

unesp  **UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

“JULIO DE MESQUITA FILHO”

CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

IGOR INÁCIO GOMES MONTEIRO

**A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE
MATEMÁTICA**

Guaratinguetá

2015

IGOR INÁCIO GOMES MONTEIRO

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Maria Tereza de Lima Carvalho Nogueira

Guaratinguetá

2015

unesp  UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“JULIO DE MESQUITA FILHO”

CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

IGOR INÁCIO GOMES MONTEIRO

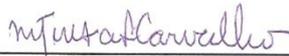
ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO
PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE
“GRADUADO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA”

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA.



Profª Drª VIVIAN MARTINS GOMES

BANCA EXAMINADORA



Profª. Drª. MARIA TEREZA DE LIMA CARVALHO

Orientador/UNESP-FEG



Profª. Drª. FABIANE MONDINI

UNESP-FEG



Prof. Dr. JOSÉ RICARDO DE REZENDE ZENI

UNESP-FEG

Novembro de 2015

Monteiro, Igor Inácio Gomes
M775r A Resolução de problemas no ensino de matemática / Igor Inácio
Gomes Monteiro. - Guaratinguetá, 2015
41 f. : il.
Bibliografia: f. 39-41

Trabalho de Graduação em Licenciatura em Matemática – Universidade
Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2015.
Orientador: Prof^a. Dr^a. Maria Tereza de Lima Carvalho Nogueira

1. Matemática -- Estudo e ensino 2. Matemática -- Problemas,
exercícios, etc 3. Estratégias de aprendizagem I. Título

CDU 51:371.3

RESUMO

A Resolução de Problemas é uma metodologia que se destaca no ensino de matemática, pois propicia uma aprendizagem significativa, favorecendo o desenvolvimento intelectual do aluno e o pensamento autônomo e crítico.

Neste trabalho foi desenvolvido um estudo exploratório relativo à utilização da Resolução de Problemas como estratégia de ensino. Ao longo dele é discutida a importância da resolução de problemas, o que é um problema e suas diferenças para exercícios, os tipos de problemas, como resolver um problema e como um professor deve aplicar a resolução de problemas em sala de aula escolhendo problemas e exercícios adequados e questionando corretamente o aluno.

PALAVRAS-CHAVE: Definição de Problemas. Exercícios. Professores. Formação de professores. Metodologia de Ensino. Educação Básica.

ABSTRACT

The Troubleshooting is a methodology that stands out in mathematics teaching, it provides a meaningful learning, favoring the intellectual development of the student and the autonomous and critical thinking.

In this work an exploratory study on the use of Problem Solving as a teaching strategy. Along it is discussed the importance of problem solving, which is a problem and their differences for years, the types of problems, how to solve a problem and as a teacher should apply problem solving in the classroom choosing problems and exercises adequate and properly questioning the student.

KEYWORDS: Problems. Definition of Problems. Exercises. Mathematics Teaching. Teachers. Teacher training. Teaching methodology. Basic education.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	6
1 - A IMPORTÂNCIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.	7
2 - O QUE É UM PROBLEMA?.....	10
2.1 - DEFINIÇÃO DE PROBLEMA.....	10
2.2 - PROBLEMAS OU EXERCÍCIOS? DIFERENÇAS E IMPORTÂNCIAS.....	11
3 - TIPOS DE PROBLEMAS.....	15
4 - COMO RESOLVER UM PROBLEMA.....	19
4.1 - COMPREENSÃO DO PROBLEMA.....	19
4.2 - ESTABELECIMENTO DE UM PLANO.....	21
4.3 - EXECUÇÃO DO PLANO.....	24
4.4 - RETROSPECTO.....	25
4.5 - RESOLVENDO PROBLEMAS ATRAVÉS DOS QUATRO PASSOS.....	25
5 - RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM SALA DE AULA.....	31
5.1 - ESCOLHENDO PROBLEMAS ADEQUADOS.....	31
5.2 - ESCOLHENDO EXERCÍCIOS ADEQUADOS.....	33
5.3 - ORIENTANDO E QUESTIONANDO CORRETAMENTE.....	35
CONCLUSÃO.....	38

INTRODUÇÃO

O tema desta pesquisa é a Resolução de Problemas no ensino de matemática. Em particular a Resolução de Problemas já me despertava interesse desde muito cedo quando aluno no ensino fundamental e pude ter contato com algumas atividades envolvendo problemas ou exercícios. A presença de um problema para ser revolido era naquele momento uma situação que exigia pensar, mas que era muito satisfatório quando encontrava a resposta. Mais tarde, como aluno do Curso de Licenciatura em Matemática, eu tive um interesse muito grande pela área da Educação e da Matemática em Sala de Aula e vi no tema Resolução de Problemas uma grande oportunidade de desenvolver um trabalho nesse sentido.

O interesse por essa questão deve-se aos problemas relativos ao ensino usual de matemática que apontam a necessidade de se buscar metodologias de ensino que propiciem uma melhoria do quadro atual. Nesse sentido a Resolução de Problemas é considerada por educadores em Matemática como uma estratégia didática e metodológica fundamental para o desenvolvimento intelectual do aluno e para a aprendizagem em matemática.

Através do estudo exploratório, procurou-se, neste trabalho, elucidar a questão: como aplicar a Resolução de Problemas no ensino e aprendizagem de matemática? Com esse objetivo foram desenvolvidos, nos capítulos que o compõe, importantes temas

No 1º capítulo: “A importância da resolução de problemas no ensino de matemática”, é mostrado quando surgiu o grande interesse pela Resolução de Problemas, como era o Ensino de Matemática antes desse interesse e quais são as recomendações para a aplicação no momento atual.

No 2º capítulo: “O que é um problema”, é explicada a definição de problema por diferentes autores e sua diferença para exercícios.

No 3º capítulo: “Tipos de problemas”, são apresentados diferentes tipos de problemas de acordo com a concepção de diferentes autores.

No 4º capítulo: “Como resolver um problema”, é apresentado como um problema pode ser resolvido através de as quatro fases de Polya para resolução de problemas.

No 5º capítulo: “Resolução de problemas em sala de aula”, é discutida a escolha de problemas e exercícios adequados para a resolução em sala de aula e também como o professor deve orientar e questionar seus alunos com perguntas adequadas.

CAPÍTULO 1

A IMPORTÂNCIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

A resolução de problemas é, atualmente, uma metodologia importante no ensino de Matemática, em todos os níveis. Para compreender melhor essa importância é preciso rever primeiro algumas tendências dominantes no passado em relação ao ensino de matemática entendendo assim como as coisas funcionavam antes da resolução de problemas ganhar qualquer atenção e porque ela precisa estar mais presente nas sala de aula e quais benefícios ela traz.

Desde o início do século XX até o início da década de 1950 bastava ao aluno aprender algumas coisas básicas, como resolver alguns algoritmos, memorizar como se faz um exercício ou outro. Era comum que crianças aprendessem as operações básicas adição, subtração, multiplicação e divisão, desconhecendo, porém em quais situações utilizá-las, tal como descrevia psicólogo gestaltista Wertheimer que criticando o sistema de sua época descrevia a maneira que se aprendia matemática como “cega atividade mecânica” (Wertheimer, apud Schoenfeld, 1996).

Em 1957 foi lançada nos Estados Unidos, a Matemática Moderna, movimento que viria a reformular os currículos de matemática deste país trazendo mais formalidade e rigor no ensino de matemática como afirma D’Ambrósio (1987). Visando também reformular o ensino de Matemática e percebendo o sucesso do movimento da Matemática Moderna nos Estados Unidos e na França, o Brasil veio a copiá-lo. Com a Matemática Moderna, a década 1960 foi um período de abstração na instrução matemática. De acordo com D’Ambrósio (1987), ao final desta década pais e professores constataram que a nova maneira de ensinar matemática tinha deixado os alunos sem nem saber realizar contas e que a Matemática Moderna tinha falhado como metodologia de ensino e aprendizagem.

Na década seguinte o currículo de matemática foi dominado por exercícios e práticas sobre o básico, não havendo quase nenhuma referência a resolução de problemas. Esse quadro teve como consequência alunos que não aprendiam verdadeiramente matemática não se tornando preparados a resolver problemas.

Somente a partir de 1980 foi dada uma maior atenção à resolução de problemas. Nos EUA, o National Council of Teachers of Mathematics (1980), declarou que a resolução de problemas “devia ser o foco da Matemática escolar”. O mesmo pensamento também surgiu em outros lugares do mundo. Foi um começo, porém segundo Schoenfeld (1996) o que se entendia por problema na época com raras

exceções por parte de autores era algo muito superficial como problemas do tipo truque ou métodos rotineiros de resolução para problemas de história elementares.

Com o passar do tempo a resolução de problemas foi ganhando mais destaque e importância. A legislação brasileira atual sobre educação, principalmente os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) faz diversas referências sobre a resolução de problemas e a sua importância.

O PCN+ Ensino Médio (2000) privilegia a resolução de problemas que é colocada como uma postura de investigação.

Para alcançar os objetivos estabelecidos de promover as competências gerais e o conhecimento de Matemática, a proposta dos PCNEM privilegia o tratamento de situações-problema, preferencialmente tomadas em contexto real. A resolução de problemas é a perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado. (BRASIL, 2000, p. 129).

Outro posicionamento do PCN trata da importância da resolução de problemas colocando-a como o ponto inicial da atividade matemática.

Em contrapartida à simples reprodução de procedimentos e ao acúmulo de informações, educadores matemáticos apontam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução. (BRASIL, 1998, p. 39).

Essa crescente atenção à resolução de problemas deve-se ao fato da sua utilidade ao ensino quando bem aplicada, quando seus objetivos são cumpridos. Segundo Dante (2000) a resolução de problemas desenvolve o raciocínio lógico, faz o aluno pensar produtivamente, pois o aluno precisa analisar as situações, os problemas, os dados disponíveis. Consequentemente o aluno passa a enfrentar situações novas e não só algoritmos, algo memorizado, decorado de como se fazer. Mais ainda, possibilita ao aluno passa a conhecer aplicações da matemática na vida real, coisas comuns de seu contexto, passando a ver a matemática de outra maneira, não como uma ciência acabada feita para ser ensinada e aprendida sempre da mesma maneira. Da mesma forma, a aula de matemática modifica-se; ao invés de um jeito único e decorado de fazer as coisas, adquire um jeito desafiante, interessante, no qual o aluno deve investigar como proceder para obter o resultado desejado. Assim o aluno se sente mais envolvido, participante de fato daquilo que ele está fazendo. Por fim a resolução de problemas quando bem

trabalhada ensina os alunos a resolverem qualquer problema matemático. Conforme Polya (1995) afirmou, qualquer problema pode ser resolvido com uma abordagem adequada para a resolução de problemas mediante compreensão do problema, elaboração de um plano, execução do plano e retrospecto. Portanto quando um professor discute com seus alunos ensinando-lhe os passos para a resolução de problemas estará preparando-os para que no futuro façam o mesmo que lhes foi ensinado diante de qualquer problema que possa aparecer e assim tentar resolvê-los.

Apesar da importância atribuída atualmente à resolução de problemas no ensino de matemática, a aplicação na prática escolar é ainda problemática. A resolução de problemas encontra resistência por parte de alguns professores enquanto outros têm dúvidas sobre qual a melhor maneira de utilizá-la em sala de aula de modo a fazer com que ela traga consequências positivas aos alunos, fazendo-os aprenderem de modo significativo a matemática. Infelizmente as resistências, as dúvidas, os erros sobre como trabalhar a resolução de problemas em sala de aula têm deixado nos alunos uma série de dificuldades que perduram durante toda a fase escolar ou até em outras fases ao longo da vida.

Para que o ensino com resolução de problemas tenha efeito e o aluno aprenda de fato aquilo que lhe está sendo ensinado, não resultando apenas uma aprendizagem mecânica, é preciso entender o que significa problema, o que significa exercício, quais as diferenças e semelhanças entre eles, como resolver um problema, como propor problemas em sala de aula, quais problemas são adequados e qual deve ser o papel do professor para orientar e questionar corretamente os seus alunos de modo que os ajudem a resolver qualquer tipo de problema. Essas questões serão examinadas nos capítulos seguintes.

CAPÍTULO 2 O QUE É UM PROBLEMA?

2.1 DEFINIÇÃO DE PROBLEMA

Nesse capítulo discutem-se as especificidades de um problema, os aspectos que lhe são próprios, diferenciando-os de exercícios.

A Resolução de Problemas pode ser notada desde a Antiguidade. De acordo com Boyer (2003) os povos do Egito e da Mesopotâmia já adotavam a resolução de problemas a cerca de 4.000 anos. Mas somente a partir da década de 1970, vem ganhando espaço e vem sendo o eixo das principais reformas curriculares.

Há muitas concepções sobre o que seja “problema”. O assunto é discutido por diversos autores e podem ser encontradas várias divergências.

Para Kantowsky (1974) o problema se caracteriza quando uma pessoa se depara com uma situação que exige além do conhecimento habitual que ela já possui.

Para Polya (1980) possuir um problema significa buscar uma ação apropriada e verdadeira para atingir aquilo que lhe é desejado e que levará um tempo para ser alcançado.

Por sua vez, Mayer (1985) define problema como o confronto com uma situação inicial e tem o objetivo de se chegar a uma situação final e não se conhece um caminho imediato para tal fim.

Lester (1983) afirma que em um problema existe uma determinada tarefa para ser executada e não há um algoritmo para determinar por completo o método de resolução. Lester (1983), também fala da vontade de resolver uma tarefa, e quando não há esse desejo de resolução, a tarefa não é considerada problema.

Segundo Onuchic (1999), “Problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver”. (Onuchic, 1999, p. 215).

Problema também pode ser compreendido segundo a concepção de Van de Walle como

Um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta (Van de Walle, 2001, apud ONUCHIC e ALLEVATO, 2004, p. 221).

Apesar da Resolução de Problemas ser algo antigo, ela ocupa pouco espaço atualmente na prática escolar, embora seja de grande importância como citam Onuchic e Allevato.

Através de problemas, os conceitos matemáticos que os alunos criam, num processo de construção, são duradouros, porque são formados pouco a pouco,

ao longo do tempo, quando os alunos refletem ativamente sobre eles e os testam através dos diferentes caminhos que o professor ou os próprios colegas sugerem. Argumentar e defender seu ponto de vista, ouvir os outros, descrever e explicar são caminhos mentalmente ativos que aumentam as possibilidades de um conceito correto ser definitivamente formado. Neste sentido, aplicada como metodologia de ensino, a resolução de problemas se torna um recurso não só para aplicar, mas para aprender matemática. (Onuchic, Allevato. 2009, p.183)

A Resolução de problemas pode ocupar diferentes papéis no ensino de Matemática: pode-se ensinar Matemática para as resoluções de problemas, através das resoluções de problemas e, o mais comum, de aplicação daquilo que foi ensinado recentemente.

Para Polya (1995), a Resolução de Problemas é tida como uma arte prática em que o desenvolvimento da aprendizagem ocorre por meio de um conjunto de técnicas segundo seu modelo heurístico, sendo a interação entre aluno e professor necessária para que a aprendizagem seja de fato compreendida.

Já Onuchic e Allevato (2004) defendem a Resolução de Problemas como uma metodologia para se ensinar Matemática e coloca o foco dos estudantes sobre o dar sentido, possibilitando uma compreensão significativa de um determinado conceito ou conteúdo, e não apenas como um simples processo de resolução.

2.2 PROBLEMA OU EXERCÍCIO?

Uma confusão ocorre entre o que seria problema ou exercício. É uma crença comum e errada achar que ambos significam o mesmo quando na verdade não são. Essa ideia de que exercícios e problemas não se diferenciam se deve, muitas vezes, ao fato de ambos começarem com um texto para que a partir dele se pense numa resolução para que se obtenha uma resposta desejada. Essa semelhança realmente existe, mas ela para por aí.

É essencial que se saiba perceber a diferença entre eles. Primeiramente para o aluno ou para aquela pessoa que deseja resolver um problema ou exercício para que ela saiba o que está diante dela para ser resolvido. Também tem importância para o professor, pois se ele deseja trabalhar com problemas deve propor problemas que são problemas de fato, enquanto que, se deseja apontar um exercício é necessário que ele também saiba para si e para falar ao aluno que se trata de um exercício. É importante que o professor aprenda essa diferença para que também possa explicar ao aluno.

Algumas diferenças definem o que é problema e o que é exercício.

Para Dante (2000) uma primeira diferença define o que é um e outro dependendo do que é ou não usado para resolvê-los.

Se uma questão por mais complexa que possa ser, ou por mais tempo que ela possa tomar de uma pessoa for resolvida através de conhecimentos já ensinados ou que teriam que ser aprendidos para resolvê-la trata-se de um exercício. Por exemplo, um professor acaba de ensinar as primeiras noções de probabilidade e passa algumas questões sobre aquilo que acabou de ser ensinado. Nesse caso os alunos leem o enunciado do exercício e imediatamente identificam o conceito de probabilidade que acabaram de ver. Dante (2000)

Por outro lado quando ocorre o oposto, quando não é possível resolver uma questão através de um algoritmo que forneça facilmente a resposta desejada e o indivíduo é obrigado a pensar de uma maneira mais complexa, desafiante, sem previsão de retorno, trata-se de um problema. Por exemplo, um professor apresenta questões que envolvam coisas que foram ensinadas há um tempo mais longe, não revelando do que se trata ou mistura conteúdos novos com outros que os alunos de algum modo deveriam ter aprendido há algum tempo. Nesse caso o aluno vê o enunciado e não tem uma ideia definida de por onde começar, qual conceito matemático deve ser aplicado, e muitas vezes quando acha que conseguiu saber qual conceito aplicar ele acaba se enganando e tendo que recomeçar o problema desde o princípio. Dante (2000)

Dante (2000) também apresenta uma definição semelhante. Segundo ele o exercício serve para o aluno exercitar, para colocar em prática o que aprendeu, para guiar-se por um ou mais algoritmos que são apresentados no texto de determinado exercício. Enquanto problema é algo que exige de quem deseja resolvê-lo uma ação, uma iniciativa para resolver algo desconhecido, exige criatividade, percepção e não algoritmo. Ele ressalta a importância de ambos defendendo um equilíbrio entre eles na sala de aula, que ambos sejam trabalhados a seu momento durante o ano letivo numa sala de aula.

Tal diferenciação entre exercício e problema, no entanto, pode ser relativa. De acordo com Kantowsky (1974) a mesma questão pode ser um problema para um, para um segundo um exercício por ser para ele algo muito simples e para um terceiro uma frustração porque o mesmo não se encontra preparado com conhecimentos prévios para resolvê-lo e acaba se frustrando. Ou seja, depende da situação em que ele é apresentado e dos conceitos que cada um já adquiriu ao longo da vida.

Exemplo:

Para comprar um celular Felipe pagou uma entrada de R\$ 100,00 e dividiu o restante do valor em seis prestações. Ao final Felipe pagou um total de R\$ 820,00. Qual o valor pago por Felipe em cada prestação?

O exemplo acima trata a princípio de um problema, mas pode também significar apenas um exercício entre dezenas sobre equação do 1º grau proposto durante uma aula

apenas com o objetivo de verificar o aprendizado do conteúdo. Ou seja, uma lista de exercícios onde se muda o texto, mas que apresenta questões muito parecidas.

Um aluno já acostumado a esse conteúdo, pode simplesmente utilizar da regra aprendida ou apenas decorada sobre equação do 1º grau. Assim o aluno define:

x – valor pago em cada parcela

Entrada = 100

Parcelas: 6

Total = 820

Ele perceberá e colocará na equação:

$$6x + 100 = 820$$

$$6x + 100 - 100 = 820 - 100$$

$$6x = 720$$

$$(6x)/6 = 720/6$$

$$6x = 720$$

$$x = 120$$

Este aluno que respondeu a questão apenas seguindo o algoritmo da equação, muitas vezes pode nem sequer dar a resposta escrita, se limitando apenas a descobrir a incógnita mecanicamente. Nesse caso ele a encarou como se fosse mais um exercício.

Para outro aluno, essa questão pode ser um problema completamente novo e ele pode até não perceber qualquer semelhança com outro problema e encará-la como um desafio.

Já para um terceiro poderá ser encarado como um problema semelhante a outro já resolvido por este e assim terá uma base de como resolvê-la.

Exemplo 2: Juliana foi comprar um par de sapatos e seu preço numa loja era de R\$ 82,00. Ela foi a uma segunda loja e encontrou o mesmo sapato só que por um preço que era 80% o valor do cobrado na loja anterior. Qual era o preço cobrado na segunda loja?

Essa questão envolvendo porcentagem também pode ser encarada como problema ou exercício dependendo do conhecimento do aluno.

Lester (1994) afirma que uma situação pode não significar problema se a pessoa não manifestar vontade em resolvê-la. Ou seja, não sente desejo, motivação e acaba

deixando-a de lado ou inicia a resolução, mas não considera importante insistir para chegar à resolução.

O que Lester diz e que também Vila e Callejo (2006) têm igual opinião, aponta outra diferença entre exercício e problema. Exercício é algo rotineiro que se faz de modo simples e não envolve sentimentos como animação, êxito, frustração, motivação, garra, empenho. Problemas envolvem justamente tudo isso, pois está sobre grande influência das escolhas que podem levar ou não à resolução. Uma escolha bem feita que dá sinal de futura resposta correta traz ânimo, vontade de prosseguir e outros sentimentos do tipo. Já escolhas mal sucedidas podem fazer com que alguém que se propôs a resolver desista por achar que perdeu tempo, que não é capaz de resolver, entre outros sentimentos negativos.

Assim conclui-se que situações emocionais interferem e definem para cada pessoa as situações interessantes ou não pelas atividades matemáticas.

Vale lembrar por outro lado que até as ideias ruins podem ser utilizadas de forma positiva para mostrar que se trata de um caminho extremamente errado. Porém esse fato geralmente não ocorre devido à ideia de pressa, ou seja, é o tempo também afetando e diferenciando exercícios de problemas. Os exercícios possuem uma duração prevista em tempo, já os problemas dependem quando se consegue achar um caminho para chegar ao resultado e se existem dois ou mais caminhos a escolha por um deles em específico. Assim sendo eles são diferentes entre si no tempo de execução e por fim a diferença da análise do resultado e variações do problema que não é necessária nos exercícios.

Diferentes tipos de problemas são focalizados a seguir.

CAPÍTULO 3 - TIPOS DE PROBLEMAS

Existem algumas divisões entre os tipos de problemas que podem ser apresentados, conforme será relatado.

Polya (2000) divide os problemas em dois tipos: os problemas de determinação e os problemas de demonstração.

- Problema de determinação: Tem por objetivo descobrir o valor da incógnita através dos dados e da condicionante.
- Problema de demonstração: Tem por objetivo chegar a uma tese, ou conclusão, partindo de uma situação inicial, a hipótese.

Charles e Lester (1986) por sua vez fazem uma divisão entre problemas adequados para o 1º ciclo do ensino básico, reunindo cinco diferentes tipos de problemas:

- Problemas de um passo:

Problemas que só dependem da aplicação direta de uma das quatro operações básicas.

Exemplo:

Luís comprou alguns presentes no total de R\$ 165,00. Esse valor foi dividido em três parcelas. Qual o valor que será pago em cada parcela?

- Problemas de dois ou mais passos:

Precisam da aplicação de duas ou mais operações básicas.

Exemplo:

Pedro tinha R\$ 30,00, foi a um restaurante e gastou R\$ 12,00. Com o que sobrou, ele guardou a metade e deu o restante a sua irmã. Quantos reais a irmã de Pedro ganhou?

- Problemas de processo: Só podem ser resolvidos utilizando uma ou mais estratégias de resolução.

Exemplo:

Quando Ana resolveu aprender canto, já sabia quatro canções. Ao fim da primeira semana de aulas de canto, já sabia cinco canções. No final da segunda, sabia sete e no final da terceira semana sabia dez. Se continuar a

aprender nesse ritmo, quantas canções saberá Ana ao fim de quinze semanas?

- Problemas de aplicação: Usam dados da vida real, e uma ou mais operações e estratégias de resolução.

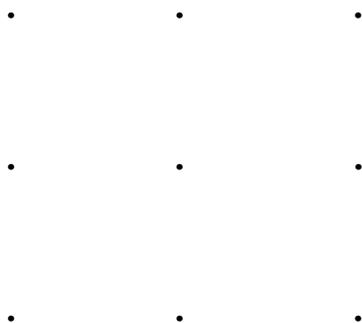
Exemplo:

Uma sala de aula tem 35 alunos. Um professor deseja dar uma atividade em grupo de 3 ou 4 pessoas. Como organizar esses grupos de acordo com o número de alunos que estarão presentes, ou seja desconsiderando aqueles que faltarem de modo que nenhum grupo tenha excesso ou falta de alunos.

- Problemas tipo *puzzle* (enigma): São os problemas que são enigmas, e que precisam de uma percepção especial para serem resolvidos.

Exemplo:

Desenhe quatro linhas, sem levantar o lápis do papel, de modo que passem pelos nove pontos



O Grupo de Investigação em Resolução de Problemas (GIRP) (Vale, 2002) também faz sua divisão entre os tipos de problemas.

- Problemas de processo: Problema sem algoritmo definido para resolvê-lo; é o problema que não deve estar ligado a nenhum conteúdo específico

- Problema de conteúdo: Problema que requer a utilização de determinado conteúdo para resolvê-lo.
- Problemas de aplicação: Usam dados da vida real, e uma ou mais operações e estratégias de resolução
- Problemas de aparato experimental: Para ser resolvido necessita de experiências como pesar, medir, contar.

Dante (2000) também classifica e exercícios e os problemas, como segue.

- Exercícios de reconhecimento: Tem por objetivo fazer com que o aluno lembre-se de um conceito, de uma definição, de uma propriedade aplicando-os para resolver o que se pede.

Exemplos:

Dentre os números: 4, 7, 8, 12, 14, 15, 17, 41, 66, quais são ímpares?

Escreva os sucessores de 77, 121 e 143.

- Exercícios de algoritmos: São exercícios para serem resolvidos passo a passo mediante a aplicação das operações básicas.

Exemplos:

$$6(5 + 7) - 18$$

$$84 : 7$$

- Problemas padrão: São problemas em que se aplica um ou mais algoritmos recém aprendidos servindo apenas para fixá-los. Desse modo para resolvê-los o aluno deve saber associar o enunciado aquele conteúdo que lhe foi anteriormente ensinado. Sendo assim tão direto ele geralmente não desperta a curiosidade e vontade nos alunos.

Exemplos de problemas padrão simples:

Roberto tinha 35 balas e comprou mais 17. Com quantas balas ele ficou?

João, Raquel e Débora tinham 4 sapatos cada um. Quantos sapatos eles tinham juntos?

Exemplos de problema padrão composto:

Um carro foi e voltou entre as cidades A e B. Entre as duas cidades existe uma cidade C que está a uma distância de 30 Km da cidade A e ao dobro

da distancia para a cidade B. Qual foi a distância percorrida pelo carro no percurso de ida e volta entre as cidades A e B?

Júlia tinha 8 laranjas e comprou mais 12. Ela decidiu então dividir entre ela, seu marido e seus três filhos. Quantas laranjas cada um comeu?

- Problemas processo ou heurísticos: São os problemas onde o algoritmo está implícito no enunciado não sendo possível identificar de imediato. São problemas que deixam a sensação de desafio.

Exemplo:

Cinco pessoas se encontram e resolvem cumprimentar-se entre si com um aperto de mãos. Quantos apertos de mãos foram dados no total?

- Problemas de aplicação: São problemas originados de uma situação real. Nas quais os dados não vêm escritos e sim é preciso pensar quais são eles, fazer um levantamento, ver o que é necessário e o que não é.

Exemplo:

Faça um planejamento de despesas e gastos sabendo que Roberto terá a seu dispor um salário de R\$ 1000,00.

É preciso aí separar o que é inevitável e cortar gastos desnecessários para que os gastos não ultrapassem o valor do salário.

- Problemas de quebra-cabeça: São problemas desafiadores que para serem resolvidos necessitam de uma percepção especial, a descoberta de um truque, e isso faz com esses problemas sejam motivadores para a maioria dos alunos.

No próximo capítulo é discutida a forma de se resolver um problema.

CAPÍTULO 4

COMO RESOLVER UM PROBLEMA

Após um problema ser escolhido ou proposto para se resolver, é preciso seguir todos os passos necessários desde a leitura, pensando e desenvolvendo a resolução, descobrindo o que se pede e, não menos importante, analisar o resultado encontrado.

Polya (2000) dividiu a resolução de um problema em quatro fases:

- Compreensão do problema
- Estabelecimento de um plano
- Execução do plano
- Retrospecto

Nos itens seguintes são focalizadas cada uma dessas fases.

4.1 COMPREENSÃO DO PROBLEMA

Para iniciar a resolução de um problema a primeira coisa a se fazer é ler atentamente por completo todo o seu enunciado. Essa leitura deve ser feita com clareza de modo que a percepção sobre enunciado permita a familiarização com o problema.

Após a leitura geral do problema é o momento de destacar as partes principais desse problema.

Num problema de determinação as partes principais são a incógnita, os dados e a condicionante.

Por outro lado, num problema de demonstração essas partes são a hipótese e a conclusão.

Para obter essas informações, quem deseja resolver problemas deverá saber do que se tratam essas partes questionando-se e tentando respondê-las.

A incógnita é uma variável de valor desconhecido cujo valor pode ser descoberto através da utilização correta dos dados do problema. É aquilo que se busca, que se necessita obter em um problema de determinação.

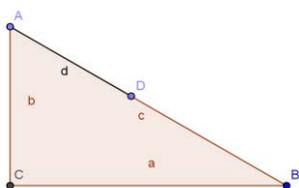
A incógnita pode ter diferentes significados: pode ser valor numérico como, por exemplo, a raiz de uma equação, pode ser a medida de um lado ou de ângulo, pode ser a localização de um ponto, por exemplo, onde se cruza uma reta, pode ser uma figura, uma parte de uma figura dada, um número numa sequência, porcentagem, lucro, um valor máximo ou mínimo.

Outra parte importante do problema são os dados que é toda informação concedida através do enunciado do problema. É através dos dados que é possível calcular a incógnita pedida. Muitas vezes a relação entre os dados e a incógnita pedida não é direta sendo preciso desvendar também outras incógnitas intermediárias.

Por sua vez, a condicionante é a condição que tem ser satisfeita dentro de um determinado problema. Caso a condicionante não possa ser satisfeita o problema não tem solução.

Exemplo:

Para ir à casa de seu amigo Pedro precisa se deslocar do ponto B até o ponto D conforme a figura abaixo. Sendo a distância $AC = 300$ m e $CB = 400$ m e $AD = 320$ m, calcule a distância que Pedro deve percorrer.



Nesse problema os dados correspondentes às distâncias de AC e CB servem para calcular a distância AB que por sua vez será utilizada para calcular a distância BD que é a distância pedida na pergunta do problema.

A terceira parte importante de um problema de determinação é a condicionante, pois é ela que relaciona os dados e a incógnita.

No caso do exemplo anterior a condicionante era a figura dada com AC e CB perpendiculares e junto com AB formando um triângulo retângulo e que a distância pedida era parte do segmento AB e que a outra parte era o segmento AD com a distância de 320 m.

Exemplo:

Luisa comprou três presentes numa loja. O primeiro no valor de R\$ 20,00, o segundo no valor R\$ 36,00 e o terceiro no valor médio entre eles. No final recebeu um desconto de 10%. Qual o valor total pago por Luisa?

Nesse problema, para se encontrar a resposta é necessário achar o valor do terceiro presente, encontrar a soma total para achar o valor sem desconto e por fim achar o valor com desconto.

Os dados do problema são os valores dos dois primeiros presentes, e existe a condição que é a definição do valor do terceiro presente como o valor médio dos outros dois e também a condição da porcentagem de desconto.

Esse problema pode ser modificado de algumas maneiras gerando assim outros problemas.

Um dos valores dados pode ser aumentado ou reduzido ou pode ser alterado o desconto e assim um novo problema é criado. Mesma coisa se acrescentarmos outros dados.

3 - Juliana foi comprar um par de sapatos e seu preço numa loja era de R\$ 82,00. Ela foi a uma segunda loja e encontrou o mesmo sapato só que por um preço que era 80% o valor do cobrado na loja anterior. Qual era o preço cobrado na segunda loja?

Nesse problema seus dados são que um par de sapatos custa R\$ 82,00 em uma determinada loja e custa 80% desse valor em outra loja.

4.2 ESTABELECIMENTO DE UM PLANO

Após a leitura do problema identificando os dados, a incógnita e a condicionante, é preciso estabelecer um plano para resolver o problema.

Esse plano é o caminho que levará à resolução do problema, implicando na determinação das relações entre os dados, a incógnita e a condicionante, e também as contas, os cálculos, os desenhos a serem feitos para calcular para calcular a incógnita.

O surgimento de um plano pode ser imediato ou demorado dependendo da dificuldade do problema em si, do conhecimento daquele que deseja solucionar, da sua percepção sobre o problema e de sua prática na resolução de problemas.

Se a criação de um plano não for imediata, é preciso pensar em algumas perguntas adequadas.

Polya lista algumas perguntas que podem levar ao estabelecimento de um plano como as seguintes:

Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente?

Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil?

Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.

Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?

É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? (Polya, 1995)

Uma pergunta que pode ser a primeira a ser feita é sobre o conhecimento de algum problema correlato.

Um problema correlato é aquele que possui relações com o problema que se deseja solucionar e que já foi resolvido anteriormente pela pessoa.

A importância de conhecer um problema semelhante é que desse problema podem surgir idéias ou um plano completo para resolver o problema atual.

É comum ao se tentar resolver um problema, que sejam encontrados alguns problemas correlatos distintos e aí será preciso definir qual deles é o mais vantajoso utilizar. Uma relação de correspondência muito importante está relacionada à incógnita. Entre problemas uns e outros problemas correlatos, devem ser considerados aqueles que possuem a mesma incógnita como prioridade em relação aos que não a possuem. Considerando a incógnita estamos restringindo a comparação entre problemas para uma comparação entre problemas bem próximos.

Muitos são os exemplos de problemas que independentes dos dados têm como objetivo o mesmo, ou seja, calcular a mesma incógnita.

Exemplo:

Em um triângulo dados dois lados e um ângulo, calcular o comprimento do outro lado.

Dado esse problema pode-se utilizar de outros problemas anteriormente resolvidos que possuam a mesma incógnita. Existem diversos relacionados a encontrar um lado de um triângulo o que varia são os dados que podem ser dois lados e um ângulo ou um lado e dois ângulos. O que também pode variar é a posição do ângulo com relação ao lado.

Assim a identificação de um problema correlato de mesma incógnita que o atual problema, permite tentar utilizar o método usado para resolver o problema anterior ou até mesmo o seu resultado. Salvo as dificuldades que poderão ser encontradas na sua execução, há um caminho a seguir.

Se por acaso não for encontrado nenhum outro problema que possui a mesma incógnita daquele que se pretende resolver pode-se então buscar um problema que possua uma incógnita semelhante.

Por exemplo, demonstrar que se dois ângulos estão em planos diferentes, mas cada lado de um deles é paralelo ao lado correspondente do outro e está também na mesma direção então esses ângulos são iguais.

Nesse caso pode-se tentar encontrar problemas com incógnita semelhante. É preciso reparar na tese desse problema, pois se trata de um problema de demonstração, no qual são requeridas conclusões idênticas ou semelhantes a problemas tais como: “Se dois triângulos forem congruentes, então os ângulos serão congruentes”.

Outra forma de encontrar um bom problema correlato para se resolver um proposto é observar casos com analogia, particularização, ou generalização entre eles.

Analogia significa um tipo especial de semelhança. Um objeto é análogo ao outro se suas respectivas partes coincidem em certas relações.

Exemplos:

- Paralelogramo retângulo é análogo ao paralelepípedo retângulo.
- Segmento de reta é análogo a um triângulo que é análogo a um tetraedro.
- Um octógono é análogo a uma pirâmide de base octogonal.

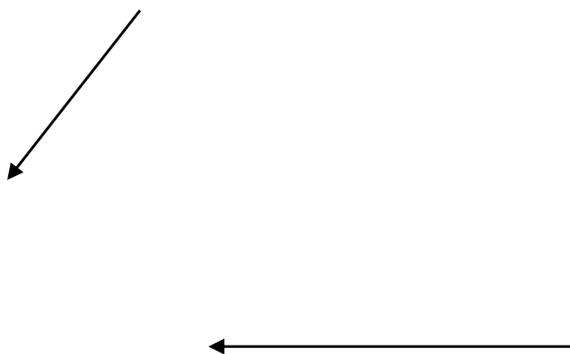
Analisando os exemplos acima podemos ver que entre eles se mantém as coincidências de cada lado e face independente da dimensão.

Analogias como essas permitem simplificar o problema proposto resolvendo um problema análogo e utilizando seu resultado ou a parte que for necessária. É muito útil em casos de problemas mais complexos.

Particularização é considerar um caso particular dentro de um problema proposto.

Exemplo:

São dadas as velocidades de dois navios e as respectivas posições num determinado momento. Ambos os navios seguem rumos retilíneos, com velocidades constantes. Calcular a distância entre os navios no momento em que eles estiverem mais próximos um do outro. (Polya, 1995)



Primeiramente é necessário compreender o problema e definir a incógnita, os dados e a condicionante.

- Incógnita: A menor distância entre os navios em movimentos.
- Dados: Posições e velocidades dos navios.
- Condicionante: A distância entre os navios no momento em que eles estiverem mais próximos entre si.

Nesse problema o uso de uma particularização é muito importante, imaginando um problema correlato onde ocorra o caso particular em que uma das velocidades é nula. Percebendo que o repouso é um caso particular do movimento, a partir daí há um caminho para resolver o problema proposto.

A Generalização ocorre quando a partir de um ou alguns casos particulares tomamos como certeza todo o conjunto.

Exemplo:

$$1^3 + 2^3 = 3^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$

Podemos observar que somando os cubos de 1, 2, 3, 4 estamos sempre obtendo como resultado um número ao quadrado.

Se considerarmos que essa regra vale para todo o conjunto dos inteiros estamos fazendo uma generalização.

4.3 - EXECUÇÃO DO PLANO

A execução do problema é a parte em que se coloca em prática todo o plano pensado anteriormente. Nessa fase é importante saber se há como verificar cada passo, pois um erro inicial vai influenciar no resultado final e depois com o resultado inesperado em um problema longo fica difícil saber onde está o erro.

Deve-se estar atento a qualquer detalhe, verificar se os passos foram ou estão sendo cumpridos adequadamente, se não há erros de cálculos.

4.4 - Retrospecto

Finalmente a última fase da resolução de problemas do modelo de Polya é o retrospecto. Nessa fase é hora de olhar para o que foi feito e para como feito e se questionar isso, tentar tirar a prova, analisar a utilidade e, ainda se, seria possível fazer de uma outra maneira. São exemplos de perguntas adequadas nessa fase:

É possível verificar o resultado. É possível verificar o argumento.
 É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isso num relance?
 É possível utilizar o resultado, ou o método em algum outro problema?
 (Polya, 1995)

4.5 - RESOLVENDO PROBLEMAS ATRAVÉS DOS QUATRO PASSOS:

A resolução de alguns problemas envolvendo o uso dos quatro passos é ilustrada a seguir:

Um carro foi e voltou entre as cidades A e B. Entre as duas cidades existe uma cidade C que está a uma distância de 30 Km para a cidade A e ao dobro dessa distancia para a cidade B. Qual foi a distância percorrida pelo carro no percurso de ida e volta entre as cidades A e B?

O primeiro dos quatro passos é a compreensão do problema. Nessa fase tenta-se descobrir do que se trata o problema, definir qual é a incógnita procurada, quais são os dados e qual é condicionante.

A orientação de Polya é que seja feita primeiramente uma leitura completa e depois pouco a pouco em cada trecho do problema para que possamos identificar os elementos fundamentais do problema que são os dados, a incógnita e a condicionante para os problemas de determinação e a hipótese e a tese para problemas de demonstração, (Polya, 1995).

A incógnita desse problema é a distância percorrida somando a ida e a volta entre as cidades A e B.

O primeiro dado é que entre as cidades A e B existia um cidade C. Depois vem os detalhes da localização da cidade C que fica a 30 Km de A e o dobro desta distância em relação a B.

A partir daí é possível ir para o segundo passo, o estabelecimento de um plano. É necessário estabelecer as relações entre os dados e a incógnita. O plano a ser estabelecido é calcular a distância entre C e B, somar com a distância entre A e C e por

fim dobrá-la caracterizando a inclusão da volta uma vez que a soma de ida e volta é o valor da incógnita.

Sabemos que a distância entre as cidades A e C é de 30 Km. Então, para achar a distância entre as cidades C e B é preciso multiplicar por 2 as distâncias entre A e C. Após isso é só realizar a soma e considerar que se trata de ida e volta conforme já havia sido pensado.

Desenhar uma figura também pode auxiliar na resolução do problema.



O próximo passo é a execução do plano. Nesse passo deve-se executar tudo aquilo que foi pensado no passo anterior.

$$\text{Distância entre A e C} = 30 \text{ Km}$$

$$\text{Distância entre B e C} = \text{dobro de AC}$$

$$BC = 2 AC$$

$$BC = 2 \cdot 30$$

$$BC = 60 \text{ Km}$$

Como são dadas as distâncias AC e CB então o próximo passo é calcular a distância AB.

$$AB = AC + CB$$

$$AB = 30 + 60$$

$$AB = 90 \text{ Km.}$$

Finalmente é necessário lembrar que se deseja calcular a ida e a volta, então a distância procurada é o dobro da distância AB.

Logo:

$$d = 2 AB$$

$$d = 2 \cdot 90$$

$$d = 180 \text{ Km.}$$

Por fim chega-se ao último passo, o retrospecto do problema.

Nessa fase verifica-se o raciocínio foi correto, se os cálculos também foram.

De fato, o valor CB realmente é 60 pois corresponde o dobro de AC dado no exercício. Assim como é possível verificar 90 como a soma de $60 + 30$ e 180 como o dobro de 90.

Pode-se também a partir desse problema formar novos problemas. Por exemplo, pode-se considerar que a distância CB é o triplo de AC ou que após a viagem de ida e volta entre as cidades A e B a mesma pessoa vai para outra cidade perpendicular à reta entre as cidades A e B, que tem dois quintos da distância.

Exemplo:

Em 2010, entre 2% e 6% da população de uma cidade com 30.000 habitantes enviaram, por ocasião das festividades natalinas, cartões de felicitações a parentes e amigos. Sabe-se que cada habitante enviou, no máximo, um cartão.

Considerando-se que 25% dos referidos cartões tenham sido enviados a moradores de cidades do estado de São Paulo, é correto afirmar que o número que expressa a quantidade de cartões enviada a esse estado está entre:

- a) 900 e 1.300.
- b) 1.300 e 1.700.
- c) 1.700 e 2.100.
- d) 100 e 500.
- e) 500 e 900.

- Compreensão do problema

São fornecidos os seguintes dados:

2% a 6% dos habitantes de uma cidade mandam cartão.

A cidade possui 30.000 habitantes.

Cada habitante manda um ou nenhum cartão.

25% dos cartões foram enviados para moradores do estado de SP.

Pede-se a quantidade de cartões mandados a moradores desse estado. Essa é a única incógnita do problema. Ela pode ser representada pela letra “Q” por exemplo, para facilitar ao longo do problema. Pode-se chamar o menor valor de Q de Q_{min} e o maior valor de Q_{max} . Ao longo do problema é necessário também saber o número de habitantes que enviaram cartão, o qual pode ser representado por H com H_{min} e H_{max} , correspondendo a 2% a 6% da população, respectivamente.

- Estabelecimento do plano

Primeiramente pode-se perguntar se já foi resolvido algum problema semelhante.

Trata de um problema de porcentagem e acredita-se que geralmente são apresentados problemas mais simples antes envolvendo esse conteúdo, mas se não foi dado nada antes ainda assim é possível resolvê-lo.

Deve-se entender que não se trata de um número fixo de cartões e sim um intervalo. Esse intervalo é de 2% a 6% do número de habitantes da cidade que por sua vez é de 30.000.

Após a definição do total de pessoas que enviam cartões é preciso estar atento para quantos cartões são enviados por pessoa; e no caso, é enviado nenhum ou um cartão por pessoa, precisa-se ainda calcular quem envia para com o destino para o estado de SP. É dado que são enviados 25% dos cartões para esse estado e então assim é possível calcular o total de cartões que serão enviados.

- Executando o plano

Hmin: 2% de 30.000.

$$H_{\min} = (2/100) \cdot 30.000$$

Hmin= 600 habitantes

Ou

$$100 H_{\min} = 60.000$$

$$H_{\min} = 60.000/100$$

Hmin = 600 habitantes

Hmax: 6% de 30.000.

$$H_{\max} = (6/100) \cdot 30.000$$

Hmax= 1800 habitantes

ou

$$100 H_{\max} = 180.000$$

$$H_{\max} = 180.000/100$$

$$H_{\max} = 1800 \text{ habitantes}$$

Assim entre 600 e 1800 habitantes daquela cidade enviam cartões.

Em seguida devemos calcular quantos cartões são enviados para SP.

25% de 600

$$(25/100) \cdot 600 = 150$$

$$Q_{\min} = 150$$

25% de 1800

$$(25/100) \cdot 1800 = 450$$

$$Q_{\max} = 450$$

Logo a quantidade de cartões enviados ao estado de SP está entre 150 e 450 que por sua vez está entre 100 e 500 representados na alternativa E.

- Retrospecto

Deve-se verificar se os cálculos foram feitos corretamente. Em questões de alternativas sempre tem uma que é certa e outras que servem de armadilhas se os cálculos não forem realizados corretamente. A verificação pode resultar na identificação de erros.

Verifica-se passo a passo se o número de habitantes que enviam cartão está correto e se o número de cartões enviados para SP está correto.

É possível formar outros problemas a partir desse?

Sim, por exemplo, pode-se incluir diferentes estados e colocar a mesma questão aos que fazem parte da região Sudeste.

A escolha de problemas e exercícios para a resolução em sala de aula é discutida a seguir.

CAPÍTULO 5

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM SALA DE AULA

Problemas e exercícios propostos em sala de aula são examinados nos itens seguintes, quanto à adequação e a forma de serem trabalhados.

5.1 - ESCOLHENDO PROBLEMAS ADEQUADOS

Os problemas apresentados em sala de aula devem ser adequados ao público que se deseja ensinar. O mesmo também vale para quem em certo momento da vida busca ou precisa resolver problemas matemáticos. É necessário escolher problemas apropriados.

Primeiramente é necessário saber a diferença entre exercício e problema. Sabendo de fato o que é um verdadeiro problema é necessário estar atento a outros detalhes importantes que fazem um problema ser adequado ou não.

O professor deve escolher problemas que não sejam nem muito fáceis, nem muito difíceis, se colocando a imaginar como aluno pensa e as dificuldades que ele teria em cada problema que lhe for apresentado. Por exemplo, os alunos que estão na sala de aula desse professor têm condições de resolver certos problemas de áreas de figuras? Em caso afirmativo, em que profundidade, em caso contrário, o que lhes falta para a compreensão e que outros problemas poderiam ser apresentados.

A duração que o professor deseja que o problema seja resolvido tem que estar fixado e também estar dentro da realidade do aluno. As aulas têm hora para acabar e se o professor deseja que o problema seja resolvido dentro do espaço de tal ou tais aulas é preciso planejar se colocando no lugar do aluno e propondo problemas que os mesmos consigam resolver no tempo pré-determinado ou até antes dependendo de como cada aluno acabar se saindo diante dos problemas propostos. É preciso considerar também que os alunos levam intervalo de tempo diferentes por estarem mais preparados ou por características pessoais, enquanto outros têm mais dificuldade ou são mais lentos com a análise, com a execução, com a escrita ou com a verificação dos resultados.

O professor deve também levar em conta os conhecimentos prévios do aluno, verificando se ele possui as condições para começar a resolução e condições para imaginar uma solução dentro de certo prazo de tempo. Primeiro porque há um conteúdo a seguir e segundo porque um problema pode se tornar entediante para algumas pessoas se depois de pensar bastante, não se conseguir obter uma direção para seguir a caminho de um resultado final. Nesse caso, o aluno perde a vontade de resolver o problema, deixando-o de lado ou até continua tentando resolve-lo, mas apenas por obrigação porque o professor ordenou que o aluno assim fizesse.

Por melhor que seja o problema pode ser que exija demais do aluno, envolvendo conteúdos que ele não aprendeu seja por estar em séries inferiores ao desejado para resolver o problema, ou talvez não se encontrar preparado por não ter compreendido suficientemente bem aquilo que seria necessário que ele aprendesse para resolver esse problema ou ainda, não ter qualquer outro conhecimento prévio que indiretamente possa influenciar a resolução. Assim sendo é inviável para o aluno resolvê-lo e, em decorrência, pode lhe trazer idéias negativas sobre resolução de problemas, sobre a aula de matemática ou a matemática em si.

Por outro lado, caso o problema seja muito fácil, torna-se um mero exercício e o aluno deixará de viver a experiência da resolução de problemas, de sentir os desafios provocados por ela. Ele carregará consigo essa confusão entre exercícios e problemas e ao se deparar com algo que seja um problema de verdade para ele, vai encará-lo como um exercício e se frustrar. Ao tentar encarar um problema como exercício o aluno colocará em cena toda a crença que ele tem de que se trata da mesma coisa. Assim o aluno achará que precisa resolver o problema em pouco tempo, e à medida em que isso não acontece o aluno se frustra, achando que todas as informações devem estar claras no enunciado e em um problema isso não é bem assim. O aluno não vai saber diferenciar que existem caminhos diferentes que podem ser tomados e que isso é uma decisão importante. Se não achar esse caminho vai ficando entediado, desistirá e não saberá aproveitar e nem aprender nada de suas tentativas erradas. Se chegar a um bom resultado provavelmente não levantará grandes questionamentos e nem fará nenhuma reflexão acerca de como chegou ao resultado.

Então pelo exposto conclui-se que é necessário analisar os conhecimentos prévios dos alunos antes de propor um problema e que cada problema proposto deve ter um nível intermediário, não sendo nem fácil e nem difícil.

Um problema bem formulado além de levar em conta as características de nível de dificuldade e conhecimentos prévios, deve buscar estar dentro do contexto do aluno e da realidade.

O contexto é muito atrativo para o aluno, interessando-o de uma maneira única. O aluno de um determinado local não tem os mesmos interesses de outro e, portanto, o professor pode usar o contexto do aluno para tentar despertar seu interesse pela resolução de problemas.

Os problemas que apresentam situações desconhecidas, que estejam fora do contexto de quem lê o problema muitas vezes não despertam interesse de serem resolvidos e muitas vezes são resolvidos não com sentido, mas visando apenas descobrir valores.

Algumas coisas devem ser observadas nessa questão do contexto. De uma forma geral é bom observar qual a localidade, os costumes locais, a idade e interesses dos alunos, entre outras coisas.

Dante (2000) afirma que adultos e crianças têm interesses diferentes e considera que assuntos como problemas de juro, descontos, preços de eletrodomésticos entre outros não despertam o mesmo interesse nas crianças. Ele afirma que o aluno deve estar motivado, interessado em resolver o problema e que o texto do problema é fundamental para que isso aconteça, ou seja, é bom que hajam problemas cujos enunciados sejam interessantes para o aluno. Nesse caso segundo ele os problemas poderiam ter temas como música popular, esportes, televisão dentre outros.

Um bom problema também deve ser real para o aluno tendo apenas dados e perguntas reais. Todos os valores devem ser reais, tanto os que são fornecidos como dados quanto o resultado obtido após os cálculos. Se for pedido para calcular uma distância essa distância tem que ser real, se for comprimento também, se for idade de uma pessoa tem que estar dentro da idade possível de um ser humano, se for a idade de uma criança não pode ser a de um adulto, se for velocidade de um carro comum não pode ser comparada a de um avião.

Dados artificiais desmotivam os alunos fazendo com que eles questionem o porquê de serem apresentados valores tão fora da realidade. Por outro lado se os dados forem de acordo com a realidade, mas o resultado final não for, causará confusão nos alunos e os fará acreditar que eles estejam errados mesmo após resolverem tudo corretamente.

Os problemas a serem apresentados, segundo Dante, devem visar a determinação de um elemento realmente desconhecido, ou seja, a resposta ser obtida através da resolução correta do problema.

Um bom problema também não deixa em evidência qual operação aritmética ou quais delas devem ser utilizadas na resolução. É interessante para o aluno que essa informação seja obtida após ele ter um momento de reflexão, elaborando o devido plano para a resolução do problema. Aí sim como resposta de seu raciocínio ele descobrirá qual caminho deve seguir. Se o aluno não fizer esses esforços não verá a importância do problema e o encarará como um simples exercício.

5.2 - ESCOLHENDO EXERCÍCIOS ADEQUADOS

Os exercícios também podem se tornar mais interessantes se forem apresentados de uma maneira adequada.

Dante (2000) afirma que os exercícios de reconhecimento ocorrem em sua maioria em questões de múltipla escolha, verdadeiro ou falso ou ainda de preenchimentos de lacuna. Para o autor é mais interessante quando um problema é proposto na forma: “De um exemplo de”. Essa forma permite que os alunos deem respostas diferentes, mas ao

mesmo tempo corretas o que é muito interessante em caso de discussão sobre esses problemas.

Pode ser discutido porque uma resposta é válida e a outra não, porque existe mais de uma resposta correta em um determinado problema, ou ainda se além das apresentadas existe alguma outra resposta correta. Isso é possível quando não existe uma única solução e sim um conjunto solução, e se pede apenas uma ou algumas de acordo com o enunciado do problema.

Exemplos:

1 – Dê exemplo de dois múltiplos 4 entre 30 e 50.

Nesse exemplo os alunos podem dar como resposta qualquer combinação com dois dos seguintes resultados: 32, 36, 40, 44 e 48.

2 – Dê dois exemplos de números entre 50 e 80 que divididos por 6 sobra resto 4.

A resposta desse problema é qualquer dois números dos seguintes: 52, 58, 64, 70, 76.

3 – Dê exemplo de uma fração que está entre $\frac{5}{8}$ e $\frac{7}{10}$.

Existem infinitas frações nesse intervalo.

Um aluno pode optar por fazer o m.m.c e verificar $\frac{5}{8} = \frac{25}{40}$ e $\frac{7}{10} = \frac{28}{40}$ e escolher a fração $\frac{26}{40}$ como resposta.

Outro aluno pode optar por dividir colocando na forma decimal: $\frac{5}{8} = 0,625$ e $\frac{7}{10} = 0,70$ e escolher $\frac{65}{100} = 0,65$ como resposta.

Também os exercícios de algoritmos como 47×6 ou $363 + 514$ podem se tornar mais motivadores se forem apresentados de maneiras mais interessantes.

Exemplo:

O quadrado abaixo é conhecido como quadrado mágico. Complete-o com algarismos de 1 a 9 sem repetição de modo que a soma das horizontais, verticais e diagonais seja sempre igual a 15.

5.3 - ORIENTANDO E QUESTIONANDO CORRETAMENTE

Além de apresentar um bom problema o professor deve discuti-lo e questionar os alunos com perguntas adequadas a respeito dele, que façam os alunos pensar. São questões que quando feitas dão uma ajuda ao aluno fazendo-os refletirem a respeito, compreender melhor aquilo que foi pedido, mas sem fornecer a resolução de modo que o estudante não faça nenhum esforço.

O professor além de questionar o aluno no início do problema, também pode questioná-lo durante ou depois da resolução fazendo o refletir sobre o resultado ou como faria se o problema fosse modificado um pouco.

Todas essas questões propostas pelo professor devem ser questões que o aluno seja capaz de fazer para ele mesmo quando estiver sozinho.

Polya (1995) dá alguns exemplos de perguntas que podem ser feitas a um aluno ou a si mesmo se a pessoa for alguém interessada na resolução de problemas:

Qual é a incógnita?

Quais são seus dados?

Qual é a condicionante?

É possível satisfazer a condicionante?

A condicionante é suficiente para determinar a incógnita?

Ou é insuficiente?

Ou é redundante?

Conhece um problema correlato?

Por outro lado há perguntas que entregam a resolução e tiram do aluno a possibilidade de pensar por si próprio. Por exemplo, perguntar se uma questão se trata de uma equação do segundo grau sem com que o aluno perceba por ele próprio pelos dados do problema. O professor não percebe muitas vezes que na intenção de orientar o aluno acaba fazendo um questionamento errado sem querer.

Outros exemplos:

Uma região quadrada ABCD possui uma área de 64 m^2 . Deseja se traçar uma reta ligando os pontos A e C. Qual é a distância entre esses pontos?

O aluno pergunta: Devo tirar a raiz de 64?

O professor não deve dar a ele esta resposta porque estaria entregando parte da solução.

E assim o professor deve perguntar.

“Qual é a incógnita?”

“Quais são os dados?”

“Desenhe uma figura que relacione as informações contidas no enunciado e a incógnita se isso for possível.”

“O aluno poderá responder corretamente que os dados são uma região quadrada e sua área é 64 m^2 .”

Em seguida se o aluno respondeu corretamente ele pode desenhar um quadrado que represente a região quadrada dada no enunciado.

Se o aluno resolve ir até o professor perguntar se o desenho está correto e o professor encontra um erro ele deve alertar o aluno da maneira correta.

“Trata-se de um quadrado ABCD e vejo que você escreveu outra sequência de pontos”.

Uma versão errada seria falar:

“Tire esse ponto daí, coloque o ponto C aqui e o ponto A ali”.

Imediatamente após dar a orientação correta ao aluno se ele a pediu, o professor deve questionar o aluno a respeito da incógnita.

Se o aluno responde que compreendeu que é para calcular a distância entre os pontos A e C o professor pode perguntar o seguinte.

“Você percebeu que tem que calcular a distância entre os pontos A e C e tem como dado a área 64 m^2 . Consegue fazer alguma associação entre a incógnita e esse dado?”

Essa é orientação para esse problema. As perguntas corretas com relação a qualquer problema são sempre no sentido de despertar no aluno o pensamento correto e não aquele de entregar a resposta porque nem sempre o aluno vai ter alguém para quem ele possa perguntar. Por isso é necessário que o aluno esteja sempre ouvindo essas perguntas em qualquer problema. Para evitar que se tenham alunos que nada perguntem o professor pode fazer uma leitura antes que os alunos comecem a resolver os problemas e também pode corrigir ao final da aula ou na aula seguinte, sempre explicando com essas questões. O objetivo é que o professor faça com que o aluno consiga ele mesmo fazer essas perguntas corretas a si mesmo diante de qualquer problema em qualquer lugar, seja durante uma aula, em sua casa, numa prova escolar

qualquer até mesmo com outro professor que possa vir a dar aulas para esses alunos no futuro, num vestibular, num concurso, enfim em qualquer situação.

Polya (1995) alerta sobre isso. Segundo ele, se o professor questionar de maneira inadequada fará com que o aluno que compreender o que o professor disse descubra todo o mistério do problema. Caso não compreenda a pergunta, esta não lhe servirá para nada. Nessa situação, o estudante que resolveu o problema não saberá utilizar a questão apresentada pelo professor em outra oportunidade com um problema completamente diferente, pois a sugestão dada só serve para resolver determinados tipos de problemas. Menos ainda o estudante poderia chegar a uma questão particular sozinho, sem a ajuda de alguém.

Conclui-se que as questões adequadas são perguntas simples e gerais que qualquer pessoa pode fazer a si mesmo ou a outra que deseja resolver um problema seja ele do tipo que for.

CONCLUSÃO

Resolver problemas é, certamente, uma atividade importante no ensino-aprendizagem de matemática, através da qual os alunos exercitam diversas capacidades intelectuais como, por exemplo, raciocínio lógico e pensamento autônomo e crítico. De fato, para resolver problemas os alunos utilizam estratégias de diferentes naturezas para encontrar a resposta, tais como criatividade, intuição, imaginação, iniciativa, autonomia, estabelecimento de conexões, experimentação, tentativa e erro, utilização de problemas conhecidos, interpretação de resultados. Em consequência o aluno constrói um conhecimento matemático significativo, portanto, aplicável em situações diversas.

O professor em sala de aula deve escolher problemas e exercícios adequados aos alunos, saber e mostrar a diferença entre eles e em qual situação eles devem usados de acordo com o papel de cada um. Um problema adequado é aquele dentro do nível de dificuldade do aluno, dentro do contexto, que gere a vontade de resolver e que seja possível resolver dentro limite de uma aula, mais aulas ou parte dela. Cabe também ao professor ensinar seus alunos a resolver um problema, explicando a existência das fases que levam a sua resolução desde a compreensão do problema até retrospecto e estimular os alunos com questionamentos gerais que o levem a resolução desse problema e qualquer outro e que o aluno possa fazer ele mesmo quando estiver sozinho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o ensino fundamental**. Brasília-DF: CNE/ CEB, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rceb02_98.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2016.

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o ensino médio**. Brasília-DF: CNE/ CEB, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rceb03_98.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2016.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Médio**. Brasília-DF: MEC, 2000. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em: 10 jan. 2016.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília-DF: MEC/ SEF, 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acesso em: 10 jan. 2016.

COSTA, Aline Alves; MOTA, Reynaldo José Mascarenhas. **Resolução de problemas no ensino de matemática: um olhar a partir da legislação**. Disponível em: http://educonse.com.br/2012/eixo_06/PDF/112.pdf. Acesso em: 10 de janeiro de 2016.

D'AMBROSIO, Beatriz Silva. **A dinâmica e as consequências do Movimento da Reforma Matemática Moderna para a Educação Matemática brasileira**. 1987. Tese (Doutorado). Indiana: Indiana University, 1987.

D'AMBROSIO, B. S. **Como ensinar matemática hoje**. Disponível em: <http://educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Beatriz.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2016.

DANTE, Luis Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática: 1ª a 5ª séries para estudantes do curso de Magistério e professores do 1º grau**. 12. ed. São Paulo: Editora Ática, 2000.

HUERTE, Juan Carlos Sánchez; BRAVO, José A. Fernández. **O ensino da matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas**. Trad. Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.

KANTOWSKY, M. **Processos envolvidos na resolução de problemas matemáticos**. Tese (doutorado). Geórgia: University of Geórgia, 1974.

LAMONATO, Maiza; PASSOS, Carmen Lúcia Brancaglioni. **Discutindo resolução de problemas e exploração: investigação matemática: reflexões para o ensino de Matemática**.

LESTER, F. Tendências e questões em resolução de problemas matemáticos. In: R. Lesh; M. Landau. **Aquisição de conceitos e processo de Matemática**. Nova York: Academic Press.

MAYER, R. Implicações da Psicologia Cognitiva para a educação na resolução de problemas de Matemática. In: SILVER, E. A. **Ensinando e aprendendo a resolução de problemas de matemática: pesquisa múltipla perspectiva**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, p. 123-138.

NCTM. **Uma agenda para ação: recomendações para a Matemática escolar**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1980.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho. **Educação Matemática pesquisa em movimento**. 3. ed. São Paulo: Cortes Editora, 2004, p. 213 a 231.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1995.

POLYA, G. **A Resolução de problemas matemáticos na escola**. In: KRULIK, S.; REYS, R. (Eds.), **Resolução de problemas de matemática na escola**. Reston: NCTM, 1980.

POLYA, G. **Como resolver problemas: um novo aspecto método matemático**. EUA: Princenton University Press, 1975.

SCHOENFELD, Alan. **Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?** Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/schoenfeld%2091.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2016.

VALE, I. **Didática da Matemática e formação inicial de professores num contexto de resolução de problemas e de materiais manipuláveis.** Lisboa: APM.

VALE, I; PIMENTEL, T. **Resolução de problemas.** In: PALHARES, P. **Elementos de matemática para professores do Ensino Básico.** Lisboa: Lidel., 2004, p.7-51.

VILA, Antoni; CALLEJO, María Luz. **Matemática para aprender a pensar: o papel das crenças na resolução de problemas.** Trad. Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.