



Universidade Estadual Paulista

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

***ABORDAGEM MATEMÁTICA DE ROLL WAVES EM
ESCOAMENTOS HIPERCONCENTRADOS COM
SUPERFÍCIE LIVRE***

Fabiana de Oliveira Ferreira

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo de Freitas Maciel

Ilha Solteira, novembro de 2007.

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira.

- | | |
|-------|---|
| F383a | <p>Ferreira, Fabiana de Oliveira.</p> <p>Abordagem matemática de roll waves em escoamentos hiperconcentrados com superfície livre / Fabiana de Oliveira Ferreira. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2007
119 f. : il., fots. (algumas color.)</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Ciências Térmicas, 2007</p> <p>Orientador: Geraldo de Freitas Maciel
Bibliografia: p. 88-93</p> <p>1. Escoamento. 2. Fluidos não-newtonianos. 3. Ondas de choque. 4. Roll waves.</p> |
|-------|---|

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: *Abordagem Matemática de Roll Waves em Escoamentos Hiperconcentrados com Superfície Livre*

AUTOR: *FABIANA DE OLIVEIRA FERREIRA*

ORIENTADOR: Prof. Dr. GERALDO DE FREITAS MACIEL

DATA DA REALIZAÇÃO: 21 DE NOVEMBRO DE 2007

Aprovada com parte das exigências para obtenção do Título de MESTRE em ENGENHARIA MECÂNICA pela Comissão Examinadora:



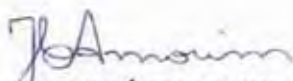
Prof. Dr. GERALDO DE FREITAS MACIEL

Departamento de Engenharia Civil/ Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. JOSÉ LUIZ GASCHE

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. JOSÉ CARLOS CESAR AMORIM

Seção de Engenharia da Construção / Instituto Militar de Engenharia

Dedico este trabalho aos meus pais Silvio e Maria Luzia e ao meu irmão Silvio Cesar, estímulos que me impulsionaram a buscar meus ideais.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por ter me concedido força e perseverança para concluir este trabalho.

Aos meus pais e meu irmão, pelos ensinamentos, pelo carinho e confiança.

Ao meu orientador Prof. Dr. Geraldo de Freitas Maciel, pelo aprendizado, pela confiança, paciência e apoio constante no decorrer do trabalho, mostrando-me caminhos ao invés de meras soluções.

À Prof. Dra. Mônica Pinto Barbosa, pela confiança e pela oportunidade de fazer o mestrado, me fazendo acreditar que poderia ser uma mestre.

Ao meu namorado Marcel, pela compreensão nos momentos de ausência e pelo carinho e incentivo nos momentos de dificuldades.

À amiga Adriana, pelo companheirismo nos momentos felizes e também nos momentos mais difíceis e a todos os amigos por grandes momentos juntos, que de forma direta ou indireta contribuíram muito para a conclusão deste trabalho.

À banca examinadora, por aceitar contribuir na discussão e certamente no enriquecimento deste trabalho.

Ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, professores e funcionários.

“Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse mas a aquisição, não é a presença mas o ato de atingir a meta.”

Carl Friedrich Gauss

Os escoamentos em superfície livre que ocorrem em canais inclinados, tanto em fluido Newtoniano quanto em fluido não-Newtoniano (hiperconcentrado), podem desenvolver instabilidades, tais como ondas em forma de ressalto hidráulico, com comprimentos bem definidos. Tais perturbações são denominadas *Roll Waves*. Essas ondas são comuns em canais artificiais, em lavas torrenciais e deslizamento de avalanches. Neste trabalho, no plano teórico, é determinado um modelo matemático geral, com base nas equações de Navier-Stokes integradas na vertical, em cujo tensor de tensões é introduzido a reologia de Herschel-Bulkley. A velocidade média do escoamento é determinada levando-se em consideração que o escoamento apresenta um perfil de velocidade parabólico na região cisalhada (próximo ao fundo do canal) acoplado a um perfil linear na região não cisalhada (condição de *plug*), característico dos escoamentos de lamas e detritos. A partir do sistema de equações (conservação da massa e equação da quantidade de movimento) em variáveis adimensionais, uma análise de estabilidade linear é realizada, colocando em evidência as condições de formação dessas instabilidades, tanto em fluido hiperconcentrado como em fluido Newtoniano. Com as condições de formação de instabilidades estabelecidas, uma teoria analítica de *Roll Waves* permanente é imposta e um modelo matemático para geração de tais instabilidades é determinado. No plano numérico, utilizando a linguagem de programação Python, a validade do modelo é verificada, considerando que essas ondas são ajustadas por choques devido às singularidades existentes no modelo. Com a determinação das condições de choque e da velocidade de propagação da onda em um ponto crítico; pode-se observar a formação de *Roll Waves* em fluidos não Newtonianos com reologia de Herschel-Bulkley, Bingham, *Power Law*, como também em fluido Newtoniano.

Palavras-chave: *Roll Waves*, Herschel-Bulkley, fluido hiperconcentrado, ondas de choque.

ABSTRACT

The flows in free surface that occur in sloping canals, such as Newtonian fluid as in non-Newtonian fluid (hyperconcentrated), they can develop instabilities, such as long waves in form of hydraulic jumps, with well defined lengths; these instabilities are called *Roll Waves*, more common in artificial canals, torrential spillways of dams, lava and avalanche landslide. This work, in the theoretical plan, a general mathematical model is determined, on the basis of the integrated Navier-Stokes equation in the vertical, of tensor tensions the rheology of Herschel-Bulkley is introduced. The average velocity of the flows is determined taking itself in consideration that the flows presents a parabolic profile of speed in the shear region (near of the floor of canal) connected to a linear profile in the region not shear (condition of plug), categorized as flows of mudflows and debris flows. From the system of equations (conservation of the mass and equation of the momentum) in adimensional variables, an analysis of linear stability is carried through, placing the conditions of formation of these instabilities, as much in hyperconcentrated fluid as in Newtonian fluid. With the conditions of formation of instabilities established, a analytical theory of permanent *Roll Waves* is employed and a mathematical model for geration of such stabilities it's determined. In the numerical plan, using the computational consol Python, the validity of model is checked, considering of this waves are adjusted by shocks devided by the singularities existents in the model. With the determination of conditions of shock and the velocity of propagation of wave in a critical point; we can observe the formation of *Roll Waves* such in fluids non-Newtonians (Herschel-Bulkley, Bingham, *Power law*) as Newtonian fluids.

Keywords: *Roll Waves*, Herschel-Bulkley, hyperconcentrated fluid, shock waves.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 VISUALIZAÇÃO DE <i>ROLL WAVES</i>	15
FIGURA 1.2: VISUALIZAÇÃO DO FENÔMENO <i>ROLL WAVES</i> NA RAMPA DE LAVAS TORRENCIAIS. .	15
FIGURA 2.1: EXEMPLOS DE FLUIDO NEWTONIANO E FLUIDO NÃO NEWTONIANO.....	25
FIGURA 2.2: REOGRAMA REPRESENTANDO DIFERENTES TIPOS DE MODELOS REOLÓGICOS.	28
FIGURA 2.3: GEOMETRIA DO PROBLEMA.....	29
FIGURA 3.1: REPRESENTAÇÃO DO PERFIL DE VELOCIDADE PARA UM FLUIDO DE HERSCHEL- BULKLEY.....	43
FIGURA 3.2: PERFIL DE VELOCIDADES PARA UM FLUIDO TIPO HERSCHEL-BULKLEY	44
FIGURA 4.1: TAXA DE CRESCIMENTO DAS PERTURBAÇÕES PARA UM FLUIDO DO TIPO <i>HERSCHEL- BULKLEY</i>	63
FIGURA 4.2: TAXA DE CRESCIMENTO DAS PERTURBAÇÕES PARA UM FLUIDO DO TIPO <i>POWER LAW</i>	64
FIGURA 4.3: TAXA DE CRESCIMENTO DAS PERTURBAÇÕES PARA UM FLUIDO BINGHAMIANO (A) E NEWTONIANO (B).	65
FIGURA 4.4: VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO DAS PERTURBAÇÕES PARA FLUIDO DE HERSCHEL- BULKLEY	67
FIGURA 4.5: VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO DAS PERTURBAÇÕES PARA UM FLUIDO DO TIPO <i>POWER LAW</i>	68
FIGURA 4.6: VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO DAS PERTURBAÇÕES PARA FLUIDO BINGHAMIANO E NEWTONIANO.	68
FIGURA 5.1: PERFIL DE UMA <i>ROLL WAVE</i>	74
FIGURA 6.1: PERFIL DAS <i>ROLL WAVES</i> EM FLUIDO DE HERSCHEL-BULKLEY, VARIANDO O VALOR DO NÚMERO DE FROUDE (Fr).	80
FIGURA 6.2: PERFIL DAS <i>ROLL WAVES</i> PARA FLUIDO DE HERSCHEL-BULKLEY, VARIANDO O VALOR DE C^*	81
FIGURA 6.3: PERFIL DAS <i>ROLL WAVES</i> EM FLUIDO DE HERSCHEL-BULKLEY VARIANDO O VALOR DE n PARA $Fr = 50$	82
FIGURA 6.4: PERFIL DAS <i>ROLL WAVES</i> VARIANDO O VALOR DE n PARA $Fr = 1$	83

LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLOS GREGOS

α	coeficiente de distribuição de velocidade
β	constante em função do número de Froude
β_n	constante em função do número de Froude em um ponto critico
ς	comprimento de onda no sistema móvel de coordenadas
θ	ângulo de inclinação do canal
λ	comprimento da <i>Roll Wave</i>
μ	viscosidade dinâmica ou absoluta de fluido newtoniano
μ_n	índice de escoamento para fluido do tipo <i>Power Law</i>
μ_B	viscosidade plástica (fluido de Bingham)
ρ	massa específica
τ	tensão de cisalhamento
τ^*	tensão de cisalhamento adimensional
τ_c	tensão critica ou rigidez inicial
τ_p	tensão na parede
τ_{xx}	tensão normal atuante na direção x
τ_{yy}	tensão normal atuante na direção y
τ_{zz}	tensão normal atuante na direção z
τ_{xy}	tensão cisalhante atuante no eixo x na direção y
τ_{yx}	tensão cisalhante atuante no eixo y na direção x
τ_{xz}	tensão cisalhante atuante no eixo x na direção z
τ_{zx}	tensão cisalhante atuante no eixo z na direção x
ϕ	ângulo de atrito interno
ω	frequência das perturbações

SÍMBOLOS ARÁBICOS

C	coeficiente de Chézy
g	aceleração da gravidade
n	índice de escoamento do fluido
U	velocidade de propagação da <i>Roll Wave</i>
Fr	número de Froude
C^*	coesão do fluido (em função da tensão crítica)
U_i	componente de velocidade em notação indicial
X_i	eixos do sistema de coordenadas em notação indicial
F_i	forças de corpo
T_{ij}	tensor de tensões
t	escala de tempo
u	componente de velocidade na direção x
v	componente de velocidade na direção y
w	componente de velocidade na direção z
x	abscissa no sistema de coordenadas cartesianas
y	ordenada no sistema de coordenadas cartesianas
z	cota no sistema de coordenadas cartesianas
K_n	índice de consistência do fluido de Herschel-Bulkley
h_o	cota no fundo do canal
h_f	cota na superfície livre do escoamento
Ox	escala de comprimento na direção x
Oy	escala de comprimento na direção y
Oz	escala de comprimento na direção z
L	comprimento característico
x^*	abscissa adimensional no sistema de coordenadas cartesianas
y^*	ordenada adimensional no sistema de coordenadas cartesianas
z^*	cota adimensional no sistema de coordenadas cartesianas
u^*	componente de velocidade adimensional na direção x

v^*	componente de velocidade adimensional na direção y
w^*	componente de velocidade adimensional na direção z
P	pressão
P^*	pressão na forma adimensional
$\bar{u}$	velocidade média do escoamento
h	profundidade total do escoamento
z_0	profundidade do escoamento na região cisalhada
l_0	comprimento da onda em regime uniforme
h_0	profundidade do escoamento em regime uniforme
u_0	componente da velocidade na direção para escoamento em regime uniforme
$\bar{u}_0$	velocidade média do escoamento em regime uniforme
H	valor infinitesimal para altura quando o escoamento é perturbado
V	valor infinitesimal para a velocidade do escoamento quando perturbado
$I(\omega)$	taxa média de crescimento das instabilidades
$\frac{\Re(\omega)}{k}$	velocidade de propagação da onda
x'	abscissa no sistema móvel de coordenadas
c	constante em função da velocidade de propagação da <i>Roll Wave</i>
h_1	profundidade do escoamento antes do choque
h_2	profundidade de escoamento depois do choque
h_c	profundidade crítica do escoamento

CAPÍTULO 1	14
1. INTRODUÇÃO	14
1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	16
1.2 OBJETIVOS.....	21
1.3 ESBOÇO DA DISSERTAÇÃO.....	22
CAPÍTULO 2	23
2. CONSIDERAÇÕES INICIAIS	23
2.1 DEFINIÇÕES DAS PROPRIEDADES FÍSICAS DOS FLUIDOS	23
2.2 MODELOS REOLÓGICOS.....	25
2.3 ANÁLISE FÍSICA DO PROBLEMA	29
2.4 ESCOAMENTO SUPERCRÍTICO, CRÍTICO E SUBCRÍTICO	30
CAPÍTULO 3	32
3. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA.....	32
3.1 TRATAMENTO MATEMÁTICO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES.....	33
3.1.1 Condições de Contorno	35
3.2 DETERMINAÇÃO DA PRESSÃO HIDROSTÁTICA	36
3.3 MODELO MATEMÁTICO	40
3.4 PERFIL DE VELOCIDADES.....	42
3.4.1 Velocidade Média em Relação à Profundidade do escoamento.	45
3.5 DETERMINAÇÃO DA TENSÃO DE CISALHAMENTO (LEI DE ATRITO).....	45
3.6 COEFICIENTE DE DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADE.....	48
3.7 ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS.....	50
CAPÍTULO 4	56
4. ANÁLISE DE ESTABILIDADE LINEAR.....	56

4.1	LINEARIZAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES.....	56
4.2	CONDIÇÕES PARA FORMAÇÃO DE INSTABILIDADES	60
4.3	TAXA DE CRESCIMENTO DAS INSTABILIDADES	62
4.4	VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO DAS INSTABILIDADES	66
CAPÍTULO 5		70
5.	EQUAÇÃO DAS <i>ROLL WAVES</i>	70
5.1	ONDAS DE CHOQUE E DESCONTINUIDADES	73
5.2	PERFIL DE UMA <i>ROLL WAVE</i>	73
5.2.1	<i>Condições de Choque</i>	75
5.3	VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO DA <i>ROLL WAVE</i>	76
CAPÍTULO 6		78
6.	RESULTADOS NUMÉRICOS	78
6.1	A LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO <i>PYTHON</i>	78
6.2	<i>ROLL WAVES</i> PARA A PROPOSTA REOLÓGICA DE HERSCHEL-BULKLEY.....	79
CAPÍTULO 7		85
7.	DISCUSSÕES E PERSPECTIVAS	85
REFERÊNCIAS		88
APÊNDICE A		94
APÊNDICE B		99
APÊNDICE C		103
APÊNDICE D		105
APÊNDICE E		108
APÊNDICE F		113

CAPÍTULO 1

1. INTRODUÇÃO

Os escoamentos em superfícies livres, também referenciados como escoamentos em canais, têm um grande número de aplicações práticas na engenharia. No entanto, os escoamentos que se processam em canais com declividades podem desenvolver instabilidades em forma de ressalto hidráulico ou *bore waves*. Essas instabilidades podem aparecer tanto em fluidos Newtonianos (água limpa), quanto em fluidos não Newtonianos (fluidos hiperconcentrados). Tais perturbações com comprimento de onda definido são denominadas *Roll Waves*.

Não é raro encontrá-las em rios íngremes, em canais artificiais, vertedouros de barragens, deslizamentos de avalanchas ou em corridas de lamas (*mudflows*) (Engelund e Wan, 1984) e detritos (*debris flows*) (Forterre e Pouliquen, 2003). O fenômeno pode ser visto em oceanos (Swaters, 2003) e lagos (Fer; Lemmin; Thorpe, 2003), além disso, essas ondas são ocorrências comuns em águas rasas e películas de fluido laminar que escoam sobre calhas e ruas em dias chuvosos.

Essas *Roll Waves* ou *travelling waves* não são exclusivas da engenharia de superfície livre e catástrofes do meio ambiente. Esse tipo de comportamento de sucessão de ondas de choque é, por conseguinte, de mesma topologia, podem aparecer no fluxo de carros numa autopista entre sucessivos engarrafamentos (cristas/cavas) e em várias outras situações físicas, tais como em corrente de gravidade (Alavian, 1986 e Cenedese *et al.*, 2004), em escoamentos multifásicos (Woods; Hurlburt; Hanratty, 2000), em modelo de tremor vulcânico (Julian, 1994) assim como em oscilações de pressão em uma artéria humana (Pedley, 1980 e Brook, 1999).

Através de estudos realizados em laboratório pelo grupo de pesquisa da Unesp de Ilha Solteira, observou-se a formação de tais instabilidades em fluido hiperconcentrado (água+argila, água+argila+areia fina) escoando em um canal inclinado.

A formação dessas ondas pode acarretar em variações significativas na profundidade do escoamento, vencendo algumas vezes, a borda livre de canais e provocando “transbordamentos”. Dessa forma, visando à aplicação deste estudo em problemas de engenharia, um modelo matemático que caracterize as *Roll Waves* contribuiria para um maior controle do fenômeno em questão, por exemplo, um eventual redimensionamento de bordas livres de um canal.

A Figura 1.1 mostra o fenômeno das *Roll Waves* na natureza no escoamento de fluido hiperconcentrado e de um fluido Newtoniano. A Figura 1.2 mostra o desenvolvimento das *Roll Waves*, geradas em lama na rampa de lavas torrenciais no laboratório de hidrologia da UNESP - Ilha Solteira.



a) Escoamento de fluido hiperconcentrado.



b) Escoamento de fluido Newtoniano

Figura 1.1 Visualização de *Roll Waves*.



Figura 1.2: Visualização do fenômeno *Roll Waves* na rampa de lavas torrenciais.

1.1 Revisão Bibliográfica

Quanto à geração de *Roll Waves* em escoamentos de fluido Newtoniano e não Newtoniano, estudos anteriores foram realizados na busca de explicar a ocorrência do fenômeno. Podendo aparecer tanto em escoamentos laminares quanto em escoamentos turbulentos.

Nos escoamentos laminares, onde são preponderantes a ação das forças viscosas do fluido, em relação à inércia, amortecendo a tendência à turbulência, as *Roll Waves* são formadas com baixos números de Reynolds, o que geralmente ocorre em escoamentos de fluidos hiperconcentrados, apresentam amplitude mais elevada e baixa velocidade de propagação, conforme mostrado por (Benjamin, 1957), (Chen, 1992), (Ng; Mei, 1994), (Liu; Mei, 1994), (Maciel, 2001) entre outros.

Já para os escoamentos turbulentos conforme estudado por (Jeffreys, 1925), (Dressler, 1949), (Brock, 1969), (Kranenburg, 1992), (Zanuttigh; Lamberti, 2002) e outros; o fenômeno ocorre para números de Reynolds elevados e as ondas apresentam uma velocidade de propagação maior quando comparadas com as que aparecem nos escoamentos laminares.

As observações do fenômeno *Roll Waves*, de forma detalhada foram apresentadas primeiramente por (Cornish, 1910), embora existam relatos de que essas ondas possam ter sido vistas mais cedo, pois aparecem em desenhos artísticos antigos (Montes, 1998). A partir daí, cientistas investem no estudo do fenômeno e resultados importantes são determinados para a geração de *Roll Waves*.

O primeiro a estabelecer um critério sobre a formação de *Roll Waves* em escoamentos turbulentos foi (Jeffreys, 1925), ele deduziu a partir de uma análise de estabilidade linear, que o escoamento uniforme tornava-se instável, se o número de Froude fosse superior a 2. E (Thomas, 1939) tenta descrever analiticamente *Roll Waves* de grande amplitude e considera um trem de ondas com velocidade constante compondo a superfície da água.

Um trabalho clássico dentro do contexto de *Roll Waves* foi o de (Dressler, 1949), quando tentou delinear o perfil da superfície livre e verificou a formação de *Roll Waves*, descrevendo o fenômeno como sendo uma série de ondas de comprimentos bem definidos, separadas por descontinuidades da superfície livre. A análise realizada é baseada na formulação de águas rasas sem os termos de difusão, combinada à equação do ressalto hidráulico. A equação da quantidade de movimento compreende o efeito da gravidade adicionado ao termo que modela a turbulência (C : coeficiente de Chézy). Através da técnica

da adimensionalização das variáveis, (Dressler, 1949) mostrou que, soluções regulares, periódicas e separadas por descontinuidades com picos na superfície livre aparecem, quando $\tan(\theta) > 4g/C^2$, (θ : declividade do canal, C : coeficiente de Chézy). Essa análise não permite, entretanto, determinar o comprimento dessas ondas.

Nas décadas de 50 e 60, o fenômeno foi estudado teórica e experimentalmente, e propriedades físicas dessas ondas foram medidas. (Ishihara; Iwagaki; Iwasa, 1954) estudaram *Roll Waves* em uma lâmina de fluido Newtoniano, teórica e experimentalmente. Em suas análises, a profundidade média do escoamento foi calculada a partir das equações de águas rasas, assumindo um perfil parabólico para a velocidade longitudinal. Também mediram as propriedades das ondas e verificaram que as cristas eram bastante íngremes, mas não verticais.

Benjamin (1957) e Yih (1963), usando as equações de Navier-Stokes, para escoamentos laminares e assumindo perturbações senoidais na superfície livre, determinaram que o número de Froude deve ser maior que 0,5 para a formação dessas perturbações.

Montuori (1963) propondo uma relação do número de Froude com o comprimento do canal (L), verificou que em canais com comprimento pequeno, não ocorre o aparecimento de *Roll Waves*.

Brock (1969) observou *Roll Waves* em laboratório para um número de Reynolds de aproximadamente 10^4 e número de Froude de 3.2, ou seja, constatou experimentalmente a formação de tais ondas em escoamentos turbulentos. E posteriormente, (Brock, 1970), com base no trabalho de (Dressler, 1949), desenvolveu uma teoria para *Roll Waves* permanente periódica, usando as equações de águas rasas e comparou com os resultados experimentais obtidos em 1969.

No final da década de 70, (Tamada, Tougou, 1979) fizeram o estudo de *Roll Waves* para fluido Newtoniano, baseados nas equações de Navier-Stokes. Os resultados mostraram um trem de ondas para comprimento de onda menor do que um valor crítico. Além disso, o perfil das ondas mostrou-se compatíveis com as observações experimentais.

Alguns pesquisadores, na década de 80 estenderam os estudos de (Dressler, 1949), tais como, (Needham; Merkin, 1983) e (Bakhavalov; Eglit, 1977-1983); e obtiveram soluções análogas a de Dressler.

Needham e Merkin (1983) introduzindo os efeitos viscosos no equacionamento, verificaram que a inclusão deste termo não alterava a condição de estabilidade do escoamento

uniforme. Ainda, quando o escoamento tornava-se instável, uma família de soluções quase periódicas apareceriam, tendo como parâmetro de controle a velocidade de perturbação.

Dentro de uma reologia não-Newtoniana, (Bakhvalov; Eglit, 1977-1983) verificaram a formação de *Roll Waves*. Estudando avalanches densas, efetuaram análise análoga à de Dressler (1949), quando introduziram um termo dissipativo suplementar modelado por um atrito sólido. A partir dessa análise chegaram a $(\tan \theta - \tan \phi) > 4g/C^2$, (ϕ : ângulo de atrito interno), relação semelhante à de Dressler (1949), com uma mera modificação da declividade.

Needham (1984) e Merkin (1986) obtiveram informações sobre o comprimento das perturbações, incluindo no equacionamento os termos da difusão, ainda que o termo difusivo no equacionamento não estivesse corretamente adaptado às equações de águas rasas, isto sem levar em conta a complexidade de aplicação direta de seus resultados a um problema de engenharia.

Julien e Hartley (1986) obtiveram soluções similares a de Montuori (1963) ao estudarem o processo de formação de *Roll Waves* em escoamentos de lama altamente viscosos em canais íngremes.

Hwang e Chang (1987) usando a teoria da bifurcação verificaram a formação de *Roll Waves* numericamente.

Hutter e Savage (1988) também investiram no estudo dos critérios de formação de *Roll Waves*. A contribuição de (Hutter; Savage, 1988) residiu no fato de tentar substituir o atrito sólido pela coesão do fluido.

A partir a década de 90, outros pesquisadores investiram no estudo do fenômeno, na tentativa de determinar os parâmetros físicos que influenciam na formação de tais instabilidades e as condições para a geração dessas ondas, com o intuito de determinar comprimento, amplitude e velocidade propagação das *Roll Waves*, tanto para fluido Newtoniano como para fluido não-Newtoniano (hiperconcentrado).

Kranenburg (1992), no plano numérico, utilizando-se das equações de águas rasas, comprovou a condição de existência já estabelecida por Dressler (1949). Observou o fato que para perturbações de diversos comprimentos de onda, a de maior comprimento prevaleceria sobre a *Roll Wave* gerada.

Chen (1992) utilizando as equações de águas rasas e considerando um perfil de velocidade do modelo reológico do tipo *Power Law*, obteve resultado similar ao encontrado por Benjamin (1957) e Yih (1963).

Liu e Mei (1994) baseados nas equações de águas rasas estudaram analiticamente a instabilidade linear de um escoamento uniforme para um fluido de Bingham e analisaram numericamente a evolução de *Roll Waves*. Observaram que para um fluido quase Newtoniano ocorre o aparecimento de perturbações periódicas com pequenas amplitudes, enquanto que para um fluido fortemente não Newtoniano aparecem ondas de grandes amplitudes.

Ng e Mei (1994) estudaram a formação de *Roll Waves*, a partir de uma proposta reológica de fluido com comportamento pseudoplástico (*Power Law*). Sua análise de estabilidade converge para o surgimento de ondas longas com grande amplitude quando $n < 1/\sqrt{2}$ (n : índice de comportamento do escoamento).

Maciel, Vila e Martinet (1997) a partir do sistema *shallow water* invíscido, retomando o trabalho clássico de Dressler, rededuziram as condições de existência de *Roll Waves* e verificaram o surgimento de tais instabilidades quando o número de Froude é maior do que 2. Estendendo o estudo, fizeram uma análise de estabilidade linear do sistema *shallow water* viscoso, apresentando na equação de quantidade de movimento, os termos da gravidade, efeito de parede tipo Chézy e os efeitos difusivos devido a viscosidade do fluido e verificou soluções periódicas quando $1 < U < 3/2$ (U : velocidade de propagação da *Roll Wave*).

Maciel (2001) estudando escoamentos de fluidos não Newtonianos, usando a proposta reológica de Bingham, estabeleceu as condições de existência e estabilidade, apontando os seguintes resultados:

$$i) \frac{1}{Fr^2} \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{1}{Fr^2} + \frac{C^* \left(1 - \frac{1}{Fr^2}\right)}{U^2}}}{-\frac{1}{Fr^2} + \sqrt{\frac{1}{Fr^2} + \frac{C^* \left(1 - \frac{1}{Fr^2}\right)}{U^2}}} \right) < 1 \quad (1.1)$$

$$ii) 1 < U < \frac{3 - 2C^*}{2(1 - C^*)} \quad (1.2)$$

Sendo:

Fr : número de Froude

α : coeficiente de distribuição da velocidade na vertical

C^* : coesão do fluido (parâmetro de Bingham)

U : velocidade de propagação da *Roll Wave*

No plano numérico, (Maciel, 2001) analisou a influência dos parâmetros determinados para a geração de *Roll Waves* e observou que, aumentando o número de Froude, ocorre um aumento na amplitude e uma diminuição no comprimento da *Roll Wave*. Aumentando a velocidade de propagação da *Roll Wave*, ocorre uma diminuição da amplitude. E quanto a influência da coesão do fluido (C^*), foi observado que com o aumento da coesão, ocorre um aumento na amplitude da onda, acarretando uma antecipação na formação das ondas geradas.

Madre (2001) utilizando as equações de águas rasas considerou que o efeito topográfico (no fundo do canal) varia periodicamente e observa que o escoamento torna-se instável mesmo para um número de Froude menor que 2.

Zanuttigh e Lamberti (2002) fizeram uma análise numérica baseados nas equações de águas rasas, na qual o código numérico é aplicado para reproduzir experiências de Brock's sobre *Roll Waves* geradas em um canal retangular em laboratório. A solução numérica mostra a evolução de *Roll Waves*, devido à instabilidade do escoamento uniforme.

Balmforth e Madre (2004) estudaram a dinâmica das *Roll Waves* em escoamentos turbulentos e laminares, utilizando as equações de águas rasas com os efeitos de atrito, viscosidade e explorando o efeito do fundo topográfico, considerando que os cursos reais da água não são completamente lisos. Observaram que para ambos os tipos de escoamentos a formação de ressaltos hidráulicos podem desestabilizar o escoamento, quando se atinge o valor crítico do número de Froude.

Di Cristo e Vacca (2005) investigaram o processo de geração de *Roll Waves* para um escoamento unidimensional do ponto de vista teórico a partir das equações de águas rasas. Considerando a velocidade média e a profundidade do escoamento, fizeram uma análise de estabilidade linear e interpretaram a formação de *Roll Waves* em termos de instabilidades do modelo unidimensional linearizado do escoamento. Observaram a evolução de tais perturbações somente com o número de Froude e o comprimento adimensional do canal, supostos geralmente em critérios hidráulicos de engenharia.

Pascal (2006) estudou as instabilidades de um escoamento para um fluido do tipo *Power Law* sobre um plano inclinado, incluindo o efeito da permeabilidade. Através de uma análise de estabilidade, observou numericamente a formação de *Roll Waves*, tanto para fluido newtoniano quanto para fluido não-Newtoniano, determinando as principais características do fenômeno, tais como: a altura, o comprimento e a velocidade de propagação da onda.

Estes estudos nos fornecem informações para acreditar que as *Roll Waves* podem se desenvolver em fluidos Newtonianos e também em fluidos não-Newtonianos. Dentro do contexto do estudo de *Roll Waves* em escoamentos de fluidos hiperconcentrados, o que mais figura na literatura é o estudo de tais instabilidades para o fluido de Bingham e *Power Law*.

Assim exposto, a modelagem matemática a fim de prever propriedades permitindo descrever a dinâmica dos escoamentos que aparecem as *Roll Waves*, ainda é limitada. A ocorrência do fenômeno na natureza e, até mesmo em processos industriais, cria a necessidade de formular um modelo matemático mais robusto que represente essas instabilidades, que vem muito a contribuir para um maior controle do fenômeno. Portanto, a proposta deste trabalho, é conceber um modelo matemático para escoamentos laminares e hiperconcentrados, que represente o fenômeno em questão, tomando como particularidade a reologia Newtoniana.

1.2 Objetivos

Os objetivos do presente trabalho podem ser enumerados da seguinte maneira:

- analisar de forma teórica a dinâmica de escoamentos de fluidos hiperconcentrados escoando em canal inclinado;
- determinar um modelo matemático capaz de reproduzir *Roll Waves* baseado na proposta reológica de Herschel-Bulkley;
- colocar em evidência as condições de instabilidade do escoamento uniforme através de análise de estabilidade linear;
- validar do modelo matemático desenvolvido para geração de *Roll Waves* através de resolução numérica da equação determinada;
- verificar se o modelo é válido para as propostas reológicas mais simplificadas (Bingham, *Power Law*, Newton).

1.3 Esboço da Dissertação

Este trabalho é composto de sete capítulos, cujos assuntos são resumidos a seguir.

Capítulo 1. Introdução. Neste capítulo apresenta-se uma motivação abordando os principais aspectos da pesquisa desenvolvida, apresentando algumas referências bibliográficas marcantes no contexto de *Roll Waves* e as metas principais dessa pesquisa.

Capítulo 2. Considerações Iniciais. Este capítulo inicia-se com alguns conceitos sobre as propriedades físicas dos fluidos e apresenta uma breve revisão dos modelos reológicos que serão citados no decorrer do trabalho. Além disso, mostra uma visão geral dos principais aspectos físicos pertinentes ao problema, considerando um escoamento de águas rasas de um fluido hiperconcentrado, em um canal inclinado.

Capítulo 3. Formulação Matemática. Apresenta-se neste capítulo a formulação matemática do problema estudado, abordando as equações governantes, a definição do modelo reológico a ser utilizado, as considerações iniciais empregadas na solução do problema e o desenvolvimento matemático para a obtenção do sistema que rege o escoamento tratado.

Capítulo 4. Análise de Estabilidade Linear. Neste capítulo é feita uma análise de estabilidade linear para o escoamento uniforme, mostrando a taxa de crescimento das instabilidades e a velocidade de propagação em função do número de ondas, evidenciando as condições necessárias para a formação de instabilidades no escoamento.

Capítulo 5. Equação das *Roll Waves*. Apresenta-se neste capítulo o modelo matemático para geração de *Roll Waves* em escoamentos laminares e as relações constitutivas do modelo.

Capítulo 6. Resultados Numéricos. Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos que demonstram a potencialidade e a aplicabilidade do modelo matemático apresentado no Capítulo 5.

Capítulo 7. Discussões e Perspectivas. Apresenta-se neste capítulo as discussões, com embasamento teórico, dos resultados encontrados e sugestões para trabalhos futuros.

2. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A obtenção de soluções para as equações governantes da mecânica dos fluidos em situações realistas representa um dos maiores desafios.

Os escoamentos podem ser representados do ponto de vista físico e matemático pelas equações da conservação da massa, quantidade de movimento e energia. Um escoamento em que a massa específica do fluido varia significativamente é um escoamento compressível; se a massa específica não varia significativamente então o escoamento é incompressível. Neste trabalho o escoamento a ser tratado é incompressível.

Este capítulo tem como objetivo mostrar alguns conceitos sobre as propriedades físicas dos fluidos e suas implicações, fazer uma breve revisão dos modelos reológicos que serão citados no decorrer do trabalho, fazer uma análise física do problema a ser estudado e mostrar quais são as condições para que um escoamento seja: supercrítico, crítico ou subcrítico.

2.1 Definições das Propriedades Físicas dos Fluidos

Fluido é toda matéria que se deforma continuamente quando submetida a uma mínima tensão de cisalhamento.

Os fluidos diferem dos sólidos pelas características das forças de coesão entre suas moléculas. A principal diferença prática que se pode observar entre sólidos e fluidos é que nos sólidos uma força atuante determina a intensidade da deformação e, nos fluidos, determina a

velocidade da deformação. Tanto os gases como os líquidos são classificados como fluidos. As características mais notáveis dos gases são a compressibilidade e a fluidez. Os líquidos são incompressíveis e suas propriedades são determinadas pela intensidade das forças intermoleculares.

As propriedades relevantes dos fluidos para o estudo de escoamentos são: a massa específica, a tensão superficial, a viscosidade e as propriedades reológicas.

Massa específica

A massa específica de uma substância define-se como a propriedade da matéria correspondente à razão entre massa de uma quantidade de substância e o volume correspondente.

Tensão superficial

Tensão superficial é um efeito que ocorre na camada superficial de um líquido que leva a sua superfície a se comportar como uma membrana elástica. Esta tensão superficial ocorre devido às fortes ligações intermoleculares, as quais dependem das diferenças elétricas entre as moléculas e pode ser definida como força por unidade de comprimento que duas camadas superficiais exercem uma sobre a outra.

Viscosidade

Viscosidade é a medida da resistência de um fluido à deformação causada por uma tensão, ou seja, quando um fluido sofre deformação, ocorre uma interação interna entre as partículas, com comportamentos diferentes para cada tipo de fluido, isso ocorre devido à resistência interna (viscosidade) da interação das partículas. Uma definição clássica para a viscosidade, é dizer que a mesma é a razão da tensão de cisalhamento pela taxa de deformação, mantendo-se constante em um fluido Newtoniano.

Uma maior ou menor viscosidade de um fluido implica na velocidade de deformação do mesmo, quando submetido a uma tensão de cisalhamento, ou seja, quanto maior a viscosidade, menor a velocidade em que o fluido se movimenta. No entanto, os fluidos podem ser classificados de acordo com a relação entre a tensão de cisalhamento aplicada e a taxa de

deformação, podendo ser denominados como fluidos Newtonianos e não Newtonianos, conforme mostra a Figura 2.1.



(a) Fluido Newtoniano (água com corante)



(b) Fluido não Newtoniano (água com argila)



(c) Escoamento de fluido hiperconcentrado (água com argila) e Newtoniano (água com corante), respectivamente.

Figura 2.1: Exemplos de fluido Newtoniano e fluido não Newtoniano.

2.2 Modelos Reológicos

Em linhas gerais, reologia é a ciência que estuda a taxa de deformação e o escoamento da matéria, o termo foi introduzido por (Bingham, 1920), tendo importância em diversas áreas, tais como a ciência dos materiais, a física e as engenharias.

Neste item são apresentados alguns modelos matemáticos que representam diferentes tipos de comportamentos reológicos, considerando a condição de cisalhamento simples e regime permanente, ou seja, as propriedades reológicas independem do tempo de aplicação da tensão de cisalhamento, podendo ser divididos em fluidos sem tensão inicial de escoamento e com tensão inicial de escoamento.

O modelo mais simples que se tem é o do fluido Newtoniano em que a tensão de cisalhamento é diretamente proporcional à taxa de deformação. A constante de proporcionalidade é a viscosidade do fluido, então:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.1)$$

Sendo:

τ : tensão de cisalhamento (Pa)

μ : viscosidade dinâmica ou absoluta ($Pa.s$)

$\frac{\partial u}{\partial y}$: gradiente de velocidade (s^{-1}) ou taxa de deformação.

A concentração de sedimentos determina se um fluido é Newtoniano ou não, portanto, um fluido com uma pequena concentração de sedimentos permanece com propriedades Newtonianas, podendo apresentar, variação na sua viscosidade se a concentração de sedimentos aumentar.

Quanto aos fluidos não-Newtonianos, diversos modelos foram desenvolvidos. Numerosas equações empíricas têm sido propostas para descrever as relações entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação.

Para muitas aplicações práticas de engenharia, as relações entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação podem ser adequadamente representadas pelo modelo exponencial, conhecido como lei das potências (*Power Law*), determinado por (Ostwald, 1925), na qual, tensão de cisalhamento é dada por:

$$\tau = \mu_n \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \quad (2.2)$$

Sendo que n representa o índice de escoamento do fluido. Para $n < 1$ tem-se um fluido pseudoplástico e para $n > 1$ tem-se um fluido dilatante.

Os fluidos pseudoplásticos são substâncias que, em repouso, apresentam suas moléculas em um estado desordenado, e quando submetidas a uma tensão de cisalhamento, suas moléculas tendem a se orientar na direção da força aplicada. Quanto maior esta força, maior será a ordenação e, conseqüentemente, menor será a viscosidade.

O dilatantes são fluidos que apresentam um aumento de viscosidade com a tensão de cisalhamento. No caso de suspensões, à medida que se aumenta a tensão de cisalhamento, o líquido intersticial que lubrifica a fricção entre as partículas, não preenche os espaços, devido a um aumento de volume que acompanha o fenômeno. Ocorre então, o contato direto entre as partículas sólidas e, conseqüentemente, um aumento da viscosidade.

Existem fluidos que se comportam como um sólido até que uma tensão de cisalhamento mínima seja excedida, ou seja, têm tendências a suportar pequenas tensões de cisalhamento aplicadas, sem apresentar deformação. Esta tensão, a qual o fluido pode resistir sem se deformar, é chamada tensão crítica de cisalhamento ou tensão inicial de escoamento, ou de corte.

Um fluido que apresenta tais características é o fluido plástico de Bingham, ou simplesmente fluido de Bingham, na qual a relação tensão de cisalhamento e taxa de deformação é linear, e o modelo apropriado é dado por (Bingham e Green, (1920), é representado da seguinte forma:

$$\tau = \tau_c + \mu_B \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \tau > \tau_c$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \tau < \tau_c$$
(2.3)

Sendo:

τ_c : tensão crítica ou rigidez inicial

μ_B : viscosidade plástica

Uma proposta reológica considerada mais generalizada é determinada por (Herschel e Bulkley, 1926). Esse tipo de fluido também necessita de uma tensão inicial para começar a escoar. Entretanto, a relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação não é linear. Esta relação, dependente do expoente adimensional n , característico para cada fluido, é dada por:

$$\tau = \tau_c + \mu_n \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n, \quad \tau > \tau_c$$

(2.4)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \tau < \tau_c$$

A modelagem de um escoamento necessita da escolha de um modelo reológico apropriado ao tipo fluido que será estudado. A Figura 2.2 mostra as curvas típicas da tensão de cisalhamento em função da taxa de deformação para os diferentes tipos de modelos reológicos apontados neste trabalho.

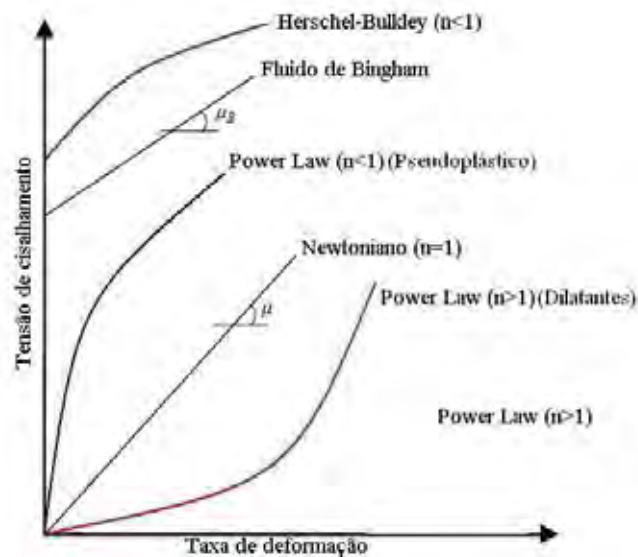


Figura 2.2: Reograma representando diferentes tipos de modelos reológicos.

Deve-se analisar os modelos reológicos com bastante cautela, observando as hipóteses restritivas na aplicação de problemas. No que diz respeito às misturas (água+argila, água+areia fina+argila), foram feitas investigações de reometria, o que permitiu, a partir dos

estudos de (Coussot, 1994), (Piau, 1996), (Huang; Garcia, 1998), (Lledo, 2003), comprovar que a reologia desses fluidos (sem sedimentação), pode ser descrita pelo modelo reológico não-linear tipo Herschel-Bulkley, com condições de cisalhamento simples e em regime permanente.

Com o propósito de se fazer uma análise global do fenômeno *Roll Waves*, neste trabalho será utilizado o modelo reológico de Herschel-Bulkley, por ser um modelo representativo e “mais generalizado” de fluido hiperconcentrado, permitindo tomar como particularidades outras propostas reológicas, tais como, a lei das potências (*Power Law*), os modelos Binghamiano e Newtoniano.

2.3 Análise Física do Problema

Muitos problemas aplicados normalmente podem ser resolvidos a partir da construção de um modelo matemático que descreve o fenômeno físico.

Esta seção apresenta uma visão geral dos principais aspectos físicos pertinentes ao problema a ser modelado. Sabendo-se que a formação de *Roll Waves* geralmente ocorre em escoamentos de águas rasas e em canais inclinados; além do tipo de fluido, deve-se levar em consideração a geometria do canal e as forças que regem o escoamento. A Figura (2.3) mostra a geometria do problema em questão:

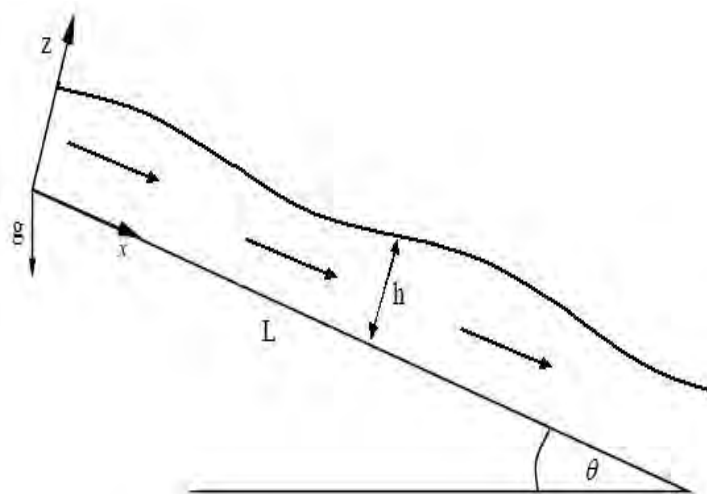


Figura 2.3: Geometria do problema.

Em escoamentos de águas rasas, o comprimento característico (L) deve ser maior do que a profundidade do escoamento (h). Conforme (Ribeiro; Galeão; Landau, 2001), para que um escoamento seja considerado de águas rasas, a seguinte relação deve ser satisfeita:

$$\frac{h}{L} < \frac{1}{20} \quad (2.5)$$

Esta hipótese mostra que somente ondas longas, isto é, ondas onde o comprimento é maior que a altura, são levadas em consideração. Nesta situação, uma característica interessante que merece ser ressaltada, no que diz respeito ao balanço de forças na direção perpendicular ao escoamento, é que as acelerações e tensões verticais podem ser desprezadas, resultando num campo de pressão hidrostático.

O escoamento se dá primordialmente pela ação direta da gravidade através da componente do peso do fluido na direção do declive, ou seja, o escoamento é caracterizado por um único sentido de movimento.

Outro ponto importante refere-se à possibilidade dos escoamentos se processarem em regime permanente. De fato, admitindo que o declive do fundo não mude, a componente do peso acima referida só variará se houver alteração da quantidade de fluido a ser transportado. Portanto, as propriedades físicas do escoamento se mantêm constante no tempo, ou seja, tem-se um escoamento em regime permanente.

Sabendo que a largura do canal é muito maior do que a altura da coluna do fluido pode-se simplificar o cálculo das forças de resistência, desprezando a contribuição de paredes laterais, considerando apenas a tensão do fluido com o fundo do canal.

Nesses escoamentos, as forças provenientes de gradientes de pressão na direção do fluxo, que nesse caso surgem quando a superfície do fluido se inclina em relação ao fundo do canal, tem uma participação muito pequena quando comparadas à força gravitacional. Esta característica dá origem a um tipo de escoamento no qual a componente do peso é contrabalançada pela força de resistência que o fundo do canal exerce sobre o fluido na seção considerada.

2.4 Escoamento Supercrítico, Crítico e Subcrítico

Em estudos de canais, pode-se classificar os escoamentos em supercrítico, crítico ou subcrítico. Um adimensional muito utilizado é o número de Froude, definido como a raiz

quadrada da relação entre a força de inércia e a força de gravidade, ou a razão entre a velocidade média do escoamento e a velocidade de pequenas instabilidades, que aparecem no escoamento. O número de Froude é expresso por:

$$Fr = \sqrt{\frac{\rho \bar{u} L^2}{\rho L^3 g}} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gL_c}} \quad (2.6)$$

em que $\bar{u}$ é a velocidade média do escoamento, g é a aceleração da gravidade e L_c é uma dimensão característica do escoamento. Nos canais, é comum definir como dimensão característica a profundidade do escoamento, e o número de Froude é apresentado como:

$$Fr = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} \quad (2.7)$$

Esse adimensional é utilizado para classificar os escoamentos livres que ocorrem nas aplicações práticas, como se segue:

- Escoamento supercrítico ou torrencial, ($Fr > 1$).
- Escoamento subcrítico ou fluvial, ($Fr < 1$).
- Escoamento crítico ($Fr = 1$).

Onde o escoamento supercrítico é chamado de escoamento rápido, enquanto que o subcrítico é chamado de escoamento lento. Sintetizando-tem-se:

- a) Se $h > h_c \rightarrow \bar{u} < \bar{u}_c$ (escoamento subcrítico)
- b) Se $h < h_c \rightarrow \bar{u} > \bar{u}_c$ (escoamento supercrítico)
- c) Se $h = h_c \rightarrow \bar{u} = \bar{u}_c$ (escoamento crítico)

Sendo que: h_c é a altura crítica e $\bar{u}_c = \sqrt{gh_c}$ é a velocidade crítica.

Neste capítulo, foram apresentados conceitos que serão utilizados no decorrer do trabalho.

3. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

A modelagem matemática dos mais variados problemas em física e em engenharia é uma atividade que tem auxiliado de maneira decisiva para a compreensão dos fenômenos naturais, permitindo a representação dos conceitos e processos envolvidos e propiciando o entendimento de aspectos de problemas que não se revelam facilmente. Esta seção visa apresentar as equações que serão utilizadas no desenvolvimento de um modelo matemático que represente o fenômeno em questão.

O escoamento de um fluido hiperconcentrado pode ser descrito a partir de três variáveis. Entretanto, são necessárias três equações para descrever o escoamento: a lei da conservação da massa, a equação da quantidade de movimento e da energia.

Neste caso, o binômio massa-quantidade de movimento responde à necessidade, para estudarmos o problema proposto, pois essas equações a derivadas parciais permitem determinar o campo de velocidade e de pressão. Quando submetidas a condições de contorno apropriadas, representam matematicamente um problema particular.

Conservação da Massa:

A equação da conservação da massa, em formulação diferencial, é dada por:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial U_i}{\partial X_i} = 0 \quad (3.1)$$

Sendo:

$\frac{D\rho}{Dt}$: variação total da massa específica (derivada substancial)

$\frac{\partial U_i}{\partial X_i}$: divergente da velocidade

Equação da Quantidade de Movimento:

Se há variação da quantidade de movimento, há forças, seja de superfície (tensões), de corpo (forças de inércia, gravidade e eletromagnetismo) ou ambas. Então, quando uma força é aplicada a uma partícula, uma aceleração proporcional é induzida. Para um fluido, o balanço entre a aceleração e as forças atuantes, é dado por:

$$\frac{DU_i}{Dt} = F_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j} \quad (3.2)$$

Sendo:

$\frac{DU_i}{dt}$: aceleração total

F_i : forças de corpo

$\frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j}$: gradiente do tensor de tensões

3.1 Tratamento Matemático das Equações Governantes

Como em qualquer problema de mecânica, as equações governantes devem ser referidas a um sistema de coordenadas convenientemente escolhido em função das

características específicas de cada caso. Neste trabalho, será utilizado o sistema cartesiano, por representar bem as características do problema a ser estudado.

Para a determinação do modelo matemático que rege o escoamento serão consideradas as hipóteses: escoamento permanente, uniforme, laminar e incompressível. A modelagem matemática do problema estudado, segue a seguinte linha:

1. Utilização das equações da conservação da massa e da quantidade de movimento.

- Equação da conservação da massa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.3)$$

- Equações da quantidade de movimento:

Na direção x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) - g \sin \theta \quad (3.4 a)$$

Na direção y:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \quad (3.4 b)$$

Na direção z:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) - g \cos \theta \quad (3.4 c)$$

Sendo que as tensões são dadas por:

$$\tau_{xx} = -P + 2K_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (3.5 \text{ a})$$

$$\tau_{yy} = -P + 2K_y \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (3.5 \text{ b})$$

$$\tau_{zz} = -P + 2K_z \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (3.5 \text{ c})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_c + K_n \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^n \quad (3.5 \text{ d})$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_c + K_n \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^n \quad (3.5 \text{ e})$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_c + K_n \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^n \quad (3.5 \text{ f})$$

Sendo: K_n o índice de consistência do fluido.

2. Aplicação das condições de contorno.

3. Utilização do modelo reológico de Herschel-Bulkley no tensor de tensões.

$$\tau = \tau_c + K_n \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^n \quad (3.6)$$

4. Determinação da equação do perfil de velocidades.

5. Determinação do modelo matemático em variáveis adimensionais.

3.1.1 Condições de Contorno

Deve-se considerar as condições de impermeabilidade no fundo do canal e na superfície livre, além disso, considera-se as tensões no fundo do canal.

Condição de impermeabilidade (fundo do canal):

$$w = u = 0 \quad \text{para} \quad z = 0 \quad (3.7)$$

Condição cinemática (superfície livre):

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{para} \quad z = h \quad (3.8)$$

Tensão de cisalhamento (fundo do canal):

$$\tau = 0 \quad \text{para} \quad z = h \quad (3.9)$$

3.2 Determinação da Pressão Hidrostática

Deve-se partir de grandezas apropriadas para justificar as hipóteses adotadas, aplicando o modelo reológico de Herschel-Bulkley. Além disso, é importante justificar o fato da adoção de uma pressão hidrostática, condição na qual é obtida a partir da equação da quantidade de movimento.

Pode-se definir as seguintes grandezas adimensionais, onde os termos sobrescritos com (*) são adimensionais:

$$\text{escala de comprimento: } (Ox, Oy, Oz) = (L x^*, \lambda y^*, h z^*)$$

$$\text{escala de velocidades: } (u, v, w) = \left[\left(\sqrt{gL} \right) u^*, \left(\frac{\lambda}{L} \sqrt{gL} \right) v^*, \left(\frac{h}{L} \sqrt{gL} \right) w^* \right]$$

$$\text{escala de tempo: } t = \sqrt{\frac{L}{g}} t^*$$

A adimensionalização da tensão de cisalhamento e da pressão é feita a partir do peso da coluna líquida.

$$\text{Pressão: } P = \rho g h \cos(\theta) P^*$$

$$\text{Tensão de cisalhamento: } \tau = \rho g h \cos(\theta) \tau_c^*$$

Sendo:

θ : declividade do canal

Para a determinação da pressão hidrostática, serão introduzidas as variáveis adimensionais na equação da quantidade de movimento, na direção Oz.

1º) Introduzindo as variáveis adimensionais no primeiro membro da equação (3.4 c), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u w}{\partial x} + \frac{\partial v w}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} &= \\ &= \left(\frac{h}{L} \sqrt{g L} \sqrt{\frac{g}{L}} \right) \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \sqrt{g L} \frac{h}{L^2} \sqrt{g L} \frac{\partial u^* w^*}{\partial x^*} + \frac{\lambda}{L} \sqrt{g L} \frac{h}{L} \frac{\sqrt{g L}}{\lambda} \frac{\partial v^* w^*}{\partial y^*} + \frac{h^2}{L^2} g \frac{L}{h} \frac{\partial w^{*2}}{\partial z^*} = \\ &= \frac{h g}{L} \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \frac{h g}{L} \frac{\partial u^* w^*}{\partial x^*} + \frac{h g}{L} \frac{\partial v^* w^*}{\partial y^*} + \frac{h g}{L} \frac{\partial w^{*2}}{\partial z^*} = \\ &= \frac{h g}{L} \left(\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^* w^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^* w^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^{*2}}{\partial z^*} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

2º) Será trabalhado o segundo membro da equação (3.4c), dado por:

$$= -g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (3.11)$$

Introduzindo os tensores em (3.21), tem-se:

$$\begin{aligned}
 = -g + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_c + K_n \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^n \right) \right] + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_c + K_n \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^n \right) \right] + \\
 + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho + 2K_n \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Admitindo que K_n e τ são independentes de x, y e z , a relação (3.12) fica da seguinte forma:

$$= -g + \frac{K_n}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^n \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_c}{\partial y} + \frac{K_n}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^n \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{2K_n}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \tag{3.13}$$

Introduzindo as variáveis adimensionais em (3.13), tem-se:

$$\begin{aligned}
 -g + \left(\frac{h^2}{L} \sqrt{gL} \right) v^* n \left(\frac{h \sqrt{gL}}{L} \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + \frac{\sqrt{gL}}{h} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^{n-1} \left(\frac{h \sqrt{gL}}{L} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\sqrt{gL}}{Lh} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^* \partial z^*} \right) + \\
 + \left(\frac{h^2}{L} \sqrt{gL} \right) v^* n \left(\frac{\lambda \sqrt{gL}}{Lh} \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{h \sqrt{gL}}{L\lambda} \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \right)^{n-1} \left(\frac{\lambda \sqrt{gL}}{Lh\lambda} \frac{\partial v^*}{\partial y^* \partial z^*} + \frac{h \sqrt{gL}}{L\lambda^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} \right) - \\
 - \frac{1}{\rho} \frac{\rho g h \cos(\theta)}{h} \frac{\partial P}{\partial z^*} + 2 \frac{h^2 \sqrt{gL}}{L} \frac{h \sqrt{gL}}{Lh^2} v^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Considerando:

$$a = n \left(\frac{h \sqrt{gL}}{L} \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + \frac{\sqrt{gL}}{h} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^{n-1} \tag{3.15}$$

$$b = n \left(\frac{\lambda \sqrt{gL}}{Lh} \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{h \sqrt{gL}}{L\lambda} \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \right)^{n-1} \quad (3.16)$$

A relação (3.14), fica:

$$\begin{aligned} & -g + av^* \frac{h^2}{L} \sqrt{gL} \left(\frac{h \sqrt{gL}}{L^3} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\sqrt{gL}}{Lh} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^* \partial z^*} \right) + \\ & + bv^* \frac{h^2}{L} \sqrt{gL} \left(\frac{\sqrt{gL}}{Lh} \frac{\partial v^*}{\partial y^* \partial z^*} + \frac{h \sqrt{gL}}{L\lambda^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} \right) - g \cos(\theta) \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + 2 \frac{hg}{L} v^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \\ & -g + av^* \left[g \left(\frac{h}{L} \right)^3 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{hg}{L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^* \partial z^*} \right] + bv^* \left[\frac{hg}{L} \frac{\partial v^*}{\partial y^* \partial z^*} + \frac{hg}{L} \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} \right] - \\ & -g \frac{\partial P^*}{\partial z^*} + 2 \frac{hg}{L} v^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Toma-se como hipótese que o escoamento é de águas rasas, então: $\frac{h}{L} \ll 1$ e que

$$\left(\frac{h}{\lambda} \right) \ll 1.$$

Estabelecendo a igualdade entre as relações (3.10) e (3.17); e dividindo todos os termos da igualdade por g, tem-se a seguinte equação:

$$0 = -1 - \cos(\theta) \frac{\partial P^*}{\partial z^*} \quad (3.18)$$

Retornando as seguintes variáveis dimensionais:

$$P^* = \frac{P}{\rho g h \cos(\theta)}, \quad z^* = \frac{z}{h} \quad (3.19)$$

Pode-se determinar uma equação para a pressão dada por:

$$\frac{1}{\rho g H \cos \theta} H \frac{\partial P}{\partial z} = -1 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \cos(\theta) \quad (3.20)$$

Integrando, a equação (3.20), tem-se:

$$\int_z^h \partial P = -\rho g \cos(\theta) \int_z^h \partial z = -\rho g \cos(\theta)(h - z) \quad (3.21)$$

$$P(z) = -\rho g \cos \theta (h - z) \quad (3.22)$$

Sendo:

h : profundidade do escoamento

Assim, pode-se concluir que a distribuição de pressão é hidrostática.

3.3 Modelo Matemático

O modelo matemático que representa esse fenômeno é obtido através da integração na vertical das equações de Navier-Stokes, incluindo o modelo reológico de Herschel-Bulkley no tensor de tensões, utilizando a regra de Leibniz, dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} Q(x, y) dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) dy + Q(x, \beta(x)) \frac{\partial \beta(x)}{\partial x} - Q(x, \alpha(x)) \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x} \quad (3.23)$$

Integrando as equações da conservação da massa e da quantidade de movimento, aplicando as condições de contorno (3.7), (3.8) e o conceito de pressão hidrostática, o sistema que rege o escoamento é (uma demonstração completa da dedução dessas equações é dada no Apêndice A):

Conservação da massa:

$$\frac{\partial \bar{u}h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (3.24)$$

Conservação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u^2}h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-g \cos(\theta) \frac{h^2}{2} \right) + g h \sin(\theta) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h \tau_{xz} dz \quad (3.25)$$

Sabendo que h é a profundidade do escoamento, tem-se:

$$\frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u^2}h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-g \cos(\theta) \frac{h^2}{2} \right) + g h \sin(\theta) + \frac{1}{\rho} [\tau_{xz}(h) - \tau_{xz}(0)] \quad (3.26)$$

Considerando que a tensão cisalhante é nula na superfície livre ($\tau_{xz}(h) = 0$), a equação (3.26) fica da seguinte forma:

$$\frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u^2}h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-g \cos(\theta) \frac{h^2}{2} \right) + g h \sin(\theta) + \frac{1}{\rho} [-\tau_{xz}(0)] \quad (3.27)$$

Sabendo que $\tau_{xz}(0)$ representa as tensões (efeito de atrito de parede no fundo do canal). Esse termo é composto pela tensão de cisalhamento à qual é adicionada a proposta reológica de Herschel-Bulkley.

$$\frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u^2}h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-g \cos(\theta) \frac{h^2}{2} \right) + g h \sin(\theta) + \frac{1}{\rho} [-\tau_p] \quad (3.28)$$

Sendo:

h : profundidade do escoamento;

$\bar{u}$: velocidade média na vertical;

θ : declividade do canal;

ρ : massa específica do fluido;

τ_p : tensão cisalhamento no fundo do canal.

A partir daí, é necessário calcular o perfil de velocidades com base no modelo reológico de Herschel-Bulkley.

3.4 Perfil de Velocidades

Os fluidos hiperconcentrados podem apresentar uma resistência à deformação, ou seja, resiste a pequenas tensões (tensão crítica) antes de escoar. Sendo assim, apresenta um perfil de velocidades parabólico na região em que ocorre a tensão de cisalhamento (próximo ao fundo do canal) e um perfil de velocidade linear na região não cisalhada (*Plug Flow*), o que geralmente ocorre em escoamentos de lamas e detritos, concreto fresco e géis.

Nesse item será determinado o perfil de velocidade de um escoamento hiperconcentrado, a partir da proposta reológica de Herschel-Bulkley, tomando-se como hipóteses, que o escoamento seja permanente, uniforme e laminar, de um fluido incompressível escoando em um canal inclinado. Considerando que o atrito no fundo do canal é dado por:

$$\tau = \rho g \sin\theta (h - z) \quad (3.29)$$

E baseado na proposta reológica de Herschel-Bulkley, tem-se:

$$\rho g \sin(\theta)(h - z) = \tau_c + K_n \left(\frac{du}{dz} \right)^n \quad (3.30)$$

$$\left(\frac{du}{dz} \right)^n = \frac{\rho g \sin(\theta)(h - z) - \tau_c}{K_n} \quad (3.31)$$

Resolvendo a equação diferencial (3.31), após alguns desenvolvimentos matemáticos (Apêndice B), pode-se obter o perfil de velocidade $u(z)$ para o fluido em questão.

Região cisalhada:

$$u(z) = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g \sin(\theta) z_0^{n+1}}{K_n} \right)^{\frac{1}{n}} \left[1 - \left(1 - \frac{z}{z_0} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad \text{para } 0 \leq z \leq z_0 \quad (3.32)$$

Região não cisalhada (plug):

$$u(z) = u(z_0) = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g \sin(\theta)}{K_n} \right) z_0^{1+n/n} \quad \text{para } z_0 \leq z \leq h \quad (3.33)$$

$$z_0 = h - \frac{\tau_c}{\rho g \sin(\theta)} \quad (3.34)$$

Sendo n o índice de escoamento do fluido e K_n o índice de consistência do fluido

A Figura (3.1) ilustra o perfil de velocidade para o fluido de Herschel-Bulkley, na qual o perfil de velocidade é parabólico na região cisalhada e constante na região não cisalhada (plug).

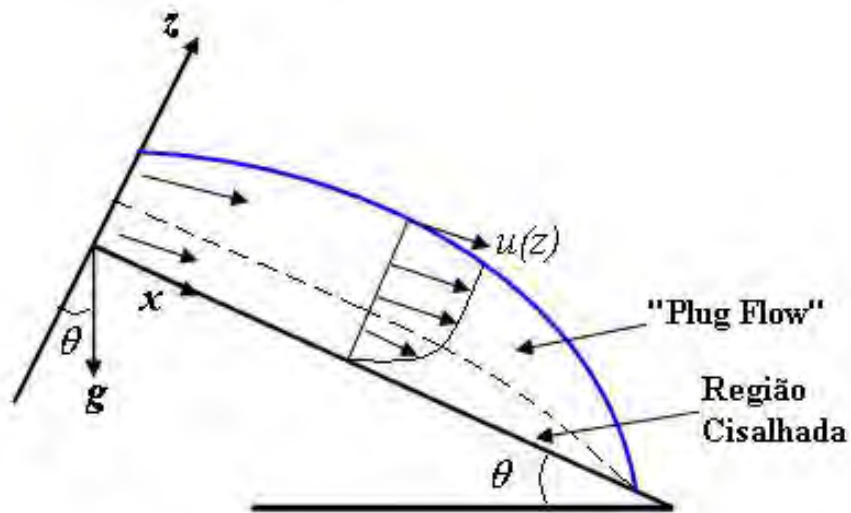


Figura 3.1: Representação do perfil de velocidade para um fluido de Herschel-Bulkley.

Com o objetivo de verificar numericamente o perfil de velocidade determinado, são considerados os seguintes grupos adimensionais:

$$Z = \frac{z}{z_0}, U = \frac{u(z)}{u(z_0)} \quad (3.35)$$

Substituindo as variáveis adimensionais dadas pelas relações (3.35), na equação (3.33), tem-se a seguinte equação para o perfil de velocidade na região cisalhada:

$$U(Z) = 1 - (1 - Z)^{n+1/n}, \text{ para } Z \leq 1 \quad (3.36)$$

Substituindo as relações (3.35) na equação (3.36), tem-se o perfil de velocidade na região não cisalhada (superfície livre) do escoamento, dada por:

$$U(Z) = 1, \text{ para } 1 \leq Z \leq \frac{G}{G-1} \quad (3.37)$$

Sendo:

$$G = \frac{\rho g h \sin \theta}{\tau_c} \quad (3.38)$$

Assim, pode-se analisar a distribuição do perfil de velocidades na Figura (3.2), através de resolução numérica, para diferentes valores de n (índice de escoamento do fluido).

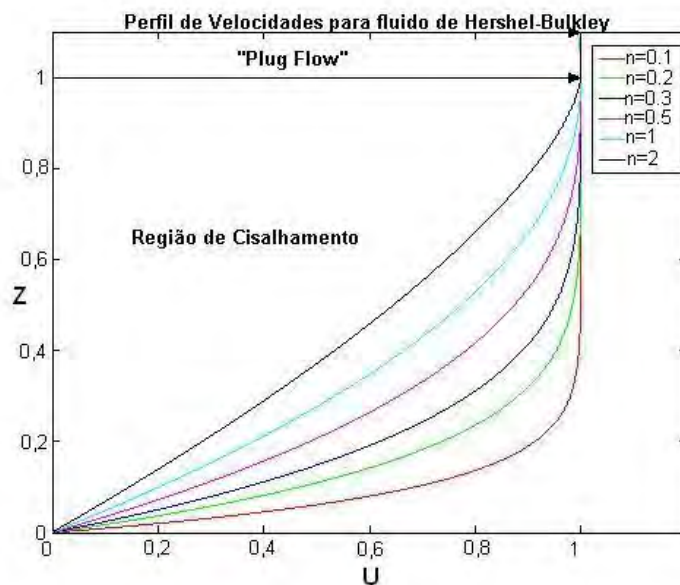


Figura 3.2: Perfil de velocidades para um fluido tipo Herschel-Bulkley

Pode-se observar que na região cisalhada (próxima ao fundo do canal), o perfil de velocidade é parabólico e na zona de *plug*, ou seja, na região não cisalhada, o perfil de velocidade é constante, conforme mostrado por (Huang; Garcia, 1998).

3.4.1 Velocidade Média em Relação à Profundidade do Escoamento.

Esse item tem como objetivo determinar a velocidade média em relação à profundidade do escoamento, ou seja, no intervalo $0 \leq z \leq h$, para adequar ao modelo matemático.

Sabendo que: $\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u dz$, então no intervalo $0 \leq z \leq h$, tem-se que:

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \left[\int_0^{z_0} u dz + \int_{z_0}^h u dz \right] \quad (3.39)$$

Após alguns desenvolvimentos matemáticos (Apêndice C), determina-se a velocidade média do escoamento:

$$\bar{u} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g \sin(\theta)}{K_n} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{h \rho g \sin(\theta) - \tau_c}{\rho g \sin(\theta)} \right)^{\frac{n+1}{n}} \left[1 - \frac{n}{2n+1} \left(\frac{h \rho g \sin(\theta) - \tau_c}{h \rho g \sin(\theta)} \right) \right] \quad (3.40)$$

3.5 Determinação da Tensão de Cisalhamento (Lei de Atrito)

Note-se que, para determinar a tensão de cisalhamento é necessário calcular a derivada da velocidade em relação a z . Como a velocidade na zona de *plug flow* é constante, basta calcular a derivada da velocidade na região cisalhada.

$$\frac{du}{dz} = - \left(\frac{n+1}{n} \right) \left(1 - \frac{z}{z_0} \right)^{\frac{1}{n}} \left(- \frac{1}{z_0} \right) \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{\rho g \sin(\theta) z_0^{n+1}}{K_n} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.41)$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{z_0} \left(1 - \frac{z}{z_0} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\rho g \sin(\theta) z_0^{n+1}}{K_n} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.42)$$

Note-se que, para $z = z_0$, a taxa de deformação do fluido é nula, o que geralmente ocorre na superfície livre (região não cisalhada) de escoamentos de lamas e detritos, concreto fresco e géis, que são fluidos que só se deformam com aplicação de uma tensão mínima de cisalhamento. Sendo assim, tem-se:

$$\frac{du}{dz} = 0 \quad \text{em} \quad z = z_0 \quad (3.43)$$

Para $z = 0$ (fundo do canal), a taxa de deformação do fluido é determinada da seguinte maneira:

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{z_0} \left(\frac{\rho g \sin(\theta) z_0^{n+1}}{K_n} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.44)$$

Para determinar a tensão de cisalhamento em função da velocidade médio do escoamento ($\bar{u}$), basta fazer a seguinte ponderação:

$$\frac{du}{dz} = \bar{u} r \quad (3.45)$$

$$\frac{1}{z_0} \left(\frac{\rho g \sin(\theta) z_0^{n+1}}{K_n} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g \sin(\theta) z_0^{n+1}}{K_n} \right)^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{n}{2n+1} \frac{z_0}{h} \right) r \quad (3.46)$$

$$r = \frac{(n+1)(2n+1)h}{(n(2n+1)h - n^2 z_0) z_0} \quad (3.47)$$

Portanto a tensão de cisalhamento pode ser expressa da seguinte forma:

$$\tau_p = \tau_c + K_n \left[\frac{(n+1)(2n+1)\bar{u} h}{(n(2n+1)h - n^2 z_0) z_0} \right]^n \quad (3.48)$$

Sabendo que $z_0 = h - \frac{\tau_c}{\rho g \sin \theta}$, tem-se:

$$\tau_p = \tau_c + K_n \left[\frac{\bar{u} (\rho g \sin \theta)^2 (n+1)(2n+1) h}{(h \rho g \sin \theta - \tau_c)(n(n+1)h \rho g \sin \theta + n^2 \tau_c)} \right]^n \quad (3.49)$$

Deve-se ressaltar que a tensão de cisalhamento encontrada neste trabalho é a mesma encontrada por (Huang; Garcia, 1998) ao estudarem escoamentos de lama, aplicando o modelo reológico de Herschel-Bulkley.

Conforme demonstrado, considerando-se fluidos não-Newtonianos, aplicando a proposta reológica de Herschel-Bulkley, o sistema de equações para escoamentos de águas rasas (*shallow water equations*) é determinado e representado pelas equações da conservação da massa e da quantidade de movimento.

Equação da conservação da massa:

$$\frac{\partial \bar{u} h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (3.50)$$

Equação da quantidade de movimento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u} h}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \bar{u}^2 h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-g \cos(\theta) \frac{h^2}{2} \right) + g h \sin(\theta) - \frac{\tau_p}{\rho} \\ - \frac{K_n}{\rho} \left[\frac{\bar{u} (\rho g \sin \theta)^2 (n+1)(2n+1) h}{(h \rho g \sin \theta - \tau_c)(n(n+1)h \rho g \sin \theta + n^2 \tau_c)} \right]^n \end{aligned} \quad (3.51)$$

Sendo:

h : profundidade do escoamento

$\bar{u}$: velocidade média na vertical

θ : declividade do canal

ρ : massa específica do fluido

μ : viscosidade do fluido

τ_c : tensão crítica (rigidez inicial)

$\alpha = \frac{\overline{u^2}}{\bar{u}^2}$ (coeficiente de distribuição de velocidade)

Considerando a tensão crítica nula ($\tau_c = 0$), ou seja, para uma proposta reológica de fluido com comportamento pseudoplástico (*Power Law*), o sistema de equações concebido neste trabalho reproduz o sistema produzido por (Ng; Mei, 1994).

3.6 Coeficiente de Distribuição de Velocidade

É possível determinar a expressão analítica que representa o coeficiente de distribuição de velocidade na vertical, para um escoamento laminar, permanente e uniforme de um fluido do tipo Herschel-Bulkley sobre um plano infinito.

A relação que permite efetuar esse cálculo é dada por:

$$\frac{\overline{u^2}}{\bar{u}^2} = \frac{1}{(\bar{u})^2} \frac{1}{h} \int_0^h u^2 dz \quad (3.52)$$

Após alguns desenvolvimentos matemáticos, conforme mostra o Apêndice D, tem-se a seguinte expressão para o coeficiente de distribuição de velocidade:

$$\alpha = \left(\frac{2n+1}{3n+2} \right) \frac{\left[2(n+1)^2 h \rho g \sin\theta + \tau_c n (4n+3) \right]}{\left[(n+1)^2 h \rho g \sin\theta + 2(n+1) n \tau_c + \frac{n^2 \tau_c^2}{h \rho g \sin\theta} \right]} \quad (3.53)$$

Nota-se que, se a tensão crítica for nula ($\tau_c = 0$), tem-se um fluido com comportamento reológico do tipo *Power Law*, e o coeficiente de distribuição de velocidade é o mesmo determinado por (Ng; Mei, 1994), conforme mostra a expressão a seguir:

$$\alpha = \frac{2(2n+1)}{(3n+2)} \quad (3.54)$$

Se a tensão crítica for nula ($\tau_c = 0$) e o índice de comportamento do fluido for igual a 1 ($n = 1$), tem-se um fluido Newtoniano e o coeficiente de distribuição de velocidade confere com a literatura.

$$\alpha = \frac{6}{5} \quad (3.55)$$

Para tensão crítica não nula e índice de comportamento do fluido igual a 1 ($n = 1$), tem-se o fluido de Bingham e o coeficiente de distribuição de velocidade confere com a literatura, conforme mostrado por (Maciel, 2001).

$$\alpha = \frac{3}{5} \frac{\left(8h + 7 \frac{\tau_c}{\rho g \sin \theta} \right)}{\left(4h + 4 \frac{\tau_c}{\rho g \sin \theta} + \frac{\tau_c^2}{h(\rho g \sin \theta)^2} \right)} \quad (3.56)$$

Sendo:

$$\frac{\tau_c}{\rho g \sin \theta} : \text{profundidade do fluido na região não cisalhada (plug flow)}$$

Note-se que, para um perfil de velocidades uniforme, ou seja, quando: $h = \frac{\tau_c}{\rho g \sin \theta}$, o coeficiente de distribuição de velocidades é igual a 1 ($\alpha = 1$), conforme mostrado por (Maciel, 2001).

3.7 Adimensionalização das Variáveis

O objetivo desse item é determinar os parâmetros que evidenciam o desenvolvimento de instabilidades, por isso torna-se necessário fazer uma adimensionalização das variáveis em escalas convenientes nas equações 3.50 e 3.51. A adimensionalização permite encontrar termos representativos para o problema estudado e viabiliza a interpretação. As escalas adotadas para a adimensionalização das variáveis são dadas por:

- escala de comprimento: $x = l_0 x^*$ e $(h, z) = h_0 (h^*, z^*)$

- escala de velocidades: $u = \bar{u}_0 u^*$

- escala de tempo: $t = \frac{l_0}{\bar{u}_0} t^*$

- número de Froude: $Fr = \frac{\bar{u}_0^2}{(gh_0)}$

Sendo:

$$l_0 = \frac{\bar{u}_0^2}{g \sin \theta} \text{ (comprimento de onda)}$$

$$\bar{u}_0 = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g \sin \theta}{K_n} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{h_0 \rho g \sin \theta - \tau_c}{\rho g \sin \theta} \right)^{\frac{n+1}{n}} \left[1 - \frac{n}{2n+1} \left(\frac{h_0 \rho g \sin \theta - \tau_c}{h_0 \rho g \sin \theta} \right) \right] \text{ (velocidade)}$$

O sub-índice $(_0)$ indica condições de escoamentos em regime uniforme e o asterisco $(^*)$ as variáveis adimensionais.

Introduzindo as variáveis adimensionais na equação da conservação da massa, tem-se a seguinte equação:

$$h_0 \frac{\bar{u}_0}{l_0} \frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \bar{u}_0 h_0 \frac{1}{l_0} \frac{\partial \bar{u}^* h^*}{\partial x^*} = 0 \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \bar{u}^* h^*}{\partial x^*} = 0 \quad (3.58)$$

As variáveis adimensionais são introduzidas na equação da quantidade de movimento, conforme segue.

1º) Introduzindo as variáveis adimensionais no primeiro membro da equação (3.61), tem-se:

$$\bar{u}_0 h_0 \frac{\bar{u}_0}{l_0} \frac{\partial \bar{u}^* h^*}{\partial t^*} + \bar{u}_0^2 h_0 \frac{1}{l_0} \frac{\partial \alpha \bar{u}^{*2} h^*}{\partial x^*} + \frac{1}{2} g h_0^2 \cos \theta \frac{1}{l_0} \frac{\partial h^{*2}}{\partial x^*} \quad (3.59)$$

Dividindo os termos de (3.59) por $\bar{u}_0^2$ e considerando $\beta = \frac{g h_0 \cos \theta}{\bar{u}_0^2}$, tem-se os seguintes termos para o primeiro membro da equação de quantidade de movimento:

$$\frac{\partial \bar{u}^* h^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \alpha \bar{u}^{*2} h^*}{\partial x^*} + \frac{1}{2} \frac{\partial \beta h^{*2}}{\partial x^*} \quad (3.60)$$

Inserindo as variáveis adimensionais no 2º membro da equação (3.51) tem-se o seguinte resultado:

$$g h_0 h^* \sin \theta - \frac{\tau_c}{\rho} - \frac{K_n}{\rho} \left[\frac{\bar{u} \bar{u}_0 (\rho g \sin \theta)^2 (n+1)(2n+1) h_0 h^*}{(h_0 h^* \rho g \sin \theta - \tau_c) (n(n+1) h_0 h^* \rho g \sin \theta + n^2 \tau_c)} \right]^n \quad (3.61)$$

Dividindo o resultado obtido em (3.61) pelo termo $(g h_0 \sin \theta)$ e inserindo a velocidade $\bar{u}_0$ (em condição de regime uniforme), tem-se:

$$\begin{aligned}
h^* - \frac{\tau_c}{\rho g h_0 \sin \theta} - \frac{K_n}{\rho g h_0 \sin \theta} & \left[\frac{\overline{u^*} (\rho g \sin \theta)^2}{(h_0 h^* \rho g \sin \theta - \tau_c)} \left(\frac{\rho g \sin \theta}{K_n} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{h_0 \rho g \sin \theta - \tau_c}{\rho g \sin \theta} \right)^{\frac{n+1}{n}} \times \right. \\
& \left. \times \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(1 - \frac{n}{2n+1} \left(\frac{h_0 \rho g \sin \theta - \tau_c}{h_0 \rho g \sin \theta} \right) \right) \left(\frac{(n+1)(2n+1) h^* h_0}{n(n+1) h^* h_0 \rho g \sin \theta + n^2 \tau_c} \right) \right]^n \quad (3.62)
\end{aligned}$$

Note que, através de procedimentos matemáticos, o índice de consistência do fluido (K_n) é eliminado, e a equação (3.62), torna-se:

$$\begin{aligned}
h^* - \frac{\tau_c}{\rho g h_0 \sin \theta} - \frac{1}{h_0} & \left[\frac{(\overline{u^*})^n (\rho g \sin \theta)^n}{(h_0 h^* \rho g \sin \theta - \tau_c)^n} \frac{(h_0 \rho g \sin \theta - \tau_c)^{n+1}}{\rho g \sin \theta} \right] \times \\
& \times \left[\left(\frac{(2n+1) h_0 \rho g \sin \theta - n h_0 \rho g \sin \theta + n \tau_c}{(2n+1) h_0 \rho g \sin \theta} \right)^n \left(\frac{(2n+1) h^* h_0}{(n+1) h^* h_0 \rho g \sin \theta + n \tau_c} \right)^n \right] \quad (3.63)
\end{aligned}$$

Rearranjando os termos da equação (3.63), tem-se:

$$\begin{aligned}
h^* - \frac{\tau_c}{\rho g h_0 \sin \theta} - & \left[\frac{(\overline{u^*})^n}{(h_0 h^* \rho g \sin \theta - \tau_c)^n} \frac{(h_0 \rho g \sin \theta - \tau_c)^{n+1}}{h_0 \rho g \sin \theta} \right] \times \\
& \times \left[\left((n+1) h_0 \rho g \sin \theta + n \tau_c \right) \left(\frac{h^*}{(n+1) h^* h_0 \rho g \sin \theta + n \tau_c} \right) \right]^n \quad (3.64)
\end{aligned}$$

Fazendo os cálculos necessários para simplificar a equação (3.74), tem-se a seguinte equação:

$$h^* - \frac{\tau_c}{\rho g h_0 \sin \theta} - \left(1 - \frac{\tau_c}{h_0 \rho g \sin \theta}\right) \times \left\{ \left[\frac{\bar{u}^* (h_0 \rho g \sin \theta - \tau_c)}{h_0 h^* \rho g \sin \theta - \tau_c} \right] \left[\frac{((n+1) h_0 \rho g \sin \theta + n \tau_c) h^*}{(n+1) h_0 h^* \rho g \sin \theta + n \tau_c} \right] \right\}^n \quad (3.65)$$

Portanto, através das equações (3.60) e (3.61), tem-se a equação da quantidade de movimento em variáveis adimensionais:

$$\frac{\partial \bar{u}^* h}{\partial t^*} + \frac{\partial \alpha \bar{u}^{*2} h}{\partial x^*} + \frac{1}{2} \frac{\partial \beta h^{*2}}{\partial x^*} = h^* - \frac{\tau_c}{h_0 \rho g \sin \theta} - \left(1 - \frac{\tau_c}{h_0 \rho g \sin \theta}\right) \times \left\{ \left[\frac{\bar{u}^* (h_0 \rho g \sin \theta - \tau_c)}{h_0 h^* \rho g \sin \theta - \tau_c} \right] \left[\frac{((n+1) h_0 \rho g \sin \theta + n \tau_c) h^*}{(n+1) h_0 h^* \rho g \sin \theta + n \tau_c} \right] \right\}^n \quad (3.66)$$

Aplicando a regra da cadeia no primeiro membro da equação (3.66), tem-se:

$$\begin{aligned} \alpha \bar{u}^* \left(\frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \frac{\partial (h^* \bar{u}^*)}{\partial x^*} \right) - \alpha \bar{u}^* \frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \bar{u}^* \frac{\partial h^*}{\partial t^*} + h^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t^*} + \alpha h^* \bar{u}^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial x^*} + \beta h^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} = \\ = h^* - \frac{\tau_c}{h_0 \rho g \sin \theta} - \left(1 - \frac{\tau_c}{h_0 \rho g \sin \theta}\right) \times \left\{ \left[\frac{\bar{u}^* (h_0 \rho g \sin \theta - \tau_c)}{h_0 h^* \rho g \sin \theta - \tau_c} \right] \left[\frac{((n+1) h_0 \rho g \sin \theta + n \tau_c) h^*}{(n+1) h_0 h^* \rho g \sin \theta + n \tau_c} \right] \right\}^n \end{aligned} \quad (3.67)$$

Usando a equação da conservação da massa, a equação da quantidade de movimento em (3.67), torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t^*} + \alpha \bar{u}^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial x^*} - (\alpha - 1) \frac{\bar{u}^*}{h^*} \frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \beta \frac{\partial h^*}{\partial x^*} = h^* - \frac{\tau_c}{h_0 \rho g \sin \theta} - \left(1 - \frac{\tau_c}{h_0 \rho g \sin \theta} \right) \times \\ \times \left\{ \left[\frac{\bar{u}^* (h_0 \rho g \sin \theta - \tau_c)}{h_0 h^* \rho g \sin \theta - \tau_c} \right] \left[\frac{((n+1) h_0 \rho g \sin \theta + n \tau_c) h^*}{(n+1) h_0 h^* \rho g \sin \theta + n \tau_c} \right] \right\}^n \end{aligned} \quad (3.68)$$

Omitindo os asteriscos (*) e as barras (-) após a adimensionalização, conforme demonstrado, tem-se o sistema de equações para o escoamento de fluido hiperconcentrado, em canal inclinado, a partir da proposta reológica de Herschel-Bulkley em variáveis adimensionais. Esse sistema é dado pela equação da conservação da massa e da quantidade de movimento.

Equação da conservação da massa:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} = 0 \quad (3.69)$$

Equação da quantidade de movimento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} - (\alpha - 1) \frac{u}{h} \frac{\partial h}{\partial t} + \beta \frac{\partial h}{\partial x} = \\ = 1 - C^* - (1 - C^*) \left\{ \left[\frac{u(1 - C^*)}{h - C^*} \right] \left[\frac{((n+1) + n C^*) h}{(n+1) h + n C^*} \right] \right\}^n \end{aligned} \quad (3.70)$$

Sendo:

$$C^* = \frac{\tau_c}{h_0 \rho g \sin \theta} \quad (3.71)$$

Introduzindo as variáveis adimensionais no coeficiente de distribuição de velocidade (α), tem-se:

$$\alpha = \frac{(2n+1)}{(3n+2)} \frac{\left[2(n+1)^2 h^* h_0 \rho g \sin\theta + \tau_c n (4n+3) \right]}{\left[(n+1)^2 h^* h_0 \rho g \sin\theta + 2(n+1)n\tau_c + \frac{n^2 \tau_c^2}{h^* h_0 \rho g \sin\theta} \right]} \quad (3.72)$$

Assim, neste capítulo foi estabelecido o sistema de equações que rege o escoamento laminar de um fluido hiperconcentrado, escoando em um canal inclinado, em variáveis adimensionais, a partir de uma proposta reológica mais generalizada, conforme mostra as equações (3.69) e (3.70).

A partir do modelo matemático concebido em variáveis adimensionais, objetiva-se determinar as condições para a formação de instabilidades. Essas condições podem ser estabelecidas a partir de uma análise de estabilidade linear, na qual será tratada no próximo capítulo.

CAPÍTULO 4

4. ANÁLISE DE ESTABILIDADE LINEAR

A teoria da estabilidade linear é uma ferramenta que tem permitido obter informações importantes, tais como a taxa de crescimento das instabilidades e a velocidade de propagação, em função do número de ondas.

Esse capítulo tem como objetivo colocar em evidência as condições necessárias para que ocorra a formação de instabilidades no escoamento laminar e uniforme de um fluido hiperconcentrado, em um canal inclinado.

Para estabelecer a análise de estabilidade linear, uma perturbação infinitesimal será adicionada às equações da conservação da massa e da quantidade de movimento.

Sendo:

$$h = 1 + H(x, t) \tag{4.1}$$

$$u = 1 + V(x, t) \tag{4.2}$$

Considerando $H \ll 1$ e $V \ll 1$, as equações (3.69) e (3.70) serão linearizadas para a obtenção de uma equação em H .

4.1 Linearização do Sistema de Equações

Substituindo as relações (4.1) e (4.2) no modelo matemático determinado em variáveis adimensionais, dado pelas equações (3.69) e (3.70), tem-se um novo sistema de equações em função das variáveis V e H .

Equação da Conservação da Massa:

$$\frac{\partial(1+H)}{\partial t} + (1+H) \frac{\partial(1+V)}{\partial x} + (1+V) \frac{\partial(1+H)}{\partial x} = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial t} \quad (4.4)$$

Equação da Quantidade de Movimento:

$$\begin{aligned} (1+H) \frac{\partial V}{\partial t} + (1+V) \frac{\partial H}{\partial t} + 2\alpha(1+H)(1+V) \frac{\partial V}{\partial x} + \alpha(1+V)^2 \frac{\partial H}{\partial x} + \beta(1+H) \frac{\partial H}{\partial x} = \\ = (1+H) - C^* - (1-C^*) \left\{ \left[\frac{u(1-C^*)}{1+H-C^*} \right] \left[\frac{((n+1)+nC^*)(1+H)}{(n+1)(1+H)+nC^*} \right] \right\}^n \end{aligned} \quad (4.5)$$

O conceito de onda envolve as noções de espaço e tempo e deve satisfazer uma equação, a equação de onda, na qual o atributo essencial é exibir o movimento de propagação. Para a determinação dessa equação, segue-se os seguintes passos:

1º) Deriva-se a equação (4.4), em relação a x , obtendo a seguinte relação:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\partial H}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad (4.6)$$

2º) Deriva-se a equação (4.4), em relação a t e obtém-se a seguinte igualdade:

$$\frac{\partial V}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \frac{\partial H}{\partial x \partial t} \quad (4.7)$$

3º) Deriva-se a equação (4.5) em relação a x e obtém-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial V}{\partial x \partial t} + \frac{\partial H}{\partial x \partial t} + 2\alpha \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \\
 & = \frac{\partial H}{\partial x} - (1 - C^*) n \left\{ \left[\frac{(1+V)(1-C^*)}{1-H-C^*} \right] \left[\frac{((n+1)+nC^*)(1+H)}{((n+1)(1+H)+nC^*)} \right] \right\}^{n-1} \times \\
 & \quad \times \left\{ \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} (1+V)(1+H-C^*) - \frac{\partial H}{\partial x} (1+V)(1-C^*) \right) \times \right. \right. \\
 & \quad \times \frac{1}{(1+H-C^*)^2} \left(\frac{(n+1+nC^*)(1+H)}{((n+1)(1+H)+nC^*)} \right) \left. \right] + \\
 & \quad + \left[\left(\frac{(1+V)(1-C^*)}{1+H-C^*} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial x} (n+1+nC^*) ((n+1)(1+H)+nC^*) - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{\partial H}{\partial x} (n+1+nC^*) ((n+1)(1+H)+nC^*) \right) \right] \frac{1}{((n+1)(1+H)+nC^*)} \left. \right\} \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

4º) Substituindo as equações (4.4), (4.6) e (4.7) em (4.8), tem-se uma equação diferencial parcial de segunda ordem, dada por:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + (\alpha - \beta) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial H}{\partial x \partial t} + (2n+1) \frac{\partial H}{\partial x} + n \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (4.9)$$

O problema de ondas superficiais pela teoria linear é a resolução da equação de Laplace, utilizando o método de separação de variáveis e aplicando as condições de contorno cinemática no fundo do canal e na superfície livre. De forma análoga, considera-se uma solução periódica para a equação (4.9), dada pela seguinte relação:

$$H = \hat{H}e^{i(kx - \omega t)} \quad (4.10)$$

Sendo:

k : número de ondas;

$\hat{H}$: constante;

$\omega = \omega_r + i\omega_i$ (frequência)

Substituindo a relação (4.10) na equação (4.9), pode-se determinar a equação da dispersão, que relaciona o número de ondas com a taxa de crescimento e a velocidade de propagação dessas ondas. Essa equação é dada por:

$$\omega^2 - (2\alpha k - ni)\omega + (\alpha - \beta)k^2 - (2n+1)ki = 0 \quad (4.11)$$

Resolvendo a equação (4.11), tem-se:

$$\omega = \frac{1}{2} \left[2\alpha k - ni \pm \sqrt{a + bi} \right] \quad (4.12)$$

Sendo:

$$a = 4(\alpha^2 - \alpha + \beta)k^2 - n^2 \quad (4.13)$$

$$b = 4(2n+1 - \alpha n)k \quad (4.14)$$

Por definição, uma onda, ao se propagar percorrerá a distância de um comprimento de onda (λ) em um período T . Lembrando que $\omega = \frac{2\pi}{T}$ é a frequência, e $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ é o número de ondas, a velocidade de propagação da onda ou velocidade de fase é dada por:

$$U = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow U = \frac{\omega}{k} \quad (4.15)$$

Portanto, separando a parte real da parte imaginária em (4.12), pode-se determinar analiticamente as expressões que definem a taxa de crescimento das perturbações e a velocidade de propagação, em função do número de ondas, tais relações são dadas por:

$$I(\omega) = \frac{1}{2} \left[-n \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + b^2} - a \right)} \right] \quad (4.16)$$

$$\Re(\omega) = \frac{1}{2} \left[2\alpha k \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + b^2} + a \right)} \right] \quad (4.17)$$

onde:

$I(\omega)$: taxa média de crescimento das instabilidades;

$\frac{\Re(\omega)}{k}$: velocidade de fase ou velocidade de propagação da onda.

4.2 Condições para Formação de Instabilidades

Sabendo que $0 < n \leq 1$, $0 < \alpha \leq 1.2$, tem-se $b > 0$, para $k \neq 0$. Para $I(\omega) < 0$, $I(\omega)^-$ tende a se estabilizar.

Para determinar uma condição de formação de instabilidade para o escoamento uniforme, deve-se considerar que $I(\omega) > 0$.

Contudo, $I(\omega) > 0$, se e somente se:

$$-\frac{1}{2}n < \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + b^2} \right)} - a \quad (4.18)$$

Substituindo as relações (4.13) e (4.14) na equação (4.18), tem-se a seguinte relação:

$$\alpha^2 - \alpha + \beta < \frac{(2n+1-n\alpha)^2}{n^2} \quad (4.19)$$

Substituindo a relação (4.1) na equação (3.82), tem-se o seguinte resultado para o coeficiente de distribuição de velocidade (α):

$$\alpha = \frac{(2n+1)}{(3n+2)} \frac{\left[2(n+1)^2 + C^* n (4n+3) \right]}{\left[(n+1)^2 + 2nC^*(n+1) + n^2 C^{*2} \right]} \quad (4.20)$$

Substituindo a equação (4.20) na relação (4.19), tem-se que o escoamento torna-se instável se:

$$\beta < \beta_n \quad (4.21)$$

$$\text{onde: } \beta_n = \frac{2n+1}{n^2} \left\{ (2n+1) - \frac{\left[2(n+1)^2 + (4n+3)nC^* \right]}{\left[(n+1)^2 + 2n(n+1)C^* + n^2 C^{*2} \right]} \right\}$$

Para um fluido com comportamento reológico do tipo *Power Law* $C^* = 0$, tem-se o seguinte critério de instabilidade:

$$\beta < \beta_n \quad (4.22)$$

$$\text{onde: } \beta_n = \frac{2n+1}{n^2}$$

Essa relação de instabilidade está em consonância com a literatura, conforme mostrado por (Ng e Mei, 1994).

Para um fluido Binghamiano, a relação de instabilidade é dada por:

$$\beta < \beta_n \quad (4.23)$$

$$\text{onde: } \beta_n = 3 \left[3 - \left(\frac{8 + 7C^*}{(C^* + 2)^2} \right) \right]$$

Para a reologia Newtoniana, tem-se:

$$\beta < 3 \quad (4.24)$$

Conforme mostrado por (Prokopiou *et al.*, 1991) ao realizar análise uma análise de estabilidade linear para escoamento de fluido Newtoniano ($n = 1$), considerando que o perfil de velocidade do escoamento era parabólico.

4.3 Taxa de Crescimento das Instabilidades

O objetivo desse item é mostrar numericamente a taxa de crescimento das instabilidades em função do número de ondas para escoamentos de fluidos hiperconcentrados (Herschel-Bulkey, Bingham e *Power Law*) e também Newtoniano.

- Taxa de crescimento da perturbação para fluido de *Herschell-Bulkley*

A Figura (4.1) mostra numericamente a taxa de crescimento das perturbações $(I(\omega)^+)$ em função do número de ondas (k), para vários valores de β . Fixando o valor do parâmetro $C^* = 0.1$, pode-se verificar a influência do índice de escoamento do fluido (n).

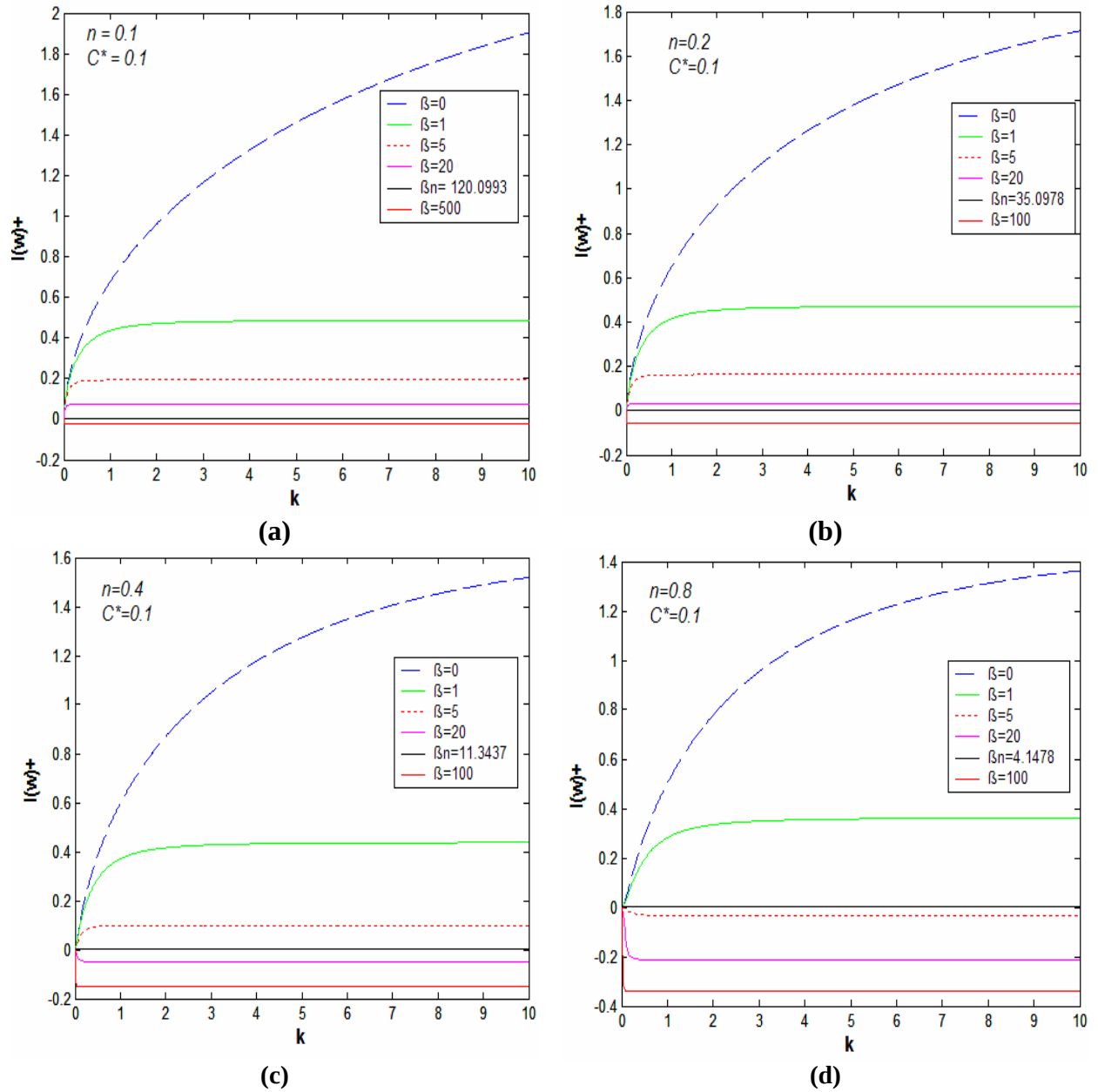


Figura 4.1: Taxa de crescimento das perturbações para um fluido do tipo *Herschel-Bulkley*.

- Taxa de crescimento das perturbações para o modelo reológico do tipo *Power Law*.

A Figura (4.2) mostra numericamente a taxa de crescimento das perturbações $I(\omega)^+$ em função do número de ondas (k), para vários valores de β . Verifica-se a influência do índice de escoamento do fluido (n).

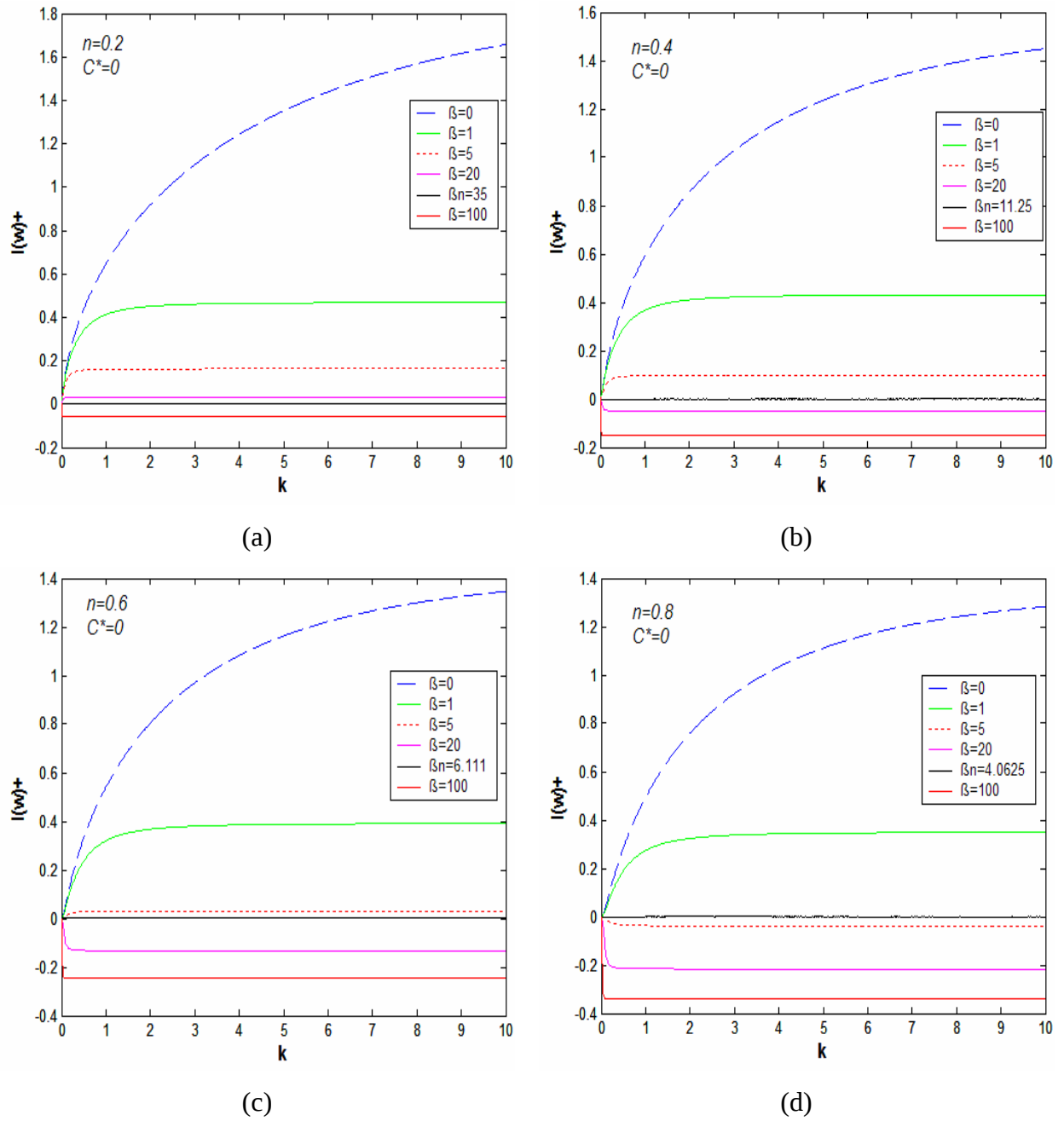


Figura 4.2: Taxa de crescimento das perturbações para um fluido do tipo *Power Law*

- Taxa de crescimento das perturbações para fluido Binghamiano e Newtoniano.

As Figuras 4.3a e 4.3b mostram a taxa de crescimento das perturbações para escoamentos de fluido Binghamiano e fluido Newtoniano, respectivamente.

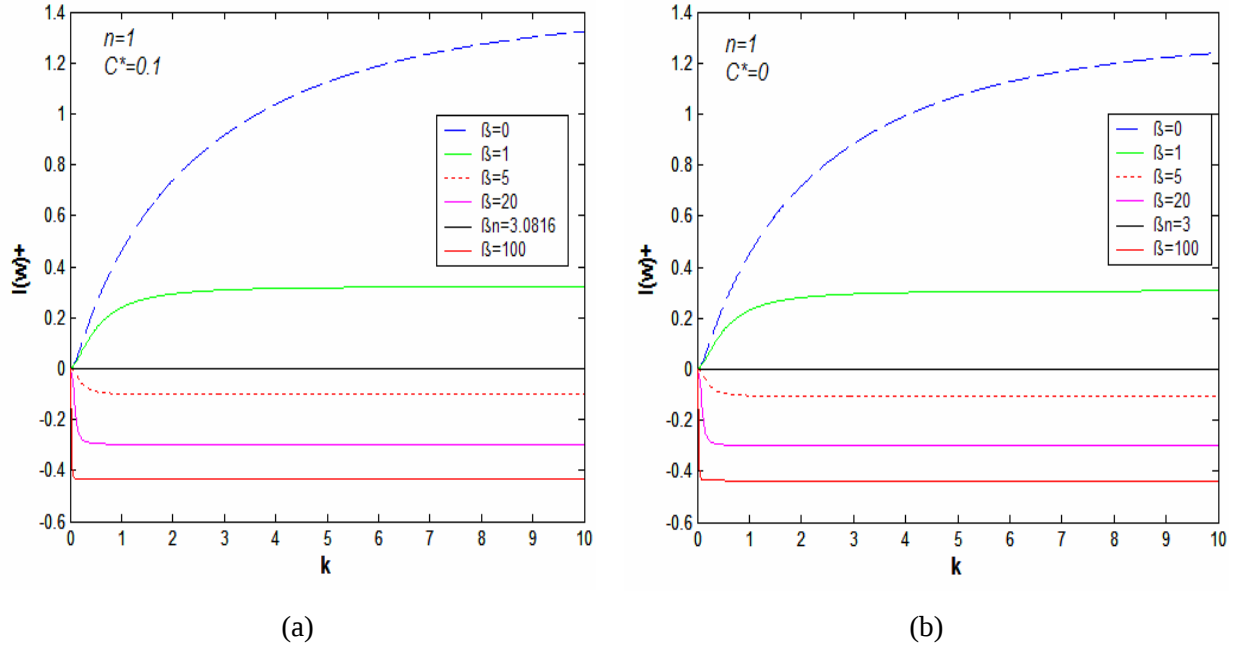


Figura 4.3: Taxa de crescimento das perturbações para um fluido Binghamiano (a) e Newtoniano (b).

Comentários:

Através das Figuras (4.1), (4.2) e (4.3) observa-se que as curvas neutras da estabilidade ocorrem quando $k = 0$ e $\beta = \beta_n$ e que para todos os valores de k o ponto inicial da instabilidade depende n e C^* . Se $\beta > \beta_n$, todas as perturbações com $k \neq 0$ são menores do que zero, conforme mostrado nas Figuras (4.1), (4.2) e (4.3).

É importante ressaltar que para $0 < n \leq 1$, quanto maior for o valor de n , menor será o valor de β_n , e menor será a taxa de crescimentos das instabilidades.

Comparando as Figuras (4.1) e (4.2), observa-se que para um fluido de Herschel-Bulkley, com $C^* = 0.1$, o valor de β_n e o comportamento da função são semelhantes ao que foi encontrado por (Ng e Mei, 1994), quando utilizou o modelo reológico do tipo *Power Law* ($C^* = 0$).

Observando as Figuras (4.3a) e (4.3b), nota-se a semelhança no critério de estabilidade entre um fluido de Bingham e um fluido Newtoniano, no qual $\beta_n = 3$, conforme mostra a literatura.

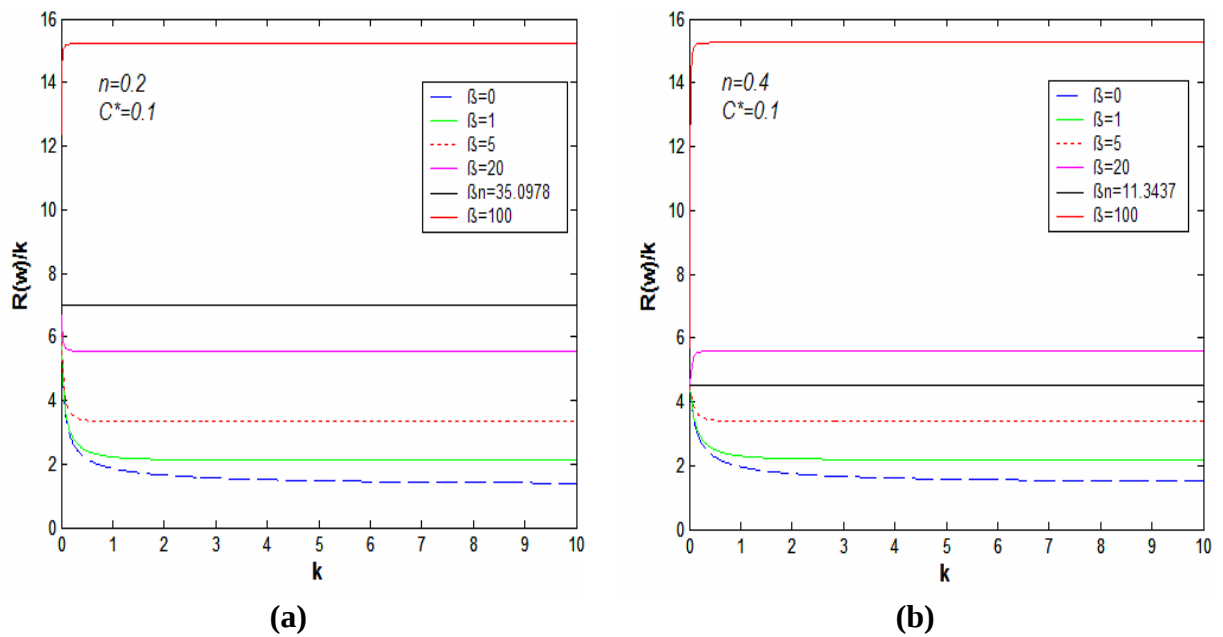
A análise de estabilidade linear do escoamento uniforme mostra que a taxa de crescimento das instabilidades aumenta com o número de ondas. Porém é insuficiente para sugerir um comprimento de onda para a *Roll Wave*.

4.4 Velocidade de Propagação das Instabilidades

Através da equação (4.17) pode-se determinar a velocidade de propagação das perturbações, para vários valores de β , considerando o modelo de Herschel-Bulkley. De acordo com os valores utilizados para os parâmetros (n e C^*), determina-se também a velocidade de propagação em outros modelos reológicos (*Power Law*, Binghamiano e Newtoniano).

- Velocidade de propagação das perturbações para um fluido do tipo Herschel-Bulkley

A Figura 4.4, mostra a velocidade de propagação em função de k (nº de ondas), para diferentes valores de β . Fixando o valor do parâmetro (C^*), verifica-se a influência do índice de escoamento do fluido (n).



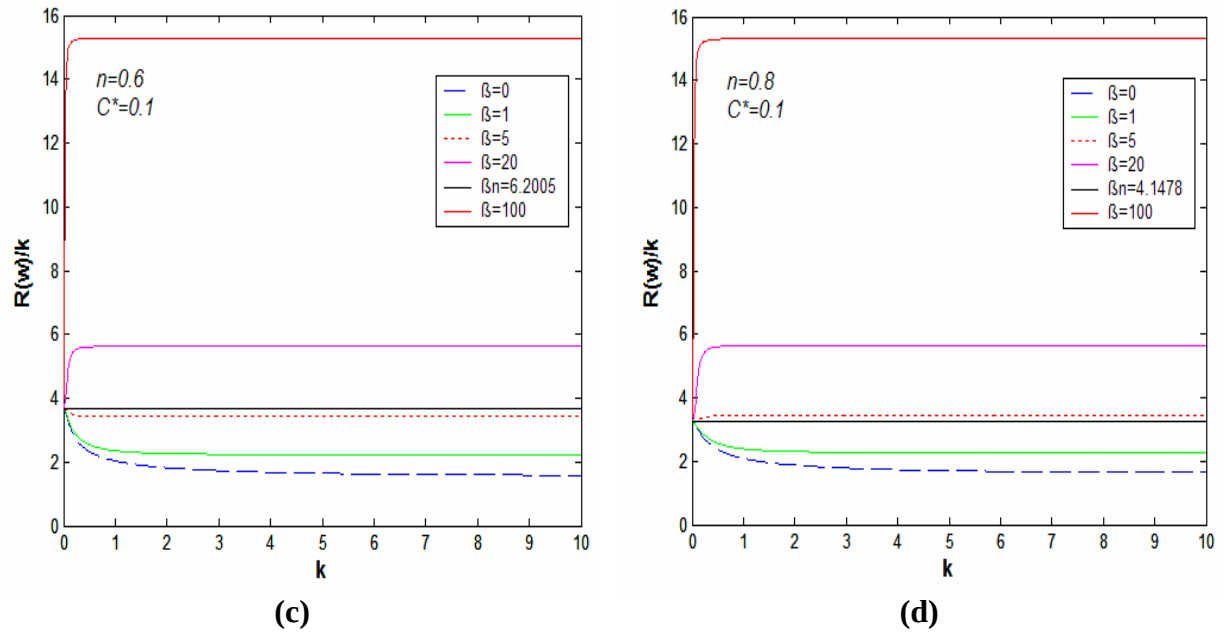
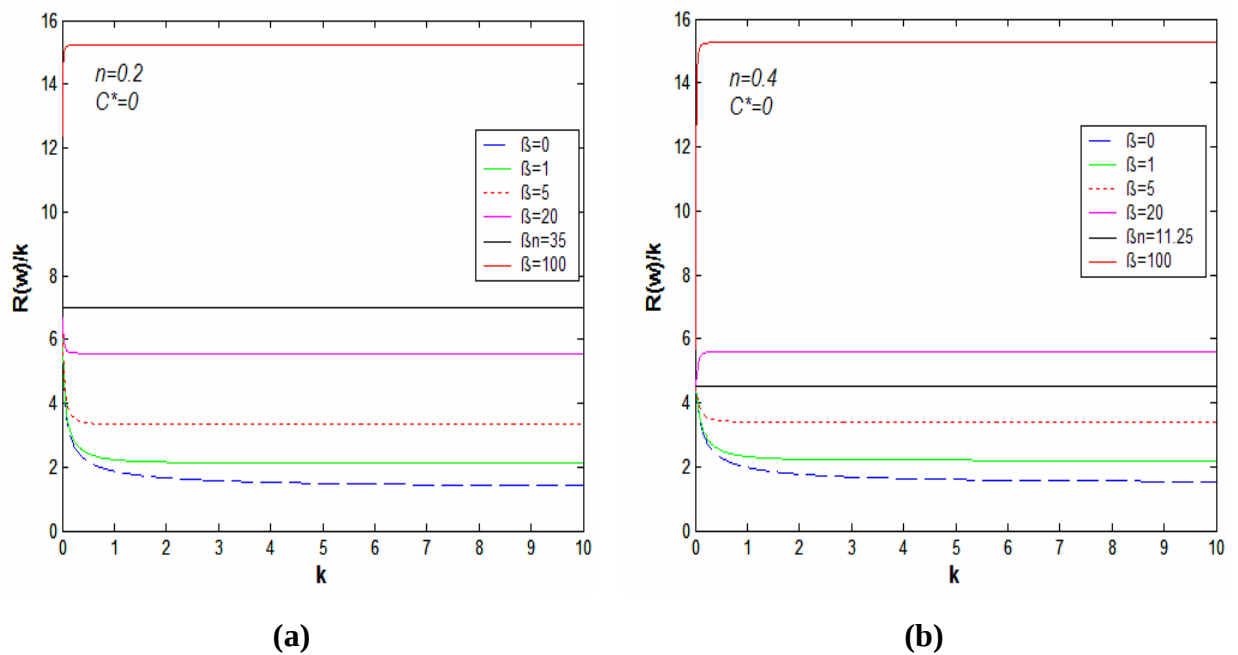
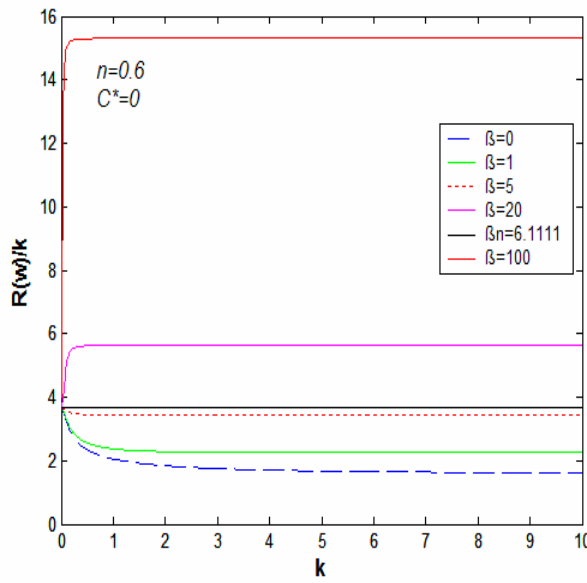


Figura 4.4: Velocidade de propagação das perturbações para fluido de Herschel-Bulkley

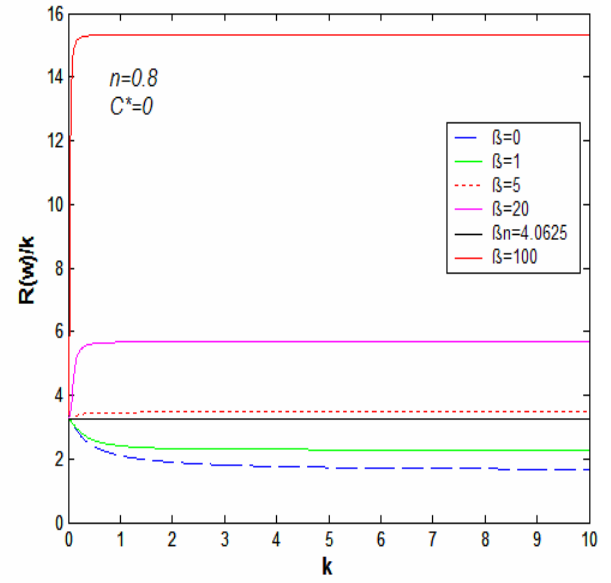
- Velocidade de propagação das perturbações para um fluido do tipo *Power law*.

A Figura (4.5) mostra numericamente a velocidade de propagação em função do número de ondas (k), para vários valores β . Verifica-se a influência o índice de escoamento do fluido (n).





(c)

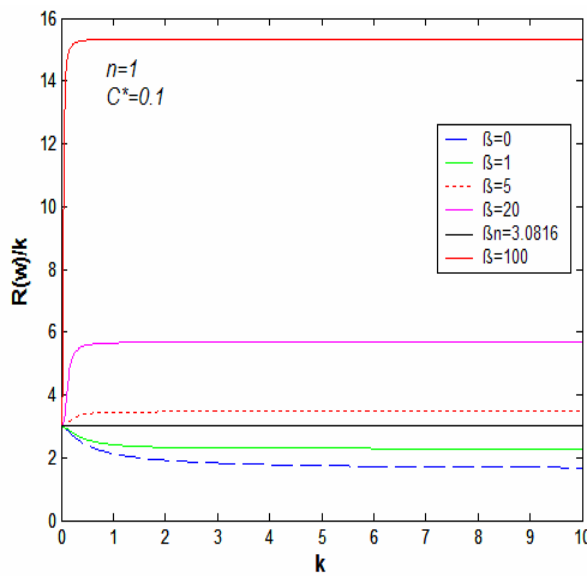


(d)

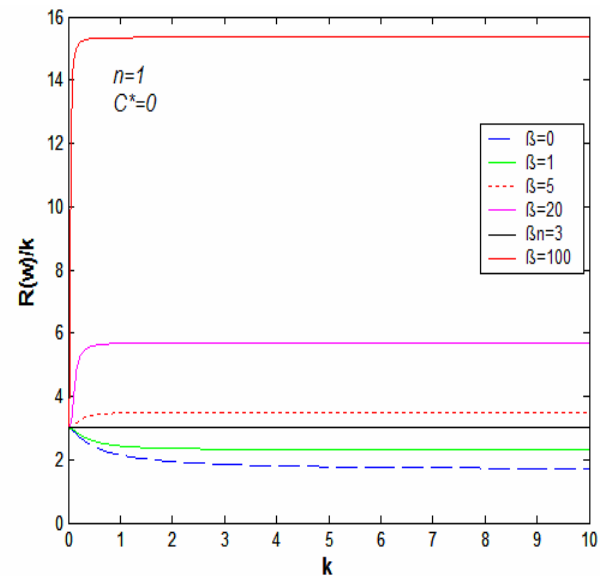
Figura 4.5: Velocidade de propagação das perturbações para um fluido do tipo *Power Law*.

- Velocidade de propagação dos distúrbios para fluido Binghamiano e Newtoniano.

As Figuras 4.6a e 4.6b mostra a taxa de crescimento das perturbações para escoamentos de fluido Binghamiano e fluido Newtoniano, respectivamente.



(a)



(b)

Figura 4.6: Velocidade de propagação das perturbações para fluido Binghamiano e Newtoniano.

Comentários:

Comparando os resultados através das Figuras (4.4), (4.5) e (4.6), pode-se observar que para os diferentes tipos de modelos reológicos, ao aumentar o valor de β , ou seja, diminuindo o número de Froude (Fr), ocorre um aumento significativo na velocidade de propagação das instabilidades, ou seja, ocorre um aumento do efeito gravitacional e uma diminuição do efeito inercial. Nota-se, que esse resultado está em concordância com a definição do número de Froude.

Observando as Figura (4.4) e (4.5) nota-se que o comportamento da função que define a velocidade de propagação das perturbações está em consonância com os resultados encontrados por (Ng; Mei, 1994), quando utilizou o modelo reológico do tipo *Power Law* ($C^* = 0$).

Neste capítulo, através de uma análise de estabilidade linear, foram determinadas as condições para formação de instabilidades no escoamento estudado, tanto para fluido hiperconcentrado quanto para fluido Newtoniano.

No capítulo 5, será determinada uma equação geral para geração de tais instabilidades, impondo uma teoria analítica de *Roll Wave* permanente, na qual, serão utilizadas as condições de formação de instabilidades, obtidas nesse capítulo, para verificar se ocorre a geração do fenômeno estudado.

5. EQUAÇÃO DAS *ROLL WAVES*

Para a determinação de um modelo global que verifica a formação de *Roll Waves*, o sistema de equações para escoamento de águas rasas (*shallow water equations*), em variáveis adimensionais, determinado no Capítulo 3, pelas equações (3.79) e (3.80), deverá ser reescrito em um sistema móvel de coordenadas, na qual, o método utilizado descreve o movimento de uma única onda no sistema de coordenadas.

Por hipótese, tem-se:

$x' = \zeta - Ut$, sendo que U representa uma velocidade constante de propagação (celeridade).

A partir dessa hipótese, pode-se estabelecer as seguintes relações:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = -U \frac{\partial u}{\partial x'} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial \zeta} = 1 \frac{\partial u}{\partial x'} \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = -U \frac{\partial h}{\partial x'} \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial \zeta} = 1 \frac{\partial h}{\partial x'} \quad (5.4)$$

Assim, a equação da conservação da massa, torna-se:

$$\frac{\partial h}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial \zeta} = 0 \quad (5.5)$$

Derivando o sistema móvel de coordenadas e aplicando na equação (5.5), tem-se a seguinte equação para a conservação da massa:

$$\frac{\partial h}{\partial x'}(-U) + \frac{\partial(hu)}{\partial x'} = 0 \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'}(-U h + hu) = 0 \quad (5.7)$$

$$h(u - U) = c \text{ (constante)} \quad (5.8)$$

Note-se que, em regime permanente, pode-se considerar que: $(h, u) = (1, 1)$ é solução da equação, portanto a equação da conservação da massa fica da seguinte forma:

$$h(u - U) = 1 - U \quad (5.9)$$

A equação da quantidade de movimento torna-se:

$$\begin{aligned} -U \frac{\partial u}{\partial x'} + \alpha u \frac{\partial h}{\partial x'} + (\alpha - 1) U \frac{u}{h} \frac{\partial h}{\partial x'} + \beta \frac{\partial h}{\partial x'} = 1 - \frac{\tau_c}{h \rho g \sin \theta} - \frac{1}{h} \left(1 - \frac{\tau_c}{h_0 \rho g \sin \theta} \right) \times \\ \times \left\{ \left[\frac{u(h_0 \rho g \sin \theta - \tau_c)}{h_0 \rho g \sin \theta - \tau_c} \right] \left[\frac{((n+1)h_0 \rho g \sin \theta + n \tau_c)h}{(n+1)h_0 h \rho g \sin \theta + n \tau_c} \right] \right\}^n \end{aligned} \quad (5.10)$$

Substituindo a equação da conservação da massa na equação de quantidade de movimento e omitindo o sobrescrito (') do sistema de equações, a variável u é eliminada, assim, tem-se a seguinte equação:

$$\left((\alpha-1)U^2 - \frac{\alpha(1-U)^2}{h^2} + \beta h \right) \frac{\partial h}{\partial z} = h - \frac{\tau_c}{h_0 \rho g \sin \theta} - \left(1 - \frac{\tau_c}{h_0 \rho g \sin \theta} \right) \times$$

$$\times \left\{ \left[\frac{(1+U(h-1))(h_0 \rho g \sin \theta - \tau_c)}{h h_0 \rho g \sin \theta - \tau_c} \right] \left[\frac{(n+1)h_0 \rho g \sin \theta + n \tau_c}{(n+1)h_0 h \rho g \sin \theta + n \tau_c} \right] \right\}^n \quad (5.11)$$

Portanto, rearranjando os termos da equação (5.11), obtém-se uma equação diferencial de primeira ordem, dada por:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h - C^* - (1 - C^*) \left\{ \left[\frac{(1+U(h-1))(1 - C^*)}{(h - C^*)} \right] \left[\frac{(n+1) + n C^*}{(n+1)h + n C^*} \right] \right\}^n}{\left((\alpha-1)U^2 - \frac{\alpha(1-U)^2}{h^2} + \beta h \right)} \quad (5.12)$$

Na qual:

$$\beta = \frac{gh_0 \cos \theta}{\bar{u}_0^2} = \frac{1}{Fr^2} \quad (5.13)$$

$$C^* = \frac{\tau_c}{h_0 \rho g \sin \theta} \quad (5.14)$$

$$\alpha = \frac{(2n+1)}{(3n+2)} \frac{\left[2(n+1)^2 h + C^* (4n+3)n \right]}{\left[(n+1)^2 h + 2(n+1)n C^* + n^2 (C^*)^2 / h \right]} \quad (5.15)$$

O modelo matemático determinado para verificar a formação de *Roll Waves* é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, não linear, que apresenta singularidades. Portanto, tais ondas serão tratadas como ondas de choque, conforme os apontamentos da literatura, Dressler (1949), Ng e Nei (1994), Noble (2001), entre outros.

É importante ressaltar que o modelo matemático proposto neste trabalho está em concordância com o modelo obtido por Ng e Mei (1994), utilizando o modelo reológico do tipo *Power Law* ($C^* = 0$).

5.1 Ondas de Choque e Descontinuidades

O termo onda de choque é reservado na literatura aos casos de descontinuidades evolutivas, podendo ser caracterizada por perturbações em propagação, onde as propriedades como a velocidade, variam de maneira abrupta e quase descontínua, apresentando um perfil de onda bem demarcado com um “pico para baixo”. Estas ondas podem ocorrer tanto em meios físicos, propagando de maneira mecânica, quanto em campos elétricos e magnéticos.

Essas ondas são bastante comuns na natureza. Para ilustrar este fato, tem-se como exemplo, a Figura 1.1 do Capítulo 1.

5.2 Perfil de uma *Roll Wave*

Matematicamente, a *Roll Wave* é definida como uma onda cinemática, periódica e com velocidade constante, na qual a velocidade da onda deve ser maior do que a velocidade do fluido.

No comprimento de cada onda, existe uma transição de escoamento supercrítico ($Fr > 1$) para escoamento subcrítico ($Fr < 1$). Dressler (1949), mostrou que existe uma seção crítica, no sistema móvel de coordenadas, desde que:

$$(Fr)^2 = \frac{(\bar{u} - U)^2}{gh} = 1 \quad (5.16)$$

Na qual: $\bar{u}$ é a velocidade do escoamento e U é a velocidade de propagação da onda.

Devido a essa transição de escoamento, a formação de *Roll Waves* consiste de um perfil contínuo entre choques sucessivos aumentando no sentido do declive do canal, assim, através da equação (5.12), procura-se soluções do tipo:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{F(h)}{G(h)} > 0 \quad (5.17)$$

A Figura (5.1) mostra o perfil de uma *Roll Wave* e as regiões de transições do escoamento

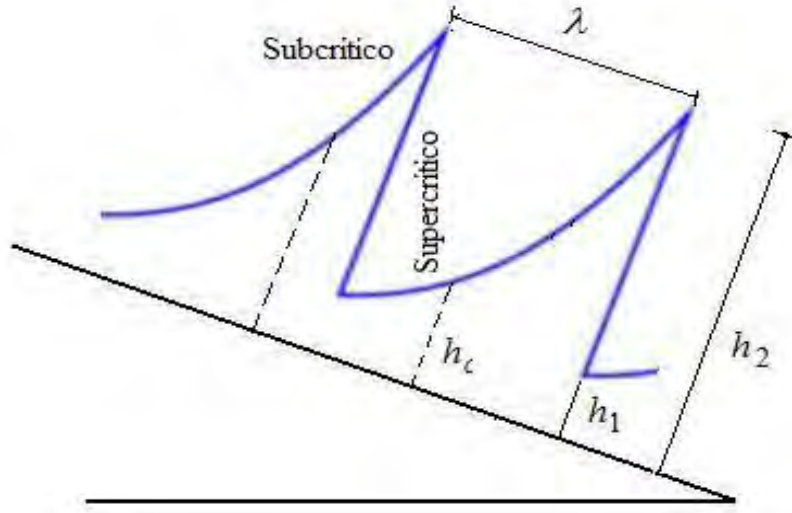


Figura 5.1: Perfil de uma *Roll Wave*.

Observando a Figura (5.1), pode-se definir λ como sendo o comprimento da *Roll Wave*, h_1 a altura antes do choque, h_c a altura crítica do escoamento e h_2 a altura depois do choque.

A partir da equação (5.12), tem-se:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h - C - (1 - C) \left\{ \left[\frac{(1 + U(h-1))(1 - C^*)}{(h - C^*)} \right] \left[\frac{(n+1) + nC^*}{(n+1)h + nC^*} \right] \right\}^n}{\left[(\alpha - 1)U^2 - \alpha(1 - U)^2 h^{-2} + \beta h \right]} \equiv \frac{F(h)}{G(h)} \quad (5.18)$$

Em consequência, tem-se:

$$h(x) = \int \frac{F(h)}{G(h)} dx \quad (5.19)$$

A integração numérica da equação (5.18) determina $h(x)$, mostrando o perfil das *Roll Waves*. Além disso, pode-se definir o comprimento da onda, da seguinte forma:

$$\lambda = \int_{h_1}^{h_2} \frac{G(h)}{F(h)} dh \quad (5.20)$$

É necessário verificar as condições de choque, para determinar os limites de integração (h_1 e h_2).

5.2.1 Condições de Choque

Esse item tem como objetivo determinar a profundidade do escoamento depois do choque. Para isso é necessário estabelecer algumas condições.

Sabe-se que as equações para a onda de choque admitindo um salto nos parâmetros do escoamento foram estabelecidas em 1870 por Rankine. Destas equações pode-se determinar as relações entre os parâmetros imediatamente antes e após o choque, as chamadas condições de Rankine-Hugoniot (SHAPIRO, 1953). Essas condições são derivadas da equação da conservação da massa e da equação da quantidade de movimento. Para o problema em questão, as condições são dadas por:

$$U [h]_1^2 = [\bar{u} h]_1^2 \quad (5.21)$$

$$U [\bar{u} h]_1^2 = \left[\alpha \bar{u}^2 h + \frac{1}{2} \beta h^2 \right]_1^2 \quad (5.22)$$

Sendo que: $[h]_1^2 = h_2 - h_1$ é o salto da propriedade.

Usando a relação (5.9) e eliminando $\bar{u}$ da equação (5.21), determina-se a relação entre as duas alturas h_1 e h_2 .

$$\alpha(1-U)^2 - h_1 h_2 U^2 (\alpha-1) - \frac{1}{2} \beta h_1^2 h_2 - \frac{1}{2} \beta h_1 h_2^2 = 0 \quad (5.23)$$

Resolvendo para h_2 com $\beta > 0$, segue:

$$h_2 = \left\{ \left[\frac{h_1}{2} + (\alpha-1) \frac{U^2}{\beta} \right]^2 + \frac{2\alpha(1-U)^2}{h_1 \beta} \right\}^{\frac{1}{2}} - \frac{h_1}{2} - (\alpha-1) \frac{U^2}{\beta} \quad (5.24)$$

Sendo: $\beta = \frac{1}{Fr^2}$

5.3 Velocidade de Propagação da *Roll Wave*

Ng e Mei (1994), fazendo o estudo de *Roll Waves*, para a reologia do tipo *Power Law*, mostraram que na seção crítica, o denominador e o numerador da equação da *Roll Wave* são nulos.

Dessa forma, considerando a equação (5.12), pode-se determinar analiticamente a velocidade de propagação da *Roll Wave* em um ponto crítico, sendo que h_c deve pertencer ao intervalo (h_1, h_2) , ou seja, $h_1 < h_c < h_2$.

Através das equações (5.8) e (5.9), tem-se o valor da constante c :

$$c = 1 - U \quad (5.25)$$

Assim $F(h_c)$ e $G(h_c)$ podem ser expressas da seguinte maneira, respectivamente:

$$F(h_c) = h_c - C^* - (1 - C^*) \left\{ \left[\frac{(c + U h_c)(1 - C^*)}{(h_c - C^*)} \right] \left[\frac{(n+1) + n C^*}{(n+1) h_c + n C^*} \right] \right\}^n = 0 \quad (5.26)$$

$$G(h_c) = \left((\alpha - 1)U^2 - \frac{\alpha c^2}{h_c^2} + \beta h_c \right) = 0 \quad (5.27)$$

Considerando $F(h_c) = 0$, pode-se determinar a velocidade de propagação em função de h_c :

$$U = \left(\frac{h_c - C^*}{1 - C^*} \right)^{\frac{1+n}{n}} \left[\frac{(n+1)h_c + nC^*}{(n+1) + nC^*} \right] \frac{1}{h_c} - \frac{c}{h_c} \quad (5.28)$$

Substituindo a equação (5.28) em (5.27) e considerando que a velocidade de propagação da *Roll Wave* deve maior que zero ($U > 0$) determina-se o valor da constante c , da seguinte forma:

$$c = - \left(\frac{h_c - C^*}{1 - C^*} \right)^{\frac{1+n}{n}} \left[\frac{(n+1)h_c + nC^*}{(n+1) + nC^*} \right] (\alpha - 1) + \left\{ \alpha (\alpha - 1) \left(\frac{h_c - C^*}{1 - C^*} \right)^{\frac{2(1+n)}{n}} \left[\frac{(n+1)h_c + nC^*}{(n+1) + nC^*} \right] + \beta h_c^3 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5.29)$$

Com a determinação das condições de choque e da velocidade de propagação em um ponto crítico o modelo matemático desenvolvido neste trabalho para geração de *Roll Waves* é, na seqüência, avaliado numericamente.

6. RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos da equação (5.12), através de uma rotina de cálculo desenvolvida com a linguagem de programação Python, mostrando o comportamento da função $h(x)$, verificando a formação e a evolução das instabilidades estudadas.

6.1 A Linguagem de Programação Python

O *Python* é uma linguagem de programação clara e expressiva, permitindo uma maior concentração do programador sobre o algoritmo e não sobre o código. É dinamicamente interpretada e orientada a objetos. Sendo de alto nível, sua utilização não é condicionada por detalhes, tais como gerenciamento de memória, tipos de dados ou outras limitações.

A estrutura orientada a objetos permite a construção de algoritmos complexos e com alta legibilidade, contribuindo para um melhor reaproveitamento do código, assim como para sua extensão e otimização.

O interpretador mais comum de *Python*, (Cpython), é escrito em C, o que permite que códigos também escritos nessa linguagem sejam compilados em módulos e carregados na forma de uma biblioteca dentro de um script, com perda de desempenho computacional próximo de zero.

No presente trabalho, para realizar a resolução numérica do modelo matemático de geração de *Roll Waves*, primeiramente determina-se o comprimento da onda através da

equação (5.19), utilizando a função *quad* do módulo *Scipy.integrate*. Essa função utiliza como método de integração a Quadratura de Gauss. Em seguida, é utilizada a função *odeint* da biblioteca de *Fortran* compilada em *Python*, para a resolução da equação (5.12) e determinação da função $h(x)$, mostrando o perfil das *Roll Waves*.

A função *odeint* no pacote *Scipy.integrate*, utiliza o método *Isoda* para a resolução de equações diferenciais ordinárias, desenvolvido por Hindmarsh (1980) e Petzold (1983) no laboratório Lawrence Livermore, como parte do pacote *odepack*.

O algoritmo desenvolvido neste trabalho, utilizando as funções citadas (*quad* e *odeint*) está no apêndice (E).

Procedimentos numéricos:

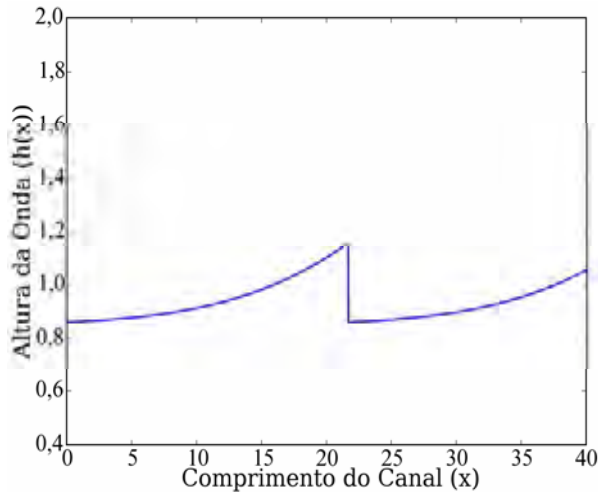
- i) É necessário especificar os parâmetros constantes n , β , C^* e h_c , sendo que os valores utilizados para β , são obtidos através da análise de estabilidade linear.
- ii) Entrar com h_1 (altura antes do choque), para determinar o valor de h_2 , obtido através das condições de choque.
- iii) Determinar λ (comprimento de onda), integrando numericamente a equação (5.20).
- iv) Integrar a equação (5.12) para determinar o perfil da *Roll Wave*.

6.2 *Roll Waves* para a Proposta Reológica de Herschel-Bulkley

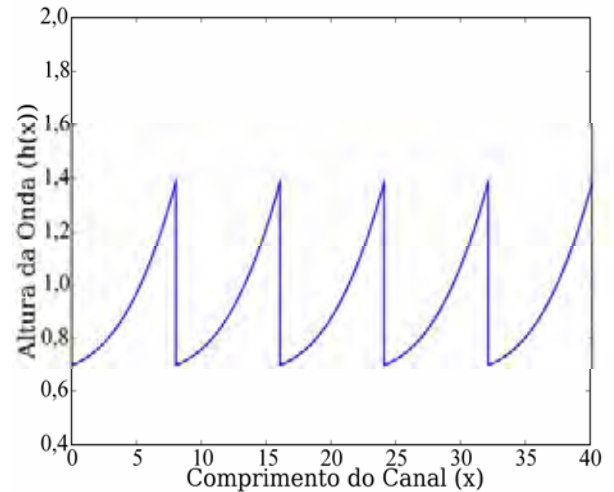
a) Influência do parâmetro β

Através do resultado de análise de estabilidade linear, para $n = 0.4$ e $C^* = 0.1$, tem-se a seguinte condição para que ocorra a formação de instabilidade: $\beta = \frac{1}{Fr^2} < 11.3437$, ou seja, $Fr > 0.3$, conforme mostrado na Figura 4.1c.

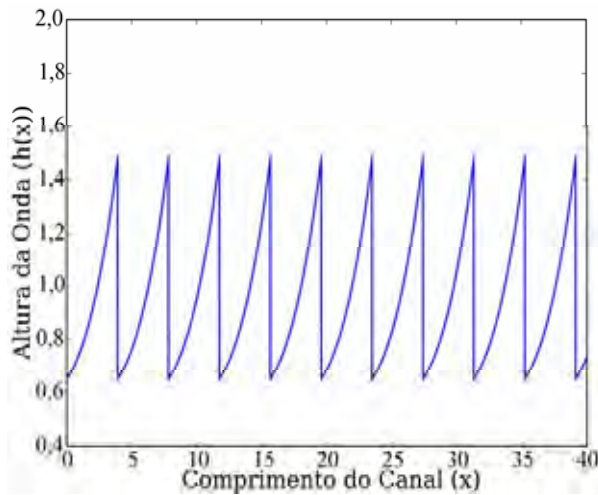
A Figura 6.1, mostra o perfil das *Roll Waves* através de resultados numéricos da equação (5.12) variando o número de Froude (Fr) e a velocidade de propagação U , que é obtida numericamente através das equações (5.27) e (5.28).



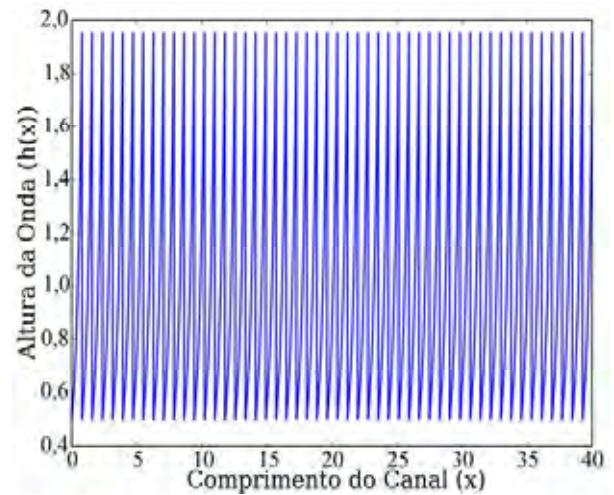
(a) Perfil das *Roll Waves* para $Fr = 0,4$



(b) Perfil das *Roll Waves* para $Fr = 0,7$



(a) Perfil das *Roll Waves* para $Fr = 1$



(d) Perfil das *Roll Waves* para $Fr = 5$

Figura 6.1: Perfil das *Roll Waves* em fluido de Herschel-Bulkley, variando o valor do número de Froude (Fr).

Ao analisar os resultados numéricos mostrados na Figura (6.1), fixando $n = 0,4$ e $C^* = 0,1$ e variando o número de Froude (Fr), nota-se que:

- ocorre a presença de *Roll Waves* estabilizadas;
- diminuindo o número de Froude (Fr), ocorre um aumento na velocidade de propagação da onda, conforme mostrado na Figura 4.4b, o que está de acordo com a definição do número de Froude;
- diminuindo o valor do número de Froude (Fr) ocorre um aumento significativo no comprimento da *Roll Wave* e uma diminuição na amplitude da mesma, isso ocorre, devido ao aumento do efeito gravitacional e a diminuição do efeito inercial (Energia Cinética);
- para $Fr > 5$, e mesmo para $Fr \rightarrow \infty$, os resultados numéricos são semelhantes, apresentando ondas de grande amplitude;

- na tentativa de utilizar $Fr < 0,3$, não houve geração de instabilidades, conforme verificado na análise de estabilidade linear, no Capítulo 4.

b) Influência do parâmetro C^* (coesão do fluido)

Fixando o número de Froude ($Fr = 1$) e o índice de escoamento do fluido ($n = 0.4$), a Figura (6.2) mostra numericamente o perfil das *Roll Waves* para fluido de Herschel-Bulkley variando a coesão do fluido (C^*)

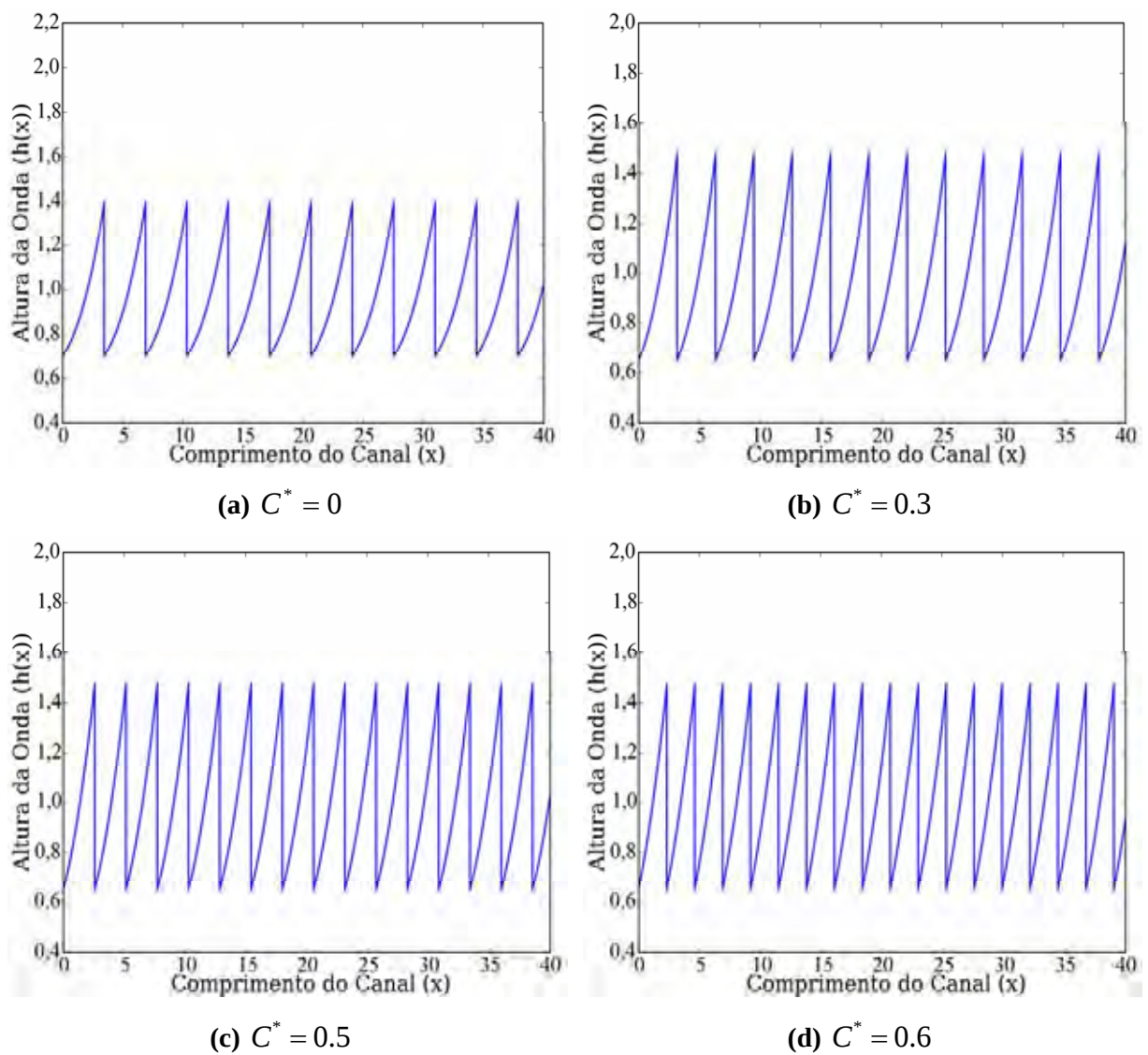


Figura 6.2: Perfil das *Roll Waves* para fluido de Herschel-Bulkley, variando o valor de C^* .

Ao analisar a Figura 6.2, observa-se que:

- para $C^* = 0$ (tensão crítica nula), aparecem ondas mais longas e de menores amplitudes;
- um aumento no parâmetro C^* , ou seja, o aumento da tensão crítica causa uma antecipação na formação das *Roll Waves* e um aumento de ordem numérica na amplitude das ondas geradas, que fisicamente é significativo;
- na tentativa de utilizar $C^* > 0.6$, não houve geração de instabilidades.

c) Influência do índice de escoamento do fluido (n)

Para $Fr = 50$ e $C^* = 0,1$, a Figura (6.3) mostra o perfil das *Roll Waves* através de resultados numéricos, variando o valor do índice de escoamento (n).

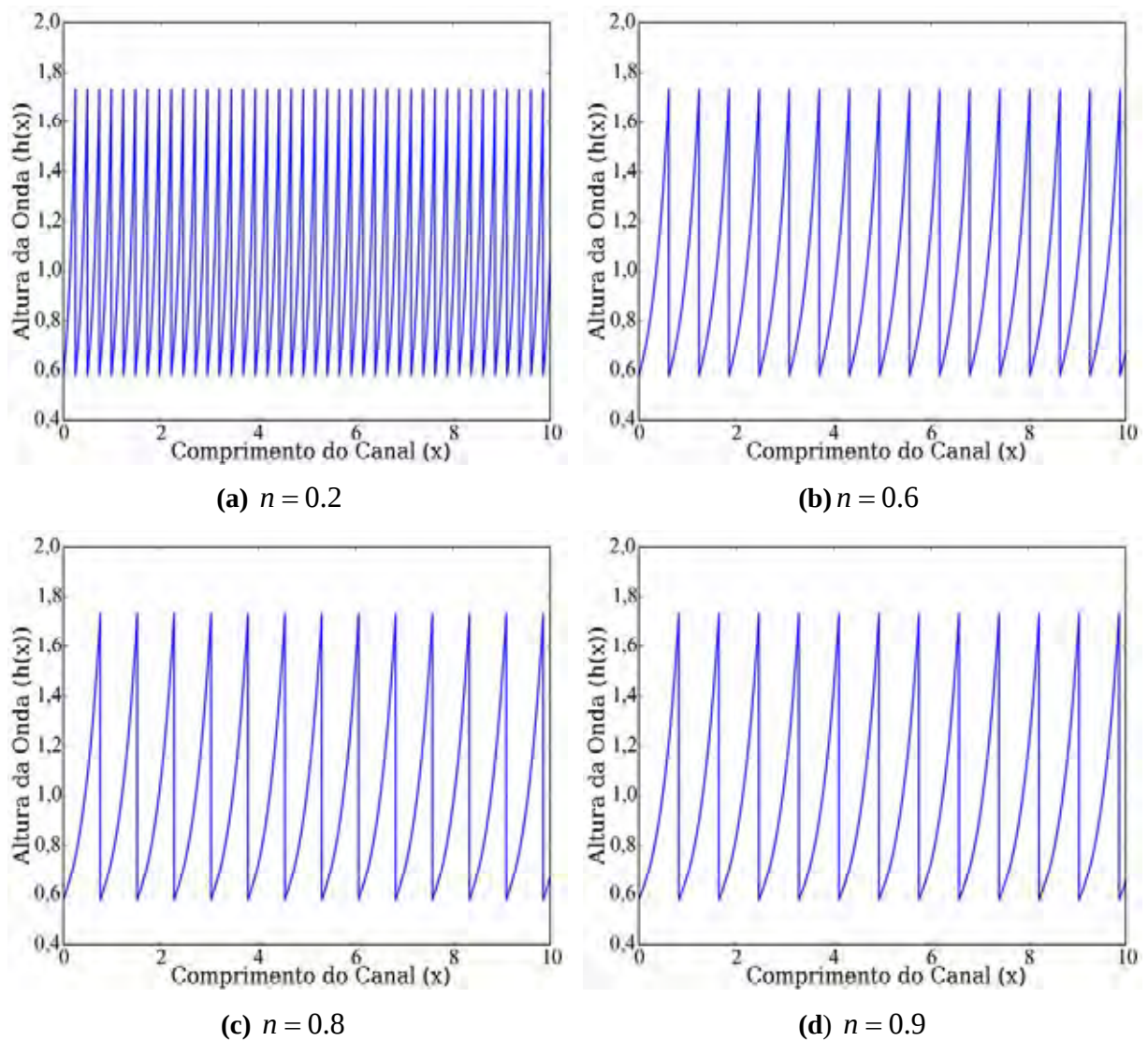


Figura 6.3: Perfil das *Roll Waves* em fluido de Herschel-Bulkley variando o valor de n para $Fr = 50$.

Analisando a Figura (6.3), observa-se que:

- o aumento do índice de escoamento (n) causa um pequeno aumento no comprimento das ondas geradas, pois quanto maior o índice de escoamento, o fluido está mais próximo de ser Newtoniano e ondas mais longas aparecem;
- ocorre também um aumento na velocidade de propagação, conforme mostrado na Figura 4.4.

Considerando $Fr = 1$ e $C^* = 0,1$, a Figura (6.4) também mostra o a formação de *Roll Waves*, variando o índice de escoamento (n).

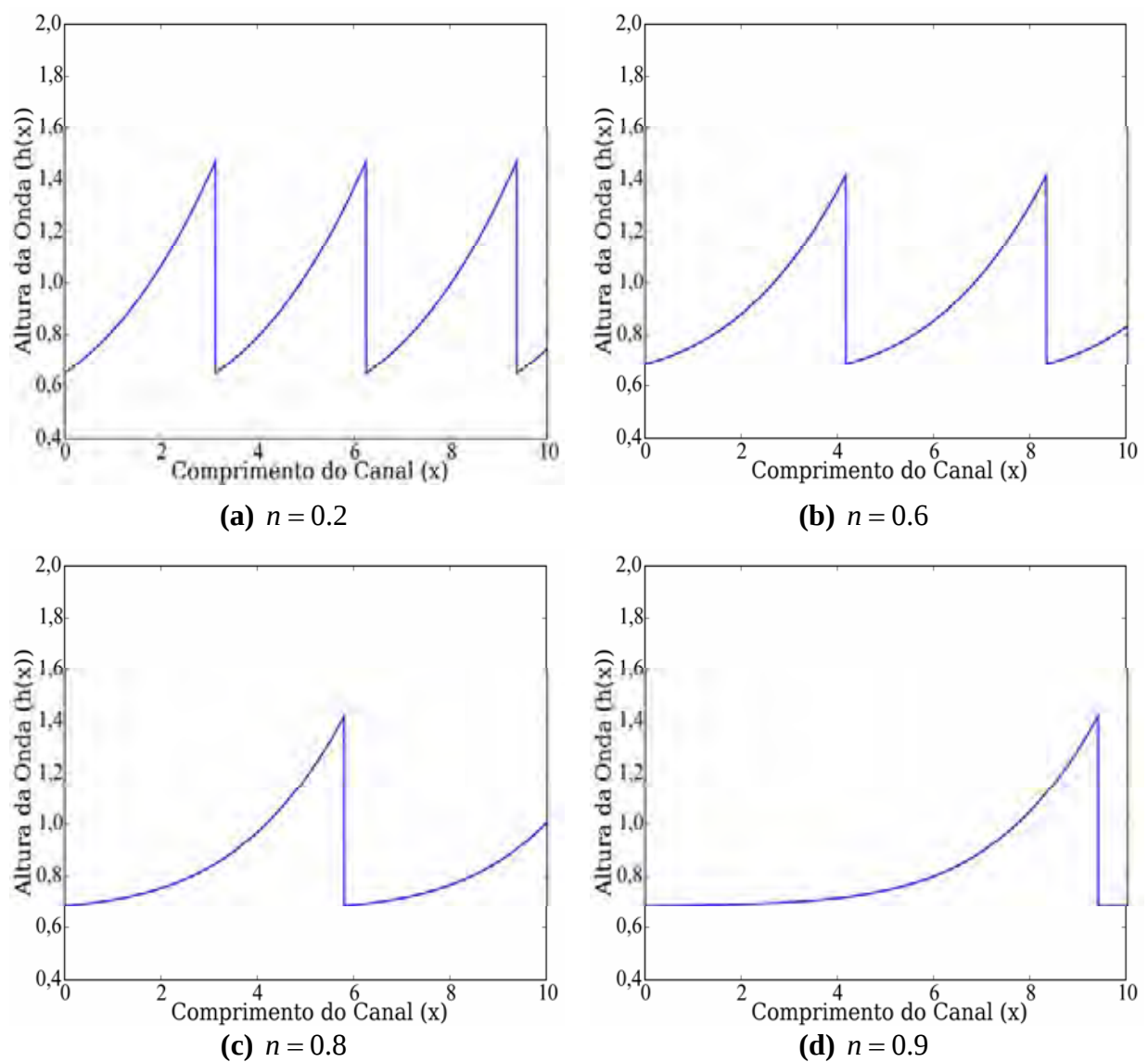


Figura 6.4: Perfil das *Roll Waves* variando o valor de n para $Fr = 1$.

Observando a Figura (6.4), verifica-se que:

- aumentando o valor do índice de escoamento do fluido (n) ocorre um aumento significativo no comprimento das ondas geradas;
- o aumento ocorrido no comprimento dessas ondas é maior do que o aumento que ocorreu para $Fr = 50$, relativo à Figura (6.3).

Nota: Uma vez analisados os resultados para a reologia de Herschel-Bulkley, teve-se o interesse de checar a evolução das *Roll Waves* para outras reologias, cumprindo com os objetivos desta dissertação. De plano, os resultados aparecem no apêndice F, apresentando comportamentos semelhantes com o que foi apresentado neste Capítulo.

7. DISCUSSÕES E PERSPECTIVAS

Discussões

Este trabalho apresentou um modelo matemático para geração de *Roll Waves* em fluidos hiperconcentrados, escoando em um canal inclinado, utilizando o modelo reológico de Herschel-Bulkley, apontando os seguintes resultados:

- através de uma análise de estabilidade linear verifica-se o aparecimento de *Roll Waves* quando:

$$Fr > \frac{\sqrt{\beta_n}}{\beta_n}, \text{ sendo:}$$

$$\beta_n = \frac{2n+1}{n^2} \left\{ (2n+1) - \frac{\left[2(n+1)^2 + (4n+3)nC^* \right] n}{\left[(n+1)^2 + 2n(n+1)C^* + n^2C^{*2} \right]} \right\}, \text{ onde: } Fr \text{ é o número de Froude, } n$$

o índice de escoamento do fluido e C^* a coesão do fluido.

- o modelo também gera *Roll Waves* para propostas reológicas mais simplificados (Bingham, *power law* e para fluido Newtoniano);

Quanto aos resultados numéricos mostrando a evolução das instabilidades, a partir das condições de existência, observa-se que:

- quanto menor o número de Froude, maior será a velocidade de propagação da *Roll Wave*, o que está de acordo com a definição do número de Froude;

- quanto maior o número de Froude (Fr), maior será a amplitude da onda gerada e menor o comprimento de onda, isso ocorre, devido ao aumento do efeito inercial (Energia Cinética);
- quanto maior a tensão crítica (τ_c) representada pelo adimensional (C^*), menor será o comprimento da onda, pois em escoamentos de fluidos hiperconcentrados, as ondas geradas apresentam comprimentos menores do que em escoamentos de fluido Newtoniano;
- com o aumento do índice de escoamento (n) do fluido, ocorre um aumento do comprimento da *Roll Wave*, ou seja, quanto mais próximo de ser Newtoniano, ondas mais longas aparecem;
- para fluidos do tipo *Power Law* e Binghamiano, os resultados estão em consonância com o que foi predito por (Ng e Mei, 1994) e (Maciel, 2001).

Comentários Finais

Este trabalho de pesquisa foi desenvolvido com base em referências do contexto de *Roll Waves*, tanto em fluido hiperconcentrado quanto em fluido Newtoniano. De uma maneira geral, pôde-se tratar aspectos importantes na geração e propagação do fenômeno *Roll Waves*.

No plano teórico, foi adquirido conhecimentos na formulação do sistema de equações para águas rasas (*shallow water equations*), suas propriedades e aplicações. Ainda nesse contexto, pôde-se avançar para determinar as condições de existência de instabilidades através de uma análise de estabilidade linear. A partir dessa base foi determinada a velocidade de propagação dessas instabilidades e a taxa de crescimento das mesmas.

Um modelo matemático para geração de *Roll Waves* em escoamentos hiperconcentrados e laminares foi determinado, a partir de uma teoria analítica de *Roll Wave* permanente. As condições de choques foram estudadas para o modelo em questão.

No plano numérico, utilizando a linguagem de programação *Phyton*, pode-se verificar a funcionabilidade do modelo matemático desenvolvido neste trabalho, tanto para fluido hiperconcentrado quanto para fluido Newtoniano.

De plano e voltando-se mais a uma aplicação de engenharia, conclui-se que ondas de lama do tipo trem de *Roll Waves* deverão aparecer mais cedo em fluido não Newtoniano do que em escoamentos de fluido Newtoniano, se presentes, deverão apresentar amplitudes mais elevadas, menores comprimentos de onda e velocidade de propagação menos acentuadas do que aquelas produzidas em fluidos Newtonianos.

Sugestões

Além dos desenvolvimentos matemáticos e resultados numéricos apresentados ao longo deste trabalho, ainda que de forma global, acredita-se que este estudo deva ser continuado e sistematizado das formas que se seguem:

- fazer uma análise dimensional do modelo matemático determinado neste trabalho;
- dar seqüência a abordagem matemática de Roll Waves em canais sobre forte declividade, considerando uma condição de permeabilidade no fundo do canal, ou seja, considerando a porosidade, levando-se em consideração que os canais não são totalmente lisos e que a porosidade pode influenciar na formação de instabilidades, conforme mostrado por Pascal (2006). Neste caso, utilizar a Lei de Darcy como condição de contorno, adaptada ao modelo reológico de Herschel-Bulkley;
- realizar uma análise comparativa entre resultados obtidos com a condição de impermeabilidade e de permeabilidade do fundo do canal.
- realizar ensaios experimentais em canais e medir *Roll Waves*.

REFERÊNCIAS

ALAVIAN, V. Behaviour of density currents on an inclin. **Journal of Hydraulic Engineering**, Reston, v.112, p. 27–42, 1986.

BAKHVALOV, N.S.; EGLIT, M.E. Investigation of the solutions to snow avalanche movement equations. In: WORLD Data Center for Glaciology, Soviet Research Avalanche bibliography update, 1977-1983. p. 117-128.

BALMFORTH, N.J.; MADRE, C. Dynamics of roll waves. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v.514, p. 1-33, 2004.

BENJAMIN, T. B. Wave formation in laminar flow down an inclined plane. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v.2, p.554–574, 1957.

BINGHAM, E. C. **Fluidity and plasticity**. New York: McGraw-Hill, 1920.

BROCK, R. R. Development of roll-wave trains in open channels. **Journal Hydraulics Division**, New York, v.95, p.1401–1427, 1969.

BROCK, R. R. Periodic permanent roll-waves. **Journal Hydraulics Division**, New York, v.96, p. 2565-2580, 1970.

BROOK, B.S.; FALLE, S.A.E.G.; PEDLEY, T.J. Numerical solutions for unsteady gravity-driven flows in collapsible tubes: evolution an roll wave instability of a steady state. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v.396, p. 223 – 256, 1999.

CENEDESE, C.; WHITEHEAD, J. A.; ASCARELLI, T. A.; OHIWA, M. A dense current flowing down a sloping bottom in a rotating fluid. **Journal of Physical Oceanography**, Boston, v.34, p.188-203, 2004.

CHEN, C. L. Momentum and energy coefficients based on power-law velocity profile. **Journal of Hydraulic Engineering**, New York, v.118, p. 1571-1584, 1992.

CORNISH, V. **Ocean waves and kindred geophysical phenomena**. Cambridge: Cambridge University Press, 1910.

COUSSOT, P.; PIAU J.M. On the behavior of mud suspensions. **Rheologica Acta**, Darmstadt, v. 33, n.3, p 175-184, 1994.

DI CRISTO, C.; VACCA, A. On the convective nature of roll waves instability. **Journal Applied Mathematics**, London, v.3, p. 259-271, 2005.

DRESSLER, R.F Mathematical solution of the problem of roll waves in inclined open channels. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, New York, v.2, p.149 –194, 1949.

EGLIT, M.E. Theoretical approaches to avalanche dynamics. In: WOLD Data Center for Glaciology. S.L.: Soviet Avalanche Research-Avalanche Bibliography update, 1984. p 63-116.

ENGELUND, F.; WAN, Z. Instability of hyperconcentrated flow. **Journal Hydraulic Research**, Delft, v.110, p.219–233, 1984.

FER, I.; LEMMIN, U.; THORPE, S.A. Winter cascading of cold water in lake geneva. **Journal of Geophysics**, Berlin, v.107, (C6), Art. n° 3060, 2003.

FORTERRE, Y.; POULIQUEN, O. Long-surface-wave instability in dense granular flows. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v. 486, p.21 – 50, 2003.

HERSCHEL, W. H.; BULKLEY, R. Measurement of consistency as applied to rubber-benzene solutions. **Proceedings of the American Society for Testing Materials**, New York, v.26, p. 621 – 133, 1926.

HINDMARSH, A.C. Isode e Isodi, two new initial value ordinary differential equation solvers. **Signum Newsletter**, New York, v.15, n.4, p. 10-11, 1980.

HUANG, X.; GARCIA, M.H. A Herschel-Bulkley model for mud flow down a slope. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v.374, p 305-333, 1998.

HUTTER, K.; SAVAGE, S.B. Avalanche dynamics: the motion of a finite mass of gravel down a mountain side. In: PROCEEDING OF THE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON LANDSLIDES, 5, 1988, Lausane. **Proceedings of the ...** Lausane: C. Bonnard, 1988. p.691-697.

HWANG, S.H.; CHANG, H.C. Turbulent and inertial roll waves in inclined film flow. **Physics Fluids**, Houston, v.30, p. 1259-1268, 1987.

ISHIHARA, T.; IWAGAKI, Y.; IWASA, Y. Theory of the roll wave train in laminar water flow on a steep slope surface. **Transactions JSCE**, Japan, v.19, p. 46-57, 1954.

JEFFREYS, H. The flow of water in an inclined channel of rectangular section. **Phil Magazine**, Cambridge, v.49, p. 793-807, 1925.

JULIAN, B. R. Volcanic tremor: nonlinear excitation by fluid flow. **Journal Geophysics**, Berlin, v. 99, p. 11859–11877, 1994.

JULIEN, P. Y.; HARTLEY, D. M. Formation of roll waves in laminar sheet flow. **Journal of Hydraulics**, Fort Collins, v.24, n.1, p.5-17, 1986.

KIRYU, H. S. **Investigação reológica e análise mecânica de compósitos não-newtonianos**. 2003. 204 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2003

KRANENBURG, C. On the evolution of roll waves. **Journal Hydraulic Research**, Delft, v.245, p. 249-261, 1992.

LIU, K.; MEI, C.C. Roll waves on a layer of a muddy fluid flowing down a gentle slope – A Bingham model. **Phys Fluids**, New York, v.6, p. 2577-2590, 1994.

MACIEL, G.F.; VILA, J.P.; MARTINET, G. Roll wave formation in the non Newtonian flows. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 14, 1997, Bauru. **Anais...** Bauru: ABCM, 1997. p. 98

MACIEL, G.F. **Roll waves evoluindo em canais de forte declividade: Uma abordagem matemática com aproximação numérica**. 2001. 184 f. Tese (Livre Docência em *Roll Waves*) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2001.

MADRE, S. Effect of bottom topography on roll wave instabilities. In: PROCEEDINGS OF THE GEOPHYSICAL FLUID DYNAMICS SUMMER STUDY PROGRAM, 2001. **Proceedings of the...** S.l.: Woods Hole Oceanographic Institution, 2001.

MONTES, S. **Hydraulics of open channel flow**. Reston: ASCE , 1998.

MONTUORI, C. Discussion: stability aspect of flow in open channels. **Journal Hydraulics Division**, New York, ASCE 89, p. 264-273, 1963

OSTWALD, W. O. The velocity function of viscosity of disperse systems. **Kolloid Zeitschrift**, Darmstadt, v.36, p.157-258, 1925.

PIAU, J.M. Flow of a yield stress fluid in a long domain, application to flow on an inclined plane. **Journal Rheology**, New York, v.40, p 711-723, 1996.

PROKOPIOU, T.; CHENG, M.; CHANG, H. C. Long waves on inclined films at high Reynolds number. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v.222, p. 665–691, 1991.

NEEDHAM, D.J.; MERKIN, J.H. On roll waves down an open inclined channel. **Proceedings of the Royal Society of London . Mathematical and physical sciences . Series A**, London, v.394, p. 259-278, 1984.

NEEDHAM, D.J.; MERKIN, J.H. An infinite period bifurcation arising in roll waves down open inclined channel. **Proceedings of the Royal Society of London . Mathematical and physical sciences . Series A**, London, v.405, p. 103-116, 1986.

NG, C.O.; MEI, C.C. Roll waves on a layer of fluid mud modelled as a power law fluid. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v.263, p. 151-183, 1994.

NOBLE P. **Existence et stabilité de roll-waves pour les équations de Saint Venant**. Paris: C.R. Acad. Sci. Paris, 2004. p.819-824. (Ser. 1338).

PASCAL, J.P. Instability of power-law fluid down a porous incline. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, Amsterdam, v.133, p.109-120, 2006.

PEDLEY, T. J. **Fluid mechanics of large blood vessels**. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

PETZOLD, L.R. Automatic Selection of methods for solving stiff and nonstiff systems of ordinary differential equations. **SIAM Journal of Scientific Computing**, Philadelphia, v.4, p.136-148, 1983.

RIBEIRO, F.L.B.; GALEÃO, A. C.; LANDAU L. Edge-based finit element method for shallow water equations. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Chichester, v.36, p. 659-685, 2001.

SANTOS, L.F. **Estudo teórico – experimental em via de determinação de lei de atrito em escoamentos de fluidos hiperconcentrados**. 2003. 116 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2003.

SHAPIRO A. H. **The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow**. New York: Ronald Press, 1953.

SWATERS, G.E. Baroclinic characteristics of frictionally destabilized abyssal overflows. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v.489, p.349-379, 2003.

THOMAS, H. A. The propagation of waves in sep prismatic conduits. In: PROCEEDINGS OF THE HYDRAULICS CONFERENCE OF IOWA, 1939. **Proceedings of the...** Iowa: S.n., 1939. p. 214-229.

TAMADA, K.;TOUGOU, H. Stability of roll-waves on thin laminar flow down an inclined plane wall. **Journal of the Physical Society of Japa**, Tokyo, v.47, n.6, p.1992–1998, 1979.

YIH, C. S. Stability of liquid flor down an inclined plane. **Physics of Fluids**, New York, v.6, p. 321, 1963.

WOODS, B. D.; HURLBURT, E. T.;HANRATTY, T. J. Mechanism of slug formation in downwardly inclined pipes. **International journal of multiphase flow**, Elmsford, v.26, p. 977–998, 2006.

ZANUTTIGH, B.; LAMBERTI, A. Roll waves simulation using shallow water equations and weighted average flux method. **Journal of Hydraulic Research**, Delft, v.40, p.610-622, 200

APÊNDICE A

Demonstração do sistema de equações que rege o escoamento

Considerando um escoamento bidimensional de um fluido hiperconcentrado em um canal inclinado, o sistema de coordenadas (x, z) é definido com o eixo x ao longo do canal e z o eixo normal ao plano inclinado. As componentes de velocidades longitudinal e vertical são dadas por (u, w) e a pressão por P , sendo a altura total do escoamento dada por h .

Condições de contorno

$$w(h_i) = \frac{\partial h_i}{\partial t} + u(h_i) \frac{\partial h_i}{\partial x} \quad A1$$

$$w(h_f) = \frac{\partial h_f}{\partial t} + u(h_f) \frac{\partial h_f}{\partial x} \quad A2$$

Integrando a equação da conservação da massa de h_1 à h_2 .

Integral de $\frac{\partial u}{\partial x}$:

$$\int_{h_i}^{h_f} \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_i}^{h_f} u dz - u(h_f) \frac{\partial h_f}{\partial x} - u(h_i) \frac{\partial h_i}{\partial x} \quad A3$$

Seja:

$$\bar{u} = \frac{1}{h_f - h_i} \int_{h_i}^{h_f} u dz \text{ e } h_f - h_i = h \quad \text{A4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{h_i}^{h_f} u dz = \frac{\partial \bar{u} h}{\partial x} \quad \text{A5}$$

Portanto:

$$\frac{\partial \bar{u} h}{\partial x} - u(h_f) \frac{\partial h_f}{\partial x} + u(h_i) \frac{\partial h_i}{\partial x} \quad \text{A6}$$

Integral de $\frac{\partial w}{\partial z}$:

$$\int_{h_i}^{h_f} \frac{\partial w}{\partial z} dz = w(h_f) - w(h_i) \quad \text{A7}$$

Somando as equações A4 e A5, temos:

$$\frac{\partial \bar{u} h}{\partial x} - u(h_f) \frac{\partial h_f}{\partial x} + u(h_i) \frac{\partial h_i}{\partial x} + w(h_f) - w(h_i) \quad \text{A8}$$

Aplicando as condições de contorno:

$$\frac{\partial \bar{u} h}{\partial x} - u(h_f) \frac{\partial h_f}{\partial x} + u(h_i) \frac{\partial h_i}{\partial x} + \frac{\partial h_f}{\partial t} + u(h_f) \frac{\partial h_f}{\partial x} - \frac{\partial h_i}{\partial t} - u(h_i) \frac{\partial h_i}{\partial x} \quad \text{A9}$$

Logo, a equação da conservação da massa fica:

$$\frac{\partial \bar{u} h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad \text{A10}$$

O procedimento será o mesmo para a equação da quantidade de movimento, na direção OX.

Integral de $\frac{\partial u}{\partial t}$:

$$\int_{h_i}^{h_f} \frac{\partial u}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{h_i}^{h_f} u dz - u(h_f) \frac{\partial h_f}{\partial t} + u(h_i) \frac{\partial h_i}{\partial t} \quad A11$$

$$\text{Seja: } \bar{u} = \frac{1}{h_f - h_i} \int_{h_i}^{h_f} u dz \quad A12$$

$$\frac{\partial \bar{u} h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{h_i}^{h_f} u dz \quad A13$$

Portanto:

$$\int_{h_i}^{h_f} \frac{\partial u}{\partial t} dz = \frac{\partial \bar{u} h}{\partial t} - u(h_f) \frac{\partial h_f}{\partial t} + u(h_i) \frac{\partial h_i}{\partial t} \quad A14$$

Integral de $\frac{\partial u^2}{\partial x}$:

$$\int_{h_i}^{h_f} \frac{\partial u^2}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_i}^{h_f} u^2 dz - u^2(h_f) \frac{\partial h_f}{\partial x} + u^2(h_i) \frac{\partial h_i}{\partial x} \quad A15$$

Seja:

$$\overline{u^2} = \frac{1}{h_f - h_i} \int_{h_i}^{h_f} u^2 dz \quad A16$$

$$\frac{\partial \overline{u^2 h}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_i}^{h_f} u^2 dz \quad A17$$

Portanto:

$$\int_{h_i}^{h_f} \frac{\partial u^2}{\partial x} dz = \frac{\partial \overline{u^2 h}}{\partial x} - u^2(h_f) \frac{\partial h_f}{\partial x} + u^2(h_i) \frac{\partial h_i}{\partial x} \quad A18$$

Integral de $\frac{\partial uw}{\partial z}$:

$$\int_{h_i}^{h_f} \frac{\partial uw}{\partial z} dz = u(h_f) w(h_f) - u(h_i) w(h_i) \quad A19$$

Somando os resultados das integrais 15, 16 e 17, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u} h}{\partial t} - u(h_f) \frac{\partial h_f}{\partial t} + u(h_i) \frac{\partial h_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u^2 h}}{\partial x} - u^2(h_f) \frac{\partial h_f}{\partial x} + u^2(h_i) \frac{\partial h_i}{\partial x} + \\ + u(h_f) w(h_f) - u(h_i) w(h_i) \end{aligned} \quad A20$$

Aplicando as condições de contorno:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u} h}{\partial t} - u(h_f) \frac{\partial h_f}{\partial t} + u(h_i) \frac{\partial h_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u^2 h}}{\partial x} - u^2(h_f) \frac{\partial h_f}{\partial x} + u^2(h_i) \frac{\partial h_i}{\partial x} + \\ + u(h_f) \left(\frac{\partial h_f}{\partial t} + u(h_f) \frac{\partial h_f}{\partial x} \right) - u(h_i) \left(\frac{\partial h_i}{\partial t} + u(h_i) \frac{\partial h_i}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad A21$$

Portanto o lado esquerdo da equação da quantidade de movimento na direção OX fica da seguinte forma:

$$\int_{h_i}^{h_f} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u^2}h}{\partial x} \quad A22$$

O lado direito da equação da quantidade de movimento fica:

$$\frac{1}{\rho} \int_{h_i}^{h_f} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dz + \frac{1}{\rho} \int_{h_i}^{h_f} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \quad A23$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho g \cos(\theta) \frac{h^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \int_{h_i}^{h_f} \tau_{zx} dz \quad A24$$

Assim, a partir das equações 23 e 24, tem-se a equação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u^2}h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-g \cos(\theta) \frac{h^2}{2} \right) + g h \sin(\theta) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \int_{h_i}^{h_f} \tau_{xz} dz \quad A25$$

Sabendo que, $\tau_{xz} = 0$ na superfície livre, tem-se:

$$\frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u^2}h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-g \cos(\theta) \frac{h^2}{2} \right) + g h \sin(\theta) - \frac{1}{\rho} \left[\tau_{xz}(h_i) \right] \quad A26$$

APÊNDICE B

Cálculo do Perfil de Velocidade

O equacionamento abaixo tem como hipóteses um escoamento uniforme, laminar, de um fluido incompressível, em canal inclinado, baseado na lei de Herschel-Bulkley.

$$\rho g \sin(\theta)(h - z) = \tau_c + K_n \left(\frac{du}{dz} \right)^n \quad \text{B1}$$

$$\left(\frac{du}{dz} \right)^n = \frac{\rho g \sin(\theta)(h - z) - \tau_c}{K_n} \quad \text{B2}$$

Resolvendo a equação diferencial (B2), pode-se obter, após alguns desenvolvimentos matemáticos, o perfil de velocidade $u(z)$ para o fluido em questão:

Seja: $r = \frac{1}{n}$, então:

$$\left(\frac{du}{dz} \right)^{nr} = \left(\frac{\rho g \sin \theta (h - z) - \tau_c}{\mu_n} \right)^r \quad \text{B3}$$

$$\left(\frac{du}{dz} \right) = \left(\frac{\rho g \sin \theta (h - z) - \tau_c}{\mu_n} \right)^r \quad \text{B4}$$

Integrando de 0 à z:

$$u(z) = \int_0^z \left(\frac{\rho g \sin \theta (h - z)}{\mu_n} - \frac{\tau_c}{\mu_n} \right) dz \quad \text{B5}$$

Note que:

$$\left[\frac{\rho g \sin(\theta) h}{\mu_n} - \frac{\rho g \sin(\theta) z}{\mu_n} - \frac{\tau_c}{\mu_n} \right] \geq 0 \quad \text{B6}$$

$$h - z - \frac{\tau_c}{\rho g \sin \theta} \geq 0 \quad \text{B7}$$

$$h - \frac{\tau_c}{\rho g \sin \theta} \geq z \quad \text{B8}$$

Seja:

$$z_0 = h - \frac{\tau_c}{\rho g \sin \theta}, \quad 0 \leq z \leq z_0 \quad \text{B9}$$

Sendo:

z_0 : profundidade do fluido na região cisalhada

Multiplicando a equação (B9) por $\frac{\rho g \sin \theta}{\mu_n}$ e subtraindo $\frac{\rho g \sin(\theta) z}{\mu_n}$, tem-se:

$$\frac{\rho g \sin \theta (z_0 - z)}{\mu_n} = \frac{\rho g \sin \theta (h - z)}{\mu_n} - \frac{\tau_c}{\mu_n} \quad \text{B10}$$

Logo,

$$u(z) = \int_0^z \left(\frac{\rho g \sin \theta (z_0 - z)}{\mu_n} \right) dz \quad \text{B11}$$

$$u(z) = \left(\frac{\rho g \sin \theta}{\mu_n} \right)^r \int_0^z (z_0 - z)^r dz \quad \text{B12}$$

Considerando $\beta = \left(\frac{\rho g \sin \theta}{\mu_n} \right)^r$, tem-se:

$$u(z) = \beta \int_0^z (z_0 - z)^r dz \quad \text{B13}$$

Integrando por substituição:

$$s = z_0 - z \Rightarrow \frac{ds}{dz} = -1 \Rightarrow ds = -dz \quad \text{B14}$$

Logo:

$$u(z) = \beta \int_0^z s^r ds = - \left[\frac{s^{r+1}}{r+1} \right]_0^z \quad \text{B15}$$

$$u(z) = \frac{\beta}{(r+1)} \left(- (z_0 - z)^{r+1} \right)_0^z \quad \text{B16}$$

Portanto, tem-se o perfil de velocidade na região não cisalhada (“parte em plug”):

$$u(z) = u(z_0) = \frac{\beta}{r+1} z_0^{r+1} \quad \text{para} \quad z_0 \leq z \leq h \quad \text{B17}$$

Perfil de velocidade na região cisalhada:

$$u(z) = \frac{\beta}{r+1} \left[z_0^{r+1} - (z_0 - z)^{r+1} \right] \quad \text{para} \quad 0 \leq z \leq z_0 \quad \text{B18}$$

Sabendo que: $\beta = \left(\frac{\rho g \sin \theta}{\mu_n} \right)^r$ e $r = \frac{1}{n}$, o perfil de velocidades na região cisalhada pode ser representado pela seguinte expressão:

$$u(z) = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g \sin(\theta) z_0^{n+1}}{\mu_n} \right)^{\frac{1}{n}} \left[1 - \left(1 - \frac{z}{z_0} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad \text{B19}$$

APÊNDICE C

Velocidade Média em Relação à Profundidade do Escoamento

Esse item tem como objetivo determinar a velocidade média em relação à profundidade do escoamento, ou seja, no intervalo $0 \leq z \leq h$, para adequar ao modelo matemático.

Sabendo que: $\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u dz$, então no intervalo $0 \leq z \leq h$, tem-se que:

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \left[\int_0^{z_0} u dz + \int_{z_0}^h u dz \right] \quad C1$$

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \left[\int_0^{z_0} \frac{n}{n+1} \left(\rho g \sin(\theta) z_0^{n+1} \right)^{\frac{1}{n}} \left(1 - \left(1 - \frac{z}{z_0} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right) dz + \int_{z_0}^h \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g \sin(\theta) z_0^{n+1}}{\mu_n} \right) dz \right]$$

$$\bar{u} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g \sin(\theta) z_0^{1+n}}{\mu_n} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{h} \left[\int_0^{z_0} dz - \int_0^{z_0} \left(1 - \frac{z}{z_0} \right)^{\frac{n+1}{n}} dz + \int_0^h dz \right] \quad C2$$

Integrando por substituição:

$$v = 1 - \frac{z}{z_0} \Rightarrow dv = -\frac{1}{z_0} dz, \text{ então:}$$

$$\int \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\frac{1+n}{n}} dz = -z_0 \int v^{\frac{1+n}{n}} dv = -z_0 v^{\frac{2n+1}{n}} \frac{n}{2n+1} = -z_0 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\frac{2n+1}{n}} \frac{n}{2n+1} \quad C3$$

Então:

$$\bar{u} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g \sin(\theta) z_0^{1+n}}{\mu_n} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{h} \left\{ \left[z + z_0 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\frac{2n+1}{n}} \frac{n}{2n+1} \right]_0^{z_0} + [z]_{z_0}^h \right\} \quad C4$$

$$\bar{u} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g \sin(\theta) z_0^{n+1}}{\mu_n} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{h} \left[z_0 - z_0 \frac{n}{2n+1} + h - z_0 \right] \quad C5$$

$$\bar{u} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g \sin(\theta) z_0^{1+n}}{\mu_n} \right)^{\frac{1}{n}} \left[1 - \frac{n}{2n+1} \frac{z_0}{h} \right] \quad C6$$

Sabendo que: $z_0 = h - \frac{\tau_c}{\rho g \sin \theta}$, tem-se:

$$\bar{u} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g \sin \theta}{\mu_n} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{h \rho g \sin \theta - \tau_c}{\rho g \sin \theta} \right)^{\frac{n+1}{n}} \left[1 - \frac{n}{2n+1} \left(\frac{h \rho g \sin \theta - \tau_c}{h \rho g \sin \theta} \right) \right] \quad C7$$

APÊNDICE D

Cálculo do Coeficiente de Distribuição de Velocidade

Para efetuar o cálculo do coeficiente de distribuição de velocidade, tem-se a seguinte relação:

$$\frac{\overline{u^2}}{\overline{u}^2} = \frac{1}{(\overline{u})^2} \frac{1}{h} \int_0^h u^2 dz \quad D1$$

$$\alpha = \frac{1}{(\overline{u})^2} \frac{1}{h} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \left(\frac{\rho g \operatorname{sen}(\theta) z_0^{n+1}}{\mu_n} \right)^{\frac{2}{n}} \left[\int_0^{z_0} \left(1 - \left(1 - \frac{z}{z_0} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right)^2 dz + \int_{z_0}^h dz \right] \quad D2$$

$$\alpha = \frac{1}{(\overline{u})^2} \frac{1}{h} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \left(\frac{\rho g \operatorname{sen}(\theta) z_0^{n+1}}{\mu_n} \right)^{\frac{2}{n}} \times$$

$$\times \left[\int_0^{z_0} \left(1 - 2 \left(1 - \frac{z}{z_0} \right)^{\frac{n+1}{n}} + \left(1 - \frac{z}{z_0} \right)^{\frac{2n+2}{n}} \right) dz + \int_{z_0}^h dz \right] \quad D3$$

$$\alpha = \frac{1}{(\overline{u})^2} \frac{1}{h} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \left(\frac{\rho g \operatorname{sen}(\theta) z_0^{n+1}}{\mu_n} \right)^{\frac{2}{n}} \times$$

$$\times \left[z + 2z_0 \left(1 - \frac{z}{z_0} \right)^{\frac{n+1}{n}} \frac{n}{2n+1} + \left(1 - \frac{z}{z_0} \right)^{\frac{2n+2}{n}} \frac{n}{3n+2} \right]_0^{z_0} +$$

$$+ \frac{1}{(\bar{u})^2} \frac{1}{h} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \left(\frac{\rho g \sin(\theta) z_0^{n+1}}{\mu_n} \right)^{\frac{2}{n}} [z]_{z_0}^h \quad \text{D4}$$

$$\alpha = \frac{1}{(\bar{u})^2} \frac{1}{h} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \left(\frac{\rho g \sin(\theta) z_0^{n+1}}{\mu_n} \right)^{\frac{2}{n}} \left[z_0 - \left(2z_0 \frac{n}{2n+1} - z_0 \frac{n}{3n+2} \right) + h - z_0 \right] \quad \text{D5}$$

$$\alpha = \frac{1}{(\bar{u})^2} \frac{1}{h} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \left(\frac{\rho g \sin(\theta) z_0^{n+1}}{\mu_n} \right)^{\frac{2}{n}} \left[h - \left(\frac{2z_0 n(3n+2) - z_0 n(2n+1)}{(2n+1)(3n+2)} \right) \right] \quad \text{D6}$$

$$\alpha = \frac{1}{(\bar{u})^2} \frac{1}{h} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \left(\frac{\rho g \sin(\theta) z_0^{n+1}}{\mu_n} \right)^{\frac{2}{n}} \left[h - \frac{z_0}{h} \left(\frac{n(4n+3)}{(2n+1)(3n+2)} \right) \right] \quad \text{D7}$$

Sabendo que:

$$(\bar{u})^2 = \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \left(\frac{\rho g \sin(\theta) z_0^{n+1}}{\mu_n} \right)^{\frac{2}{n}} \left[1 - \frac{n}{2n+1} \frac{z_0}{h} \right]^2 \quad \text{D8}$$

Substituindo a equação (8) em (7), tem-se:

$$\alpha = \frac{\left[1 - \frac{z_0}{h} \left(\frac{n(4n+3)}{(2n+1)(3n+2)} \right) \right]}{\left[\frac{(2n+1) \cdot h - n z_0}{(2n+1) h} \right]^2} \quad \text{D9}$$

$$\alpha = \frac{\left[(2n+1)(3n+2)h - z_0 n(4n+3) \right] (2n+1)h}{\left[(2n+1)h - n z_0 \right]^2 (3n+2)} \quad \text{D10}$$

Substituindo: $z_0 = h - \frac{\tau_c}{\rho g \sin \theta}$, tem-se a seguinte expressão para o coeficiente de distribuição de velocidade:

$$\alpha = \left(\frac{2n+1}{3n+2} \right) \frac{\left[2(n+1)^2 h \rho g \sin \theta + \tau_c n(4n+3) \right]}{\left[(n+1)^2 h \rho g \sin \theta + 2(n+1) n \tau_c + \frac{n^2 \tau_c^2}{h \rho g \sin \theta} \right]} \quad \text{D11}$$

APÊNDICE E

Código para resolução numérica do modelo para geração de *Roll Waves*

```
# -*- coding: latin-1 -*-

from scipy import *
from scipy.integrate import odeint, quad

from pylab import figure, close, axes, subplot, show
from pylab import *
from matplotlib.numerix import arange, sin, pi

def F(H, alf, U, n, q):

    """ Comprimento da onda """

    #Valor necessário

    Ah=H-C-(1.0-C)*pow((((1-U)+U*H)*(1.0-C)/(H-C))*(((n+1.0)+n*C)/((n+1.0)*H+n*C))),n)
    Bh = ((alf-1)*pow(U,2)-alf*pow(q,2)/pow(H,2)+B*H)
    h_ = Bh/Ah
    return h_

def f(H, z, alf, U, n, q):

    """ Perfil da Roll Wave """
```

```

Ah=H-C-(1.0-C)*pow((((1-U)+U*H)*(1.0-C)/(H-C))*(((n+1.0)+n*C)/((n+1.0)*H+n*C))),n)
Bh = ((alf-1)*pow(U,2)-alf*pow(q,2)/pow(H,2)+B*H)
h_ = Ah/Bh
return h_

```

"""Plano de Fases"""

```
def dhdz(H, z, alf, U, n, q):
```

""" Faz o cálculo da derivada!"""

```

Ah=H-C-(1.0-C)*pow((((1-U)+U*H)*(1.0-C)/(H-C))*(((n+1.0)+n*C)/((n+1.0)*H+n*C))),n)
Bh = ((alf-1)*pow(U,2)-alf*pow(q,2)/pow(H,2)+B*H)
return Ah/Bh

```

```
def alfa_(n, C):
```

```

return((2.0*pow(n+1.0,2.0)+C*n*((4.0*n)+3.0))*((2.0*n)+1.0))/((pow(n+1.0,2.0)+(2.0*n*C*
(n+1.0))+pow(n,2.0)*pow(C,2.0))*((3.0*n)+2.0))

```

```
def q_(n, C, hc, alf):
```

```

return- pow((hc-C)/(1.0-C),(1.0+n)/n)*(((n+1.0)*hc+n*C)/((n+1.0)+n*C))*(alf-1) - pow((alf*
(alf-1)*pow((hc-C)/(1.0-C),2*(1.0+n)/n)*pow(((n+1.0)+n*C)/((n+1.0)+n*C),2)+B*pow(hc,3)
),0.5)

```

```
def U_(n, C, hc, q):
```

```

return pow((hc-C)/(1.0-C),(1.0+n)/n)*(((n+1.0)*hc+n*C)/((n+1.0)+n*C))*(1/hc)-(q/hc)

```

```
def h2_(alf, U, q, B, h1):
```

```

if B == 0 :

```

```

    h2 = alf*pow(q,2)/((alf-1)*pow(U,2)*h1)

```

```

else:
    h2 = -((h1/2.0)+(alf-1.0)*(pow(U,2.0))/B)+pow((pow(((h1/2.0)+(alf-1.0)*(pow(U,2.0)))/B),2.0)+(2.0*alf*pow(q,2.0))/(B*h1)),0.5

    return h2

def lambda_(F, alf, U, n, q, h1, h2):
    # Integrando para calcular o comprimento do intervalo
    return quad(lambda h: F(h, alf, U, n, q), h1, h2)[0]

def h_(f,alf, U, n, q, y0):

    #Integrando a ODE

    return odeint(lambda H, z: f(H, z, alf, U, n, q), y0, z)[: , 0]

def plota(x,y):

fig = plot(x, y, '-', linewidth=1.0)

show()

if __name__ == "__main__":

# Constantes
    B=1.0
    n = 0.2
    C=0.1
    hc = 1.0
    h1 = 0.65
    y0 = 0.65 #Valor inicial
    tam = 1000 # Numero de dados para cada intervalo

```

```

alf = alfa_(n, C)
q = q_(n, C, hc, alf)
U = U_(n, C, hc, q)
h2 = h2_(alf, U, q, B, h1)
lanbda = lanbda_(F, alf, U, n, q, h1, h2)
num = 20
repeticoes = int(num/lanbda)

## print repeticoes
z = r_[0:lanbda:1000j]
h = h_(f, alf, U, n, q, y0)

## print z

h_ = zeros((repeticoes, len(h))).tolist()
z_ = zeros((repeticoes, len(h))).tolist()

for i in range(repeticoes):
    z_[i][:] = r_[lanbda*i:lanbda*(i+1):1000j][:]
    h_[i][:] = h[:]

h_ = reshape(h_, (1, repeticoes*len(h)))[0]
z_ = reshape(z_, (1, repeticoes*len(h)))[0]

print len(h_)
print len(z_)
## h.reshape
hm = (1-q)/U

## print h

plota(z_, h_)

```

```
print 'valores dados:'  
print ' n = ', n  
print ' beta = ', B  
print ' C = ', C  
print ' h1 = ', h1, '\n'  
print 'valores calculados:'  
print " U = ", U  
print " h2 = ", h2  
print " hm = ", hm  
print " alf = ", alf  
print " lambda = ", lambda
```

APÊNDICE F

ESTUDO DE CASOS

Este capítulo tem como objetivo mostrar a validade do modelo matemático para geração de *Roll Waves*, considerando as propostas reológicas mais simplificadas, tais como o modelo reológico do tipo *Power Law*, Binghamiano e Newtoniano.

Geração de *Roll Waves* para um fluido do tipo *Power Law*

Considerando que a tensão crítica de escoamento seja nula ($\tau_c = 0$), tem-se um modelo reológico do tipo *Power Law* e a equação para geração de *Roll Waves*, fica da seguinte forma:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h - \left((1-U) h^{-2} + h^{-1} U \right)^n}{\left[(\alpha - 1) U^2 - \alpha (1-U)^2 h^{-2} + \beta h \right]} \quad (F1)$$

Sendo o coeficiente de distribuição de velocidade, dado por:

$$\alpha = \frac{2(2n+1)}{(3n+2)} \quad (F2)$$

Comparando o modelo determinado neste trabalho com o que foi obtido por (Ng e Mei, 1994), quando utilizou como proposta reológica a lei das potências (*Power Law*), observar-se que os modelos estão em consonância.

Através de uma resolução numérica da equação (7.1) verifica-se a formação de *Roll Waves* e a influência do parâmetro β , na geração e no comportamento de tais instabilidades.

a) Influência do parâmetro do número de Froude (Fr)

Fixando $n = 0.4$, a Figura (1) mostra o perfil das *Roll Waves* através de resultados numéricos da equação (F1), variando o número de Froude (Fr).

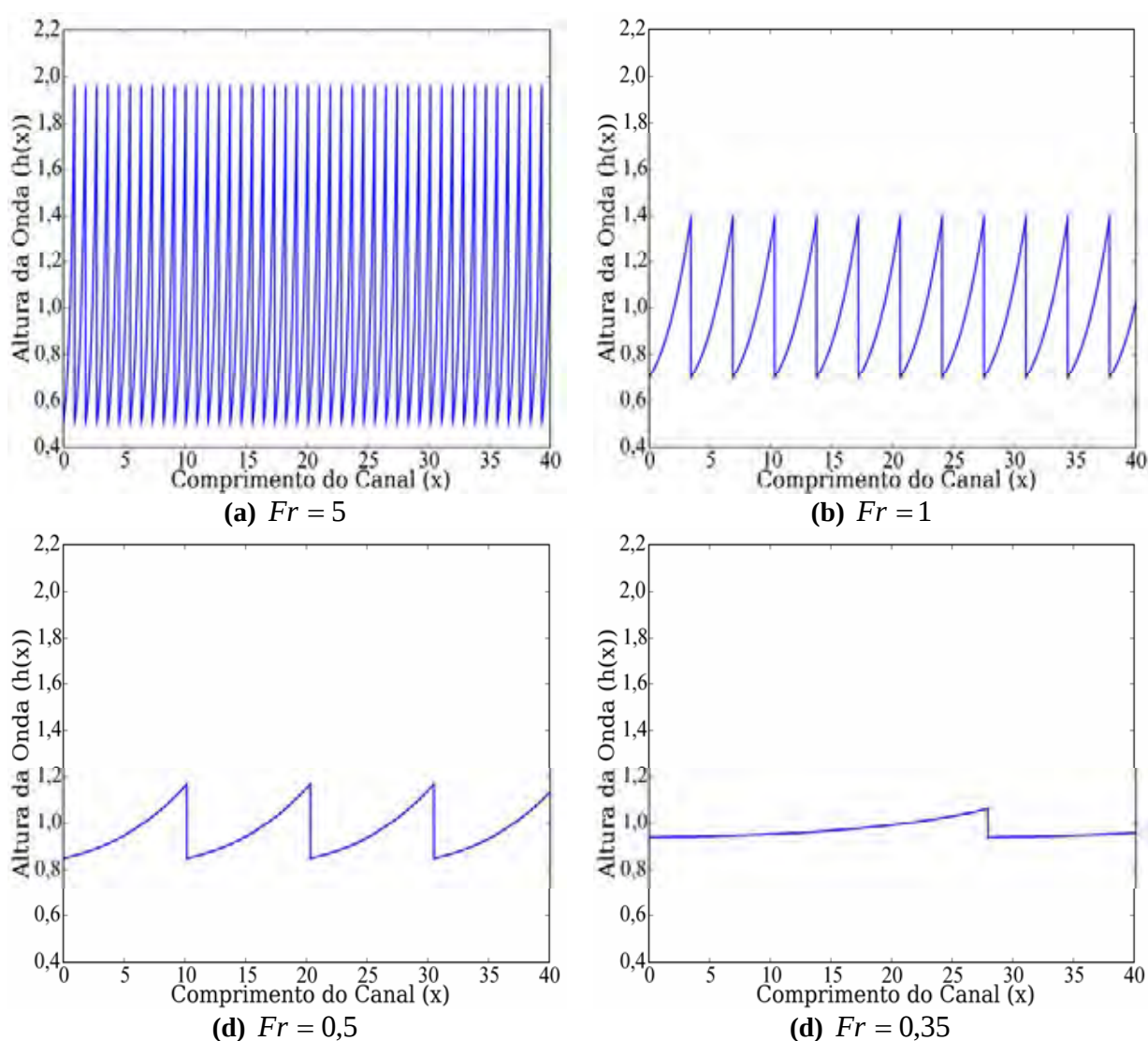


Figura1: Perfil das *Roll Waves* para um fluido do tipo *Power Law*, variando o valor de Fr .

Através da figura (1), observa-se:

- a formação de *Roll Waves* para $\beta < \frac{2n+1}{n^2} = \beta_n$, ou seja, para $Fr > \frac{\sqrt{\beta_n}}{\beta_n}$, conforme predito na análise de estabilidade linear;
- a geração de instabilidades com pequenas amplitudes, porém muito longas, quando $\beta \rightarrow \beta_n$, conforme mostrado na análise de estabilidade linear;
- um aumento significativo no comprimento das ondas e uma diminuição na amplitude, com o diminuição do número de Froude (Fr), conforme mostrado por (Ng e Mei, 1994).

Geração de *Roll Waves* em fluido de Bingham

Para uma tensão crítica não nula e o índice de comportamento do fluido igual a 1 ($n=1$), tem-se o fluido de Bingham e a equação de geração de *Roll Waves* torna-se:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h - C^* - (1 - C^*) \left\{ \left[\frac{(1 + U(h-1))(1 - C^*)}{(h - C^*)} \right] \left(\frac{2 + nC^*}{2h + nC^*} \right) \right\}}{\left[(\alpha - 1)U^2 - \alpha(1 - U)^2 h^{-2} + \beta h \right]} \quad (F3)$$

Sendo o coeficiente de distribuição de velocidade, dado por:

$$\alpha = \frac{3}{5} \frac{(8h + 7C^*)}{(4h + 4C^* + (C^*)^2/h)} \quad (F4)$$

A resolução numérica do modelo mostra o perfil das *Roll Waves* e a influência dos parâmetros β e C^* (coesão do fluido) na dinâmica do escoamento.

a) Influência do número de Froude (Fr)

A Figura (2) mostra o perfil das *Roll Waves* para um fluido de Bingham, através de resultados numéricos da equação (F3), para $C^* = 0.1$, variando o número de Froude.

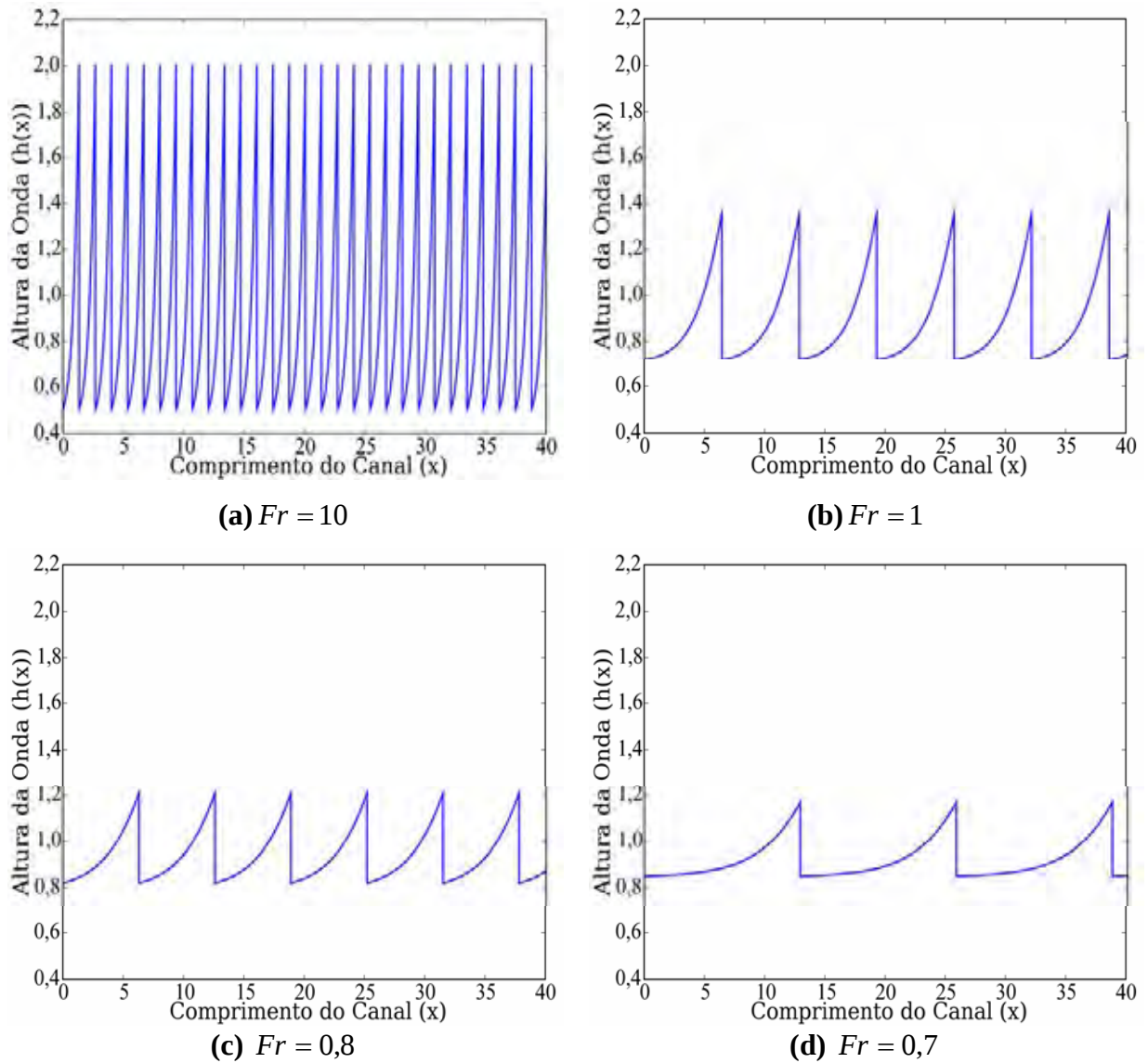


Figura 2: Perfil das *Roll Waves* para fluido de Bingham variando o valor do parâmetro Fr .

Através da Figura (2) observa-se que:

- o aparecimento de pequenas instabilidades quando $\beta \rightarrow \beta_n$, conforme observado nos resultados obtidos na análise de estabilidade linear;
- aumentando o valor do adimensional β , ou seja, diminuindo o número de Froude, ocorre um aumento no comprimento da onda gerada e uma diminuição na amplitude da mesma, conforme mostrado por (Maciel, 2001).

(b) Influência do parâmetro C^* (coesão do fluido)

A Figura (3) mostra o perfil das *Roll Waves* em fluido de Binghamiano, para $Fr = 1$ variando a tensão crítica do fluido C^* .

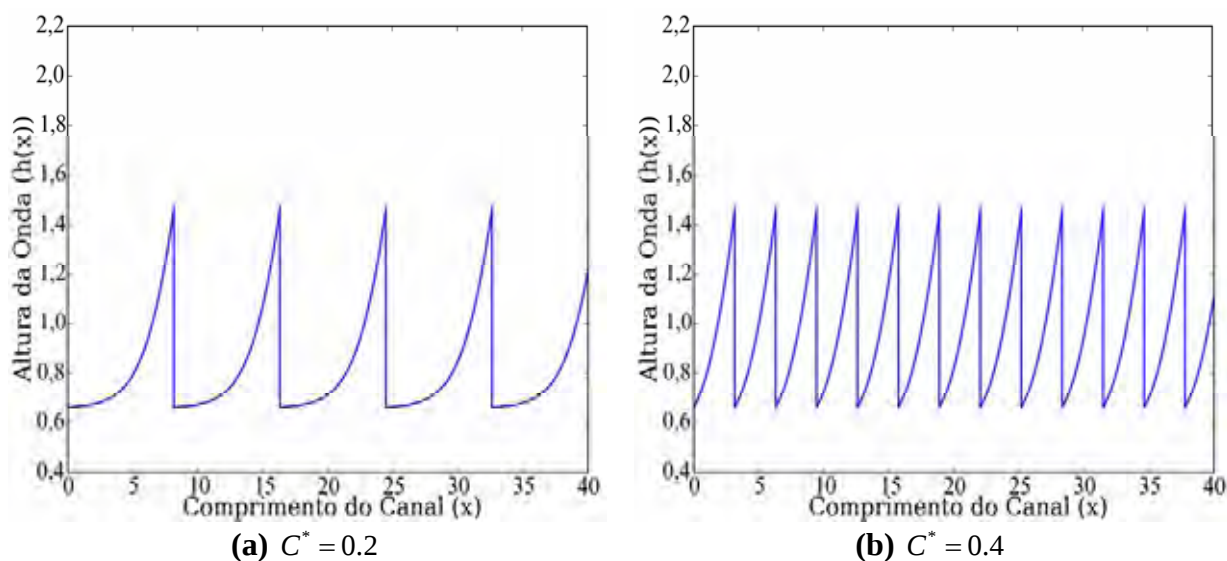


Figura 3: Perfil das *Roll Waves* em fluido de Bingham, para $Fr = 1$ variando C^*

Pode-se observar através das Figura (3) que:

- ocorre uma antecipação na formação das ondas com o aumento do parâmetro C^* ;
- o aumento da coesão do fluido (C^*), ou seja, o aumento da tensão crítica, provoca uma diminuição no comprimento da *Roll Wave*, conforme mostrado por (Maciel, 2001) em uma análise numérica de *Roll Waves* para fluido de Bingham.

Geração de *Roll Waves* em Fluido Newtoniano

Sabe-se que para uma tensão crítica nula ($C^* = 0$) e o índice de escoamento do fluido igual a 1 ($n = 1$), tem-se um fluido Newtoniano e o modelo para a Geração de *Roll Waves*, fica da seguinte forma:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\left[h - (1-U) h^{-2} + h^{-1} U \right]}{\left[(\alpha - 1) U^2 - \alpha (1-U)^2 h^{-2} + \beta h \right]} \quad (F5)$$

Sendo o coeficiente de distribuição de velocidade dado por: $\alpha = 1.2$

A Figura (5) mostra o perfil das *Roll Waves*, através de resultados numéricos para um fluido Newtoniano obtidos a partir da equação (F5), variando o valor de β .

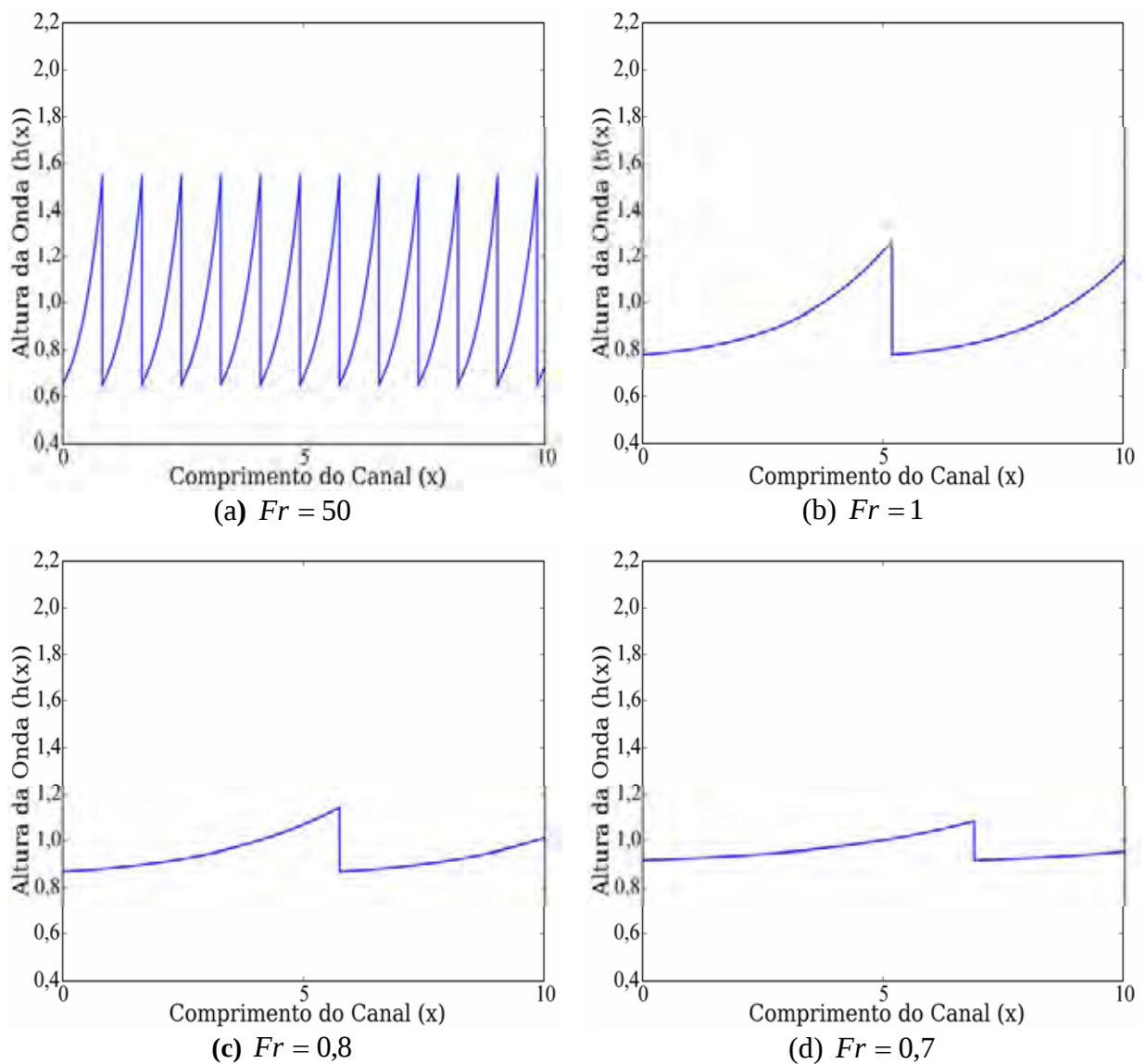


Figura 4: Perfil das *Roll Waves* para fluido newtoniano, variando Fr .

Com base na figura (5), observa-se que:

- aumentando valor de β , ocorre o um aumento no comprimento das instabilidades e um diminuição na amplitude das mesmas;
- para um fluido de reologia newtoniana as *Roll Waves* aparecem para $Fr > \frac{\sqrt{3}}{3}$, conforme mostrado por (Ng e Mei, 1994).