UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Pedro Henrique Rocha Melo

Um estudo sobre a equação do calor semilinear generalizada em espaços de Marcinkiewicz

São José do Rio Preto
2022

Pedro Henrique Rocha Melo

Um estudo sobre a equação do calor semilinear generalizada em espaços de Marcinkiewicz

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Profa. Dra. Juliana Conceição Precioso Pereira

Financiadora: CAPES

São José do Rio Preto
2022

M528e

Melo, Pedro Henrique Rocha

Um estudo sobre a equação do calor semilinear generalizada em espaços de Marcinkiewicz / Pedro Henrique Rocha Melo. -- São José do Rio Preto, 2022

114 p. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientadora: Juliana Conceição Precioso Pereira

1. Equação do calor semilinear generalizada. 2. Boa-colocação. 3. Soluções auto-similares. 4. Comportamento assintótico. 5. Espaços de Lorentz. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Pedro Henrique Rocha Melo

Um estudo sobre a equação do calor semilinear generalizada em espaços de Marcinkiewicz

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Juliana Conceição Precioso Pereira
Orientadora

Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira
IMECC - Unicamp

Profa. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita
IBILCE - UNESP

São José do Rio Preto
24 de Fevereiro de 2022

À minha família e aos meus amigos,
dedico.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à todos que, direta ou indiretamente, contribuíram com a minha jornada até aqui. Agradeço também:

À minha família, que sempre se fez presente com seu apoio e incentivo incondicional, em especial à minha mãe Maria, mulher de fibra e garra, á quem dedico não somente este trabalho, mas também todo o meu amor e ao meu pai João, por se fazer presente mesmo que em vários momentos estivéssemos fisicamente separados e por sempre demonstrar o seu amor por mim; minha irmã Tatiane, obrigado por me ouvir em todos os momentos de crise e desabafos e nunca deixar de acreditar em mim, agradeço também por todo amor que me doou, sem você nada disso seria possível; minha tia Nice, que sempre incentivou a busca pelos meus objetivos e sonhos, qualquer que fossem eles, meus sinceros e amorosos agradecimentos; ao meu tio Beto, sou imensamente grato por todos os ensinamentos recebidos, você é exemplo e inspiração para toda minha vida.

À Beatriz Pádua, por todo amor e carinho, por sempre acreditar em mim e me incentivar, e pela paciência, principalmente durante o período de finalização deste trabalho.

À professora Juliana Precioso, que além de viabilizar este trabalho, me guiou durante toda a graduação e mestrado, e esteve presente em várias decisões difíceis da minha carreira acadêmica. Sou grato pela confiança e levarei para sempre seus ensinamentos comigo.

Aos meus estimados amigos, Mateus Pereira, por ser exemplo e inspiração acadêmica para mim, por compartilhar comigo todos os momentos da graduação e mestrado, sejam eles bons ou ruins, por sempre estar presente, seja para dar conselhos, ouvir reclamações ou apenas jogar conversa fora. Aproveito para registrar minha promessa de que um dia trabalharemos juntos; Natália Rodrigues, por entender e ser um ombro amigo em todos os surtos durante o mestrado, além da paciência em ouvir todos os áudios gigantescos que lhe enviei, sejam eles desabafos ou informações sem sentido á todos, exceto a nós mesmos; Yuri Garcia, por todo o tempo em que moramos juntos, onde nos tornamos irmãos (ou padrinhos), além das dezenas de horas gastas assistindo (e desvendando) desenhos animados e produzindo os melhores cones trufados da região; Maurício Laurito, pelos inúmeros momentos assistindo (e discutindo) filmes e partidas incríveis (exceto quando não são) de futebol americano, você é verdadeiramente a definição de "amigão"; Neto Tofanin, por todas as cervejas e aventuras que elas trouxeram, e por nunca me abandonar (mesmo sem saber) quando me sentia sozinho; Murillo Lozano, por ser um exemplo de melhor amigo, sempre pronto pra me apoiar (ou puxar minha orelha), além de compartilhar comigo mais lembranças felizes do que eu poderia imaginar.

Aos amigos que o Ibilce me deu, em especial a Ana Rossafa, Maria Clara, Maria Fernanda, Milena Zacheo, Murillo e Sérgio Verde, autodenominados "Cobras" (e agregados), por sempre me fazerem sorrir, ou chorar de tanto rir; Beatriz Lopes, Guilherme Yussef, Milena Kemy, Sara Pereira e Yeda Seron, pelas conversas, fofocas e jantares compartilhados; E também à Aldimir Bruzadin, Bruna Mayumi, Eliani Beloni, Giovana Pasquareli, Giovani Mariano (Forninho), João Pissolato, Linara Fachini, Lucas Ferreira, Mayara Teixeira, Mariele Pedro, Maurício Rocha, Paulo Santana, Raquel, Victor Cavassana, Vinícius Buzo.

À todos os professores que de algum modo participaram da minha formação, em especial, professor Sérgio Leandro, por incentivar meu interesse em análise matemática e pelos inúmeros conselhos; professor Paulo Ricardo, por ter me ensinado a beleza da matemática em várias disciplinas; professor Weber Pereira, pela amizade e conselhos ao longo de todos os ano de PET.

Por fim, à Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto, Ibilce, por ter me abrigado durante esses últimos 6 anos e por ter sido palco de experiências inesquecíveis.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Felicidade só é real quando compartilhada.
(Christopher McCandless, [1])

RESUMO

Nesta dissertação de mestrado, estudaremos a boa-colocação do problema de Cauchy da equação do calor semilinear generalizada nos espaços de Marcinkiewicz $L^{(p.\infty)}$. Soluções mild são obtidas em espaços funcionais com certa homogeneidade que permitem a existência de soluções auto-similares. A estabilidade assintótica das soluções é obtida, bem como estimativas de decaimento. Este trabalho é inteiramente baseado no artigo [2] de Ferreira e Villamizar-Roa.

Palavras-chave: Equação do calor semilinear generalizada, Boa-colocação, Soluções auto-similares, Comportamento assintótico, Espaços de Lorentz.

ABSTRACT

In this master dissertation, we will study the well-posedness of the Cauchy problem for the generalized semilinear heat equation in Marcinkiewicz spaces $L^{(p,\infty)}$*. Mild solutions are obtained in functional spaces with right the homogeneity to allow the existence of self-similar solutions. The asymptotic estability of the solutions is obtained, as well as the decay estimates. This work is entirely based on Ferreira and Villamizar-Roa paper [2].*

Keywords: Generalized semilinear heat equation, Well-posedness, Self-similar solutions, Asymptotic behavior, Lorentz spaces.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Neste trabalho, estudaremos o problema de Cauchy para a equação do calor semilinear generalizada

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^\gamma u + \quad f(u) = 0, \; x \in \mathbb{R}^n \\ \qquad\qquad\quad u(0,x) = u_0, \; x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.1}$$

em que $n \geq 1$, $\gamma > 0$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ temos

$$|f(a_1) - f(a_2)| \leq \eta |a_2 - a_1| \left(|a_2|^{\rho-1} + |a_1|^{\rho-1} \right) \quad \text{e} \quad f(0) = 0, \tag{1.2}$$

com as constantes $0 < \gamma < \frac{n}{2}$, $\eta > 0$ e $1 < \rho < \infty$. Note que $f(u) = |u|^{(\rho-1)}u$ satisfaz a condição (1.2). Quando $\gamma = 1$, a equação (1.1) nada mais é do que a conhecida equação do calor semilinear.

A busca pela existência e unicidade de soluções do problema de Cauchy 1.1 aparece em vários artigos importantes. Para o caso em que $\gamma = 1$, veja por exemplo [3, 4, 5, 6].

Em [4], Weissler mostra a existência e unicidade de soluções locais no tempo com dado inicial $u_0 \in L^p$, em que $p \geq \frac{n(\rho-1)}{2} > 1$. Em [3], Weissler mostrou a existência de soluções mild global em L^p, com $p = \frac{n(\rho-1)}{2}$, e dado inicial suficientemente pequeno. Em [5], Giga construiu uma solução regular local única em $L^r\left((0,T); L^q\right)$, com restrições sobre r e q de modo que a norma seja invariante pela relação de escala. Vale lembrar que, ainda em [5], Giga alerta o leitor para a possibilidade de que a classe $BC((0,T); L^p)$, com $p = \frac{n(\rho-1)}{2}$ não seria suficiente para garantir a unicidade de soluções. Em [7] é dado um contra-exemplo de não unicidade para o problema de valor inicial e de fronteira (1.1), com $\gamma = 1$, $p = \frac{n}{n-2}$, $n \geq 3$ e com domínio restrito a uma bola.

Nesta dissertação, que é inteiramente baseada no artigo [2], o objetivo é mostrar a existência e unicidade de soluções mild globais, bem como resultados sobre a estabilidade assintótica destas soluções para o problema de Cauchy (1.1), nos espaços de Marcinkiewicz $L^{(p,\infty)}$, principalmente quando $p = \frac{n(\rho-1)}{2\gamma}$.

Um dos pontos importantes sobre o espaço $L^{(\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty)}$ é a sua invariância via relação de escala da equação 1.1, além de conter funções homogêneas de grau $-\frac{2\gamma}{\rho-1}$, o que nos leva a obter a existência de soluções auto-similares do problema de Cauchy (1.1).

Analisaremos também o comportamento assintótico das soluções, onde entenderemos seu comportamento para tempo t indo ao infinito.

Esta dissertação está organizada em 6 capítulos e a seguir temos uma breve descrição de cada um deles.

O Capítulo 1, consiste nesta introdução, onde é apresentado um panorama geral do estudo.

No Capítulo 2 apresentaremos definições e resultados que serão úteis ao longo do trabalho. Iniciaremos com uma breve retomada da definição dos espaços de Lebesgue e

Marcinkiewicz (também conhecidos como L^p e L^p-fraco, respectivamente) e importantes resultados que os acompanham. Traremos também a definição de função distribuição, função rearranjo e duplo rearranjo, bem como suas propriedades principais. A importância dessas funções se dá na dependência direta das mesmas com a definição dos espaços de Lorentz (espaço funcional que é variação do espaço de Lebesgue e será de suma importância no nosso trabalho) bem como o já citado L^p-fraco. Por fim, ainda traremos o conceito de convergência em medida, tópico que será útil na demonstração de completude dos espaços de Lorentz.

No Capítulo 3, começamos definindo os espaços de Lorentz $L^{p,q}$ e sua quase norma (que envolve a função rearranjo). Mostramos também que os espaços de Lorentz $L^{p,q}$ contém (no sentido de inclusão) os espaços de Lebesgue L^p (bem como os espaços L^p- fracos) e que suas relações de escala coincidem. Serão apresentados alguns resultados, como por exemplo, a desigualdade de Young generalizada em $L^{p,q}$, bem como uma desigualdade do tipo Hölder. Em seguida, com o auxílio da função duplo rearranjo, definiremos uma norma para o espaço de Lorentz e mostraremos que ela é equivalente a quase norma definida anteriormente. Alguns resultados envolvendo tal norma serão apresentados, como por exemplo, o Lema de Calderón e a completude dos espaços de Lorentz. Traremos também um Teorema de dualidade nestes espaços, além de mostrarmos que, assim como nos usuais espaços de Lebesgue L^p, os espaços de Lorentz possuem um Teorema de aproximação da identidade. Em seguida, enunciamos o Teorema de interpolação de Marcinkiewicz.

No Capítulo 4, traremos novamente a equação semilinear do calor generalizada (a qual também aparece no início desta introdução) e inicialmente calcularemos a solução (por meio da transformada de Fourier), do problema linear associado a equação. A solução do problema linear gera um semigrupo $G\gamma(t)$, o qual será estudado para exibirmos algumas estimativas a seu respeito. No que segue, apresentaremos a formulação integral do problema e a usaremos como motivação para a definição de solução mild global. O próximo passo é exibir estimativas para os termos linear e não-linear da formulação integral, bem como garantir a convergência dos mesmos na topologia fraca-$*$ do espaço adequado. Por fim, partimos para a demonstração do resultados de boa-colocação, regularidade e unicidade, que serão consequência das seções que o antecedem.

Já no Capítulo 5, iniciaremos com uma breve explicação do motivo de $L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}$ ser o espaço funcional adequado para nosso estudo. Partiremos, então, para uma estimativa de decaimento das soluções mild globais em $L^{p,\infty}$, em que garantimos que as mesmas tendem a zero quando o tempo t vai a infinito. Por fim, encerramos o capítulo garantindo a existência de soluções auto-similares para dados iniciais suficientemente pequenos (assim como no teorema de boa-colocação).

Por fim, no Capítulo 6, traremos um resultado referente a estabilidade assintótica das soluções mild globais.

2 Conceitos Preliminares

Neste capítulo apresentaremos definições e resultados que serão úteis ao longo do trabalho. Iniciaremos com uma breve retomada da definição dos espaços de Lebesgue e Marcinkiewicz (também conhecidos como L^p e L^p-fraco, respectivamente) e importantes resultados que os acompanham. Traremos também a definição de função distribuição, função rearranjo e duplo rearranjo, bem como suas propriedades principais. A importância dessas funções se dá na dependência direta das mesmas com a definição dos espaços de Lorentz (espaço funcional que é variação do espaço de Lebesgue e será de suma importância no nosso trabalho) bem como o já citado L^p-fraco. Por fim, apresentaremos, ainda, o conceito de convergência em medida que será útil na demonstração de completude dos espaços de Lorentz.

2.1 Espaços L^p e L^p-fraco

Para essa seção, iniciaremos fixando X um espaço de medida e μ uma medida qualquer. Vale alertar que, no Capítulo 4, consideraremos $X = \mathbb{R}^n$ e μ como a medida de Lebesgue.

Definição 2.1. Tome $1 \leq p < +\infty$. O espaço $L^p = L^p(X, \mu)$ consiste de todas as classes μ-equivalentes de funções f mensuráveis, para as quais $|f|^p$ possui integral finita com relação a μ sobre X.

Para $p = \infty$, o espaço $L^\infty = L^\infty(X, \mu)$ consiste de todas as classe μ-equivalentes de funções f mensuráveis que são limitadas μ-q.t.p..

Definição 2.2. Seja f uma função mensurável em X. Definimos os seguintes funcionais:

1. Para $1 \leq p < +\infty$, temos
$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. Para $p = \infty$, temos
$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \inf\{M > 0 : |f(x)| < M \ \mu\text{-q.t.p.}\} \\ &= \inf\{\lambda > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) = 0\}. \end{aligned}$$

Observação 2.3. Duas funções são **μ-equivalentes** se elas são iguais μ-q.t.p..

Traremos agora alguns resultados clássicos dos espaços L^p com $1 \leq p \leq \infty$, cujas demonstrações serão omitidas mas que podem ser vistas em detalhes em [8].

Proposição 2.4. *Sejam (X, μ) um espaço de medida, f uma função mensurável em X que está em $L^p = L^p(X, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$. Então o funcional $\| \cdot \|_p$ (ver Definição 2.2) define uma norma em L^p.*

Proposição 2.5 (Desigualdade de Hölder em L^p)**.** *Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$. Se $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ou $p = 1$ e $q = \infty$ então $fg \in L^1$ e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Teorema 2.6. *Se $1 \leq p \leq +\infty$, então o espaço L^p é um espaço vetorial normado completo, ou seja,* ***o espaço L^p é Banach****.*

Iremos definir agora, a função distribuição e apresentar algumas propriedades básicas da mesma. Essa função está diretamente relacionada com a definição do espaço L^p-fraco.

Definição 2.7. Para uma função mensurável f em X, a função distribuição de f é a função d_f, definida em $[0, +\infty)$, por:

$$d_f(\alpha) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}).$$

Observação 2.8. A primeira propriedade que pode ser notada é que a função distribuição d_f é não crescente, fato que decorre da própria definição, .

A função distribuição d_f nos fornece informações sobre o "tamanho" de f mas não sobre seu comportamento. A seguir iremos ver um exemplo que ilustrará melhor esse fato.

Exemplo 2.9. Consideremos uma função simples f não negativa, dada por:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x), \text{ em que } E_i \cap E_j = \emptyset \text{ e } a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0.$$

Assim, se $\alpha \geq a_1$, claramente $d_f(\alpha) = 0$. Entretanto, se $a_2 \leq \alpha < a_1$, então temos que $|f(x)| > \alpha$ quando $x \in E_1$.

Logo, de maneira geral, se $a_{j+1} \leq \alpha < a_j$, então $|f(x)| > \alpha$ quando $x \in E_1 \cup \cdots \cup E_j$. Daí, se considerarmos

$$B_j = \sum_{i=1}^{j} \mu(E_i),$$

teremos que

$$d_f(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} B_j \chi_{[a_{j+1}, a_j)}(\alpha), \text{ em que } a_{n+1} = 0.$$

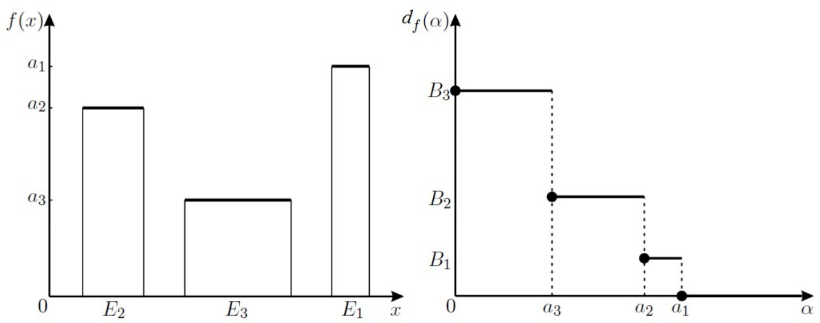

Figura 2.1: Os gráficos de uma função simples $f(x) = \sum_{j=1}^{3} a_j \chi_{E_j}(x)$ (à esquerda) e de sua função distribuição $d_f(\alpha)$ (à direita).

A seguir veremos mais algumas propriedades da função distribuição.

Proposição 2.10. *Sejam f e g funções mensuráveis em (X, μ) e $\alpha, \beta \geq 0$. Temos então que*

1. $|g| \leq |f|$ *μ-q.t.p. implica que* $d_g \leq d_f$;
2. $d_{cf}(\alpha) = d_f\left(\dfrac{\alpha}{|c|}\right)$, $\forall c \in \mathbb{C} - \{0\}$;
3. $d_{f+g}(\alpha + \beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$;
4. $d_{fg}(\alpha\beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$;
5. d_f *é contínua à direita em* $[0, \infty)$;
6. *Se* $|f_n|$ *é uma sequência de funções mensuráveis que cresce para* $|f|$, *então* d_{f_n} *é uma sequência que cresce para* d_f.

Demonstração. 1. Como, por hipótese, $|g| \leq |f|$ μ-q.t.p., então existe um conjunto N mensurável, com $\mu(N) = 0$ tal que $|g(x)| \leq |f(x)|$, para todo $x \in X \setminus N$.

Além disso, podemos escrever:

$$\begin{aligned} d_g(\alpha) &= \mu(\{x \in X : |g(x)| > \alpha\}) \\ &= \mu(\{x \in N : |g(x)| > \alpha\}) + \mu(\{x \in X \setminus N : |g(x)| > \alpha\}). \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{x \in N : |g(x)| > \alpha\} \subset N$ e $\mu(N) = 0$, temos que $\mu(\{x \in N : |g(x)| > \alpha\}) = 0$, donde concluímos que

$$d_g(\alpha) = \mu(\{x \in X \setminus N : |g(x)| > \alpha\}).$$

Analogamente, $d_f(\alpha) = \mu(\{x \in X \setminus N : |f(x)| > \alpha\})$. Como $|g(x)| \leq |f(x)|$, para todo $x \in X \setminus N$, segue que

$$\{x \in X \setminus N : |g(x)| > \alpha\} \subset \{x \in X \setminus N : |f(x)| > \alpha\}.$$

Logo, $\mu(\{x \in X \setminus N : |g(x)| > \alpha\} \leq \mu(\{x \in X \setminus N : |f(x)| > \alpha\}$.
Portanto, $d_g(\alpha) \leq d_f(\alpha)$.

2. Observemos que para todo $\alpha \in [0, \infty)$ e para todo $c \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, temos

$$\begin{aligned} d_{cf}(\alpha) &= \mu(\{x \in X : |cf(x)| > \alpha\}) \\ &= \mu(\{x \in X : |c||f(x)| > \alpha\}) \\ &= \mu\left(\left\{x \in X : |f(x)| > \frac{\alpha}{|c|}\right\}\right) \\ &= d_f\left(\frac{\alpha}{|c|}\right). \end{aligned} \tag{2.1}$$

3. Consideremos, primeiramente, os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X : |f(x)| > \alpha\}, \\ B &= \{x \in X : |g(x)| > \beta\}, \\ C &= \{x \in X : |f(x) + g(x)| > \alpha + \beta\}. \end{aligned}$$

Mostremos que

$$C \subset A \cup B. \tag{2.2}$$

Para isso, seja $x_0 \in C$. Assim, devemos mostrar que $x_0 \in A$ ou $x_0 \in B$.

Suponha agora que $x_0 \notin A$. Logo, temos que

$$|f(x_0)| \leq \alpha \Rightarrow 0 \leq \alpha - |f(x_0)| \Rightarrow \beta \leq \alpha - |f(x_0)| + \beta. \tag{2.3}$$

Por outro lado, como $x_0 \in C$, temos que

$$\alpha + \beta < |f(x_0) + g(x_0)| \leq |f(x_0)| + |g(x_0)| \Rightarrow \alpha - |f(x_0)| + \beta < |g(x_0)|.$$

Assim, usando (2.3), temos $|g(x_0)| > \beta$, ou seja, $x_0 \in B$, de onde segue (2.2).

Portanto, usando agora a inclusão (2.2), temos

$$\begin{aligned} d_{f+g}(\alpha + \beta) &= \mu(C) \\ &\leq \mu(A) + \mu(B) \\ &= d_f(\alpha) + d_g(\beta). \end{aligned}$$

4. Se $f \equiv 0$ ou $g \equiv 0$, o resultado segue de modo imediato. Logo, suponhamos f e g funções não identicamente nulas.

Consideremos, primeiramente, os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X : |f(x)| > \alpha\}, \\ B &= \{x \in X : |g(x)| > \beta\}, \\ C &= \{x \in X : |f(x)g(x)| > \alpha\beta\}. \end{aligned}$$

Mostremos que

$$C \subset A \cup B. \tag{2.4}$$

Seja $x_0 \in C$ (observe que $f(x_0) \neq 0$, pois caso contrário $x_0 \notin C$. Devemos mostrar que $x_0 \in A$ ou $x_0 \in B$. Suponhamos agora que $x_0 \notin A$. Daí, segue que

$$|f(x_0)| \leq \alpha \Rightarrow \frac{\alpha}{|f(x_0)|} \geq 1 \Rightarrow \frac{\alpha\beta}{|f(x_0)|} \geq \beta. \tag{2.5}$$

Assim, usando (2.5) e que $x_0 \in C$, obtemos

$$|f(x_0)g(x_0)| > \alpha\beta \Rightarrow |g(x_0)| > \frac{\alpha\beta}{|f(x_0)|} \geq \beta,$$

ou seja, $x_0 \in B$, o que mostra a inclusão (2.4).

Por fim, usando (2.4), temos

$$\begin{aligned} d_{fg}(\alpha\beta) &= \mu(C) \\ &\leq \mu(A) + \mu(B) \\ &= d_f(\alpha) + d_g(\beta). \end{aligned}$$

5. Tomemos $\alpha \in [0, \infty)$ e $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência decrescente de números reais convergindo para 0. Consideremos, inicialmente, os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} A_0 &= \{x \in X : |f(x)| > \alpha\} \\ A_n &= \{x \in X : |f(x)| > \alpha + \epsilon_n\}, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Observe, então, que para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$A_n \subset A_{n+1}, \text{ visto que } \epsilon_{n+1} < \epsilon_n,$$

ou seja, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um sequência crescente de conjuntos.

Mostraremos agora que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_0. \tag{2.6}$$

Para isso, mostraremos inicialmente que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_0$.

Como evidentemente $A_n \subset A_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_0$.

Agora, mostremos a inclusão contrária, isto é, $A_0 \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Tomando $x_0 \in A_0$ temos que $|f(x_0)| > \alpha$.

Como $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente de números reais convergindo para 0, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f(x_0)| \geq \alpha + \epsilon_k > \alpha + \epsilon_{k+1}, \text{ visto que } \epsilon_{k+1} < \epsilon_k.$$

Assim $x_0 \in A_{k+1}$ e, portanto, $A_0 \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Logo, como $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um sequência crescente de conjuntos e (2.6) é válida, então fazendo uso de um resultado da Teoria da Medida (ver [8]), pág. 21), temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} d_f(\alpha + \epsilon_n) &= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \\
&= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \\
&= \mu(A_0) \\
&= d_f(\alpha).
\end{aligned}$$

Portanto, $d_f(\alpha)$ é contínua à direita em $[0, \infty)$.

6. Primeiramente, consideremos seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned}
F &= \{x \in X : |f(x)| > \alpha\}, \\
F_n &= \{x \in X : |f_n(x)| > \alpha\}.
\end{aligned}$$

Agora, mostremos que, para todo $\alpha \in [0, \infty)$, temos

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = F. \tag{2.7}$$

Para isso, notemos que o fato de $|f_n|$ convergir de maneira crescente para $|f|$ implica que $|f_n| < |f|$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim, dado $\alpha \in [0, \infty)$, se $x_0 \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, então $x_0 \in F_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, de onde segue que $\alpha < |f_n(x_0)| < |f(x_0)|$, ou seja, $x_0 \in F$. Logo, concluímos que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \subset F.$$

Para mostrarmos a inclusão contrária, tomemos $x_0 \in F$. Assim, como $|f_n|$ converge de maneira crescente para $|f|$, temos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f(x_0)| \geq |f_k(x_0)| > \alpha.$$

Logo, $x_0 \in \{x \in X : |f_k(x)| > \alpha\}$, ou seja, $x_0 \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Assim, concluímos que

$$F \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Portanto, a igualdade (2.7) está mostrada.

Note também que, dado $\alpha \in [0, \infty)$, como $|f_{n+1}| \geq |f_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$F_n \subset F_{n+1},$$

ou seja, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de conjuntos. Logo, usando (2.7) e um resultado da Teoria da Medida (ver [8], pág. 21), temos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} d_{f_n}(\alpha) &= \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) \\ &= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) \\ &= \mu(F) \\ &= d_f(\alpha), \end{aligned}$$

ou seja, d_{f_n} converge para d_f. E ainda, como $|f_n| \leq |f_{n+1}| \leq |f|$, pelo item *1.* dessa proposição, temos que $d_{f_n} \leq d_{f_{n+1}} \leq d_f$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, d_{f_n} é uma sequência que cresce para d_f. □

Entender a função distribuição d_f nos fornece informações para avaliar precisamente a norma L^p de uma função, como pode ser visto no próximo resultado:

Proposição 2.11. *Sejam* $0 < p < \infty$ *e* $f \in L^p(X, \mu)$. *Então temos que*

$$(\|f\|_p)^p = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha.$$

Demonstração. Observe que a partir da definição de integral para funções simples temos

$$\int_X \chi_{\{x\in X:|f(x)|>\alpha\}}(x) d\mu = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = d_f(\alpha).$$

Assim, segue que

$$p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \int_X \chi_{\{x\in X:|f(x)|>\alpha\}}(x)\ d\mu\ d\alpha.$$

Agora, usando o Teorema de Fubini, temos

$$p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \int_X \chi_{\{x\in X:|f(x)|>\alpha\}}(x)\ d\mu\ d\alpha = \int_X \int_0^{|f(x)|} p\alpha^{p-1}\ d\alpha\ d\mu = \int_X |f(x)|^p d\mu = (\|f\|_p)^p.$$

Portanto, obtemos

$$(\|f\|_p)^p = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha)\ d\alpha.$$

□

Apresentaremos, agora, a definição dos espaços de Marcinkiewicz, também conhecidos como espaços L^p-fracos.

Definição 2.12. Para $0 < p < \infty$, o espaço $L^p(X,\mu)$-fraco é definido como o conjunto de todas as funções f mensuráveis definidas em X, tais que

$$\begin{aligned} \|f\|_{p,\infty} &= \inf\left\{C > 0 : d_f(\alpha) \leq \frac{C^p}{\alpha^p}, \forall\alpha > 0\right\} && (2.8)\\ &= \sup\{\gamma d_f(\gamma)^{\frac{1}{p}} : \gamma > 0\} && (2.9)\end{aligned}$$

é finito.

Para $p = \infty$, o espaço $L^\infty(X,\mu)$-fraco é por definição $L^\infty(X,\mu)$.

Os espaços L^p-fracos são denotados por $L^{(p,\infty)} = L^{(p,\infty)}(X,\mu)$. Duas funções em $L^{(p,\infty)}$ são consideradas iguais se elas são iguais μ-q.t.p..

Algumas propriedades do funcional $\|\cdot\|_{p,\infty}$ são clássicas e serão apresentadas à seguir.

Primeiramente, notamos que usando a Proposição 2.10, item *2.*, segue que

$$|k|\|f\|_{p,\infty} = \|kf\|_{p,\infty},\ \forall k \in \mathbb{C}.$$

De fato, se $k = 0$, temos que

$$\|kf\|_{p,\infty} = \sup\{\gamma d_{kf}(\gamma)^{\frac{1}{p}} : \gamma > 0\} = 0 = |k|\|f\|_{p,\infty}.$$

Agora, se $k \neq 0$, segue que

$$\begin{aligned} |k|\|f\|_{p,\infty} &= |k|\inf\left\{C > 0 : d_f(\alpha) \leq \frac{C^p}{\alpha^p},\ \forall\alpha > 0\right\}\\ &= \inf\left\{|k|C > 0 : d_f(\alpha) \leq \frac{C^p}{\alpha^p},\ \forall\alpha > 0\right\}\\ &= \inf\left\{|k|C > 0 : d_f\left(\frac{|k|\alpha}{|k|}\right) \leq \frac{(|k|C)^p}{(|k|\alpha)^p},\ \forall|k|\alpha > 0\right\}\\ &= \inf\{|k|C > 0 : d_{kf}(\beta) \leq \frac{(|k|C)^p}{\beta^p},\ \forall\beta > 0\}\\ &= \inf\{N > 0 : d_{kf}(\beta) \leq \frac{N^p}{\beta^p},\ \forall\beta > 0\}\\ &= \|kf\|_{p,\infty}.\end{aligned}$$

Ainda fazendo uso da Proposição 2.10, item *3.*, temos também que

$$\begin{aligned} (\|f+g\|_{p,\infty})^p &= \sup\{\gamma^p d_{f+g}(\gamma) : \gamma > 0\}\\ &\leq \sup\left\{\gamma^p d_f\left(\frac{\gamma}{2}\right) : \gamma > 0\right\} + \sup\left\{\gamma^p d_g\left(\frac{\gamma}{2}\right) : \gamma > 0\right\}\\ &= 2^p\sup\left\{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^p d_f\left(\frac{\gamma}{2}\right) : \gamma > 0\right\} + 2^p\sup\left\{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^p d_g\left(\frac{\gamma}{2}\right) : \gamma > 0\right\}\\ &= 2^p[(\|f\|_{p,\infty})^p + (\|g\|_{p,\infty})^p]\\ &\leq 2^{p+1}\max\{(\|f\|_{p,\infty})^p, (\|g\|_{p,\infty})^p\},\end{aligned}$$

ou seja, segue que

$$\|f+g\|_{p,\infty} \leq 2^{1+\frac{1}{p}}\max\{\|f\|_{p,\infty}, \|g\|_{p,\infty}\} \leq 2^{1+\frac{1}{p}}(\|f\|_{p,\infty} + \|g\|_{p,\infty}).$$

Por fim, temos que $\|f\|_{p,\infty} = 0 \Leftrightarrow f = 0,\ \mu$-q.t.p.. De fato,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{p,\infty} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sup\{\gamma d_f(\gamma)^{\frac{1}{p}} : \gamma > 0\} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \gamma d_f(\gamma)^{\frac{1}{p}} = 0,\ \forall \gamma > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad d_f(\gamma) = 0,\ \forall \gamma > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \mu(\{x \in X : |f(x)| > \gamma\}) = 0,\ \forall \gamma > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad f = 0,\ \mu\text{-q.t.p..}
\end{aligned}$$

Desse modo, a partir das propriedades apresentadas acima, podemos concluir que o espaço $L^{p,\infty}(X,\mu)$ munido do funcional $\|\cdot\|_{L^{(p,\infty)}}$ é um espaço vetorial quase-normado para $0 < p < \infty$.

Outra propriedade interessante é que os espaços L^p-fracos são maiores (no sentido da inclusão) que os L^p usuais. Para verificar tal propriedade, usaremos um resultado auxiliar:

Proposição 2.13 (Desigualdade de Chebyshev)**.** *Sejam $0 < p < \infty$ e $f \in L^p(X,\mu)$. Então para todo $\alpha > 0$ temos*

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) \leq \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^p.$$

Demonstração. Consideremos o conjunto $E_\alpha = \{x \in X : |f(x)| > \alpha\}$. Assim, segue que

$$(\|f\|_p)^p = \int_X |f|^p \, d\mu \geq \int_{E_\alpha} |f|^p \, d\mu \geq \int_{E_\alpha} \alpha^p \, d\mu = \alpha^p \mu(E_\alpha).$$

Logo,

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = \mu(E_\alpha) \leq \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^p.$$

□

Proposição 2.14. *Se $0 < p < \infty$ e $f \in L^p(X,\mu)$, então $L^p(X,\mu) \subset L^{(p,\infty)}(X,\mu)$. Temos também que*

$$\|f\|_{p,\infty} \leq \|f\|_p.$$

Demonstração. Seja $f \in L^p$, $0 < p < \infty$. Pela desigualdade de Chebyshev segue que, para todo $\alpha > 0$,

$$\alpha^p \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) \leq (\|f\|_p)^p, \text{ ou seja, } \alpha d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_p.$$

Assim, segue que

$$\|f\|_{p,\infty} = \sup\{\alpha d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}} : \alpha > 0\} \leq \|f\|_p.$$

Portanto, $\|f\|_{p,\infty} \leq \|f\|_p$ e como $f \in L^p$ temos que $\|f\|_p$ é finito, o que implica que $\|f\|_{p,\infty}$ é finita, ou seja, $L^p(X,\mu) \subset L^{(p,\infty)}(X,\mu)$, como queríamos. □

Um importante fato que deve ser notado é que a inclusão $L^p(X,\mu) \subset L^{(p,\infty)}(X,\mu)$ é estrita. A seguir, veremos um exemplo que ilustra essa situação.

Exemplo 2.15. Consideremos a reta real, com a medida usual de Lebesgue, e a função

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)=|x|^{-\frac{1}{p}}. \end{array}$$

Inicialmente, notemos que

$$\begin{aligned} d_f(\alpha) &= \mu(\{x\in\mathbb{R}:|x|^{-\frac{1}{p}}>\alpha\}) \\ &= \mu(\{x\in\mathbb{R}:|x|^{-1}>\alpha^p\}) \\ &= \mu(\{x\in\mathbb{R}:|x|<\alpha^{-p}\})=2\alpha^{-p}. \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \|f\|_{p,\infty} &= \inf\left\{C>0:d_f(\alpha)\leq\frac{C^p}{\alpha^p},\ \forall\alpha>0\right\} \\ &= \inf\left\{C>0:2\alpha^{-p}\leq\frac{C^p}{\alpha^p},\ \forall\alpha>0\right\} \\ &= \inf\{C>0:2\leq C^p,\ \forall\alpha>0\}=2^{\frac{1}{p}}<+\infty \end{aligned}$$

e, portanto, temos que $f\in L^{(p,\infty)}(\mathbb{R})$.

Porém, note que

$$(\|f\|_p)^p=\int_{\mathbb{R}}(|x|^{-\frac{1}{p}})^p dx=\int_{\mathbb{R}}|x|^{-1}dx=2\int_0^\infty\frac{1}{x}dx=+\infty.$$

Portanto, $f\notin L^p(\mathbb{R})$.

Veremos também uma desigualdade clássica, nos espaços L^p-fracos, cuja demonstração será omitida, porém pode ser vista com detalhes em [9], pág. 209.

Proposição 2.16 (Desigualdade de Hölder em $L^{p,\infty}$)**.** *Sejam $f\in L^{(p_1,\infty)}(X,\mu)$ e $g\in L^{(p_2,\infty)}(X,\mu)$, com $0<p_1,p_2<\infty$. Se $\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$, então $fg\in L^{(p,\infty)}(X,\mu)$ e existe $C=C(p_1,p_2)>0$ tal que*

$$\|fg\|_{p,\infty}\leq C\|f\|_{p_1,\infty}\|g\|_{p_2,\infty}.$$

2.2 Função Rearranjo não-crescente

Suponha que f é uma função mensurável em um espaço de medida (X,μ). Desejamos obter uma outra função f^* definida em $[0,\infty)$ que é não-crescente e equidistribuida com f, ou seja,

$$d_f(\alpha)=d_{f^*}(\alpha),\ \forall\alpha\geq 0.$$

A esta função, f^*, daremos o nome de **função rearranjo não-crescente**. Ela será de suma importância para a continuidade do trabalho devido a sua relação direta com o funcional que define os espaços de Lorentz (que serão estudados posteriormente).

Definição 2.17. Seja f uma função mensurável definida em (X,μ). A função rearranjo não-crescente de f é a função f^*, definida em $[0,\infty)$, por

$$f^*(t)=\inf\{s>0:d_f(s)\leq t\},$$

em que usamos, por convenção, que $\inf\emptyset=\infty$.

Observação 2.18. Vale notar dois fatos que seguem imediatamente da definição:

1. $f^*(t) = \infty$, sempre que $d_f(\alpha) > t$ para todo $\alpha \geq 0$, visto que $\inf \emptyset = \infty$;

2. $f^*(t)$ é não-crescente.

   De fato, sejam $t_1 < t_2$, com $t_1, t_2 \in [0, \infty)$. Considere os conjuntos

$$A = \{s > 0 : d_f(s) \leq t_1\} \text{ e } B = \{s > 0 : d_f(s) \leq t_2\}.$$

   Observemos que $A \subset B$, pois se $s \in A$, segue que $d_f(s) \leq t_1$ e então $d_f(s) \leq t_2$, ou seja, $s \in B$. Daí, temos que $\inf B \leq \inf A$, ou ainda, $f^*(t_2) \leq f^*(t_1)$.

Traremos agora um exemplo a fim de ilustrar o comportamento da função rearranjo não-crescente.

Exemplo 2.19. Considere a função simples do Exemplo 2.9, isto é,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x), \text{ em que } E_i \cap E_j = \emptyset \text{ se } i \neq j \text{ e } a_1 > \cdots > a_n > 0.$$

Como vimos, a função distribuição pode ser dada por

$$d_f(\alpha) = \sum_{j=0}^{n} B_j \chi_{[a_{j+1}, a_j)}(\alpha),$$

em que $B_j = \sum_{i=1}^{j} \mu(E_i)$, $a_{n+1} = B_0 = 0$ e $a_0 = \infty$.

Observe que para $B_0 \leq t < B_1$, o menor $s > 0$ tal que $d_f(s) \leq t$ é a_1. De maneira similar, temos que para $B_1 \leq t < B_2$, o menor $s > 0$ tal que $d_f(s) \leq t$ é a_2. Seguindo com o mesmo argumento, percebemos que

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{[B_{j-1}, B_j)}(t).$$

A imagem à seguir ilustra o caso em que $n = 3$.

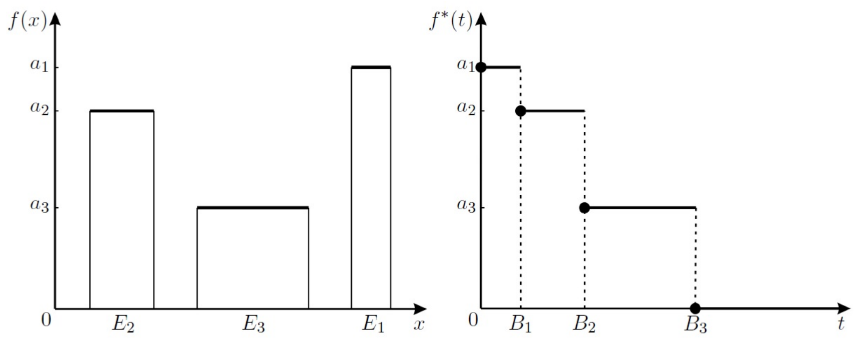

Figura 2.2: Os gráficos de uma função simples $f(x) = \sum_{j=1}^{3} a_j \chi_{E_j}(x)$ (à esquerda) e de sua função rearranjo f^* (à direita).

No próximo resultado veremos algumas propriedades interessantes da função rearranjo, que mostram como a ela se relaciona com a função distribuição (apresentada na seção anterior).

Proposição 2.20. *Sejam* (X,μ) *um espaço de medida e* f *uma função mensurável em* X. *Então temos que*

1. $f^*(d_f(\alpha)) \leq \alpha$ *sempre que* $\alpha > 0$;
2. $d_f(f^*(t)) \leq t$;
3. $f^*(t) > s$ *se, e somente se,* $t < d_f(s)$, *isto é,* $\{t \geq 0 : f^*(t) > s\} = [0, d_f(s))$;

Demonstração. *1.* Note que, se $\alpha > 0$, então $\alpha \in A = \{s > 0 : d_f(s) \leq d_f(\alpha)\}$. Assim,

$$f^*(d_f(\alpha)) = \inf A \leq \alpha.$$

2. Tomemos $s_n \in \{s > 0 : d_f(s) \leq t\}$ uma sequência que converge de forma decrescente para $f^*(t)$. Então, segue que $d_f(s_n) \leq t$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, assim, usando a Proposição 2.10, item *5.*, temos que

$$\lim_{n\to\infty} d_f(s_n) = d_f(f^*(t)) \leq t.$$

3. Se $s < f^*(t) = \inf\{u > 0 : d_f(u) \leq t\}$, então $s \notin \{u > 0 : d_f(u) \leq t\}$, ou seja, $d_f(s) > t$.

Reciprocamente, suponha, por absurdo, que $f^*(t) \leq s$. Assim, como d_f é uma função não-crescente, usando o item *2.* desta proposição, temos

$$d_f(s) \leq d_f(f^*(t)) \leq t, \text{ ou seja, } d_f(s) \leq t,$$

o que é um absurdo e, portanto, $f^*(t) > s$.

□

O próximo resultado traz propriedades clássicas da função rearranjo.

Proposição 2.21. *Sejam* (X,μ) *um espaço de medida,* f *e* g *funções mensuráveis em* X *e* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções mensuráveis que converge para* f *em* X. *Então temos que*

1. $|f|^* = f^*$;
2. *Se* $|g| \leq |f|$ μ*-q.t.p. então* $g^* \leq f^*$;
3. $(kf)^* = |k|f^*$, *para todo* $k \in \mathbb{C}$;
4. $(f+g)^*(t_1+t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$;
5. *Se* $|f_n|$ *é uma sequência de funções mensuráveis que cresce para* $|f|$ μ*-q.t.p., então* $(f_n)^*$ *é uma sequência que cresce para* f^*;
6. *Se* $|f| \leq \liminf_{n\to\infty} |f_n|$ μ*-q.t.p., então* $f^* \leq \liminf_{n\to\infty} (f_n)^*$.

Demonstração. *1.* Notemos que, pela própria definição, temos

$$d_f(\alpha) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = d_{|f|}(\alpha)$$

e, portanto, $f^* = |f|^*$.

2. Dado $t \in [0, \infty)$ consideremos, primeiramente, os conjuntos

$$A = \{s > 0 : d_f(s) \leq t\} \text{ e } B = \{s > 0 : d_g(s) \leq t\}.$$

Como $|g| \leq |f|$ μ-q.t.p., usando a Proposição 2.10, item *1.*, temos que $d_g \leq d_f$. Daí, evidentemente segue que $A \subset B$ e, assim,

$$g^*(t) = \inf B \leq \inf A = f^*(t).$$

3. Se $k = 0$, então o resultado é imediato. Para $k \neq 0$, usando a definição de função rearranjo e a Proposição 2.10, item *2.*, temos

$$\begin{aligned}
(kf)^*(t) &= \inf\{s > 0 : d_{kf}(s) \leq t\} \\
&= \inf\{s > 0 : d_f\left(\frac{s}{|k|}\right) \leq t\} \\
&= \inf\{|k|u > 0 : d_f(u) \leq t\}, \quad \left(\text{em que } u = \frac{s}{|k|}\right) \\
&= |k| \inf\{u > 0 : d_f(u) \leq t\} \\
&= |k| f^*(t).
\end{aligned}$$

4. Tomemos $t_1, t_2 \in [0, \infty)$. Consideremos os conjuntos

$$\begin{aligned}
A &= \{s_1 > 0 : d_f(s_1) \leq t_1\}, \\
B &= \{s_2 > 0 : d_g(s_2) \leq t_2\}, \\
C &= \{s > 0 : d_{f+g}(s) \leq t_1 + t_2\}.
\end{aligned}$$

Note que $A + B \subset C$. De fato, se $s \in A + B$, então $s = s_1 + s_2$, com $s_1 \in A$ e $s_2 \in B$. Daí, usando a Proposição 2.10, item *3.*, temos

$$d_{f+g}(s) = d_{f+g}(s_1 + s_2) \leq d_f(s_1) + d_g(s_2) \leq t_1 + t_2,$$

ou seja, $s \in C$.

Desse modo, para todo $s_1 \in A$ e $s_2 \in B$, temos que

$$(f + g)^*(t_1 + t_2) = \inf C \leq \inf(A + B) \leq s_1 + s_2.$$

Assim, tomando o ínfimo sobre todos os $s_1 \in A$ e $s_2 \in B$, vale que

$$(f + g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2).$$

5. Por hipótese temos

$$|f_n| \leq |f_{n+1}| \leq |f| \ \mu\text{-q.t.p. para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Usando o item *2.* desta proposição, temos que

$$(f_n)^* \leq (f_{n+1})^* \leq f^*.$$

Tomemos $h = \lim_{n\to\infty} (f_n)^*$, então segue que

$$h \leq f^*. \tag{2.10}$$

Por outro lado, como $(f_n)^*$ é uma sequência não-decrescente, segue que $(f_n)^* \leq h$, para todo n e, ainda, sabemos que d_f é uma função não-crescente, daí $d_{f_n}(h(t)) \leq d_{f_n}((f_n)^*(t))$.

Agora, usando a Proposição 2.20 item ,*2.*, temos que

$$d_{f_n}(h(t)) \leq d_{f_n}(f_n^*(t)) \leq t.$$

Agora, da Proposição 2.10, item *6.*, segue que

$$d_f(h(t)) \leq t.$$

Daí, $h(t) \in \{s > 0 : d_f(s) \leq t\}$ e, assim,

$$f^*(t) = \inf\{s > 0 : d_f(s) \leq t\} \leq h(t). \tag{2.11}$$

Portanto, de (2.10) e (2.11) temos $h = \lim_{n\to\infty} f_n^* = f^*$.

6. Sejam $F_n = \inf_{m\geq n} |f_m|$ e $h = \sup_{n\geq 1} F_n = \liminf_{n\to\infty} |f_n|$.

Agora, como F_n converge de forma crescente para h, pelo item *5.* desta proposição, temos que $(F_n)^*$ também converge de forma crescente para h^*.

Por hipótese, temos que $|f| \leq h$ μ-q.t.p., assim, pelo item *2.* desta proposição, concluímos que

$$f^* \leq h^* = \sup_{n\geq 1}(F_n)^*. \tag{2.12}$$

Como $F_n \leq |f_m|$ para todo $m \geq n$, segue novamente do item *2.* desta proposição, que $(F_n)^* \leq (f_m)^*$ para todo $m \geq n$ e, assim,

$$(F_n)^* \leq \inf_{m\geq n} (f_m)^* \Rightarrow \sup_{n\geq 1}(F_n)^* \leq \sup_{n\geq 1} \inf_{m\geq n} (f_m)^* = \liminf_{n\to\infty}(f_n)^*. \tag{2.13}$$

Daí, de (2.12) e (2.13), temos

$$(F_n)^* \leq \sup_{n\geq 1} \inf_{m\geq n} (f_m)^* = \liminf_{n\to\infty}(f_n)^*.$$

□

Uma propriedade que devemos verificar é a equidistribuição, que motivou a criação da função rearranjo f^*, ou seja, dado f uma função mensurável no espaço de medida (X, μ), temos que $d_f = d_{f^*}$.

Notemos que tal propriedade é imediata para as funções simples não-negativas, como pode ser observado nos Exemplos 2.9 e 2.19. Agora, para uma função mensurável f arbitrária, por um resultado da Teoria da Medida (ver [8], pág. 13), existe uma sequência de funções simples não-negativas (f_n) tal que f_n converge de forma crescente para $|f|$. Agora, pela Proposição 2.10, item *6.*, e pela Proposição 2.21 item *5.*, temos que d_{f_n} e $(f_n)^*$ convergem de forma crescente para d_f e f^*, respectivamente. Aplicando a Proposição 2.10 item *6.*, novamente, temos que $d_{(f_n)^*}$ converge de forma crescente para d_{f^*}.

Agora, como as f_n são funções simples, segue que $d_{f_n} = d_{f_n^*}$ e, portanto, como d_{f_n} converge de forma crescente para ambas d_f e d_{f^*}, pela unicidade do limite, segue $d_f = d_{f^*}$, como queríamos.

Os próximos resultados são uteis pois relacionam a função rearranjo não-crescente com as normas dos espaços L^p, L^p-fraco e inclusive Lorentz (como poderá pode ser observado posteriormente).

Proposição 2.22. *Sejam (X, μ) um espaço de medida e f uma função mensurável em X. Então temos que*

1. $(|f|^p)^* = (f^*)^p$, *para* $0 < p < \infty$;
2. $\displaystyle\int_X |f|^p d\mu = \int_0^\infty (f^*(t))^p dt$, *para* $0 < p < \infty$;
3. $\|f\|_\infty = f^*(0)$;
4. $\sup\{t^q f^*(t) : t > 0\} = \sup\{\alpha(d_f(\alpha))^q : \alpha > 0\}$, *para* $0 < q < \infty$.

Demonstração. *1.* Tome $0 < p < \infty$. Note que,

$$d_{|f|^p}(\alpha) = d_f\left(\alpha^{\frac{1}{p}}\right) = d_{f^*}\left(\alpha^{\frac{1}{p}}\right) = d_{(f^*)^p}(\alpha).$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
(|f|^p)^*(t) &= \inf\{s > 0 : d_{|f|^p}(s) \leq t\} \\
&= \inf\{s > 0 : d_{(f^*)^p}(s) \leq t\} \\
&= \inf\{s > 0 : d_{f^*}(s^{\frac{1}{p}}) \leq t\} \\
&= \inf\{u^p > 0 : d_{f^*}(u) \leq t\} \\
&= (\inf\{u > 0 : d_f(u) \leq t\})^p \\
&= (f^*)^p(t).
\end{aligned}$$

2. Pela Proposição 2.11, temos que

$$\begin{aligned}
\int_X |f|^p d\mu &= (\|f\|_p)^p \\
&= p\int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha \\
&= p\int_0^\infty \alpha^{p-1} d_{f^*}(\alpha) d\alpha \\
&= (\|f^*\|_p)^p \\
&= \int_0^\infty (f^*(t))^p dt.
\end{aligned}$$

3. Note que

$$f^*(0) = \inf\{s > 0 : d_f(s) \leq 0\} = \inf\{s > 0 : d_f(s) = 0\} = \|f\|_\infty.$$

4. Tome $0 < q < \infty$. Dado $\alpha > 0$, tomemos ϵ tal que $0 < \epsilon < \alpha$. Como $d_f(\alpha) - \epsilon < d_f(\alpha)$, segue da Proposição 2.20 item *3.*, que $f^*(d_f(\alpha) - \epsilon) > \alpha$. Assim,

$$\sup\{t^q f^*(t) : t > 0\} \geq (d_f(\alpha) - \epsilon)^q f^*(d_f(\alpha) - \epsilon) > (d_f(\alpha) - \epsilon)^q \alpha.$$

Agora, fazendo $\epsilon \to 0$ e, tomando o supremo sobre todos $\alpha > 0$, segue que

$$\sup\{t^q f^*(t) : t > 0\} \geq \sup\{\alpha(d_f(\alpha))^q : \alpha > 0\}. \tag{2.14}$$

Reciprocamente, dado $t > 0$, tomemos ϵ tal que $0 < \epsilon < f^*(t)$, ou seja, $0 < f^*(t) - \epsilon < f^*(t)$. Daí, pela proposição 2.20 item *3.*, temos que $d_f(f^*(t) - \epsilon) > t$. Assim,

$$\sup\{\alpha(d_f(\alpha))^q : \alpha > 0\} \geq (f^*(t) - \epsilon) d_f(f^*(t) - \epsilon)^q > (f^*(t) - \epsilon)t^q.$$

Agora, fazendo $\epsilon \to 0$ e, tomando o supremo sobre todos $t > 0$, segue que

$$\sup\{\alpha(d_f(\alpha))^q : \alpha > 0\} \geq \sup\{t^q f^*(t) : t > 0\}. \tag{2.15}$$

Portanto, de (2.14) e (2.15) temos

$$\sup\{\alpha(d_f(\alpha))^q : \alpha > 0\} = \sup\{t^q f^*(t) : t > 0\}.$$

□

O resultado à seguir é clássico e será de grande importância na demonstração de alguns resultados sobre os espaço de Lorentz, como a dualidade e alguns desigualdades clássicas.

Teorema 2.23 (Desigualdade de Hardy - Littlewood)**.** *Sejam (X, μ) um espaço de medida, f e g duas funções mensuráveis. Então temos*

$$\int_X |f(x)g(x)|\ d\mu \leq \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)\ dt.$$

Demonstração. Consideremos, inicialmente, duas funções simples $f(x) = \chi_A(x)$ e $g(x) = \chi_B(x)$. Então segue que

$$\begin{aligned}
\int_X |f(x)g(x)|\ d\mu &= \int_X \chi_{A\cap B}(x)\ d\mu \\
&= \mu(A \cap B) \\
&\leq \int_0^{\min\{\mu(A),\mu(B)\}} dt \\
&= \int_0^{\mu(A)} \chi_{(0,\mu(B))}(t)\ dt.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Agora, pelo Exemplo 2.19, temos que para funções simples $f(x) = \chi_A(x)$ e $g(x) = \chi_B(x)$ suas funções rearranjo são $f^*(t) = \chi_{(0,\mu(A))}(t)$ e $g^*(t) = \chi_{(0,\mu(B))}(t)$, respectivamente. E assim, de (2.16), temos

$$\begin{aligned}
\int_X |f(x)g(x)|\ d\mu &\leq \int_0^{\mu(A)} \chi_{(0,\mu(B))}(t)dt \\
&= \int_0^{\mu(A)} g^*(t)\ dt \\
&= \int_0^\infty \chi_{(0,\mu(A))}(t)g^*(t)\ dt \\
&= \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)\ dt.
\end{aligned}$$

O caso geral, em que consideramos f e g funções mensuráveis quaisquer, é obtido aplicando o Teorema da Convergência Monótona ([8], pág. 31) nas sequências de funções simples f_n e g_n que convergem de forma crescente para $|f|$ e $|g|$, respectivamente (para checar a existência das funções simples com tal propriedade, confira [8], pág. 13) e utilizando a Proposição 2.21 item *5.* para obtermos que as sequências de funções $(f_n)^*$ e $(g_n)^*$ convergem de forma crescente para f^* e g^*, respectivamente. □

A seguir, veremos algumas definições e resultados que serão extremamente importantes para se mostrar que o espaço de Lorentz (ver Definição 3.1) é normado.

Definição 2.24. Seja (X, μ) um espaço de medida. O conjunto mensurável A é chamado de átomo se $\mu(A) > 0$ e para todo conjunto mensurável B, com $B \subset A$ tal que $\mu(B) < \mu(A)$, temos que $\mu(B) = 0$.

Definição 2.25. Um espaço de medida (X, μ) que não possui átomos é chamado de não-atômico, ou seja, para todo conjunto mensurável A, com $\mu(A) > 0$, existe um conjunto mensurável B, com $B \subset A$ tal que $\mu(A) > \mu(B) > 0$.

Observação 2.26. Vale notar que o $\mathbb{R}^n$ munido da medida de Lebesgue é um espaço não-atômico.

Traremos, agora, um importante resultado para espaços de medida não-atômicos, cuja demonstração será omitida por fugir dos propósitos deste texto. Contudo, tal demonstração pode ser encontrada em [9].

Proposição 2.27. *Seja (X, μ) um espaço de medida não-atômico. Se A é um conjunto mensurável, com $\mu(A) > 0$, então para todo número real b satisfazendo $\mu(A) \geq b \geq 0$, existe um conjunto mensurável B, com $B \subset A$ tal que $\mu(B) = b$.*

O próximo resultado mostra que a integral da função rearranjo decrescente satisfaz uma fórmula do tipo integração por partes:

Lema 2.28. *A seguinte igualdade é válida:*

$$\int_0^t f^*(s)\ ds = tf^*(t) + \int_{f^*(t)}^{\infty} d_{f^*}(\lambda)\ d\lambda.$$

Demonstração. Consideremos m a medida de Lebesgue definida em $[0, \infty)$. Assim, pela Proposição 2.20, item *3.*, temos

$$m\left(\{s \geq 0 : f^*(s) > \lambda\}\right) = m\left(\{s \geq 0 : s < d_f(\lambda)\}\right) = m([0, d_f(\lambda))) = d_f(\lambda) = d_{f^*}(\lambda).$$

Desse modo, pela igualdade anterior, segue que

$$\int_{f^*(t)}^{\infty} d_{f^*}(\lambda)\ d\lambda = \int_{f^*(t)}^{\infty} m\left(\{s \geq 0 : f^*(s) > \lambda\}\right)\ d\lambda.$$

Observemos, ainda, que

$$\chi_{\{u \geq 0 : f^*(u) > \lambda\}}(s) = \begin{cases} 1, & \text{se } f^*(s) > \lambda, \\ 0, & \text{se } f^*(s) \leq \lambda. \end{cases}$$

Daí, como f^* é não crescente (Observação 2.18) e $\lambda \in (f^*(t), \infty)$, segue que

$$\int_{f^*(t)}^{\infty} m\left(\{s \geq 0 : f^*(s) > \lambda\}\right)\ d\lambda = \int_{f^*(t)}^{\infty} \int_0^t \chi_{\{u \geq 0 : f^*(u) > \lambda\}}(s)\ dm(s)\ d\lambda.$$

Assim, utilizando o Teorema de Fubini e o novamente o fato de f^* ser não-crescente, temos

$$\begin{aligned}
\int_{f^*(t)}^{\infty} d_{f^*}(\lambda)\, d\lambda &= \int_{f^*(t)}^{\infty}\int_0^t \chi_{\{u\geq 0: f^*(u)>\lambda\}}(s)\, dm(s)\, d\lambda \\
&= \int_{f^*(t)}^{\infty}\int_0^t \chi_{(0,f^*(s))}(\lambda)\, dm(s)\, d\lambda \\
&= \int_0^{\infty} \chi_{(f^*(t),\infty)}(\lambda)\left(\int_0^t \chi_{(0,f^*(s))}(\lambda)\, dm(s)\right)\, d\lambda \\
&= \int_0^t\int_0^{\infty} \chi_{(f^*(t),\infty)}(\lambda)\chi_{(0,f^*(s))}(\lambda)\, d\lambda\, dm(s) \\
&= \int_0^t\int_0^{\infty} \chi_{(f^*(t),f^*(s))}(\lambda)\, d\lambda\, dm(s) \\
&= \int_0^t (f^*(s)-f^*(t))\, dm(s) \\
&= \left(\int_0^t f^*(s)\, dm(s)\right) - tf^*(t).
\end{aligned}$$

Desse modo, da igualdade acima, segue que

$$\int_0^t f^*(s)\, ds = tf^*(t) + \int_{f^*(t)}^{\infty} d_{f^*}(\lambda)\, d\lambda,$$

como queríamos. □

Teorema 2.29. *Seja (X,μ) um espaço de medida não atômico. Então:*

$$\sup_{\mu(E)=t}\left\{\int_E |f|\, d\mu\right\} = \int_0^t f^*(s)\, ds.$$

Demonstração. Dado $t>0$, e utilizando a Proposição 2.11, (com $p=1$ e $X=E$), temos

$$\int_E |f|\, d\mu = \int_0^{\infty} d_f(\lambda)\, d\lambda = \int_0^{\infty} \mu(\{x\in E : |f(x)|>\lambda\})\, d\lambda.$$

Como $(0,\infty) = \{\lambda\in(0,\infty) : d_f(\lambda)\leq t\}\cup\{\lambda\in(0,\infty) : d_f(\lambda)>t\}$, segue que

$$\begin{aligned}
\int_E |f|\, d\mu &= \int_0^{\infty} \mu(\{x\in E : |f(x)|>\lambda\})\, d\lambda \\
&= \int_{\{\lambda: d_f(\lambda)\leq t\}} \mu(\{x\in E : |f(x)|>\lambda\})\, d\lambda \\
&\quad + \int_{\{\lambda: d_f(\lambda)>t\}} \mu(\{x\in E : |f(x)|>\lambda\})\, d\lambda.
\end{aligned}$$

Para facilitar a notação, denotamos $E_f(\lambda) = \{x\in X : |f(x)|>\lambda\}$, ou seja, $d_f(\lambda) = \mu(E_f(\lambda))$. Agora, temos que

$$\begin{aligned}
\sup_{\mu(E)=t}\left\{\int_E |f|\, d\mu\right\} &= \sup_{\mu(E)=t}\left\{\int_0^{\infty} \mu(\{E\cap E_f(\lambda)\})\, d\lambda\right\} \\
&= \sup_{\mu(E)=t}\left\{\int_{\{\lambda: d_f(\lambda)\leq t\}} \mu(\{E\cap E_f(\lambda)\})\, d\lambda\right\} \\
&\quad + \sup_{\mu(E)=t}\left\{\int_{\{\lambda: d_f(\lambda)>t\}} \mu(\{E\cap E_f(\lambda)\})\, d\lambda\right\}.
\end{aligned}$$

Como (X, μ) é um espaço de medida não-atômico, pela Proposição 2.27, se $d_f(\lambda) = \mu(E_f(\lambda)) > t > 0$, então existe um conjunto mensurável E tal que $E \subset E_f(\lambda)$ e $\mu(E) = t$.

Notemos também que $\{\lambda \in (0, \infty) : d_f(\lambda) \leq t\} = [f^*(t), \infty)$. De fato, se tomarmos $\alpha \in \{\lambda \in (0, \infty) : d_f(\lambda) \leq t\}$ então $d_f(\alpha) \leq t$ e, assim,

$$f^*(t) = \inf\{s \in (0, \infty) : d_f(s) \leq t\} \leq \alpha, \text{ ou seja, } \alpha \in [f^*(t), \infty),$$

por outro lado, se tomarmos $\alpha \in [f^*(t), \infty)$, então $f^*(t) = \inf\{s \in (0, \infty) : d_f(s) \leq t\} \leq \alpha$, ou seja, $\alpha \in \{\lambda \in (0, \infty) : d_f(\lambda) \leq t\}$.

Agora, pelas colocações feitas acima, temos

$$\begin{aligned} \sup_{\mu(E)=t} \left\{ \int_E |f| \, d\mu \right\} &= \int_{f^*(t)}^{\infty} \mu(E_f(\lambda)) \, d\lambda + \int_0^{f^*(t)} t \, d\lambda \\ &= \int_{f^*(t)}^{\infty} d_f(\lambda) \, d\lambda + \int_0^{f^*(t)} t \, d\lambda. \end{aligned}$$

Daí, utilizando o Lema 2.28 e o fato de que $d_{f^*} = d_f$, temos

$$\begin{aligned} \sup_{\mu(E)=t} \left\{ \int_E |f| \, d\mu \right\} &= \int_{f^*(t)}^{\infty} d_f(\lambda) \, d\lambda + t f^*(t) \\ &= \int_{f^*(t)}^{\infty} d_{f^*}(\lambda) \, d\lambda + t f^*(t) \\ &= \int_0^t f^*(s) \, ds. \end{aligned}$$

□

2.3 Função Duplo Rearranjo

Definiremos a seguir a função duplo rearranjo de uma função f, também conhecida como função maximal, e estudaremos algumas de suas propriedades.

Definição 2.30. Sejam (X, μ) um espaço de medida e f uma função mensurável em X. A função duplo rearranjo de f é a função definida em $(0, \infty)$ por

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) \, ds.$$

Proposição 2.31. *Sejam (X, μ) um espaço de medida, f e g funções mensuráveis em X e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis que converge para f em X. Então temos que*

1. *f^{**} é uma função não-crescente;*
2. *$f^* \leq f^{**}$;*
3. *Se $|f(x)| \leq |g(x)|$ μ-q.t.p., então $f^{**} \leq g^{**}$;*
4. *Se $|f_n|$ converge de forma crescente para $|f|$ μ-q.t.p., então $(f_n)^{**}$ converge de forma crescente para f^{**}.*
5. *$(kf)^{**} = |k| f^{**}$, para todo $k \in \mathbb{C}$.*

Demonstração. 1. Tomemos $0 < t_1 < t_2$, então segue

$$\begin{aligned}
f^{**}(t_2) &= \frac{1}{t_2}\int_0^{t_2} f^*(s)\ ds \\
&= \frac{1}{t_2}\int_0^{t_1} f^*(s)\ ds + \frac{1}{t_2}\int_{t_1}^{t_2} f^*(s)\ ds \\
&\leq \frac{1}{t_2}\int_0^{t_1} f^*(s)\ ds + \frac{1}{t_2} f^*(t_1)(t_2 - t_1), \text{ (pois } f \text{ é não-crescente)} \\
&= \frac{1}{t_2}\int_0^{t_1} f^*(s)\ ds + \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right) t_1 f^*(t_1) \\
&\leq \frac{1}{t_2}\int_0^{t_1} f^*(s)\ ds + \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right) \int_0^{t_1} f^*(s)\ ds, \text{ (pois } f \text{ é não-crescente)} \\
&= \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} f^*(s)\ ds = f^{**}(t_1).
\end{aligned}$$

2. Para todo $t > 0$, como f^* é não-crescente, temos que

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\ ds \geq \frac{1}{t}\int_0^t f^*(t)\ ds = \frac{1}{t} t f^*(t) = f^*(t).$$

3. Fazendo uso da Proposição 2.21, item *2.*, temos que $f^* \leq g^*$ e, daí, segue que

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\ ds \leq \frac{1}{t}\int_0^t g^*(s)\ ds = g^{**}(t), \text{ para todo } t > 0.$$

4. Fazendo uso da Proposição 2.21, item *5.*, temos que $(f_n)^*$ converge de forma crescente para f^* e assim, usando o item *3.*, dessa proposição, como $(f_n)^* \leq (f_{n+1})^* \leq f^*$ temos que $(f_n)^{**} \leq (f_{n+1})^{**} \leq f^{**}$.

Resta mostrar a convergência, visto que já garantimos a monotonicidade de $(f_n)^{**}$. Assim, usando o Teorema da Convergência Monótona (ver [8], pág. 31), temos que

$$\begin{aligned}
f^{**}(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\ ds \\
&= \frac{1}{t}\int_0^t \lim_{n\to\infty} (f_n)^*(s)\ ds \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t (f_n)^*(s)\ ds \\
&= \lim_{n\to\infty} (f_n)^{**}(t).
\end{aligned}$$

5. Pela Proposição 2.21, item *3.*, temos que $(kf)^* = |k| f^*$. Assim,

$$\begin{aligned}
(kf)^{**}(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t (kf)^*(s)\ ds \\
&= \frac{1}{t}\int_0^t |k| f^*(s)\ ds \\
&= |k| \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\ ds \\
&= |k| f^{**}(t).
\end{aligned}$$

□

O próximo resultado mostra a subaditividade da função duplo rearranjo em um espaço de medida não atômico, fato que será de grande utilidade para mostrar que o espaço de Lorentz é normado.

Proposição 2.32. *Sejam (X, μ) um espaço de medida não atômico, f e g funções mensuráveis em X. Então temos*

$$(f+g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t).$$

Demonstração. Tome $t > 0$. Pelo Teorema 2.29, temos

$$\begin{aligned}
(f+g)^{**}(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t (f+g)^*(s)\ ds \\
&= \frac{1}{t}\sup_{\mu(E)=t}\left\{\int_E |f+g|\ d\mu\right\} \\
&\leq \frac{1}{t}\sup_{\mu(E)=t}\left\{\left(\int_E |f|\ d\mu + \int_E |g|\ d\mu\right)\right\} \\
&\leq \frac{1}{t}\sup_{\mu(E)=t}\left\{\int_E |f|\ d\mu\right\} + \frac{1}{t}\sup_{\mu(E)=t}\left\{\int_E |g|\ d\mu\right\} \\
&= \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\ ds + \frac{1}{t}\int_0^t g^*(s)\ ds \\
&= f^{**}(t) + g^{**}(t).
\end{aligned}$$

□

A seguir veremos algumas propriedades do duplo rearranjo do operador convolução em $\mathbb{R}^n$ (os resultados abaixo, na verdade, são válidos para qualquer espaço de medida, basta apenas definir de modo mais genérico o operador convolução). Estas propriedades serão úteis para demonstrarmos algumas desigualdades clássicas nos espaços de Lorentz.

Definição 2.33. Sejam f e g funções mensuráveis definidas de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$. A função $h = f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita convolução de f e g e é dada por

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\ dy.$$

O lema abaixo terá sua demonstração omitida, porém, tal demonstração poderá ser encontrada em [10] (pág. 131).

Lema 2.34. *Sejam f e g funções mensuráveis definidas de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$. Então*

$$h^{**}(t) \leq t f^{**}(t) g^{**}(t) + \int_t^\infty f^*(s)g^*(s)\ ds,\ \forall t > 0.$$

Proposição 2.35. *Sejam f e g funções mensuráveis definidas de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$. Então*

$$h^{**}(t) \leq \int_t^\infty f^{**}(s)g^{**}(s)\ ds,\ \forall t > 0.$$

Demonstração. Se $\displaystyle\int_t^\infty f^{**}(s)g^{**}(s)\ ds$ for infinita, não há o que mostrar.

Sendo assim, suponhamos que, $\displaystyle\int_t^\infty f^{**}(s)g^{**}(s)\ ds < \infty$, para todo $t > 0$.

Note, primeiramente, que $\displaystyle\lim_{t\to\infty} t f^{**}(t)g^{**}(t) = 0$, pois como $f^*(t)$ e $g^*(t)$ são funções não crescentes, temos que

$$\begin{aligned}
0 \leq t f^{**}(t) g^{**}(t) &= t\left(\frac{1}{t}\right)\left(\int_0^t f^*(s)\ ds\right)\left(\frac{1}{t}\right)\left(\int_0^t g^*(s)\ ds\right) \\
&\leq \frac{1}{t} f^*(0)g^*(0).
\end{aligned}$$

Assim, quando $t \to \infty$, da desigualdade acima, temos imediatamente que $\lim_{t\to\infty} tf^{**}(t)g^{**}(t) = 0$.

Agora, usando o Lema 2.34 e o fato de que $f^*(t) \le f^{**}(t)$ (Proposição 2.31, item *2.*), segue que

$$h^{**}(t) \le tf^{**}(t)g^{**}(t) + \int_t^\infty f^{**}(s)g^*(s)ds, \ \forall t > 0. \tag{2.17}$$

Notemos também que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f^{**}(t)) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\ ds\right) \\ &= \frac{1}{t}f^*(t) - \frac{1}{t^2}\int_0^t f^*(s)\ ds \\ &= \frac{1}{t}(f^*(t) - f^{**}(t)) \end{aligned}$$

e, de forma análoga,

$$\frac{d}{dt}(g^{**}(t)) = \frac{1}{t}(g^*(t) - g^{**}(t)).$$

Logo, segue que

$$\frac{d}{dt}(tg^{**})(t) = g^{**}(t) + t\frac{d}{dt}(g^{**})(t) = g^*(t).$$

Por fim, integrando por partes a integral da desigualdade (2.17), temos

$$\begin{aligned} h^{**}(t) &\le tf^{**}(t)g^{**}(t) + \int_t^\infty f^{**}(s)g^*(s)\ ds \\ &\le tf^{**}(t)g^{**}(t) + [sg^{**}(s)f^{**}(s)]_t^\infty - \int_t^\infty \frac{1}{s}\left[f^*(s) - f^{**}(s)\right] sg^{**}(s)\ ds \\ &= tf^{**}(t)g^{**}(t) + \lim_{s\to\infty}(sg^{**}(s)f^{**}(s)) - tf^{**}(t)g^{**}(t) + \int_t^\infty f^{**}(s)g^{**}(s)\ ds \\ &- \int_t^\infty f^*(s)g^{**}(s)\ ds \\ &= \int_t^\infty f^{**}(s)g^{**}(s)\ ds - \int_t^\infty f^*(s)g^{**}(s)\ ds \\ &\le \int_t^\infty f^{**}(s)g^{**}(s)\ ds. \end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$h^{**}(t) \le \int_t^\infty f^{**}(s)g^{**}(s)\ ds.$$

□

2.4 Convergência em Medida

Apresentaremos agora o conceito de convergência em medida que será utilizado posteriormente na demonstração de completude do espaço de Lorentz.

Definição 2.36. Sejam (X, μ) um espaço de medida, f um função mensurável em X e (f_n) uma sequência de funções mensuráveis em X. A sequência (f_n) é dita convergir para f em medida, se para todo $\epsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) < \epsilon, \text{ sempre que } n \ge n_0.$$

Definição 2.37. Sejam (X, μ) um espaço de medida, (f_n) uma sequência de funções mensuráveis em X. A sequência (f_n) é dita de Cauchy em medida, se para todo $\epsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\mu(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| > \epsilon\}) < \epsilon, \text{ sempre que } m, n > n_0.$$

Podemos dizer que a convergência em medida é uma noção "mais fraca" do que a convergência em L^p ou até mesmo $L^{(p,\infty)}$, com $0 < p \leq \infty$. O resultado a seguir ilustra melhor esta ideia.

Proposição 2.38. *Sejam (X, μ) um espaço de medida, $0 < p \leq \infty$ e consideremos os espaços $L^p = L^p(X, \mu)$ e $L^{(p,\infty)} = L^{(p,\infty)}(X, \mu)$. Então temos*

1. *Se (f_n) é uma sequência de funções mensuráveis que converge para uma função mensurável f em L^p, então (f_n) converge para f em $L^{(p,\infty)}$.*

2. *Se (f_n) é uma sequência de funções mensuráveis que converge para uma função mensurável f em $L^{(p,\infty)}$ então, (f_n) converge para f em medida.*

Demonstração. 1. Para $p = \infty$ o resultado segue de modo imediato, visto que nesse caso $L^p = L^{p,\infty}$. Assim, fixaremos $0 < p < \infty$.

Por hipótese, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f\|_p < \epsilon, \text{ sempre que } n \geq n_0.$$

Daí, usando a Proposição 2.14, temos que

$$\|f_n - f\|_{p,\infty} \leq \|f_n - f\|_p < \epsilon, \text{ sempre que } n \geq n_0,$$

ou seja, f_n converge para f em $L^{(p,\infty)}$.

2. Por hipótese, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, temos

$$\|f_n - f\|_{p,\infty} = \sup\{\alpha \left(d_{(f_n - f)}(\alpha)\right)^{\frac{1}{p}} : \alpha > 0\} < \epsilon^{\frac{1}{p}+1},$$

ou seja,

$$\sup\{\alpha \ \ (\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \alpha\}))^{\frac{1}{p}} : \alpha > 0\} < \epsilon^{\frac{1}{p}+1},$$

donde segue que

$$\epsilon \ \ (\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}))^{\frac{1}{p}} < \epsilon^{\frac{1}{p}+1}.$$

Assim, obtemos que

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) < \epsilon.$$

Portanto, (f_n) converge para f em medida. □

Proposição 2.39. *Sejam (X, μ) um espaço de medida, $0 < p \leq \infty$. Se (f_n) é uma sequência de Cauchy em $L^{(p,\infty)} = L^{(p,\infty)}(X, \mu)$, então (f_n) é uma sequência de Cauchy em medida.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Como (f_n) é de Cauchy em $L^{p,\infty}$ segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n, m \geq n_0$,

$$\|f_n - f_m\|_{p,\infty} = \sup\{\alpha \left(d_{(f_n - f_m)}(\alpha)\right)^{\frac{1}{p}} : \alpha > 0\} < \epsilon^{\frac{1}{p}+1},$$

ou seja,

$$\sup\{\alpha \ \ (\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \alpha\}))^{\frac{1}{p}} : \alpha > 0\} < \epsilon^{\frac{1}{p}+1}.$$

Logo, temos que

$$\epsilon \ \ (\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \epsilon\}))^{\frac{1}{p}} < \epsilon^{\frac{1}{p}+1}$$

e, portanto,

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \epsilon\}) < \epsilon,$$

donde concluímos que (f_n) é uma sequência de Cauchy em medida. □

Em muitas situações é necessário extrair uma subsequência convergente de uma sequência dada. Os próximos resultados irão nos fornecer um meio de extrair tal subsequência.

Teorema 2.40. *Sejam (X, μ) um espaço de medida, f uma função mensurável em X e (f_n) um sequência de funções mensuráveis em X que converge em medida para f. Então existe alguma subsequência de (f_n) que converge para f μ-q.t.p.*

Demonstração. Como (f_n) converge para f em medida, podemos tomar índices n_k tais que para todo $k \in \mathbb{N}$, tenhamos

$$\mu(\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| > 2^{-k}\}) < 2^{-k} \tag{2.18}$$

e, ainda, podemos ordenar os índices, de forma que $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$.

Agora, definimos os conjuntos

$$A_k = \{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| > 2^{-k}\}.$$

Note agora que, usando a desigualdade dada em (2.18), temos

$$\mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mu(A_k) \leq \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-k} = 2^{1-m}, \text{ para todo } m = 1, 2, 3, \cdots$$

e, segue de modo imediato, que

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq 1 < \infty.$$

Agora, observe que, o conjunto $A = \{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| > 0\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$ e, ainda, note que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset \bigcup_{k=2}^{\infty} A_k \supset \cdots \supset \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k \supset \bigcup_{k=m+1}^{\infty} A_k \supset \cdots,$$

ou seja, temos uma sequência decrescente de conjuntos mensuráveis. Assim, por um resultado da Teoria da Medida (ver [8], pág. 21), segue que

$$0 \leq \mu(A) = \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) = \lim_{m \to \infty} \mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) \leq \lim_{m \to \infty} 2^{1-m} = 0,$$

ou seja, $\mu(A) = 0$.

Por fim, observe que A contém todos pontos $x \in X$ tais que $(f_{n_k}(x))$ não converge para $f(x)$. Portanto, temos que f_{n_k} converge para f exceto em um conjunto de medida nula (conjunto A), como queríamos. $\square$

Teorema 2.41. *Sejam (X, μ) um espaço de medida e (f_n) uma sequência de Cauchy em medida. Então existe alguma subsequência de (f_n) que converge para uma função f μ-q.t.p.*

Demonstração. Como f_n é Cauchy em medida, temos que para todo $k \in \mathbb{N}$, podemos tomar índices n_k tais que

$$\mu(\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| > 2^{-k}\}) < 2^{-k},$$

com os índices ordenados de forma que $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$.

Definimos agora os conjuntos

$$A_k = \{x \in X : |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| > 2^{-k}\}.$$

Usando o mesmo argumento utilizado na demonstração do Teorema 2.40, temos que

$$\mu(\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| > 0\}) = \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) = 0.$$

Assim, se $x \notin \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$ e $i \geq j \geq j_0 \geq m$ (com j_0 suficientemente grande tal que $2^{1-j_0} < \epsilon$) temos que

$$|f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x)| \leq \sum_{l=j}^{i-1} |f_{n_l}(x) - f_{n_{l+1}}(x)| \leq \sum_{l=j}^{i-1} 2^{-l} = 2^{1-j} \leq 2^{1-j_0} < \epsilon,$$

o que implica que a sequência $(f_{n_i}(x))_i$ é de Cauchy para todo x no conjunto $\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right)^c$ e, portanto, convergente. Daí, definimos a função

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{j \to \infty} f_{n_j}(x), \text{ se } x \notin \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=m}^{\infty} A_k; \\ 0, \text{ se } x \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=m}^{\infty} A_k. \end{cases}$$

Então, f_{n_j} converge para f μ-q.t.p.. $\square$

3 Espaços de Lorentz

3.1 Espaços de Lorentz

Definição 3.1. Sejam (X, μ) um espaço de medida, f uma função mensurável em X e $0 < p, q \leq \infty$, definimos

$$\|f\|^*_{L^{p,q}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}, \text{ se } q < \infty \\ \displaystyle\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t), \text{ se } q = \infty. \end{cases}$$

O conjunto de todas as funções f mensuráveis em X com $\|f\|^*_{L^{p,q}} < \infty$ é denotado por $L^{p,q} = L^{p,q}(X, \mu)$ e é chamado de espaço de Lorentz com índices p e q.

Assim como nos espaços L^p e L^p-fraco, duas funções em $L^{p,q}(X, \mu)$ são consideradas iguais se elas são iguais μ-q.t.p..

Observação 3.2. A partir da definição acima, podemos relacionar os espaços de Lorentz com os espaços L^p e L^p-fraco. De fato;

1. $L^{\infty,\infty} = L^\infty$. Relembrando o fato de que f^* é não crescente e utilizando a Proposição 2.22, item *3.*, temos

$$\|f\|^*_{L^{\infty,\infty}} = \sup_{t>0} f^*(t) = f^*(0) = \|f\|_\infty.$$

2. $L^{p,\infty} = L^p$-fraco. Pela Proposição 2.22, item *4.*, temos

$$\|f\|^*_{L^{p,\infty}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = \sup_{\alpha>0} \alpha d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{p,\infty}$$

3. $L^{p,p} = L^p$, para $0 < p < \infty$. Pela Proposição 2.22, item *2.*, temos

$$\|f\|^*_{L^{p,p}} = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^\infty (f^*(t))^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p.$$

Desse modo, usaremos a notação que for mais conveniente para denotar os espaços acima, por exemplo, usaremos $L^{p,\infty}$ para denotar o espaço L^p - fraco ($L^{(p,\infty)}$).

A seguir, veremos um exemplo em que ilustra o cálculo do funcional $\| \cdot \|^*_{L^{p,q}}$ para uma função simples.

Exemplo 3.3. Consideremos uma função simples f não negativa, dada por:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x), \text{ onde } E_i \cap E_j = \emptyset \text{ e } a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0.$$

Pelo Exemplo 2.19, segue que a função rearranjo f^* é dada por

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{[B_{j-1}, B_j)}(t),$$

em que $B_j = \sum_{i=1}^{j} \mu(E_i)$, $a_{n+1} = B_0 = 0$ e $a_0 = \infty$.

Daí, segue que se $0 < q < \infty$, então

$$\begin{aligned}
\|f\|^*_{L^{p,q}} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{[B_{j-1}, B_j)}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^\infty (t^{\frac{q}{p}-1}) \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{[B_{j-1}, B_j)}(t) \right)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(a_1^q B_1^{\frac{q}{p}} + a_2^q (B_2^{\frac{q}{p}} - B_1^{\frac{q}{p}}) + \cdots + a_n^q (B_n^{\frac{q}{p}} - B_{n-1}^{\frac{q}{p}}) \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

e, ainda, se $q = \infty$, segue que

$$\begin{aligned}
\|f\|^*_{L^{p,\infty}} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \\
&= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{[B_{j-1}, B_j)}(t) \\
&= \sup_{1 \le j \le n} a_j B_j^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Observação 3.4. Note que, no exemplo acima, não consideramos o caso em que $p = \infty$ e $0 < q < \infty$. Nesse caso, teríamos que $\|f\|^*_{L^{p,q}} = \infty$, exceto se a função simples f fosse a nula. Agora, como toda função mensurável f pode ser aproximada por sequência de funções simples, concluímos que $L^{\infty,q} = \{0\}$.

Infelizmente, o funcional $\|\cdot\|^*_{L^{p,q}}$ não nos fornece uma norma para $L^{p,q}$ para todos os índices p, q da sua definição, visto que a desigualdade triangular nem sempre é satisfeita (para mais detalhes, veja [9], pág. 219). Desse modo, definiremos agora o funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$, com $1 < p < \infty$ e $1 \le q \le \infty$, de modo que o mesmo seja uma norma para $L^{p,q}$ e ainda que a topologia gerada por esse funcional seja equivalente a gerada por $\|\cdot\|^*_{L^{p,q}}$.

Definição 3.5. Sejam (X, μ) um espaço de medida, f uma função mensurável em X, $1 < p < \infty$ e $1 \le q \le \infty$, definimos o seguinte funcional:

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}, & \text{se } q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t), & \text{se } q = \infty. \end{cases}$$

Teorema 3.6. *Sejam (X,μ) um espaço de medida não atômico, f uma função mensurável em X que está em $L^{p,q}=L^{p,q}(X,\mu)$, $1<p<\infty$ e $1\leq q\leq\infty$. Então o funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ define uma norma em $L^{p,q}$.*

Demonstração. Seja f uma função mensurável que está em $L^{p,q}$. Inicialmente, notemos que segue imediatamente da definição que $\|f\|_{L^{p,q}}\geq 0$.

- Tome $1\leq q<\infty$.

  Notemos que se $\|f\|_{L^{p,q}}=0$ e relembrando do fato de f^{**} ser não-crescente (Proposição 2.31, item *1.*), então, para todo $s>0$, temos

$$0=(\|f\|_{L^{p,q}})^q=\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}f^{**}(t)\right)^q\frac{dt}{t}\geq\int_0^s\left(t^{\frac{1}{p}}f^{**}(s)\right)^q\frac{dt}{t}=\left(\frac{p}{q}\right)s^{\frac{q}{p}}\left(f^{**}(s)\right)^q\geq 0,$$

  e, assim, $f^{**}(s)=0$ para todo $s>0$, o que implica em $f^{*}(s)=0$ para todo $s>0$. Agora, pela Proposição 2.22, item *2.*, temos que

$$\int_X|f|\;d\mu=0,\;\text{ ou seja, }f=0\;\mu\text{-q.t.p..}$$

  De modo contrário, se $f=0$ μ-q.t.p., pela Proposição 2.22, item *2.*, segue que

$$\int_0^\infty f^*(t)\;dt=0,\;\text{ ou seja, }f^*=0\;\mu\text{-q.t.p.,}$$

  e, assim, segue também que $f^{**}=0$ μ-q.t.p. e, portanto,

$$\|f\|_{L^{p,q}}=\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}f^{**}(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}=0.$$

  Agora, pela Proposição 2.31, item *5.*, para todo $k\in\mathbb{C}$ temos que

$$\|kf\|_{L^{p,q}}=\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}(kf)^{**}(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}|k|(f)^{**}(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}=|k|\|f\|_{L^{p,q}}.$$

  E, ainda, sendo g uma função mensurável que está em $L^{p,q}$, pela Proposição 2.32, temos

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{L^{p,q}}&=\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}(f+g)^{**}(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\&\leq\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}(f^{**}(t)+g^{**}(t))\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\left(\int_0^\infty\left((t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}})f^{**}(t)+(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}})g^{**}(t)\right)^q\;dt\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

  Agora, pela Proposição 2.4, com $X=\mathbb{R}$ e μ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$, podemos aplicar a desigualdade triangular (também conhecida como desigualdade de

Minkowski) em (3.1) e obtermos

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{L^{p,q}} &\leq \left(\int_0^\infty \left((t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}})f^{**}(t)+(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}})g^{**}(t)\right)^q \; dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_0^\infty \left((t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}})f^{**}(t)\right)^q \; dt\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^\infty \left((t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}})g^{**}(t)\right)^q \; dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}f^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}g^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f\|_{L^{p,q}} + \|g\|_{L^{p,q}}
\end{aligned}$$

- Tome $q=\infty$.

  Notemos que se $\|f\|_{L^{p,\infty}}=0$, então, para todo $s>0$, temos

$$0 \leq s^{\frac{1}{p}} f^{**}(s) \leq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) = \|f\|_{L^{p,\infty}} = 0,$$

  e, assim, $f^{**}(s)=0$ para todo $s>0$, o que implica em $f^{*}(s)=0$ para todo $s>0$. Agora, pela Proposição 2.22, item *2.*, temos que

$$\int_X |f| \; d\mu = 0, \text{ ou seja, } f=0 \; \mu \text{ -q.t.p..}$$

  De modo contrário, se $f=0$ μ - q.t.p., segue que pela proposição 2.22 item *2.*

$$\int_0^\infty f^{*}(t) \; dt = 0, \text{ ou seja, } f^{*}=0 \; \mu \text{ - q.t.p.,}$$

  e assim, segue também que $f^{**}=0$ μ-q.t.p. e, portanto,

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) = 0.$$

  Agora, pela Proposição 2.31, item *5.*, para todo $k\in\mathbb{C}$ temos que

$$\|kf\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} (kf)^{**}(t) = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} |k| (f)^{**}(t) = |k|\|f\|_{L^{p,\infty}}.$$

  E ainda, sendo g uma função mensurável que está em $L^{p,\infty}$, pela Proposição 2.32, temos

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} (f+g)^{**}(t) \\
&\leq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} (f^{**}(t)+g^{**}(t)) \\
&\leq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) + \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} g^{**}(t) \\
&= \|f\|_{L^{p,\infty}} + \|g\|_{L^{p,\infty}}
\end{aligned}$$

□

Mostremos a seguir que para $1 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, os funcionais $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ e $\|\cdot\|^*_{L^{p,q}}$ são equivalentes, o que nos garante que as topologias geradas por ambos funcionais também são equivalentes. Para tanto, usaremos, como resultado auxiliar, uma desigualdade clássica cuja a demonstração será omitida por fugir dos propósitos do trabalho, mas pode ser conferida em [11], pág. 196.

Lema 3.7 (Desigualdade de Hardy). *Se $1 \leq q < +\infty$, $r > 0$ e f uma função mensurável não negativa em $(0, \infty)$, então*

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^t f(u)du\right)^q t^{-r-1}dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{q}{r}\left(\int_0^\infty (uf(u))^q u^{-r-1}du\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.2}$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty f(u)du\right)^q t^{r-1}dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{q}{r}\left(\int_0^\infty (uf(u))^q u^{r-1}du\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.3}$$

Proposição 3.8. *Sejam (X, μ) um espaço de medida, $1 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$ e f uma função mensurável em $L^{p,q} = L^{p,q}(X, \mu)$. Então temos*

$$\|f\|^*_{L^{p,q}} \leq \|f\|_{L^{p,q}} \leq \frac{p}{p-1}\|f\|^*_{L^{p,q}}.$$

Demonstração. Inicialmente, notemos que pela Proposição 2.31, item *2.*, temos que $f^* \leq f^{**}$. Desse modo, segue imediatamente que $\|f\|^*_{L^{p,q}} \leq \|f\|_{L^{p,q}}$, o que corresponde ao lado esquerdo da desigualdade.

Para o lado direito, consideremos primeiramente os índices $1 < p < \infty$ e $q = \infty$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \\
&= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t f^*(s)\ ds \\
&= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t s^{-\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{p}} f^*(s)\ ds \\
&\leq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t s^{-\frac{1}{p}} \left(\sup_{u>0} u^{\frac{1}{p}} f^*(u)\right) ds \\
&= \|f\|^*_{L^{p,\infty}} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t s^{-\frac{1}{p}}\ ds \\
&= \|f\|^*_{L^{p,\infty}} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \left(\frac{p}{p-1}\right) t^{-\frac{1}{p}+1} \\
&= \frac{p}{p-1}\|f\|^*_{L^{p,\infty}},
\end{aligned}$$

como queríamos.

Agora, para índices $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$, aplicaremos a desigualdade de Hardy

(3.2), com $r = q\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$. Logo, obtemos

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p,q}} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds\right)^q t^{\frac{q}{p}-1}\ dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t f^*(s)ds\right)^q t^{-q\left(1-\frac{1}{p}\right)-1}\ dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{q}{q\left(1-\frac{1}{p}\right)} \left(\int_0^\infty (sf^*(s))^q\, s^{-q(1-\frac{1}{p})-1}\ ds\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{p}{p-1}\left(\int_0^\infty \left(s^{\frac{1}{p}} f^*(s)\right)^q \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{p}{p-1}\|f\|^*_{L^{p,q}}.
\end{aligned}$$

□

Mostremos agora que os espaços de Lorentz $L^{p,q}$ com $1 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$ são espaços de Banach. Para tanto, utilizaremos alguns resultados auxiliares que serão demonstrados a seguir.

Lema 3.9. *Sejam (X,μ) um espaço de medida, $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ e f uma função mensurável em $L^{p,q} = L^{p,q}(X,\mu)$. Então temos*

$$f^{**}(x) \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{\|f\|_{L^{p,q}}}{x^{\frac{1}{p}}}.$$

Demonstração. Da Proposição 2.31, item *1.*, temos que f^{**} é não crescente. Assim, segue que

$$\begin{aligned}
(\|f\|_{L^{p,q}})^q &= \int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t))^q\ \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^x (t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t))^q\ \frac{dt}{t} + \int_x^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t))^q\ \frac{dt}{t} \\
&\geq \int_0^x (t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t))^q\ \frac{dt}{t} \\
&\geq \int_0^x (t^{\frac{1}{p}} f^{**}(x))^q\ \frac{dt}{t} \\
&= (f^{**}(x))^q \int_0^x t^{\frac{q}{p}-1}\ dt \\
&= (f^{**}(x))^q \left(\frac{p}{q}\right) x^{\frac{q}{p}}.
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$f^{**}(x) \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{\|f\|_{L^{p,q}}}{x^{\frac{1}{p}}}.$$

□

Lema 3.10 (Calderón)**.** *Se (X,μ) é um espaço de medida, $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < r \leq \infty$, então $L^{p,q}(X,\mu) \subset L^{p,r}(X,\mu)$. Mais ainda, para toda f mensurável em $L^{p,q} = L^{p,q}(X,\mu)$, temos*

$$\|f\|_{L^{p,r}} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \|f\|_{L^{p,q}}.$$

Demonstração. Inicialmente, tomemos $r < \infty$. Pelo Lema 3.9, segue que

$$\begin{aligned}
(\|f\|_{L^{p,r}})^r &= \int_0^\infty t^{\frac{r}{p}-1}(f^{**}(t))^r\, dt \\
&= \int_0^\infty t^{\frac{r}{p}-1}(f^{**}(t))^q (f^{**}(t))^{r-q}\, dt \\
&\leq \int_0^\infty t^{\frac{r}{p}-1}(f^{**}(t))^q \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{\|f\|_{L^{p,q}}}{t^{\frac{1}{p}}}\right)^{r-q} dt \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r}{q}-1} (\|f\|_{L^{p,q}})^{r-q} \int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t))^q\, \frac{dt}{t} \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r}{q}-1} (\|f\|_{L^{p,q}})^{r-q} (\|f\|_{L^{p,q}})^q \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r}{q}-1} (\|f\|_{L^{p,q}})^r .
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\|f\|_{L^{p,r}} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \|f\|_{L^{p,q}},$$

e, evidentemente, $L^{p,q} \subset L^{p,r}$.

Por fim, tomemos $r = \infty$. Daí, novamente pelo Lema 3.9, temos

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \\
&\leq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{\|f\|_{L^{p,q}}}{t^{\frac{1}{p}}} \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^{p,q}} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^{p,q}}
\end{aligned}$$

e, evidentemente, $L^{p,q} \subset L^{p,\infty}$. □

Observação 3.11. Um resultado imediato do Lema 3.10 é que se (X,μ) um espaço de medida, $1 < p < \infty$ e $1 \leq q_1 < p < q_2 < \infty$, temos

$$L^{p,q_1} \subset L^{p,p} \subset L^{p,q_2} \subset L^{p,\infty}.$$

Teorema 3.12. *Sejam (X,μ) um espaço de medida não-atômica, $1 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, então o espaço de Lorentz $L^{p,q} = L^{p,q}(X,\mu)$, munido da norma $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$, é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $L^{p,q}$. Logo, temos que

$$\|f_n - f_m\|_{L^{p,q}} \to 0, \text{ quando } n, m \to \infty.$$

Se $q = \infty$, lembremos que $L^{p,\infty} = L^p$-fraco (Observação 3.2) e, então, usando o Proposição 2.39, temos que (f_n) é de Cauchy em medida.

Agora, se $q < \infty$, usando a Proposição 3.8 e o Lema de Calderón 3.10, temos que

$$\|f_n - f_m\|^*_{L^{p,\infty}} \leq \|f_n - f_m\|_{L^{p,\infty}} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \|f_n - f_m\|_{L^{p,q}} \to 0, \text{ quando } n, m \to \infty.$$

Daí, novamente pela Proposição 2.39, concluímos que (f_n) é Cauchy em medida.

Agora, como (f_n) é Cauchy em medida (para qualquer que seja o índice $1 \leq q \leq \infty$), pelo Teorema 2.41, segue que existe uma subsequência (f_{n_k}) de (f_n) tal que $f_{n_k} \to f$ μ-q.t.p., para alguma f mensurável.

Seja $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente. Como (f_n) é de Cauchy em $L^{p,q}$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k_0}}\|_{L^{p,q}} < \epsilon, \text{ para } k > k_0$$

e $f_{n_k} - f_{n_{k_0}} \to f - f_{n_{k_0}}$ μ-q.t.p. e, daí, $|f_{n_k} - f_{n_{k_0}}| \to |f - f_{n_{k_0}}|$ μ - q.t.p., o que implica que

$$\liminf_{k\to\infty} |f_{n_k} - f_{n_{k_0}}| = |f - f_{n_{k_0}}| \ \mu\text{-q.t.p.}.$$

Agora, pela Proposição 2.21, item *6.*, segue que

$$(f - f_{n_{k_0}})^* \leq \liminf_{k\to\infty} (f_{n_k} - f_{n_{k_0}})^*. \tag{3.4}$$

Da desigualdade acima e do Lema de Fatou ([8], pág. 33), temos

$$\begin{aligned}
(f - f_{n_{k_0}})^{**}(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t (f - f_{n_{k_0}})^*(s)\ ds \\
&\leq \frac{1}{t}\int_0^t \liminf_{k\to\infty} (f - f_{n_{k_0}})^*(s)\ ds \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t (f - f_{n_{k_0}})^*(s)\ ds \\
&= \liminf_{k\to\infty} (f_{n_k} - f_{n_{k_0}})^{**}(t).
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$(f - f_{n_{k_0}})^{**} \leq \liminf_{k\to\infty} (f_{n_k} - f_{n_{k_0}})^{**}. \tag{3.5}$$

Agora, se $q < \infty$, usando novamente o Lema de Fatou ([8], pág. 33) e a desigualdade (3.5), temos

$$\begin{aligned}
\|f - f_{n_{k_0}}\|_{L^{p,q}} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} (f - f_{n_{k_0}})^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \liminf_{k\to\infty} (f_{n_k} - f_{n_{k_0}})^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} (f_{n_k} - f_{n_{k_0}})^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f_{n_{k_0}}\|_{L^{p,q}} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

quando $k > k_0$.

E ainda, se $q = \infty$, usando a desigualdade (3.5), temos

$$\begin{aligned}
\|f - f_{n_{k_0}}\|_{L^{p,q}} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} (f - f_{n_{k_0}})^{**}(t) \\
&\leq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \liminf_{k\to\infty} (f_{n_k} - f_{n_{k_0}})^{**}(t) \\
&= \liminf_{k\to\infty} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} (f_{n_k} - f_{n_{k_0}})^{**}(t) \\
&= \liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f_{n_{k_0}}\|_{L^{p,q}} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

quando $k > k_0$.

Como $f = f - f_{n_{k_0}} + f_{n_{k_0}}$, então $f \in L^{p,q}$.

Agora, se uma sequência de Cauchy possui uma subsequência convergente em um espaço normado, então esta sequência de Cauchy converge para o mesmo limite da subsequência. Daí, podemos concluir que (f_n) converge para f em $L^{p,q}$, ou seja, $L^{p,q}$ é um espaço de Banach. □

Agora veremos que os espaços de Lorentz possuem a mesma relação de escala que os espaços L^p.

Proposição 3.13. *Considere o espaço de medida $(\mathbb{R}^n, m)$, em que m é a medida de Lebesgue. Sejam $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\alpha > 0$ e f uma função mensurável em $L^{p,q} = L^{p,q}(\mathbb{R}^n, m)$. Então f_α está em $L^{p,q}$, em que $f_\alpha(x) = f(\alpha x)$ e, além disso,*

$$\|f_\alpha\|_{L^{p,q}} = \alpha^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L^{p,q}}.$$

Demonstração. Inicialmente, temos que

$$\begin{aligned}
d_{f_\alpha}(s) &= m(\{x \in \mathbb{R}^n : |f_\alpha(x)| > s\}) \\
&= m(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(\alpha x)| > s\}) \\
&= m(\{\alpha^{-1} y \in \mathbb{R}^n : |f(y)| > s\}) \\
&= \alpha^{-n} m(\{y \in \mathbb{R}^n : |f(y)| > s\}) \\
&= \alpha^{-n} d_f(s).
\end{aligned}$$

Agora, temos também que

$$\begin{aligned}
(f_\alpha)^*(t) &= \inf\{s > 0 : d_{f_\alpha}(s) \leq t\} \\
&= \inf\{s > 0 : \alpha^{-n} d_f(s) \leq t\} \\
&= \inf\{s > 0 : d_f(s) \leq \alpha^n t\} \\
&= f^*(\alpha^n t).
\end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variáveis, temos

$$\begin{aligned}
(f_\alpha)^{**}(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t (f_\alpha)^*(s)\, ds \\
&= \frac{1}{t} \int_0^t f^*(\alpha^n s)\, ds \\
&= \frac{1}{t} \int_0^{\alpha^n t} f^*(u)\, \frac{du}{\alpha^n} \\
&= \frac{1}{\alpha^n t} \int_0^{\alpha^n t} f^*(u)\, du \\
&= f^{**}(\alpha^n t).
\end{aligned}$$

Se $1 \leq q < \infty$, novamente por uma mudança de variável, temos

$$\begin{aligned}
\|f_\alpha\|_{L^{p,q}} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}(f_\alpha)^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}f^{**}(\alpha^n t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^\infty \left((\alpha^{-n}u)^{\frac{1}{p}}f^{**}(u)\right)^q \frac{du}{u}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \alpha^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^{p,q}}.
\end{aligned}$$

Agora, se $q = \infty$, temos

$$\begin{aligned}
\|f_\alpha\|_{L^{(p,\infty)}} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}(f_\alpha)^{**}(t) \\
&= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}f^{**}(\alpha^n t) \\
&= \sup_{u>0}(\alpha^{-n}u)^{\frac{1}{p}}f^{**}(u) \\
&= \alpha^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^{(p,\infty)}}.
\end{aligned}$$

□

A seguir, veremos algumas desigualdades clássicas que serão uteis para nossos propósitos.

Teorema 3.14 (Desigualdade de Young Generalizada)**.** *Sejam (X, μ) um espaço de medida e $p_1, p_2 \in (1, \infty)$ tais que $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} > 1$. Se f e g são funções mensuráveis em $L^{p_1,q_1} = L^{p_1,q_1}(X, \mu)$ e $L^{p_2,q_2} = L^{p_2,q_2}(X, \mu)$, respectivamente, então a convolução $h = f * g$ pertence a $L^{r,s} = L^{r,s}(X, \mu)$, em que $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} - 1$ e $s \geq 1$ é qualquer número tal que $\dfrac{1}{q_1} + \dfrac{1}{q_2} \geq \dfrac{1}{s}$. Além disso,*

$$\|h\|_{L^{r,s}} \leq C(r)\|f\|_{L^{p_1,q_1}}\|g\|_{L^{p_2,q_2}}.$$

Demonstração. Inicialmente, consideremos $s = \infty$. Daí, fazendo uso da Proposição 2.35

e do Lema de Calderón (Lema 3.10), temos

$$\begin{aligned}
\|h\|_{L^{r,\infty}} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{r}} h^{**}(t) \\
&\leq \sup_{t>0} \left(t^{\frac{1}{r}} \int_t^\infty f^{**}(s) g^{**}(s)\; ds \right) \\
&= \sup_{t>0} \left(t^{\frac{1}{r}} \int_t^\infty s^{-1-\frac{1}{r}} \left(s^{\frac{1}{p_1}} f^{**}(s) \right) \left(s^{\frac{1}{p_2}} g^{**}(s) \right)\; ds \right) \\
&\leq \sup_{t>0} \left(t^{\frac{1}{r}} \int_t^\infty s^{-1-\frac{1}{r}} \left(\sup_{s>0} s^{\frac{1}{p_1}} f^{**}(s) \right) \left(\sup_{s>0} s^{\frac{1}{p_2}} g^{**}(s) \right)\; ds \right) \\
&= \|f\|_{L^{p_1,\infty}} \|g\|_{L^{p_2,\infty}} \sup_{t>0} \left(t^{\frac{1}{r}} \int_t^\infty s^{-1-\frac{1}{r}}\; ds \right) \\
&= \|f\|_{L^{p_1,\infty}} \|g\|_{L^{p_2,\infty}} \sup_{t>0} \left(t^{\frac{1}{r}} r t^{-\frac{1}{r}} \right) \\
&\leq r \left(\frac{q_1}{p_1} \right)^{\frac{1}{q_1}} \|f\|_{L^{p_1,q_1}} \left(\frac{q_2}{p_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \|g\|_{L^{p_2,q_2}} \\
&= C(r) \|f\|_{L^{p_1,q_1}} \|g\|_{L^{p_2,q_2}}.
\end{aligned}$$

Agora, consideremos o caso em que $s < \infty$. Utilizando novamente a Proposição 2.35, temos

$$(\|h\|_{L^{r,s}})^s = \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{r}} h^{**}(t) \right)^s \frac{dt}{t} \leq \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{r}} \int_t^\infty f^{**}(v) g^{**}(v)\; dv \right)^s \frac{dt}{t}.$$

Efetuando as mudanças de variáveis $t = \dfrac{1}{y}$ e $v = \dfrac{1}{u}$, temos

$$\begin{aligned}
(\|h\|_{L^{r,s}})^s &\leq \int_0^\infty \left(y^{-\frac{1}{r}} \int_0^y f^{**}\left(\frac{1}{u}\right) g^{**}\left(\frac{1}{u}\right) \frac{du}{u^2} \right)^s \frac{dy}{y} \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^y \frac{f^{**}\left(\frac{1}{u}\right) g^{**}\left(\frac{1}{u}\right)}{u^2}\; du \right)^s y^{-\frac{s}{r}-1}\; dy \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^y F(u) du \right)^s y^{-\tilde{r}-1}\; dy,
\end{aligned}$$

em que $F(u) = \dfrac{f^{**}\left(\frac{1}{u}\right) g^{**}\left(\frac{1}{u}\right)}{u^2}$ e $\tilde{r} = \dfrac{s}{r}$. Agora, utilizando a desigualdade de Hardy (Lema 3.7, equação 3.2), temos

$$\begin{aligned}
(\|h\|_{L^{r,s}})^s &\leq \left(\frac{s}{\tilde{r}} \right)^s \int_0^\infty (uF(u))^s u^{-\tilde{r}-1}\; du \\
&= r^s \int_0^\infty \left(\frac{f^{**}\left(\frac{1}{u}\right) g^{**}\left(\frac{1}{u}\right)}{u} \right)^s u^{-\frac{s}{r}} \frac{du}{u} \\
&= r^s \int_0^\infty \left(u^{-\frac{1}{r}-1} f^{**}\left(\frac{1}{u}\right) g^{**}\left(\frac{1}{u}\right) \right)^s \frac{du}{u}.
\end{aligned}$$

Efetuamos agora uma nova mudança de variável $t = \dfrac{1}{u}$ para obter:

$$\|h\|_{L^{r,s}}^s \leq r^s \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{r}+1} f^{**}(t) g^{**}(t) \right)^s \frac{dt}{t}.$$

Notemos que, como $\dfrac{1}{q_1}+\dfrac{1}{q_2}\geq\dfrac{1}{s}$ (e também $s\geq 1$), existem $m_1, m_2\geq 1$ tais que

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}=1,\ \frac{1}{m_1}\leq\frac{s}{q_1}\ \text{e}\ \frac{1}{m_2}\leq\frac{s}{q_2}.$$

Utilizando a desigualdade de Hölder em $L^1(0,\infty)$ (Proposição 2.5), em que $\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}=1$ e a medida $\mu=\dfrac{dx}{x}$, temos

$$\begin{aligned}
\|h\|_{L^{r,s}} &\leq r\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{r}+1}f^{**}(t)g^{**}(t)\right)^s\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{s}}\\
&= r\left(\int_0^\infty\left[t^{\frac{1}{p_1}}f^{**}(t)\right]^s\left[t^{\frac{1}{p_2}}g^{**}(t)\right]^s\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{s}}\\
&\leq r\left(\int_0^\infty\left[t^{\frac{1}{p_1}}f^{**}(t)\right]^{sm_1}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{sm_1}}\left(\int_0^\infty\left[t^{\frac{1}{p_2}}g^{**}(t)\right]^{sm_2}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{sm_2}}\\
&= r\|f\|_{L^{p_1,sm_1}}\|g\|_{L^{p_2,sm_2}}.
\end{aligned}$$

Por fim, como $q_1\leq sm_1$ e $q_2\leq sm_2$, aplicando o Lema de Calderón (Lema 3.10), temos

$$\begin{aligned}
\|h\|_{L^{r,s}} &\leq r\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^{\frac{1}{q_1}-\frac{1}{sm_1}}\|f\|_{L^{p_1,q_1}}\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^{\frac{1}{q_2}-\frac{1}{sm_2}}\|g\|_{L^{p_2,q_2}}\\
&= C(r)\|f\|_{L^{p_1,q_1}}\|g\|_{L^{p_2,q_2}}.
\end{aligned}$$

□

A próxima desigualdade é uma do tipo Hölder para os espaços de Lorentz.

Teorema 3.15. *Sejam (X,μ) um espaço de medida, índices $p,p'\in(1,\infty)$ e $q,q'\in[1,\infty]$ tais que $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ e $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$. Sejam f e g funções mensuráveis em $L^{p,q}=L^{p,q}(X,\mu)$ e $L^{p',q'}=L^{p',q'}(X,\mu)$ respectivamente, então*

$$\|fg\|_1\leq\|f\|_{L^{p,q}}\|g\|_{L^{p',q'}}.$$

Demonstração. Inicialmente, consideremos os índices $q,q'\in(1,\infty)$.

Assim, utilizando a desigualdade de Hardy-Littlewood (Proposição 2.23), a desigualdade de Hölder em $L^1((0,\infty))$ (Proposição 2.5), lembrando que $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$ e o fato de $f^*\leq f^{**}$ (Proposição 2.31, item *2.*), temos

$$\begin{aligned}
\|fg\|_1 &= \int_X|f(x)g(x)|\,d\mu\\
&\leq \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)\,dt\\
&\leq \int_0^\infty f^{**}(t)g^{**}(t)\,dt\\
&= \int_0^\infty(t^{\frac{1}{p}}f^{**}(t))(t^{\frac{1}{p'}}g^{**}(t))\frac{dt}{t}\\
&\leq \left(\int_0^\infty(t^{\frac{1}{p}}f^{**}(t))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^\infty(t^{\frac{1}{p'}}g^{**}(t))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q'}}\\
&= \|f\|_{L^{p,q}}\|g\|_{L^{p',q'}}.
\end{aligned}$$

Agora, sem perda de generalidade, consideremos $q = 1$ e, portanto, $q' = \infty$. Utilizando novamente a desigualdade de Hardy-Littlewood (Proposição 2.23), e o fato de $f^* \leq f^{**}$ (Proposição 2.31, item *2.*), temos

$$\begin{aligned}
\|fg\|_1 &= \int_X |f(x)g(x)|\, d\mu \\
&\leq \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)\, dt \\
&\leq \int_0^\infty f^{**}(t)g^{**}(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t))(t^{\frac{1}{p'}} g^{**}(t)) \frac{dt}{t} \\
&\leq \int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)) \sup_{s>0} \left(s^{\frac{1}{p'}} g^{**}(s) \right) \frac{dt}{t} \\
&= \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)) \frac{dt}{t} \right) \|g\|_{L^{p',\infty}} \\
&= \|f\|_{L^{p,1}} \|g\|_{L^{p',\infty}}.
\end{aligned}$$

□

3.2 Dualidade

A seguir, apresentaremos um teorema com a caraterização de dualidade para espaços de Lorentz. A demonstração será omitida por ser demasiadamente técnica, porém, ela pode ser encontrada com detalhes em [9] e [12].

Definição 3.16. Um espaço de medida (X, μ) é chamado de σ-finito se existe uma sequência K_n de conjuntos mensuráveis, com $\mu(K_n) < \infty$ tal que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = X.$$

Observação 3.17. Vale notar que $\mathbb{R}^n$ munido da medida de Lebesgue é um espaço σ-finito.

Lembremos, agora, que uma quase-norma é um funcional não negativo $\|\cdot\|$ em um espaço vetorial X que satisfaz para algum $K \geq 0$ e todo $x, y \in X$, $\|x+y\|_X \leq K(\|x\|_X + \|y\|_X)$, $\|\lambda x\|_X = |\lambda|\|x\|_X$ para todos os escalares λ e se $\|x\|_X = 0$ então $x = 0$. Quando $K = 1$, a quase-norma é chamada de norma. Um espaço quase-Banach é um espaço quase-normado que é completo em relação à topologia gerada pela quase-norma.

Definição 3.18. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço quase-Banach. O conjunto de todos os funcionais lineares limitados em X constitui um espaço normado que é chamado de espaço dual de X e é denotado por $(X)^*$. E ainda mais, a norma de $(X)^*$ é dada por

$$\|f\|_{(X)^*} = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in X}} |\langle f, x \rangle|.$$

Observação 3.19. Vale ressaltar que o dual de um espaço quase-Banach é sempre um espaço de Banach. Para mais detalhes sobre essa discussão, veja [12].

Teorema 3.20. *Seja (X,μ) um espaço de medida σ-finito não-atômico. Então temos*

1. $(L^{p,q}(X,\mu))^* = \{0\}$, *quando* $0 < p < 1$, $0 < q \leq \infty$;
2. $(L^{p,q}(X,\mu))^* = L^{\infty}(x,\mu)$, *quando* $p = 1$, $0 < q < 1$;
3. $(L^{p,q}(X,\mu))^* = \{0\}$, *quando* $p = 1$, $1 < q < \infty$;
4. $(L^{p,q}(X,\mu))^* \neq \{0\}$, *quando* $p = 1$, $q = \infty$;
5. $(L^{p,q}(X,\mu))^* = L^{p',\infty}(X,\mu)$ *quando* $1 < p < \infty$, $0 < q \leq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$;
6. $(L^{p,q}(X,\mu))^* = L^{p',q'}(X,\mu)$ *quando* $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$;
7. $(L^{p,q}(X,\mu))^* \neq \{0\}$ *quando* $1 < p < \infty$, $q = \infty$;
8. $(L^{p,q}(X,\mu))^* \neq \{0\}$ *quando* $p = q = \infty$.

3.3 Aproximação da Identidade em Espaços de Lorentz

O objetivo desta seção é apresentar um resultado de aproximação da identidade em espaços de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{R}^n, m)$, em que m é a medida de Lebesgue. A demonstração de tal resultado é baseada na continuidade da translação em espaços de Lorentz, a qual é consequência dos dois próximos resultados.

Lema 3.21. *Considere os índices* $1 < p < \infty$ *e* $1 \leq q < \infty$, *então o conjunto* $S = \{\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \varphi \text{ é uma função simples}\}$ *é denso em* $L^{p,q} = L^{p,q}(\mathbb{R}^n, m)$, *em que* m *é a medida de Lebesgue.*

Demonstração. Seja f uma função mensurável em $L^{p,q}$ e $\epsilon > 0$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que f é não negativa.

Consideremos o conjunto $A_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \epsilon\}$, ou seja, temos que $d_f(\epsilon) = m(A_\epsilon)$. Como, $f^*(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, existe $M > 0$ tal que para todo $t > M$ temos

$$f^*(t) = \inf\{s > 0 : d_f(s) \leq t\} < \epsilon,$$

ou seja,

$$d_f(\epsilon) = m(A_\epsilon) \leq t < \infty.$$

Como f é mensurável, sabemos que existe uma sequência $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funções simples não negativas que convergem de modo crescente para f (ver [8], pág. 13). E agora, dado $\delta > 0$, pelo Teorema de Egoroff (ver [13], pág. 60), existe um conjunto $A \subset A_\epsilon$ tal que $m(A) < \delta$ e φ_n converge uniformemente para f em $A_\epsilon \backslash A$.

Definimos agora uma nova sequência f_n de funções simples do seguinte modo:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin A_\epsilon \\ \varphi_n(x), & \text{se } x \in A_\epsilon \end{cases}.$$

Assim, utilizando o fato de $f_n \leq f$ (pois φ_n converge de forma crescente para f), quando $x \in A_\epsilon \backslash A$, da continuidade uniforme, segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq n_0$ temos

$$0 \leq f(x) - f_n(x) < \epsilon.$$

Desse modo, segue que $d_{f-f_n}(\epsilon) = m(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) - f_n(x)| > \epsilon\}) = m(A) < \delta$, para todo $n \geq n_0$.

Tomando então $t \geq \delta$ e $n \geq n_0$, temos que $d_{f-f_n}(\epsilon) < \delta \leq t$, ou seja,

$$(f - f_n)^*(t) = \inf\{s > 0 : d_{f-f_n}(s) \leq t\} \leq \epsilon.$$

Como o argumento é válido para qualquer $\delta > 0$, segue que $(f - f_n)^*(t) \to 0$ quando $n \to \infty$.

Agora, usando a Proposição 2.21, itens *3.* e *4.*, e o fato que $0 \leq f_n \leq f$, temos para todo $n \in \mathbb{N}$ que

$$\begin{aligned} t^{\frac{q}{p}-1}[(f - f_n)^*(t)]^q &\leq t^{\frac{q}{p}-1}\left[f^*\left(\frac{t}{2}\right) + (-f_n)^*\left(\frac{t}{2}\right)\right]^q \\ &= t^{\frac{q}{p}-1}\left[f^*\left(\frac{t}{2}\right) + (f_n)^*\left(\frac{t}{2}\right)\right]^q \\ &\leq 2^q\left(t^{\frac{q}{p}-1}\right)\left[f^*\left(\frac{t}{2}\right)\right]^q \in L^1(0,\infty), \text{ pois } f \in L^{p,q}. \end{aligned}$$

Por fim, pelo Teorema da Convergência Dominada ([8], pág. 44), temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|^*_{L^{p,q}} &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}}(f - f_n)^*(t)]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} \lim_{n\to\infty}(f - f_n)^*(t)]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, S é denso em $L^{p,q}$. □

Lema 3.22. *Considere os índices $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$, então $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^{p,q} = L^{p,q}(\mathbb{R}^n, m)$, em que m é a medida de Lebesgue.*

Demonstração. Para essa demonstração, fazendo uso do Lema 3.21, basta mostrar que toda função característica χ_E pode ser aproximada por uma função $f \in C_c^\infty$, na quasi-norma $\|\cdot\|^*_{L^{p,q}}$.

Tomemos $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável e m a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. Então, m é regular interior e exterior e, daí, dado $\varepsilon > 0$, existe um conjunto aberto G e um conjunto compacto K tal que $K \subset E \subset G$ e $m(G \backslash K) < \varepsilon$.

Nessas condições, pelo Lema de Urysohn, existe $f \in C_c^\infty$, com $0 \leq f \leq 1$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in K, \\ 0, & x \notin G^c. \end{cases}$$

Notemos que $|\chi_E - f| < \chi_{G\backslash K}$ e, assim, pela Proposição 2.21, item *2.*, temos que

$$(\chi_E - f)^*(t) \leq \left(\chi_{G\backslash K}\right)^*(t), \ \forall t \geq 0.$$

Relembremos agora que, pelo Exemplo 2.19, temos que

$$\left(\chi_{G\backslash K}\right)^*(t) = \chi_{[0, m(G\backslash K))}(t).$$

Dessa maneira, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\chi_E - f\|^*_{L^{p,q}} &\leq \|\chi_{G\setminus K}\|^*_{L^{p,q}} \\
&= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}\left(\chi_{G\setminus K}\right)^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}\chi_{[0,m(G\setminus K))}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^{m(G\setminus K)} t^{\frac{q}{p}-1}\ dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(m\left(G\setminus K\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&< \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}\varepsilon^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Portanto, C_c^∞ é denso em $L^{p,q}$. □

Observação 3.23. Um fato importante é que o lema anterior não é válido para o índice $q = \infty$.

De fato, sabemos que para $1 \leq p < \infty$, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p = L^p(\mathbb{R}^n, m)$, em que m é a medida de Lebesgue (este resultado pode ser obtido tomando por exemplo $p = q$ no lema anterior e usando a Observação 3.2 item *3.*), ou seja, $\overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} = L^p$.

Agora, inspirados pelo Exemplo 2.15, temos o fato de que $L^p \subsetneq L^{p,\infty}$. Esse fato pode ser ilustrado pela função $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}}$ que pertence a $L^{p,\infty}$ mas não pertence a L^p.

Desse modo, é evidente que $\overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} = L^p \subsetneq L^{p,\infty}$, ou seja, $\overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} \subsetneq L^{p,\infty}$. Portanto, o conjunto $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ não é denso em $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, m)$.

Faremos agora a demonstração da continuidade da translação em $L^{p,q}(\mathbb{R}^n, m)$.

Proposição 3.24. *Considere os índices $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$. Se f é uma função mensurável em $L^{p,q} = L^{p,q}(\mathbb{R}^n, m)$, em que m é a medida de Lebesgue, então*

$$\|f(\cdot - y) - f\|_{L^{p,q}} \to 0, \text{ quando } y \to 0.$$

Demonstração. Considerando o Lema 3.22, basta assumirmos que $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Tomemos $\varepsilon > 0$. Como $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então existe um conjunto compacto K, tal que $A = supp(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}} \subset K$.

Dado $y \in \mathbb{R}^n$, definimos $h_y(x) = f(x - y) - f(x)$. Agora, segue que existe $\delta > 0$, tal que para $|y| < \delta$ temos $|h_y(x)| \leq \varepsilon\chi_{A_\delta}(x)$, em que $A_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) < \delta\}$.

Agora, pela Proposição 2.21, itens *2.* e *3.*, temos que

$$h_y^*(t) \leq (\varepsilon\chi_{A_\delta})^*(t) = \varepsilon\chi_{A_\delta}^*(t).$$

Logo, segue que $\limsup_{y\to 0} h_y^*(t) \leq \varepsilon$ para todo $t > 0$. Daí, como ε não depende de t, temos que $h_y^*(t) \to 0$, quando $y \to 0$, para todo t.

Relembremos agora que, pelo Exemplo 2.19, temos que

$$(\chi_{A_\delta})^*(t) = \chi_{[0,m(A_\delta))}(t).$$

Além disso, temos também que

$$
\begin{aligned}
\|h_y\|^*_{L^{p,q}} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} h^*_y(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq \varepsilon \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \chi^*_{A_\delta}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \varepsilon \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \chi_{[0,m(A_\delta))}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \varepsilon \left(\int_0^{m(A_\delta)} \left(t^{\frac{1}{p}}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \varepsilon \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \left(m\left(A_\delta\right)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.
\end{aligned}
$$

Logo, do Teorema da Convergência Dominada (ver [8], pág. 44), concluímos que

$$\|h_y\|^*_{L^{p,q}} \to 0, \text{ quando } y \to 0.$$

Por fim, como os funcionais $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ e $\|\cdot\|^*_{L^{p,q}}$ são equivalentes, segue que $\|h_y\|_{L^{p,q}} \to 0$, ou seja,

$$\|f(\cdot - y) - f\|_{L^{p,q}} \to 0, \text{ quando } y \to 0.$$

□

A definição a seguir, além de ser clássica é de extrema importância para o resultado de aproximação da identidade.

Definição 3.25. Seja $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$, o *molificador de Friedrichs* de φ é dado por

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Para a demonstração do teorema de aproximação da identidade em espaços de Lorentz, que veremos à seguir, precisaremos do seguinte resultado:

Lema 3.26. *Seja (X, μ) um espaço de medida. Considere o índice $1 < p < \infty$ e $p' > 0$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Se f uma função mensurável em $L^{p,1} = L^{p,1}(X, \mu)$, então*

$$\|f\|_{L^{p,1}} = \sup_{\substack{\|\phi\|=1\\ \phi \in L^{p',\infty}}} |\langle f, \phi\rangle|.$$

Demonstração. Tomemos uma função fixada f pertencente a $L^{p,1}$ e definamos o funcional $T_{(f)}$ em $(L^{p,1})^*$, dado por

$$T_{(f)}(\phi) = \langle f, \phi\rangle, \ \forall \phi \in (L^{p,1})^*.$$

Evidentemente $T_{(f)}$ é um funcional linear em $(L^{p,1})^*$.

Assim, por um resultado de análise funcional ([14], pág. 240), segue que $T_{(f)}$ pertence a $(L^{p,1})^{**}$ (ou seja, o espaço bidual de $L^{p,1}$) e, mais ainda,

$$\|T_{(f)}\|_{(L^{p',1})^{**}} = \|f\|_{L^{p,1}}. \tag{3.6}$$

Lembremos que pelo Teorema 3.20, item *5.*, temos que $(L^{p,1})^* = L^{p',\infty}$ e pela caracterização de norma em espaços duais (biduais), temos que

$$\begin{aligned} \|T_{(f)}\|_{(L^{p',1})^{**}} &= \sup_{\substack{\|\phi\|=1 \\ \phi\in(L^{p,1})^*}} |\langle f,\phi\rangle| \\ &= \sup_{\substack{\|\phi\|=1 \\ \phi\in L^{p',\infty}}} |\langle f,\phi\rangle|. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Por fim, de (3.6) e (3.7), segue que

$$\|f\|_{L^{p,1}} = \sup_{\substack{\|\phi\|=1 \\ \phi\in L^{p',\infty}}} |\langle f,\phi\rangle|.$$

□

Finalmente estamos em condições de apresentar o resultado de aproximação da identidade em espaços de Lorentz.

Teorema 3.27 (Aproximação da Identidade em $L^{p,q}$)**.** *Considere os índices $1 < p < \infty$ e $1 \le q < \infty$. Seja f uma função mensurável em $L^{p,q} = L^{p,q}(\mathbb{R}^n, m)$, em que m é a medida de Lebesgue. Se $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\ dx = 1$, então*

$$\|\varphi_\epsilon * f - f\|_{L^{p,q}} \to 0, \text{ quando } \epsilon \to 0.$$

Demonstração. Como $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\ dx = 1$, temos também que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\epsilon(x)\ dx = 1$, e assim

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon * f(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y) f(x-y)dy - f(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y) f(x-y)dy - \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\ dx\right) f(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y) \left(f(x-y) - f(x)\right) dy. \end{aligned}$$

Agora, fazendo a mudança de variável $u = \dfrac{y}{\varepsilon}$ e observando que $\varphi_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, temos

$$\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(u) \left(f(x-\varepsilon u) - f(x)\right) du.$$

Agora, pelo Teorema 3.20, item *6.*, que diz respeito a dualidade de $L^{p,q}$, pela caracterização de norma no espaço dual apresentada pela Definição 3.18, (ou ainda, pelo Lema 3.26, caso $q = 1$) e pelo Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon * f - f\|_{L^{p,q}} &= \sup_{\|\phi\|_{L^{p',q'}}=1} \left|\int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x))\phi(x)dx\right| \\ &= \sup_{\|\phi\|_{L^{p',q'}}=1} \left|\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(u)\left(f(x-\varepsilon u) - f(x)\right)\ du\right)\phi(x)\ dx\right| \\ &\le \sup_{\|\phi\|_{L^{p',q'}}=1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(u)| \left|\int_{\mathbb{R}^n} \left(f(x-\varepsilon u) - f(x)\right)\phi(x)\ dx\right|\ du\right) \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(u)| \left(\sup_{\|\phi\|_{L^{p',q'}}=1} \left|\int_{\mathbb{R}^n} \left(f(x-\varepsilon u) - f(x)\right)\phi(x)dx\right|\right) du \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(u)| \|f(\cdot - \varepsilon u) - f\|_{L^{p,q}}\ du. \end{aligned}$$

Agora, como $\|f(\cdot - \varepsilon u) - f\|_{L^{p,q}} \leq 2\|f\|_{L^{p,q}} < \infty$, da Proposição 3.24, temos $\|f(\cdot - \varepsilon u) - f\|_{L^{p,q}} \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$. Daí, do teorema da Convergência Dominada (ver [8], pág. 44), segue que

$$\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_{L^{p,q}} \to 0, \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

□

3.4 Teorema de Interpolação

Nesta seção, apresentaremos um teorema de interpolação que será de grande utilidade para os resultados de boa colocação da equação semilinear do calor.

Definição 3.28. Sejam (X, μ) e (Y, ν) espaços de medida e T um operador que associa funções mensuráveis de (X, μ) à funções mensuráveis de (Y, ν). O operador T é dito quase-linear se para todas funções mensuráveis f e g de (X, μ) e para todo escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ temos:

1. $|T(f + g)| \leq k\,(|T(f)| + |T(g)|)$, para algum $k > 0$;
2. $|T(\lambda f)| = |\lambda||T(f)|$.

O teorema de interpolação, a seguir, terá sua demonstração omitida por utilizar argumentos da teoria de interpolação que fogem do propósito desse trabalho. Traremos, aqui, o teorema na forma em que é apresentado no artigo [15], (pág. 264), porém o mesmo teorema pode ser conferido, com algumas sutis diferenças em [9] (pág. 326), [11] (pág. 197), [12] (pág. 56).

Teorema 3.29. *Considere os índices $p_k, \tilde{p_k}, q_k, \tilde{q_k} \in [0, \infty]$, com $k = 1, 2$, $p_1 < p_2$ e $\tilde{p_1} \neq \tilde{p_2}$. Se T é um operador quasi-linear e*

$$\|T(f)\|^*_{L^{\tilde{p_k}, \tilde{q_k}}} \leq B_k \|f\|^*_{L^{p_k, q_k}}, \text{ em que } B_k > 0,$$

então segue que existe $B_\theta = B(\theta)$, $0 < \theta < 1$ tal que

$$\|T(f)\|^*_{L^{\tilde{p}, \tilde{q}}} \leq B_\theta \|f\|^*_{L^{p,q}},$$

em que $q \leq \tilde{q}$ e

$$\frac{1}{\tilde{p}} = \frac{(1-\theta)}{\tilde{p_1}} + \frac{\theta}{\tilde{p_2}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{p} = \frac{(1-\theta)}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}.$$

4 Boa-colocação nos espaços $L^{p,\infty}$

Neste capítulo, estamos interessado em estudar o problema de Cauchy para a equação do calor semilinear generalizada

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^\gamma u + & f(u) = 0, \;\; x \in \mathbb{R}^n \\ & u(0,x) = u_0, \;\; x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{4.1}$$

em que $n \geq 1$, $\gamma > 0$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que para todo $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ temos

$$|f(a_1) - f(a_2)| \leq \eta |a_2 - a_1| \left(|a_2|^{\rho-1} + |a_1|^{\rho-1} \right) \quad \text{e} \quad f(0) = 0, \tag{4.2}$$

com as constantes $\eta > 0$, $1 < \rho < \infty$. O operador $(-\Delta)^\gamma$ é definido através da transformada de Fourier como

$$(\widehat{(-\Delta)^\gamma \phi})(\xi) = |\xi|^{2\gamma} \widehat{\phi}(\xi),$$

em que

$$\widehat{\phi}(\xi) = \int_{R^n} e^{-ix\cdot\xi} \phi(x) \; dx.$$

Nosso propósito é analisarmos a boa-colocação do problema (4.1), mostrando inicialmente a existência e unicidade de soluções mild global nos espaços de Marcinkewicz $L^{p,\infty} = L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, m)$, em que m é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$.

Sendo assim, neste capítulo, bem como nos capítulos subsequentes, o espaço de medida a ser considerado será $\mathbb{R}^n$, com a medida usual de Lebesgue.

4.1 O Problema Linear Associado

Iniciaremos nossos estudos analisando o problema linear homogêneo associado ao problema de Cauchy (4.1). Buscaremos as soluções de

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^\gamma u = 0, & x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{4.3}$$

Desse modo, aplicando a transformada de Fourier (considerando a aplicação da transformada em $x \in \mathbb{R}^n$, ou seja, na variável espacial) no problema linear (4.3), temos

$$\begin{cases} \hat{u_t} + |\xi|^{2\gamma} \hat{u} = 0, \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u_0}(\xi) \end{cases}$$

que é uma equação diferencial ordinária com solução única dada por

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-|\xi|^{2\gamma} t} \hat{u_0}(\xi).$$

Da propriedade $\widehat{(f * g)}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$, da transformada de Fourier da convolução (ver [12], pág. 100) e da transformada inversa, segue que a solução do problema linear(4.3) é

$$u(t,x) = g_\gamma(t,x) * u_0(x),$$

em que $g_\gamma(t,x)$ é tal que $\hat{g_\gamma}(t,\xi) = e^{-|\xi|^{2\gamma}t}$.

Por fim, a solução única do problema linear (4.3) gera um semigrupo $G_\gamma(t)$, via convolução com o núcleo g_γ, isto é,

$$G_\gamma(t)u_0(x) = g_\gamma(t,x) * u_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g_\gamma(t, x-y)u_0(y)\ dy.$$

4.2 Estimativas do Semigrupo $G_\gamma(t)$

A seguir, traremos algumas estimativas do semigrupo do calor nos espaços de Lorentz, bem como algumas propriedades do núcleo g_γ.

Lema 4.1. *Dado $t \geq 0$, temos que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_\gamma(t,x)\ dx = 1.$$

Demonstração. Sabemos da seção anterior que $\hat{g_\gamma}(t,\xi) = e^{-|\xi|^{2\gamma}t}$.

Sabemos também, pela definição da transformada de Fourier que

$$\hat{g_\gamma}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} g_\gamma(t,x)\ dx.$$

Desse modo, é evidente que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_\gamma(t,x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot 0} g_\gamma(t,x)\ dx = \hat{g_\gamma}(t,0) = e^{-|0|^{2\gamma}t} = 1.$$

□

Lema 4.2. *Se $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, então*

$$g_\gamma(t, x-y) = g_\gamma(t, y-x).$$

Demonstração. Sabemos da seção anterior que $\hat{g_\gamma}(t,\xi) = e^{-|\xi|^{2\gamma}t}$. Desse modo, é evidente que

$$\hat{g_\gamma}(t,\xi) = \hat{g_\gamma}(t,-\xi). \tag{4.4}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} g_\gamma\widehat{(t,\cdot - y)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} g_\gamma(t, x-y)\ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(z+y)\cdot\xi} g_\gamma(t,z)\ dz \\ &= e^{-iy\cdot\xi} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\xi} g_\gamma(t,z)\ dz \\ &= e^{-iy\cdot\xi}\hat{g_\gamma}(t,\xi), \end{aligned} \tag{4.5}$$

em que usamos a mudança de variável $z = x + y$ na segunda igualdade.

Além disso,

$$\begin{aligned}
g_\gamma\widehat{(t, y-\cdot)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} g_\gamma(t, y-x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(-z+y)\cdot\xi} g_\gamma(t, z)\, dz \\
&= e^{-iy\cdot\xi} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot(-\xi)} g_\gamma(t, z)\, dx \\
&= e^{-iy\cdot\xi} \hat{g_\gamma}(t, -\xi) \\
&= e^{-iy\cdot\xi} \hat{g_\gamma}(t, \xi), \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

em que usamos a mudança de variável $z = -x + y$ na segunda igualdade e (4.4) na última igualdade.

Por fim, como (4.5) e (4.6) são iguais, segue que

$$g_\gamma(t, x-y) = g_\gamma(t, y-x).$$

□

A seguir veremos algumas propriedades de homogeneidade de g_γ.

Lema 4.3. *Se $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ e $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, então*

1. $g_\gamma(t, x) = t^{-\frac{n}{2\gamma}} g_\gamma(1, xt^{-\frac{1}{2\gamma}})$;

2. $(\nabla_x^k g_\gamma)(t, x) = t^{-\frac{n+k}{2\gamma}} (\nabla_x^k g_\gamma)(1, xt^{-\frac{1}{2\gamma}})$.

Demonstração. 1. Inicialmente, relembremos que

$$\hat{g_\gamma}(t, \xi) = e^{-|\xi|^{2\gamma} t}. \qquad (4.7)$$

Relembremos as seguintes propriedades da transformada de Fourier (ver [12], pág. 100):

- $\widehat{kf}(\xi) = k\hat{f}(\xi)$, em que k é constante;

- $\widehat{f(\delta\cdot)}(\xi) = \delta^{-n} \hat{f}(\delta^{-1}\xi)$, em que n é a dimensão do espaço.

Daí, aplicando as propriedades acima, temos

$$\begin{aligned}
\left(t^{-\frac{n}{2\gamma}} g_\gamma\widehat{(1, \cdot\ t^{-\frac{1}{2\gamma}})}\right)(\xi) &= t^{-\frac{n}{2\gamma}} g_\gamma\widehat{(1, \cdot\ t^{-\frac{1}{2\gamma}})}(\xi) \\
&= t^{-\frac{n}{2\gamma}} t^{-(-\frac{n}{2\gamma})} \hat{g_\gamma}(1, t^{\frac{1}{2\gamma}}\xi) \\
&= e^{(-|t^{\frac{1}{2\gamma}}\xi|^{2\gamma})} \\
&= e^{-|\xi|^{2\gamma} t}. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Por fim, como (4.7) e (4.8) são iguais, segue que

$$g_\gamma(t, x) = t^{-\frac{n}{2\gamma}} g_\gamma(1, xt^{-\frac{1}{2\gamma}}).$$

2. Segue imediatamente do item anterior. Basta derivarmos k vezes a igualdade $g_\gamma(t, x) = t^{-\frac{n}{2\gamma}} g_\gamma(1, xt^{-\frac{1}{2\gamma}})$.

□

Lema 4.4. *Seja* $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$ *e* $1 < p \leq r < \infty$. *Então existe uma constante* $C = C(r, n, \gamma, p) > 0$ *tal que para toda função* $\varphi \in L^{p,q_1}(\mathbb{R}^n)$ *e, para todo* $t > 0$, *temos*

$$\|\nabla_x^j (G_\gamma(t)\varphi)\|_{L^{r,q_2}} \leq C t^{-\frac{n}{2\gamma}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})-\frac{j}{2\gamma}} \|\varphi\|_{L^{p,q_1}}, \ j \in \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Demonstração. Inicialmente, notemos que por propriedade de convolução, temos

$$\nabla_x^j (G_\gamma(t)\varphi) = \nabla_x^j (g_\gamma(t,x) * \varphi(x)) = (\nabla_x^j g_\gamma(t,x)) * \varphi(x).$$

Tomemos $l \geq 1$ e $q \geq 1$ tais que

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{l} \geq \frac{1}{q_2}.$$

Agora, como $\varphi \in L^{p,q_1}$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} > 1$, pela desigualdade de Young generalizada (3.14), segue que existe $C_1 = C_1(r)$ tal que

$$\|\nabla_x^j (G_\gamma(t)\varphi)\|_{L^{r,q_2}} = \|(\nabla_x^j g_\gamma) * \varphi\|_{L^{r,q_2}} \leq C_1 \|\nabla_x^j g_\gamma\|_{L^{q,l}} \|\varphi\|_{L^{p,q_1}}. \tag{4.9}$$

Agora, pelo Lema 4.3 e da relação de escala do espaço $L^{q,l}$ (Proposição 3.13), temos

$$\begin{aligned}
\|\nabla_x^j g_\gamma(t,\cdot)\|_{L^{q,l}} &= \|t^{-\frac{n+j}{2\gamma}} (\nabla_x^j g_\gamma)(1, \cdot\, t^{-\frac{1}{2\gamma}})\|_{L^{q,l}} \\
&= t^{-\frac{n+j}{2\gamma}} \|(\nabla_x^j g_\gamma)(1, \cdot\, t^{-\frac{1}{2\gamma}})\|_{L^{q,l}} \\
&= t^{-\frac{n+j}{2\gamma}} t^{\frac{n}{2\gamma q}} \|\nabla_x^j g_\gamma(1,\cdot)\|_{L^{q,l}} \\
&= C_2 t^{-\frac{n+j}{2\gamma}} t^{\frac{n}{2\gamma q}},
\end{aligned} \tag{4.10}$$

em que $C_2 = \|\nabla_x^j g_\gamma(1,x)\|_{L^{q,l}}$.

E ainda, como $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, temos também que

$$-\left(\frac{n+j}{2\gamma}\right) + \frac{n}{2\gamma q} = -\frac{j}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma}\left(1 - \frac{1}{q}\right) = -\frac{j}{2\gamma} - \frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)$$

e assim, de 4.9 e 4.10, temos finalmente que

$$\|\nabla_x^j (G_\gamma(t)\varphi)\|_{L^{r,q_2}} \leq C t^{-\frac{n}{2\gamma}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})-\frac{j}{2\gamma}} \|\varphi\|_{L^{p,q_1}}, \text{ com } C = C_1 C_2.$$

□

4.3 Formulação Integral

Nosso objetivo é encontrar soluções mild (ou brandas) para o problema de Cauchy para a equação do calor semilinear generalizada (4.1). Para apresentarmos a definição de tal solução, precisaremos obter a formulação integral associada a (4.1).

Para isso, consideremos uma solução clássica u do problema (4.1) e definamos, para $x \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$,

$$\psi(s) = G_\gamma(t-s)u(s,x) = g_\gamma(t-s,x) * u(s,x) = \int_{\mathbb{R}^n} g_\gamma(t-s, x-y) u(s,y)\, dy.$$

Daí, obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial s}(s) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\int_{\mathbb{R}^n} g_\gamma(t-s,x-y)u(s,y)\,dy\right)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(g_\gamma(t-s,x-y)\right)u(s,y)+g_\gamma(t-s,x-y)\frac{\partial u}{\partial s}(s,y)\right]dy. \quad (4.11)\end{aligned}$$

Mostremos agora que

$$\frac{\partial}{\partial s}(g_\gamma(t-s,x-y)) = (-\Delta)^\gamma(g_\gamma(t-s),x-y). \quad (4.12)$$

Relembremos que $\hat{g_\gamma}(t,\xi) = e^{-|\xi|^{2\gamma}t}$ e, também, a propriedade da transformada de Fourier (ver [12], pág. 100) $\widehat{f(\cdot-y)}(\xi) = e^{-iy\cdot\xi}\hat{f}(\xi)$.

Agora, tomando a transformada de Fourier, temos

$$\begin{aligned}\widehat{\left(\frac{\partial}{\partial s}(g_\gamma(t-s,\cdot-y)(\xi))\right)} &= \frac{\partial}{\partial s}((g_\gamma(t-\widehat{s,\cdot-}y))(\xi))\\ &= \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-iy\cdot\xi}\hat{g_\gamma}(t-s,\xi)\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-iy\cdot\xi}e^{-|\xi|^{2\gamma}(t-s)}\right)\\ &= |\xi|^{2\gamma}e^{-iy\cdot\xi}e^{-|\xi|^{2\gamma}(t-s)}. \quad (4.13)\end{aligned}$$

Como definimos $((\widehat{-\Delta)^\gamma}\phi)(\xi) = |\xi|^{2\gamma}\widehat{\phi}(\xi)$, segue que

$$\begin{aligned}((-\Delta)^\gamma(g_\gamma(\widehat{t-s},\cdot-y))(\xi)) &= |\xi|^{2\gamma}(g_\gamma(t-\widehat{s,\cdot-}y))(\xi)\\ &= |\xi|^{2\gamma}e^{-iy\cdot\xi}\hat{g_\gamma}(t-s,\xi)\\ &= |\xi|^{2\gamma}e^{-iy\cdot\xi}e^{-|\xi|^{2\gamma}(t-s)}. \quad (4.14)\end{aligned}$$

Logo, de (4.13) e (4.14) segue que

$$\frac{\partial}{\partial s}(g_\gamma(t-s,x-y)) = (-\Delta)^\gamma(g_\gamma(t-s,x-y)).$$

Mostremos também a comutatividade do operador laplaciano fracionário $(-\Delta)^\gamma$ com o operador convolução com g_γ, ou seja,

$$((-\Delta)^\gamma(g_\gamma(t-s,\cdot))*u(s,\cdot))(x) = (g_\gamma(t-s,\cdot)*(-\Delta)^\gamma(u(s,\cdot)))(x). \quad (4.15)$$

Usando a propriedade da transformada de Fourier de uma convolução (ver [12], pág. 100), $(\widehat{f*g})(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$, e aplicando a transformada de Fourier, temos

$$\begin{aligned}(((-\Delta)^\gamma(g_\gamma(\widehat{t-s,\cdot})))*u(s,\cdot))(\xi) &= ((-\Delta)^\gamma\widehat{(g_\gamma(t}-s,\cdot)))(\xi)\hat{u}(s,\xi)\\ &= |\xi|^{2\gamma}g_\gamma\widehat{(t-s},\cdot)(\xi)\hat{u}(s,\xi), \quad (4.16)\end{aligned}$$

e ainda, temos também que

$$\begin{aligned}(g_\gamma(t-s,\cdot)\widehat{*((-\Delta})^\gamma(u(s,\cdot))))(\xi) &= g_\gamma\widehat{(t-s},\cdot)(\xi)((-\widehat{\Delta)^\gamma(u(}s,\cdot)))(\xi)\\ &= g_\gamma\widehat{(t-s},\cdot)(\xi)|\xi|^{2\gamma}\hat{u}(s,\xi). \quad (4.17)\end{aligned}$$

De (4.16) e (4.17), segue que (4.15) é verdadeira.

Agora, como u é solução clássica de (4.1), temos

$$\frac{\partial u}{\partial s}(s,x) = -((-\Delta)^{\gamma} u)(s,x) - f\left(u(s,x)\right).$$

Agora, substituímos as equações (4.12) e (4.15) na igualdade obtida em (4.11) para obtermos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial s}(s) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial s}\left(g_\gamma(t-s,x-y)\right) u(s,y)\ dy + \int_{\mathbb{R}^n} g_\gamma(t-s,x-y)\frac{\partial u}{\partial s}(s,y)\ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^{\gamma}(g_\gamma(t-s,x-y))u(s,y)\ dy + \int_{\mathbb{R}^n} g_\gamma(t-s,x-y)\frac{\partial u}{\partial s}(s,y)\ dy \\
&= \left((-\Delta)^{\gamma}(g_\gamma(t-s,\cdot)) * u(s,\cdot)\right)(x) + G_\gamma(t-s)\frac{\partial u}{\partial s}(s,y) \\
&= G_\gamma(t-s)\frac{\partial u}{\partial s}(s,y) + \left(g_\gamma(t-s,\cdot) * (-\Delta)^{\gamma}(u(s,\cdot))\right)(x) \\
&= G_\gamma(t-s)\left(-(-\Delta)^{\gamma}u)(s,x) - f\left(u(s,x)\right)\right) + G_\gamma(t-s)(-\Delta)^{\gamma}u(s,x) \\
&= -G_\gamma(t-s)(-\Delta)^{\gamma}u(s,x) - G_\gamma(t-s)f\left(u(s,x)\right) + G_\gamma(t-s)(-\Delta)^{\gamma}u(s,x) \\
&= -G_\gamma(t-s)f\left(u(s,x)\right),
\end{aligned}$$

ou seja, em suma temos que

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(s) = -G_\gamma(t-s)f\left(u(s,x)\right).$$

Por fim, integrando a igualdade acima no intervalo de 0 a t, temos

$$\psi(t) - \psi(0) = -\int_0^t G_\gamma(t-s)f\left(u(s,x)\right)\ ds. \tag{4.18}$$

Notemos agora que $\psi(0) = G_\gamma(0)u(0,x) = G_\gamma(t)u_0(x)$. além disso, $\psi(t) = G_\gamma(0)u(t,x)$ e aplicando a transformada de Fourier, temos que

$$\begin{aligned}
\widehat{G_\gamma(0)u(t},\cdot)(\xi) &= (\widehat{g_\gamma(0,\cdot) * u}(t,\cdot))(\xi) \\
&= \hat{g_\gamma}(0,\xi)\hat{u}(t,\xi) \\
&= e^{-|\xi|^{2\gamma}0}\cdot \hat{u}(t,\xi) \\
&= \hat{u}(t,\xi),
\end{aligned}$$

ou seja, temos que

$$\psi(t) = G_\gamma(0)u(t,x) = u(t,x).$$

Retornando para a igualdade (4.18), temos

$$u(t,x) = G_\gamma(t)u_0(x) - \int_0^t G_\gamma(t-s)f\left(u(s,x)\right)\ ds. \tag{4.19}$$

Portanto, concluímos que toda solução clássica do problema de Cauchy (4.1) satisfaz a equação integral (4.19).

A fim de simplificar a nossa notação, denotaremos a parte não linear, da seguinte forma:

$$B(u)(t,x) = -\int_0^t G_\gamma(t-s)f\left(u(s,x)\right)\ ds.$$

Logo, (4.19) pode ser reescrita como:

$$u(t,x) = G_\gamma(t)u_0(x) + B(u)(t,x).$$

Apresentaremos, agora, os espaços funcionais adequados para o nosso estudo e, por fim, formalizaremos a definição de solução mild global. Abaixo, a notação $BC\left((0,\infty),X\right)$ representa o conjunto das funções contínuas e limitadas do intervalo $(0,\infty)$ para o espaço de Banach X.

Definição 4.5. Seja $1 \leq q < \infty$ e $\alpha = \dfrac{2}{\rho-1} - \dfrac{n}{\gamma q}$. Definimos os seguintes espaços de Banach:

$$E := BC\left((0,\infty), L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}\right), \quad E_q := \{u \in E : t^{\frac{\alpha}{2}}u \in BC\left((0,\infty), L^{q,\infty}\right)\},$$

munidos, respectivamente, das normas

$$\|h\|_E = \sup_{t>0} \|h(t,\cdot)\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}}, \quad \|h\|_{E_q} = \|h\|_E + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|h(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}.$$

Definição 4.6. Uma solução mild global para o problema de Cauchy (4.1) em E (em E_q) é uma função $u(t,x)$ no correspondente espaço (E ou E_q) que satisfaz

$$u(t,x) = G_\gamma(t)u_0(x) + B(u)(t,x) = G_\gamma(t)u_0(x) - \int_0^t G_\gamma(t-s)f(u(s,x))\,ds$$

e $u(t,x) \rightharpoonup u_0(x)$, quando $t \to 0^+$, em que o limite é tomado sobre a topologia fraca-$*$ de $L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}$.

4.4 Boa-colocação, regularização e Unicidade de Soluções Mild Global

Nesta seção, traremos os principais resultados do capítulo (que serão demonstrados mais adiante) que garantem a existência, unicidade e regularização de soluções mild para o problema (4.1).

Teorema 4.7 (Boa-colocação)**.** *Seja* $0 < \gamma < \frac{n}{2}$, $\frac{n}{n-2\gamma} < \rho < \infty$ *e* $u_0 \in L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}$. *Existem constantes* $\delta > 0$ *e* $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ *tal que se* $\|u_0\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} < \delta$, *então o problema de valor inicial* (4.1) *possui uma solução mild global* $u(t,x) \in E$, *no sentido da definição 4.6, e a solução é única em* $\overline{B(0,2\varepsilon)} \subset E$.

Mais ainda, supondo $u_0 \in L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty} \cap L^{p,\infty}$, *com* $1 < p' < \frac{n}{2\gamma}$ *(*p' *índice conjugado de* p*), existe* $\delta_p > 0$ *em que* $\delta_p \leq \delta$, *tal que se* $\|u_0\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} < \delta_p$, *então a solução anterior* $u(t,x)$ *pertence a* $BC\left((0,\infty), L^{p,\infty}\right)$.

Teorema 4.8 (Regularização)**.** *Sob as hipóteses do Teorema 4.7, para qualquer* $\frac{n(\rho-1)}{2\gamma} < q < \frac{n\rho(\rho-1)}{2\gamma}$, *existe* $0 < \delta_q < \delta$ *tal que se* $\|u_0\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} < \delta_q$, *então a solução* $u(t,x)$ *do teorema 4.7, pertence ao espaço* E_q.

Teorema 4.9 (Unicidade). *Suponha que* $0 < \gamma < \frac{n}{2}$, $\frac{n}{n-2\gamma} < \rho < \infty$ *e* $\frac{n(\rho-1)}{2\gamma} < q < \frac{n\rho(\rho-1)}{2\gamma}$. *Sejam* u *e* v *duas soluções mild do problema de valor inicial* (4.1) *na classe* $C\left([0,\infty); L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma}}\right)$ *com condição inicial* $u_0 \in L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma}}$. *Então* $u = v$.

Agora, apresentaremos um resultado de ponto fixo que será utilizado para garantir a existência e a unicidade da solução mild do problema (4.1). Este resultado é uma generalização do Teorema 13.2 (pág. 124) de [16].

Lema 4.10 (Lema Abstrato). *Seja* $1 < \rho < \infty$ *e* X *um espaço de Banach, com norma* $\|\cdot\|$ *e* $B : X \to X$ *uma aplicação que satisfaz*

$$\|B(x)\| \leq K\|x\|^\rho \text{ e } \|B(x) - B(z)\| \leq K\|x - z\| \left(\|x\|^{\rho-1} + \|z\|^{\rho-1}\right).$$

Seja $R > 0$ *a única raiz positiva da equação* $2^\rho K a^{\rho-1} - 1 = 0$. *Dado* $0 < \varepsilon < R$ *e* $y \in X$ *com* $y \neq 0$ *tal que* $\|y\| < \varepsilon$, *então existe a solução* $x \in X$ *para a a equação* $x = y + B(x)$ *tal que* $\|x\| \leq 2\varepsilon$ *e a solução é única na bola* $\overline{B(0, 2\varepsilon)}$. *Mais ainda, a solução depende continuamente de* y, *no seguinte sentido:*

Se $\|\tilde{y}\| \leq \varepsilon$, $\tilde{x} = \tilde{y} + B(\tilde{x})$ *e* $\|\tilde{x}\| \leq 2\varepsilon$, *então*

$$\|x - \tilde{x}\| \leq \frac{1}{1 - 2^\rho K \varepsilon^{\rho-1}} \|y - \tilde{y}\|.$$

Demonstração. Dado $y \in X$, com $y \neq 0$, definimos $F : X \to X$ tal que $F(x) = y + B(x)$. Notemos inicialmente que dado $0 < \varepsilon < R$, em que R é a única raiz positiva da equação $2^\rho K a^{\rho-1} - 1 = 0$ segue que $2^\rho K \varepsilon^{\rho-1} - 1 < 0$.

Mostremos que $F(\bar{B}(0, 2\varepsilon)) \subset \bar{B}(0, 2\varepsilon)$. Para isso, tomemos $x \in \bar{B}(0, 2\varepsilon)$. Como $\|y\| < \varepsilon$ e $2^\rho K \varepsilon^{\rho-1} < 1$, temos

$$\|F(x)\| = \|y + B(x)\| \leq \|y\| + \|B(x)\| \leq \varepsilon + K\|x\|^\rho \leq \varepsilon + 2^\rho K \varepsilon^{\rho-1}\varepsilon < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

ou seja, $F(\bar{B}(0, 2\varepsilon)) \subset \bar{B}(0, 2\varepsilon)$.

Agora, mostremos que F é uma contração em $\bar{B}(0, 2\varepsilon)$. Sejam $x, z \in \bar{B}(0, 2\varepsilon)$. Temos que

$$\begin{aligned}
\|F(x) - F(z)\| &= \|y + B(x) - y - B(z)\| \\
&= \|B(x) - B(z)\| \\
&\leq K\|x - z\| \left(\|x\|^{\rho-1} + \|z\|^{\rho-1}\right) \\
&\leq K\|x - z\| \left(2^{\rho-1}\varepsilon^{\rho-1} + 2^{\rho-1}\varepsilon^{\rho-1}\right), \text{ (pois } \|x\| \leq 2\varepsilon \text{ e } \|z\| \leq 2\varepsilon) \\
&= \|x - z\| 2^\rho K \varepsilon^{\rho-1} \\
&\leq \|x - z\|, \text{ (pois } 2^\rho K \varepsilon^{\rho-1} < 1),
\end{aligned}$$

ou seja, F é uma contração de $\bar{B}(0, 2\varepsilon)$ em $\bar{B}(0, 2\varepsilon)$.

Como X é um espaço métrico completo, com a métrica $d(x, z) = \|x - z\|$ e como $\bar{B}(0, 2\varepsilon) \subset X$ é fechado em X, então $\bar{B}(0, 2\varepsilon)$ é também um espaço métrico completo.

Desse modo, utilizando agora o Teorema do ponto fixo de Banach para contrações (ver [17], pág. 278), existe um único x, com $\|x\| \leq 2\varepsilon$, que é ponto fixo de F, ou seja, $x = F(x) = y + B(x)$, como queríamos.

Por fim, para finalizarmos a demonstração do lema, tomemos $\tilde{y} \in X$ tal que $\|\tilde{y}\| \leq \varepsilon$ e $\tilde{x} = \tilde{y} + B(\tilde{x})$, com $\|\tilde{x}\| \leq 2\varepsilon$. Daí,

$$\begin{aligned}
\|x - \tilde{x}\| &= \|y + B(x) - \tilde{y} - B(\tilde{x})\| \\
&\leq \|y - \tilde{y}\| + \|B(x) - B(\tilde{x})\| \\
&\leq \|y - \tilde{y}\| + K\|x - \tilde{x}\| \left(\|x\|^{\rho-1} + \|\tilde{x}\|^{\rho-1}\right) \\
&\leq \|y - \tilde{y}\| + K\|x - \tilde{x}\| \left(2^{\rho-1}\varepsilon^{\rho-1} + 2^{\rho-1}\varepsilon^{\rho-1}\right), \text{ (pois } \|x\| \leq 2\varepsilon \text{ e } \|\tilde{x}\| \leq 2\varepsilon) \\
&= \|y - \tilde{y}\| + \|x - \tilde{x}\| 2^{\rho} K \varepsilon^{\rho-1},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|x - \tilde{x}\| \leq \|y - \tilde{y}\| + \|x - \tilde{x}\| 2^{\rho} K \varepsilon^{\rho-1}.$$

Logo, obtemos que

$$\|x - \tilde{x}\| \leq \frac{1}{1 - 2^{\rho} K \varepsilon^{\rho-1}} \|y - \tilde{y}\|.$$

□

Observação 4.11. A solução da equação $x = y + B(x)$, que é o ponto fixo, no teorema do ponto fixo de Banach, é obtida por meio do método de aproximações sucessivas. Desse modo $x = F(x)$ obtido no Lema 4.10 é o limite da sequência (x_n), tal que

$$x_1 = y \ \text{ e } \ x_{n+1} = F(x_n) = y + B(x_n), \ n \in \mathbb{N}.$$

Para demonstrar os teoremas desta seção, devemos aplicar o Lema abstrato (4.10) para $X = E$ e $X = E_q$. Sendo assim, nas próximas seções encontraremos estimativas para o termo não linear e linear de (4.19).

4.5 Estimativas do Termo Não Linear

A demonstração do lema abaixo é similar a demonstração do corolário 3.2 em [18].

Lema 4.12. *Seja $0 < \gamma < \infty$ e $1 < p < q < \infty$, então existe $C > 0$ tal que*

$$\int_0^\infty t^{\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{n}{p} - \frac{n}{q}\right) - 1} \|G_\gamma(t)\phi\|_{L^{q,1}} \, dt \leq C\|\phi\|_{L^{p,1}}, \ \forall \phi \in L^{p,1}.$$

Demonstração. Tomando $\phi \in L^{p,1}$, definimos $\xi_\phi(t) = t^{\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{n}{p} - \frac{n}{q}\right) - 1} \|G_\gamma(t)\phi\|_{L^{q,1}}$. Tomemos também $1 < p_1 < p < p_2 < q$ de modo que $\left(\frac{n}{p} - \frac{n}{p_2}\right) < 2\gamma$. Agora, pelo Lema 4.4, temos

$$\|G_\gamma(t)\phi\|_{L^{q,1}} \leq C t^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{p_k} - \frac{1}{q}\right)} \|\phi\|_{L^{p_k,1}}, \ k = 1, 2.$$

Assim, conseguimos uma estimativa para a função ξ_ϕ do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
\xi_\phi(t) &= t^{\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{n}{p} - \frac{n}{q}\right) - 1} \|G_\gamma(t)\phi\|_{L^{q,1}} \\
&\leq C t^{\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{n}{p} - \frac{n}{p_k} - 2\gamma\right)} \|\phi\|_{L^{p_k,1}}, \ k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Agora, por questões de facilidade na manipulação, definimos $\frac{1}{l_k} := \frac{1}{2\gamma}\left(\frac{n}{p_k} - \frac{n}{p} + 2\gamma\right)$, com $k = 1, 2$ que satisfaz $0 < l_1 < 1 < l_2$.

Mostremos, então, que $\|\xi_\phi\|^*_{L^{l_k,\infty}} \leq C\|\phi\|^*_{L^{p_k,\infty}}$, com $k = 1, 2$.

Para tanto, definimos $g_k(t) := \tilde{C}t^{-\frac{1}{l_k}}$, com $\tilde{C} = C\|\phi\|_{L^{p_k,1}}$.

Notemos que, por 4.20, temos que $\xi_\phi(t) \leq g_k(t)$ e que pela Proposição 2.21, item *2.*, segue que $\xi^*_\phi \leq g^*_k$ e, assim,

$$\|\xi_\phi\|^*_{L^{l_k,\infty}} \leq \|g_k\|^*_{L^{l_k,\infty}}$$

.

Agora, calculando $\|g_k\|^*_{L^{l_k,\infty}}$, temos

$$\begin{aligned}
d_{g_k}(\alpha) &= m\left(\{t \in (0,\infty) : |g_k(t)| > \alpha\}\right) \\
&= m\left(\{t \in (0,\infty) : \tilde{C}t^{-\frac{1}{l_k}} > \alpha\}\right) \\
&= m\left(\{t \in (0,\infty) : (\tilde{C}\alpha^{-1})^{l_k} > t\}\right) \\
&= (\tilde{C}\alpha^{-1})^{l_k}.
\end{aligned}$$

Daí, pela Observação 3.2, item *2.*, temos $\|g_k\|^*_{L^{l_k,\infty}} = \|g_k\|_{l_k,\infty}$ e, assim,

$$\begin{aligned}
\|g_k\|^*_{L^{l_k,\infty}} &= \sup_{s>0} s(d_{g_k}(s))^{\frac{1}{l_k}} \\
&= \sup_{s>0} s((\tilde{C}s^{-1})^{l_k})^{\frac{1}{l_k}} \\
&= \tilde{C} = C\|\phi\|_{L^{p_k,1}}.
\end{aligned}$$

Utilizando a Proposição 3.8, temos para $k = 1, 2$ que

$$\|\xi_\phi\|^*_{L^{l_k,\infty}} \leq C\|\phi\|_{L^{p_k,1}} \leq \bar{C}_k\|\phi\|^*_{L^{p_k,1}},\ \bar{C}_k = C\frac{p_k}{p_k - 1}.$$

Tomando então $\theta \in (0,1)$ tal que $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$ notamos que

$$\begin{aligned}
\frac{\theta}{l_1} + \frac{1-\theta}{l_2} &= \frac{\theta}{2\gamma}\left(\frac{n}{p_1} - \frac{n}{p} + 2\gamma\right) + \frac{1-\theta}{2\gamma}\left(\frac{n}{p_2} - \frac{n}{p} + 2\gamma\right) \\
&= \frac{\theta}{2\gamma}\left(\frac{n}{p_1}\right) - \frac{\theta}{2\gamma}\left(\frac{n}{p_2}\right) + \frac{1}{2\gamma}\left(\frac{n}{p_2}\right) - \frac{1}{2\gamma}\left(\frac{n}{p}\right) + 1 \\
&= \frac{n}{2\gamma}\left(\frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}\right) - \frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{p}\right) + 1 \\
&= \frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{p}\right) - \frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{p}\right) + 1 = 1.
\end{aligned}$$

Considerando, então, o operador $\phi \to T\phi = \xi_\phi$ que é claramente quasi-linear, pelo Teorema 3.29, com $q = \tilde{q} = 1$, existe uma constante $B > 0$ tal que

$$\|T\phi\|^*_{L^{1,1}} = \|\xi_\phi\|^*_{L^{1,1}} \leq B\|\phi\|^*_{L^{p,1}}.$$

Uma vez que $L^{1,1}(0,\infty) = L^1(0,\infty)$ (Observação 3.2, item *3.*), e fazendo uso novamente da Proposição 3.8, segue que

$$\begin{aligned}
\|\xi_\phi\|^*_{L^{1,1}} &= \|\xi_\phi\|_1 \\
&= \int_0^\infty t^{\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{n}{p}-\frac{n}{q}\right)-1}\|G_\gamma(t)\phi\|_{L^{q,1}}\, dt \\
&\leq B\|\phi\|^*_{L^{p,1}} \\
&\leq B\|\phi\|_{L^{p,1}}
\end{aligned}$$

ou seja,
$$\int_0^\infty t^{\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{n}{p}-\frac{n}{q}\right)-1}\|G_\gamma(t)\phi\|_{L^{q,1}}\,dt \le B\|\phi\|_{L^{p,1}}, \text{ como queríamos.}$$

□

Consideremos agora o seguinte operador
$$C(h)(x) = \int_0^\infty G_\gamma(s)f(h(s,x))\,ds.$$

Mostraremos a continuidade do operador acima para mostrarmos a continuidade do operador $B(u)$ da formulação mild.

Lema 4.13. *Seja* $\frac{n}{n-2\gamma} < \rho < \infty$ *e* $h \in L^\infty\left((0,\infty); L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}\right)$. *Então,*
$$\|C(h)\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} \le K \sup_{t>0} \|h(t,\cdot)\|^\rho_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}}. \tag{4.21}$$

Mais ainda, se $h \in L^\infty\left((0,\infty); L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty} \cap L^{p,\infty}\right)$, *com* $1 < p' < \frac{n}{2\gamma}$, *então*
$$\|C(h)\|_{L^{p,\infty}} \le K_p \sup_{t>0} \|h(t,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} \sup_{t>0}\|h(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}}. \tag{4.22}$$

Demonstração. Inicialmente, para facilitar a notação, denotaremos $l = \frac{n(\rho-1)}{2\gamma}$.

Notemos que, como por hipótese $\frac{n}{n-2\gamma} < \rho < \infty$ então, segue imediatamente que $1 < \rho < l$.

Agora, como f satisfaz a condição imposta no problema de Cauchy em (4.2), ou seja, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, temos
$$|f(a_1) - f(a_2)| \le \eta|a_2 - a_1|\left(|a_2|^{\rho-1} + |a_1|^{\rho-1}\right) \quad \text{e} \quad f(0) = 0,$$

segue então que
$$|f(h(t,x))| \le \eta|h(t,x)|^\rho. \tag{4.23}$$

Mostremos agora $\|f(h(t,\cdot))\|_{L^{\frac{l}{\rho},\infty}} \le \eta C\left(\|h(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\right)^\rho$.

Pela Proposição 2.22, item *1.*, segue que
$$\left(|h|^\rho(t,\cdot)\right)^* = \left((h(t,\cdot))^*\right)^\rho. \tag{4.24}$$

E assim, temos
$$\begin{aligned}
\||h|^\rho(t,\cdot)\|^*_{L^{\frac{l}{\rho},\infty}} &= \sup_{\tau>0} \tau^{\frac{\rho}{l}}\left(|h|^\rho(t,\cdot)\right)^*(\tau) \\
&= \sup_{\tau>0} \tau^{\frac{\rho}{l}}\left((h(t,\cdot))^*(\tau)\right)^\rho \\
&= \sup_{\tau>0}\left(\tau^{\frac{1}{l}}(h(t,\cdot))^*(\tau)\right)^\rho \\
&\le \left(\sup_{\tau>0}\tau^{\frac{1}{l}}(h(t,\cdot))^*(\tau)\right)^\rho \\
&= \left(\|h(t,\cdot)\|^*_{L^{l,\infty}}\right)^\rho.
\end{aligned}$$

Usando a Proposição 3.8, temos
$$\||h|^\rho(t,\cdot)\|_{L^{\frac{l}{\rho},\infty}} \le \||h|^\rho(t,\cdot)\|^*_{L^{\frac{l}{\rho},\infty}} \le \left(\|h(t,\cdot)\|^*_{L^{l,\infty}}\right)^\rho \le C\left(\|h(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\right)^\rho.$$

Agora, como $h \in L^{l,\infty}$, segue de (4.23) que

$$\|f(h(t,\cdot))\|_{L^{\frac{l}{\rho},\infty}} \leq \eta \||h|^{\rho}(t,\cdot)\|_{L^{\frac{l}{\rho},\infty}} \leq \eta C \left(\|h(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\right)^{\rho}, \tag{4.25}$$

ou seja, $f(h(t,\cdot)) \in L^{\frac{l}{\rho},\infty}$.

Agora, pelo Teorema de dualidade 3.20, o espaço $L^{l,\infty}$ é o dual do espaço $L^{l',1}$. Desse modo, tomando $\phi \in L^{l',1}$, temos

$$\begin{aligned}
\|C(h)\|_{L^{l,\infty}} &= \sup_{\|\phi\|_{L^{l',1}}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} C(h)(x)\phi(x)\, dx \right| \\
&= \sup_{\|\phi\|_{L^{l',1}}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_0^{\infty} G_{\gamma}(s) f(h(s,x))\, ds \right] \phi(x)\, dx \right| \\
&= \sup_{\|\phi\|_{L^{l',1}}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_0^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g_{\gamma}(s, x-y) f(h(s,y))\, dy \right) ds \right] \phi(x)\, dx \right| \\
&= \sup_{\|\phi\|_{L^{l',1}}=1} \left| \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g_{\gamma}(s, y-x)\phi(x) f(h(s,y))\, dx\, dy\, ds \right| \\
&= \sup_{\|\phi\|_{L^{l',1}}=1} \left| \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} G_{\gamma}(s)\phi(y) f(h(s,y))\, dy\, ds \right| \\
&\leq \sup_{\|\phi\|_{L^{l',1}}=1} \left(\int_0^{\infty} \|f(h(s,\cdot)) G_{\gamma}(s)\phi\|_1\, ds \right),
\end{aligned} \tag{4.26}$$

em que usamos o Teorema de Fubini e o Lema 4.2 na quarta igualdade.

Assim, de (4.26) e usando a desigualdade do tipo Hölder (Teorema 3.15) e (4.25), temos

$$\begin{aligned}
\|C(h)\|_{L^{l,\infty}} &\leq \sup_{\|\phi\|_{L^{l',1}}=1} \int_0^{\infty} \|f(h(s,\cdot)) G_{\gamma}(s)\phi\|_1\, ds \\
&\leq \sup_{\|\phi\|_{L^{l',1}}=1} \int_0^{\infty} \|f(h(s,\cdot))\|_{L^{\frac{l}{\rho},\infty}} \|G_{\gamma}(s)\phi\|_{L^{\frac{l}{l-\rho},1}}\, ds \\
&\leq \sup_{\|\phi\|_{L^{l',1}}=1} \int_0^{\infty} \eta C \left(\|h(s,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\right)^{\rho} \|G_{\gamma}(s)\phi\|_{L^{\frac{l}{l-\rho},1}}\, ds \\
&\leq \eta C \sup_{t>0} \left(\|h(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\right)^{\rho} \sup_{\|\phi\|_{L^{l',1}}=1} \int_0^{\infty} \|G_{\gamma}(s)\phi\|_{L^{\frac{l}{l-\rho},1}}\, ds.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Agora, do Lema 4.12, já que $\frac{l}{l-\rho} > l'$ ($l' = \frac{l}{l-1}$) e $\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{l'} - \frac{l-p}{l}\right) - 1 = 0$, e de (4.27), segue que

$$\begin{aligned}
\|C(h)\|_{L^{l,\infty}} &\leq \eta C \sup_{t>0} \left(\|h(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\right)^{\rho} \sup_{\|\phi\|_{L^{l',1}}=1} \int_0^{\infty} \|G_{\gamma}(s)\phi\|_{L^{\frac{l}{l-\rho},1}}\, ds \\
&\leq \eta C \sup_{t>0} \left(\|h(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\right)^{\rho} \sup_{\|\phi\|_{L^{l',1}}=1} C_1 \|\phi\|_{L^{l',1}} \\
&= \eta C C_1 \sup_{t>0} \left(\|h(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\right)^{\rho}.
\end{aligned}$$

Portanto, acabamos de mostrar que

$$\|C(h)\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} \leq K \sup_{t>0} \|h(t,\cdot)\|^{\rho}_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}}.$$

Agora, para a segunda desigualdade do lema, tomemos inicialmente $r > 1$, tal que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{2\gamma}{n}$. Assim, como $h(t,\cdot) \in L^{l,\infty} \cap L^{p,\infty}$, de (4.23), da Proposição 3.8 e de (4.24), segue que

$$\begin{aligned}
\|f(h(t,\cdot))\|_{L^{r,\infty}} &\leq \eta \||h(t,\cdot)|^\rho\|_{L^{r,\infty}} \\
&\leq \eta C \||h(t,\cdot)|^\rho\|^*_{L^{r,\infty}} \\
&= \eta C \sup_{\tau>0} \tau^{\frac{1}{r}} (|h(t,\cdot)|^\rho)^*(\tau) \\
&= \eta C \sup_{\tau>0} \tau^{\frac{1}{p}} \tau^{\frac{2\gamma}{n}} ((h(t,\cdot))^*(\tau))^\rho \\
&= \eta C \sup_{\tau>0} \tau^{\frac{1}{p}} (h(t,\cdot))^*(\tau) \tau^{\frac{2\gamma}{n}} ((h(t,\cdot))^*(\tau))^{\rho-1} \\
&\leq \eta C \sup_{\tau>0} \tau^{\frac{1}{p}} (h(t,\cdot))^*(\tau) \sup_{\tau>0} \tau^{\frac{2\gamma}{n}} (h(t,\cdot)^*(\tau))^{\rho-1} \\
&= \eta C \sup_{\tau>0} \tau^{\frac{1}{p}} (h(t,\cdot))^*(\tau) \sup_{\tau>0} \left(\tau^{\frac{2\gamma}{n(\rho-1)}} (h(t,\cdot))^*(\tau) \right)^{\rho-1} \\
&\leq \eta C \sup_{\tau>0} \tau^{\frac{1}{p}} (h(t,\cdot))^*(\tau) \left(\sup_{\tau>0} \tau^{\frac{2\gamma}{n(\rho-1)}} (h(t,\cdot))^*(\tau) \right)^{\rho-1} \\
&= \eta C \|h(t,\cdot)\|^*_{L^{p,\infty}} \left(\|h(t,\cdot)\|^*_{L^{l,\infty}}\right)^{\rho-1} \\
&\leq \eta C \|h(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} \left(\|h(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\right)^{\rho-1}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Pelo Teorema de dualidade 3.20, o espaço $L^{p,\infty}$ é o dual do espaço $L^{p',1}$. Repetindo o mesmo processo que foi feito em (4.26), temos que

$$\|C(h)\|_{L^{p,\infty}} \leq \sup_{\|\phi\|_{L^{p',1}}=1} \left(\int_0^\infty \|f(h(s,\cdot))G_\gamma(s)\phi\|_1 \, ds \right).$$

Assim, da desigualdade do tipo Hölder (Teorema 3.15) e de (4.28), segue que

$$\begin{aligned}
\|C(h)\|_{L^{p,\infty}} &\leq \sup_{\|\phi\|_{L^{p',1}}=1} \left(\int_0^\infty \|f(h(s,\cdot))G_\gamma(s)\phi\|_1 \, ds \right) \\
&\leq \sup_{\|\phi\|_{L^{p',1}}=1} \int_0^\infty \|f(h(s,\cdot))\|_{L^{r,\infty}} \|G_\gamma(s)\phi\|_{L^{r',1}} \, ds \\
&\leq \sup_{\|\phi\|_{L^{p',1}}=1} \int_0^\infty \eta C \|h(s,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} \left(\|h(s,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\right)^{\rho-1} \|G_\gamma(s)\phi\|_{L^{r',1}} \, ds \\
&\leq \eta C \sup_{t>0} \|h(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} \sup_{t>0} \left(\|h(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\right)^{\rho-1} \sup_{\|\phi\|_{L^{p',1}}=1} \int_0^\infty \|G_\gamma(s)\phi\|_{L^{r',1}} \, ds.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Agora, do Lema 4.12, já que $r' > p'$ e $\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{p'} - \frac{l}{r'}\right) - 1 = 0$ (lembrando que, por hipótese, $1 < p' < \frac{n}{2\gamma}$), e de (4.29), obtemos

$$\begin{aligned}
\|C(h)\|_{L^{p,\infty}} &\leq \eta C \sup_{t>0} \|h(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} \sup_{t>0} \left(\|h(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\right)^{\rho-1} \sup_{\|\phi\|_{L^{p',1}}=1} \int_0^\infty \|G_\gamma(s)\phi\|_{L^{r',1}} \, ds \\
&\leq \eta C \sup_{t>0} \|h(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} \sup_{t>0} \left(\|h(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\right)^{\rho-1} \sup_{\|\phi\|_{L^{p',1}}=1} C_1 \|\phi\|_{L^{p',1}} \\
&= \eta C C_1 \sup_{t>0} \|h(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} \sup_{t>0} \left(\|h(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\right)^{\rho-1}.
\end{aligned}$$

Portando, concluímos que

$$\|C(h)\|_{L^{p,\infty}} \leq K_p \sup_{t>0} \|h(t,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} \sup_{t>0} \|h(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}},$$

como queríamos. □

Agora estamos em condições de mostrar a continuidade do operador $B(u)(t,x)$. Consideremos a seguinte função

$$h(s,\cdot) = \begin{cases} u(t-s,\cdot), \text{ se } s \in [0,t] \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Daí, usando a lei de $h(s,\cdot)$ e o fato de que $f(0) = 0$ (ver (4.2)), segue que

$$\begin{aligned} C(h)(x) &= \int_0^\infty G_\gamma(s) f(h(s,x))\, ds \\ &= \int_0^t g_\gamma(s,x) * f(h(s,x))\, ds + \int_t^\infty g_\gamma(s,x) * f(h(s,x))\, ds \\ &= \int_0^t g_\gamma(s,x) * f(u(t-s,x))\, ds \\ &= -\int_t^0 g_\gamma(t-s,x) * f(u(s,x))\, ds \\ &= \int_0^t g_\gamma(t-s,x) * f(u(s,x))\, ds \\ &= \int_0^t G_\gamma(t-s) f(u(s,x))\, ds \\ &= -B(u)(t,x). \end{aligned}$$

Desse modo, se $u \in L^\infty\left((0,\infty); L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}\right)$, então, usando a igualdade (4.21) do Lema 4.13, temos que

$$\begin{aligned} \|B(u)(t,\cdot)\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} &= \|-B(u)(t,\cdot)\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} \\ &= \|C(h)\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} \\ &\leq K \sup_{t>0} \|h(t,\cdot)\|^{\rho}_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} \\ &\leq K \sup_{t>0} \|u(t,\cdot)\|^{\rho}_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Agora, se $u \in L^\infty\left((0,\infty); L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty} \cap L^{p,\infty}\right)$, então, usando a equação (4.22) do Lema 4.13, temos que

$$\begin{aligned} \|B(u)(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} &= \|-B(u)(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} \\ &= \|C(h)\|_{L^{p,\infty}} \\ &\leq K_p \sup_{t>0} \|h(t,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} \sup_{t>0} \|h(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} \\ &\leq K_p \sup_{t>0} \|u(t,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} \sup_{t>0} \|u(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Lema 4.14. *Sejam* $\frac{n}{n-2\gamma} < \rho < \infty$, $l = \frac{n(\rho-1)}{2\gamma}$ *e* $u, v \in L^\infty\left((0,\infty); L^{l,\infty}\right)$. *Então*

$$\sup_{t>0}\|B(u)(t,\cdot)-B(v)(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} \leq K\sup_{t>0}\|u(t,\cdot)-v(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} \left(\sup_{t>0}\|u(t,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{l,\infty}}+\sup_{t>0}\|v(t,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{l,\infty}}\right). \quad (4.32)$$

Mais ainda, se $u,v\in L^\infty\Big((0,\infty);L^{l,\infty}\cap L^{p,\infty}\Big)$, *com* $1<p'<\frac{n}{2\gamma}$, *então*

$$\sup_{t>0}\|B(u)(t,\cdot)-B(v)(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} \leq K_p\sup_{t>0}\|u(t,\cdot)-v(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} \left(\sup_{t>0}\|u(t,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{l,\infty}}+\sup_{t>0}\|v(t,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{l,\infty}}\right). \quad (4.33)$$

Demonstração. Tomemos inicialmente,

$$h(s,\cdot)=\begin{cases}u(t-s,\cdot), \text{ se } s\in[0,t]\\ 0, \text{ caso contrário}\end{cases}$$

e ainda,

$$g(s,\cdot)=\begin{cases}v(t-s,\cdot), \text{ se } s\in[0,t]\\ 0, \text{ caso contrário}\end{cases}$$

Começaremos por demonstrar a desigualdade (4.32).

Para isso, mostremos que $\||h|^{\rho-1}(t,\cdot)\|^*_{L^{\frac{l}{\rho-1},\infty}}\leq\Big(\|h(t,\cdot)\|^*_{L^{l,\infty}}\Big)^{\rho-1}$.

Pela Proposição 2.22, item *1.*, segue que

$$\Big(|h|^{\rho-1}(t,\cdot)\Big)^*(\tau)=\left((h(t,\cdot))^*(\tau)\right)^{\rho-1}. \quad (4.34)$$

E assim, temos também que

$$\begin{aligned}\||h|^{\rho-1}(t,\cdot)\|^*_{L^{\frac{l}{\rho-1},\infty}} &= \sup_{\tau>0}\tau^{\frac{\rho-1}{l}}\Big(|h|^{\rho-1}(t,\cdot)\Big)^*(\tau)\\ &= \sup_{\tau>0}\tau^{\frac{\rho-1}{l}}\left((h(t,\cdot))^*(\tau)\right)^{\rho-1}\\ &= \sup_{\tau>0}\Big(\tau^{\frac{1}{l}}(h(t,\cdot))^*(\tau)\Big)^{\rho-1}\\ &\leq \left(\sup_{\tau>0}\tau^{\frac{1}{l}}(h(t,\cdot))^*(\tau)\right)^{\rho-1}\\ &= \left(\|h((t,\cdot))\|^*_{L^{l,\infty}}\right)^{\rho-1}.\end{aligned}$$

Usando a Proposição 3.8, temos

$$\||h|^{\rho-1}(t,\cdot)\|_{L^{\frac{l}{\rho-1},\infty}}\leq C\||h|^{\rho-1}(t,\cdot)\|^*_{L^{\frac{l}{\rho-1},\infty}}\leq C\left(\|h(t,\cdot)\|^*_{L^{l,\infty}}\right)^{\rho-1}\leq C\left(\|h(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\right)^{\rho-1}. \quad (4.35)$$

Procedendo de modo análogo, temos

$$\||g|^{\rho-1}(t,\cdot)\|_{L^{\frac{l}{\rho-1},\infty}}\leq C\||g|^{\rho-1}(t,\cdot)\|^*_{L^{\frac{l}{\rho-1},\infty}}\leq C\left(\|g(t,\cdot)\|^*_{L^{l,\infty}}\right)^{\rho-1}\leq C\left(\|g(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\right)^{\rho-1}. \quad (4.36)$$

Agora, por (4.2), temos que

$$|f(h(s,x)) - f(g(s,x))| \leq \eta |h(s,x) - g(s,x)| \left(|h(s,x)|^{\rho-1} + |g(s,x)|^{\rho-1} \right). \tag{4.37}$$

Daí, como $h, g \in L^{l,\infty}$ (pois $u, v \in L^{l,\infty}$), da Proposição 3.8, da desigualdade de Hölder para L^p-fraco 2.16 e de (4.35) e (4.36), segue que

$$\begin{aligned}
\|f(h(s,\cdot)) - f(g(s,\cdot))\|_{L^{\frac{l}{\rho},\infty}} &\leq \eta \| |h(s,\cdot) - g(s,\cdot)| \left(|h(s,\cdot)|^{\rho-1} + |g(s,\cdot)|^{\rho-1} \right) \|_{L^{\frac{l}{\rho},\infty}} \\
&\leq \eta C \| |h(s,\cdot) - g(s,\cdot)| \left(|h(s,\cdot)|^{\rho-1} + |g(s,\cdot)|^{\rho-1} \right) \|^*_{L^{\frac{l}{\rho},\infty}} \\
&\leq \eta C \|h(s,\cdot) - g(s,\cdot)\|^*_{L^{l,\infty}} \left\| |h(s,\cdot)|^{\rho-1} + |g(s,\cdot)|^{\rho-1} \right\|^*_{L^{\frac{l}{\rho-1},\infty}} \\
&\leq \eta C \|h(s,\cdot) - g(s,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} \left\| |h(s,\cdot)|^{\rho-1} + |g(s,\cdot)|^{\rho-1} \right\|_{L^{\frac{l}{\rho-1},\infty}} \\
&\leq \eta C \|h(s,\cdot) - g(s,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} \left(\left\| |h|^{\rho-1}(s,\cdot) \right\|_{L^{\frac{l}{\rho-1},\infty}} + \left\| |g|^{\rho-1}(s,\cdot) \right\|_{L^{\frac{l}{\rho-1},\infty}} \right) \\
&\leq \eta C \|h(s,\cdot) - g(s,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} \left(\|h(s,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{l,\infty}} + \|g(s,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{l,\infty}} \right).
\end{aligned}$$

Agora, pelo Teorema de dualidade 3.20, o espaço $L^{l,\infty}$ é o dual do espaço $L^{l',1}$. Daí, repetindo o mesmo processo utilizado para obter (4.21) do Lema 4.13, temos

$$\|C(h) - C(g)\|_{L^{l,\infty}} \leq K \sup_{t>0} \|h(t,\cdot) - g(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} \left(\sup_{t>0} \|h(t,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{l,\infty}} + \sup_{t>0} \|g(t,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{l,\infty}} \right).$$

Já mostramos anteriormente que $C(h)(x) = -B(u)(t,x)$ e, analogamente, podemos mostrar que $C(g)(x) = -B(v)(t,x)$. Assim, usando a lei de $h(s,\cdot)$ e $g(s,\cdot)$, temos

$$\sup_{t>0} \|B(u)(t,\cdot) - B(v)(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} \leq K \sup_{t>0} \|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} \left(\sup_{t>0} \|u(t,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{l,\infty}} + \sup_{t>0} \|v(t,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{l,\infty}} \right).$$

Vamos, agora, demonstrar a desigualdade 4.33.

Para isso observemos, primeiramente, que usando (4.34), obtemos

$$\begin{aligned}
\| |h|^{\rho-1}(t,\cdot) \|^*_{L^{\frac{n}{2\gamma},\infty}} &= \sup_{\tau>0} \tau^{\frac{2\gamma}{n}} \left(|h|^{\rho-1}(t,\cdot) \right)^* (\tau) \\
&= \sup_{\tau>0} \tau^{\frac{2\gamma}{n}} \left((h(t,\cdot))^*(\tau) \right)^{\rho-1} \\
&= \sup_{\tau>0} \left(\tau^{\frac{2\gamma}{n(\rho-1)}} (h(t,\cdot))^*(\tau) \right)^{\rho-1} \\
&\leq \left(\sup_{\tau>0} \tau^{\frac{1}{l}} (h(t,\cdot))^*(\tau) \right)^{\rho-1} \\
&= \left(\|h(t,\cdot)\|^*_{L^{l,\infty}} \right)^{\rho-1}.
\end{aligned}$$

Usando a Proposição 3.8, temos

$$\| |h|^{\rho-1}(t,\cdot) \|_{L^{\frac{n}{2\gamma},\infty}} \leq C \| |h|^{\rho-1}(t,\cdot) \|^*_{L^{\frac{n}{2\gamma},\infty}} \leq C \left(\|h(t,\cdot)\|^*_{L^{l,\infty}} \right)^{\rho-1} \leq C \left(\|h(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} \right)^{\rho-1}, \tag{4.38}$$

e procedendo de modo análogo, segue que

$$\| |g|^{\rho-1}(t,\cdot) \|_{L^{\frac{n}{2\gamma},\infty}} \leq C \| |g|^{\rho-1}(t,\cdot) \|^*_{L^{\frac{n}{2\gamma},\infty}} \leq C \left(\|g(t,\cdot)\|^*_{L^{l,\infty}} \right)^{\rho-1} \leq C \left(\|g(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} \right)^{\rho-1}. \tag{4.39}$$

Agora, tomando $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{2\gamma}{n}$, lembrando que $h, g \in L^{l,\infty} \cap L^{p,\infty}$ (pois $u, v \in L^{l,\infty} \cap L^{p,\infty}$) e usando 4.37, a Proposição 3.8, a desigualdade de Hölder para L^p-fraco, (4.38) e (4.39), temos que

$$\begin{aligned}
\|f(h(s,\cdot)) - f(g(s,\cdot))\|_{L^{r,\infty}} &\leq \eta \| |h(s,\cdot) - g(s,\cdot)| \left(|h(s,\cdot)|^{\rho-1} + |g(s,\cdot)|^{\rho-1}\right) \|_{L^{r,\infty}} \\
&\leq \eta C \| |h(s,\cdot) - g(s,\cdot)| \left(|h(s,\cdot)|^{\rho-1} + |g(s,\cdot)|^{\rho-1}\right) \|^*_{L^{r,\infty}} \\
&\leq \eta C \|h(s,\cdot) - g(s,\cdot)\|^*_{L^{p,\infty}} \left\| |h(s,\cdot)|^{\rho-1} + |g(s,\cdot)|^{\rho-1} \right\|^*_{L^{\frac{n}{2\gamma},\infty}} \\
&\leq \eta C \|h(s,\cdot) - g(s,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} \left\| |h(s,\cdot)|^{\rho-1} + |g(s,\cdot)|^{\rho-1} \right\|_{L^{\frac{n}{2\gamma},\infty}} \\
&\leq \eta C \|h(s,\cdot) - g(s,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} \left(\left\| |h|^{\rho-1}(s,\cdot) \right\|_{L^{\frac{n}{2\gamma},\infty}} \right. \\
&\quad \left. + \left\| |g|^{\rho-1}(s,\cdot) \right\|_{L^{\frac{n}{2\gamma},\infty}} \right) \\
&\leq \eta C \|h(s,\cdot) - g(s,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} \left(\|h(s,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{l,\infty}} + \|g(s,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{l,\infty}} \right).
\end{aligned}$$

Do Teorema de dualidade 3.20 segue que o espaço $L^{p,\infty}$ é o dual do espaço $L^{p',1}$. Daí, pelo mesmo processo utilizado anteriormente para obter (4.22) do Lema 4.13, temos

$$\|C(h) - C(g)\|_{L^{p,\infty}} \leq K_p \sup_{t>0} \|h(t,\cdot) - g(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} \left(\sup_{t>0} \|h(t,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{l,\infty}} + \sup_{t>0} \|g(t,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{l,\infty}} \right).$$

Agora, como já mostramos anteriormente que $C(h)(x) = -B(u)(t,x)$ e, também, que $C(g)(x) = -B(v)(t,x)$, usando a lei de $h(s,\cdot)$ e $g(s,\cdot)$, temos

$$\begin{aligned}
\sup_{t>0} \|B(u)(t,\cdot) - B(v)(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} &\leq K_p \sup_{t>0} \|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} \\
&\quad \left(\sup_{t>0} \|u(t,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{l,\infty}} + \sup_{t>0} \|v(t,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{l,\infty}} \right).
\end{aligned}$$

□

A seguir apresentaremos mais algumas estimativas do operador $B(u)$. Para isso, precisaremos do seguinte resultado:

Proposição 4.15. *Se $x, y > 0$, então*

$$\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \ dt < \infty.$$

Demonstração. Tome $0 < \lambda < 1$. Daí, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \ dt &= \int_0^\lambda t^{x-1} (1-t)^{y-1} \ dt + \int_\lambda^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \ dt \\
&\leq \max\{1, (1-\lambda)^{y-1}\} \int_0^\lambda t^{x-1} \ dt + \max\{1, \lambda^{x-1}\} \int_\lambda^1 (1-t)^{y-1} \ dt \\
&= \max\{1, (1-\lambda)^{y-1}\} \frac{\lambda^x}{x} + \max\{1, \lambda^{x-1}\} \frac{(1-\lambda)^y}{y} < \infty.
\end{aligned}$$

□

Lema 4.16. *Sejam $\frac{n}{n-2\gamma} < \rho < \infty$, $\frac{n(\rho-1)}{2\gamma} < q < \frac{n\rho(\rho-1)}{2\gamma}$, $\alpha = \frac{2}{\rho-1} - \frac{n}{\gamma q}$ e $u \in E_q$. Então,*

$$\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|B(u)(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} \leq K \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} \right)^\rho. \tag{4.40}$$

Demonstração. Como f satisfaz a condição imposta no problema de Cauchy em (4.2), ou seja, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que para todo $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ temos

$$|f(a_1)-f(a_2)| \leq \eta|a_2-a_1|\left(|a_2|^{\rho-1}+|a_1|^{\rho-1}\right) \quad \text{e} \quad f(0)=0,$$

segue, então, que

$$|f(u(t,x))| \leq \eta|u(t,x)|^{\rho}. \tag{4.41}$$

Mostremos, agora, que $\|f(u(t,\cdot))\|_{L^{\frac{q}{\rho},\infty}} \leq \eta C\left(\|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho}$.

Pela Proposição 2.22, item *1.*, segue que

$$\left(|u(t,\cdot)|^{\rho}\right)^{*}(\tau) = \left(u(t,\cdot)^{*}(\tau)\right)^{\rho}. \tag{4.42}$$

E assim, temos também que

$$\begin{aligned}
\||u|^{\rho}(t,\cdot)\|^{*}_{L^{\frac{q}{\rho},\infty}} &= \sup_{\tau>0}\tau^{\frac{\rho}{q}}\left(|u(t,\cdot)|^{\rho}\right)^{*}(\tau)\\
&= \sup_{\tau>0}\tau^{\frac{\rho}{q}}\left((u(t,\cdot))^{*}(\tau)\right)^{\rho}\\
&= \sup_{\tau>0}\left(\tau^{\frac{1}{q}}(u(t,\cdot))^{*}(\tau)\right)^{\rho}\\
&\leq \left(\sup_{\tau>0}\tau^{\frac{1}{q}}(u(t,\cdot))^{*}(\tau)\right)^{\rho}\\
&= \left(\|u(t,\cdot)\|^{*}_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho}.
\end{aligned}$$

Usando a Proposição 3.8, temos

$$\||u|^{\rho}(t,\cdot)\|_{L^{\frac{q}{\rho},\infty}} \leq C\||u|^{\rho}(t,\cdot)\|^{*}_{L^{\frac{q}{\rho},\infty}} \leq \left(\|u(t,\cdot)\|^{*}_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho} \leq C\left(\|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho}.$$

Agora, segue de (4.41) que

$$\|f(u(t,\cdot))\|_{L^{\frac{q}{\rho},\infty}} \leq \eta\||u|^{\rho}(t,\cdot)\|_{L^{\frac{q}{\rho},\infty}} \leq \eta C\left(\|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho}. \tag{4.43}$$

Notemos que, como por hipótese $\frac{n}{n-2\gamma}<\rho<\infty$, então segue que $1<\rho<\frac{n(\rho-1)}{2\gamma}$ e como $\frac{n(\rho-1)}{2\gamma}<q<\frac{n\rho(\rho-1)}{2\gamma}$, obtemos que

$$\rho < \frac{n(\rho-1)}{2\gamma} < q \Rightarrow 1 < \frac{q}{\rho}$$

e

$$q < \frac{n\rho(\rho-1)}{2\gamma} \Rightarrow \frac{q}{\rho} < \frac{n(\rho-1)}{2\gamma} < q.$$

Ou seja, temos que $1<\frac{q}{\rho}<q$ e, daí, do Lema 4.4 e de (4.43), segue que

$$\begin{aligned}
\|B(u)(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} &\leq \int_0^t \|G_\gamma(t-s)f(u(s,\cdot))\|_{L^{q,\infty}}\,ds\\
&\leq C_1\int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{\rho}{q}-\frac{1}{q}\right)}\|f(u(s,\cdot))\|_{L^{\frac{q}{\rho},\infty}}\,ds\\
&\leq C_1\int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{\rho}{q}-\frac{1}{q}\right)}\eta C\|u(s,\cdot)\|^{\rho}_{L^{q,\infty}}\,ds\\
&\leq C_1\eta C\left(\int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{\rho}{q}-\frac{1}{q}\right)}s^{-\rho\frac{\alpha}{2}}\,ds\right)\left(\sup_{t>0}t^{\frac{\alpha}{2}}\|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Observemos ainda que

$$1-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{\rho}{q}-\frac{1}{q}\right)=1-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{\rho-1}{q}\right)>0,$$

pois $\frac{n(\rho-1)}{2\gamma q}<1$, já que por hipótese $\frac{n(\rho-1)}{2\gamma}<q$ e que

$$\begin{aligned}1-\rho\frac{\alpha}{2} &= 1-(\rho-1)\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\\ &= 1-1+\frac{n\rho}{2\gamma q}-\frac{n}{2\gamma q}-\frac{1}{\rho-1}+\frac{n}{2\gamma q}\\ &= \frac{n\rho}{2\gamma q}-\frac{1}{\rho-1}>0,\end{aligned}$$

pois $\frac{1}{\rho-1}<\frac{n\rho}{2\gamma q}$, já que por hipótese, $q<\frac{n\rho(\rho-1)}{2\gamma}$.

Ou seja, $-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{\rho}{q}-\frac{1}{q}\right)=x-1$, com $x>0$ e $-\rho\frac{\alpha}{2}=z-1$, com $z>0$.

Além disso, temos que

$$\begin{aligned}-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{\rho}{q}-\frac{1}{q}\right)-\rho\frac{\alpha}{2}+1 &= -\frac{n\rho}{2\gamma q}+\frac{n}{2\gamma q}-\frac{\rho}{\rho-1}+\frac{n\rho}{2\gamma q}+1\\ &= \frac{n}{2\gamma q}-\frac{\rho}{\rho-1}+1\\ &= \frac{n}{2\gamma q}-\frac{1}{\rho-1}\\ &= -\frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $y=\frac{s}{t}$, e usando as relações obtidas acima, segue que

$$\begin{aligned}\int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{\rho}{q}-\frac{1}{q}\right)} s^{-\rho\frac{\alpha}{2}}\,ds &= \left(t^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{\rho}{q}-\frac{1}{q}\right)-\rho\frac{\alpha}{2}+1}\right)\int_0^1 (1-y)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{\rho}{q}-\frac{1}{q}\right)} y^{-\rho\frac{\alpha}{2}}\,dy\\ &= t^{-\frac{\alpha}{2}}\int_0^1 (1-y)^{x-1}y^{z-1}\\ &= t^{-\frac{\alpha}{2}}C_2, \end{aligned} \tag{4.45}$$

em que usamos a Proposição 4.15 na última igualdade.

Logo, de 4.44 e de 4.45, temos

$$\begin{aligned}\|B(u)(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} &\leq C_1\eta C C_2 t^{-\frac{\alpha}{2}}\left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}}\|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho}\\ &= K t^{-\frac{\alpha}{2}}\left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}}\|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho},\end{aligned}$$

em que $K=C_1\eta C C_2$.

Desse modo, obtemos

$$\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}}\|B(u)(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\leq K\left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}}\|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho}.$$

□

Lema 4.17. *Sejam* $\frac{n}{n-2\gamma} < \rho < \infty$, $\frac{n(\rho-1)}{2\gamma} < q < \frac{n\rho(\rho-1)}{2\gamma}$, $\alpha = \frac{2}{\rho-1} - \frac{n}{\gamma q}$ *e* $u, v \in E_q$. *Então*

$$\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|B(u)(t,\cdot) - B(v)(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} \leq K_q \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right) \left[\left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho-1} + \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho-1}\right].$$

Demonstração. Primeiramente, notemos que usando a Proposição 2.22, item *1*, temos que

$$\begin{aligned}
\||u|^{\rho-1}(t,\cdot)\|^*_{L^{\frac{q}{\rho-1},\infty}} &= \sup_{\tau>0} \tau^{\frac{\rho-1}{q}} \left(|u|^{\rho-1}(t,\cdot)\right)^*(\tau) \\
&= \sup_{\tau>0} \tau^{\frac{\rho-1}{q}} \left((u(t,\cdot))^*(\tau)\right)^{\rho-1} \\
&= \sup_{\tau>0} \left(\tau^{\frac{1}{q}} (u(t,\cdot))^*(\tau)\right)^{\rho-1} \\
&\leq \left(\sup_{\tau>0} \tau^{\frac{1}{q}} (u(t,\cdot))^*(\tau)\right)^{\rho-1} \\
&= \left(\|u(t,\cdot)\|^*_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho-1}.
\end{aligned}$$

Da Proposição 3.8, temos

$$\||u|^{\rho-1}(t,\cdot)\|_{L^{\frac{q}{\rho-1},\infty}} \leq C \||u|^{\rho-1}(t,\cdot)\|^*_{L^{\frac{q}{\rho-1},\infty}} \leq C\left(\|u(t,\cdot)\|^*_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho-1} \leq C\left(\|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho-1}, \tag{4.46}$$

e procedendo de modo análogo, segue que

$$\||v|^{\rho-1}(t,\cdot)\|_{L^{\frac{q}{\rho-1},\infty}} \leq C \||v|^{\rho-1}(t,\cdot)\|^*_{L^{\frac{q}{\rho-1},\infty}} \leq C\left(\|v(t,\cdot)\|^*_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho-1} \leq C\left(\|v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho-1}. \tag{4.47}$$

Agora, tomando $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{\rho-1}{q}$, usando a condição inicial da função f (ver (4.2)), a Proposição 3.8, a desigualdade de Hölder para L^p-fraco (Proposição 2.16), (4.46) e (4.47), temos que

$$\begin{aligned}
\|f(u(s,\cdot)) - f(v(s,\cdot))\|_{L^{r,\infty}} &\leq \eta \||u(s,\cdot) - v(s,\cdot)| \left(|u(s,\cdot)|^{\rho-1} + |v(s,\cdot)|^{\rho-1}\right)\|_{L^{r,\infty}} \\
&\leq \eta C \||u(s,\cdot) - v(s,\cdot)| \left(|u(s,\cdot)|^{\rho-1} + |v(s,\cdot)|^{\rho-1}\right)\|^*_{L^{r,\infty}} \\
&\leq \eta C \|u(s,\cdot) - v(s)\|^*_{L^{q,\infty}} \left\||u(s,\cdot)|^{\rho-1} + |v(s,\cdot)|^{\rho-1}\right\|^*_{L^{\frac{q}{\rho-1},\infty}} \\
&\leq \eta C \|u(s,\cdot) - v(s,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} \left\||u(s,\cdot)|^{\rho-1} + |v(s,\cdot)|^{\rho-1}\right\|_{L^{\frac{q}{\rho-1},\infty}} \\
&\leq \eta C \|u(s,\cdot) - v(s,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} \left(\left\||u(s,\cdot)|^{\rho-1}\right\|_{L^{\frac{q}{\rho-1},\infty}} \right. \\
&\quad \left. + \left\||v(s,\cdot)|^{\rho-1}\right\|_{L^{\frac{q}{\rho-1},\infty}}\right) \\
&\leq \eta C \|u(s,\cdot) - v(s,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} \left(\|u(s,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{q,\infty}} \right. \\
&\quad \left. + \|v(s,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{q,\infty}}\right).
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Notemos que, como $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{\rho-1}{q}$, então $r = \frac{q}{\rho}$. Por hipótese $\frac{n}{n-2\gamma} < \rho < \infty$ então, segue que $1 < \rho < \frac{n(\rho-1)}{2\gamma}$ e como $\frac{n(\rho-1)}{2\gamma} < q < \frac{n\rho(\rho-1)}{2\gamma}$, temos que

$$\rho < \frac{n(\rho-1)}{2\gamma} < q \Rightarrow 1 < \frac{q}{\rho} = r,$$

$$q < \frac{n\rho(\rho-1)}{2\gamma} \Rightarrow r = \frac{q}{\rho} < \frac{n(\rho-1)}{2\gamma} < q.$$

Ou seja, temos que $1 < r < q$. Daí, usando o Lema 4.4 e 4.48, temos que

$$\begin{aligned}
\|B(u)(t,\cdot) - B(v)(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} &\leq \int_0^t \|G_\gamma(t-s)[f(u(s,\cdot)) - f(v(s,\cdot))]\|_{L^{q,\infty}}\, ds \\
&\leq C_1 \int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} \|f(u(s,\cdot)) - f(v(s,\cdot))\|_{L^{r,\infty}}\, ds \\
&\leq C_1 \int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} \eta C \|u(s,\cdot) - v(s,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} \\
&\quad \left(\|u(s,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{q,\infty}} + \|v(s,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{q,\infty}}\right)\, ds \\
&\leq C_1 \eta C \int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} s^{\left(-(\rho-1)\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}\, ds \\
&\quad \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right) \left[\left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho-1}\right. \\
&\quad \left. + \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho-1}\right]. \qquad (4.49)
\end{aligned}$$

Observemos ainda que

$$1 - \frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right) = 1 - \frac{n}{2\gamma}\left(\frac{\rho-1}{q}\right) > 0,$$

pois $\frac{n(\rho-1)}{2\gamma} < 1$, já que por hipótese, $\frac{n(\rho-1)}{2\gamma} < q$ e, também, que

$$\begin{aligned}
1 - (\rho-1)\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} &= 1 - 1 + \frac{n\rho}{2\gamma q} - \frac{n}{2\gamma q} - \frac{1}{\rho-1} + \frac{n}{2\gamma q} \\
&= \frac{n\rho}{2\gamma q} - \frac{1}{\rho-1} > 0,
\end{aligned}$$

pois $\frac{1}{\rho-1} < \frac{n\rho}{2\gamma q}$, já que por hipótese, $q < \frac{n\rho(\rho-1)}{2\gamma}$.

Ou seja, $-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right) = x - 1$, com $x > 0$ e $-(\rho-1)\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = z - 1$ com $z > 0$.

E ainda, segue que

$$\begin{aligned}
-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right) - (\rho-1)\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} + 1 &= -\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{\rho-1}{q}\right) - \rho\frac{\alpha}{2} + 1 \\
&= -\frac{n\rho}{2\gamma q} + \frac{n}{2\gamma q} - \frac{\rho}{\rho-1} + \frac{n\rho}{2\gamma q} + 1 \\
&= \frac{n}{2\gamma q} - \frac{\rho}{\rho-1} + 1 \\
&= \frac{n}{2\gamma q} - \frac{1}{\rho-1} \\
&= -\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

Assim, fazendo a mudança de variável $y = \frac{s}{t}$ e utilizando as relações obtidas acima, segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)} s^{\left(-(\rho-1)\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}\, ds &= t^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)-(\rho-1)\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}+1} \int_0^1 (1-y)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)} y^{-(\rho-1)\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}}\, dy \\
&= t^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^1 (1-y)^{x-1} y^{z-1}\, dy \\
&= t^{-\frac{\alpha}{2}} C_2, \qquad (4.50)
\end{aligned}$$

em que $C_2 = \displaystyle\int_0^1 (1-y)^{x-1} y^{z-1}\, dy < \infty$, pela Proposição 4.15.

Desse modo, de 4.49, e de 4.50, temos

$$\begin{aligned}
\|B(u)(t,\cdot) - B(v)(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} &\le C_1 \eta C C_2 t^{-\frac{\alpha}{2}} \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} \right) \left[\left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} \right)^{\rho-1} \right. \\
&\quad \left. + \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} \right)^{\rho-1} \right] \\
&= K_q t^{-\frac{\alpha}{2}} \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} \right) \left[\left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} \right)^{\rho-1} \right. \\
&\quad \left. + \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} \right)^{\rho-1} \right],
\end{aligned}$$

em que $K_q = C_1 \eta C C_2$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|B(u)(t,\cdot) - B(v)(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} &\le K_q \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} \right) \left[\left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} \right)^{\rho-1} \right. \\
&\quad \left. + \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} \right)^{\rho-1} \right].
\end{aligned}$$

□

Devemos mostrar que a solução do Teorema 4.7 converge para o valor inicial u_0 na topologia fraca-$*$ em $L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}$. O próximo resultado nos ajudará nessa tarefa, pois ele garante que a parte não linear da solução converge para 0 na topologia fraca-$*$ em $L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}$.

Lema 4.18. *Sejam* $l = \frac{n(\rho-1)}{2\gamma}$ *e* $u \in BC\left((0,\infty); L^{l,\infty}\right)$. *Então*

$$B(u)(t,x) \rightharpoonup 0, \text{ quando } t \to 0^+,$$

sendo o limite tomado sobre a topologia fraca-$*$ de $L^{l,\infty}$.

Demonstração. Pelo Teorema de dualidade 3.20, o espaço $L^{l,\infty}$ é o espaço dual de $L^{l',1}$. Tomemos, então, $\phi \in L^{l',1}$ para mostrarmos a convergência na topologia fraca-$*$. Porém, pelo Lema 3.22, temos que C_c^∞ é denso em $L^{l',1}$, então basta tomarmos $\phi \in C_c^\infty$ para mostrar tal convergência.

Seja $r > 0$, tal que $\frac{l}{\rho} < r < \frac{n(\rho-1)}{2\gamma}$.

Agora, pelo Lema 4.4, como $\frac{l}{\rho} < r$, segue que

$$\|G_\gamma(t-s)f(u(s,\cdot))\|_{L^{r,\infty}} \leq C(t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}(\frac{\rho}{l}-\frac{1}{r})}\|f(u(s,\cdot))\|_{L^{\frac{l}{\rho},\infty}}.$$

Pelo o que foi feito em (4.25) do Lema 4.13, segue que

$$\|f(u(s,\cdot))\|_{L^{\frac{l}{\rho},\infty}} \leq \eta C_1 \|u(s,\cdot)\|^{\rho}_{L^{l,\infty}}.$$

Ou seja,

$$\|G_\gamma(t-s)f(u(s,\cdot))\|_{L^{r,\infty}} \leq \eta C_1 C(t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}(\frac{\rho}{l}-\frac{1}{r})}\|u(s,\cdot)\|^{\rho}_{L^{l,\infty}}. \tag{4.51}$$

Desse modo, para $\phi \in C_c^\infty$, usando o Teorema de Fubini, a desigualdade de Hölder (Teorema 3.15) e (4.51), segue que

$$\begin{aligned}
|\langle B(u)(t,x),\phi\rangle| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} B(u)(t,x)\phi(x)\ dx\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_0^t G_\gamma(t-s)f(u(s,x))\ ds\right]\phi(x)\ dx\right| \\
&= \left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} G_\gamma(t-s)f(u(s,x))\phi(x)\ dx\ ds\right| \\
&\leq \int_0^t \|G_\gamma(t-s)f(u(s,\cdot))\phi\|_1\ ds \\
&\leq \int_0^t \|G_\gamma(t-s)f(u(s,\cdot))\|_{L^{r,\infty}}\|\phi\|_{L^{r',1}}\ ds \\
&\leq \int_0^t \eta C_1 C(t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}(\frac{\rho}{l}-\frac{1}{r})}\|u(s,\cdot)\|^{\rho}_{L^{l,\infty}}\|\phi\|_{L^{r',1}}\ ds \\
&\leq \eta C_1 C \sup_{t>0}\|u(t,\cdot)\|^{\rho}_{L^{l,\infty}}\|\phi\|_{L^{r',1}}\int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}(\frac{\rho}{l}-\frac{1}{r})}\ ds. \qquad (4.52)
\end{aligned}$$

Notemos agora que, como $\frac{l}{\rho} < r < \frac{n(\rho-1)}{2\gamma}$ e $l = \frac{n(\rho-1)}{2\gamma}$, temos

$$\begin{aligned}
-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{\rho}{l}-\frac{1}{r}\right)+1 &> -\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{\rho}{l}-\frac{2\gamma}{n(\rho-1)}\right)+1 \\
&= -\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{\rho 2\gamma}{n(\rho-1)}-\frac{2\gamma}{n(\rho-1)}\right)+1 \\
&= -\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{2\gamma(\rho-1)}{n(\rho-1)}\right)+1 \\
&= -1+1 \\
&= 0. \qquad (4.53)
\end{aligned}$$

Assim, de (4.52), temos

$$\begin{aligned}
|\langle B(u)(t,x),\phi\rangle| &\leq \eta C_1 C \sup_{t>0}\|u(t,\cdot)\|^{\rho}_{L^{l,\infty}}\|\phi\|_{L^{r',1}}\int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}(\frac{\rho}{l}-\frac{1}{r})}\ ds \\
&= K\sup_{t>0}\|u(t,\cdot)\|^{\rho}_{L^{l,\infty}}\|\phi\|_{L^{r',1}} t^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{\rho}{l}-\frac{1}{r}\right)+1},
\end{aligned}$$

e, por (4.53), segue que $\langle B(u)(t,x),\phi\rangle \to 0$ quando $t \to 0^+$, ou seja, $B(u)(t,x) \rightharpoonup 0$, quando $t \to 0^+$ na topologia fraca-$*$ em $L^{l,\infty}$. $\square$

4.6 Convergência do Termo Linear

O objetivo desta seção é mostrar que a parte linear da solução do teorema 4.7 converge para o valor inicial u_0 na topologia fraco - * em $L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}$. Mostraremos também que a parte linear tende a 0 em L^q quando o tempo t vai para infinito e este fato nos será útil no teorema de unicidade 4.9.

Lema 4.19. *Sejam $l = \frac{n(\rho-1)}{2\gamma}$ e $u_0 \in L^{l,\infty}$. Então*

$$G_\gamma(t)u_0 \rightharpoonup u_0, \text{ quando } t \to 0^+,$$

sendo o limite tomado sobre a topologia fraca-$*$ de $L^{l,\infty}$.

Demonstração. Pelo Teorema de dualidade 3.20, o espaço $L^{l,\infty}$ é o espaço dual de $L^{l',1}$. Tomemos, então, $\phi \in L^{l',1}$ para mostrarmos a convergência na topologia fraca-$*$.

Fixando $\phi \in L^{l',1}$, do Lema 4.2 e do teorema de Fubini, temos que

$$\begin{aligned} \langle G_\gamma(t)u_0, \phi\rangle &= \langle g_\gamma(t,\cdot) * u_0, \phi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g_\gamma(t, x-y)u_0(y)\ dy\ \phi(x)\ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g_\gamma(t, y-x)\phi(x)\ dx\ u_0(y)\ dy \\ &= \langle g_\gamma(t,\cdot) * \phi, u_0\rangle \\ &= \langle G_\gamma(t)\phi, u_0\rangle \\ &= \langle u_0, G_\gamma(t)\phi\rangle. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Utilizando agora a igualdade 4.54, temos

$$\begin{aligned} \langle G_\gamma(t)u_0 - u_0, \phi\rangle &= \langle G_\gamma(t)u_0, \phi\rangle - \langle u_0, \phi\rangle \\ &= \langle u_0, G_\gamma(t)\phi\rangle - \langle u_0, \phi\rangle \\ &= \langle u_0, G_\gamma(t)\phi - \phi\rangle. \end{aligned} \tag{4.55}$$

Notemos que, de (4.55) e da desigualdade do tipo Hölder (3.15), temos

$$\begin{aligned} |\langle G_\gamma(t)u_0 - u_0, \phi\rangle| &= |\langle u_0, G_\gamma(t)\phi - \phi\rangle| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)[G_\gamma(t)\phi(x) - \phi(x)]\ dx\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)[G_\gamma(t)\phi(x) - \phi(x)]|\ dx \\ &= \|u_0[G_\gamma(t)\phi - \phi])\|_1 \\ &\leq \|u_0\|_{L^{l,\infty}}\|G_\gamma(t)\phi - \phi\|_{L^{l',1}}. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Mostremos, agora, que $\|G_\gamma(t)\phi - \phi\|_{L^{l',1}} \to 0$, quando $t \to 0^+$.

Para isso, notemos que pelo Lema 4.3, segue que

$$\begin{aligned} g_\gamma(t,x) &= t^{-\frac{n}{2\gamma}} g_\gamma(1, xt^{-\frac{1}{2\gamma}}) \\ &= \epsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \\ &= \varphi_\epsilon(x), \end{aligned} \tag{4.57}$$

em que tomamos $\epsilon = t^{\frac{1}{2\gamma}}$ e $\varphi(x) = g_\gamma(1,x)$.

Lembremos que, pelo Lema 4.1, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} g_\gamma(1,x)\ dx = 1.$$

Desse modo, pelo Teorema da aproximação da identidade 3.27, quando $\epsilon \to 0$, segue que

$$\|\varphi_\epsilon * \phi - \phi\|_{L^{l',1}} \to 0,$$

ou seja, quando $t \to 0^+$, temos que

$$\|G_\gamma(t)\phi - \phi\|_{L^{l',1}} \to 0. \tag{4.58}$$

Desse modo, aplicando (4.58) em (4.56), concluímos que, quando $t \to 0^+$,

$$\langle G_\gamma(t)u_0 - u_0, \phi\rangle \to 0,$$

ou seja, $G_\gamma(t)u_0 \rightharpoonup u_0$ na topologia fraca-$*$ em $L^{l,\infty}$. □

Lema 4.20. *Sejam* $0 < \gamma < \frac{n}{2}$, $\frac{n}{n-2\gamma} < \rho < \infty$, $\frac{n(\rho-1)}{2\gamma} < q < \frac{n\rho(\rho-1)}{2\gamma}$, $\alpha = \frac{2}{\rho-1} - \frac{n}{\gamma q}$ *e* $u_0 \in L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma}}$. *Então*

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}}\|G_\gamma(t)u_0\|_q = 0.$$

Demonstração. Seja $l = \frac{n(\rho-1)}{2\gamma}$. Inicialmente, como $L^l \cap L^q$ é denso em L^l, existe uma sequência $(u_{0,k})_{k\in\mathbb{N}}$ em $L^l \cap L^q$ tal que $u_{0,k} \to u_0$ em L^l, quando $k \to \infty$, ou seja,

$$\lim_{k\to\infty} \|u_{0,k} - u_0\|_l = 0. \tag{4.59}$$

Agora, pelo Lema 4.4, tomando $r = p = q_1 = q_2 = q$ e usando a Observação 3.2, *item 3.*, como $u_{0,k} \in L^q$, temos

$$\|G_\gamma(t)u_{0,k}\|_q \leq C\|u_{0,k}\|_q.$$

Desse modo, como $\alpha > 0$, segue que

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}}\|G_\gamma(t)u_{0,k}\|_q \leq \lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}}\|u_{0,k}\|_q = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}}\|G_\gamma(t)u_{0,k}\|_q = 0. \tag{4.60}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} -\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{q}\right) &= -\frac{n}{2\gamma}\frac{2\gamma}{n(\rho-1)} + \frac{n}{2\gamma q} \\ &= -\frac{1}{\rho-1} + \frac{n}{2\gamma q} \\ &= -\frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \tag{4.61}$$

Assim, do Lema 4.4, da Observação 3.2, *item 3.*, de 4.59, 4.60 e de 4.61, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}}\|G_\gamma(t)u_0\|_q &= \lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}}\|G_\gamma(t)(u_0 - u_{0,k} + u_{0,k})\|_q && (4.62)\\ &\leq \lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}}\|G_\gamma(t)(u_{0,k} - u_0)\|_q + \lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}}\|G_\gamma(t)u_{0,k}\|_q \\ &\leq C\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}}t^{-\frac{\alpha}{2}}\|u_{0,k} - u_0\|_l \\ &= \|u_{0,k} - u_0\|_l. && (4.63) \end{aligned}$$

Fazendo $k \to \infty$, segue que $\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}}\|G_\gamma(t)u_0\|_q = 0$. □

4.7 Demonstração dos Teoremas de Boa-colocação, regularização e Unicidade

O enfoque desta seção é demonstrar os teoremas de Boa-colocação 4.7, regularização 4.8 e Unicidade 4.9, apresentados na seção 4.4. Para isso, usaremos o Lema abstrato 4.10 e faremos uso das estimativas apresentadas nas seções 4.5 e 4.6.

Demonstração do Teorema de Boa-colocação 4.7

Daremos início, demonstrando a primeira parte do Teorema de boa-colocação 4.7. Para tanto, usaremos o Lema abstrato 4.10, em que $X = E$ e $B : X \to X$ é dado por

$$B(u)(t,x) = -\int_0^t G_\gamma(t-s)f(u(s,x))\,ds.$$

Notemos agora que, para $u, v \in E$, de (4.30), segue que

$$\|B(u)\|_E \leq K\|u\|_E^\rho$$

e de 4.32 do Lema 4.14, obtemos

$$\|B(u) - B(v)\|_E \leq K\|u - v\|_E \left(\|u\|_E^{\rho-1} + \|v\|_E^{\rho-1}\right).$$

Notemos também que, tomando $y = G_\gamma(t)u_0(x)$ e $0 < \delta$ tal que $2^\rho \epsilon^{\rho-1} K < 1$, em que $\epsilon = C\delta$, como por hipótese $\|u_0\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} < \delta$, pelo Lema 4.4, segue que

$$\|G_\gamma(\cdot)u_0\|_E \leq C\|u_0\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} < C\delta = \epsilon.$$

Portanto, como consequência do Lema abstrato, existe $u(t,x) \in E$, que é única na bola fechada $\overline{B(0,2\epsilon)}$, tal que

$$u(t,x) = G_\gamma(t)u_0(x) + B(u)(t,x).$$

Por fim, para garantirmos que $u(t,x)$ é de fato uma solução mild global para o problema de Cauchy (4.1), resta apenas mostrar que $u(t,x) \rightharpoonup u_0(x)$, quando $t \to 0^+$, com o limite sendo tomado sobre a topologia fraca-$*$ de $L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}$.

Pelo Teorema da dualidade 3.20, como $L^{l,\infty}$ é o espaço dual de $L^{l',1}$, com $l = \frac{n(\rho-1)}{2\gamma}$, tomemos $\phi \in L^{l',1}$ e, assim, usando os Lemas 4.18 e 4.19, obtemos

$$\begin{aligned} \langle u(t,x), \phi(x)\rangle &= \langle G_\gamma(t)u_0(x) + B(u)(t,x), \phi(x)\rangle \\ &= \langle G_\gamma(t)u_0(x), \phi(x)\rangle + \langle B(u)(t,x), \phi(x)\rangle \to \langle u_0(x), \phi(x)\rangle, \text{ quando } t \to 0^+. \end{aligned}$$

Portanto, $u(t,x)$ é uma solução mild global para o problema de Cauchy (4.1).

Para demonstrar a segunda parte do teorema, precisamos garantir que a solução $u(t,x)$ obtida acima é tal que $u \in BC\left((0,\infty); L^{p,\infty}\right)$, desde que a condição inicial satisfaça $u_0 \in L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty} \cap L^{p,\infty}$, com $1 < p' < \frac{n}{2\gamma}$.

Tomemos $l = \frac{n(\rho-1)}{2\gamma}$. Como a solução do Lema abstrato 4.10 é obtida pelo método das aproximações sucessivas, pela Observação 4.11, conseguimos a seguinte sequência:

$$u_1(t,x) = G_\gamma(t)u_0(x), \quad u_{k+1}(t,x) = u_1(t,x) + B(u_k)(t,x), \; k \in \mathbb{N}.$$

Usando o Lema 4.4, segue que

$$\|G_\gamma(t)u_0\|_{L^{p,\infty}} \leq \tilde{C}\|u_0\|_{L^{p,\infty}},$$

ou seja,

$$\sup_{t>0}\|u_1(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} \leq \tilde{C}\|u_0\|_{L^{p,\infty}}. \tag{4.64}$$

E ainda, usando 4.64 e 4.31 temos também que

$$\begin{aligned}
\|u_{k+1}(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} &= \|u_1(t,\cdot)+B(u_k)(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}}\\
&\leq \|u_1(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} + \|B(u_k)(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}}\\
&\leq \tilde{C}\|u_0\|_{L^{p,\infty}} + K_p\sup_{t>0}\|u_k(t,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{l,\infty}}\sup_{t>0}\|u_k(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}}.
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\sup_{t>0}\|u_{k+1}(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} \leq \tilde{C}\|u_0\|_{L^{p,\infty}} + K_p\sup_{t>0}\|u_k(t,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{l,\infty}}\sup_{t>0}\|u_k(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}}. \tag{4.65}$$

Um comentário que merece atenção agora é que para utilizar a 4.31 na desigualdade acima devemos ter $u_k \in L^{l,\infty}\cap L^{p,\infty},\ k\in\mathbb{N}$. E essa afirmação é evidentemente válida pelo modo como definimos a sequência e por um argumento de indução.

Agora, tomemos $\tilde{K}=\max\{K,K_p\}$ e também $0<\delta_p<\delta$, tal que $2^\rho\left(\epsilon_p\right)^{\rho-1}\tilde{K}<1$, em que $\epsilon_p = C\delta_p$, (e a constante C é a obtida na desigualdade abaixo).

Usando novamente o Lema 4.4 e a hipótese do teorema de boa-colocação 4.7 ($\|u_0\|_{L^{l,\infty}} \leq \delta_p$), segue que

$$\begin{aligned}
\sup_{t>0}\|u_1(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} &= \sup_{t>0}\|G_\gamma(t)u_0\|_{L^{l,\infty}}\\
&\leq C\|u_0\|_{L^{l,\infty}}\\
&\leq C\delta_p = \epsilon_p.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Daí, de 4.66 e 4.30, usando um argumento de indução, em que nossa hipótese de indução é $\sup_{t>0}\|u_{k-1}(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} \leq 2\epsilon_p$ e lembrando que $\tilde{K}=\max\{K,K_p\}$ e $2^\rho\left(\epsilon_p\right)^{\rho-1}\tilde{K}<1$, temos

$$\begin{aligned}
\sup_{t>0}\|u_k(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} &\leq \sup_{t>0}\|u_1(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} + \sup_{t>0}\|B(u_{k-1})(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\\
&\leq \epsilon_p + K\sup_{t>0}\|u_{k-1}(t,\cdot)\|^{\rho}_{L^{l,\infty}}\\
&\leq \epsilon_p + \tilde{K}2^\rho\left(\epsilon_p\right)^\rho\\
&\leq \epsilon_p+\epsilon_p = 2\epsilon_p.
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Consideremos agora a sequência $(w_k)_{k\geq 2}$ definida como:

$$w_{k+1} = u_{k+1}-u_k.$$

Notemos que, para $k\geq 2$, temos que

$$w_{k+1} = u_{k+1}-u_k = B(u_k)-B(u_{k-1}),$$

e, assim, de 4.67 e de 4.33 do Lema 4.14, segue que

$$\begin{aligned}
\sup_{t>0}\|w_{k+1}(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{t>0}\|B(u_k)(t,\cdot)-B(u_{k-1})(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} \\
&\le K_p\sup_{t>0}\|u_k(t,\cdot)-u_{k-1}(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}}\left(\sup_{t>0}\|u_k(t,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{l,\infty}}+\sup_{t>0}\|u_{k-1}(t,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{l,\infty}}\right) \\
&\le 2^\rho\,(\epsilon_p)^{\rho-1}\,\tilde{K}\sup_{t>0}\|w_k(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}}. \qquad (4.68)
\end{aligned}$$

Denotemos a sequência (M_k) por $M_k=\sup\limits_{t>0}\|w_k(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}}$. De 4.68, é imediato que

$$M_{k+1}\le 2^\rho\,(\epsilon_p)^{\rho-1}\,\tilde{K}M_k. \qquad (4.69)$$

Notemos, agora, que de (4.64), (4.65) e de 4.66, segue que

$$\begin{aligned}
M_2 &= \sup_{t>0}\|w_2(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} \\
&= \sup_{t>0}\|u_2(t,\cdot)-u_1(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} \\
&\le \sup_{t>0}\|u_1(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}}+\sup_{t>0}\|u_2(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} \\
&\le \tilde{C}\|u_0\|_{L^{p,\infty}}+\tilde{C}\|u_0\|_{L^{p,\infty}}+K_p\sup_{t>0}\|u_1(t,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{l,\infty}}\sup_{t>0}\|u_1(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} \\
&\le 2\tilde{C}\|u_0\|_{L^{p,\infty}}+K_pC\tilde{C}\|u_0\|_{L^{p,\infty}}\|u_0\|^{\rho-1}_{L^{l,\infty}}.
\end{aligned}$$

E como por hipótese, temos que $u_0\in L^{l,\infty}\cap L^{p,\infty}$, segue que $0\le M_2<\infty$.
Daí, tomando $A=2^\rho\,(\epsilon_p)^{\rho-1}\,\tilde{K}<1$, de 4.69, segue que

$$M_k<A^{k-2}M_2,$$

e como $A<1$, temos que $M_k\to 0$, quando $k\to\infty$.

Ou seja, $\sup\limits_{t>0}\|w_k(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}}\to 0$, quando $k\to\infty$. Desse modo $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $BC\left((0,\infty);L^{p,\infty}\right)$. Logo, como $BC\left((0,\infty);L^{p,\infty}\right)$ é Banach, a sequência de Cauchy $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para um único limite em $BC\left((0,\infty);L^{p,\infty}\right)$ e como sabemos, a solução $u(t,x)$, obtida na primeira parte desse teorema, é o limite da sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Portanto, concluímos que $u\in BC\left((0,\infty);L^{p,\infty}\right)$. □

Demonstração do Teorema de Regularização 4.8

Para demonstrar esse resultado, usaremos o Lema abstrato 4.10, com $X=E_q$ e $B:X\to X$ dado por:

$$B(u)(t,x)=-\int_0^t G_\gamma(t-s)f(u(s,x))\,ds.$$

Notemos agora que, para $u,v\in E_q$, de 4.30, temos que

$$\|B(u)\|_E\le K\|u\|_E^\rho, \qquad (4.70)$$

e do Lema 4.16 segue que

$$\sup_{t>0}t^{\frac{\alpha}{2}}\|B(u)(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\le K\left(\sup_{t>0}t^{\frac{\alpha}{2}}\|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^\rho. \qquad (4.71)$$

Dessa forma, de 4.70 e 4.71, segue que

$$\begin{aligned}
\|B(u)\|_{E_q} &= \|B(u)\|_E + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|B(u)(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} \\
&\leq K\|u\|_E^{\rho} + K\left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho} \\
&\leq K\left(\|u\|_E + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho} \\
&= K\|u\|_{E_q}^{\rho}.
\end{aligned}$$

Agora, de 4.32 do Lema 4.14, temos

$$\|B(u)-B(v)\|_E \leq K\|u-v\|_E\left(\|u\|_E^{\rho-1} + \|v\|_E^{\rho-1}\right), \tag{4.72}$$

e ainda, do Lema 4.17, segue

$$\begin{aligned}
\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|B(u)(t,\cdot) &- B(v)(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} \leq K_q\left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t,\cdot)-v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right) \\
&\left[\left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho-1} + \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho-1}\right]. \quad (4.73)
\end{aligned}$$

Dessa forma, por 4.72 e 4.73 e tomando $\tilde{K} = 2\max\{K, K_q\}$ temos

$$\begin{aligned}
\|B(u)(t,\cdot) &- B(v)(t,\cdot)\|_{E_q} = \|B(u)(t,\cdot)-B(v)(t,\cdot)\|_E + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|B(u)(t,\cdot)-B(v)(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} \\
&\leq K\|u-v\|_E\left(\|u\|_E^{\rho-1} + \|v\|_E^{\rho-1}\right) + K_q\left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t,\cdot)-v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right) \\
&\quad \left[\left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho-1} + \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho-1}\right] \\
&\leq \tilde{K}\left[\|u-v\|_E + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t,\cdot)-v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right] \\
&\quad \left[\left(\|u\|_E + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho-1} + \left(\|v\|_E + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho-1}\right] \\
&= \tilde{K}\|u-v\|_{E_q}\left(\|u\|_{E_q}^{\rho-1} + \|v\|_{E_q}^{\rho-1}\right).
\end{aligned}$$

Agora, notemos que, como por hipótese $\frac{n(\rho-1)}{2\gamma} < q$, do Lema 4.4, temos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
\|G_\gamma(t)u_0\|_{L^{q,\infty}} &\leq Ct^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{2\gamma}{n(\rho-1)}-\frac{1}{q}\right)} \|u_0\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} \\
&= Ct^{-\frac{\alpha}{2}} \|u_0\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}}.
\end{aligned}$$

Logo, temos

$$\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|G_\gamma(t)u_0\|_{L^{q,\infty}} \leq C\|u_0\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}}. \tag{4.74}$$

De modo a satisfazer as hipóteses do Lema abstrato, tomamos $y = G_\gamma(t)u_0$ e $0 < \delta_q < \delta$, tal que $2^\rho(\epsilon_q)^{\rho-1}\tilde{K} < 1$, em que $\epsilon_q = 2C\delta_q$. Como por hipótese $\|u_0\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} < \delta_q$, do Lema 4.4 e da desigualdade 4.74, temos

$$\begin{aligned}
\|G_\gamma(t)u_0\|_{E_q} &= \|G_\gamma(t)u_0\|_E + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|G_\gamma(t)u_0\|_{L^{q,\infty}} \\
&\leq C\|u_0\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} + C\|u_0\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} \\
&\leq 2C\|u_0\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} \\
&\leq 2C\delta_q = \epsilon_q.
\end{aligned}$$

Portanto, como consequência do Lema abstrato, existe uma solução $u(t,x) \in E_q$, em que $\|u\|_{E_q} \leq 2\epsilon_q$, tal que

$$u(t,x) = G_\gamma(t)u_0(x) + B(u)(t,x).$$

Além disso, como mostrado na demonstração do Teorema 4.7, $u(t,x) \rightharpoonup u_0(x)$ quando $t \to 0^+$, com o limite sendo tomado sobre a topologia fraca-$*$ de $L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}$. □

Demonstração do Teorema de Unicidade 4.9

Sejam u e v duas soluções mild do problema de valor inicial 4.1 na classe $C\left([0,\infty); L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma}}\right)$, ambas com a mesma condição inicial $u_0 \in L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma}}$.

Seja $l = \frac{n(\rho-1)}{2\gamma}$. Para mostrar a unicidade, é suficiente mostrar que $u = v$ em $[0,T]$, para T suficiente pequeno já que o caso geral pode ser obtido cobrindo-se o intervalo $[0,\infty)$ com intervalos de comprimento T.

Denotemos $w = u - v$, $w_1 = G_\gamma(\cdot)u_0 - u$ e $w_2 = G_\gamma(\cdot)u_0 - v$. Assim, usando a condição inicial da função f 4.2, e o fato de que $(|a|+|b|)^{\rho-1} \leq C\left(|a|^{\rho-1} + |b|^{\rho-1}\right)$ (ver [19], proposição A.1), obtemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
\|w(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} &= \left\| G_\gamma(t)u_0 - \int_0^t G_\gamma(t-s)f(u(s,\cdot))\,ds - G_\gamma(t)u_0 + \int_0^t G_\gamma(t-s)f(v(s,\cdot))\,ds \right\|_{L^{l,\infty}} \\
&\leq \left\| \int_0^t G_\gamma(t-s)\left[f(u(s,\cdot)) - f(v(s,\cdot))\right]\,ds \right\|_{L^{l,\infty}} \\
&\leq \eta \left\| \int_0^t G_\gamma(t-s)|w(s,\cdot)| \left[|u(s,\cdot)|^{\rho-1} + |v(s,\cdot)|^{\rho-1}\right]\,ds \right\|_{L^{l,\infty}} \\
&\leq C \left\| \int_0^t G_\gamma(t-s)|w(s,\cdot)| \left[|w_1(s,\cdot)|^{\rho-1} + |w_2(s,\cdot)|^{\rho-1}\right]\,ds \right\|_{L^{l,\infty}} \\
&\quad + 2C \left\| \int_0^t G_\gamma(t-s)|w(s,\cdot)||G_\gamma(s)u_0|^{\rho-1}\,ds \right\|_{L^{l,\infty}} \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Agora, para I_1, usando o mesmo argumento utilizado na demonstração de 4.32 do Lema 4.14 e utilizando também a Observação 3.11, que garante que $L^l \subset L^{l,\infty}$, temos

$$I_1 \leq C \sup_{0<t<T} \|w(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} \left(\sup_{0<t<T} \|w_1(t,\cdot)\|_l^{\rho-1} + \sup_{0<t<T} \|w_2(t,\cdot)\|_l^{\rho-1} \right). \tag{4.75}$$

Para I_2, notemos inicialmente que usando a Proposição 3.8 e o Lema 2.22, item *1.*, temos

$$\begin{aligned}
\||G_\gamma(s)u_0|^{\rho-1}\|_{L^{\frac{q}{\rho-1},\infty}} &\leq C_1\||G_\gamma(s)u_0|^{\rho-1}\|^*_{L^{\frac{q}{\rho-1},\infty}} \\
&= C_1 \sup_{t>0} t^{\frac{\rho-1}{q}}(|G_\gamma(s)u_0|^{\rho-1})^*(t) \\
&= C_1 \sup_{t>0} t^{\frac{\rho-1}{q}}((G_\gamma(s)u_0)^*(t))^{\rho-1} \\
&\leq C_1\left(\sup_{t>0} t^{\frac{1}{q}}(G_\gamma(s)u_0)^*(t)\right)^{\rho-1} \\
&= C_1\left(\|G_\gamma(s)u_0\|^*_{L^{q,\infty})}\right)^{\rho-1} \\
&\leq C_1\left(\|G_\gamma(s)u_0\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho-1}. \qquad (4.76)
\end{aligned}$$

Tomando $\frac{1}{r} = \frac{1}{l} + \frac{\rho-1}{q}$, segue que $r = \frac{lq}{q+l(\rho-1)}$. Logo, $r < l$, pois $\frac{q}{q+l(\rho-1)} < 1$.

Como por hipótese $\frac{n}{n-2\gamma} < \rho$, temos também que $\rho < l$, ou ainda, $\rho - 1 < l - 1$. Desse modo, como $l < q$, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\rho-1}{l-1} < 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{l(\rho-1)}{l-1} < l \\
&\Rightarrow \quad \frac{l(\rho-1)}{l-1} < q \\
&\Rightarrow \quad l(\rho-1) < (l-1)q \\
&\Rightarrow \quad q + l(\rho-1) < lq \\
&\Rightarrow \quad 1 < \frac{lq}{q+l(\rho-1)} = r.
\end{aligned}$$

Daí, como $1 < r < q$, usando o Lema 4.4, a Proposição 2.16, a desigualdade 4.76 e a Observação 3.11 que garante que $L^q \subset L^{q,\infty}$, temos

$$\begin{aligned}
I_2 &= 2C\left\|\int_0^t G_\gamma(t-s)|w(s,\cdot)||G_\gamma(s)u_0|^{\rho-1}\,ds\right\|_{L^{l,\infty}} \\
&\leq 2C\int_0^t \|G_\gamma(t-s)|w(s,\cdot)||G_\gamma(s)u_0|^{\rho-1}\|_{L^{l,\infty}}\,ds \\
&\leq 2C\int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l}\right)}\||w(s,\cdot)||G_\gamma(s)u_0|^{\rho-1}\|_{L^{r,\infty}}\,ds \\
&\leq 2CC_2\int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l}\right)}\|w(s,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\||G_\gamma(s)u_0|^{\rho-1}\|_{L^{\frac{q}{\rho-1},\infty}}\,ds \\
&\leq 2CC_1C_2\int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l}\right)}\|w(s,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\|G_\gamma(s)u_0\|^{\rho-1}_{L^{q,\infty}}\,ds \\
&\leq 2CC_1C_2\int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l}\right)}s^{-(\rho-1)\frac{\alpha}{2}}\,ds\left(\sup_{0<t<T}\|w(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\right)\left(\sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}}\|G_\gamma(t)u_0\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho-1} \\
&\leq 2CC_1C_2\int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l}\right)}s^{-(\rho-1)\frac{\alpha}{2}}\,ds\left(\sup_{0<t<T}\|w(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\right)\left(\sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}}\|G_\gamma(t)u_0\|_{L^{q}}\right)^{\rho-1}.
\end{aligned}$$

$$(4.77)$$

Agora, notemos que como $\alpha = \dfrac{2}{\rho-1} - \dfrac{n}{\gamma q}$, temos

$$\begin{aligned}1-(\rho-1)\frac{\alpha}{2} &= 1-1+\frac{n(\rho-1)}{2\gamma q}\\ &= \frac{n(\rho-1)}{2\gamma q}\\ &= \frac{l}{q} > 0,\end{aligned}$$

ou seja,$-(\rho-1)\frac{\alpha}{2} = x-1$, com $x>0$.

Usando que $\frac{n(\rho-1)}{2\gamma q} < 1$, já que por hipótese $l<q$, temos também que

$$\begin{aligned}1-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l}\right) &= 1-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{\rho-1}{q}\right)\\ &= 1-\frac{n(\rho-1)}{2\gamma q} > 0,\end{aligned}$$

ou seja, $-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l}\right) = z-1$, com $z>0$.

E ainda, temos que

$$-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l}\right)-(\rho-1)\frac{\alpha}{2}+1 = -\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{\rho-1}{q}\right)-1+\frac{n(\rho-1)}{2\gamma q}+1 = 0.$$

Agora, fazendo a mudança de variável $y=\frac{s}{t}$, usando as relações acima e a Proposição 4.15, temos

$$\begin{aligned}\int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l}\right)} s^{-(\rho-1)\frac{\alpha}{2}}\, ds &= t^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l}\right)-(\rho-1)\frac{\alpha}{2}+1}\int_0^1 (1-y)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l}\right)} y^{-(\rho-1)\frac{\alpha}{2}}\, ds\\ &= \int_0^1 (1-y)^{z-1}y^{x-1}\, dy\\ &= C_3.\end{aligned}$$

Logo, de 4.77, segue que

$$I_2 \le \tilde{C}\left(\sup_{0<t<T}\|w(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\right)\left(\sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}}\|G_\gamma(t)u_0\|_{L^q}\right)^{\rho-1}. \tag{4.78}$$

Portanto, vale que

$$\begin{aligned}\|w(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} &\le I_1+I_2\\ &\le KA(T)\|w(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}},\end{aligned} \tag{4.79}$$

em que $A(T) = \left(\sup\limits_{0<t<T}\|w_1(t,\cdot)\|_l^{\rho-1}+\sup\limits_{0<t<T}\|w_2(t,\cdot)\|_l^{\rho-1}\right)+\left(\sup\limits_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}}\|G_\gamma(t)u_0\|_{L^q}\right)^{\rho-1}$.

Analisaremos, agora, $\lim\limits_{t\to 0^+}\|w_1(t,\cdot)\|_l$. Notemos que $w_1 = G_\gamma(\cdot)u_0 - u$, ou seja, $w_1 = (G_\gamma(\cdot)u_0-u_0)-(u-u_0)$.

Agora, que pelo Lema 4.3, segue que

$$\begin{aligned}g_\gamma(t,x) &= t^{-\frac{n}{2\gamma}}g_\gamma(1,xt^{-\frac{1}{2\gamma}})\\ &= \epsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\\ &= \varphi_\epsilon(x),\end{aligned}$$

em que $\epsilon = t^{\frac{1}{2\gamma}}$ e $\varphi(x) = g_\gamma(1, x)$.

Lembremos que, pelo Lema 4.1, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} g_\gamma(1, x)\ dx = 1.$$

Desse modo, do Teorema da aproximação da identidade 3.27 e da Observação 3.2, *item 3.*, quando $\epsilon \to 0$, segue que

$$\|\varphi_\epsilon * u_0 - u_0\|_l \to 0,$$

ou seja, quando $t \to 0^+$, temos que

$$\|G_\gamma(t)u_0 - u_0\|_l \to 0. \tag{4.80}$$

E como por hipótese, $u \in C\left([0, \infty); L^l\right)$, com u_0 condição inicial, segue que $u(t, \cdot) \to u_0$ em L^l, quando $t \to 0^+$, ou seja,

$$\lim_{t \to 0^+} \|u(t, \cdot) - u_0\|_l = 0. \tag{4.81}$$

Logo, utilizando 4.80 e 4.81, temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0^+} \|w_1(t, \cdot)\|_l &= \lim_{t \to 0^+} \|(G_\gamma(t)u_0 - u_0) - (u(t, \cdot) - u_0)\|_l \\ &\leq \lim_{t \to 0^+} \|G_\gamma(t)u_0 - u_0\|_l + \lim_{t \to 0^+} \|u(t, \cdot) - u_0\|_l = 0, \end{aligned}$$

ou seja, $\lim\limits_{t \to 0^+} \|w_1(t, \cdot)\|_l = 0$ e, de modo análogo, temos também que $\lim\limits_{t \to 0^+} \|w_2(t, \cdot)\|_l = 0$.

Pelo Lema 4.20, segue que $\lim\limits_{t \to 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|G_\gamma(t)u_0\|_{L^q} = 0$.

Assim, podemos escolher T suficientemente pequeno, de modo que $KA(T) < 1$. Desse modo, por 4.79, temos que $w = 0$, ou seja, $u = v$. $\square$

5 Auto-similaridade e Decaimento

Neste capítulo estudaremos algumas estimativas de decaimento e procuraremos pela existência de soluções auto-similares.

Inicialmente, assumimos que $u(t,x)$ é uma solução suave do problema de Cauchy 4.1 e denotamos $u_\lambda(t,x) = \lambda^{\frac{2\gamma}{\rho-1}} u(\lambda^{2\gamma}t, \lambda x)$. Considerando que $f(u)$ satisfaz a relação de escala

$$f(u_\lambda(t,x)) = \lambda^{\frac{2\rho\gamma}{\rho-1}} f(u(\lambda^{2\gamma}t, \lambda x)), \tag{5.1}$$

podemos mostrar que $u_\lambda(t,x)$ também é solução do problema de Cauchy 4.1, pois temos que

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(t,x) = \lambda^{\frac{2\rho\gamma}{\rho-1}} \frac{\partial u}{\partial t}(\lambda^{2\gamma}t, \lambda x) \text{ e } ((-\Delta)^\gamma u_\lambda)(t,x) = \lambda^{\frac{2\rho\gamma}{\rho-1}}((-\Delta)^\gamma(\lambda^{2\gamma}t, \lambda x).$$

Procuraremos por soluções particulares do problema 4.1, satisfazendo

$$u(t,x) = u_\lambda(t,x), \tag{5.2}$$

para todo $t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$. Essas soluções são chamadas de soluções auto-similares do problema de Cauchy. Formalmente, ao fazermos $t \to 0^+$ em (5.2), devemos ter que $u_0 = u(0,x)$ é uma função homogênea de grau $-\frac{2\gamma}{\rho-1}$. Este fato, nos dá o indicativo de que o espaço ideal para a existência desse tipo de solução é o $L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}(\mathbb{R}^n)$. Mais ainda, caso exista soluções auto-similares, a norma do espaço deve ser invariante via a relação de escala $u(t,x) \to u_\lambda(t,x) = \lambda^{\frac{2\gamma}{\rho-1}} u(\lambda^{2\gamma}t, \lambda x)$. Notemos que, da Proposição 3.13, temos

$$\begin{aligned}
\|u_\lambda\|_E &= \sup_{t>0} \|u_\lambda(t,\cdot)\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} \\
&= \lambda^{\frac{2\gamma}{\rho-1}} \sup_{t>0} \|u(\lambda^{2\gamma}t, \lambda \cdot)\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} \\
&= \lambda^{\frac{2\gamma}{\rho-1}} \lambda^{\frac{2\gamma}{\rho-1}} \sup_{t>0} \|u(\lambda^{2\gamma}t, \cdot)\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} \\
&= \sup_{t>0} \|u(\lambda^{2\gamma}t, \cdot)\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} = \|u\|_E.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

5.1 Estimativa de Decaimento em $L^{p,\infty}$

O objetivo desta seção é mostrar um resultado de decaimento das soluções quando assumimos dados iniciais mais regulares, isto é, mostrar que as soluções tendem a zero, em uma taxa adequada, quando o tempo t vai a infinito.

Teorema 5.1. *Sob as hipóteses do Teorema 4.8, seja $u_0 \in L^{p,\infty} \cap L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}$. Se $1 < p \leq r < \infty$ satisfaz $\frac{1}{p} + \frac{\rho-1}{q} - \frac{1}{r} < \frac{2\gamma}{n}$, então a solução $u(t,x)$ obtida no Teorema 4.8 satisfaz $t^{\left(\frac{n}{2\gamma p} - \frac{n}{2\gamma r}\right)} u \in BC\left((0,\infty); L^{r,\infty}\right)$.*

Demonstração. Notemos que, dos Teoremas 4.7 e 4.8, temos que $u \in BC\left((0,\infty); L^{p,\infty}\right) \cap E_q$, ou seja,

$$\sup_{t>0} \|u(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} < \infty \quad \text{e} \quad \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} < \infty, \tag{5.4}$$

em que $u(t,x)$ é dada por

$$u(t,x) = G_\gamma(t)u_0(x) + B(u)(t,x) = G_\gamma(t)u_0(x) - \int_0^t G_\gamma(t-s) f(u(s,x))\, ds.$$

Aplicando o Lema 4.4 e a hipótese de que $u_0 \in L^{p,\infty} \cap L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}$, temos que

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} t^{\left(\frac{n}{2\gamma p} - \frac{n}{2\gamma r}\right)} \|G_\gamma(t)u_0\|_{L^{r,\infty}} &\leq \sup_{t>0} t^{\left(\frac{n}{2\gamma p} - \frac{n}{2\gamma r}\right)} C t^{\left(-\frac{n}{2\gamma p} + \frac{n}{2\gamma r}\right)} \|u_0\|_{L^{p,\infty}} \\ &= C\|u_0\|_{L^{p,\infty}} < \infty. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Observemos também que da Proposição 3.8, temos

$$\begin{aligned} \||u|^{\rho-1}(t,\cdot)\|_{L^{\frac{q}{\rho-1}},\infty} &\leq C\||u|^{\rho-1}(t,\cdot)\|^*_{L^{\frac{q}{\rho-1}},\infty} \\ &= C \sup_{\tau>0} \tau^{\frac{\rho-1}{q}} \left(|u|^{\rho-1}(t,\cdot)\right)^* (\tau) \\ &= C \sup_{\tau>0} t^{\frac{\rho-1}{q}} \left((u(t,\cdot))^*(\tau)\right)^{\rho-1} \\ &= C \sup_{\tau>0} \left(\tau^{\frac{1}{q}} (u(t,\cdot))^*(\tau)\right)^{\rho-1} \\ &\leq C \left(\sup_{\tau>0} \tau^{\frac{1}{q}} (u(t,\cdot))^*(\tau)\right)^{\rho-1} \\ &= C\left(\|u(t,\cdot)\|^*_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho-1} \\ &\leq C\left(\|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho-1}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Tomemos agora $m > 1$ tal que $\frac{1}{m} = \frac{1}{p} + \frac{\rho-1}{q}$. Assim, usando a condição inicial de f 4.2, a desigualdade de Hölder para L^p-fraco 2.16 e (5.6), segue que

$$\begin{aligned} \|f(u(t,\cdot))\|_{L^{m,\infty}} &\leq \||u|(t,\cdot)|u|^{\rho-1}(t,\cdot)\|_{L^{m,\infty}} \\ &\leq C\|u(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} \||u|^{\rho-1}(t,\cdot)\|_{L^{\frac{q}{\rho-1}},\infty} \\ &\leq C\|u(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} \left(\|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho-1}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Notemos ainda que, como $\frac{1}{m} = \frac{1}{p} + \frac{\rho-1}{q}$ e $\frac{q}{q+(\rho-1)p} < 1$, então

$$\begin{aligned} m &= \frac{pq}{q+(\rho-1)p} \\ &\leq p \\ &\leq r. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Agora, como $1 < m \leq r$, do Lema 4.4 e de (5.7), segue que

$$\begin{aligned} \|B(u)(t,\cdot)\|_{L^{r,\infty}} &\leq \int_0^t \|G_\gamma(t-s) f(u(s,\cdot))\|_{L^{r,\infty}}\, ds \\ &\leq \int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{r}\right)} \|f(u(s,\cdot))\|_{L^{m,\infty}}\, ds \\ &\leq C\int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{r}\right)} \|u(s,\cdot)\|_{L^{p,\infty}} \left(\|u(s,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho-1}\, ds \\ &\leq C\int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{r}\right)} s^{-(\rho-1)\frac{\alpha}{2}}\, ds \left(\sup_{t<0} \|u(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}}\right) \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho-1} \end{aligned} \tag{5.9}$$

Notemos também que

$$\begin{aligned} 1-(\rho-1)\frac{\alpha}{2} &= 1-1+\frac{n(\rho-1)}{2\gamma q} \\ &= \frac{n(\rho-1)}{2\gamma q} \\ &= \frac{l}{q} > 0, \end{aligned}$$

ou seja, $-(\rho-1)\frac{\alpha}{2} = x-1$ com $x>0$.

Além disso, como $\frac{1}{p}+\frac{\rho-1}{q}-\frac{1}{r}<\frac{2\gamma}{n}$, temos que

$$1-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{r}\right) = 1-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{p}+\frac{\rho-1}{q}-\frac{1}{r}\right) > 0,$$

ou seja, $-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{r}\right) = z-1$, com $z>0$.

E ainda, temos

$$\begin{aligned} -\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{r}\right)-(\rho-1)\frac{\alpha}{2}+1 &= -\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)-\frac{n(\rho-1)}{2\gamma q}-\frac{2(\rho-1)}{2(\rho-1)}+\frac{n(\rho-1)}{2\gamma q} \\ &= -\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right). \end{aligned}$$

Agora, fazendo a mudança de variável $y=\frac{s}{t}$, usando as relações acima e a Proposição 4.15, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{r}\right)} s^{-(\rho-1)\frac{\alpha}{2}}\, ds &= t^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{r}\right)-(\rho-1)\frac{\alpha}{2}+1}\int_0^1 (1-y)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{r}\right)} y^{-(\rho-1)\frac{\alpha}{2}}\, ds \\ &= t^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\int_0^1 (1-y)^{z-1}y^{x-1}\, dy \\ &= t^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\tilde{C}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Desse modo, de (5.9) e de (5.10), temos

$$\|B(u)(t,\cdot)\|_{L^{r,\infty}} \le Ct^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\left(\sup_{t<0}\|u(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}}\right)\left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}}\|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho-1},$$

ou seja, de (5.4), obtemos

$$\sup_{t>0} t^{\left(\frac{n}{2\gamma p}-\frac{n}{2\gamma r}\right)}\|B(u)(t,\cdot)\|_{L^{r,\infty}} \le C\left(\sup_{t<0}\|u(t,\cdot)\|_{L^{p,\infty}}\right)\left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}}\|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho-1} < \infty. \tag{5.11}$$

Por fim, de (5.5) e (5.11), garantimos que $t^{\left(\frac{n}{2\gamma p}-\frac{n}{2\gamma r}\right)}u \in BC\left((0,\infty);L^{r,\infty}\right)$. $\square$

5.2 Soluções Auto-similares

Nesta seção, assumindo certas propriedades de homogeneidade para o dado inicial, mostraremos a existência de soluções auto-similares em $L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}$.

Teorema 5.2. *Seja* $u_0 \in L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}$. *Supondo que* u_0 *é uma função homogênea de grau* $-\frac{2\gamma}{\rho-1}$, *ou seja,* $u_0(\lambda x) = \lambda^{-\frac{2\gamma}{\rho-1}} u_0(x)$ *e* $f(u)$ *satisfaz a relação de escala* (5.1). *Então, se* $\|u_0\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} < \delta$, *a solução* $u(t,x)$ *obtida no Teorema 4.7 é auto-similar, isto é,*

$$u(t,x) = \lambda^{\frac{2\gamma}{\rho-1}} u(\lambda^{2\gamma} t, \lambda x),$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ *e todo* $\lambda > 0$. *Mais ainda, se* $\|u_0\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} < \delta_q < \delta$ *então a solução auto-similar obtida anteriormente pertence a* E_q.

Demonstração. Como vimos na demonstração do Teorema 4.7, a solução $u(t,x)$ é obtida, pelo método das aproximações sucessivas, como o limite da seguinte sequência:

$$u_1(t,x) = G_\gamma(t) u_0(x), \quad u_{k+1}(t,x) = u_1(t,x) + B(u_k)(t,x), \; k \in \mathbb{N}.$$

Mostremos que $u_1(t,x)$ satisfaz

$$u_1(t,x) = \lambda^{\frac{2\gamma}{\rho-1}} u_1(\lambda^{2\gamma} t, \lambda x).$$

Primeiramente, mostraremos uma propriedade do núcleo g_γ. Para isso, utilizaremos a seguinte propriedade da transformada de Fourier (ver [12] , pág. 100):

$$\widehat{f(\lambda\,\cdot)}(\xi) = \lambda^{-n} \hat{f}(\lambda^{-1}\xi), \text{ em que } n \text{ é a dimensão do espaço.}$$

Sabemos também que $\hat{g_\gamma}(t,\xi) = e^{-|\xi|^{2\gamma} t}$. Daí, obtemos que

$$\begin{aligned} (g_\gamma(\widehat{\lambda^{2\gamma} t, \lambda}\,\cdot))(\xi) &= \lambda^{-n} \hat{g_\gamma}(\lambda^{2\gamma} t, \lambda^{-1}\xi) \\ &= \lambda^{-n} e^{-|\lambda^{-1}\xi|^{2\gamma} \lambda^{2\gamma} t} \\ &= \lambda^{-n} e^{-|\xi|^{2\gamma} t} \\ &= \lambda^{-n} (\widehat{g_\gamma(t,\cdot)})(\xi). \end{aligned}$$

Desse modo, aplicando a transformada inversa, temos

$$g_\gamma(\lambda^{2\gamma} t, \lambda x) = \lambda^{-n} g_\gamma(t,x). \tag{5.12}$$

Assim, de (5.12), obtemos

$$\begin{aligned} u_1(\lambda^{2\gamma} t, \lambda x) &= G_\gamma(\lambda^{2\gamma} t) u_0(\lambda x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g_\gamma(\lambda^{2\gamma} t, \lambda x - y) u_0(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g_\gamma(\lambda^{2\gamma} t, \lambda(x - \lambda^{-1} y)) u_0(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^{-n} g_\gamma(t, x - \lambda^{-1} y) u_0(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g_\gamma(t, x - z) u_0(\lambda z)\, dz \\ &= \lambda^{-\frac{2\gamma}{\rho-1}} \int_{\mathbb{R}^n} g_\gamma(t, x - z) u_0(z)\, dz \\ &= \lambda^{-\frac{2\gamma}{\rho-1}} u_1(t,x), \end{aligned}$$

em que fizemos a mudança de variável $z = \lambda^{-1} y$ na quinta igualdade e usamos a hipótese de u_0 ser uma função homogênea de grau $-\frac{2\gamma}{\rho-1}$ na sexta igualdade.

Portanto,

$$u_1(t,x) = \lambda^{\frac{2\gamma}{\rho-1}} u_1(\lambda^{2\gamma}t, \lambda x). \tag{5.13}$$

Mostraremos agora que $u_n(t,x) = \lambda^{\frac{2\gamma}{\rho-1}} u_n(\lambda^{2\gamma}t, \lambda x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para isso, usaremos um argumento de indução. Logo, supondo que $u_n(t,x) = \lambda^{\frac{2\gamma}{\rho-1}} u_n(\lambda^{2\gamma}t, \lambda x)$, mostraremos que essa relação de escala é válida para u_{n+1}.

Notemos que

$$\begin{aligned}
B(u_n)(\lambda^{2\gamma}t, \lambda x) &= -\int_0^{\lambda^{2\gamma}t} G_\gamma(\lambda^{2\gamma}t - z) f(u_n(z, \lambda x))\, dz \\
&= -\int_0^{\lambda^{2\gamma}t} \int_{\mathbb{R}^n} g_\gamma(\lambda^{2\gamma}t - z, \lambda x - y) f(u_n(z,y))\, dy\, dz \\
&= -\lambda^{2\gamma} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} g_\gamma(\lambda^{2\gamma}(t-s), \lambda(x - \lambda^{-1}y)) f(u_n(\lambda^{2\gamma}s, y))\, dy\, ds \\
&= -\lambda^{2\gamma} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^n g_\gamma(\lambda^{2\gamma}(t-s), \lambda(x-w)) f(u_n(\lambda^{2\gamma}s, \lambda w))\, dw\, ds \\
&= -\lambda^{2\gamma} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^n \lambda^{-n} g_\gamma(t-s, x-w) \lambda^{-\frac{2\rho\gamma}{\rho-1}} f(u_n(s,w))\, dw\, ds \\
&= -\lambda^{2\gamma - \frac{2\rho\gamma}{\rho-1}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} g_\gamma(t-s, x-w) f(u_n(s,w))\, dw\, ds \\
&= \lambda^{-\frac{2\gamma}{\rho-1}} B(u_n)(t,x),
\end{aligned}$$

em que fizemos a mudança de variável $z = \lambda^{2\gamma}s$ na terceira igualdade, a mudança de variável $w = \lambda^{-1}y$ na quarta igualdade e usamos (5.1), juntamente com a hipótese de indução e (5.12), na quinta igualdade.

Logo, temos que

$$B(u_n)(t,x) = \lambda^{\frac{2\gamma}{\rho-1}} B(u_n)(\lambda^{2\gamma}t, \lambda x). \tag{5.14}$$

Agora, utilizando (5.13) e (5.14), temos

$$\begin{aligned}
u_{n+1}(t,x) &= u_1(t,x) + B(u_n)(t,x) \\
&= \lambda^{\frac{2\gamma}{\rho-1}} \Big(u_1(\lambda^{2\gamma}t, \lambda x) + B(u_n)(\lambda^{2\gamma}t, \lambda x) \Big) \\
&= \lambda^{\frac{2\gamma}{\rho-1}} u_{n+1}(\lambda^{2\gamma}t, \lambda x).
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$u_n(t,x) = \lambda^{\frac{2\gamma}{\rho-1}} u_n(\lambda^{2\gamma}t, \lambda x), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{5.15}$$

Mostraremos, agora, que $u(t,x) = \lambda^{\frac{2\gamma}{\rho-1}} u(\lambda^{2\gamma}t, \lambda x)$. De fato, usando (5.15) e o fato da solução $u(t,x)$ ser limite da sequência (u_n) no espaço E, temos

$$\begin{aligned}
\|u(t,\cdot) - \lambda^{\frac{2\gamma}{\rho-1}} u(\lambda^{2\gamma}t, \lambda\cdot)\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} &= \|u(t,\cdot) - u_n(t,\cdot) + u_n(t,\cdot) - \lambda^{\frac{2\gamma}{\rho-1}} u(\lambda^{2\gamma}t, \lambda\cdot)\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} \\
&\leq \|u(t,\cdot) - u_n(t,\cdot)\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} \\
&\quad + \|u_n(t,\cdot) - \lambda^{\frac{2\gamma}{\rho-1}} u(\lambda^{2\gamma}t, \lambda\cdot)\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} \\
&= \|u(t,\cdot) - u_n(t,\cdot)\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} \\
&\quad + \|\lambda^{\frac{2\gamma}{\rho-1}} u_n(\lambda^{2\gamma}t, \lambda\cdot) - \lambda^{\frac{2\gamma}{\rho-1}} u(\lambda^{2\gamma}t, \lambda\cdot)\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} \\
&\leq C\|u(t,\cdot) - u_n(t,\cdot)\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} \to 0, \text{ quando } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $u(t,x) = \lambda^{\frac{2\gamma}{\rho-1}} u(\lambda^{2\gamma} t, \lambda x)$.

Por fim, notemos que a segunda parte do teorema, em que $u(t,x) \in E_q$, segue imediatamente do Teorema de regularização 4.8. $\square$

6 Estabilidade Assintótica

O objetivo deste capítulo é analisar o comportamento no infinito das soluções obtidas nos Teorema de boa-colocação 4.7 e de regularização 4.8.

Teorema 6.1. *Suponha que $u(t,x)$ e $v(t,x)$ são soluções do problema de Cauchy 4.1 dadas pelo Teorema de boa-colocação 4.7, em que as condições iniciais são, respectivamente, $u_0, v_0 \in L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}$ e satisfazem*

$$\lim_{t\to\infty} \|G_\gamma(t)(u_0 - v_0)\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} = 0.$$

Então,

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}} = 0.$$

Mais ainda, se $u(t,x)$ e $v(t,x)$ são soluções do problema de Cauchy 4.1 dadas pelo Teorema de regularização 4.8 (ou seja, no espaço E_q), em que as condições iniciais são respectivamente $u_0, v_0 \in L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}$ e satisfazem

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|G_\gamma(t)(u_0 - v_0)\|_{L^{q,\infty}} = 0.$$

Então,

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} = 0.$$

Demonstração. Como u e v são dadas, respectivamente, por

$$u(t,x) = G_\gamma(t)u_0(x) - \int_0^t G_\gamma(t-s) f\left(u(s,x)\right)\, ds$$

e

$$v(t,x) = G_\gamma(t)v_0(x) - \int_0^t G_\gamma(t-s) f\left(v(s,x)\right)\, ds,$$

tomando a diferença, segue que

$$u(t,x) - v(t,x) = G_\gamma(t)(u_0(x) - v_0(x)) - \int_0^t G_\gamma(t-s)\left(f\left(u(s,x)\right) - f\left(v(s,x)\right)\right)\, ds.$$

- *Primeira parte da demonstração: u e v são soluções obtidas no Teorema de boa-colocação 4.7.*

Denotando $l = \frac{n(\rho-1)}{2\gamma}$ e tomando a norma $L^{l,\infty}$ da diferença, temos que

$$\begin{aligned}
\|u(t,\cdot)-v(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} &= \left\| G_\gamma(t)(u_0-v_0) - \int_0^t G_\gamma(t-s)\left(f\left(u(s,\cdot)\right)-f\left(v(s,\cdot)\right)\right)\, ds \right\|_{L^{l,\infty}} \\
&\leq \|G_\gamma(t)(u_0-v_0)\|_{L^{l,\infty}} + \left\| \int_0^{\delta t} G_\gamma(t-s)\left(f\left(u(s,\cdot)\right)-f\left(v(s,\cdot)\right)\right)\, ds \right\|_{L^{l,\infty}} \\
&\quad + \left\| \int_{\delta t}^t G_\gamma(t-s)\left(f\left(u(s,\cdot)\right)-f\left(v(s,\cdot)\right)\right)\, ds \right\|_{L^{l,\infty}} \\
&= I_0 + I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

em que a constante δ será escolhida posteriormente.

Notemos agora que, usando a Proposição 2.22, item *1*, temos

$$\begin{aligned}
\||u|^{\rho-1}(t,\cdot)\|^*_{L^{\frac{l}{\rho-1},\infty}} &= \sup_{\tau>0} \tau^{\frac{\rho-1}{l}} \left(|u|^{\rho-1}(t,\cdot)\right)^*(\tau) \\
&= \sup_{\tau>0} \tau^{\frac{\rho-1}{l}} \left((u(t,\cdot))^*(\tau)\right)^{\rho-1} \\
&= \sup_{\tau>0} \left(\tau^{\frac{1}{l}} (u(t,\cdot))^*(\tau)\right)^{\rho-1} \\
&\leq \left(\sup_{\tau>0} \tau^{\frac{1}{l}} (u(t,\cdot))^*(\tau)\right)^{\rho-1} \\
&= \left(\|u(t,\cdot)\|^*_{L^{l,\infty}}\right)^{\rho-1}.
\end{aligned}$$

Usando a Proposição 3.8, temos então que

$$\||u|^{\rho-1}(t,\cdot)\|_{L^{\frac{l}{\rho-1},\infty}} \leq C\||u|^{\rho-1}(t,\cdot)\|^*_{L^{\frac{l}{\rho-1},\infty}} \leq C\left(\|u(t,\cdot)\|^*_{L^{l,\infty}}\right)^{\rho-1} \leq C\left(\|u(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\right)^{\rho-1}, \tag{6.1}$$

e procedendo de modo análogo, segue que

$$\||v|^{\rho-1}(t,\cdot)\|_{L^{\frac{l}{\rho-1},\infty}} \leq C\||v|^{\rho-1}(t,\cdot)\|^*_{L^{\frac{l}{\rho-1},\infty}} \leq C\left(\|v(t,\cdot)\|^*_{L^{l,\infty}}\right)^{\rho-1} \leq C\left(\|v(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\right)^{\rho-1}. \tag{6.2}$$

Agora, tomando $\frac{1}{r} = \frac{1}{l} + \frac{\rho-1}{l}$ e usando a condição inicial da função f (4.2), a Proposição 3.8, a desigualdade de Hölder para L^p-fraco (Proposição 2.16), (6.1) e (6.2), temos que

$$\begin{aligned}
\|f(u(s,\cdot))-f(v(s,\cdot))\|_{L^{r,\infty}} &\leq \eta\||u(s,\cdot)-v(s,\cdot)|\left(|u(s,\cdot)|^{\rho-1}+|v(s,\cdot)|^{\rho-1}\right)\|_{L^{r,\infty}} \\
&\leq \eta C\||u(s,\cdot)-v(s,\cdot)|\left(|u(s,\cdot)|^{\rho-1}+|v(s,\cdot)|^{\rho-1}\right)\|^*_{L^{r,\infty}} \\
&\leq \eta C\|u(s,\cdot)-v(s,\cdot)\|^*_{L^{l,\infty}} \left\||u(s,\cdot)|^{\rho-1}+|v(s,\cdot)|^{\rho-1}\right\|^*_{L^{\frac{l}{\rho-1},\infty}} \\
&\leq \eta C\|u(s,\cdot)-v(s,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} \left\||u(s,\cdot)|^{\rho-1}+|v(s,\cdot)|^{\rho-1}\right\|_{L^{\frac{l}{\rho-1},\infty}} \\
&\leq \eta C\|u(s,\cdot)-v(s,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} \left(\left\||u(s,\cdot)|^{\rho-1}\right\|_{L^{\frac{l}{\rho-1},\infty}} + \left\||v(s,\cdot)|^{\rho-1}\right\|_{L^{\frac{l}{\rho-1},\infty}}\right) \\
&\leq \eta C\|u(s,\cdot)-v(s,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} \left(\|u(s,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{l,\infty}} + \|v(s,\cdot)\|^{\rho-1}_{L^{l,\infty}}\right).
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Faremos, agora, a estimativa de I_1. Usando o Lema 4.4 (já que $1 < r \leq l$), (6.3), o fato de $\|u(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} \leq 2\epsilon$ e $\|v(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} \leq 2\epsilon$ (pois, por hipótese, $u(t,x)$ e $v(t,x)$ são soluções dadas pelo Teorema de boa-colocação 4.7) e fazendo a mudança de variável $z = \frac{s}{t}$, temos que

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \left\| \int_0^{\delta t} G_\gamma(t-s)\left(f\left(u(s,\cdot)\right) - f\left(v(s,\cdot)\right)\right)\, ds \right\|_{L^{l,\infty}} \\
&\leq \int_0^{\delta t} \left\| G_\gamma(t-s)\left(f\left(u(s,\cdot)\right) - f\left(v(s,\cdot)\right)\right)\right\|_{L^{l,\infty}}\, ds \\
&\leq C_1 \int_0^{\delta t} (t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l}\right)} \left\| f\left(u(s,\cdot)\right) - f\left(v(s,\cdot)\right)\right\|_{L^{r,\infty}}\, ds \\
&\leq \eta C C_1 \int_0^{\delta t} (t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{\rho-1}{l}\right)} \|u(s,\cdot)-v(s,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} \left(\|u(s,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}^{\rho-1} + \|v(s,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}^{\rho-1} \right) ds \\
&\leq \eta C C_1 2^\rho \epsilon^{\rho-1} \int_0^{\delta t} (t-s)^{-1} \|u(s,\cdot)-v(s,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\, ds \\
&\leq \eta C C_1 2^\rho \epsilon^{\rho-1} \int_0^{\delta} (1-z)^{-1} \|u(tz,\cdot)-v(tz,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\, dz. \qquad (6.4)
\end{aligned}
$$

Estimaremos agora I_2. Usando 4.32 do Lema 4.14, o fato de $\|u(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} \leq 2\epsilon$ e $\|v(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} \leq 2\epsilon$ e lembrando também que $\epsilon > 0$ é tomado de modo que $2^\rho \epsilon^{\rho-1} K < 1$ (ver Teorema de boa-colocação 4.7), temos

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \left\| \int_{\delta t}^{t} G_\gamma(t-s)\left(f\left(u(s,\cdot)\right) - f\left(v(s,\cdot)\right)\right)\, ds \right\|_{L^{l,\infty}} \\
&\leq K \sup_{\delta t \leq s \leq t} \left(\|u(s,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}^{\rho-1} + \|v(s,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}^{\rho-1} \right) \left(\sup_{\delta t \leq s \leq t} \|u(s,\cdot)-v(s,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} \right) \\
&\leq 2^\rho \epsilon^{\rho-1} K \sup_{\delta t \leq s \leq t} \|u(s,\cdot)-v(s,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}. \qquad (6.5)
\end{aligned}
$$

Agora, das estimativas 6.4 e 6.5, temos que

$$
\begin{aligned}
\|u(t,\cdot)-v(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} &\leq \|G_\gamma(t)(u_0-v_0)\|_{L^{l,\infty}} \\
&+ \eta C C_1 2^\rho \epsilon^{\rho-1} \int_0^{\delta} (1-s)^{-1} \|u(ts,\cdot)-v(ts,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\, ds \\
&+ 2^\rho \epsilon^{\rho-1} K \sup_{\delta t \leq s \leq t} \|u(s,\cdot)-v(s,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}, \qquad (6.6)
\end{aligned}
$$

para todo $t > 0$.

A seguir, definimos

$$
\Gamma = \limsup_{t\to\infty} \|u(t,\cdot)-v(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} = \lim_{\substack{k\to\infty \\ k\in\mathbb{N}}} \sup_{t\geq k} \|u(t,\cdot)-v(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}.
$$

Nosso objetivo agora é mostrar que $\Gamma = 0$.

Da monotonicidade da integral, observamos que

$$
\sup_{t\geq k} \int_0^{\delta} (1-s)^{-1} \|u(ts,\cdot)-v(ts,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\, ds \leq \int_0^{\delta} (1-s)^{-1} \sup_{t\geq k} \|u(ts,\cdot)-v(ts,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\, ds. \qquad (6.7)
$$

Notemos também que

$$
\begin{aligned}
\sup_{t\geq k} \|u(ts,\cdot)-v(ts,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} &\leq \sup_{t\geq 0} \|u(ts,\cdot)-v(ts,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} \\
&\leq \|u\|_E + \|v\|_E \\
&\leq 4\epsilon \in L^1\left((0,\delta),\ ds\right).
\end{aligned}
$$

Logo, de 6.7 e aplicando o Teorema da convergência dominada ([8], pág. 44), obtemos

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to\infty}\int_0^\delta (1-s)^{-1}\|u(ts,\cdot)-v(ts,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\,ds &= \lim_{\substack{k\to\infty\\ k\in\mathbb{N}}}\sup_{t\geq k}\int_0^\delta (1-s)^{-1}\|u(ts,\cdot)-v(ts,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\,ds\\
&\leq \lim_{\substack{k\to\infty\\ k\in\mathbb{N}}}\int_0^\delta (1-s)^{-1}\sup_{t\geq k}\|u(ts,\cdot)-v(ts,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\,ds\\
&= \int_0^\delta (1-s)^{-1}\lim_{\substack{k\to\infty\\ k\in\mathbb{N}}}\sup_{t\geq k}\|u(ts,\cdot)-v(ts,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\,ds\\
&= \int_0^\delta (1-s)^{-1}\limsup_{t\to\infty}\|u(ts,\cdot)-v(ts,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\,ds\\
&= \Gamma\int_0^\delta (1-s)^{-1}\,ds\\
&= \Gamma\log\left(\frac{1}{1-\delta}\right). \qquad (6.8)
\end{aligned}$$

Agora, como

$$\sup_{t\geq k}\sup_{\delta t\leq s\leq t}\|u(s,\cdot)-v(s,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} \leq \sup_{\delta k\leq s}\|u(s,\cdot)-v(s,\cdot)\|_{L^{l,\infty}},$$

segue que

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to\infty}\sup_{\delta t\leq s\leq t}\|u(s,\cdot)-v(s,\cdot)\|_{L^{l,\infty}} &= \lim_{\substack{k\to\infty\\ k\in\mathbb{N}}}\sup_{t\geq k}\sup_{\delta t\leq s\leq t}\|u(s,\cdot)-v(s,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\\
&\leq \lim_{\substack{k\to\infty\\ k\in\mathbb{N}}}\sup_{\delta k\leq s}\|u(s,\cdot)-v(s,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\\
&= \limsup_{t\to\infty}\|u(s,\cdot)-v(s,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\\
&= \Gamma. \qquad (6.9)
\end{aligned}$$

E assim, aplicando $\limsup\limits_{t\to\infty}$ em (6.6), usando a hipótese de que $\lim\limits_{t\to\infty}\|G_\gamma(t)(u_0-v_0)\|_{L^{l,\infty}}=0$, (6.8) e (6.9), obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \limsup_{t\to\infty}\|u(t,\cdot)-v(t,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\\
&\leq \limsup_{t\to\infty}\|G_\gamma(t)(u_0-v_0)\|_{L^{l,\infty}}\\
&+ \eta CC_1 2^\rho\epsilon^{\rho-1}\limsup_{t\to\infty}\int_0^\delta (1-s)^{-1}\|u(ts,\cdot)-v(ts,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\,ds\\
&+ 2^\rho\epsilon^{\rho-1}K\limsup_{t\to\infty}\sup_{\delta t\leq s\leq t}\|u(s,\cdot)-v(s,\cdot)\|_{L^{l,\infty}}\\
&\leq 2^\rho\epsilon^{\rho-1}\left(\eta CC_1\log\left(\frac{1}{1-\delta}\right)+K\right)\Gamma.
\end{aligned}$$

Ou seja, temos que

$$\Gamma \leq 2^\rho\epsilon^{\rho-1}\left(\eta CC_1\log\left(\frac{1}{1-\delta}\right)+K\right)\Gamma.$$

Por fim, como $2^\rho\epsilon^{\rho-1}K<1$, basta escolhermos $\delta>0$ suficientemente pequeno, de modo que

$$2^\rho\epsilon^{\rho-1}\left(\eta CC_1\log\left(\frac{1}{1-\delta}\right)+K\right)<1.$$

Portanto, $\Gamma=0$, ou seja,

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t,\cdot)-v(t,\cdot)\|_{L^{\frac{n(\rho-1)}{2\gamma},\infty}}=0.$$

- *Segunda parte: u e v são soluções obtidas no Teorema de regularização 4.8.*

Começemos observando que

$$\begin{aligned} t^{\frac{\alpha}{2}}\|u(t,\cdot)-v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} &= t^{\frac{\alpha}{2}}\|G_\gamma(t)(u_0-v_0)\|_{L^{q,\infty}} \\ &+ t^{\frac{\alpha}{2}}\left\|\int_0^t G_\gamma(t-s)\left(f\left(u(s,\cdot)\right)-f\left(v(s,\cdot)\right)\right)\,ds\right\|_{L^{q,\infty}} \\ &= I_0+I_1. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Faremos agora uma estimativa do termo I_1.

Tomando $\frac{1}{r}=\frac{1}{q}+\frac{\rho-1}{q}$, (donde segue que $1<r<q$) e procedendo como na primeira parte da demonstração (ver, também, demonstração do Lema 4.17), obtemos

$$\|f(u(s,\cdot))-f(v(s,\cdot))\|_{L^{r,\infty}} \leq \eta C\|u(s,\cdot)-v(s,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\left(\|u(s,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}^{\rho-1}+\|v(s,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}^{\rho-1}\right). \tag{6.11}$$

Assim, usando o Lema 4.4, (6.11) e o fato de $\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}}\|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} \leq 2\epsilon_q$ e $\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}}\|v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} \leq 2\epsilon_q$, (pois por hipótese $u(t,x)$ e $v(t,x)$ são soluções dadas pelo Teorema de regularização 4.8), temos

$$\begin{aligned} I_1 &\leq t^{\frac{\alpha}{2}}\int_0^t \|G_\gamma(t-s)\left(f\left(u(s,\cdot)\right)-f\left(v(s,\cdot)\right)\right)\|_{L^{q,\infty}}\,ds \\ &\leq t^{\frac{\alpha}{2}}C_1\int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)}\|\left(f\left(u(s,\cdot)\right)-f\left(v(s,\cdot)\right)\right)\|_{L^{r,\infty}}\,ds \\ &\leq t^{\frac{\alpha}{2}}\eta CC_1\int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)}\|u(s,\cdot)-v(s,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\left(\|u(s,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}^{\rho-1}+\|v(s,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}^{\rho-1}\right)\,ds \\ &\leq t^{\frac{\alpha}{2}}\eta CC_1\int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{\rho-1}{q}\right)}s^{-\rho\frac{\alpha}{2}}s^{\frac{\alpha}{2}}\|u(s,\cdot)-v(s,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\,ds \\ &\quad \left[\left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}}\|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho-1}+\left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}}\|v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right)^{\rho-1}\right] \\ &\leq t^{\frac{\alpha}{2}}\eta CC_1 2^\rho(\epsilon_q)^{\rho-1}\int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{\rho-1}{q}\right)}s^{-\rho\frac{\alpha}{2}}s^{\frac{\alpha}{2}}\|u(s,\cdot)-v(s,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\,ds \\ &= t^{\frac{\alpha}{2}}\eta CC_1 2^\rho(\epsilon_q)^{\rho-1}I_3. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} -\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{\rho-1}{q}\right)-\rho\frac{\alpha}{2}+1 &= -\frac{n\rho}{2\gamma q}+\frac{n}{2\gamma q}-\frac{\rho}{\rho-1}+\frac{n\rho}{2\gamma q}+1 \\ &= \frac{n}{2\gamma q}-\frac{\rho}{\rho-1}+1 \\ &= \frac{n}{2\gamma q}-\frac{1}{\rho-1} \\ &= -\frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Agora, fazendo a mudança de variável $y=\frac{s}{t}$ e usando a igualdade acima, temos

$$\begin{aligned} I_3 &= t^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{\rho-1}{q}\right)-\rho\frac{\alpha}{2}+1}\int_0^1 (1-y)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{\rho-1}{q}\right)}y^{-\rho\frac{\alpha}{2}}(ty)^{\frac{\alpha}{2}}\|u(ty,\cdot)-v(ty,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\,dy \\ &= t^{-\frac{\alpha}{2}}\int_0^1 (1-y)^{-\frac{n}{2\gamma}\left(\frac{\rho-1}{q}\right)}y^{-\rho\frac{\alpha}{2}}(ty)^{\frac{\alpha}{2}}\|u(ty,\cdot)-v(ty,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\,dy. \end{aligned}$$

Assim, de (6.12), temos que

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \eta C C_1 2^{\rho}(\epsilon_q)^{\rho-1}\int_0^1 (1-s)^{-\frac{n}{2\gamma}(\frac{\rho-1}{q})} s^{-\rho\frac{\alpha}{2}} (ts)^{\frac{\alpha}{2}} \|u(ts,\cdot)-v(ts,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\, ds \\ &= \eta C C_1 2^{\rho}(\epsilon_q)^{\rho-1} I_4. \end{aligned}$$

E então, para todo $t>0$,

$$t^{\frac{\alpha}{2}}\|u(t,\cdot)-v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} = t^{\frac{\alpha}{2}}\|G_\gamma(t)(u_0-v_0)\|_{L^{q,\infty}} + \eta C C_1 2^{\rho}(\epsilon_q)^{\rho-1} I_4. \quad (6.13)$$

Agora, definimos

$$\Gamma = \limsup_{t\to\infty} t^{\frac{\alpha}{2}}\|u(t,\cdot)-v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} = \lim_{\substack{k\to\infty\\ k\in\mathbb{N}}}\sup_{t\geq k} t^{\frac{\alpha}{2}}\|u(t,\cdot)-v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}.$$

Nosso objetivo é mostrar que $\Gamma = 0$.
Da monotonicidade da integral, observamos que

$$\sup_{t\geq k} I_4 \leq \int_0^1 (1-s)^{-\frac{n}{2\gamma}(\frac{\rho-1}{q})} s^{-\rho\frac{\alpha}{2}} \sup_{t\geq k}\left((ts)^{\frac{\alpha}{2}}\|u(ts,\cdot)-v(ts,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right) ds. \quad (6.14)$$

Notemos, também, que

$$\begin{aligned} \sup_{t\geq k}\left((ts)^{\frac{\alpha}{2}}\|u(ts,\cdot)-v(ts,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right) &\leq \sup_{t\geq 0}\left((ts)^{\frac{\alpha}{2}}\|u(ts,\cdot)-v(ts,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right) \\ &\leq \sup_{t\geq 0}\left(t^{\frac{\alpha}{2}}\|u(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right) + \sup_{t\geq 0}\left(t^{\frac{\alpha}{2}}\|v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right) \\ &\leq \|u\|_{E_q} + \|v\|_{E_q} \\ &\leq 4\epsilon_q \in L^1\left((0,1), ds\right). \end{aligned}$$

Logo, de (6.14) e aplicando o Teorema da convergência dominada ([8], pág. 44), obtemos

$$\begin{aligned} \limsup_{t\to\infty} I_4 &= \lim_{\substack{k\to\infty\\ k\in\mathbb{N}}}\sup_{t\geq k} I_4 \\ &\leq \lim_{\substack{k\to\infty\\ k\in\mathbb{N}}}\int_0^1 (1-s)^{-\frac{n}{2\gamma}(\frac{\rho-1}{q})} s^{-\rho\frac{\alpha}{2}} \sup_{t\geq k}\left((ts)^{\frac{\alpha}{2}}\|u(ts,\cdot)-v(ts,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right) ds \\ &= \int_0^1 (1-s)^{-\frac{n}{2\gamma}(\frac{\rho-1}{q})} s^{-\rho\frac{\alpha}{2}} \lim_{\substack{k\to\infty\\ k\in\mathbb{N}}}\sup_{t\geq k}\left((ts)^{\frac{\alpha}{2}}\|u(ts,\cdot)-v(ts,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right) ds \\ &= \int_0^1 (1-s)^{-\frac{n}{2\gamma}(\frac{\rho-1}{q})} s^{-\rho\frac{\alpha}{2}} \limsup_{t\to\infty}\left((ts)^{\frac{\alpha}{2}}\|u(ts,\cdot)-v(ts,\cdot)\|_{L^{q,\infty}}\right) ds \\ &= \Gamma\int_0^1 (1-s)^{-\frac{n}{2\gamma}(\frac{\rho-1}{q})} s^{-\rho\frac{\alpha}{2}}\, ds \\ &= \Gamma C_2, \end{aligned} \quad (6.15)$$

em que $C_2 = \int_0^1 (1-s)^{-\frac{n}{2\gamma}(\frac{\rho-1}{q})} s^{-\rho\frac{\alpha}{2}}\, ds < \infty$ (C_2 constante obtida em 4.50 do Lema 4.17.

E assim, aplicando $\limsup_{t\to\infty}$ em (6.13), usando a hipótese de que $\lim_{t\to\infty} t^{\frac{\alpha}{2}}\|G_\gamma(t)(u_0-v_0)\|_{L^{q,\infty}} = 0$, (6.15), e o fato de que $K_q = \eta C C_1 C_2$ (ver Lema 4.17), temos

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \limsup_{t\to\infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} \\
&\leq \limsup_{t\to\infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|G_\gamma(t)(u_0 - v_0)\|_{L^{q,\infty}} + \eta C C_1 2^\rho (\epsilon_q)^{\rho-1} \limsup_{t\to\infty} I_4 \\
&\leq \left(\eta C C_1 C_2 2^\rho (\epsilon_q)^{\rho-1}\right) \Gamma \\
&= \left(2^\rho (\epsilon_q)^{\rho-1} K_q\right) \Gamma.
\end{aligned}$$

Ou seja, se tomarmos, assim como no Teorema de regularização 4.8, $\tilde{K} = 2\max\{K, K_q\}$, temos que

$$\Gamma \leq \left(2^\rho (\epsilon_q)^{\rho-1} \tilde{K}\right) \Gamma.$$

E ainda, como do Teorema de regularização 4.8 teremos que

$$2^\rho (\epsilon_q)^{\rho-1} \tilde{K} < 1,$$

então $\Gamma = 0$, isto é,

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\|_{L^{q,\infty}} = 0.$$

□

Referências

[1] KRAKAUER, J. *Na Natureza Selvagem*. 2. ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2018.

[2] FERREIRA, L. C. de F.; VILLAMIZAR-ROA, E. J. Self-similar solutions, uniqueness and long-time asymptotic behavior for semilinear heat equations. *Differential and Integral Equations*, v. 19, p. 1349–1370, 2006.

[3] WEISSLER, F. B. Existence and non-existence of global solutions for a semilinear heat equation. *Israel Journal of Mathematics*, v. 38, p. 29–40, 1981.

[4] WEISSLER, F. B. Local existence and non-existence for a semilinear parabolic equations in L^p. *Indiana University Mathematics Journal*, v. 29, p. 79–102, 1980.

[5] GIGA, Y. Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the navier-stokes system. *Journal of Differential Equations*, v. 62, p. 186–212, 1986.

[6] BREZIS, H.; CAZENAVE, T. A nonlinear heat equation with singular initial data. *Journal d'Analyse Mathématique*, v. 68, p. 277–304, 1996.

[7] NI, W. M.; SACKS, P. Singular behavior in nonlinear parabolic equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 287, p. 657–671, 1985.

[8] BARTLE, R. G. *The Elements of Integration ans Lebesgue Measure*. 1. ed. New York, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1995.

[9] CASTILLO, R. E.; RAFEIRO, H. *An Introductory Course in Lebesgue Spaces*. 1. ed. New York, USA: Springer, 2016.

[10] O'NEIL, R. Convolution operators and $L^{p,q}$ spaces. *Duke Mathematical Journal*, v. 30, p. 129–142, 1963.

[11] STEIN, E. M.; WEISS, G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. 1. ed. New Jersey, USA: Princeton University Press, 1971.

[12] GRAFAKOS, L. *Classical Fourier Analysis*. 2. ed. New York, USA: Springer, 2008.

[13] FOLLAND, G. B. *Real Analysis - Modern Techniques and their Applications*. 1. ed. New York, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1984.

[14] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. 1. ed. New York, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1978.

[15] HUNT, R. A. On $L^{p,q}$ spaces. *L'Enseignement Mathématique*, v. 4, p. 249–276, 1966.

[16] LEMARIé-RIEUSSET, P. G. *Recent Developments in the Navier-Stokes Problem*. 1. ed. Boca Raton: Chapman & Hall / CRC, 2002.

[17] LIMA, E. L. de. *Curso de Análise, vol. 2*. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

[18] YAMAZAKI, M. The navier-stokes equations in the weak-L^n space with time-dependent external force. *Mathematische Annalen*, v. 317, p. 635–675, 2000.

[19] NEVES, S. L. N. *Sobre o Nùmero de Soluções de um Problema de Neumann com Perturbação Singular*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2012.