, um subproblema de fácil resolução não fornece um limitante de qualidade. Outros fatores como a escolha da ordem para se resolver os subproblemas, e a escolha da variável para o *branching* afetam a eficiência do método. O método se torna exaustivo para problemas de grande porte, isto é, para problemas com muitas restrições e variáveis, pois requer grande esforço computacional e, em alguns casos, pode não chegar a uma solução ótima (SOLER, 2011).

### 3.3 Método *Outer Approximation*

O método OA foi proposto por Duran e Grossmann (1986). Neste método a função objetivo e as restrições do problema original são linearizadas. São resolvidos vários problemas não-lineares contínuos de maneira sequencial e um PL que contém variáveis discretas e contínuas é obtido. A solução deste PL converge para a solução do problema original. Este método é aplicado a problemas de programação não-linear com variáveis discretas e contínuas cuja relaxação contínua é convexa. Considere o problema dado por (3.11).

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & f(x, y) \\
 \text{s.a. :} \quad & g(x, y) \leq 0 \\
 & \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\
 & y_i \in D_{y_i} = 1, 2, \dots, n_y,
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

em que  $f(x, y)$  e  $g(x, y)^T = (g_1(x, y), g_2(x, y), \dots, g_p(x, y))$  são funções não-lineares convexas e diferenciáveis.

O método OA é descrito a seguir para problemas do tipo de (3.11). Para isso, considera-se o subproblema de programação não-linear  $y^j$ , denominado  $PNL(y^j)$  dado por

(3.12). Este subproblema é obtido fixando-se  $y = y^j$  em (3.11).

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f(x, y^j) \\ \text{s.a. :} \quad & g(x, y^j) \leq 0 \\ & \underline{x} \leq x \leq \bar{x}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

Considera-se também o *Problema Mestre*  $\text{PIM}^K$ , um PL com variáveis contínuas e discretas dado por (3.13).

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \eta \\ \text{s.a. :} \quad & \eta \geq f^k + (\nabla f^k)^T \begin{pmatrix} x - x^k \\ y - y^k \end{pmatrix} \\ & 0 \geq g^k + (\nabla g^k)^T \begin{pmatrix} x - x^k \\ y - y^k \end{pmatrix}, k = 0, 1, \dots, K \\ & \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\ & y_i \in D_{y_i}, i = 1, 2, \dots, n_y, \end{aligned} \tag{3.13}$$

em que  $x^k$  e  $y^k$  são valores fixos para  $x$  e  $y$ ,  $f^k = f(x^k, y^k)$  e  $g^k = g(x^k, y^k)$ .

O método OA baseia-se na acumulação crescente de linearizações com o intuito de limitar a função objetivo e a região factível do problema (3.11). O método se inicia resolvendo o PNL( $y^0$ ), em que  $y^0$  é o valor inicial fixado para o vetor  $y$ . A solução deste problema é  $x^0$ . Ao linearizar a função objetivo e as restrições ativas deste problema no ponto  $(x^0, y^0)$ , obtém-se o problema  $\text{PIM}^0$ , que é a relaxação linear de (3.11). Resolve-se o problema  $\text{PIM}^0$ , obtendo-se a solução  $(x_{\text{PIM}^0}^0, y_{\text{PIM}^0}^0)$ . Resolve-se então o problema PNL( $y^1$ ), com  $y^1 = y_{\text{PIM}^0}^0$ , dado por (3.12). A solução deste problema é  $x^1$ . Adicionam-se as linearizações da função objetivo e das restrições ativas deste problema no ponto  $(x^1, y^1)$  no problema  $\text{PIM}^0$ , obtendo-se o problema  $\text{PIM}^1$ . Resolvendo este problema obtém-se o ponto  $y^2$  e então o processo é repetido.

Os subproblemas PNL( $y^K$ ) fornecem limitantes superiores para a solução do problema de programação não-linear com variáveis discretas e contínuas (3.11) e os subproblemas  $\text{PIM}^K$  fornecem limitantes inferiores. O algoritmo converge quando estes limitantes estão suficientemente próximos, considerando uma tolerância previamente definida.

No caso de existirem funções não-convexas no problema (3.11), o problema  $\text{PIM}^K$  não será uma relaxação contínua deste problema, uma vez que as linearizações podem eliminar partes da região factível do problema. Por isto, associam-se heurísticas a este método para tratar as não convexidades das funções envolvidas. Porém, não se garante que o ótimo global seja encontrado (SOLER, 2011).

No Capítulo 4 estão detalhados os métodos propostos, neste trabalho, para a resolução do problema de FPOR com variáveis discretas e contínuas.

## 4 Abordagens Propostas para a Resolução do Problema de FPOR com Variáveis Discretas e Contínuas

Neste capítulo estão detalhadas as abordagens propostas para a resolução do problema de FPOR com variáveis discretas e contínuas. Ambas as abordagens propostas são baseadas em funções penalidade para o tratamento das variáveis discretas do problema, chamadas de Abordagem Função Penalidade Senoidal e Polonomial via Interpolação (FPS) e Abordagem Função Penalidade Polinomial via Fatores do Primeiro Grau (FPP).

### 4.1 Tratamento das Variáveis do Problema de FPOR via Funções Penalidade

As abordagens propostas, neste trabalho, para resolver o problema de FPOR com variáveis discretas e contínuas são inspirados em Liu, Papalexopoulos et al. (1992), Liu, Tso e Cheng (2002) e Soler (2011), que utilizaram funções penalidade para tratar as variáveis discretas em problemas de FPO.

Considera-se o problema genérico de FPOR com variáveis discretas e contínuas:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad f(x, y) \\
 & \text{s.a. :} \quad h_j(x, y) = 0, j = 1, 2, \dots, m \\
 & \quad \quad \quad g_i(x, y) \leq 0, i = 1, 2, \dots, p \\
 & \quad \quad \quad \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\
 & \quad \quad \quad y_k \in \{d_{k_1}, d_{k_2}, \dots, d_{k_n}\}, k = 1, 2, \dots, n_y,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

em que  $(x : y) = (x_1, x_2, \dots, x_{n_x}; y_1, y_2, \dots, y_{n_y})^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x, y)^T = (h_1(x, y), h_2(x, y), \dots, h_m(x, y))$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $g(x, y)^T = (g_1(x, y), g_2(x, y), \dots, g_p(x, y))$ , com  $m + q < n$ . As funções  $f, g$  e  $h$  são da classe  $C^2$  e  $k_n$  é o número de valores discretos que as variáveis discretas  $y_k$  podem assumir. A função objetivo  $f(x, y)$  representa as perdas de potência ativa na linha de transmissão de energia elétrica, as restrições do problema referem-se as restrições físicas e operacionais do sistema.

As funções penalidade são utilizadas para tratar as variáveis de controle discretas do problema de FPOR. As variáveis discretas do problema são os *taps* dos transformadores e os bancos de capacitores e de reatores *shunt*. Os *taps* dos transformadores são ajustados

por passos constantes, enquanto que os bancos de capacitores e de reatores *shunt* são ajustados por passos distintos.

As funções penalidade propostas neste trabalho têm as seguintes características:

$$P_k(y_k) = \begin{cases} 0, & \text{se } y_k \in \{d_{k_1}, d_{k_2}, \dots, d_{k_{n_k}}\}, k = 1, 2, \dots, n_y \\ \delta > 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.2)$$

A abordagem consiste em considerar, a princípio, todas as variáveis como contínuas e adicionar as funções penalidade à função objetivo do problema (4.1), conforme (4.3).

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f(x, y) + \sum_{k=1}^{n_y} \omega_k P_k(y_k) \\ \text{s.a. :} \quad & h_j(x, y) = 0, j = 1, 2, \dots, m \\ & g_i(x, y) \leq 0, i = 1, 2, \dots, p \\ & \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\ & \underline{y} \leq y \leq \bar{y}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

em que  $\omega_k > 0$  são os parâmetros de penalidade.

Devido à inclusão das funções penalidade à função objetivo as variáveis discretas podem ser tratadas como contínuas, pois a penalidade obriga as variáveis discretas a assumirem valores discretos, conforme (4.2).

Em (4.3) as funções penalidade têm sua amplitude modulada por parâmetros de penalidade  $\omega_k$ , em que  $\omega_k > 0$ , para  $k = 1, 2, \dots, n_y$ . Caso o valor de  $\omega_k$  seja muito alto, a função penalidade terá um peso excessivo em relação à função objetivo, fazendo com que o algoritmo de solução priorize a sua minimização ao invés de priorizar a minimização da função objetivo original. Por outro lado, caso o valor de  $\omega_k$  seja muito baixo, a função penalidade será insignificante em relação à função objetivo, fazendo com que as variáveis originalmente discretas não convirjam para seus valores discretos permitidos. Assim, inicia-se o processo iterativo, com  $\omega_k$ , para  $k = 1, 2, \dots, n_y$  suficientemente pequenos, aumentando-os gradativamente. A atualização dos parâmetros de penalidade  $\omega_k$  ocorre, segundo uma heurística. Neste trabalho adotam-se multiplicadores  $c_k$ , denominados fatores de penalidade, que atualizam os parâmetros de penalidade, conforme (4.4):

$$\omega_k^{l+1} = c_k \omega_k^l, k = 1, 2, \dots, n_y, \quad (4.4)$$

em que  $1 < c_k < 2$ ,  $k = 1, 2, \dots, n_y$  e  $l$  denota a iteração atual.

O processo iterativo é finalizado quando cada variável, originalmente discreta, assume um valor suficientemente próximo de um valor pertencente ao seu conjunto de valores discretos permitidos, considerando uma tolerância  $\varepsilon$ , dada por (4.5):

$$|y_k^* - y_k^d| \leq \varepsilon, k = 1, 2, \dots, n_y, \quad (4.5)$$

em que  $y_k^d$  é o valor discreto mais próximo de  $y_k^*$ .

Desta forma, uma sequência finita de problemas contínuos e penalizados (4.3) é resolvida e as soluções obtidas convergem para a solução do problema original (4.1).

Para resolver a sequência de problemas (4.3) propõe-se utilizar o método de pontos interiores, proposto por Wächter e Biegler (2006). Optou-se por utilizar este método devido ao seu bom desempenho e rápida convergência comprovada na resolução de problemas de FPO. Este método foi utilizado através do *solver* gratuito *Interior Point OPTimizer* (IPOPT) (IPOPT, 2015) em interface com o *software General Algebraic Modeling System* (GAMS) (GAMS, 2015).

Na Seção 4.2 são apresentadas as funções penalidade desenvolvidas neste trabalho para tratar as variáveis discretas do problema de FPOR.

## 4.2 Funções Penalidade Propostas

### 4.2.1 Primeira Proposta: Abordagem FPSP

#### 4.2.1.1 Função Penalidade Senoidal

A função penalidade utilizada é uma função senoidal contínua e diferenciável. A função penalidade senoidal é utilizada neste trabalho para tratar as variáveis discretas, *taps* dos transformadores, as quais devem ser ajustadas por valores discretos e com passos constantes. A função penalidade senoidal é dada por (4.6):

$$P(y_i) = \left[ \text{sen} \left( \frac{y_i}{p} \pi + \alpha \right) \right]^2, \quad (4.6)$$

em que  $\alpha$  representa uma constante  $0 \leq \alpha < \pi$ , determinada para que os valores discretos sejam raízes da função, e  $p$  é o tamanho do passo.

Nota-se que  $P(y_i) = 0$  se, e somente se,  $y_i$  assume valores discretos e, caso contrário,  $P(y_i) > 0$ .

Maiores detalhes são encontrados em Soler (2011).

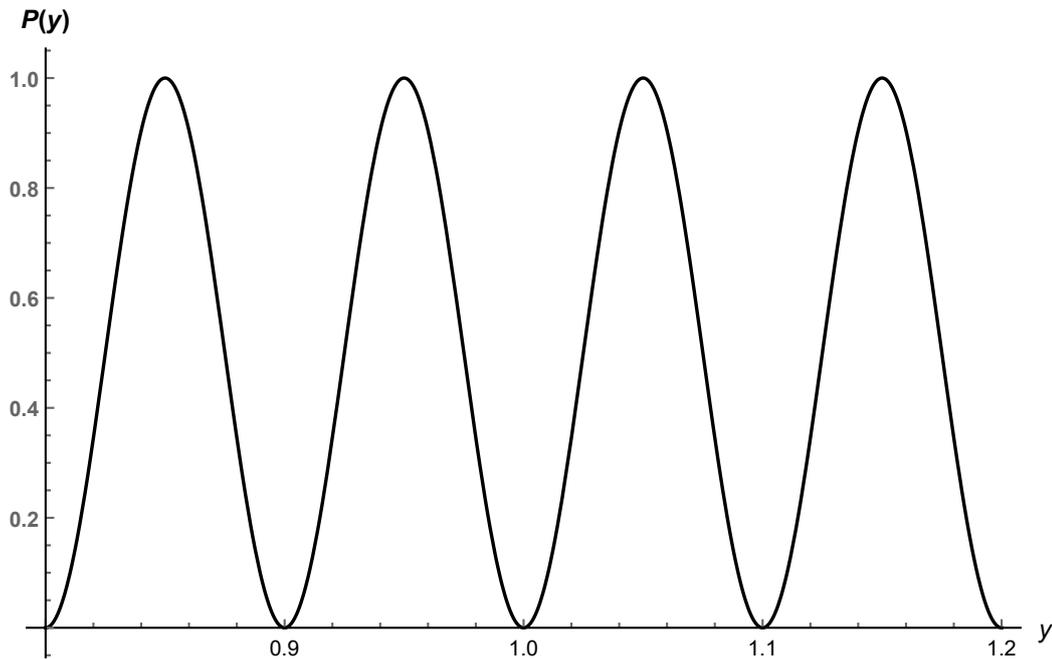
#### 4.2.1.2 Exemplo Numérico de Aplicação 5.1

Neste exemplo adaptado de Soler, Sousa e Costa (2012), considera-se a variável discreta  $y$  que deve pertencer ao conjunto discreto  $\{0,8; 0,9; 1; 1,1; 1,2\}$  e  $\alpha = 0$ . Utilizando a técnica apresentada nesta seção, obtém-se a função senoidal (4.7):

$$P(y) = \left[ \text{sen} \left( \frac{y}{0,1} \pi \right) \right]^2. \quad (4.7)$$

Esta função senoidal é plotada na Figura 4.1.

Figura 4.1 – Função penalidade senoidal  $P(y)$



Fonte: autoria própria

#### 4.2.1.3 Função Penalidade Polinomial via Interpolação

A função penalidade desenvolvida é uma função polinomial e, portanto, contínua e diferenciável, e é obtida por interpolação da forma de Lagrange (RUGGIERO; LOPES, 1997). A técnica de interpolação de Lagrange é apresentada no Apêndice A. A função penalidade é resultado da interpolação dos pontos que correspondem aos valores discretos dos bancos de capacitores e de reatores *shunt*, inseridos de forma que estes sejam raízes da função. Além disso, um valor com imagem não nula, isto é, que não seja raiz da função, é inserido. Isto é necessário, pois, caso contrário, a função obtida seria uma reta coincidente com o eixo das abscissas. Em seguida, eleva-se a função obtida ao quadrado para que as raízes sejam pontos de mínimo da função  $P(y_i)$ :

$$P(y_i) = [\Phi(y_i)]^2, \quad (4.8)$$

em que  $P(y_i)$  é a função penalidade polinomial e  $\Phi(y_i)$  é o polinômio obtido via interpolação.

Nota-se que  $P(y_i) = 0$  se, e somente se,  $y_i$  assume valores discretos e, caso contrário,  $P(y_i) > 0$ .

Propõe-se a função (4.8) para tratar as variáveis discretas associadas aos bancos de capacitores e de reatores *shunt*. Estas variáveis podem assumir valores discretos com passos distintos, e o conjunto discreto de valores é pequeno, tais características evidenciam as vantagens da utilização da função penalidade (4.8).

O conjunto discreto de valores possíveis associados as variáveis *taps* dos transfor-

madores pode possuir um número grande de elementos, de modo que a construção da função penalidade polinomial via interpolação, conforme descrito nesta seção, torna-se inviável. Assim, como os valores discretos associados a estas variáveis tem passos constantes, propõe-se utilizar a função penalidade senoidal apresentada na seção anterior.

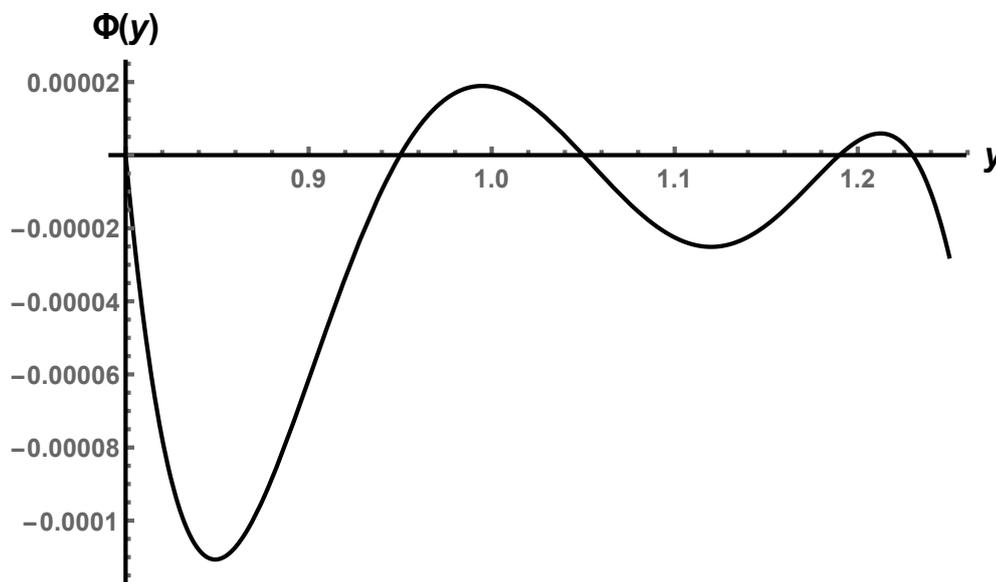
#### 4.2.1.4 Exemplo Numérico de Aplicação 5.2

Para ilustrar como obter o polinômio via interpolação, considere que  $y$  deve pertencer ao conjunto discreto  $\{0, 8; 0, 95; 1, 05; 1, 19; 1, 23\}$ . Desta forma, as raízes do polinômio interpolador formado devem ser os elementos do conjunto discreto. Além disso, um ponto com imagem não nula deve ser considerado. Pode-se tomar, como exemplo, o ponto  $(0, 1)$ . Portanto, os pontos a serem interpolados são:  $(0, 1)$ ,  $(0, 8; 0)$ ,  $(0, 95; 0)$ ,  $(1, 05; 0)$ ,  $(1, 19; 0)$  e  $(1, 23; 0)$ . Efetuando a interpolação polinomial, ao utilizar a forma de Lagrange, obtêm-se a função polinomial dada por (4.9).

$$\Phi(y) = -0,8561y^5 + 4,4690y^4 - 9,2782y^3 + 9,5736y^2 - 4,9084y + 1. \quad (4.9)$$

Na Figura 4.2 é plotada a função  $\Phi(y)$  para o intervalo  $[0,8;1,23]$ .

Figura 4.2 – Função obtida via interpolação polinomial  $\Phi(y)$

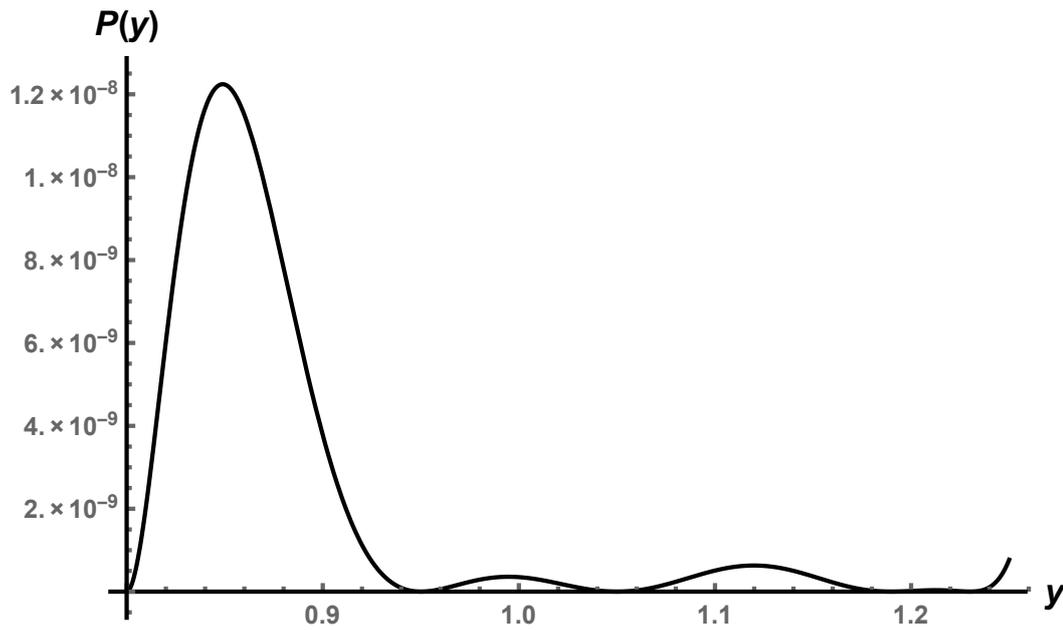


Fonte: autoria própria

Este polinômio deve ainda ser elevado ao quadrado para que suas raízes sejam também seus pontos de mínimo. A função resultante,  $P(y)$ , é a função penalidade, apresentada na Figura 4.3. Nesta função têm-se as seguintes características:

$$P(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y \in \{0, 8; 0, 95; 1, 05; 1, 19; 1, 23\} \\ \delta > 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.10)$$

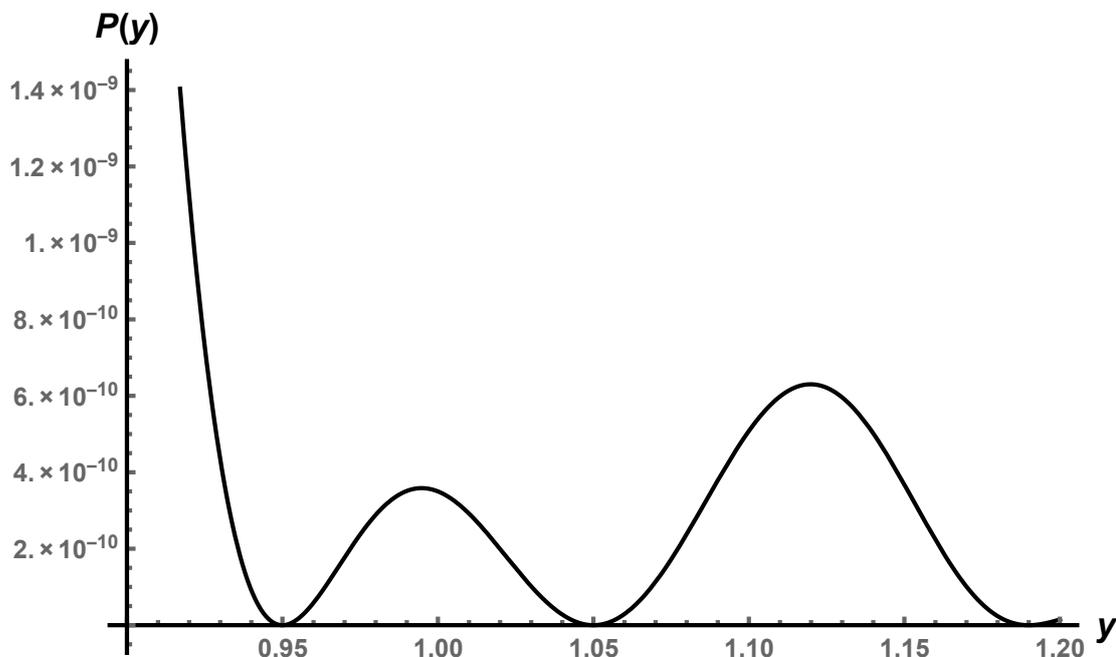
Figura 4.3 – Função penalidade polinomial via interpolação  $P(y) = [\Phi(y)]^2$



Fonte: autoria própria

Para facilitar a visualização a Figura 4.4 ilustra esta função em escala ampliada no intervalo  $[0,9; 1,2]$ .

Figura 4.4 – Função  $P(y)$  com foco na região de interesse do seu domínio



Fonte: autoria própria

A amplitude da função  $P(y)$  deve ser modulada pelo parâmetro de penalidade  $\omega$  no problema (4.3), assim, as diferenças na amplitude da função não serão um problema,

pois podem ser ajustadas por este parâmetro.

## 4.2.2 Segunda Proposta: Abordagem FPP

A função penalidade utilizada é um polinômio de ordem  $n^2$  escrito em função de  $n$  fatores de primeiro grau, conforme (4.11):

$$p(y_i) = (y_i - d_1)(y_i - d_2) \dots (y_i - d_n), \quad (4.11)$$

em que  $d_1, d_2, \dots, d_n$  são os valores discretos permitidos para as variáveis discretas e, como nota-se, são raízes de  $p(y_i)$ .

Em seguida, o polinômio  $p(y_i)$  é elevado ao quadrado, para que suas raízes sejam pontos de mínimo da função  $P(y_i)$ . Assim, obtém-se a seguinte função penalidade:

$$P(y_i) = [p(y_i)]^2. \quad (4.12)$$

Nota-se que  $P(y_i) = 0$  se, e somente se,  $y_i$  assume valores discretos e  $P(y_i) > 0$  caso contrário.

### 4.2.2.1 Exemplo Numérico de Aplicação 5.3

Considera-se novamente a variável discreta  $y$  que deve pertencer ao conjunto discreto  $\{0, 8; 0, 95; 1, 05; 1, 19; 1, 23\}$ . Utilizando a técnica proposta nesta seção, obtém-se o polinômio (4.13):

$$p(y) = (y - 0, 8)(y - 0, 95)(y - 1, 05)(y - 1, 19)(y - 1, 23). \quad (4.13)$$

Esta função polinomial é apresentada nas Figura 4.5.

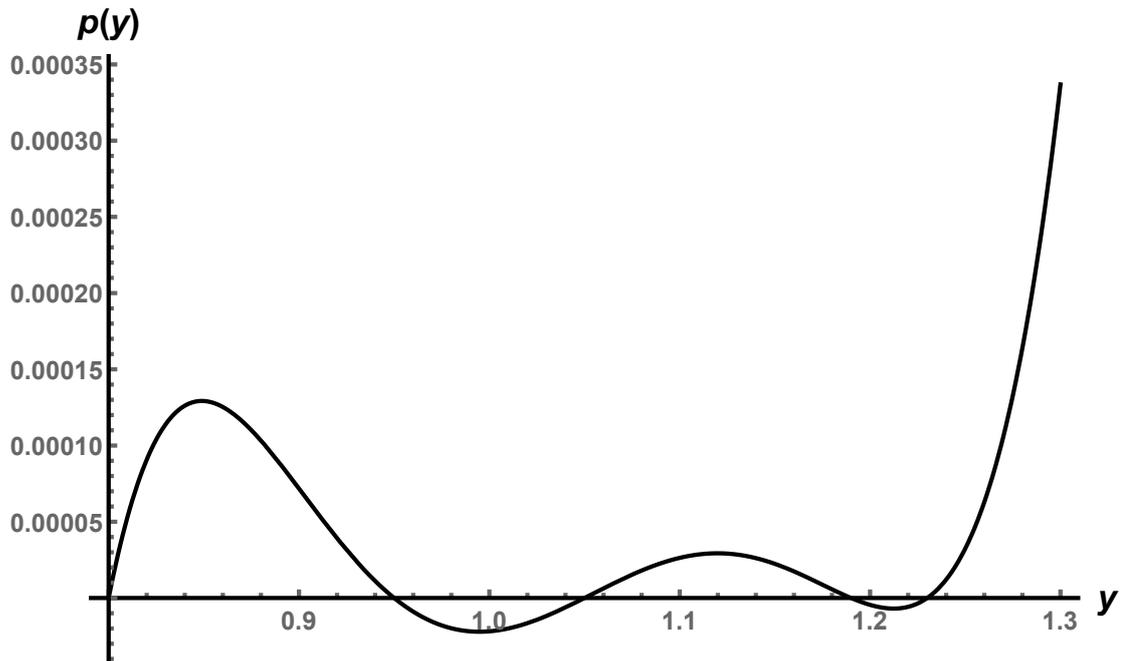
A função penalidade  $P(y)$  é obtida elevando-se  $p(y)$  ao quadrado, conforme apresenta a Figura 4.6.

## 4.3 Método de Pontos Interiores

A seguir, é descrito o método de pontos interiores apresentado em Wächter e Biegler (2006) e utilizado neste trabalho para resolver os problemas contínuos e penalizados (4.3), que pode ser reescrito como em (4.14):

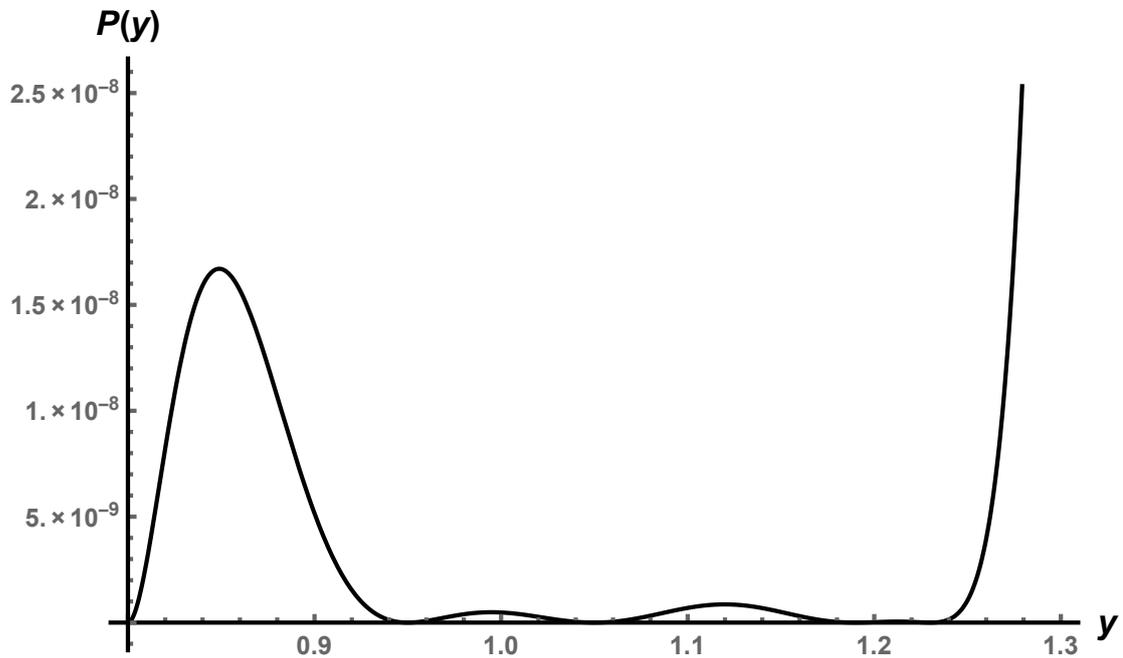
$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & q(z) \\ \text{s.a. :} \quad & h_j(z) = 0, j = 1, \dots, m \\ & g_i(z) \geq 0, i = 1, \dots, p \\ & \underline{z} \leq z \leq \bar{z}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

Figura 4.5 – Função polinomial  $p(y)$



Fonte: autoria própria

Figura 4.6 – Função polinomial  $P(y) = [p(y)]^2$



Fonte: autoria própria

em que  $z = (x, y)$  e  $q(z) = f(x, y) + \sum_{k=1}^{n_y} \omega_k P_k(y_k)$ .

Adicionando-se as variáveis de folga, as restrições de desigualdade são convertidas

em restrições de igualdade, resultando no problema equivalente (4.15).

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad q(z) \\
 & \text{s.a. :} \quad h_j(z) = 0, j = 1, \dots, m \\
 & \quad \quad g_i(z) - s_{1i} = 0, i = 1, \dots, p \\
 & \quad \quad -z_l + \bar{z}_l - s_{2l} = 0, l = 1, \dots, n \\
 & \quad \quad z_l - \underline{z}_l - s_{3l} = 0, l = 1, \dots, n \\
 & \quad \quad s_{1l} \geq 0, l = 1, \dots, n \\
 & \quad \quad s_{2l} \geq 0, l = 1, \dots, n \\
 & \quad \quad s_{3l} \geq 0, l = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

A restrição de não-negatividade das variáveis de folga são tratadas pela função barreira, portanto estas restrições são incorporadas à função objetivo do problema (4.15) pela função barreira logarítmica. O problema de barreira resultante é dado por (4.16).

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad \varphi_\mu = q(z) - \mu \left( \sum_{i=1}^p \ln(s_{1i}) + \sum_{l=1}^n \ln(s_{2l}) + \sum_{l=1}^n \ln(s_{3l}) \right) \\
 & \text{s.a. :} \quad h_j(z) = 0, j = 1, \dots, m \\
 & \quad \quad g_i(z) - s_{1i} = 0, i = 1, \dots, p \\
 & \quad \quad -z_l + \bar{z}_l - s_{2l} = 0, l = 1, \dots, n \\
 & \quad \quad z_l - \underline{z}_l - s_{3l} = 0, l = 1, \dots, n,
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

em que  $\mu > 0$  é o parâmetro de barreira.

Para uma sequência de valores de  $\mu_j$ , uma sequência de problemas (4.16) é resolvida, resultando em soluções  $z^*(\mu_j)$ . Se  $\mu_j \rightarrow 0$ , então  $z^*(\mu_j) \rightarrow z^*$ , em que  $z^*$  é um ótimo local de (4.15).

O método de pontos interiores consiste em encontrar uma solução aproximada para (4.16), com uma tolerância  $\varepsilon_{tol}^{\mu_j}$ , para um valor fixo de  $\mu = \mu_j$ , que decresce de acordo com a regra apresentada em Wächter (2002) e resulta em  $\mu_{j+1}$  dado em (4.17).

$$\mu_{j+1} = \max \left\{ \frac{\mu_{tol}}{10}, \min \left\{ k_\mu \mu_j, \mu_j^{s_\mu} \right\} \right\} \tag{4.17}$$

com as constantes  $k_\mu \in (0, 1)$ ,  $s_\mu \in (1, 2)$ . Neste trabalho, os parâmetros padrão utilizados são:  $k_\mu = 0, 2$ ,  $s_\mu = 1, 5$ ,  $\varepsilon_{tol} = 10^{-8}$  e  $\mu_0 = 0, 1$ .

O problema de barreira com  $\mu = \mu_{j+1}$  é resolvido utilizando-se a solução anterior como ponto inicial. O processo repete-se até que as condições necessárias de primeira ordem para o problema (4.15) sejam atendidas com a tolerância  $\varepsilon_{tol}$ .

### 4.3.1 Solver IPOPT

O IPOPT é um *solver* para resolver problemas de programação não-linear de grande porte que utiliza o método de pontos interiores proposto por Wächter (2002) e Wächter e Biegler (2006). O programa e seu código-fonte são distribuídos gratuitamente pelo projeto *COmputational INfrastructure for Operational Research* (COIN-OR) (SOLER, 2011). Este *solver* foi utilizado neste trabalho para resolver os problemas penalizados (4.3) devido ao seu bom desempenho e rápida convergência, especialmente para problemas de grande porte.

## 4.4 Algoritmo de Solução

A seguir é descrito o algoritmo de solução proposto para resolver os problemas da forma de (4.1). As funções penalidade utilizadas em (4.3) são as funções apresentadas nas seções 4.2.1 e 4.2.2.

### Início:

1. Faça  $l = 1$ ;
2. Leia  $\omega_k^{(1)}, \varepsilon, c_k$ , em que  $\omega_k^{(1)} > 0$  e  $1 < c_k < 2$ ;
3. Resolver o problema contínuo e penalizado (4.3);
4. Se  $|y_k^* - y_k^d| < \varepsilon, k = 1, 2, \dots, n_y$  então a solução atual é uma solução para o problema, caso contrário, seguir para o passo 5;
5. Faça  $l = l + 1, \omega_k^{l+1} = c_k \omega_k^l$  e volte ao passo 3.

### Fim

No Capítulo 5 são apresentados, analisados e discutidos os resultados dos testes numéricos a fim de avaliar a eficiência das abordagens propostas para a resolução do problema de FPOR com variáveis discretas e contínuas.

## 5 Resultados Numéricos

Os testes numéricos foram realizados com os sistemas elétricos IEEE 14, 30, 118 e 300 barras, referências na área de Engenharia Elétrica, para avaliar a eficiência das abordagens propostas apresentadas no Capítulo 4, quando aplicadas ao problema de FPOR com variáveis discretas e contínuas. Os dados destes sistemas elétricos foram coletados de Washigton (2015) e são apresentados no Apêndice B.

Foi utilizado para a realização dos testes numéricos um computador Dell que possui processador Intel Core i7-2600 de 3,4 GHz e 16 GB de RAM.

Para a resolução dos problemas de FPOR contínuos e penalizados, foi utilizado o *solver* IPOPT em interface com o *software* GAMS.

O GAMS é um *software* com linguagem de alto nível para o desenvolvimento de modelos matemáticos que foi originalmente desenvolvido em 1988 e financiado pelo Banco Mundial. Na área de sistemas de potência, a linguagem de modelagem e otimização teve um crescimento significativo, devido a alguns objetivos básicos: melhorar a precisão dos modelos para capturar a realidade, crescimento dos sistemas para maior confiabilidade da operação e questões emergentes, como ambientais e regulatórias (CHATTOPADHYAY, 1999).

### 5.1 Sistema Elétrico 14 Barras

O sistema elétrico IEEE 14 barras tem os seguintes elementos:

- 1 barra de geração (barra *slack*);
- 4 barras de controle de reativo;
- 9 barras de carga;
- 20 linhas de transmissão;
- 3 transformadores com *tap* variável;
- 1 banco de capacitor e de reator *shunt* variável.

O modelo matemático para o problema de FPOR para o sistema elétrico IEEE 14 barras possui as seguintes características:

- 22 restrições de igualdade, que representam os balanços de potência ativa e reativa das barras do sistema;

- 36 restrições de desigualdade, que representam os limites mínimos e máximos da geração de potência reativa injetada nas barras de controle reativo e a canalização das variáveis magnitudes de tensão nas barras;
- 27 variáveis contínuas, que representam as magnitudes e os ângulos de tensão nas barras;
- 4 variáveis de controle discretas, que representam os *taps* dos transformadores entre as linhas (4,7), (4,9) e (5,6) e um banco de capacitor e de reator *shunt* na barra 9.

Na modelagem considerou-se que a magnitude de tensão nas barras tem como limites mínimos e máximos 0,95 e 1,05 *pu*, respectivamente. As variáveis de controle discretas *taps* dos transformadores devem pertencer ao conjunto discreto  $\{0,95; 0,96; 0,97; 0,98; 0,99; 1; 1,01; 1,02; 1,03; 1,04; 1,05\}$  *pu*, isto é, o tamanho do passo entre dois valores consecutivos dos *taps* dos transformadores deve ser de 0,01 *pu* conforme Lage (2013), respectivamente. Considerou-se que o banco de capacitores *shunt* da barra 9 é um regulador de tensão formado pela associação em paralelo de três capacitores: 5 MVar, 15 MVar e 19 MVar na tensão nominal. Desta forma, considerou-se que os valores discretos que o *shunt* pode assumir são dados por todas as combinações simples possíveis entre estes capacitores, ou seja:

$$b_9^{sh} \in \{0; 0,05; 0,15; 0,19; 0,2; 0,24; 0,34; 0,39\} pu.$$

### 5.1.1 Abordagem FPSP Aplicada ao Sistema IEEE 14 Barras

As funções penalidade senoidais e polinomiais utilizadas e desenvolvidas para este caso são dadas por (5.1) e (5.2).

$$\Theta(t_{(k,m)}) = \left[ \text{sen} \left( \frac{t_{(k,m)}}{0,01} \pi \right) \right]^2, \forall (k, m) \in T, \quad (5.1)$$

em que  $\alpha = 0$ .

$$P(b_9^{sh}) = \left[ 9,12242 \cdot 10^6 (b_9^{sh})^8 - 1,4231 \cdot 10^7 (b_9^{sh})^7 + 9,15526 \cdot 10^6 (b_9^{sh})^6 - \right. \\ \left. - 3,1358 \cdot 10^6 (b_9^{sh})^5 + 6,1379 \cdot 10^5 (b_9^{sh})^4 - 6,79284 \cdot 10^4 (b_9^{sh})^3 + \right. \\ \left. + 3,85578 \cdot 10^3 (b_9^{sh})^2 - 82,7389 (b_9^{sh}) \right]^2. \quad (5.2)$$

Os parâmetros de penalidade iniciais adotados neste teste foram  $\omega_{t_{(k,m)}} = 10^{-5}$ ,  $\forall (k, m) \in T$  e  $\omega_{b_9^{sh}} = 10^{-6}$ , os quais foram determinados por meio de testes computacionais. Os parâmetros de penalidade foram multiplicados pelo fator de penalidade  $c_{t_{(k,m)}} = 1, 3$ ,  $\forall (k, m) \in T$  e  $c_{b_9^{sh}} = 1, 2$  a cada iteração, de forma que seja realizada a atualização dos parâmetros de penalidade e eles cresçam gradativamente. O ponto intermediário adotado para se obter o polinômio de interpolação (5.2) foi (0,29;0,2).

Tabela 5.1 – Solução obtida para as variáveis discretas pela abordagem FPSP aplicada ao sistema elétrico IEEE 14 barras

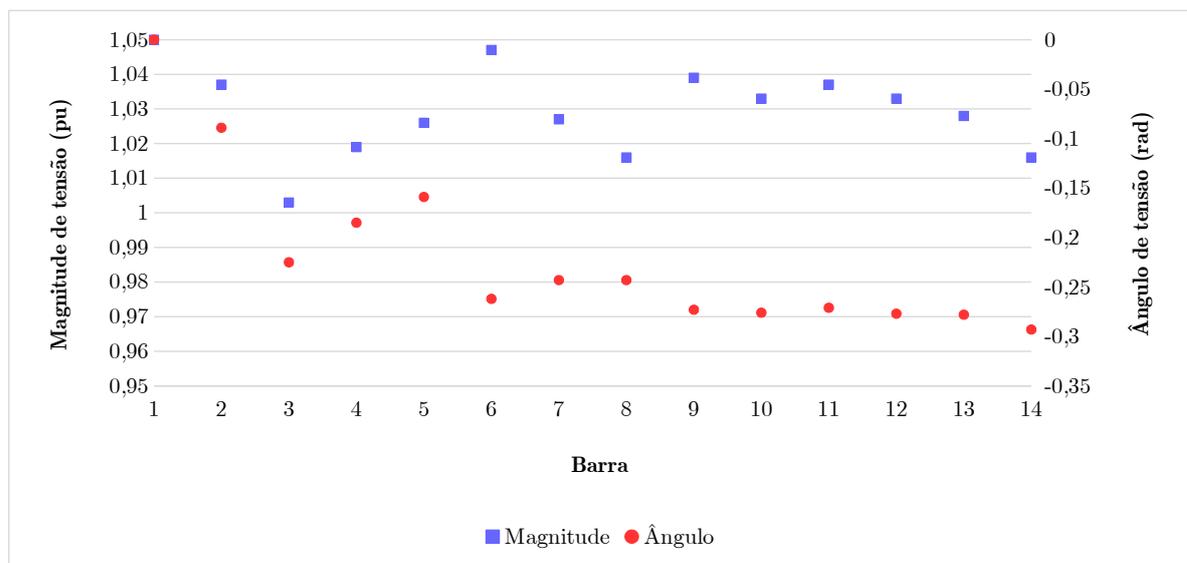
Variável de controle discreta	Valor ( <i>pu</i> )
$t_{(4,7)}$	1,00
$t_{(4,9)}$	1,00
$t_{(5,6)}$	0,98
$b_9^{sh}$	0,39

A solução discreta foi obtida na 13<sup>a</sup> iteração. O tempo computacional de resolução foi de 3,349 segundos.

A Tabela 5.1 apresenta os valores assumidos pelas variáveis discretas *taps* dos transformadores e pelos bancos de capacitores e de reatores *shunt* na solução obtida.

Na Figura 5.1 são plotados os valores assumidos pelas variáveis contínuas magnitude e ângulo de tensão nas barras na solução obtida.

Figura 5.1 – Solução obtida para as variáveis contínuas pela abordagem FPSP aplicada ao sistema elétrico IEEE 14 barras



Fonte: autoria própria

Observa-se pela Figura 5.1 que as tensões estão dentro de seus limites mínimo e máximo, 0,95 e 1,05 *pu*.

As perdas de potência ativa nas linhas de transmissão de energia elétrica do sistema na solução obtida foi de 13,61 MW.

Tabela 5.2 – Solução obtida para as variáveis discretas pela abordagem FPP aplicada ao sistema elétrico IEEE 14 barras

Variável de controle discreta	Valor ( <i>pu</i> )
$t_{(4,7)}$	0,98
$t_{(4,9)}$	0,99
$t_{(5,6)}$	0,97
$b_9^{sh}$	0,19

### 5.1.2 Abordagem FPP Aplicada ao Sistema IEEE 14 Barras

As funções penalidade polinomiais desenvolvidas para este caso são dadas por (5.3) e (5.4).

$$P_{t_{(k,m)}}(t_{(k,m)}) = \left[ (t_{(k,m)} - 0,95) (t_{(k,m)} - 0,96) (t_{(k,m)} - 0,97) (t_{(k,m)} - 0,98) \right. \\ \left. (t_{(k,m)} - 0,99) (t_{(k,m)} - 1) (t_{(k,m)} - 1,01) (t_{(k,m)} - 1,02) (t_{(k,m)} - 1,03) \right. \\ \left. (t_{(k,m)} - 1,04) (t_{(k,m)} - 1,05) \right]^2, \forall (k, m) \in T, \quad (5.3)$$

$$P_{b_9^{sh}}(b_9^{sh}) = \left[ b_9^{sh} (b_9^{sh} - 0,05) (b_9^{sh} - 0,15) (b_9^{sh} - 0,19) (b_9^{sh} - 0,24) \right. \\ \left. (b_9^{sh} - 0,34) (b_9^{sh} - 0,39) \right]^2. \quad (5.4)$$

Os parâmetros de penalidade iniciais adotados neste teste foram  $\omega_{t_{(k,m)}} = 10, \forall (k, m) \in T$  e  $\omega_{b_9^{sh}} = 10^{33}$ , os quais foram determinados por meio de testes computacionais. Os parâmetros de penalidade foram multiplicados pelo fator de penalidade  $c_{t_{(k,m)}} = 1, 3, \forall (k, m) \in T$  e  $c_{b_9^{sh}} = 1, 3$  a cada iteração, de forma que seja realizada a atualização dos parâmetros de penalidade e eles cresçam gradativamente.

A solução discreta foi obtida na 2ª iteração. O tempo computacional de resolução foi de 0,992 segundos.

A Tabela 5.2 apresenta os valores assumidos pelas variáveis *taps* dos transformadores e pelos bancos de capacitores e de reatores *shunt* na solução obtida.

Na Figura 5.2 são plotados os valores assumidos pelas variáveis magnitude e ângulo de tensão nas barras na solução obtida.

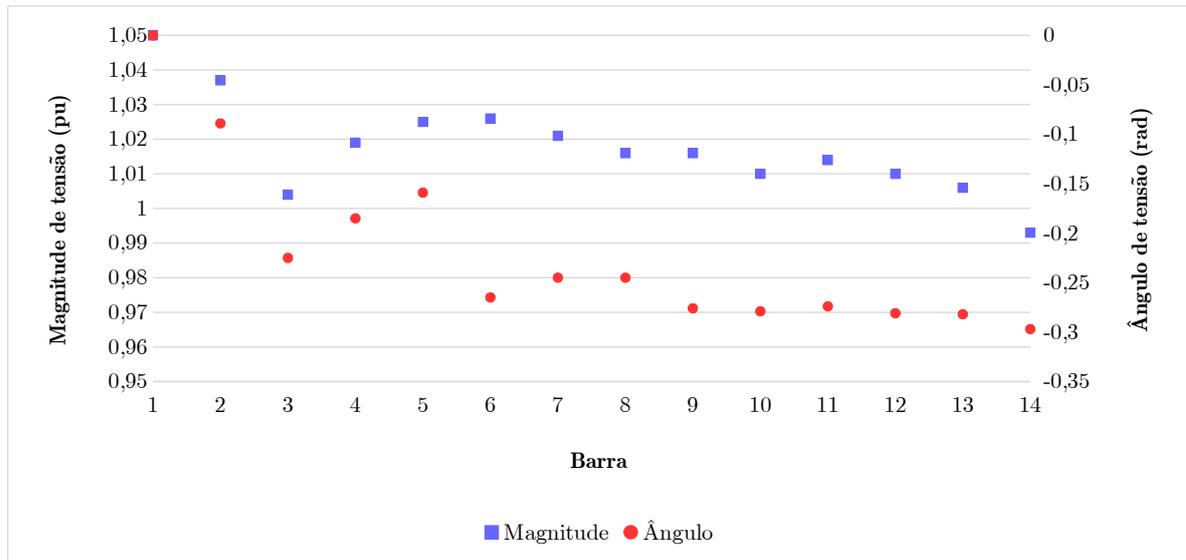
Observa-se pela Figura 5.2 que as tensões estão dentro de seus limites mínimo e máximo, 0,95 e 1,05 *pu*.

As perdas de potência ativa nas linhas de transmissão de energia elétrica na solução obtida foi de 13,64 MW.

## 5.2 Sistema Elétrico 30 Barras

O sistema elétrico IEEE 30 barras tem os seguintes elementos:

Figura 5.2 – Solução obtida para as variáveis contínuas pela abordagem FPP aplicada ao sistema elétrico IEEE 14 barras



Fonte: autoria própria

- 1 barra de geração (barra *slack*);
- 5 barras de controle de reativo;
- 24 barras de carga;
- 41 linhas de transmissão;
- 4 transformadores com *tap* variável;
- 2 bancos de capacitores e de reatores *shunt* variáveis.

O modelo matemático para o problema de FPOR para o sistema elétrico IEEE 30 barras possui as seguintes características:

- 53 restrições de igualdade, que representam os balanços de potência ativa e reativa das barras do sistema;
- 70 restrições de desigualdade, que representam os limites mínimos e máximos da geração de potência reativa injetada nas barras de controle reativo e a canalização das variáveis magnitudes de tensão nas barras;
- 59 variáveis contínuas, que representam as magnitudes e os ângulos de tensão nas barras;
- 6 variáveis de controle discretas, que representam os *taps* dos transformadores entre as linhas (6,9), (6,10), (4,12) e (28,27) e os bancos de capacitores e de reatores *shunt* nas barras 10 e na 24.

Na modelagem considerou-se que a magnitude de tensão nas barras tem como limites mínimos e máximos 0,95 e 1,05 pu, respectivamente. As variáveis de controle discretas *taps* dos transformadores devem pertencer ao conjunto discreto {0,95; 0,96; 0,97; 0,98; 0,99; 1; 1,01; 1,02; 1,03; 1,04; 1,05} pu, isto é, o tamanho do passo entre dois valores consecutivos dos *taps* dos transformadores deve ser de 0,01 pu conforme Ghasemi et al. (2015) e Zhao, Guo e Cao (2005), respectivamente. Conforme Lage (2013) considerou-se que o banco de capacitores *shunt* da barra 10 é um regulador de tensão formado pela associação em paralelo de três capacitores: 5 MVar, 15 MVar e 19 MVar na tensão nominal e que o banco de capacitores *shunt* da barra 24 é um regulador de tensão formado pela associação em paralelo de dois capacitores: 4 MVar e 5 MVar na tensão nominal. Desta forma, considerou-se que os valores discretos que os *shunts* podem assumir são dadas por todas as combinações simples possíveis entre estes capacitores, ou seja:

$$b_{10}^{sh} \in \{0; 0,05; 0,15; 0,19; 0,2; 0,24; 0,34; 0,39\} pu,$$

$$b_{24}^{sh} \in \{0; 0,04; 0,05; 0,09\} pu.$$

### 5.2.1 Abordagem FPSP Aplicada ao Sistema IEEE 30 Barras

As funções penalidade senoidais e polinomiais utilizadas e desenvolvidas para este caso são dadas por (5.5)–(5.7).

$$\Theta(t_{(k,m)}) = \left[ \text{sen} \left( \frac{t_{(k,m)}}{0,01} \pi \right) \right]^2, \forall (k, m) \in T, \quad (5.5)$$

em que  $\alpha = 0$ .

$$\begin{aligned} P(b_{10}^{sh}) = & \left[ 9,12242 \cdot 10^6 (b_{10}^{sh})^8 - 1,4231 \cdot 10^7 (b_{10}^{sh})^7 + 9,15526 \cdot 10^6 (b_{10}^{sh})^6 - \right. \\ & \left. - 3,1358 \cdot 10^6 (b_{10}^{sh})^5 + 6,1379 \cdot 10^5 (b_{10}^{sh})^4 - 6,79284 \cdot 10^4 (b_{10}^{sh})^3 + \right. \\ & \left. + 3,85578 \cdot 10^3 (b_{10}^{sh})^2 - 82,7389 (b_{10}^{sh}) \right]^2, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} P(b_{24}^{sh}) = & \left[ -1,97531 \cdot 10^7 (b_{24}^{sh})^4 + 3555555,55556 (b_{24}^{sh})^3 - \right. \\ & \left. - 199506,17284 (b_{24}^{sh})^2 + 3555,55556 (b_{24}^{sh}) \right]^2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Os parâmetros de penalidade iniciais adotados neste teste foram  $\omega_{t_{(k,m)}} = 10^{-3}$ ,  $\forall (k, m) \in T$ ,  $\omega_{b_k^{sh}} = 10^{-4}$ ,  $\forall k \in BSS$ , os quais foram determinados por meio de testes computacionais. Os parâmetros de penalidade foram multiplicados pelo fator de penalidade  $c_{t_{(k,m)}} = 1,3$ ,  $\forall (k, m) \in T$  e  $c_{b_k^{sh}} = 1,3$ ,  $\forall k \in BSS$  a cada iteração, de forma que seja realizada a atualização dos parâmetros de penalidade e eles cresçam gradativamente. Os pontos intermediários adotados para se obter o polinômio de interpolação (5.6) foi (0,29;0,2) e para se obter o polinômio de interpolação (5.7) foi (0,02;0,01).

Tabela 5.3 – Solução obtida para as variáveis discretas pela abordagem FPSP aplicado ao sistema elétrico IEEE 30 barras

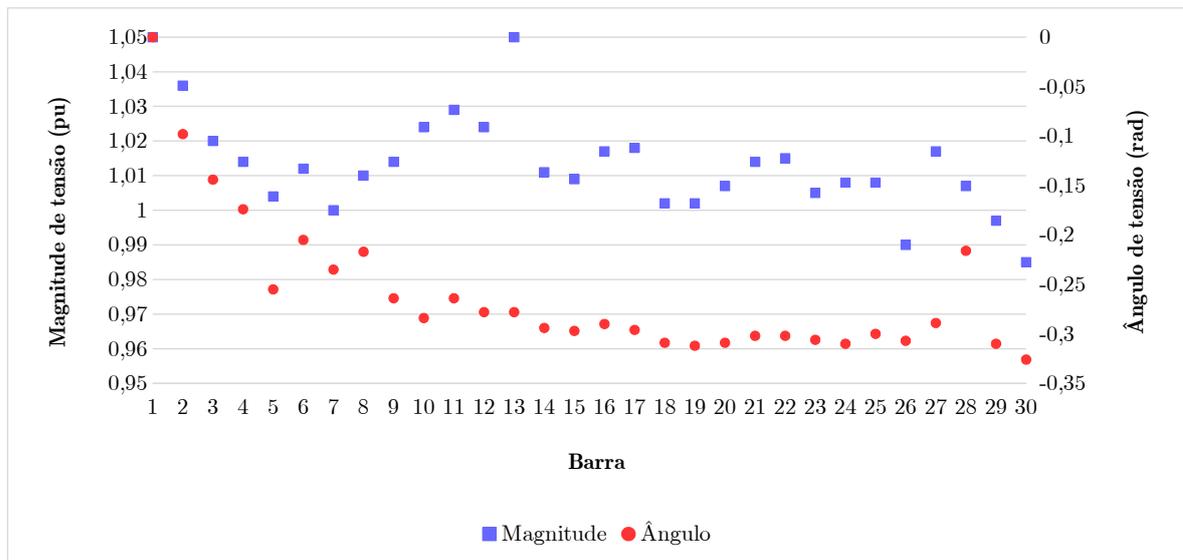
Variável discreta	Valor ( <i>pu</i> )
$t_{(6,9)}$	0,97
$t_{(6,10)}$	0,96
$t_{(4,12)}$	1,00
$t_{(28,27)}$	1,03
$b_{10}^{sh}$	0,39
$b_{24}^{sh}$	0,09

A solução discreta foi obtida na 1ª iteração. O tempo computacional de resolução foi de 0,227 segundos.

A Tabela 5.3 apresenta os valores assumidos pelas variáveis *taps* dos transformadores e pelos bancos de capacitores e de reatores *shunt* na solução obtida.

Na Figura 5.3 são plotados os valores das variáveis magnitude e ângulo de tensão nas barras.

Figura 5.3 – Solução obtida para as variáveis contínuas pela abordagem FPSP aplicado ao sistema elétrico IEEE 30 barras



Observa-se pela Figura 5.3 que as tensões estão dentro de seus limites mínimo e máximo, 0,95 e 1,05 *pu*.

As perdas de potência ativa nas linhas e transmissão de energia elétrica na solução obtida foi de 17,87 MW.

Tabela 5.4 – Solução obtida para as variáveis discretas pela abordagem FPP aplicada ao sistema elétrico IEEE 30 barras

Variável discreta	Valor ( <i>pu</i> )
$t_{(6,9)}$	0,98
$t_{(6,10)}$	0,95
$t_{(4,12)}$	0,99
$t_{28,27}$	1,04
$b_{10}^{sh}$	0,24
$b_{24}^{sh}$	0,09

### 5.2.2 Abordagem FPP Aplicada ao Sistema IEEE 30 Barras

As funções penalidade polinomiais para este caso estão apresentadas em (5.8)–(5.10).

$$P_{t_{(k,m)}}(t_{(k,m)}) = \left[ (t_{(k,m)} - 0,95) (t_{(k,m)} - 0,96) (t_{(k,m)} - 0,97) (t_{(k,m)} - 0,98) \right. \\ \left. (t_{(k,m)} - 0,99) (t_{(k,m)} - 1) (t_{(k,m)} - 1,01) (t_{(k,m)} - 1,02) (t_{(k,m)} - 1,03) \right. \\ \left. (t_{(k,m)} - 1,04) (t_{(k,m)} - 1,05) \right]^2, \forall (k, m) \in T, \quad (5.8)$$

$$P_{b_{10}^{sh}}(b_{10}^{sh}) = \left[ b_{10}^{sh} (b_{10}^{sh} - 0,05) (b_{10}^{sh} - 0,15) (b_{10}^{sh} - 0,19) (b_{10}^{sh} - 0,24) \right. \\ \left. (b_{10}^{sh} - 0,34) (b_{10}^{sh} - 0,39) \right]^2, \quad (5.9)$$

$$P_{b_{24}^{sh}}(b_{24}^{sh}) = \left[ b_{24}^{sh} (b_{24}^{sh} - 0,04) (b_{24}^{sh} - 0,05) (b_{24}^{sh} - 0,09) \right]^2. \quad (5.10)$$

Os parâmetros de penalidade iniciais adotados neste teste foram  $\omega_{t_{(k,m)}} = 10^{30}$ ,  $\forall (k, m) \in T$ ,  $\omega_{b_{10}^{sh}} = 10^{15}$  e  $\omega_{b_{24}^{sh}} = 1$ , os quais foram determinados por meio de testes computacionais. Os parâmetros de penalidade foram multiplicados pelo fator de penalidade  $c_{t_{(k,m)}} = 1,3$ ,  $\forall (k, m) \in T$ ,  $c_{b_{10}^{sh}} = 1,3$  e  $c_{b_{24}^{sh}} = 1,3$  a cada iteração, de forma que seja realizada a atualização dos parâmetros de penalidade e eles cresçam gradativamente.

A solução discreta foi obtida na 13ª iteração. O tempo computacional de resolução foi de 3,897 segundos.

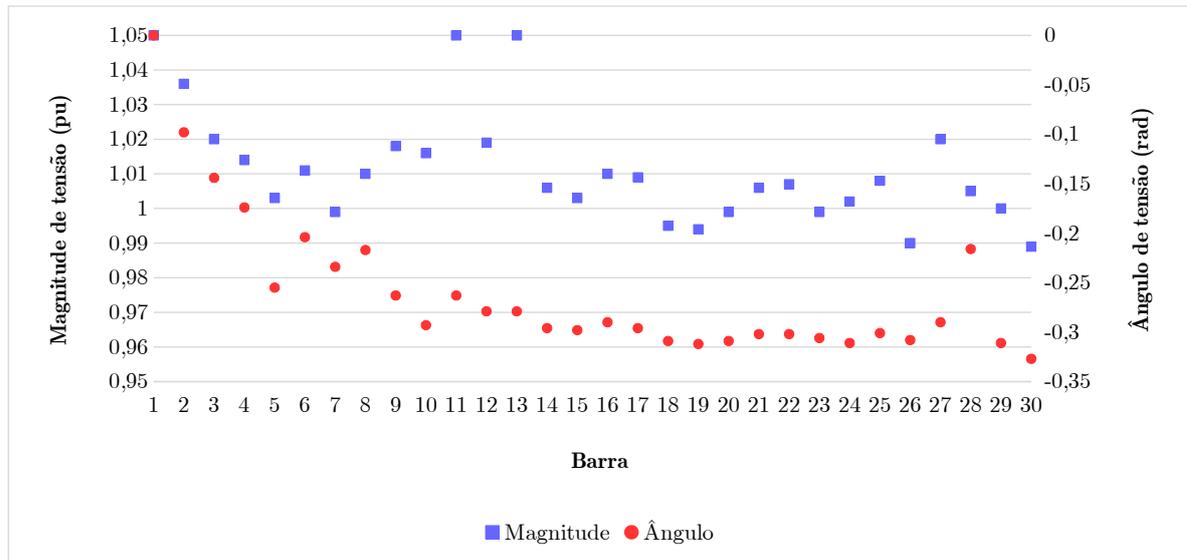
A Tabela 5.4 apresenta os valores assumidos pelas variáveis *taps* dos transformadores e pelos bancos de capacitores e de reatores *shunt* na solução obtida.

Na Figura 5.4 são plotados os valores das variáveis magnitude e ângulo de tensão nas barras.

Observa-se pela Figura 5.4 que as tensões estão dentro de seus limites mínimo e máximo, 0,95 e 1,05 *pu*.

As perdas de potência ativa nas linhas e transmissão de energia elétrica na solução obtida foi de 17,86 MW.

Figura 5.4 – Solução obtida para as variáveis contínuas pela abordagem FPP aplicada ao sistema elétrico IEEE 30 barras



### 5.3 Sistema Elétrico 118 Barras

O sistema elétrico IEEE 118 barras tem os seguintes elementos:

- 1 barra de geração (barra *slack*);
- 53 barras de controle de reativo;
- 64 barras de carga;
- 186 linhas de transmissão;
- 9 transformadores com *tap* variável;
- 14 bancos de capacitores e de reatores *shunt* variáveis.

O modelo matemático para o problema de FPOR para o sistema elétrico IEEE 118 barras possui as seguintes características:

- 181 restrições de igualdade, que representam os balanços de potência ativa e reativa das barras do sistema;
- 360 restrições de desigualdade, que representam os limites mínimos e máximos da geração de potência reativa injetada nas barras de controle reativo e a canalização das variáveis magnitudes de tensão nas barras;
- 235 variáveis contínuas, que representam as magnitudes e os ângulos de tensão nas barras;

- 23 variáveis de controle discretas, que representam os *taps* dos transformadores entre as linhas (8,5), (26,25), (30,17), (38,37), (63,59), (64,61), (65,66), (68,69) e (81,80) e os bancos de capacitores e de reatores *shunt* nas barras 5, 34, 37, 44, 45, 46, 48, 74, 79, 82, 83, 105, 107 e 110.

Na modelagem considerou-se que a magnitude de tensão nas barras tem como limites mínimos e máximos 0,9 e 1,1 *pu*, respectivamente. As variáveis de controle discretas *taps* dos transformadores devem pertencer ao conjunto discreto  $\{0,95; 0,96; 0,97; 0,98; 0,99; 1; 1,1; 1,02; 1,03; 1,04; 1,05\}$  *pu*, isto é, o tamanho do passo entre dois valores consecutivos dos *taps* dos transformadores deve ser de 0,01 *pu* conforme Zhao, Guo e Cao (2005), respectivamente. Conforme em Lage (2013) considerou-se que os bancos de capacitores e de reatores *shunt* devem pertencer aos conjuntos:

$$b_5^{sh} \in \{-0,40; 0\},$$

$$b_k^{sh} \in \{0; 0,06; 0,07; 0,13; 0,14; 0,2\}, \forall k \in \{34, 107, 110\},$$

$$b_{37}^{sh} \in \{-0,25; 0\},$$

$$b_k^{sh} \in \{0; 0,1\}, \forall k \in \{44, 45, 46\},$$

$$b_{48}^{sh} \in \{0; 0,15\},$$

$$b_{74}^{sh} \in \{0; 0,08; 0,12; 0,2\},$$

$$b_k^{sh} \in \{0; 0,1; 0,2\}, \forall k \in \{79, 82, 83, 105\}.$$

### 5.3.1 Abordagem FPSP Aplicada ao Sistema IEEE 118 Barras

As funções penalidade senoidais e polinomiais utilizadas e desenvolvidas para este caso são dadas por (5.11)–(5.18).

$$\Theta(t_{(k,m)}) = \left[ \text{sen} \left( \frac{t_{(k,m)}}{0,01} \pi \right) \right]^2, \forall (k, m) \in T, \quad (5.11)$$

$$P(b_5^{sh}) = \left[ -25(b_5^{sh})^2 - 10b_5^{sh} \right]^2, \quad (5.12)$$

$$P(b_k^{sh}) = \left[ 4440, 18(b_k^{sh})^6 - 2664, 11(b_k^{sh})^5 + 610, 525(b_k^{sh})^4 - 66, 6027(b_k^{sh})^3 + 3, 44753(b_k^{sh})^2 - 0, 0678815(b_k^{sh}) \right]^2, \forall k \in \{34, 107, 110\}, \quad (5.13)$$

$$P(b_{37}^{sh}) = \left[ 64(b_{37}^{sh})^2 - 16(b_{37}^{sh}) \right]^2, \quad (5.14)$$

$$P(b_k^{sh}) = \left[ (b_k^{sh})^2 - 10(b_k^{sh}) \right]^2, \forall k \in \{44, 45, 46\}, \quad (5.15)$$

Tabela 5.5 – Pontos intermediários utilizados para construção das funções penalidade dos bancos de capacitores e de reatores *shunt*

Variável	Ponto intermediário
$b_5^{sh}$	(-0,2;1)
$b_{34}^{sh}$	(0,3;0,2)
$b_{37}^{sh}$	(-0,125;1)
$b_{44}^{sh}$	(0,05;0,025)
$b_{45}^{sh}$	(0,05;0,025)
$b_{46}^{sh}$	(0,05;0,025)
$b_{48}^{sh}$	(0,075;0,3)
$b_{74}^{sh}$	(0,16;0,1)
$b_{79}^{sh}$	(0,05;0,1)
$b_{82}^{sh}$	(0,05;0,1)
$b_{83}^{sh}$	(0,05;0,1)
$b_{105}^{sh}$	(0,05;0,1)
$b_{107}^{sh}$	(0,3;0,2)
$b_{110}^{sh}$	(0,3;0,2)

$$P(b_{48}^{sh}) = \left[ 8(b_{48}^{sh}) - 53, 3333(b_{48}^{sh})^2 \right]^2, \quad (5.16)$$

$$P(b_{74}^{sh}) = \left[ -4882, 81(b_{74}^{sh})^4 + 1953, 12(b_{74}^{sh})^3 - 242, 187(b_{74}^{sh})^2 + 9, 375(b_{74}^{sh}) \right]^2, \quad (5.17)$$

$$P(b_k^{sh}) = \left[ 266, 667(b_k^{sh})^3 - 80(b_k^{sh})^2 + 5, 3333(b_k^{sh}) \right]^2, \quad \forall k \in \{79, 82, 83, 105\}, \quad (5.18)$$

Os parâmetros de penalidade iniciais adotados para os *taps* dos transformadores neste teste foram  $\omega_{t(k,m)} = 10^{-7}, \forall (k, m) \in T, \omega_{b_k^{sh}} = 10^{-5}, \forall k \in BSS$ , os quais foram determinados por meio de testes computacionais. Os parâmetros de penalidade foram multiplicados pelo fator de penalidade  $c_{t(k,m)} = 1, 3, \forall (k, m) \in T, c_{b_k^{sh}} = 1, 35, \forall k \in BSS$  a cada iteração, de forma que seja realizada a atualização dos parâmetros de penalidade e eles cresçam gradativamente. Os pontos intermediários adotados para se obter os polinômios de interpolação encontram-se na Tabela 5.5.

A solução discreta foi obtida na 44<sup>a</sup> iteração. O tempo computacional de resolução foi de 29,997 segundos.

A Tabela 5.6 apresenta os valores assumidos pelas variáveis *taps* dos transformadores e pelos bancos de capacitores e de reatores *shunt* na solução obtida.

Na Figura 5.5 são plotados os valores das variáveis magnitude e ângulo de tensão nas barras.

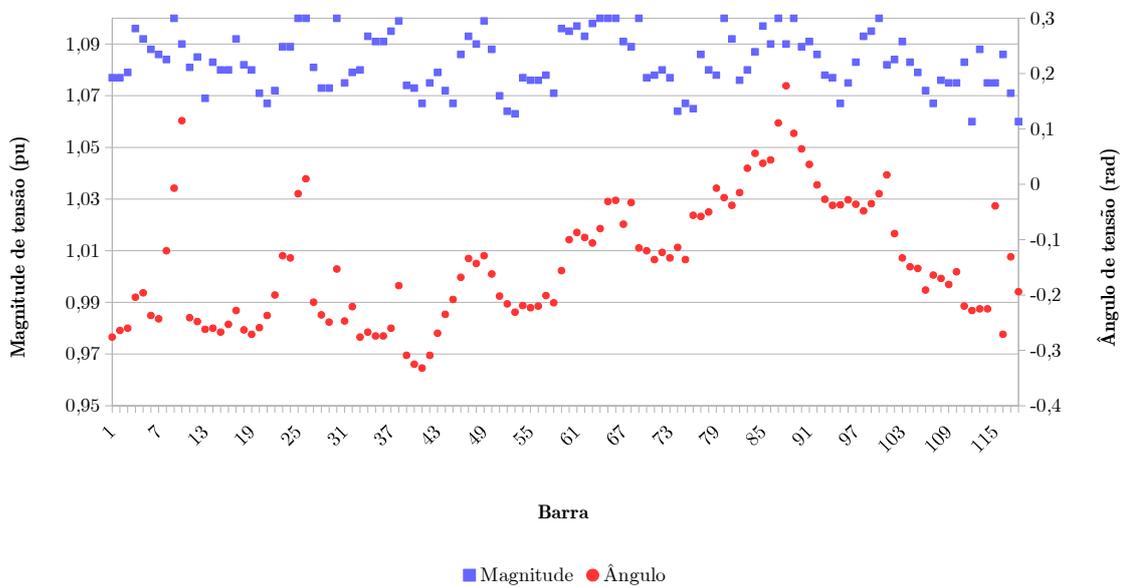
Observa-se pela Figura 5.5 que as tensões estão dentro de seus limites mínimo e máximo, 0,9 e 1,1 pu.

As perdas de potência ativa nas linhas e transmissão de energia elétrica na solução obtida foi de 111,14 MW.

Tabela 5.6 – Solução obtida para as variáveis discretas pela abordagem FPSP aplicada ao sistema elétrico IEEE 118 barras

Variável discreta	Valor ( <i>pu</i> )
$t_{(8,5)}$	1,00
$t_{(26,25)}$	1,00
$t_{(30,17)}$	1,00
$t_{(38,37)}$	1,01
$t_{(63,59)}$	1,00
$t_{(64,61)}$	1,00
$t_{(65,66)}$	1,00
$t_{(68,69)}$	1,04
$t_{(81,80)}$	1,02
$b_5^{sh}$	-0,4
$b_{34}^{sh}$	0,06
$b_{37}^{sh}$	-0,25
$b_{44}^{sh}$	0
$b_{45}^{sh}$	0,1
$b_{46}^{sh}$	0
$b_{48}^{sh}$	0
$b_{74}^{sh}$	0,08
$b_{79}^{sh}$	0
$b_{82}^{sh}$	0,1
$b_{83}^{sh}$	0,1
$b_{105}^{sh}$	0,1
$b_{107}^{sh}$	0,07
$b_{110}^{sh}$	0,07

Figura 5.5 – Solução obtida para as variáveis contínuas pela abordagem FPSP aplicada ao sistema elétrico IEEE 118 barras



### 5.3.2 Abordagem FPP Aplicada ao Sistema IEEE 118 Barras

As funções penalidade polinomiais para este caso estão apresentadas em (5.19)–(5.26).

$$P_{t_{(k,m)}}(t_{(k,m)}) = \left[ (t_{(k,m)} - 0, 95) (t_{(k,m)} - 0, 96) (t_{(k,m)} - 0, 97) (t_{(k,m)} - 0, 98) (t_{(k,m)} - 0, 99) (t_{(k,m)} - 1) (t_{(k,m)} - 1, 01) (t_{(k,m)} - 1, 02) (t_{(k,m)} - 1, 03) (t_{(k,m)} - 1, 04) (t_{(k,m)} - 1, 05) \right]^2, \forall (k, m) \in T, \quad (5.19)$$

$$P_{b_5^{sh}}(b_5^{sh}) = \left[ b_5^{sh} (b_5^{sh} + 0, 4) \right]^2, \quad (5.20)$$

$$P_{b_k^{sh}}(b_k^{sh}) = \left[ b_k^{sh} (b_k^{sh} - 0, 06) (b_k^{sh} - 0, 07) (b_k^{sh} - 0, 13) (b_k^{sh} - 0, 14) (b_k^{sh} - 0, 2) \right]^2, \forall k \in \{34, 107, 110\}, \quad (5.21)$$

$$P_{b_{37}^{sh}}(b_{37}^{sh}) = \left[ b_{37}^{sh} (b_{37}^{sh} + 0, 025) \right]^2, \quad (5.22)$$

$$P_{b_k^{sh}}(b_k^{sh}) = \left[ b_k^{sh} (b_k^{sh} - 0, 1) \right]^2, \forall k \in \{44, 45, 46\}, \quad (5.23)$$

$$P_{b_{48}^{sh}}(b_{48}^{sh}) = \left[ b_{48}^{sh} (b_{48}^{sh} - 0, 15) \right]^2, \quad (5.24)$$

$$P_{b_{74}^{sh}}(b_{74}^{sh}) = \left[ b_{74}^{sh} (b_{74}^{sh} - 0, 08) (b_{74}^{sh} - 0, 12) (b_{74}^{sh} - 0, 2) \right]^2, \quad (5.25)$$

$$P_{b_k^{sh}}(b_k^{sh}) = \left[ b_k^{sh} (b_k^{sh} - 0, 1) (b_k^{sh} - 0, 2) \right]^2, \forall k \in \{79, 82, 83, 105\}, \quad (5.26)$$

Os parâmetros de penalidade iniciais adotados para os *taps* dos transformadores neste teste foram  $\omega_{t_{(k,m)}} = 10^{27}, \forall (k, m) \in T, \omega_{b_k^{sh}} = 10^5, \forall k \in BSS$ , os quais foram determinados por meio de testes computacionais. Os parâmetros de penalidade foram multiplicados pelo fator de penalidade  $c_{t_{(k,m)}} = 1, 3, \forall (k, m) \in T, c_{b_k^{sh}} = 1, 3, \forall k \in BSS$  a cada iteração, de forma que seja realizada a atualização dos parâmetros de penalidade e eles cresçam gradativamente.

A solução discreta foi obtida na 37<sup>a</sup> iteração. O tempo computacional de resolução foi de 39,766 segundos.

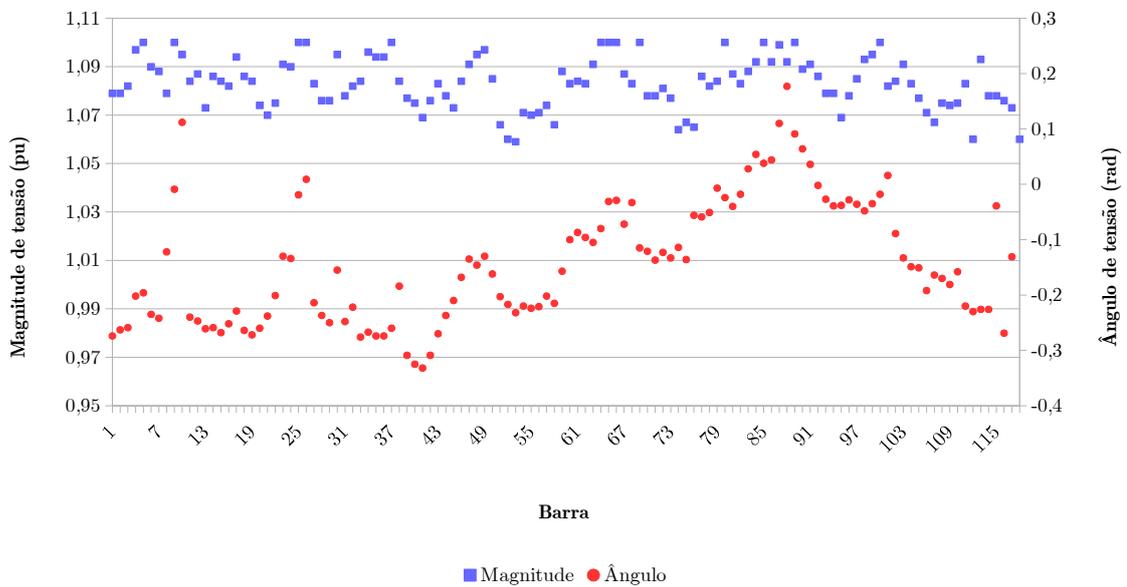
A Tabela 5.7 apresenta os valores assumidos pelas variáveis *taps* dos transformadores e pelos bancos de capacitores e de reatores *shunt* na solução obtida.

Na Figura 5.6 são plotados os valores das variáveis magnitude e ângulo de tensão nas barras.

Tabela 5.7 – Solução obtida para as variáveis discretas pela abordagem FPP aplicada ao sistema elétrico IEEE 118 barras

Variável discreta	Valor ( <i>pu</i> )
$t_{(8,5)}$	1,04
$t_{(26,25)}$	0,99
$t_{(30,17)}$	1,00
$t_{(38,37)}$	1,04
$t_{(63,59)}$	1,01
$t_{(64,61)}$	0,98
$t_{(65,66)}$	0,98
$t_{(68,69)}$	1,04
$t_{(81,80)}$	1,02
$b_5^{sh}$	-0,4
$b_{34}^{sh}$	0,14
$b_{37}^{sh}$	-0,25
$b_{44}^{sh}$	0,1
$b_{45}^{sh}$	0,1
$b_{46}^{sh}$	0,1
$b_{48}^{sh}$	0,15
$b_{74}^{sh}$	0,08
$b_{79}^{sh}$	0,2
$b_{82}^{sh}$	0,2
$b_{83}^{sh}$	0,2
$b_{105}^{sh}$	0,2
$b_{107}^{sh}$	0,13
$b_{110}^{sh}$	0,13

Figura 5.6 – Solução obtida para as variáveis contínuas pela abordagem FPP aplicada ao sistema elétrico IEEE 118 barras



Observa-se pela Figura 5.6 que as tensões estão dentro de seus limites mínimo e máximo, 0,9 e 1,1 *pu*.

As perdas de potência ativa nas linhas e transmissão de energia elétrica na solução obtida foi de 111,13 MW.

## 5.4 Sistema Elétrico 300 Barras

O sistema elétrico IEEE 300 barras tem os seguintes elementos:

- 1 barra de geração (barra *slack*);
- 68 barras de controle de reativo;
- 231 barras de carga;
- 409 linhas de transmissão;
- 50 transformadores com *tap* variável;
- 14 bancos de capacitores e de reatores *shunt* variáveis.

O modelo matemático para o problema de FPOR para o sistema elétrico IEEE 300 barras possui as seguintes características:

- 530 restrições de igualdade, que representam os balanços de potência ativa e reativa das barras do sistema;
- 836 restrições de desigualdade, que representam os limites mínimos e máximos da geração de potência reativa injetada nas barras de controle reativo e a canalização das variáveis magnitudes de tensão nas barras;
- 599 variáveis contínuas, que representam as magnitudes e os ângulos de tensão nas barras;
- 64 variáveis de controle discretas, que representam os *taps* dos transformadores entre as linhas (31,266), (266,271), (266,273), (270,293), (3,1), (3,2), (3,4), (7,5), (7,6), (10,11), (15,17), (16,15), (23,22), (30,29), (39,38), (39,40), (54,53), (55,56), (61,62), (68,73), (70,81), (71,83), (72,78), (93,186), (100,94), (101,136), (109,110), (109,129), (120,153), (121,154), (122,123), (122,127), (124,159), (132,162), (138,96), (142,116), (143,134), (161,118), (168,189), (172,175), (174,191), (179,227), (180,57), (181,190), (183,246), (190,191), (197,198), (202,203), (98,243) e (99,244) e os bancos de capacitores e de reatores *shunt* nas barras 96, 99, 133, 143, 145, 152, 158, 169, 210, 217, 219, 227, 268 e 283.

Na modelagem considerou-se que a magnitude de tensão nas barras tem como limites mínimos e máximos 0,9 e 1,1 *pu*, respectivamente. As variáveis de controle discretas *taps* dos transformadores devem pertencer ao conjunto discreto {0,95; 0,96; 0,97; 0,98; 0,99; 1; 1,1; 1,02; 1,03; 1,04; 1,05} *pu*, isto é, o tamanho do passo entre dois valores consecutivos dos *taps* dos transformadores deve ser de 0,01 *pu* conforme Zhao, Guo e Cao (2005),

respectivamente. Considerou-se que os bancos de capacitores e de reatores *shunt* devem pertencer aos conjuntos:

$$\begin{aligned}
 b_{96}^{sh} &\in \{0; 2; 3, 5; 4, 5\}, \\
 b_k^{sh} &\in \{0; 0, 25; 0, 44; 0, 59\}, \forall k \in \{99, 152, 158, 227\}, \\
 b_{133}^{sh} &\in \{0; 0, 19; 0, 34; 0, 39\}, \\
 b_k^{sh} &\in \{-4, 5; 0\}, \forall k \in \{143, 145, 210, 217\}, \\
 b_{169}^{sh} &\in \{-2, 5; 0\}, \\
 b_{219}^{sh} &\in \{-1, 5; 0\}, \\
 b_k^{sh} &\in \{0; 0, 15\}, \forall k \in \{268, 283\},
 \end{aligned}$$

#### 5.4.1 Abordagem FPSP Aplicada ao Sistema IEEE 300 Barras

As funções penalidade senoidais e polinomiais utilizadas e desenvolvidas para este caso são dadas por (5.27)–(5.34).

$$\Theta(t_{(k,m)}) = \left[ \text{sen} \left( \frac{t_{(k,m)}}{0,01} \pi \right) \right]^2, \forall (k, m) \in T, \quad (5.27)$$

$$P(b_{96}^{sh}) = \left[ -0.0571429(b_{96}^{sh})^4 + 0.571429(b_{96}^{sh})^3 - 1.81429(b_{96}^{sh})^2 + 1.8(b_{96}^{sh}) \right]^2, \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned}
 P(b_k^{sh}) &= \left[ -218.467(b_k^{sh})^4 + 279.638(b_k^{sh})^3 - 112.969(b_k^{sh})^2 + 14.1785(b_k^{sh}) \right]^2, \\
 &\forall k \in \{99, 152, 158, 227\},
 \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$P(b_{133}^{sh}) = \left[ -766.54(b_{133}^{sh})^4 + 705.217(b_{133}^{sh})^3 - 207.962(b_{133}^{sh})^2 + 19.3122(b_{133}^{sh}) \right]^2, \quad (5.30)$$

$$P(b_k^{sh}) = \left[ -0.0987654(b_k^{sh})^2 - 0.444444(b_k^{sh}) \right]^2, \forall k \in \{143, 145, 210, 217\}, \quad (5.31)$$

$$P(b_{169}^{sh}) = \left[ -0.32(b_{169}^{sh})^2 - 0.8(b_{169}^{sh}) \right]^2, \quad (5.32)$$

$$P(b_{219}^{sh}) = \left[ -0.888889(b_{219}^{sh})^2 - 1.33333(b_{219}^{sh}) \right]^2, \quad (5.33)$$

$$P(b_k^{sh}) = \left[ -88.8889(b_k^{sh})^2 + 13.3333(b_k^{sh}) \right]^2, \forall k \in \{268, 283\}, \quad (5.34)$$

Os parâmetros de penalidade iniciais adotados para os *taps* dos transformadores neste teste foram  $\omega_{t_{(k,m)}} = 10^{-7}, \forall (k, m) \in T, \omega_{b_k^{sh}} = 10^{-4}, \forall k \in BSS$ , os quais foram

Tabela 5.8 – Pontos intermediários utilizados para construção das funções penalidade dos bancos de capacitores e de reatores *shunt*

Variável	Ponto intermediário
$b_{96}^{sh}$	(1;0,5)
$b_{99}^{sh}$	(0,125;0,5)
$b_{133}^{sh}$	(0,095;0,5)
$b_{143}^{sh}$	(-2,25;0,0,5)
$b_{145}^{sh}$	(-2,25;0,5)
$b_{152}^{sh}$	(0,125;0,5)
$b_{158}^{sh}$	(0,125;0,5)
$b_{169}^{sh}$	(-1,25;0,5)
$b_{210}^{sh}$	(-2,25;0,5)
$b_{217}^{sh}$	(-2,25;0,5)
$b_{219}^{sh}$	(-0,75;0,5)
$b_{227}^{sh}$	(0,125;0,5)
$b_{268}^{sh}$	(0,075;0,5)
$b_{283}^{sh}$	(0,075;0,5)

determinados por meio de testes computacionais. Os parâmetros de penalidade foram multiplicados pelo fator de penalidade  $c_{t_{(k,m)}} = 1, 3, \forall (k, m) \in T$ ,  $c_{b_k^{sh}} = 1, 3, \forall k \in BSS$  a cada iteração, de forma que seja realizada a atualização dos parâmetros de penalidade e eles cresçam gradativamente. Os pontos intermediários adotados para se obter os polinômios de interpolação encontram-se na Tabela 5.8.

A solução discreta foi obtida na 51<sup>a</sup> iteração. O tempo computacional de resolução foi de 40,135 segundos.

A Tabela 5.9 apresenta os valores assumidos pelas variáveis *taps* dos transformadores e pelos bancos de capacitores e de reatores *shunt* na solução obtida.

Na Figura 5.7 são plotados os valores das variáveis magnitude e ângulo de tensão nas barras.

Observa-se pela Figura 5.7 que as tensões estão dentro de seus limites mínimo e máximo, 0,9 e 1,1 pu.

As perdas de potência ativa nas linhas e transmissão de energia elétrica na solução obtida foi de 345,64 MW.

#### 5.4.2 Abordagem FPP Aplicada ao Sistema IEEE 300 Barras

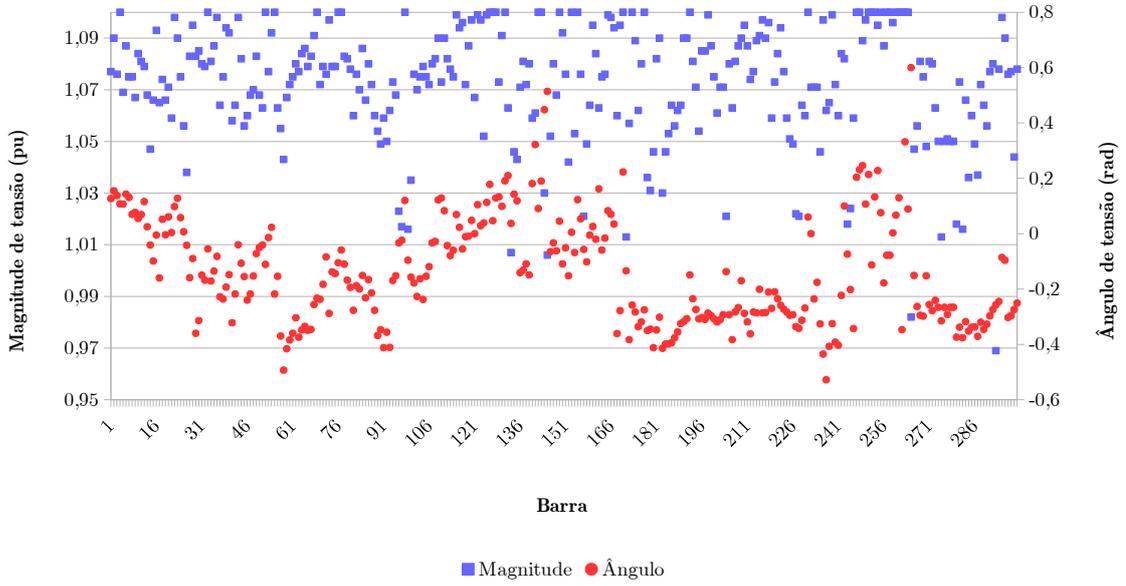
As funções penalidade polinomiais para este caso estão apresentadas em (5.35)–(5.42).

$$\begin{aligned}
 P_{t_{(k,m)}}(t_{(k,m)}) = & \left[ (t_{(k,m)} - 0,95) (t_{(k,m)} - 0,96) (t_{(k,m)} - 0,97) \right. \\
 & (t_{(k,m)} - 0,98) (t_{(k,m)} - 0,99) (t_{(k,m)} - 1) (t_{(k,m)} - 1,01) \\
 & \left. (t_{(k,m)} - 1,02) (t_{(k,m)} - 1,03) (t_{(k,m)} - 1,04) (t_{(k,m)} - 1,05) \right]^2, \forall (k, m) \in T,
 \end{aligned} \quad (5.35)$$

Tabela 5.9 – Solução obtida para as variáveis discretas pela abordagem FPSP aplicada ao sistema elétrico IEEE 300 barras

Variável discreta	Valor ( $pu$ )
$t_{(31,266)}$	0,97
$t_{(266,271)}$	1,02
$t_{(266,273)}$	1,04
$t_{(270,293)}$	1,02
$t_{(3,1)}$	1,01
$t_{(3,2)}$	1,020
$t_{(3,4)}$	1,020
$t_{(7,5)}$	1,010
$t_{(7,6)}$	1,02
$t_{(10,11)}$	1,00
$t_{(15,17)}$	1,04
$t_{(16,15)}$	1,01
$t_{(23,22)}$	1,01
$t_{(30,29)}$	1,01
$t_{(39,38)}$	0,99
$t_{(39,40)}$	0,99
$t_{(54,53)}$	1,04
$t_{(55,56)}$	0,97
$t_{(61,62)}$	0,99
$t_{(68,73)}$	1,02
$t_{(70,81)}$	0,99
$t_{(71,83)}$	0,98
$t_{(72,78)}$	1,00
$t_{(93,186)}$	0,99
$t_{(100,94)}$	1,03
$t_{(101,136)}$	0,99
$t_{(109,110)}$	0,98
$t_{(109,129)}$	0,98
$t_{(120,153)}$	1,01
$t_{(121,154)}$	1,03
$t_{(122,123)}$	1,04
$t_{(122,127)}$	1,02
$t_{(124,159)}$	1,04
$t_{(132,162)}$	1,01
$t_{(138,96)}$	0,96
$t_{(142,116)}$	1,05
$t_{(143,134)}$	0,96
$t_{(161,118)}$	0,98
$t_{(168,189)}$	1,00
$t_{(172,175)}$	1,00
$t_{(174,191)}$	1,03
$t_{(179,227)}$	1,00
$t_{(180,57)}$	0,99
$t_{(181,190)}$	0,99
$t_{(183,246)}$	0,99
$t_{(190,191)}$	0,99
$t_{(197,198)}$	0,99
$t_{(202,203)}$	1,01
$t_{(98,243)}$	0,99
$t_{(99,244)}$	1,01
$b_{96}^{sh}$	3,5
$b_{99}^{sh}$	0,25
$b_{133}^{sh}$	0
$b_{143}^{sh}$	0
$b_{145}^{sh}$	0
$b_{152}^{sh}$	0,44
$b_{158}^{sh}$	0,44
$b_{169}^{sh}$	0
$b_{210}^{sh}$	-4,5
$b_{217}^{sh}$	0
$b_{219}^{sh}$	-1,5
$b_{227}^{sh}$	0
$b_{268}^{sh}$	0,15
$b_{283}^{sh}$	0

Figura 5.7 – Solução obtida para as variáveis contínuas pela abordagem FPSP aplicada ao sistema elétrico IEEE 300 barras



$$P_{b_{96}^{sh}}(b_{96}^{sh}) = [b_{96}^{sh}(b_{96}^{sh} - 2)(b_{96}^{sh} - 3,5)(b_{96}^{sh} - 4,5)]^2 \quad (5.36)$$

$$P_{b_k^{sh}}(b_k^{sh}) = [b_k^{sh}(b_k^{sh} - 0,25)(b_k^{sh} - 0,44)(b_k^{sh} - 0,59)]^2, \quad (5.37)$$

$$\forall k \in \{99, 152, 158, 227\},$$

$$P_{b_{133}^{sh}}(b_{133}^{sh}) = [b_{133}^{sh}(b_{133}^{sh} - 0,25)(b_{133}^{sh} - 0,44)(b_{133}^{sh} - 0,59)]^2, \quad (5.38)$$

$$P_{b_k^{sh}}(b_k^{sh}) = [b_k^{sh}(b_k^{sh} + 4,5)]^2, \forall k \in \{143, 145, 210, 217\}, \quad (5.39)$$

$$P_{b_{169}^{sh}}(b_{169}^{sh}) = [b_{169}^{sh}(b_{169}^{sh} + 2,5)]^2, \quad (5.40)$$

$$P_{b_{219}^{sh}}(b_{219}^{sh}) = [b_{219}^{sh}(b_{219}^{sh} + 1,5)]^2, \quad (5.41)$$

$$P_{b_k^{sh}}(b_k^{sh}) = [b_k^{sh}(b_k^{sh} - 0,15)]^2, \forall k \in \{268, 283\}. \quad (5.42)$$

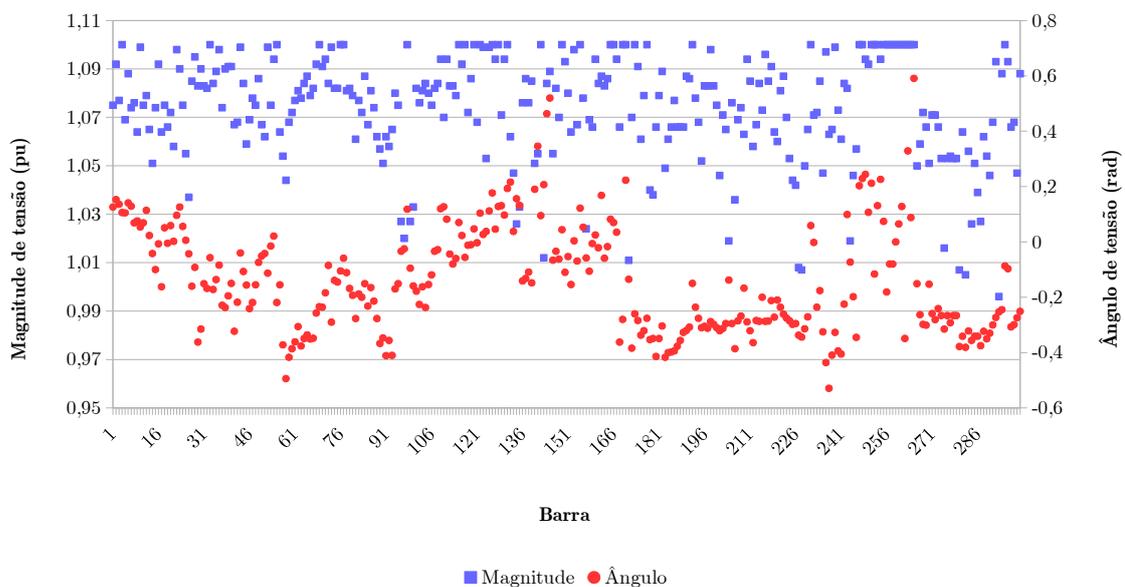
Os parâmetros de penalidade iniciais adotados para os *taps* dos transformadores neste teste foram  $\omega_{t(k,m)} = 10^{30}, \forall (k,m) \in T, \omega_{b_k^{sh}} = 32,1, \forall k \in BSS$ , os quais foram determinados por meio de testes computacionais. Os parâmetros de penalidade foram multiplicados pelo fator de penalidade  $c_{t(k,m)} = 1,3, \forall (k,m) \in T, c_{b_k^{sh}} = 1,3, \forall k \in BSS$  a cada iteração, de forma que seja realizada a atualização dos parâmetros de penalidade e eles cresçam gradativamente.

A solução discreta foi obtida na 58ª iteração. O tempo computacional de resolução foi de 24,499 segundos.

A Tabela 5.10 apresenta os valores assumidos pelas variáveis *taps* dos transformadores e pelos bancos de capacitores e de reatores *shunt* na solução obtida.

Na Figura 5.8 são plotados os valores das variáveis magnitude e ângulo de tensão nas barras.

Figura 5.8 – Solução obtida para as variáveis contínuas pela abordagem FPP aplicada ao sistema elétrico IEEE 300 barras



Observa-se pela Figura 5.8 que as tensões estão dentro de seus limites mínimo e máximo, 0,9 e 1,1 pu.

As perdas de potência ativa nas linhas e transmissão de energia elétrica na solução obtida foi de 347,04 MW.

## 5.5 Análise e Discussão dos Resultados

Os resultados dos testes numéricos obtidos pelas abordagens propostas conforme a Seção 5, aplicadas aos sistemas elétricos IEEE 14, 30, 118 e 300 barras, foram comparados aos resultados obtidos com os mesmos sistemas elétricos pelo método de arredondamento, pelo método B&B através do *solver Basic Open-source Non-linear Mixed INteger programming* (BONMIN) (BONMIN, 2015) e pelo método OA através do *solver comercial DIscrete and Continuous OPTimizer* (DICOPT) (DICOPT, 2015). Para avaliar a eficiência das abordagens propostas quando comparadas a métodos clássicos para a resolução de problemas de programação não-linear com variáveis discretas e contínuas.

Tabela 5.10 – Solução obtida para as variáveis discretas pela abordagem FPP aplicada ao sistema elétrico IEEE 300 barras

Variável discreta	Valor ( $pu$ )
$t_{(31,266)}$	0,97
$t_{(266,271)}$	1,01
$t_{(266,273)}$	1,04
$t_{(270,293)}$	1,04
$t_{(3,1)}$	0,98
$t_{(3,2)}$	1,03
$t_{(3,4)}$	1,02
$t_{(7,5)}$	1,03
$t_{(7,6)}$	1,2
$t_{(10,11)}$	0,96
$t_{(15,17)}$	1,03
$t_{(16,15)}$	1,02
$t_{(23,22)}$	1,01
$t_{(30,29)}$	1,00
$t_{(39,38)}$	1,01
$t_{(39,40)}$	0,99
$t_{(54,53)}$	1,03
$t_{(55,56)}$	0,97
$t_{(61,62)}$	0,99
$t_{(68,73)}$	1,02
$t_{(70,81)}$	0,97
$t_{(71,83)}$	0,97
$t_{(72,78)}$	0,99
$t_{(93,186)}$	1,00
$t_{(100,94)}$	1,04
$t_{(101,136)}$	0,99
$t_{(109,110)}$	0,97
$t_{(109,129)}$	0,97
$t_{(120,153)}$	1,00
$t_{(121,154)}$	1,04
$t_{(122,123)}$	1,04
$t_{(122,127)}$	1,01
$t_{(124,159)}$	1,04
$t_{(132,162)}$	1,03
$t_{(138,96)}$	0,96
$t_{(142,116)}$	0,99
$t_{(143,134)}$	1,01
$t_{(161,118)}$	0,98
$t_{(168,189)}$	1,00
$t_{(172,175)}$	0,99
$t_{(174,191)}$	1,02
$t_{(179,227)}$	0,97
$t_{(180,57)}$	0,97
$t_{(181,190)}$	0,99
$t_{(183,246)}$	0,96
$t_{(190,191)}$	0,99
$t_{(197,198)}$	0,99
$t_{(202,203)}$	1,00
$t_{(98,243)}$	0,99
$t_{(99,244)}$	1,00
$b_{96}^{sh}$	3,5
$b_{99}^{sh}$	0,59
$b_{133}^{sh}$	0,19
$b_{143}^{sh}$	-4,5
$b_{145}^{sh}$	0
$b_{152}^{sh}$	0,59
$b_{158}^{sh}$	0,59
$b_{169}^{sh}$	-2,5
$b_{210}^{sh}$	-4,5
$b_{217}^{sh}$	0
$b_{219}^{sh}$	-1,5
$b_{227}^{sh}$	0
$b_{268}^{sh}$	0,15
$b_{283}^{sh}$	0

Tabela 5.11 – Comparação entre os métodos propostos (FPP e FPSP) e métodos clássicos da literatura (Arredondamento, BONMIN e DICOPT).

		Sistema elétrico			
		IEEE 14 Barras	IEEE 30 Barras	IEEE 118 Barras	IEEE 300 Barras
Solução contínua	Perdas (MW)	13,60	17,85	110,51	342,40
	Tempo (s)	0,230	0,625	0,363	0,621
Solução arredondada	Perdas (MW)	13,60	17,85	110,51	432,86
	Tempo (s)	0,553	0,945	0,743	1,058
Método FPSP	Perdas (MW)	13,61	17,87	111,14	345,64
	Tempo (s)	3,349	0,227	29,997	40,135
Método FPP	Perdas (MW)	13,64	17,86	111,13	347,04
	Tempo (s)	0,992	3,897	39,766	24,499
BONMIN	Perdas (MW)	13,60	17,89	111,16	354,70
	Tempo (s)	1,160	1,239	9,886	27,874
DICOPT	Perdas (MW)	13,61	18,12	111,20	358,81
	Tempo (s)	1,553	0,454	2,378	25,277

O BONMIN é um *solver* para resolver problemas de programação não-linear com variáveis inteiras e contínuas, o qual é distribuído gratuitamente pelo projeto COIN-OR. Este *solver* possui cinco algoritmos disponíveis, dos quais foi utilizado o algoritmo recomendado para se resolver problemas que envolvem funções não-convexas. O algoritmo B-BB consiste do método B&B e utiliza as rotinas do *solver* gratuito IPOPT para resolver os problemas de programação não-linear da árvore de busca (SOLER, 2011). O BONMIN foi executado em interface com o *software* GAMS (BONMIN, 2015).

O DICOPT é um *solver* desenvolvido na *Carnegie Mellon University* para resolver problemas de programação linear ou não-linear com variáveis inteiras e contínuas (SOLER; ASADA; COSTA, 2013). O DICOPT é baseado em extensões do método OA e estratégias de relaxamento das restrições de igualdade. O DICOPT foi executado em interface com o *software* GAMS (DICOPT, 2015). O *software* é capaz de resolver problemas que envolvem funções não-convexas, porém nestes casos não há garantias de que a solução obtida é um ótimo global (SOLER, 2011).

Os resultados destas comparações são apresentados na Tabela 5.11. Nota-se que os resultados obtidos pelas abordagens propostas neste trabalho foram competitivas, tanto pela qualidade da solução obtida, quanto pelo tempo computacional de resolução do problema.

Nos testes com o sistema IEEE 14 barras, nota-se que os *solvers* BONMIN e DICOPT apresentaram resultados ligeiramente melhores, tanto pela qualidade de solução quanto pelo tempo computacional, com relação aos resultados obtidos pelas abordagens FPSP e FPP.

Nos testes com o sistema IEEE 30 barras, nota-se que os resultados obtidos pela abordagem FPSP são melhores que os resultados obtidos pelos *solvers* BONMIN e DICOPT, tanto pelo tempo computacional quanto pela qualidade de solução. Já a abordagem FPP

apresentou soluções melhores do que os *solvers*, mas com tempo computacional maior.

Nos testes com os sistemas 118 barras, nota-se que as abordagens FPSP e FPP apresentaram resultados ligeiramente melhores pela qualidade de solução, exceto pelo tempo computacional, com relação aos resultados obtidos pelos *solvers* BONMIN e DICOPT.

Nos testes com o sistema IEEE 300 barras, nota-se que os resultados obtidos pelas abordagens FPSP e FPP são melhores que os resultados obtidos pelos *solvers* BONMIN e DICOPT pela qualidade de solução. Com relação ao tempo computacional a abordagem FPP teve melhor desempenho do que os *solvers*.

No Capítulo 6 são relatadas as considerações finais deste trabalho e os desafios para os trabalhos futuros.

## 6 Conclusões

O problema de FPOR é modelado como um problema de programação não-linear, não-convexo, estático, com variáveis discretas e contínuas. Além disso, na formulação adotada neste trabalho a função objetivo utilizada é não-separável e não permite simplificações. Notoriamente, o problema FPOR é um problema de difícil resolução. Neste trabalho, propõe-se duas abordagens de solução para o problema de FPOR via função penalidade, ambas os métodos associadas a um método de pontos interiores, combinando as vantagens de ambos.

Nas duas abordagens propostas, as funções penalidade ajustam as variáveis de controle, *taps* dos transformadores e bancos de capacitores e de reatores *shunt*, considerando a sua natureza discreta. Uma sequência de problemas contínuos e penalizados, que, por não possuírem variáveis discretas, demandam menor esforço computacional, é gerada e um método de pontos interiores é utilizado, devido ao seu bom desempenho e rápida convergência.

As principais vantagens das funções penalidade propostas são:

- São contínuas e diferenciáveis;
- Exigem menor esforço computacional ao se utilizar métodos de pontos interiores para resolver os problemas penalizados em relação à utilização de derivadas, uma vez que derivadas de funções polinomiais são simples de serem calculadas;
- As funções penalidade apresentadas, neste trabalho, podem ser utilizadas para ajustar qualquer conjunto discreto. Devido à maneira como as funções foram desenvolvidas, estas podem ser aplicadas a qualquer conjunto discreto, inclusive um conjunto discreto que contenha elementos com passos distintos.

Os testes numéricos foram realizados com os sistemas elétricos IEEE 14, 30, 118 e 300 barras. Independentemente do tamanho do sistema, do número de restrições e de variáveis as abordagens propostas mostraram-se competitivas obtendo soluções discretas de boa qualidade e em bom tempo computacional para minimizar as perdas de potência ativa nas linhas de transmissão de energia elétrica e satisfazendo as restrições físicas e operacionais do problema de FPOR. As perdas de potência ativa nas linhas e transmissão de energia elétrica foram equivalentes ou muito próximas as perdas do problema de FPOR contínuo (problema relaxado), o que evidencia a qualidade dos resultados e a possibilidade de utilização das abordagens propostas em sistemas reais. Além disso, as abordagens propostas mostraram-se competitivas ao serem comparadas com os métodos de

arredondamento, B&B e OA, métodos clássicos da literatura para a resolução de problemas de programação não-linear com variáveis discretas e contínuas.

Portanto, este trabalho apresenta contribuição na área de matemática aplicada, uma vez que propõe novas abordagens de solução para problemas de programação não-linear com variáveis discretas, podendo ser adaptado para quaisquer conjunto discretos e também contribui para a área de Engenharia Elétrica, pois, propõe novas abordagens para obter soluções mais realistas para o problema de FPOR.

## 7 Trabalhos Publicados

SILVA D. P.; PEREIRA A. C.; SOLER E. M. Penalty Function Based on the Triangular Wave Function to Treat the Discrete Variables of the Optimal Power Flow Problem. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional (TEMA)*, 2016. Aceito para publicação.

SILVA, D. P.; SOLER E. M. Função Penalidade Polinomial para o Tratamento das Variáveis Discretas do Problema de Fluxo De Potência Ótimo Reativo. *Summer School in Operations Research for Young Scholars (ELAVIO)*, 2016. Aceito para apresentação.

SILVA, D. P.; SOLER E. M. Funções Penalidade para o Tratamento dos Controle Discretos do Problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics (CNMAC)*, 2016. Aceito para apresentação.

SILVA, D. P.; SOLER E. M. Função Penalidade Polinomial para o Tratamento das Variáveis Discretas do Problema de Fluxo De Potência Ótimo Reativo. Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional (ERMAC), 2016.

SILVA, D. P.; SOLER E. M. Função Penalidade Polinomial e Senoidal para Resolução do Problema de Fluxo De Potência Ótimo Reativo com Variáveis Discretas. *Proceedings and Book of Abstracts of 11 th Latin-American Congress on Electricity Generation and Transmission: CLAGTEE 2015*, 2015.

SILVA, D. P.; SOLER E. M. Uma Nova Função Penalidade para a Resolução do Problema de Fluxo de Potência Ótimo com Variáveis de Controle Discretas. V Seminário do Programa em Pós-graduação em Engenharia Elétrica, 2015.

SILVA, D. P.; SOLER E. M. Função Penalidade Polinomial e Senoidal para Resolução do Problema de Fluxo De Potência Ótimo Reativo com Variáveis Discretas. XLVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO), 2015.

SILVA D. P.; PEREIRA A. C.; SOLER E. M. Função Penalidade Baseada em Função Triangular para o Tratamento das Variáveis Discretas do Problema de Fluxo de Potência Ótimo. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics (CMAC)*, 2015.

SILVA, D. P.; PEREIRA A. C., SOLER E. M. Função Penalidade Baseada em Função Triangular para o Tratamento das Variáveis Discretas do Problema de Fluxo de Potência Ótimo. I Congresso Brasileiro de Jovens Pesquisadores em Matemática Pura e Aplicada, 2014.

SILVA, D. P.; SOLER E. M. Uma Nova Abordagem de Resolução do Problema de Fluxo de Potência Ótimo com Variáveis de Controle Discretas. IV Seminário do Programa em

Pós-graduação em Engenharia Elétrica, 2014.

# Referências

- ABARI, R. et al. *Reestructured Electric Power Systems: Analysis of Electricity Markets with Equilibrium Models*. [S.l.]: IEEE Press, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.
- ADIBI, M. et al. Optimal transformer tap selection using modified barrier-augmented lagrangian method. *Power Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 18, n. 1, p. 251–257, 2003. Citado na página 23.
- ALRASHIDI, M.; EL-HAWARY, M. Hybrid particle swarm optimization approach for solving the discrete opf problem considering the valve loading effects. *Power Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 22, n. 4, p. 2030–2038, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 25.
- BAKIRTZIS, A. G. et al. Optimal power flow by enhanced genetic algorithm. *Power Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 17, n. 2, p. 229–236, 2002. Citado na página 22.
- BONMIN. 2015. Acessado em: 23-06-2015. Disponível em: <<https://projects.coin-or.org/Bonmin>>. Citado 2 vezes nas páginas 78 e 80.
- CAPITANESCU, F.; WEHENKEL, L. Sensitivity-based approaches for handling discrete variables in optimal power flow computations. *Power Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 25, n. 4, p. 1780–1789, 2010. Citado na página 27.
- CARPENTIER, J. Contribution a l'étude du dispatching économique. *Bulletin de la Societe Francaise des Electriciens*, v. 3, n. 1, p. 431–447, 1962. Citado na página 19.
- CHATTOPADHYAY, D. Application of general algebraic modeling system to power system optimization. *Power Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 14, n. 1, p. 15–22, 1999. Citado na página 59.
- DAVISON, G. R. Dividing load between units. *Electrical World*, p. 1385–1387, 1922. Citado na página 19.
- DICOPT. 2015. Acessado em: 05-07-2015. Disponível em: <[www.gams.com/dd/docs/solvers/dicopt.pdf](http://www.gams.com/dd/docs/solvers/dicopt.pdf)>. Citado 2 vezes nas páginas 78 e 80.
- DING, X.; WANG, X. A direct nonlinear predictor-corrector primal-dual interior point algorithm for optimal power flow. *Management Mathematics, IMA*, v. 15, n. 4, p. 355–368, 1994. Citado na página 22.
- DING, X.; WANG, X.; SONG, Y. Interior point cutting plane method for optimal power flow. *IMA Journal of management mathematics, IMA*, v. 15, n. 4, p. 355–368, 2004. Citado na página 24.
- DOMMEL, H. W.; TINNEY, W. F. Optimal power flow solutions. *power apparatus and systems, IEEE transactions on*, IEEE, n. 10, p. 1866–1876, 1968. Citado na página 19.
- DURAN, M. A.; GROSSMANN, I. E. An outer-approximation algorithm for a class of mixed-integer nonlinear programs. *Mathematical programming, Springer*, v. 36, n. 3, p. 307–339, 1986. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 46.

GAMS. 2015. Acessado em: 01-02-2015. Disponível em: <<http://www.gams.com>>. Citado na página 51.

GHASEMI, M. et al. A new hybrid algorithm for optimal reactive power dispatch problem with discrete and continuous control variables. *Applied soft computing*, Elsevier, v. 22, p. 126–140, 2014. Citado na página 28.

GHASEMI, M. et al. Solving optimal reactive power dispatch problem using a novel teaching–learning-based optimization algorithm. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Elsevier, v. 39, p. 100–108, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 64.

GÓMEZ-EXPÓSITO, A.; CONEJO, A. J.; CAÑIZARES, C. *Sistemas de Energia: Análise e Operação*. [S.l.]: LTC, 2011. Citado na página 32.

GRAINGER, J. J.; STEVENSON, W. D. *Power system analysis*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 32, 33 e 34.

GRANVILLE, S. Optimal reactive dispatch through interior point methods. *Power Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 9, n. 1, p. 136–146, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 19, 21 e 22.

GUPTA, O. K.; RAVINDRAN, A. Branch and bound experiments in convex nonlinear integer programming. *Management science*, INFORMS, v. 31, n. 12, p. 1533–1546, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 44.

HESTENES, M. R. Multiplier and gradient methods. *Journal of optimization theory and applications*, Springer, v. 4, n. 5, p. 303–320, 1969. Citado na página 23.

HUANG, C.-H. A hybrid artificial intelligence algorithm for discrete optimal power flow. *Appl. Math*, v. 9, n. 1L, p. 197–204, 2015. Citado na página 30.

IPOPT. 2015. Acessado em: 11-05-2015. Disponível em: <<http://www.coin-or.org>>. Citado na página 51.

LAGE, G. G. *O fluxo de potência ótimo reativo com variáveis de controle discretas e restrições de atuação de dispositivos de controle de tensão*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 60, 64 e 68.

LIMA, F. G. d. M. *Fluxo de potência ótimo paramétrico*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 19.

LIN, S.-Y.; HO, Y.-C.; LIN, C.-H. An ordinal optimization theory-based algorithm for solving the optimal power flow problem with discrete control variables. *Power Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 19, n. 1, p. 276–286, 2004. Citado na página 24.

LIU, L. et al. A robust approach to optimal power flow with discrete variables. *Power Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 24, n. 3, p. 1182–1190, 2009. Citado na página 26.

LIU, M.; TSO, S.; CHENG, Y. An extended nonlinear primal-dual interior-point algorithm for reactive-power optimization of large-scale power systems with discrete control variables. *Power Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 17, n. 4, p. 982–991, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 49.

- LIU, W.-H. E.; PAPALEXOPOULOS, A. et al. Discrete shunt controls in a newton optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Systems (Institute of Electrical and Electronics Engineers);(United States)*, v. 7, n. 4, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 49.
- LUENBERGER, D. G.; YE, Y. *Linear and nonlinear programming*. [S.l.]: Springer, 1984. v. 2. Citado na página 43.
- MACFIE, P. J. et al. Proposed shunt rounding technique for large-scale security constrained loss minimization. *Power Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 25, n. 3, p. 1478–1485, 2010. Citado na página 27.
- MONTICELLI, A.; LIU, W.-H. Adaptive movement penalty method for the newton optimal power flow. *Power Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 7, n. 1, p. 21–24, 1992. Citado na página 42.
- MONTICELLI, A. J. *Fluxo de carga em redes de energia elétrica*. [S.l.]: E. Blucher, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 34.
- MOREIRA, J. et al. A parallel branch and bound approach to optimal power flow with discrete variables. *Przeegląd Elektrotechniczny*, v. 89, n. 3a, p. 47–52, 2013. Citado na página 28.
- NEPOMUCENO, L. *Modelos de otimização equivalentes para minimização de perdas através do FPO de Newton*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 1997. Citado na página 16.
- NIE, Y. et al. Pcpdipm based optimal reactive power flow model with discrete variables. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Elsevier, v. 69, p. 116–122, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 30.
- PAPALEXOPOULOS, A. D.; IMPARATO, C. F.; WU, F. F. Large-scale optimal power flow: effects of initialization, decoupling and discretization. *Power Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 4, n. 2, p. 748–759, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 19.
- PHAN, D. Lagrangian duality and branch-and-bound algorithms for optimal power flow. *Operations Research*, INFORMS, v. 60, n. 2, p. 275–285, 2015. Citado na página 29.
- PINHEIRO, R. B. N. et al. Interior–exterior point method with global convergence strategy for solving the reactive optimal power flow problem. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Elsevier, v. 66, p. 235–246, 2015. Citado na página 29.
- POLYAK, R. Modified barrier functions (theory and methods). *Mathematical programming*, Springer, v. 54, n. 1-3, p. 177–222, 1992. Citado na página 23.
- POWELL, M. J. A method for non-linear constraints in minimization problems. UKAEA, 1967. Citado na página 23.
- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. d. R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. [S.l.]: Makron Books do Brasil, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 91.

- SASSON, A.; VILORIA, F.; ABOYTES, F. Optimal load flow solution using the hessian matrix. *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, n. 1, p. 31–41, 1973. Citado na página 20.
- SOLER, E. M. *Resolução do problema de fluxo de potência ótimo com variáveis de controle discretas*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2011. Citado 6 vezes nas páginas 46, 47, 49, 51, 58 e 80.
- SOLER, E. M.; ASADA, E. N.; COSTA, G. R. da. Penalty-based nonlinear solver for optimal reactive power dispatch with discrete controls. *Power Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 28, n. 3, p. 2174–2182, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 16, 28 e 80.
- SOLER, E. M.; SOUSA, V. A. de; COSTA, G. R. da. A modified primal–dual logarithmic-barrier method for solving the optimal power flow problem with discrete and continuous control variables. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 222, n. 3, p. 616–622, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 51.
- SOUSA, V. A. de. *Resolução do Problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo via Método da Função Lagrangiana Barreira Modificada*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2006. Citado na página 16.
- SUBBARAJ, P.; RAJNARAYANAN, P. Optimal reactive power dispatch using self-adaptive real coded genetic algorithm. *Electric Power Systems Research*, Elsevier, v. 79, n. 2, p. 374–381, 2009. Citado na página 26.
- SUN, D. et al. Optimal power flow by newton approach. *power apparatus and systems, iee transactions on*, IEEE, n. 10, p. 2864–2880, 1984. Citado na página 20.
- TINNEY, W. et al. Some deficiencies in optimal power flow. *Power Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 3, n. 2, p. 676–683, 1988. Citado na página 20.
- TORRES, G. L.; QUINTANA, V. H. An interior-point method for nonlinear optimal power flow using voltage rectangular coordinates. *Power Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 13, n. 4, p. 1211–1218, 1998. Citado na página 22.
- WÄCHTER, A. *An interior point algorithm for large-scale nonlinear optimization with applications in process engineering*. Tese (Doutorado) — PhD thesis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, USA, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 58.
- WÄCHTER, A.; BIEGLER, L. T. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical programming*, Springer, v. 106, n. 1, p. 25–57, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 51, 55 e 58.
- WASHINGTON. 2015. Acessado em: 07-08-2014. Disponível em: <[www.ee.washington.edu/research/pstca](http://www.ee.washington.edu/research/pstca)>. Citado na página 59.
- YAN, W. et al. A hybrid genetic algorithm-interior point method for optimal reactive power flow. *Power Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 21, n. 3, p. 1163–1169, 2006. Citado na página 25.
- ZHAO, B.; GUO, C.; CAO, Y. A multiagent-based particle swarm optimization approach for optimal reactive power dispatch. *Power Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 20, n. 2, p. 1070–1078, 2005. Citado 4 vezes nas páginas 25, 64, 68 e 73.

# Apêndices

# APÊNDICE A – Interpolação Polinomial: Forma de Lagrange

## A.1 Conceito de Interpolação

Neste capítulo, será exposta brevemente a técnica de interpolação utilizada neste trabalho. Maiores detalhes podem ser encontrados em Ruggiero e Lopes (1997).

Interpolar uma função qualquer consiste em aproximar esta função por uma outra função, escolhida entre uma classe de funções definida *a priori* e que satisfaça algumas propriedades. A necessidade de se efetuar esta substituição surge em várias situações, como por exemplo:

- Quando são conhecidos somente os valores numéricos da função para um conjunto de pontos e é necessário calcular o valor da função em um ponto não tabelado. Este é o caso da abordagem proposta na Seção 4.2.1, em que apenas alguns pontos da função, valores discretos, são conhecidos;
- Quando a função em estudo tem uma expressão tal que operações como a diferenciação e a integração são difíceis, ou mesmo impossíveis, de serem realizadas.

Consideram-se  $(n + 1)$  pontos distintos:  $y_0, y_1, \dots, y_n$  chamados nós da interpolação e os valores de  $f(y)$  nestes pontos:  $f(y_0), f(y_1), \dots, f(y_n)$ .

A forma de interpolação de  $f(y)$  que será apresentada a seguir consiste em se obter uma determinada função  $g(y)$  tal que:

$$\begin{cases} g(y_0) = f(y_0) \\ g(y_1) = f(y_1) \\ \vdots \\ g(y_n) = f(y_n). \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Neste trabalho, considera-se que a função  $g(y)$  seja da classe das funções polinomiais. Pode-se observar que:

- Existem outras formas de interpolação polinomial como, por exemplo, a fórmula de Taylor e a interpolação de Hermite, para as quais as condições de interpolação (A.1) são outras;

- ii) Assim como  $g(y)$  foi escolhida entre as funções polinomiais, pode-se utilizar funções racionais, funções trigonométricas, etc.

## A.2 Interpolação Polinomial

Dados os pontos  $(y_0, f(y_0)), (y_1, f(y_1)), \dots, (y_n, f(y_n))$ , portanto,  $(n + 1)$  pontos distintos, deseja-se aproximar  $f(y)$  por um polinômio  $p_n(x)$ , de grau menor ou igual a  $n$ , tal que:

$$f(y_k) = p_n(y_k), k = 0, 1, \dots, n. \quad (\text{A.2})$$

O polinômio  $p_n(y)$  será representado por:

$$p_n(y) = a_0 + a_1y + \dots + a_ny^n. \quad (\text{A.3})$$

Portanto, determinar  $p_n(y)$  significa determinar os coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , tal que (A.2) seja satisfeita, pode-se montar o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a_0 + a_1y_0 + \dots + a_ny_0^n = f(y_0) \\ a_0 + a_1y_1 + \dots + a_ny_1^n = f(y_1) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_0 + a_1y_n + \dots + a_ny_n^n = f(y_n). \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

A matriz  $A$  dos coeficientes é:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & y_0 & \dots & y_0^n \\ 1 & y_1 & \dots & y_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_n & \dots & y_n^n \end{vmatrix},$$

que é denominada matriz de Vandermonde e, portanto, desde que  $y_0, y_1, \dots, y_n$  sejam pontos distintos, tem-se que  $\det(A) \neq 0$  e, então, o sistema linear admite solução única. E conclui-se desta forma que o polinômio é único.

Logo, foi demonstrado o seguinte teorema:

**Teorema A.1.** *Existe um único polinômio  $p_n(y)$ , de grau menor ou igual a  $n$ , tal que:  $p_n(y_k) = f(y_k), k = 0, 1, \dots, n$ , desde que  $y_k \neq y_j, j \neq k$ .*

### A.3 Forma de Lagrange para se obter o Polinômio Interpolador

Conforme exposto na Seção A.2, existem várias formas de se obter o polinômio  $p_n(y)$ . Nesta seção será mostrada a Forma de Lagrange, que foi a abordagem utilizada para a obtenção dos polinômios utilizados neste trabalho.

Sejam  $y_0, y_1, \dots, y_n$ ,  $(n + 1)$  pontos distintos e suas respectivas imagens  $f(y_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Seja  $p_n(y)$  o polinômio de grau menor ou igual a  $n$  que interpola  $f$  em  $y_0, y_1, \dots, y_n$ . Pode-se representar  $p_n(y)$  na forma  $p_n(y) = f(y_0)L_0(y) + f(y_1)L_1(y) + \dots + f(y_n)L_n(y)$ , em que os polinômios  $L_k(y)$ ,  $k = 0, \dots, n$  são de grau  $n$ . Para cada  $i$ , deseja-se que a seguinte condição seja satisfeita:

$$p_n(y_i) = f(y_0)L_0(y_i) + f(y_1)L_1(y_i) + \dots + f(y_n)L_n(y_i) = f(y_i). \quad (\text{A.5})$$

A forma mais simples de se satisfazer esta condição é impor que:

$$L_k(y_k) = \begin{cases} 0, & k \neq i \\ 1, & k = i. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Para tal, define-se  $L_k(y)$  por:

$$L_k(y) = \frac{(y - y_0)(y - y_1) \dots (y - y_{k-1})(y - y_{k+1}) \dots (y - y_n)}{(y_k - y_0)(y_k - y_1) \dots (y_k - y_{k-1})(y_k - y_{k+1}) \dots (y_k - y_n)}. \quad (\text{A.7})$$

Verifica-se que  $L_k(y)$  satisfaz A.6:

$$\begin{cases} L_k(y_k) = 1 \\ L_k(y_i) = 0, \text{ se } i \neq k. \end{cases}$$

Além disso, como o numerador de  $L_k(y)$  é um produto de  $n$  fatores da forma  $(y - y_i)$ ,  $i = 0, \dots, n, i \neq k$ , então  $L_k(y)$  é um polinômio de grau  $n$  e, assim,  $p_n(y)$  é um polinômio de grau menor ou igual a  $n$ . Logo, para  $y = y_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  tem-se:

$$p_n(y_i) = \sum_{k=0}^n f(y_k)L_k(y_k) = f(y_i)L_i(y_i) = f(y_i), \quad (\text{A.8})$$

o que satisfaz A.5.

Então, a forma de Lagrange para o polinômio interpolador é dado por:

$$p_n(y) = \sum_{k=0}^n f(y_k) L_k(y), \quad (\text{A.9})$$

em que

$$L_k(y) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (y - y_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (y_k - y_j)}.$$

# APÊNDICE B – Banco de Dados dos Sistemas Elétricos Utilizados

Neste apêndice encontram-se os dados dos sistemas elétricos utilizados. Todos os dados encontram-se em  $pu$ , com exceção dos ângulos das tensões nas barras,  $\theta_i$ , que encontram-se em radianos. Em tipo da barra, nas tabelas referentes aos dados das barra, são denotadas por barras do tipo 0 as barras de carga, barras do tipo 1 as barras de controle de reativos, e barras do tipo 2 as barras de geração.

## B.1 Sistema IEEE 14 Barras

Tabela B.1 – Dados de barra do sistema elétrico IEEE 14 barras.

Barra	Tipo	$V$	$\theta$	$P^G$	$Q^G$	$Q$	$\bar{Q}$	$P^C$	$Q^C$	$b^{sh}$
1	2	1,060	0,0000	0	0	-99,99	99,99	0,000	0,000	
2	1	1,045	-0,0873	0	0	-0,40	0,50	-0,183	0,127	
3	1	1,010	-0,2269	0	0	0,00	0,20	0,942	0,190	
4	0	1,019	-0,1745	0	0			0,478	-0,039	
5	0	1,020	-0,1536	0	0			0,076	0,016	
6	1	1,070	-0,2443	0	0	-0,06	0,24	0,112	0,075	
7	0	1,062	-0,2269	0	0			0,000	0,000	
8	1	1,090	-0,2269	0	0	-0,06	0,24	0,000	0,000	
9	0	1,056	-0,2618	0	0			0,295	0,166	0,19
10	0	1,051	-0,2618	0	0			0,090	0,058	
11	0	1,057	-0,2618	0	0			0,035	0,018	
12	0	1,055	-0,2618	0	0			0,061	0,016	
13	0	1,050	-0,2618	0	0			0,135	0,058	
14	0	1,036	-0,2792	0	0			0,149	0,050	

Tabela B.2 – Dados de linhas do sistema elétrico IEEE 14 barras.

Linha		$g$	$b$	$b^{sh}$	$t$
1	2	4,9991	-15,2631	0,0264	
1	5	1,0259	-4,2350	0,0246	
2	3	1,1350	-4,7819	0,0219	
2	4	1,6860	-5,1158	0,0187	
2	5	1,7011	-5,1939	0,0170	
3	4	1,9860	-5,0688	0,0173	
4	5	6,8410	-21,5786	0,0064	
4	7	0,0000	-4,7819	0,0000	1,0225
4	9	0,0000	-1,7980	0,0000	1,0320
5	6	0,0000	-3,9679	0,0000	1,0730
6	11	1,9550	-4,0941	0,0000	
6	12	1,5260	-3,1760	0,0000	
6	13	3,0989	-6,1028	0,0000	
7	8	0,0000	-5,6770	0,0000	
7	9	0,0000	-9,0901	0,0000	
9	10	3,9020	-10,3654	0,0000	

9	14	1,4240	-3,0291	0,0000
10	11	1,8809	-4,4029	0,0000
12	13	2,4890	-2,2520	0,0000
13	14	1,1370	-2,3150	0,0000

## B.2 Sistema IEEE 30 Barras

Tabela B.3 – Dados de barra do sistema elétrico IEEE 30 barras.

Barra	Tipo	$V$	$\theta$	$P^G$	$Q^G$	$Q$	$\bar{Q}$	$P^C$	$Q^C$	$b^{sh}$
1	2	1,053	0,0000	0	0	-99,99	99,99	0,000	0,000	
2	1	1,032	-0,0016	0	0	-0,40	0,50	-0,183	0,127	
3	0	1,018	-0,0024	0	0			0,024	0,012	
4	0	1,01	-0,0030	0	0			0,076	0,016	
5	1	1,01	-0,0044	0	0	-0,40	0,40	0,942	0,190	
6	0	1,004	-0,0035	0	0			0,000	0,000	
7	0	0,998	-0,0040	0	0			0,228	0,109	
8	1	1,01	-0,0037	0	0	-0,10	0,40	0,300	0,300	
9	0	1,017	-0,0045	0	0			0,000	0,000	
10	0	1,015	-0,0051	0	0			0,058	0,020	0,19
11	1	1,072	-0,0045	0	0	-0,06	0,24	0,000	0,000	
12	0	1,019	-0,0047	0	0			0,112	0,075	
13	1	1,057	-0,0047	0	0	-0,06	0,24	0,000	0,000	
14	0	1,005	-0,0051	0	0			0,062	0,016	
15	0	1,001	-0,0051	0	0			0,082	0,025	
16	0	1,01	-0,0051	0	0			0,035	0,018	
17	0	1,008	-0,0051	0	0			0,090	0,058	
18	0	0,994	-0,0052	0	0			0,032	0,009	
19	0	0,992	-0,0054	0	0			0,095	0,034	
20	0	0,997	-0,0052	0	0			0,022	0,007	
21	0	1,003	-0,0052	0	0			0,175	0,112	
22	0	1,004	-0,0051	0	0			0,000	0,000	
23	0	0,994	-0,0052	0	0			0,032	0,016	
24	0	0,994	-0,0052	0	0			0,087	0,067	0,043
25	0	1,001	-0,0051	0	0			0,000	0,000	
26	0	0,983	-0,0052	0	0			0,035	0,023	
27	0	1,013	-0,0049	0	0			0,000	0,000	
28	0	0,997	-0,0037	0	0			0,000	0,000	
29	0	0,993	-0,0054	0	0			0,024	0,009	
30	0	0,982	-0,0056	0	0			0,106	0,019	

Tabela B.4 – Dados de linhas do sistema elétrico IEEE 30 barras.

Linha		$g$	$b$	$b^{sh}$	$t$
1	2	5,2246	-15,6467	0,0132	
1	3	1,2437	-5,0960	0,0102	
2	4	1,7055	-5,1974	0,0092	
3	4	8,1954	-23,5309	0,0021	
2	5	1,1360	-4,7725	0,0104	
2	6	1,6861	-5,1165	0,0094	
4	6	6,4131	-22,3112	0,0023	
5	7	2,9540	-7,4493	0,0051	
6	7	3,5902	-11,0261	0,0043	
6	8	6,2893	-22,0126	0,0023	
6	9	0,0000	-4,8077	0,0000	0,9634
6	10	0,0000	-1,7986	0,0000	1,0460
9	11	0,0002	-4,8077	0,0000	

9	10	0,0008	-9,0909	0,0000	
4	12	0,0000	-3,9063	0,0000	0,9852
12	13	0,0000	-7,1429	0,0000	
12	14	1,5266	-3,1734	0,0000	
12	15	3,0954	-6,0973	0,0000	
12	16	1,9520	-4,1044	0,0000	
14	15	2,4910	-2,2509	0,0000	
16	17	1,8826	-4,3935	0,0000	
15	18	1,8077	-3,6914	0,0000	
18	19	3,0757	-6,2188	0,0000	
19	20	5,8824	-11,7647	0,0000	
10	20	1,7848	-3,9854	0,0000	
10	17	3,9560	-10,3174	0,0000	
10	21	5,1019	-10,9807	0,0000	
10	22	2,6193	-5,4008	0,0000	
21	22	16,7746	-34,1277	0,0000	
15	23	1,9683	-3,9761	0,0000	
22	24	2,5405	-3,9544	0,0000	
23	24	1,4614	-2,9892	0,0000	
24	25	1,3099	-2,2876	0,0000	
25	26	1,2165	-1,8171	0,0000	
25	27	1,9693	-3,7602	0,0000	
28	27	0,0000	-2,5253	0,0000	1,0438
27	29	0,9955	-1,8810	0,0000	
27	30	0,6875	-1,2940	0,0000	
29	30	0,9121	-1,7234	0,0000	
8	28	1,4440	-4,5408	0,0107	
6	28	4,3628	-15,4636	0,0033	

### B.3 Sistema IEEE 118 Barras

Tabela B.5 – Dados de barra do sistema elétrico IEEE 118 barras.

Barra	Tipo	$V$	$\theta$	$P^G$	$Q^G$	$Q$	$\bar{Q}$	$P^C$	$Q^C$	$b^{sh}$
1	1	0,955	0,0000	0,000	0	-0,05	0,15	0,510	0,270	
2	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,200	0,090	
3	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,390	0,100	
4	1	0,998	0,0000	-0,090	0	-3,00	3,00	0,300	0,120	
5	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,000	0,000	-0,40
6	1	0,990	0,0000	0,000	0	-0,13	0,50	0,520	0,220	
7	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,190	0,020	
8	1	1,015	0,0000	-0,280	0	-3,00	3,00	0,000	0,000	
9	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,000	0,000	
10	1	1,050	0,0000	4,500	0	-1,47	2,00	0,000	0,000	
11	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,700	0,230	
12	1	0,990	0,0000	0,850	0	-0,35	1,20	0,470	0,100	
13	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,340	0,160	
14	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,140	0,010	
15	1	0,970	0,0000	0,000	0	-0,10	0,30	0,900	0,300	
16	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,250	0,100	
17	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,110	0,030	
18	1	0,973	0,0000	0,000	0	-0,16	0,50	0,600	0,340	
19	1	0,962	0,0000	0,000	0	-0,08	0,24	0,450	0,250	
20	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,180	0,030	
21	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,140	0,080	
22	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,100	0,050	
23	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,070	0,030	
24	1	0,992	0,0000	-0,130	0	-3,00	3,00	0,000	0,000	

25	1	1,050	0,0000	2,200	0	-0,47	1,40	0,000	0,000	
26	1	1,015	0,0000	3,140	0	-10,00	10,00	0,000	0,000	
27	1	0,968	0,0000	-0,090	0	-3,00	3,00	0,620	0,130	
28	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,170	0,070	
29	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,240	0,040	
30	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,000	0,000	
31	1	0,967	0,0000	0,070	0	-3,00	3,00	0,430	0,270	
32	1	0,963	0,0000	0,000	0	-0,14	0,42	0,590	0,230	
33	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,230	0,090	
34	1	0,984	0,0000	0,000	0	-0,08	0,24	0,590	0,260	0,14
35	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,330	0,090	
36	1	0,980	0,0000	0,000	0	-0,08	0,24	0,310	0,170	
37	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,000	0,000	-0,25
38	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,000	0,000	
39	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,270	0,110	
40	1	0,970	0,0000	-0,460	0	-3,00	3,00	0,200	0,230	
41	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,370	0,100	
42	1	0,985	0,0000	-0,590	0	-3,00	3,00	0,370	0,230	
43	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,180	0,070	
44	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,160	0,080	0,10
45	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,530	0,220	0,10
46	1	1,005	0,0000	0,190	0	-1,00	1,00	0,280	0,100	0,10
47	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,340	0,000	
48	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,200	0,110	0,15
49	1	1,025	0,0000	2,040	0	-0,85	2,10	0,870	0,300	
50	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,170	0,040	
51	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,170	0,080	
52	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,180	0,050	
53	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,230	0,110	
54	1	0,955	0,0000	0,480	0	-3,00	3,00	1,130	0,320	
55	1	0,952	0,0000	0,000	0	-0,08	0,23	0,630	0,220	
56	1	0,954	0,0000	0,000	0	-0,08	0,15	0,840	0,180	
57	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,120	0,030	
58	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,120	0,030	
59	1	0,985	0,0000	1,550	0	-0,60	1,80	2,770	1,130	
60	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,780	0,030	
61	1	0,995	0,0000	1,600	0	-1,00	3,00	0,000	0,000	
62	1	0,998	0,0000	0,000	0	-0,20	0,20	0,770	0,140	
63	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,000	0,000	
64	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,000	0,000	
65	1	1,005	0,0000	3,910	0	-0,67	2,00	0,000	0,000	
66	1	1,050	0,0000	3,920	0	-0,67	2,00	0,390	0,180	
67	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,280	0,070	
68	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,000	0,000	
69	2	1,035	0,5323	0,164	0	-3,00	3,00	0,000	0,000	
70	1	0,984	0,0000	0,000	0	-0,10	0,32	0,660	0,200	
71	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,000	0,000	
72	1	0,980	0,0000	-0,120	0	-1,00	1,00	0,000	0,000	
73	1	0,991	0,0000	-0,060	0	-1,00	1,00	0,000	0,000	
74	1	0,958	0,0000	0,000	0	-0,06	0,09	0,680	0,270	0,12
75	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,470	0,110	
76	1	0,943	0,0000	0,000	0	-0,08	0,23	0,680	0,360	
77	1	1,006	0,0000	0,000	0	-0,20	0,70	0,610	0,280	
78	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,710	0,260	
79	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,390	0,320	0,20
80	1	1,040	0,0000	4,770	0	-1,65	2,80	1,300	0,260	
81	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,000	0,000	
82	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,540	0,270	0,20
83	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,200	0,100	0,10
84	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,110	0,070	

85	1	0,985	0,0000	0,000	0	-0,08	0,23	0,240	0,150	
86	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,210	0,100	
87	1	1,015	0,0000	0,040	0	-1,00	10,00	0,000	0,000	
88	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,480	0,100	
89	1	1,005	0,0000	6,070	0	-2,10	3,00	0,000	0,000	
90	1	0,985	0,0000	-0,850	0	-3,00	3,00	0,780	0,420	
91	1	0,980	0,0000	-0,100	0	-1,00	1,00	0,000	0,000	
92	1	0,990	0,0000	0,000	0	-0,03	0,09	0,650	0,100	
93	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,120	0,070	
94	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,300	0,160	
95	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,420	0,310	
96	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,380	0,150	
97	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,150	0,090	
98	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,340	0,080	
99	1	1,010	0,0000	-0,420	0	-1,00	1,00	0,000	0,000	
100	1	1,017	0,0000	2,520	0	-0,50	1,55	0,370	0,180	
101	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,220	0,150	
102	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,050	0,030	
103	1	1,010	0,0000	0,400	0	-0,15	0,40	0,230	0,160	
104	1	0,971	0,0000	0,000	0	-0,08	0,23	0,380	0,250	
105	1	0,965	0,0000	0,000	0	-0,08	0,23	0,310	0,260	0,20
106	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,430	0,160	
107	1	0,952	0,0000	-0,220	0	-2,00	2,00	0,280	0,120	0,06
108	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,020	0,010	
109	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,080	0,030	
110	1	0,973	0,0000	0,000	0	-0,08	0,23	0,390	0,300	0,06
111	1	0,980	0,0000	0,360	0	-1,00	10,00	0,000	0,000	
112	1	0,975	0,0000	-0,430	0	-1,00	10,00	0,250	0,130	
113	1	0,993	0,0000	-0,060	0	-1,00	2,00	0,000	0,000	
114	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,080	0,030	
115	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,220	0,070	
116	1	1,005	0,0000	-1,840	0	-10,00	10,00	0,000	0,000	
117	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,200	0,080	
118	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,330	0,150	

Tabela B.6 – Dados de linhas do sistema elétrico IEEE 118 barras.

Linha	$g$	$b$	$b^{sh}$	$t$
1	2	2,7803	-9,1667	0,0127
1	3	6,5677	-21,5867	0,0054
4	5	26,7698	-118,9768	0,0010
3	5	1,9682	-8,8201	0,0142
5	6	3,8919	-17,6609	0,0071
6	7	10,1366	-45,8352	0,0028
8	9	2,5641	-32,5851	0,5810
8	5	0,0000	-37,4532	0,0000
9	10	2,4914	-30,8547	0,6150
4	11	4,0424	-13,3069	0,0087
5	11	4,0092	-13,4694	0,0087
11	12	14,0822	-46,7814	0,0025
2	12	4,5123	-14,8640	0,0079
3	12	1,7321	-5,7260	0,0203
7	12	6,9921	-27,6432	0,0044
11	13	3,8179	-12,5152	0,0094
12	14	3,9372	-12,9470	0,0091
13	15	1,1399	-3,7446	0,0313
14	15	1,4315	-4,6914	0,0251
12	16	2,8629	-11,2627	0,0107
15	17	6,3342	-20,9700	0,0222

16	17	1,3160	-5,2207	0,0233	
17	18	4,5530	-18,6930	0,0065	
18	19	4,3820	-19,2885	0,0057	
19	20	1,7593	-8,1681	0,0149	
15	19	7,0740	-23,2262	0,0050	
20	21	2,4261	-11,2556	0,0108	
21	22	2,1227	-9,8519	0,0123	
22	23	1,2930	-6,0112	0,0202	
23	24	5,1865	-18,9021	0,0249	
23	25	2,3482	-12,0421	0,0432	
26	25	0,0000	-26,1780	0,0000	1,04167
25	27	1,1530	-5,9100	0,0882	
27	28	2,4886	-11,1400	0,0108	
28	29	2,5068	-9,9744	0,0119	
30	17	0,0000	-25,7732	0,0000	1,04167
8	30	1,6806	-19,6979	0,2570	
26	30	1,0724	-11,5282	0,4540	
17	31	1,7768	-5,8591	0,0200	
29	31	8,9091	-27,3046	0,0042	
23	32	2,2169	-8,0635	0,0587	
31	32	2,8139	-9,3010	0,0125	
27	32	3,6789	-12,1292	0,0096	
15	33	2,2459	-7,3525	0,0160	
19	34	1,1280	-3,7051	0,0316	
35	36	20,2057	-93,6811	0,0013	
35	37	4,2453	-19,1811	0,0066	
33	37	1,8962	-6,4881	0,0183	
34	36	10,9581	-33,7561	0,0028	
34	37	27,3339	-98,8225	0,0049	
38	37	0,0000	-26,6667	0,0000	1,06952
37	39	2,6169	-8,6415	0,0135	
37	40	1,8683	-5,2929	0,0210	
30	38	1,5661	-18,3851	0,2110	
39	40	4,6014	-15,1295	0,0078	
40	41	5,6159	-18,8618	0,0061	
40	42	1,5177	-5,0042	0,0233	
41	42	2,0597	-6,7819	0,0172	
43	44	0,9512	-3,8393	0,0303	
34	43	1,3784	-5,6102	0,0211	
44	45	2,5987	-10,4527	0,0112	
45	46	2,0013	-6,7843	0,0166	
46	47	2,1624	-7,2270	0,0158	
46	48	1,5280	-4,8051	0,0236	
47	49	4,4720	-14,6334	0,0080	
42	49	0,6533	-2,9514	0,0430	
42	49	0,6533	-2,9514	0,0430	
45	49	1,7416	-4,7359	0,0222	
48	49	6,2355	-17,5918	0,0063	
49	50	4,1929	-11,8092	0,0094	
49	51	2,2999	-6,4834	0,0171	
51	52	5,2461	-15,1956	0,0070	
52	53	1,4274	-5,7626	0,0203	
53	54	1,6885	-7,8327	0,0155	
49	54	0,8216	-3,2527	0,0369	
49	54	0,9422	-3,1551	0,0365	
54	55	3,1983	-13,3798	0,0101	
54	56	28,5452	-96,8498	0,0037	
55	56	19,4429	-59,9159	0,0019	
56	57	3,2642	-9,1930	0,0121	
50	57	2,3462	-6,6328	0,0166	

56	58	3,2642	-9,1930	0,0121	
51	58	4,3815	-12,3542	0,0089	
54	59	0,9127	-4,1609	0,0299	
56	59	1,1818	-3,5956	0,0285	
56	59	1,2632	-3,7597	0,0268	
55	59	0,9710	-4,4206	0,0282	
59	60	1,4390	-6,5820	0,0188	
59	61	1,3913	-6,3624	0,0194	
60	61	13,7559	-71,4248	0,0073	
60	62	3,7290	-17,0077	0,0073	
61	62	5,5368	-25,3883	0,0049	
63	59	0,0000	-25,9067	0,0000	1,04167
63	64	4,2195	-49,6413	0,1080	
64	61	0,0000	-37,3134	0,0000	1,01523
38	65	0,9181	-10,0582	0,5230	
64	65	2,9369	-32,8500	0,1900	
49	66	2,0525	-10,4794	0,0124	
49	66	2,0525	-10,4794	0,0124	
62	66	0,9670	-4,3734	0,0289	
62	67	1,7973	-8,1507	0,0155	
65	66	0,0000	-27,0270	0,0000	1,06952
66	67	2,0733	-9,3947	0,0134	
65	68	5,4272	-62,0251	0,3190	
47	69	1,0012	-3,2955	0,0355	
49	69	0,8589	-2,8253	0,0414	
68	69	0,0000	-27,0270	0,0000	1,06952
69	70	1,7617	-7,4579	0,0610	
24	70	0,0130	-2,4301	0,0510	
70	71	6,5785	-26,5383	0,0044	
24	72	1,1962	-4,8042	0,0244	
71	72	1,2969	-5,2342	0,0222	
71	73	4,0714	-21,2462	0,0059	
70	74	2,0982	-6,9226	0,0168	
70	75	1,9712	-6,4939	0,0180	
69	75	2,4509	-7,3831	0,0620	
74	75	6,8347	-22,5599	0,0052	
76	77	1,8597	-6,1989	0,0184	
69	77	2,7699	-9,0536	0,0519	
75	77	1,3793	-4,5878	0,0249	
77	78	22,5922	-73,7218	0,0063	
78	79	8,7914	-39,0019	0,0032	
77	80	6,4363	-18,3625	0,0236	
77	80	2,4728	-8,8314	0,0114	
79	80	3,0003	-13,5397	0,0094	
68	81	4,1370	-49,1568	0,4040	
81	80	0,0000	-27,0270	0,0000	1,06952
77	82	3,6501	-10,4481	0,0409	
82	83	7,6070	-24,9265	0,0190	
83	84	2,9301	-6,1884	0,0129	
83	85	1,8103	-6,2308	0,0174	
84	85	6,0149	-12,7668	0,0062	
85	86	2,1401	-7,5211	0,0138	
86	87	0,6459	-4,7335	0,0223	
85	88	1,8512	-9,4409	0,0138	
85	89	0,7836	-5,6721	0,0235	
88	89	2,6413	-13,5293	0,0097	
89	90	1,3622	-4,9438	0,0264	
89	90	2,2653	-9,4893	0,0530	
90	91	3,3272	-10,9508	0,0107	
89	92	3,7383	-19,0691	0,0274	

89	92	1,4808	-5,9570	0,0207
91	92	2,1892	-7,1956	0,0163
92	93	3,2838	-10,7934	0,0109
92	94	1,7634	-5,7923	0,0203
93	94	3,8084	-12,5010	0,0094
94	95	6,4146	-21,0905	0,0056
80	96	1,0351	-5,2920	0,0247
82	96	5,2744	-17,2557	0,0272
94	96	3,2507	-10,5012	0,0115
80	97	2,0202	-10,3108	0,0127
80	98	1,9460	-8,8304	0,0143
80	99	1,0203	-4,6295	0,0273
92	100	0,7103	-3,2338	0,0386
94	100	4,8359	-15,7573	0,0302
95	96	5,2063	-16,6540	0,0074
96	97	2,1275	-10,8835	0,0120
98	100	1,1809	-5,3247	0,0238
99	100	2,5960	-11,7254	0,0108
100	101	1,6593	-7,5597	0,0164
92	102	3,7545	-17,0630	0,0073
101	102	1,8708	-8,5177	0,0147
100	103	5,3116	-17,4288	0,0268
100	104	1,0332	-4,6735	0,0271
103	104	1,7093	-5,8103	0,0204
103	105	1,8279	-5,5520	0,0204
100	106	1,0784	-4,0819	0,0310
104	105	6,4839	-24,7569	0,0049
105	106	4,3913	-17,1576	0,0072
105	107	1,4601	-5,0416	0,0236
105	108	4,6414	-12,5016	0,0092
106	107	1,4601	-5,0416	0,0236
108	109	11,1739	-30,6484	0,0038
103	110	1,1367	-5,2706	0,0231
109	110	4,2254	-11,5818	0,0101
110	111	3,5574	-12,2084	0,0100
110	112	5,2485	-13,5994	0,0310
17	113	9,2029	-30,4403	0,0038
32	113	1,3669	-4,5120	0,0259
32	114	3,4371	-15,5817	0,0081
27	115	2,8473	-12,8651	0,0099
114	115	20,2732	-91,6703	0,0014
68	116	17,7515	-242,6036	0,0820
12	117	1,5907	-6,7690	0,0179
75	118	5,7452	-19,0581	0,0060
76	118	5,0800	-16,8509	0,0068

## B.4 Sistema IEEE 300 Barras

Tabela B.7 – Dados de barra do sistema elétrico IEEE 300 barras.

Barra	Tipo	$V$	$\theta$	$P^G$	$Q^G$	$Q$	$\overline{Q}$	$P^C$	$Q^C$	$b^{sh}$
1	0	1,028	0,1047	0,000	0	0	0	0,9	0,49	
2	0	1,035	0,1396	0,000	0	0	0	0,56	0,15	
3	0	0,997	0,1222	0,000	0	0	0	0,2	0	
4	0	1,03	0,0873	0,000	0	0	0	0	0	
5	0	1,019	0,0873	0,000	0	0	0	3,53	1,3	
6	0	1,031	0,1222	0,000	0	0	0	1,2	0,41	
7	0	0,993	0,1047	0,000	0	0	0	0	0	

8	1	1,015	0,0349	-0,050	0	-0,1	0,1	0,58	0,14
9	0	1,003	0,0524	0,000	0	0	0	0,96	0,43
10	1	1,02	0,0175	-0,050	0	-0,2	0,2	1,48	0,33
11	0	1,005	0,0349	0,000	0	0	0	0,83	0,21
12	0	0,997	0,0873	0,000	0	0	0	0	0
13	0	0,997	-0,0175	0,000	0	0	0	0,58	0,1
14	0	0,999	-0,0873	0,000	0	0	0	1,6	0,6
15	0	1,034	-0,1571	0,000	0	0	0	1,27	0,23
16	0	1,031	-0,0524	0,000	0	0	0	0	0
17	0	1,064	-0,2269	0,000	0	0	0	5,61	2,2
18	0	0,981	0,0175	0,000	0	0	0	0	0
19	1	1,001	-0,0349	-0,100	0	-0,2	0,2	5,95	1,2
20	0	0,975	0,0349	0,000	0	0	0	0,77	0,01
21	0	0,996	-0,0349	0,000	0	0	0	0,81	0,23
22	0	1,05	0,0698	0,000	0	0	0	0,21	0,07
23	0	1,005	0,1047	0,000	0	0	0	0	0
24	0	1,023	0,0175	0,000	0	0	0	0,45	0,12
25	0	0,998	-0,0349	0,000	0	0	0	0,28	0,09
26	0	0,975	-0,0873	0,000	0	0	0	0,69	0,13
27	0	1,024	-0,2094	0,000	0	0	0	0,55	0,06
28	0	1,041	-0,1396	0,000	0	0	0	0	0
29	0	0,975	-0,4538	0,000	0	0	0	0	0
30	0	1,001	-0,4014	0,000	0	0	0	0	0
31	0	1,02	-0,1920	0,000	0	0	0	0,85	0,32
32	0	1,02	-0,2269	0,000	0	0	0	1,55	0,18
33	0	1,053	-0,1047	0,000	0	0	0	0	0
34	0	1,021	-0,2269	0,000	0	0	0	0,46	-0,21
35	0	1,029	-0,1745	0,000	0	0	0	0,86	0
36	0	1,044	-0,1222	0,000	0	0	0	0	0
37	0	1	-0,2967	0,000	0	0	0	0,39	0,09
38	0	1,008	-0,2967	0,000	0	0	0	1,95	0,29
39	0	1,021	-0,2618	0,000	0	0	0	0	0
40	0	1,034	-0,2094	0,000	0	0	0	0	0
41	0	0,977	-0,4014	0,000	0	0	0	0,58	0,12
42	0	1,001	-0,2793	0,000	0	0	0	0,41	0,19
43	0	1,047	-0,0524	0,000	0	0	0	0,92	0,26
44	0	1,025	-0,1396	0,000	0	0	0	-0,05	0,05
45	0	0,997	-0,2094	0,000	0	0	0	0,61	0,28
46	0	0,995	-0,3142	0,000	0	0	0	0,69	0,03
47	0	1,004	-0,2793	0,000	0	0	0	0,1	0,01
48	0	1,014	-0,2094	0,000	0	0	0	0,22	0,1
49	0	1,033	-0,1396	0,000	0	0	0	0,98	0,2
50	0	0,991	-0,1047	0,000	0	0	0	0,14	0,01
51	0	0,978	-0,0873	0,000	0	0	0	2,18	1,06
52	0	1,024	-0,1745	0,000	0	0	0	0	0
53	0	0,99	-0,0524	0,000	0	0	0	2,27	1,1
54	0	1,016	-0,0175	0,000	0	0	0	0	0
55	1	0,958	-0,3142	0,000	0	-0,25	0,25	0,7	0,3
56	0	0,948	-0,2269	0,000	0	0	0	0	0
57	0	0,962	-0,4538	0,000	0	0	0	0	0
58	0	0,951	-0,6109	0,000	0	0	0	0,56	0,2
59	0	0,979	-0,5236	0,000	0	0	0	1,16	0,38
60	0	0,969	-0,4712	0,000	0	0	0	0,57	0,19
61	0	0,977	-0,4538	0,000	0	0	0	2,24	0,71
62	0	0,996	-0,3840	0,000	0	0	0	0	0
63	1	0,963	-0,4712	0,000	0	-0,12	0,35	2,08	1,07
64	0	0,983	-0,4363	0,000	0	0	0	0,74	0,28
65	0	0,99	-0,4189	0,000	0	0	0	0	0
66	0	0,981	-0,4363	0,000	0	0	0	0,48	0,14
67	0	0,987	-0,4363	0,000	0	0	0	0,28	0,07

68	0	1,034	-0,3316	0,000	0	0	0	0	0	
69	1	1,024	-0,2967	3,750	0	-2,4	2,4	0,37	0,13	
70	0	0,987	-0,3142	0,000	0	0	0	0	0	
71	0	0,99	-0,2443	0,000	0	0	0	0	0	
72	0	0,992	-0,1396	0,000	0	0	0	0	0	
73	0	1,015	-0,3665	0,000	0	0	0	0	0	
74	0	1,031	-0,1920	0,000	0	0	0	0,44	0	
75	0	1,027	-0,1920	0,000	0	0	0	0,66	0	
76	1	1,052	-0,1571	1,550	0	-0,11	0,96	0,17	0	
77	1	1,052	-0,1047	2,900	0	-1,53	1,53	0,16	0	
78	0	0,992	-0,1571	0,000	0	0	0	0,6	0	
79	0	1,018	-0,2269	0,000	0	0	0	0,4	0	
80	1	1	-0,2618	0,680	0	-0,3	0,56	0,67	0	
81	0	0,989	-0,3491	0,000	0	0	0	0,83	0	
82	0	1,006	-0,2443	0,000	0	0	0	0	0	
83	0	1	-0,2618	0,000	0	0	0	0,78	0	
84	0	1,028	-0,2094	0,000	0	0	0	0,32	0	
85	0	0,995	-0,2967	0,000	0	0	0	0,09	0	
86	0	1,022	-0,2269	0,000	0	0	0	0,5	0	
87	0	1,009	-0,2793	0,000	0	0	0	0,05	0	
88	1	0,99	-0,3491	1,170	0	-0,24	0,77	1,12	0	
89	0	0,974	-0,4538	0,000	0	0	0	0,31	0	
90	0	0,972	-0,4363	0,000	0	0	0	0,63	0	
91	0	0,972	-0,5061	0,000	0	0	0	0,2	0	
92	0	0,97	-0,4363	0,000	0	0	0	0,26	0	
93	0	0,974	-0,5061	0,000	0	0	0	0,18	0	
94	0	0,96	-0,2443	0,000	0	0	0	0	0	
95	0	1,024	-0,2269	0,000	0	0	0	0	0	
96	0	0,934	-0,0873	0,000	0	0	0	0	0	3,25
97	0	0,929	-0,0698	0,000	0	0	0	0,14	6,5	
98	1	1,043	0,0873	19,300	0	-5	15	0	0	
99	0	0,958	-0,1571	0,000	0	0	0	7,77	2,15	0,55
100	0	0,987	-0,2269	0,000	0	0	0	5,35	0,55	
101	0	0,972	-0,2443	0,000	0	0	0	2,29	0,12	
102	0	1	-0,3142	0,000	0	0	0	0,78	0,01	
103	1	1,023	-0,2269	2,400	0	-0,6	1,2	2,76	0,59	
104	1	1,01	-0,3142	0,000	0	-0,25	2	5,15	0,83	
105	0	0,997	-0,2269	0,000	0	0	0	0,58	0,05	
106	0	1	-0,1920	0,000	0	0	0	3,81	0,37	
107	0	1,002	-0,0873	0,000	0	0	0	0	0	
108	0	1,002	-0,0698	0,000	0	0	0	0	0	
109	0	1,019	0,1047	0,000	0	0	0	0	0	
110	0	0,986	0,1047	0,000	0	0	0	0	0	
111	0	1,004	0,0524	0,000	0	0	0	0	0	
112	0	1,001	-0,0873	0,000	0	0	0	0	0	
113	0	1,021	-0,1396	0,000	0	0	0	0	0	
114	0	1,019	-0,1222	0,000	0	0	0	1,69	0,42	
115	0	1,047	0,0349	0,000	0	0	0	0,55	0,18	
116	0	1,047	-0,0175	0,000	0	0	0	2,74	1	
117	1	1,054	-0,1047	-1,920	0	-1,25	3,5	8,27	1,35	
118	0	1,011	-0,0698	0,000	0	0	0	5,95	0,83	
119	0	1,042	-0,0524	0,000	0	0	0	3,88	1,15	
120	1	1,05	0	2,810	0	-0,5	0,75	1,45	0,58	
121	0	1,015	-0,0524	0,000	0	0	0	0,56	0,24	
122	1	1,043	0,0698	6,960	0	-1	3	0,89	0,35	
123	0	1,016	-0,0175	0,000	0	0	0	0	0	
124	0	1,008	0	0,000	0	0	0	0,24	0,14	
125	1	1,052	0,0698	0,840	0	-0,15	0,35	0	0	
126	1	1,052	0,1396	2,170	0	-0,5	1	0	0	
127	0	1,057	0	0,000	0	0	0	0,63	0,25	

128	1	1,073	0,0873	1,030	0	-0,25	0,5	0	0	
129	0	0,986	0,1047	0,000	0	0	0	0	0	
130	0	1,004	0,0698	0,000	0	0	0	0	0	
131	1	1,053	0,1571	3,720	0	-0,5	1,75	0,17	0,09	
132	1	1,043	0,1745	2,160	0	-0,5	0,9	0	0	
133	0	0,966	-0,0349	0,000	0	0	0	0,7	0,05	0,34
134	0	1,017	0,1222	0,000	0	0	0	2	0,5	
135	1	0,962	0,0873	0,000	0	-0,1	0,15	0,75	0,5	
136	0	0,984	-0,2094	0,000	0	0	0	1,23	-0,24	
137	0	0,998	-0,192	0,000	0	0	0	0	0	
138	0	0,986	-0,1745	0,000	0	0	0	0,33	0,16	
139	0	0,999	-0,2269	0,000	0	0	0	0	0	
140	0	1,036	0,1571	0,000	0	0	0	0,35	0,15	
141	0	0,991	0,3142	0,000	0	0	0	0,85	0,24	
142	0	1,041	0,0524	0,000	0	0	0	0	0	
143	0	0,983	0,1745	0,000	0	0	0	0	0	-2,12
144	0	1	0,4538	0,000	0	0	0	0	0	
145	0	0,997	0,5236	0,000	0	0	0	0	0	-1,03
146	0	0,971	-0,1222	0,000	0	0	0	3	0,96	
147	0	1,002	-0,0873	0,000	0	0	0	0	0	
148	0	0,987	-0,1222	0,000	0	0	0	0	0	
149	1	0,929	0	2,050	0	-0,4	0,9	4,82	2,05	
150	1	0,982	-0,1745	0,000	0	-0,5	1,5	7,64	2,91	
151	0	1,024	-0,1047	0,000	0	0	0	0,26	0	
152	0	0,983	-0,2269	0,000	0	0	0	1,63	0,43	0,53
153	0	1,062	-0,0524	0,000	0	0	0	0	0	
154	0	0,972	-0,1222	0,000	0	0	0	1,76	0,83	
155	1	1,052	0,0873	2,280	0	-0,45	0,9	0,05	0,04	
156	1	1,007	0,0175	0,840	0	-0,15	0,35	0,28	0,12	
157	0	0,939	-0,1222	0,000	0	0	0	4,27	1,74	
158	0	0,969	-0,1571	0,000	0	0	0	0,74	0,29	0,45
159	0	0,979	-0,0524	0,000	0	0	0	0,69	0,49	
160	0	1,051	-0,0175	0,000	0	0	0	0,73	0	
161	0	1,044	-0,0698	0,000	0	0	0	2,41	0,89	
162	0	0,971	0,1222	0,000	0	0	0	0,4	0,04	
163	0	1,038	-0,1222	0,000	0	0	0	1,37	0,17	
164	1	1,052	-0,0698	2,000	0	-0,5	0,8	0	0	
165	1	1,065	0,0349	12,000	0	-1	4	0,6	0,24	
166	1	1,065	0,0175	12,000	0	-1	4	0,6	0,24	
167	0	1,053	-0,0175	0,000	0	0	0	1,83	0,44	
168	0	0,997	-0,4538	0,000	0	0	0	0,07	0,02	
169	1	1,055	-0,3665	4,750	0	-3	3	0	0	-1,5
170	1	1,043	0,2094	19,730	0	-10	10	4,89	0,53	
171	0	0,937	-0,192	0,000	0	0	0	8	0,72	
172	0	0,989	-0,4538	0,000	0	0	0	0	0	
173	0	1,048	-0,3316	0,000	0	0	0	0	0	
174	0	1,035	-0,3665	0,000	0	0	0	0	0	
175	0	0,969	-0,4363	0,000	0	0	0	0,1	0,03	
176	0	0,99	-0,4189	0,000	0	0	0	0,43	0,14	
177	1	1,014	-0,3665	4,240	0	-2,6	2,6	0,64	0,21	
178	0	0,952	-0,4538	0,000	0	0	0	0,35	0,12	
179	0	0,954	-0,4538	0,000	0	0	0	0,27	0,12	
180	0	0,969	-0,4712	0,000	0	0	0	0,41	0,14	
181	0	0,99	-0,4363	0,000	0	0	0	0,38	0,13	
182	0	1,003	-0,384	0,000	0	0	0	0,42	0,14	
183	0	0,971	-0,4538	0,000	0	0	0	0,72	0,24	
184	0	0,983	-0,4538	0,000	0	0	0	0	-0,05	
185	0	0,999	-0,4712	0,000	0	0	0	0,12	0,02	
186	0	1,013	-0,4712	0,000	0	0	0	-0,21	-0,14	
187	0	0,992	-0,4538	0,000	0	0	0	0,07	0,02	

188	0	0,999	-0,4538	0,000	0	0	0	0,38	0,13	
189	0	0,978	-0,4189	0,000	0	0	0	0	0	
190	0	1,001	-0,4014	0,000	0	0	0	0,96	0,07	
191	0	1,013	-0,4014	0,000	0	0	0	0	0	
192	1	1,009	-0,2094	2,720	0	-1,5	1,5	0	0	
193	0	0,991	-0,3142	0,000	0	0	0	0,22	0,16	
194	0	0,986	-0,3491	0,000	0	0	0	0,47	0,26	
195	0	0,975	-0,4014	0,000	0	0	0	1,76	1,05	
196	0	1,021	-0,384	0,000	0	0	0	1	0,75	
197	0	1,007	-0,4014	0,000	0	0	0	1,31	0,96	
198	0	1,055	-0,3665	0,000	0	0	0	0	0	
199	1	1,008	-0,384	1,000	0	-0,6	0,6	2,85	1	
200	1	1	-0,384	4,500	0	-3,2	3,2	1,71	0,7	
201	1	1,049	-0,4014	2,500	0	-3	3	3,28	1,88	
202	0	0,996	-0,4014	0,000	0	0	0	4,28	2,32	
203	0	1	-0,384	0,000	0	0	0	1,73	0,99	
204	0	0,945	-0,192	0,000	0	0	0	4,1	0,4	
205	0	1,018	-0,384	0,000	0	0	0	0	0	
206	1	1	-0,4712	3,030	0	-3	3	5,38	3,69	
207	0	1,042	-0,3665	0,000	0	0	0	2,23	1,48	
208	0	1,049	-0,3491	0,000	0	0	0	0,96	0,46	
209	1	1,039	-0,2443	3,450	0	-2,5	2,5	0	0	
210	0	1,053	-0,3665	0,000	0	0	0	1,59	1,07	
211	0	1,041	-0,4014	0,000	0	0	0	4,48	1,43	
212	1	1	-0,4538	3,000	0	-5	5	4,04	2,12	
213	0	1,038	-0,3665	0,000	0	0	0	5,72	2,44	
214	0	1,009	-0,3665	0,000	0	0	0	2,69	1,57	
215	1	1,016	-0,2618	6,000	0	-3	3	0	0	
216	0	1,055	-0,3665	0,000	0	0	0	0	0	
217	1	1,009	-0,3665	2,500	0	-2	2	2,55	1,49	-1,5
218	1	1	-0,2793	5,500	0	-4	4	0	0	
219	0	1,023	-0,3491	0,000	0	0	0	0	0	-1,4
220	1	1,049	-0,2793	5,750	0	-6	6	0	0	
221	1	0,992	-0,3142	1,700	0	-0,4	1	0	0	
222	1	1,009	-0,3316	0,840	0	-0,4	0,8	0,08	0,03	
223	0	0,992	-0,3491	0,000	0	0	0	0	0	
224	0	0,971	-0,3665	0,000	0	0	0	0,61	0,3	
225	0	0,965	-0,384	0,000	0	0	0	0,77	0,33	
226	0	0,968	-0,384	0,000	0	0	0	0,61	0,3	
227	0	0,976	-0,4363	0,000	0	0	0	0,29	0,14	0,46
228	0	0,975	-0,4538	0,000	0	0	0	0,29	0,14	
229	0	1,019	-0,4189	0,000	0	0	0	-0,23	-0,17	
230	0	1,025	-0,3491	0,000	0	0	0	-0,33	-0,29	
231	0	1,015	0,0175	0,000	0	0	0	1,16	-0,24	
232	0	1,014	-0,0349	0,000	0	0	0	0,02	-0,13	
233	0	1	-0,3142	0,000	0	0	0	0,02	-0,04	
234	0	0,981	-0,2443	0,000	0	0	0	-0,15	0,26	
235	0	0,975	-0,4014	0,000	0	0	0	0,25	-0,01	
236	0	0,942	-0,5934	0,000	0	0	0	1,45	-0,35	
237	0	0,972	-0,6632	0,000	0	0	0	0,28	-0,2	
238	0	0,96	-0,5061	0,000	0	0	0	0,14	0,02	
239	0	1	-0,4014	0,000	0	0	0	-0,11	-0,01	
240	0	0,977	-0,4887	0,000	0	0	0	0,5	0,17	
241	0	0,958	-0,5061	0,000	0	0	0	0,3	0,01	
242	0	1,03	-0,2967	0,000	0	0	0	-1,14	0,77	
243	0	1,012	0,0698	0,000	0	0	0	1	0,29	
244	0	1,024	-0,1396	0,000	0	0	0	-1	0,34	
245	0	1,012	-0,2618	0,000	0	0	0	0	0	
246	0	0,965	-0,2618	0,000	0	0	0	0	0	
247	1	1,05	0,192	4,670	0	-2,1	2,1	0	0	

248	1	1,05	0,2094	6,230	0	-2,8	2,8	0	0	
249	1	1,032	0,2443	12,100	0	-4,2	4,2	0	0	
250	1	1,014	0,0873	2,340	0	-1	1	0	0	
251	1	1,05	0,2094	3,720	0	-2,24	2,24	0	0	
252	1	1,05	-0,1745	3,300	0	0	3,5	0	0	
253	1	1,05	0,1047	1,850	0	0	1,2	0	0	
254	1	1,029	0,2269	4,100	0	-2,24	2,24	0	0	
255	1	1,049	0,0349	5,000	0	-2	2	0	0	
256	1	1,014	-0,2443	0,370	0	0	0,42	0	0	
257	2	1,05	0	0,000	0	-99,99	99,99	0	0	
258	1	0,996	-0,1396	0,450	0	0	0,25	0	0	
259	1	1,021	-0,0524	1,650	0	-0,9	0,9	0	0	
260	1	1,014	0,0349	4,000	0	-1,5	1,5	0	0	
261	1	1,001	0,1047	4,000	0	0	1,5	0	0	
262	1	0,989	-0,4363	1,160	0	0	0,87	0	0	
263	1	1,05	0,3316	12,920	0	-1	6	0	0	
264	1	1,05	0,0524	7,000	0	-1,25	3,25	0	0	
265	1	1,014	0,6109	5,530	0	-2	3	0	0	
266	0	1,011	-0,192	0,000	0	0	0	0	0	
267	1	0,994	-0,3316	-0,040	0	-0,02	0,02	0	0	
268	0	0,983	-0,3491	0,000	0	0	0	0,03	0,01	0,02
269	0	0,976	-0,3491	0,000	0	0	0	0,01	0	
270	0	1,011	-0,192	0,000	0	0	0	0	0	
271	0	1,002	-0,2967	0,000	0	0	0	0	0	
272	0	0,991	-0,3316	0,000	0	0	0	0	0	
273	0	1,002	-0,2967	0,000	0	0	0	0	0	
274	0	0,988	-0,3316	0,000	0	0	0	0,05	0,02	
275	0	0,964	-0,384	0,000	0	0	0	0,02	0,01	
276	0	0,974	-0,3316	0,000	0	0	0	0	0	
277	0	0,97	-0,3665	0,000	0	0	0	0,01	0	
278	0	0,964	-0,3491	0,000	0	0	0	0	0	
279	0	0,965	-0,3491	0,000	0	0	0	0	0	
280	0	0,931	-0,4363	0,000	0	0	0	0,02	0,01	
281	0	0,944	-0,4189	0,000	0	0	0	0,01	0	
282	0	0,928	-0,4363	0,000	0	0	0	0,02	0,01	
283	0	0,997	-0,3665	0,000	0	0	0	0,02	0,01	0,02
284	0	0,95	-0,4014	0,000	0	0	0	0,02	0,01	
285	0	0,959	-0,4014	0,000	0	0	0	0,03	0,01	
286	0	0,957	-0,4014	0,000	0	0	0	0,02	0,01	
287	0	0,939	-0,4189	0,000	0	0	0	0,03	0,01	
288	0	0,963	-0,3665	0,000	0	0	0	0,01	0	
289	0	0,95	-0,384	0,000	0	0	0	0,01	0	
290	0	0,964	-0,3665	0,000	0	0	0	0,02	0,01	
291	0	0,978	-0,3491	0,000	0	0	0	0	0	
292	1	1	-0,3316	-0,360	0	-0,17	0,17	0	0	
293	0	0,978	-0,2967	0,000	0	0	0	0,3	0,23	
294	1	1	-0,3142	-0,260	0	-0,13	0,13	0	0	
295	1	1	-0,1222	0,500	0	-0,38	0,38	0	0	
296	1	1	-0,1396	0,080	0	-0,06	0,06	0	0	
297	0	0,975	-0,3491	0,000	0	0	0	0,01	0	
298	0	0,98	-0,3491	0,000	0	0	0	0,01	0	
299	0	0,979	-0,3316	0,000	0	0	0	0,04	0,01	
300	0	1,04	-0,3142	0,000	0	0	0	0,01	0	

Tabela B.8 – Dados de linha do sistema elétrico IEEE 300 barras.

Linha	$g$	$b$	$b^{sh}$	$t$
31 266	384,6154	-1923,0769	0,0000	0,9921
266 270	62,0636	-271,5283	0,0000	

266	271	0,1275	-2,2823	0,0000	1,0352
266	273	0,0857	-1,5361	0,0000	1,0215
270	292	0,1122	-2,6626	0,0000	1,0650
270	293	0,1122	-2,6626	0,0000	
270	294	0,1103	-2,6235	0,0000	
270	295	0,0000	-6,5789	0,0000	
270	296	0,0000	-1,2500	0,0000	
271	272	0,8694	-3,8576	0,0000	
271	268	0,4349	-1,9291	0,0000	
271	268	0,4349	-1,9291	0,0000	
273	267	0,3944	-2,2406	0,0000	
273	267	0,3944	-2,2406	0,0000	
267	274	6,8619	-8,9831	0,0000	
274	276	0,5189	-0,4467	0,0000	
274	275	0,0546	-0,3466	0,0000	
267	277	0,0478	-0,3030	0,0000	
276	278	0,0417	-0,2465	0,0000	
276	279	0,0455	-0,2689	0,0000	
272	297	0,0490	-0,3298	0,0000	
272	298	0,0712	-0,4755	0,0000	
272	268	0,8722	-3,8562	0,0000	
268	280	0,0329	-0,2088	0,0000	
268	281	0,0315	-0,1998	0,0000	
268	282	0,0320	-0,2030	0,0000	
268	291	7,7859	-6,6992	0,0000	
291	269	16,6370	-12,5538	0,0000	
269	288	0,0594	-0,3983	0,0000	
269	289	0,0343	-0,1767	0,0000	
269	290	0,0538	-0,5835	0,0000	
268	283	0,0666	-0,7126	0,0000	
268	284	0,0445	-0,2822	0,0000	
268	285	0,0547	-0,5927	0,0000	
268	286	0,0569	-0,3804	0,0000	
268	287	0,0490	-0,3298	0,0000	
273	299	0,2272	-0,9557	0,0000	
294	300	0,0000	-1,3333	0,0000	
1	5	27,0270	-162,1622	0,0000	
2	6	12,1951	-109,7561	0,0000	
2	8	7,8431	-35,2941	0,0270	
3	7	0,0000	-333,3333	0,0000	
3	18	1,6580	-14,3005	0,0695	
3	129	20,0000	-140,0000	0,0000	
4	16	5,4795	-52,0548	0,5635	
5	9	6,8415	-33,0673	0,0090	
7	12	12,1951	-109,7561	0,0350	
7	110	20,0000	-140,0000	0,0070	
8	11	3,5048	-16,0410	0,0165	
8	14	6,7253	-21,7279	0,0405	
9	11	7,8431	-35,2941	0,0065	
11	13	6,5574	-27,8689	0,0090	
12	20	8,7336	-65,5022	0,0590	
13	19	5,0336	-28,5235	0,0080	
14	15	7,1429	-21,4286	0,0485	
15	31	0,9889	-3,7731	0,0605	
15	74	1,3884	-3,4780	0,0175	
15	75	0,6809	-2,5747	0,0240	
16	36	4,0984	-45,0820	0,6400	
18	20	6,0976	-54,8780	0,0180	
18	72	1,9790	-12,1784	0,0755	
19	21	11,8959	-24,5353	0,0075	

19	26	1,7532	-4,7260	0,0490
20	23	3,4130	-29,0102	0,1400
21	22	3,4609	-7,3877	0,0250
22	24	10,0956	-20,7226	0,0090
23	231	1,4980	-14,5517	0,0670
24	25	5,6809	-11,2040	0,0170
25	26	2,7397	-7,3059	0,0325
25	232	2,2935	-6,9337	0,0070
27	28	0,0000	-15,8730	0,0000
27	32	16,6389	-79,8669	0,0065
27	34	6,8415	-33,0673	0,0100
27	35	3,6881	-22,6554	0,0130
28	36	15,3846	-123,0769	0,0210
29	60	3,2051	-16,0256	0,0040
29	63	25,8621	-60,3448	0,0010
29	64	10,6270	-30,8183	0,0015
30	73	5,3691	-36,2416	0,0215
31	32	3,5196	-20,6775	0,0040
31	34	4,8035	-13,9738	0,0035
31	35	7,1633	-25,7880	0,0100
31	43	2,4818	-11,8248	0,0240
31	74	1,3615	-3,3903	0,0165
31	75	2,5630	-6,9255	0,0080
32	35	5,5827	-25,8200	0,0100
32	37	3,7240	-10,1245	0,0200
33	36	14,5208	-154,8887	0,2020
34	42	1,0659	-6,3135	0,0110
35	36	0,0000	-34,4828	0,0000
35	43	1,5968	-4,6922	0,0100
35	44	3,4902	-10,0203	0,0180
36	40	10,0000	-70,0000	0,4030
37	38	4,4369	-12,2867	0,0175
37	42	1,2231	-3,3733	0,0160
37	46	7,6923	-23,0769	0,0080
38	41	3,4682	-10,7900	0,0195
38	47	3,5714	-10,7143	0,0185
39	52	4,0462	-23,6994	0,1560
39	62	3,0030	-18,0180	0,2055
40	68	2,7949	-23,4768	0,3450
41	61	2,1914	-6,1107	0,0365
41	92	2,7262	-7,4811	0,0065
42	87	5,5941	-13,8733	0,0035
43	44	3,1642	-9,5948	0,0215
44	45	2,7925	-8,2264	0,0245
45	48	3,7873	-11,2218	0,0180
46	47	4,1989	-12,2607	0,0175
47	48	2,9576	-8,7037	0,0235
48	49	1,9826	-5,1546	0,0410
49	50	5,4016	-9,3941	0,0180
49	55	0,5069	-1,7121	0,0355
50	51	11,8890	-34,3461	0,0025
51	53	11,5607	-75,1445	0,0075
52	54	2,0901	-15,0952	0,2425
54	56	1,4183	-9,3077	0,1015
54	123	20,0000	-140,0000	0,0065
55	236	0,8750	-5,6791	0,0130
57	190	0,9039	-4,1117	0,0140
57	66	1,8716	-5,7615	0,0115
58	59	2,9028	-9,0711	0,0310
58	237	1,2798	-7,8963	0,0140

59	60	1,9505	-7,0976	0,0340
59	61	3,1030	-9,0353	0,0235
60	64	2,2805	-11,0224	0,0055
60	238	0,6754	-5,0918	0,0000
61	63	5,6911	-15,4472	0,0150
61	66	5,9445	-17,1731	0,0090
62	73	5,3691	-36,2416	0,0250
62	240	0,6918	-4,8694	0,1895
63	64	7,6010	-20,4276	0,0020
64	65	27,0270	-162,1622	0,0035
64	67	2,7473	-13,7363	0,0190
64	239	1,1201	-3,3640	0,0145
64	241	1,5227	-4,1416	0,0110
65	66	11,5385	-42,3077	0,0055
65	69	0,0000	-27,7778	0,0000
66	190	0,6581	-2,4929	0,0255
67	190	1,8436	-8,9667	0,0290
68	173	3,1782	-29,9659	0,2650
68	174	3,1782	-29,9659	0,2650
70	71	1,9231	-15,3846	0,0640
71	72	1,3647	-10,5766	0,0915
71	234	2,5641	-20,5128	0,0460
74	76	2,8711	-7,2694	0,0070
75	77	1,0224	-5,5591	0,0120
76	78	1,3512	-3,4185	0,0155
76	79	3,4305	-12,0069	0,0195
77	84	0,9006	-6,8256	0,0085
77	86	1,9422	-10,5107	0,0060
78	79	1,0708	-1,6448	0,0215
79	82	6,6808	-16,0947	0,0035
79	83	3,8353	-9,2854	0,0060
79	84	2,7926	-7,0980	0,0075
80	82	5,1370	-13,6986	0,0035
80	83	2,1523	-7,6597	0,0075
81	87	2,5197	-6,4182	0,0085
81	88	100,0000	-200,0000	0,0010
81	89	0,3534	-2,7799	0,0220
81	90	1,5255	-5,3088	0,0110
82	83	9,4118	-22,3529	0,0020
83	85	7,2330	-10,7653	0,0135
84	86	4,5184	-14,7444	0,0040
85	88	3,3516	-5,7329	0,0220
85	233	2,5416	-7,1627	0,0075
86	87	1,5213	-11,1562	0,0055
86	90	0,8503	-2,1663	0,0235
88	235	1,5183	-4,2675	0,0130
89	90	1,8062	-4,7477	0,0105
89	92	1,1754	-3,2206	0,0155
89	93	0,6553	-2,3628	0,0180
90	91	0,7743	-2,2031	0,0250
91	93	8,2806	-20,4579	0,0030
94	101	8,8026	-48,6588	0,0020
95	99	0,1817	-9,5294	0,0005
96	97	30,7692	-553,8462	0,0085
97	98	0,0000	-36,9004	0,0000
97	245	0,0000	-1,6226	0,0000
245	99	0,0000	2,7049	0,0000
97	100	0,0259	-3,4303	0,0000
98	99	0,0000	-29,4985	0,0000
98	100	0,0000	-17,1821	0,0000

101	102	1,3144	-3,8131	0,0145
101	104	0,6705	-2,5492	0,0270
102	103	2,7964	-8,3581	0,0585
102	104	2,1384	-6,3523	0,0745
104	105	1,5446	-50,7144	0,0000
105	106	3,5223	-24,1782	0,1250
105	108	0,9301	-8,9449	0,0925
105	111	0,6855	-5,8438	0,1605
105	136	1,9802	-19,8020	0,1650
105	137	2,6069	-18,2143	0,1675
105	148	1,2080	-8,4708	0,0855
106	107	1,7538	-17,1517	0,0475
106	113	4,2499	-29,1421	0,1040
106	147	1,7538	-17,1517	0,0475
107	109	1,2922	-12,8062	0,0630
107	112	6,8556	-50,8899	0,0150
108	109	1,3303	-13,1634	0,0610
108	112	5,9937	-53,0867	0,0150
109	111	5,8928	-60,4007	0,0130
109	130	6,1787	-59,9695	0,0130
109	146	1,2439	-12,4864	0,0635
109	147	1,2566	-12,6301	0,0625
112	116	12,1620	-83,7030	0,1445
112	147	6,8556	-50,8899	0,0150
112	148	5,9937	-53,0867	0,0150
112	150	1,9598	-98,9711	0,0000
113	114	4,9032	-33,4101	0,0900
113	163	2,6588	-25,9746	0,1290
114	115	2,2956	-15,7161	0,1925
115	116	1,5476	-11,0186	0,2700
115	131	3,6074	-25,1230	0,4765
116	119	11,3456	-86,2265	0,1420
116	160	42,3370	-287,8916	0,0105
116	165	3,0635	-66,0832	0,0630
116	167	42,3370	-287,8916	0,0105
118	151	1,0467	-4,1867	0,0405
119	120	1,6823	-11,7202	0,0615
119	121	1,1652	-8,6775	0,3420
119	124	0,4045	-2,9120	0,2595
119	125	0,4588	-3,2341	0,2315
119	126	0,3933	-2,8086	0,2690
119	161	16,0692	-110,0124	0,0595
120	125	0,5570	-4,3396	0,1710
121	122	1,8265	-17,3516	0,3835
122	124	1,2435	-12,8160	0,0595
122	128	1,5076	-10,7905	0,0675
124	125	2,4081	-16,6587	0,0435
124	128	0,9354	-6,4832	0,1115
125	126	2,8148	-19,4336	0,0370
127	157	2,0098	-5,8643	0,0370
127	158	0,7953	-2,2734	0,0380
131	132	1,4658	-10,2395	0,0705
132	140	6,3977	-33,5004	0,0950
133	135	1,3389	-2,4240	0,0200
133	162	0,8061	-3,0622	0,0225
134	140	3,2863	-16,9692	0,1940
136	138	8,2747	-101,3653	0,0345
137	138	3,5337	-34,7281	0,0950
137	139	3,2186	-21,8473	0,1385
141	143	2,2461	-30,5095	0,1180

141	144	2,9827	-40,5972	0,8310
142	143	1,6533	-19,3137	1,7985
144	145	1,3216	-81,2793	0,0000
146	148	5,6236	-55,6111	0,0145
151	152	0,2799	-2,0262	0,0315
151	153	1,0740	-4,2537	0,0155
152	153	0,6870	-2,8357	0,0245
152	154	0,7407	-3,0780	0,0215
152	155	0,6333	-1,7661	0,0345
154	155	0,6473	-2,5965	0,0240
154	158	0,7584	-3,0453	0,0270
155	156	3,3456	-11,0498	0,0235
156	157	2,8956	-11,0474	0,0250
157	158	1,3499	-5,0284	0,0145
157	159	6,9459	-33,0217	0,0420
160	117	0,9799	-49,4855	0,0000
160	166	5,7929	-120,2028	0,0575
163	164	4,1220	-40,3957	0,0820
165	167	9,4023	-115,5138	0,0575
166	167	9,4023	-115,5138	0,0575
167	117	0,9799	-49,4855	0,0000
168	187	3,2628	-9,3929	0,0000
168	188	6,6890	-10,0334	0,0000
169	210	80,0000	-440,0000	3,1000
169	219	0,0000	-36,3636	0,0000
170	171	1,2970	-20,7523	0,0000
171	204	23,5294	-105,8824	0,0000
172	184	7,5075	-10,5105	0,0000
172	187	2,6040	-6,8898	0,0000
173	198	3,7459	-34,5590	0,2500
173	242	1,8957	-28,0409	0,1800
174	198	3,7459	-34,5590	0,2500
175	176	7,7951	-22,2717	0,0020
175	189	4,0209	-10,8565	0,0050
176	177	2,7027	-16,2162	0,0045
176	190	8,2192	-21,9178	0,0030
177	181	0,5689	-1,1790	0,0000
177	182	4,0965	-20,9376	0,0125
177	189	3,4910	-12,7422	0,0040
177	190	2,6080	-8,3608	0,0160
178	179	3,1665	-5,6248	0,0045
178	189	3,3322	-8,4972	0,0025
179	189	3,5302	-5,5786	0,0070
180	183	2,5376	-3,7450	0,0000
182	190	2,7925	-16,4758	0,0040
183	184	6,8249	-10,0890	0,0000
184	185	1,0409	-1,5373	0,0000
185	186	5,2225	-6,6533	0,0000
185	187	1,0220	-1,7927	0,0000
191	194	2,2254	-12,4559	0,0430
192	193	1,7238	-26,2024	0,0000
193	194	4,9255	-53,6014	0,0100
193	221	12,6167	-90,8403	0,0010
194	195	7,0284	-38,8905	0,0130
195	196	1,6090	-19,9912	0,0090
196	197	0,0000	-21,9298	0,0000
196	198	1,5947	-56,4521	0,0100
196	199	1,7224	-25,1987	0,4160
198	216	90,0901	-540,5405	2,6000
199	197	1,5703	-20,5411	0,2150

199	200	1,1478	-33,8594	0,2515	
199	217	67,4536	-193,9292	0,2010	
200	202	168,5393	-730,3371	0,5000	
201	216	0,5295	-19,4408	0,1650	
203	204	2,3832	-15,2526	0,2400	
203	205	27,4487	-117,0182	0,4300	
204	170	0,2687	-16,3890	0,0000	
205	210	1,1119	-47,1436	0,0000	
206	210	0,4038	-21,1787	0,0930	
207	208	23,9596	-109,7100	0,6400	
207	210	0,3089	-10,8964	0,0000	
207	213	1,5641	-34,6516	0,4050	
208	169	0,0000	-15,9744	0,0000	
210	211	4,1973	-144,8059	0,6820	
210	216	270,2703	-1621,6216	1,7850	
211	212	0,7218	-20,5933	0,0000	
213	214	0,2981	-38,6077	0,0720	
213	216	0,8106	-36,7468	0,0000	
214	217	500,0000	-1500,0000	0,4000	
220	216	2,1061	-64,8667	0,0000	
219	230	16,1464	-231,4316	0,0045	
221	224	1,1219	-11,6428	0,0000	
221	226	2,0924	-13,5071	0,0000	
222	223	8,9340	-24,9729	0,0000	
222	224	0,9700	-5,3679	0,0000	
223	225	5,7080	-16,1287	0,0000	
224	225	2,8012	-13,0604	0,0000	
224	226	0,7793	-4,5868	0,0000	
225	226	1,5554	-7,4577	0,0000	
226	227	2,5792	-7,3219	0,0000	
227	228	3,1029	-8,8754	0,0000	
228	229	1,6092	-4,8512	0,0000	
3	1	0,0000	-19,2308	0,0000	1,0560
3	2	0,0000	-19,2308	0,0000	1,0460
3	4	0,0000	-200,0000	0,0000	1,0299
7	5	0,0000	-25,6410	0,0000	1,0549
7	6	0,0000	-25,6410	0,0000	1,0428
10	11	0,0000	-11,2360	0,0000	0,9560
12	10	0,0000	-18,8679	0,0000	
15	17	14,4391	-23,1473	0,0000	1,0460
16	15	0,6920	-26,2976	0,0000	1,0299
20	19	0,0000	-71,4286	0,0000	
23	22	0,0000	-15,6250	0,0000	1,0604
30	29	0,0000	-21,2766	0,0000	0,9901
39	38	0,0000	-50,0000	0,0000	0,9921
39	40	0,0000	-47,6190	0,0000	1,0000
54	53	0,0000	-16,9492	0,0000	1,0256
55	56	0,0000	-26,3158	0,0000	0,9833
61	62	0,0000	-40,9836	0,0000	1,0000
68	73	0,0000	-50,0000	0,0000	1,0000
70	81	0,0000	-20,8333	0,0000	1,0000
71	83	0,0000	-20,8333	0,0000	1,0000
72	78	0,0000	-21,7391	0,0000	0,9852
93	186	0,0000	-6,7114	0,0000	1,0341
95	103	15,7671	-52,7592	0,0000	
100	94	0,0000	-35,7143	0,0000	0,9524
101	136	1,3141	-51,2484	0,0000	1,0000
109	110	0,0000	-55,5556	0,0000	0,9506
109	129	0,0000	-71,4286	0,0000	0,9506
111	149	0,6184	-24,8602	0,0000	

120	153	0,6590	-16,5575	0,0000	1,0256
121	154	0,9655	-20,0338	-0,0435	1,0000
122	123	0,0000	-12,0048	0,0000	0,9662
122	127	0,9433	-26,9211	0,0000	1,0460
124	159	1,5083	-54,9036	0,0000	1,0000
130	149	0,6503	-25,4936	0,0000	
132	162	0,6601	-15,6216	0,0000	0,9320
134	135	1,2195	-39,0244	0,0000	
138	96	0,0000	-62,5000	0,0000	0,9524
139	103	0,7645	-25,2294	0,0000	
142	116	0,8806	-26,0119	-0,0285	1,0204
143	134	1,6841	-43,2244	-0,0165	1,046
161	118	1,7472	-76,2959	0,0000	0,952
168	189	0,0000	-3,9683	0,0000	0,971
172	175	0,0000	-4,2194	0,0000	0,971
174	191	0,5969	-27,3094	0,0000	1,015
179	227	0,0000	-4,5455	0,0000	1,000
180	57	0,0000	-10,2041	0,0000	0,971
181	190	0,0000	-7,8125	0,0000	0,990
183	246	0,4760	-4,8553	-0,0060	0,952
188	177	0,5753	-4,6685	0,0000	
190	191	19,0066	-77,2935	0,0000	1,000
197	198	0,7973	-28,2261	-0,0050	1,031
202	203	3,1439	-51,0886	-0,1820	1,000
208	209	0,9064	-30,0932	0,0000	
213	215	1,9512	-62,4390	0,0000	
217	218	1,9512	-62,4390	0,0000	
175	246	0,2500	-49,9988	0,0000	
98	243	1,8868	-43,3962	0,0000	1,0
99	244	0,0000	-43,4783	0,0000	1,1
248	2	4,6694	-68,1733	0,0000	
249	3	0,0000	-95,2381	0,0000	
260	53	0,0000	-42,0168	0,0000	
261	54	0,0000	-31,1526	0,0000	
265	145	0,0000	-64,9351	0,0000	
254	23	0,0000	-34,6021	0,0000	
247	1	0,0000	-51,2821	0,0000	
263	109	0,0000	-51,8135	0,0000	
250	11	0,0000	-52,0833	0,0000	
253	22	0,0000	-43,4783	0,0000	
257	43	0,0000	-80,6452	0,0000	
264	118	0,0000	-59,8802	0,0000	
251	12	0,0000	-32,0513	0,0000	
252	17	0,0000	-60,6061	0,0000	
255	33	0,0000	-31,6456	0,0000	
259	49	0,0000	-18,6916	0,0000	
256	38	0,0000	-5,5006	0,0000	
258	48	0,0000	-5,0994	0,0000	
262	59	0,0000	-14,4928	0,0000	