UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA – UNESP

FACULDADE DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

CAMPUS DE MARÍLIA

ANDERSON APARECIDO DA SILVA

ASPECTOS LÓGICOS E ALGÉBRICOS DOS CONJUNTOS *FUZZY*

Marília

2012

ANDERSON APARECIDO DA SILVA

ASPECTOS LÓGICOS E ALGÉBRICOS DOS CONJUNTOS *FUZZY*

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Filosofia da Faculdade de Filosofia e Ciências da Universidade Estadual Paulista, *Campus* de Marília, na Área de Concentração em Filosofia da Mente, Epistemologia e Lógica, sob a orientação do Prof. Dr. Hércules de Araujo Feitosa e co-orientação do Prof. Dr. Luiz Henrique da Cruz Silvestrini.

Marília
2012

Silva, Anderson Aparecido da.
S586a Aspectos lógicos e algébricos dos conjuntos Fuzzy / Anderson Aparecido da Silva. - Marília, 2012.
125 f. ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado em Filosofia) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Filosofia e Ciências, 2012.
Bibliografia: f. 112-115
Orientador: Hércules de Araújo Feitosa.
Co-orientador: Luiz Henrique da Cruz Silvestrini

1. Filosofia. 2. Lógica difusa. 3. Conjuntos difusos. 4. Teoria Fuzzy. I. Titulo.

CDD 160

ANDERSON APARECIDO DA SILVA

ASPECTOS LÓGICOS E ALGÉBRICOS DOS CONJUNTOS *FUZZY*

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Filosofia da Faculdade de Filosofia e Ciências da Universidade Estadual Paulista, *Campus* de Marília, na Área de Concentração em Filosofia da Mente, Epistemologia e Lógica, sob a orientação do Prof. Dr. Hércules de Araujo Feitosa e co-orientação do Prof. Dr. Luiz Henrique da Cruz Silvestrini.

Banca Examinadora – DEFESA

Prof. Dr. Hércules de Araujo Feitosa (Unesp/Bauru)
(Presidente e Orientador)

Prof. Dr. Edelcio Gonçalves de Souza (PUC/SP)
(1º Examinador)

Prof. Dr. Mauri Cunha do Nascimento (Unesp/Bauru)
(2º Examinador)

Marília
2012

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, acima de tudo, que está sempre presente em minha vida, guiando meu caminhar;

Aos meus pais, Osmir e Lourdes, e ao meu irmão, Peterson, pessoas fundamentais em minha vida;

Ao Professor Dr. Hércules de Araujo Feitosa, pela orientação ao longo de todo o processo de elaboração deste trabalho, além das palavras de incentivo e pela amizade;

Aos Professores Doutores Mauri Cunha do Nascimento e, ao meu co-orientador, Luiz Henrique da Cruz Silvestrini, pela ajuda cedida durante todo o processo de elaboração deste trabalho;

Ao Professor Dr. Edelcio Gonçalves de Souza, pela gentileza em aceitar o convite para compor a banca de defesa, pela leitura do trabalho e futuras sugestões;

Aos Professores Doutores Fábio Maia Bertato e Marcelo Reicher Soares, por fazerem parte da banca de defesa, pela leitura e futuras sugestões;

À minha amiga Angela, sempre presente, por toda ajuda durante a elaboração deste trabalho, pelos conselhos e pela amizade;

Aos professores do Departamento de Filosofia da UNESP/Marília, por todo o conhecimento aprendido ao longo dos meses;

Aos secretários da Pós-Graduação em Filosofia da UNESP/Marília, por serem sempre tão prestativos;

À CAPES pela bolsa concedida.

“Senhores, a única forma de alcançar o impossível,

é pensar que é possível”

(Alice in Wonderland)

RESUMO

Este trabalho se inicia com um breve resgate histórico do denominado Mundo *Fuzzy*, com destaque sobre a teoria de conjuntos *fuzzy*, teoria essa em que a bivalência da teoria usual de conjuntos não se aplica. A seguir, são discutidos aspectos sobre quantificadores, com destaque para quantificadores da lógica clássica de primeira ordem, quantificadores não clássicos e alguns quantificadores das linguagens naturais, mas que não são definíveis a partir dos usuais "para todos" e "existe algum". Alguns desses quantificadores são vistos na perspectiva da teoria *fuzzy*. De importância capital, ocorre uma análise da teoria dos conjuntos *fuzzy*, conforme inicialmente introduzida na literatura fuzzy, com destaque sobre qual e como seria a álgebra desses conjuntos. A partir desta caracterização algébrica, busca-se uma formalização das suas propriedades essenciais numa linguagem lógica proposicional, o que conduz a uma caracterização de uma particular lógica *fuzzy*.

Palavras-chave: Teoria *Fuzzy*. Conjuntos *Fuzzy.* Quantificadores *Fuzzy*. Álgebra *Fuzzy*. Lógica *Fuzzy*.

ABSTRACT

This dissertation begins with a brief historical rescue of the Fuzzy World, highlighting the Fuzzy Sets theory, a theory in which the usual bivalence of sets does not apply. The aspects of quantifiers are also discussed, especially quantifiers of the classical first-order logic, non-classical quantifiers and some quantifiers of natural languages, which are not definable from the usual "universal" and "existential". Some of these quantifiers are seen in the perspective of the fuzzy theory. Utmost importance, an analysis of the Fuzzy Sets theory occurs, as originally introduced in the fuzzy literature, with emphasis on what and how the algebra of these sets would be. From this algebraic characterization, a formalization of its essential properties in a language of propositional logic is sought, which leads to a characterization of a particular fuzzy logic.

Keywords: Fuzzy Theory. Fuzzy Sets. Fuzzy Quantifiers. Fuzzy Algebra. Fuzzy Logic.

SUMÁRIO

Introdução

É muito comum utilizarmos, no cotidiano, conceitos vagos para classificar algumas situações, tais como:

"O dia está ***muito quente***".

"Aquela menina é ***um pouco gorda***".

"A porta do meu quarto está ***quase fechada***".

"Minha nota na prova foi ***bastante insatisfatória***".

"O irmão de João é ***mais ou menos velho***".

Nos exemplos citados acima, temos alguns termos em destaque. Podemos dizer que esses termos são considerados *fuzzy*, pois são imprecisos e vagos. A expressão *fuzzy* tem sido traduzida para o português por "nebuloso" ou "difuso".

Como nos comportarmos diante de uma situação em que temos poucas informações para respostas, tais como "sim" ou "não", "falso" ou "verdadeiro", "gordo ou magro", "alto" ou "baixo", "quente" ou "frio"? Para essas situações, mesmo conhecendo algumas informações importantes, o mais apropriado seria responder com uma determinada expressão que se encontrasse entre o "sim" ou "não", entre o "falso" ou "verdadeiro", etc. Como exemplo, podemos citar: quase, talvez, bastante, um pouco, a maioria, etc.

Na teoria usual de conjuntos, temos que um determinado objeto ou é ou não é elemento de um conjunto dado, ou seja, há apenas duas opções: não pertence (0) ou pertence (1). Agora, em vista dos exemplos apresentados anteriormente, teríamos que a passagem da pertinência para a não pertinência poderia ocorrer de maneira gradual, não existindo necessariamente uma descontinuidade. Os conjuntos *fuzzy* lidam com objetos por meio de seu grau de pertinência e consideram todos os graus possíveis entre o verdadeiro e o falso, entre o sim (1) e o não (0). Em outras palavras, poderíamos admitir que um determinado objeto pertenceria “mais ou menos” a um determinado conjunto. Dessa forma, a pertinência seria uma questão de grau: algum valor real entre 0 e 1.

Como exemplo, temos:

Considerando a teoria clássica: “Se o filho é desobediente, então será castigado pelos pais”. Agora, na teoria *fuzzy*: “Se o filho é um pouco desobediente, então pode ser castigado pelos pais”. No primeiro exemplo, a afirmativa é verdadeira ou falsa, enquanto que, no segundo, a afirmativa pode assumir certos graus de verdade, com uma valoração aproximada.

Com base nos estudos apresentados pelo lógico polonês Jan Łukasiewicz, o professor de ciência da computação na Universidade da Califórnia, Berkeley, Lotfi Askar Zadeh, propôs uma teoria de conjuntos, a qual denominou de teoria de conjuntos *fuzzy*, em que a bivalência não se aplicava como usualmente e, mais adiante, sugeriu uma *lógica não clássica*, estruturada com base na sua teoria de conjuntos, também não clássica.

Como estudos sobre as teorias *fuzzy* estão sempre em evidência, pelas relevantes pesquisas no tema, reconhecemos, neste trabalho, a importância de uma análise referente ao histórico do “Mundo F*uzzy*” com destaque sobre a teoria dos conjuntos *fuzzy.* Pretendemos abordar como tais teorias foram desenvolvidas, em qual época, suas vantagens, bem como entender a relação existente entre os conjuntos *fuzzy* e os conjuntos usuais. Vislumbramos, então, apresentar uma análise da teoria relacionada aos conjuntos *fuzzy*, com destaque sobre qual e como seria a álgebra desses conjuntos e a formalização das suas propriedades numa linguagem lógica.

No Capítulo 1, apresentamos assuntos iniciais que são fundamentais para o entendimento do denominado Mundo *Fuzzy*. Resgatamos, inicialmente, um pouco da História da Lógica, com ênfase na lógica de primeira ordem; além da apresentação da teoria das inferências introduzida por Aristóteles, denominada tradicionalmente de silogismo aristotélico ou categórico. Na sequência, destacamos alguns princípios básicos que caracterizam a lógica clássica, com foco naqueles conhecidos como as “leis básicas do pensamento aristotélico”. Com isso, comentamos a obra do matemático inglês, George Boole, responsável pelo trabalho pioneiro em que estabeleceu as bases para o que hoje é conhecido como *álgebra de Boole.* Os itens iniciais são essenciais para compreendermos o trabalho do Professor Zadeh, que realizou estudos na área de Inteligência Artificial e apresentou uma proposta da aceitação de mais que dois possíveis valores de verdade, dando assim, destaque ao que denominamos de teoria f*uzzy*. Após a apresentação dessa teoria destacada por Zadeh, enunciamos algumas críticas ao que foi apresentado pelo professor. Além disso, quanto à aplicabilidade da lógica *fuzzy*, veremos que tal teoria atraiu grande atenção no mundo dos negócios e na área industrial, inicialmente pelos cientistas e engenheiros japoneses, que foram rápidos em reconhecer o enorme potencial da teoria (lógica) *fuzzy.* Neste momento, perceberemos que a teoria *fuzzy* teve grande significado quando aplicada a fenômenos complexos que não são facilmente descritos por métodos matemáticos tradicionais, especialmente quando se tem o objetivo de encontrar uma solução aproximada para determinada situação.

No Capítulo 2, como uma das vertentes de pesquisa do grupo de estudos “SALCI: Sistemas Adaptativos, Lógica e Computação Inteligente”, da UNESP, é sobre quantificadores, enfocamos, então, principalmente nas informações apresentadas por Rodrigues (2011), em que algumas ideias importantes sobre a teoria de quantificadores, desde o trabalho de Aristóteles, até a teoria dos quantificadores generalizados são desenvolvidas. Essas ideias e o contexto no qual estão inseridas são fundamentais para compreendermos um pouco sobre os quantificadores na perspectiva da teoria *fuzzy*. Veremos que, na teoria dos conjuntos *fuzzy*, o conceito de quantificador *fuzzy* ou quantificador linguístico, foi introduzido pela primeira vez, através de estudos do professor Zadeh, e elaborado posteriormente por outros autores. Dessa forma, destacamos como são apresentados os denominados quantificadores *fuzzy,* nas obras de Liu e Kerre (1998), Novák (2008) e Yager (1991).

O terceiro capítulo traz uma análise algébrica de teorias relacionadas com os conjuntos *fuzzy.* Apresentamos uma definição de conjunto *fuzzy*, a relação de igualdade *fuzzy* e a relação de inclusão *fuzzy*, bem como as definições de conjunto vazio *fuzzy* e conjunto universo *fuzzy.* Na sequência, apresentamos algumas importantes operações existentes entre os conjuntos *fuzzy*: união, intersecção, complementação e diferença. A seguir, vislumbramos uma proposta de formalização dessas propriedades envolvidas no contexto algébrico, dentro de uma linguagem lógica. Para isso, destacamos R = $\{\mathcal{A} : \mathcal{A}$ é um conjunto *fuzzy* com universo V$\}$ e consideramos uma estrutura algébrica determinada por $(R, \subseteq, \cup, \cap, ')$, em que a inclusão, a união, a intersecção e a complementação são determinadas para os conjuntos *fuzzy*. Verificaremos que a Álgebra para os Conjuntos *Fuzzy* é caracterizada como um reticulado não booleano. Destacamos, ainda, as relações na perspectiva *fuzzy*, bem como os conceitos de domínio, imagem e campo dessas relações *fuzzy.* Com isso, apresentamos algumas operações básicas com as relações *fuzzy* e abordamos brevemente as relações *fuzzy* de similaridade e ordem.

Após desenvolvida uma análise da teoria dos conjuntos *fuzzy*, com destaque sobre qual e como seria a álgebra desses conjuntos, apresentamos uma formalização das suas propriedades essenciais numa linguagem lógica proposicional, o que nos levou à uma caracterização de uma particular lógica *fuzzy*. Assim, no Capítulo 4, central dessa dissertação, apresentamos uma álgebra que abstrai os aspectos essenciais da álgebra para os conjuntos *fuzzy*, investigada no capítulo anterior, sendo essa, aqui denominada de álgebra c-*fuzzy*. Em seguida, destacamos uma formalização proposicional para essa estrutura com a explicitação dos axiomas e regras de dedução. Apresentamos, ainda, uma demonstração da adequação entre a formalização proposicional e a algébrica.

Para uma melhor compreensão de assuntos abordados ao longo do terceiro capítulo, desenvolvemos um apêndice que trata sobre relações, teoria de reticulados e álgebra de Boole.

Além disso, nas Considerações Finais, comentamos os resultados que foram dissertados ao longo de todo o trabalho.

Capítulo 1

Sobre o Mundo *Fuzzy*

A Lógica pode ser concebida como um ramo da Filosofia, sendo essa, por sua vez, responsável por realizar um estudo crítico e racional dos princípios fundamentais do mundo e do homem. Já que o pensamento, podemos assim dizer, é uma manifestação do conhecimento, e que o conhecimento tem como meta a busca da verdade, então temos a necessidade de encontrarmos meios e, talvez, regras para que esse objetivo possa ser alcançado.

Podemos dizer que a Lógica é uma área da Filosofia que investiga sobre as regras do pensar correto e, desse modo, o aprendizado em Lógica será carregado de sentido quando encontrar um modo de garantir que o nosso pensamento possa agir de forma correta, para então, conduzir a conhecimentos verdadeiros. Com isso, a Lógica vai muito além do que limita qualquer disciplina isoladamente considerada, em que se pode ser estudada por seu interesse intrínseco ou para fins de aplicação.

A *lógica de primeira ordem* é uma parte da Lógica voltada, preponderantemente, para a Matemática, mesmo caracterizada por ter grandes laços com a Filosofia, quando busca tratar dos argumentos e inferências, e tem como um dos seus objetivos fundamentais, proporcionar métodos que permitam distinguir argumentos e inferências logicamente válidos daqueles que não o são.

Um argumento, como nos mostra Salmon (1993), não consiste apenas de um simples enunciado, mas de uma conclusão extraída de outros enunciados, as premissas ou hipóteses, e nas justificativas que validam a conclusão. Quando um argumento é apresentado para justificar uma conclusão, devemos questionar dois aspectos fundamentais: se as premissas são verdadeiras e se elas estão adequadamente relacionadas para garantir a conclusão. Já as inferências, segundo Feitosa e Paulovich (2005), tratam de expor e explicar as regras com as quais os indivíduos processam mentalmente algumas informações e obtém conclusões a partir dos elementos considerados. Entendemos o estudo das regras como o estudo das inferências, que quando aplicadas corretamente em sequências de enunciados nos permitem a avaliação dos argumentos.

Salmon (1993) considera ainda que há um restrito paralelismo entre os argumentos e a inferência, pois ambos, compreendem evidências e conclusões que se encontram em relação mútua. A principal diferença existente está no fato de que um argumento é uma entidade linguística, ou seja, uma coleção de enunciados (premissas e conclusão); já a inferência, não o é, mas indica como bem usar regras para fazer um argumento aceitável.

Na Grécia antiga, diversas escolas se preocuparam em compreender as relações entre o pensamento e a linguagem. Platão (século IV a. C.), considerado um dos principais pensadores gregos, influenciou profundamente a filosofia ocidental, ao introduzir reflexões acerca do raciocínio; entretanto, Aristóteles (384 – 322 a . C.), discípulo de Platão, foi o primeiro a apresentar, de forma mais elaborada, textos de Lógica, através da sistematização dos resultados desenvolvidos em estudos anteriores. Durante séculos, falar de Lógica era sinônimo de *lógica aristotélica.*

A teoria das inferências apresentada por Aristóteles, denominada tradicionalmente de silogismo aristotélico ou categórico, destaca um método de dedução de uma conclusão a partir de duas premissas. Envolve, sempre, enunciados categóricos que discutiremos a seguir.

Segundo D'Ottaviano e Feitosa (2003), a teoria dos silogismos constitui um dos primeiros sistemas dedutivos já propostos, sendo esta, considerada por filósofos e historiadores da Lógica, como a mais relevante descoberta em toda a História da Lógica, pois, além de ser a primeira teoria dedutiva, a teoria dos silogismos é um dos primeiros sistemas axiomáticos construídos. Os autores destacam ainda que a teoria dos silogismos, nos tempos modernos, pode ser observada como um fragmento da lógica de primeira ordem.

Em seu texto "Primeiros Analíticos", terceiro livro do *Organon*, considerado um dos mais importantes da Lógica, Aristóteles introduz a sua teoria de silogismos. O texto apresenta a análise dos argumentos de acordo com as suas formas, ou seja, de acordo com as várias figuras e modos dos silogismos. Para Aristóteles, silogismo é um argumento em que, quando estabelecidas certas coisas, resulta necessariamente delas, por serem o que são, outra coisa distinta do anteriormente estabelecido. Em outras palavras, cada *silogismo* válido é uma regra de inferência que deduz uma proposição categórica – a *conclusão* – a partir de duas outras proposições categóricas, chamadas *premissas*. Cada uma das premissas contém um termo comum com a conclusão – o *termo maior* e o *termo menor*, respectivamente; e um termo comum entre as premissas – o *termo médio*.

Quanto à linguagem, na teoria dos silogismos, temos que os termos são considerados substantivos ou ideias, que podem ser apresentados em termos gerais ou em termos singulares e com predicados. Podemos considerar, como exemplos de termos gerais, "homens", "números", "letras", etc; já como exemplos de termos singulares, temos "Sócrates", "quatro", "b", etc; e por fim, como predicados: "mortal", "par", "consoante", etc. Em relação às proposições (enunciados categóricos), a teoria dos silogismos trata com proposições categóricas, no sentido de incondicionais e de proposições singulares. Temos então que:

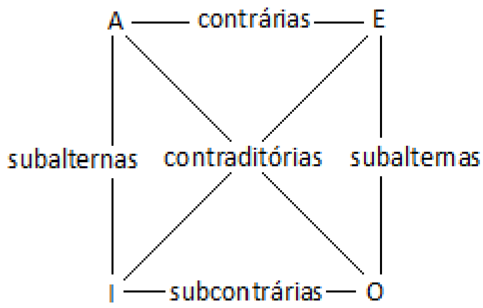
"Todo homem é mortal" é um exemplo de proposição categórica;
"Sócrates é mortal" e "José é um homem" são exemplos de proposições singulares.

Quanto às proposições categóricas, existem quatro tipos, que diferem entre si em quantidade, pois são particulares ou universais, e em qualidade, pois afirmam ou negam. Os quatro tipos de proposições são:

Afirmação universal: "Todo S é P".
Notação: A;
Negação universal: "Nenhum S é P".
Notação: E;
Afirmação particular: "Algum S é P".
Notação: I;
Negação particular: "Algum S não é P".
Notação: O.

Feitosa e Paulovich (2005) destacam que as letras A e I, utilizadas para indicar as proposições categóricas afirmativas, e as letras E e O, que servem para indicar as proposições categóricas negativas, são utilizadas como referências às palavras do latim: ***affirmo*** e ***nego***.

As relações existentes entre as quatro formas de proposições categóricas foram estabelecidas por Aristóteles através de seu conhecido quadrado das oposições:



Nesse quadrado, observamos que as proposições categóricas A e O, assim como as proposições categóricas E e I, são *contraditórias*, ou seja, não podem ser, simultaneamente, ambas verdadeiras e ambas falsas. Uma é a negação da outra. Já as proposições categóricas A e E são denominadas *contrárias* e não podem ser ambas verdadeiras, mas podem ser ambas falsas. Agora, as proposições categóricas I e O são proposições *subcontrárias*. Não podem ser ambas falsas, porém podem ser ambas verdadeiras. Por fim, as proposições categóricas A e I, bem como as proposições categóricas E e O, são chamadas *subalternas*, e quando A é verdadeira, então I também é verdadeira, e quando E é verdadeira, então O também é verdadeira.

Para uma melhor compreensão dos silogismos aristotélicos, consideramos o seguinte exemplo:

Todos os homens são mortais;

Todos os gregos são homens;

Logo, todos os gregos são mortais.

No exemplo acima, temos a conclusão obtida através de um processo de combinação dos elementos contidos nas premissas. Quando destacamos que “Todos os homens são mortais”, temos a premissa maior, que contém o termo maior “mortais” e o termo médio “homens"; já na premissa "Todos os gregos são homens", temos a premissa menor, que contém o termo menor "gregos" e o termo médio "homens". Na conclusão "Todos os gregos são mortais", contém o termo menor "gregos", sujeito da conclusão, e o termo maior "mortais", predicado da conclusão. D´Ottaviano e Feitosa (2003) destacam que num silogismo válido, não é possível que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa.

O desenvolvimento dos silogismos apresentado por Aristóteles, mais alguns aspectos lógicos desenvolvidos por outras escolas de pensadores gregos como os Estóicos e os Megários, foi a base do que entendemos por Lógica até meados do século XIX e que classificamos como *lógica tradicional*. A partir daí, iniciou-se o que entendemos como a matematização da lógica, e que culminou na *lógica contemporânea*. Quando os lógicos matemáticos Giusseppi Peano (1858-1932), Gottlob Frege (1848-1925), Bertrand Russell (1872-1970), Kurt Gödel (1906-1978), entre outros, descobriram algumas limitações no sistema aristotélico e assearam por interrelacionar Lógica e Matemática, este novo movimento se iniciou. Embora muitos lógicos modernos considerem a lógica silogística de Aristóteles como uma lógica primitiva, é impossível esquecer a enorme influência que ela exerceu sobre as gerações de filósofos, matemáticos e cientistas que vieram depois dele.

Antecipando um pouco a discussão, podemos dizer que a *lógica moderna* teve seu início no século XVII, com o matemático e filósofo Gottfried Leibniz, que influenciou seus contemporâneos e sucessores com suas propostas ambiciosas para a Lógica. No seu programa, eminente pensado, buscava construir uma linguagem universal, baseada em um alfabeto do pensamento, pois percebeu que a teoria dos silogismos categóricos não era suficiente para dar conta de alguns tipos de inferência feitas na Matemática. D'Ottaviano e Feitosa (2003) destacam que a maioria das contribuições de Leibniz para a Lógica não foram publicadas durante sua vida.

Feitosa e Paulovich (2005) relatam que, após Aristóteles, os estudos da lógica tradicional só contaram com contribuições significativas no século XIX, quando Peano e seguidores iniciaram desenvolvimentos de matematização da Lógica e quando Gottlob Frege apresentou a lógica formal moderna, construída sobre uma linguagem artificial muito bem estabelecida.

O livro *Begriffsschrift* (Conceptografia), publicado por Frege em 1879, foi considerado o trabalho inicial para o nascimento da Lógica contemporânea. Foi a publicação mais importante na lógica desde os tempos de Aristóteles. O principal objetivo da obra é a construção de uma linguagem formalizada do pensamento puro. O livro contém, pela primeira vez, o cálculo proposicional com uma formalização dos nossos tempos, a noção de função proposicional, o uso de quantificadores e a análise lógica de prova por indução matemática.

A lógica tradicional, hoje, deve ser entendida como uma parte da lógica clássica de primeira ordem. A lógica clássica contemporânea encerra toda a velha silogística aristotélica. A partir da obra de Frege, a lógica clássica adquiriu forma quase definitiva, extensa e consistente na obra escrita por Whitehead e Russell, “Principia Mathematica”, que versa sobre os fundamentos da Matemática. Seguindo a tradição de Frege - o logicismo - esses autores desejaram fazer da Lógica os fundamentos de toda a Matemática.

De uma forma geral, podemos considerar que a lógica clássica contemporânea, seguindo a tradição de Aristóteles, pode ser entendida como uma lógica de primeira ordem, que discorre sobre os conectivos lógicos de negação ($\neg$), disjunção ($\vee$), conjunção ($\wedge$), condicional ($\rightarrow$) e bicondicional ($\leftrightarrow$), sobre os quantificadores existencial ($\exists$) e universal ($\forall$), e sobre o predicado de igualdade.

Alguns princípios básicos caracterizam a lógica clássica e, dentre esses, podemos destacar três, conhecidos como as leis básicas do pensamento aristotélico:

(i) *Princípio da não contradição*, em que uma sentença não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo;

Em símbolos: $\neg(A \wedge \neg A)$

(ii) *Princípio do terceiro excluído*, em que uma sentença tem que ser ou verdadeira ou falsa;

Em símbolos: $A \vee \neg A$

(iii) *Princípio da identidade*, em que todo objeto é idêntico a si mesmo.

Em símbolos: $(\forall x)(x = x)$

Com a lógica clássica iniciada por Aristóteles, podemos assim assumir que “A grama é verde ou não é verde”, mas claramente não poderíamos aceitar que “a grama é verde e não verde”. Dessa forma, como vimos anteriormente, na visão do mundo da lógica aristotélica, ou uma sentença é falsa *ou* é verdadeira, não podendo ser, ao mesmo tempo, falsa *e* verdadeira.

No século XIX, George Boole, matemático inglês e um dos fundadores da tradição algébrica da Lógica, desenvolveu um sistema de Álgebra e Teoria dos Conjuntos que tratava da Lógica de dois valores em um contexto algébrico matemático. Em sua obra de 1847 "*The Mathematical Analysis of Logic*" (A análise Matemática da Lógica), Boole apresentou um trabalho pioneiro no qual estabeleceu as bases para o que hoje é conhecido como *álgebra de Boole*, que inclui propriedades básicas do Cálculo Proposicional Clássico e da Teoria dos Conjuntos.

Podemos dizer que, a partir daquele momento, a Lógica começou a ser desenvolvida como um sistema matemático rigoroso. Na álgebra apresentada por Boole, existia um sistema de símbolos e regras. Com esse sistema, Boole mostrou que seria possível codificar enunciados, tais como na lógica aristotélica, que permitiriam verificar, posteriormente, em linguagem simbólica, serem os argumentos válidos ou não válidos. Um pouco mais adiante, em 1854, Boole apresentou os denominados “Sistemas de Boole”, detalhados em sua publicação *“An investigation of the laws of thought”* (Uma investigação sobre as leis do pensamento), em que fundamentava as teorias Matemáticas da Lógica. Nesse trabalho, Boole sugeriu que a Lógica e os símbolos algébricos seriam semelhantes e existiriam três operadores lógicos mais básicos. Os operadores: “*e* ($\wedge$), *ou* ($\vee$) e *não* ($\neg$)” seriam os únicos operadores necessários para o desenvolvimento de comparações ou cálculos das funções básicas da matemática (somar, subtrair, multiplicar, dividir). Quase cem anos depois, esse trabalho apresentado por Boole foi fundamental para a construção e programação dos computadores eletrônicos.

No final do século XIX, como comentam D'Ottaviano e Feitosa (2003), em busca de soluções não aristotélicas para questões lógicas em aberto, alguns trabalhos foram os precursores das *lógicas não clássicas*. Já nas primeiras décadas do século seguinte, matemáticos e filósofos criaram novos sistemas lógicos, diferentes daqueles representantes da lógica aristotélica. Haack (1974) considera duas categorias principais de *lógicas não clássicas*, as quais são classificadas como:

• *complementares da lógica clássica,* que são aquelas que respeitam todos os princípios apresentados pela lógica clássica, mas abrangem outros itens que estão fora do propósito clássico.

Exemplo: A *lógica temporal*, capaz de formalizar raciocínios como: "Pedro trabalha todos os dias. Logo, hoje, Pedro trabalha", ou ainda, "O apostador venceu o jogo ontem. Logo, ao menos uma vez, o apostador venceu o jogo".

• *lógicas alternativas,* destinadas a substituir a lógica clássica em alguns, muitos ou todos os contextos que exigirem uma lógica subjacente.

As mais conhecidas são aquelas que excluem o princípio da bivalência e lidam com mais de dois valores possíveis de verdade.

Podemos considerar que, as lógicas não clássicas, usualmente, diferem da lógica clássica, pois:

- podem ser baseadas em linguagens com maior poder de expressão;
- são baseadas em princípios distintos;
- admitem semânticas distintas.

No início do século XX, Bertrand Russell, matemático britânico, encontrou um paradoxo grego antigo no centro da *lógica moderna*. O enigma, denominado "O Paradoxo do Mentiroso", relata que Epiménides, morador de Creta, na Grécia, no século VI a.C., afirmou: "todos os cretenses são mentirosos". Se ele estivesse mentindo, então o que disse seria verdade e, desse modo, ele não estaria mentindo. Por outro lado, se ele não estivesse mentindo, então a sentença proferida seria verdadeira e, então, ele estaria mentindo. De qualquer maneira, ele estaria mentindo e não mentindo. Ambos os casos levam a uma contradição, pois a afirmação é verdadeira e falsa ao mesmo tempo. Uma variação desse mesmo paradoxo foi redescoberto por Russell na teoria dos conjuntos e provocou, na época, muitos debates, pois sua formulação exigia apenas algumas noções básicas da teoria dos conjuntos. O "Paradoxo de Russell", como ficou conhecido, consistia em destacar o conjunto de todos os conjuntos que não contêm a si mesmos como elementos. Diante da *lógica clássica*, esses dois enigmas seriam desafiadores.

Mais adiante, Jan Łukasiewicz, lógico polonês, motivado por questões filosóficas, considerou uma lógica com muitos valores de verdade: as lógicas *polivalentes*, *multivalentes*, ou ainda, *multivaloradas*. Nessa lógica, as proposições podem assumir três ou mais valores de verdade. Além dos valores conhecidos da lógica clássica, falso e verdadeiro, foi acrescido, num primeiro momento, um terceiro valor, sendo esse, o valor "indeterminado".

Segundo nos mostram D'Ottaviano e Feitosa (2003), Łukasiewicz introduziu seus sistemas de lógicas polivalentes como uma tentativa de investigar proposições modais e as noções de possibilidade e necessidade relacionadas com tais proposições, particularmente vinculadas com eventos futuros.

As proposições modais apresentadas por Łukasiewicz, como mostram os autores, são proposições introduzidas para retratarem as seguintes expressões: "é possível que p", "não é possível que p", "é possível que não-p" (é contingente que p) e "não é possível que não-p" (é necessário que p). A expressão "é possível que p" foi tomada como primitiva e Łukasiewicz formalizou seu significado através de três asserções modais, por ele consideradas como básicas, por razões intuitivas e históricas.

Na lógica apresentada por Łukasiewicz, destaca-se a lei da contradição, em que uma determinada afirmação poderia ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo. Isso se tornaria possível, apenas na condição de não assumirmos apenas sentenças verdadeiras e falsas, mas com algum grau de verdade distinto, o que geraria, dessa forma, vários níveis de possibilidades e não apenas os dois valores até então usuais.

D'Ottaviano e Feitosa (2003) destacam que Łukasiewicz, ao assumir a existência de sentenças às quais poder-se-iam atribuir um terceiro valor de verdade, como comentado anteriormente, distinto dos clássicos verdadeiro ou falso, não rejeitou os princípios da não-contradição ou do terceiro excluído.

A ideia apresentada por Łukasiewicz foi, logo depois, generalizada ao considerar um número n qualquer (n>2) de valores de verdade. Hegenberg e Andrade e Silva (2005) destacam que esse lógico foi o primeiro a considerar Lógica com número infinito de valores de verdade.

As concepções de lógicas multivaloradas, apresentadas por Lukasiewicz, podemos assim dizer, foi o ponto de partida para o que denominamos aqui de “Mundo *Fuzzy*”, ou o embrião das Lógicas *Fuzzy*.

Nascido no Irã e formado em engenharia elétrica na Universidade de Teerã, Lotfi Askar Zadeh, atualmente, aos 91 anos de idade, é professor de Ciência da Computação na Universidade da Califórnia, Berkeley, desde 1959. Zadeh sempre foi conhecido por ser um brilhante pesquisador em teoria de sistemas de controle e ganhou destaque por ser especialista em Matemática e Lógica.

Zadeh realizou estudos na área de Inteligência Artificial e, em meados da década de 1960, percebeu que os métodos matemáticos tradicionais, disponíveis naquela época, não eram capazes de formalizar algumas situações referentes a problemas que compreendessem posições ambíguas, não completamente claras ou sem um contorno nítido. Isto conduziria à impossibilidade de tomadas de decisões binárias, quando envolvidas com tais conceitos. Para contornar essa incapacidade de representação, a alternativa proposta por Zadeh foi a aceitação de mais que dois possíveis valores de verdade.

Um computador era usado para um processamento de dados, mas para isso acontecer, havia necessidade de serem especificados os detalhes do processo, passo por passo. Poderíamos considerar como exemplo, um sistema de controles de robôs, em que a modelagem é algo extenso e a execução é feita em um longo período de tempo. Para Zadeh, embora um computador demonstre ser poderoso, ele ainda é inferior ao cérebro humano em certos tipos de resolução de problemas. Através dos seus estudos, Zadeh chegou à conclusão de que a abordagem usual que necessita especificar tudo nos mínimos detalhes e num contexto bivalente, não seria a conduta correta. Dessa forma, o professor propôs uma alternativa na qual todo o sistema poderia ser definido.

Com base nos estudos apresentados por Jan Łukasiewicz, Zadeh propôs uma teoria de conjuntos, a qual denominou de teoria de conjuntos *fuzzy*, em que a bivalência não se aplicava como usualmente e, depois, na metade da década seguinte, ele sugeriu uma *lógica não clássica*, estruturada com base na sua teoria de conjuntos, também não clássica. A expressão *fuzzy* tem sido traduzida para o português por “nebuloso” ou “difuso”, contudo, manteremos neste trabalho a denominação *fuzzy*.

A Teoria *Fuzzy* começa, podemos assim dizer, com um texto de autoria de Zadeh, publicado em um jornal acadêmico na Universidade de Bekerley. Neste artigo, o professor nomeou "conjuntos *fuzzy*" como sendo os conjuntos cujos limites não estariam claros. Ele pontuou que os conjuntos *fuzzy* iniciariam um importante papel no raciocínio humano de reconhecimento de padrões, envolvendo comunicação semântica e abstração especial. Ainda, no mesmo artigo, Zadeh expandiu essa asserção dentro de uma teoria fundamentada na Matemática, sendo essa, segundo o professor, uma teoria definida de maneira clara.

Como vimos, na teoria usual de conjuntos, temos que um determinado objeto ou é ou não é elemento de um conjunto dado, ou seja, há apenas duas opções: não pertence (0) ou pertence (1). Já nessa nova alternativa de conjuntos, apresentada por Zadeh, a passagem da pertinência para a não pertinência ocorreria de maneira gradual, não existindo necessariamente uma descontinuidade, ou seja, a pertinência seria uma questão de grau, na qual, o *grau de pertinência* de um determinado objeto a um conjunto *fuzzy* seria representado por algum número real que se encontraria no intervalo real entre 0 e 1, sendo 0 a expressão da completa não pertinência e 1 a sua pertinência total.

Como um exemplo, sabemos que uma andorinha pertence a um conjunto de aves, mas um morcego não pertence a esse conjunto. Agora, na teoria dos conjuntos *fuzzy,* ora em discussão, como os elementos pertencem a conjuntos em graus variados, podemos considerar que, como o morcego tem asas, assim como a andorinha, pode pertencer a um conjunto de aves, mas até um certo grau.

Neste momento, é necessário destacar que os conjuntos *fuzzy* serão representados, ao decorrer deste trabalho, por letras latinas maiúsculas do tipo: $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, etc., para diferenciar dos conjuntos usuais, que serão denotados por letras maiúsculas do tipo: A, B, C, D, E, etc.

Temos então, que um conjunto *fuzzy* seria entendido como uma função de certo domínio V, o universo de discurso, no intervalo real [0, 1]. Dessa maneira, verificamos que um determinado objeto pode pertencer, com certo grau, a um determinado conjunto e com um grau distinto a um outro conjunto[1].

---

[1] No Capítulo 3, discutiremos sobre os conjuntos *fuzzy*. Neste presente capítulo, apenas apresentamos algumas noções gerais.

Desse modo, considerando que um conjunto *fuzzy* fica determinado por funções e, como consequência da teoria usual de conjuntos, como cada função pode ser representada por um conjunto de pares ordenados, poderíamos então definir os conjuntos *fuzzy* do modo seguinte:

Definição: Um *conjunto fuzzy* $\mathcal{A}$ é um conjunto de pares ordenados, em que o primeiro elemento do par pertence ao universo de discurso *V* e o segundo elemento corresponde ao grau de pertinência do primeiro elemento em $\mathcal{A}$.

Assim: $\mathcal{A} = \{(a, \mu) : a \in V \text{ e } \mu \in [0, 1]\}$.

Para esses conjuntos *fuzzy*, podemos e devemos elencar as relações e operações sobre esses conjuntos, assim como acontece com os conjuntos usuais. Abordaremos esses assuntos com mais precisão nos próximos capítulos.

Baseado no desenvolvimento da teoria dos conjuntos *fuzzy,* em meados da década de 1970, Zadeh estendeu seus estudos para o que denominou de "lógica *fuzzy"* que*,* segundo Feitosa (1992), seria um sistema lógico não clássico, em que os seus valores de verdade são linguísticos, ou seja, são palavras em uma linguagem natural ou artificial, interpretados por funções, em contraposição aos valores usuais, verdadeiro ou falso.

Destaca-se, ainda, que esses valores de verdade poderiam ser dados por conjuntos *fuzzy*, definidos no intervalo real unitário, formando um conjunto enumerável *fuzzy* do tipo: verdadeiro, mais ou menos verdadeiro, bastante verdadeiro, não muito verdadeiro, não muito falso, etc.

Destacamos que definir precisamente lógica *fuzzy* é bastante difícil, pois não há um sistema único conhecido com essa denominação. Porém, seu significado pode ser explicado. A lógica *fuzzy* é utilizada como uma grande ferramenta da teoria dos conjuntos *fuzzy*, e mais, podemos dizer que os conjuntos *fuzzy* são uma ampliação dos conjuntos clássicos, no sentido de que lidam com objetos por meio de seu grau de pertinência e consideram todos os graus possíveis entre o verdadeiro e o falso; e a lógica *fuzzy*, desse modo, seria também uma generalização da lógica clássica.

A teoria de conjuntos *fuzzy* apresentada pelo Professor Zadeh teve como objetivo fornecer uma ferramenta matemática para tratar de informações de caráter vago ou impreciso. A lógica *fuzzy*, com base nessa teoria, foi construída inicialmente através de conceitos já estabelecidos na lógica clássica, mas desse modo a ampliá-la e permitir raciocínios imprecisos ou aproximados. Os operadores lógicos foram definidos à semelhança dos usuais e, alguns outros, foram introduzidos ao longo dos anos. Dessa forma, devemos observar que a lógica *fuzzy* não se opõe à lógica clássica, mas sim, a complementa.

Falando mais especificamente sobre os elementos abordados pela lógica *fuzzy*, as variáveis linguísticas, que Zadeh define como variáveis cujos valores são palavras ou sentenças de uma linguagem natural ou artificial, surgem da necessidade de interpretação de fenômenos qualitativos. Os fenômenos quantitativos são bem interpretados por variáveis numéricas, mas as variáveis numéricas nem sempre são apropriadas para representar fenômenos qualitativos e, como esses são bastante frequentes no nosso cotidiano, faz-se importante uma alternativa para a formalização dessas situações, o que Zadeh faz através das variáveis linguísticas, mais apropriadas para a caracterização de fenômenos inexatos, aproximados ou complexos.

Para um melhor entendimento, podemos considerar como exemplo a palavra *estatura*, bastante usual no nosso cotidiano. Em ambientes não numéricos, não temos a noção clara de seu significado; agora, por meio dos conjuntos *fuzzy*, podemos atribuir noções aproximadas para *estatura*; sendo essas, denominadas de *variáveis fuzzy*. Podemos considerar como exemplos de variáveis *fuzzy* da *variável linguística* “estatura”: muito alto, alto, meio-alto, um pouco alto, baixo, meio-baixo, muito baixo, um pouco baixo, médio, entre outros. Os elementos de cada noção aproximada de estatura são caracterizados pela variação do grau de pertinência num rol apropriado para estaturas. Assim, nesse exemplo, os seguidores de Zadeh consideram que “estatura” é uma variável linguística, que assume as variáveis *fuzzy*: muito alto, alto, meio-alto, etc., como seus valores e, que essas, por sua vez, são interpretadas por meio dos conjuntos *fuzzy*. Por exemplo, considerando um homem de 1,82 m e outro de 1,76 m, podemos considerar que ambos são membros do conjunto *fuzzy* “alto” da variável linguística “estatura”; porém, o homem de 1,82 m tem um grau de pertinência superior ao outro homem.

Em contrapartida aos conjuntos clássicos, os conjuntos *fuzzy* introduzidos por Zadeh, admitem uma enorme riqueza de possibilidades, não se limitando simplesmente ao verdadeiro/pertence ou falso/não pertence. Dessa forma:

1. Quando o valor de pertinência de uma variável numérica for igual a um, temos que ela tem pertinência total ao conjunto;
2. Quanto mais próximo o valor de pertinência de uma variável numérica estiver do 1, maior é a sua pertinência ao conjunto;
3. Quanto mais próximo o valor de pertinência de uma variável numérica estiver do 0, menor é a sua pertinência ao conjunto;
4. Quando o valor de pertinência de uma variável numérica for igual a zero, então ela não está no conjunto ao conjunto.

Ao definir as regras de dedução *fuzzy*, Zadeh partiu do postulado de que toda regra tem um antecedente e um consequente. Na lógica clássica, como exemplo, temos que: "O aluno estudou (antecedente), então não sairá mal na avaliação (consequente)". Agora, na lógica *fuzzy*: "se o aluno estudou um pouco (antecedente), então pode ser que não vá muito bem na avaliação (consequente)". No primeiro exemplo, a afirmativa é verdadeira ou falsa, enquanto que, no segundo, a afirmativa pode assumir certos graus de verdade, com uma valoração aproximada.

Percebemos, então, que os valores numéricos da função de pertinência são indicadores de tendências e podem ser decididos pela subjetividade de cada indivíduo ou depender do contexto em que está inserido.

Para um melhor entendimento, consideremos, como exemplo, a seguinte questão: O que define uma pessoa ser "um pouco alta"? A resposta para essa pergunta deve ser dada pela subjetividade de cada indivíduo e representada por algum valor numérico situado no intervalo real entre 0 e 1. Essa subjetividade do indivíduo pode considerar uma pessoa *um pouco alta*, com grau de pertinência igual a 0,7, já para outro indivíduo, a mesma variável *fuzzy* pode assumir grau de pertinência 0,8, por exemplo.

Diante do que foi apresentado até agora, temos que uma variável linguística pode ser, então, caracterizada por uma quíntupla (H, G, V, T(H), S(H)), em que H é o nome da variável, G é uma regra sintática que permite gerar valores linguísticos, V é o universo de discurso, T(H) é o conjunto dos nomes dos valores linguísticos da variável H e S(H) é uma regra semântica que associa a cada termo x de H, gerado por G, o seu significado S(x) com valores no intervalo real [0, 1]. Continuando com um dos exemplos mencionados anteriormente, temos que:

> T(estatura) = {muito alto, alto, meio-alto, um pouco alto, baixo, meio-baixo, muito baixo, um pouco baixo, médio,...}
> e V= [0.3, 2.1] em metros.

A lógica *fuzzy,* como vimos, baseia-se na teoria dos conjuntos *fuzzy*, com vistas à sua representação. Nesta lógica, é notável a presença de uma série de elementos importantes e, dentre esses, temos as proposições *fuzzy*, que são expressões constituídas por um sujeito e um predicado (à moda categórica), em que este predicado é dado por um termo vago ou não preciso, como por exemplo: “A água está fria”; e as inferências *fuzzy* ou raciocínios *fuzzy*, como nos mostram Feitosa e Paulovich (2005), que são os processos pelos quais uma conclusão, possivelmente não exata, porém próxima da exatidão, é decorrente de uma coleção de premissas imprecisas e vagas por meio de regras e operações *fuzzy*.

Enfatizando o que foi visto até agora, é possível percebermos que os valores usados na lógica f*uzzy* baseiam-se em palavras, ou seja, os valores de verdade são expressões linguísticas.

Em suma, podemos dizer que no cálculo sentencial *fuzzy*, destacam-se as seguintes propriedades:

(i) restrições de uma variável linguística, denominadas variáveis *fuzzy*, que são interpretadas por conjuntos *fuzzy*;

(ii) expressões da linguagem natural como: muito, pouco, alguns, bastante, possivelmente, mais ou menos, quase muito, são aplicados nos aspectos semânticos *fuzzy*;

(iii) os conectivos lógicos $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\neg$ são entendidos segundo uma interpretação *fuzzy*.

Segundo Mukaidono (2001), uma das maiores críticas direcionadas à teoria *fuzzy* está no fato de não ter como determinar objetivamente os valores de pertinência. O objetivo da teoria *fuzzy* é estabelecer uma teoria matemática para lidar com essa subjetividade. Segundo o autor, é de forma objetiva que a teoria *fuzzy* lida com a subjetividade. Esse é um assunto ainda muito discutido. A teoria *fuzzy* não é uma teoria definida vagamente, mas é uma teoria matemática desenvolvida para lidar com ambiguidades, através de descrições quantificadas em métodos exatos. O objeto é incerto, mas o método não é. A definição da teoria *fuzzy* é feita rigorosamente e de forma científica.

As teorias convencionais são baseadas no princípio de Descartes, cujos objetos são limitados ao que pode ser definido objetivamente. O incerto é, portanto, excluído da lista de tópicos de investigação. Na teoria *fuzzy*, tomamos uma atitude oposta ao admitirmos e tratarmos com incertezas. Primeiro, as incertezas são representadas pelas funções de pertinência, através da subjetividade. Então, a função é manipulada em um método definido no seio da teoria *fuzzy.*

Na época em que foram publicados os primeiros artigos do Professor Zadeh, sobre os conjuntos *fuzzy*, pesquisadores dedicaram pouco interesse à nova ideia. Muitas críticas foram levantadas na comunidade científica e a maioria estava contra Zadeh, quando alegavam que os pesquisadores de Ciência e Tecnologia deveriam desenvolver seus estudos de uma forma muito clara e evitar quaisquer possibilidades de ambiguidades. Alguns matemáticos chegaram a dizer que a ideia apresentada por Zadeh transparecia ser algo totalmente infantil e argumentavam que a lógica apresentada pelo professor era a Teoria de Probabilidade com algum disfarce.

Na Teoria de Probabilidade, temos que um evento, embora incerto, é bem determinado, pois a incerteza do evento está no acaso de como ele pode ocorrer, mas o seu espaço amostral é claramente conhecido e não são considerados aspectos subjetivos do evento. Por outro lado, na teoria *fuzzy*, o evento e sua ocorrência são incertos e aspectos subjetivos do evento são considerados. No ambiente *fuzzy*, trabalha-se com o conceito de possibilidades, distinto do tradicional conceito de probabilidades. Ao considerarmos, por exemplo, o lançamento de uma moeda, no modo usual, sabemos que o seu espaço amostral E é determinado por E = {cara, coroa} e a incerteza repousa em “ser cara” igual a 0.5 ou "ser cora", também, igual a 0.5. Nas aplicações *fuzzy* tratam-se também de aspectos particulares, contextuais, vagos e subjetivos; ou seja, um ambiente complementar e distinto ao probabilístico.

Em meio as críticas, afirmaram, ainda, que a teoria *fuzzy* era algo desnecessária, principalmente em relação a sua aplicabilidade, pois apontavam que qualquer trabalho que pudesse ser feito com a utilização de noções *fuzzy* poderiam ser bem realizados sem a utilização dela, pois essa seria facilmente descartada. E mais, ressaltavam que a teoria *fuzzy* não poderia ser considerada como uma nova teoria, pois já havia sido proposta pelos antigos gregos.

Em 1979, Zadeh foi o único pesquisador a estudar a teoria *fuzzy* em Berkeley. A maioria dos interessados em sua pesquisa eram pesquisadores internacionais, visto que suas ideias não foram bem aceitas, de imediato, nos EUA. Há relatos de que o professor Zadeh ficou muito desapontado com todos os comentários negativos sobre sua teoria. O falecido professor Richar Bellman, famoso pela construção de algoritmos para a resolução de problemas na área da computação, foi um dos grandes incentivadores da teoria *fuzzy* de Zadeh e serviu como um encorajador do professor.

Mesmo diante de muitas críticas, desde a década de 1970, o professor Zadeh recebe muitos prêmios por suas pesquisas na área da lógica *fuzzy*. Mais recentemente, Zadeh foi premiado com a Medalha Benjamin Franklin em Engenharia Elétrica pelo Instituto “The Flanklin”, na Filadélfia, pela invenção e desenvolvimento do campo da lógica *fuzzy* e, em 2011, o Instituto de Engenheria Elétrica e Eletrônica (IEEE), em Nova Iorque, Estados Unidos, que tem como objetivo promover a inovação tecnológica, nomeou o professor Zadeh para o denominado “*hall* da fama” na área de inteligência artificial.

Embora, no início, a teoria *fuzzy* tenha sido ignorada, aos poucos, as pesquisas mundiais nessa área foram ganhando mais adeptos e curiosos, apesar das críticas ainda continuarem. Na década de 1970, alguns pesquisadores e cientistas europeus começaram a aplicar a lógica *fuzzy*, fazendo implementações bem sucedidas, principalmente no que se referia ao processo de controle industrial. Dessa forma, uma ampliação nos estudos sobre os aspectos matemáticos e as aplicações dos conjuntos e da lógica *fuzzy* foram desenvolvidos, em grande escala, nos EUA, na Europa, China e no Japão. Apesar de Zadeh ter apresentado a teoria *fuzzy* em meados da década de 1960, a área ganhou impulso maior a partir de 1980, principalmente pelo crescimento dos computadores digitais e de suas grandes capacidades de processamentos. Assim, a partir da década de 80, essas noções teóricas foram utilizadas em *softwares* que permitiriam o comando automático de determinados processos, máquinas ou equipamentos.

Neste momento, antes de apresentarmos, nos próximos capítulos, nossa análise de teorias relacionadas aos conjuntos *fuzzy*, com destaque sobre qual e como seria a álgebra desses conjuntos, de modo a gerarmos uma proposta de formalização dessas propriedades envolvidas no contexto algébrico e dentro de uma linguagem lógica, seria interessante destacarmos algumas aplicações das teorias que cercam o Mundo *Fuzzy*.

Destacamos que não é nosso objetivo fazer uma análise minuciosa de cada aplicação existente; porém, acreditamos que é de grande valia apresentar algumas delas, pois as aplicações estão em toda parte, seja na área da Economia, do Entretenimento, dos Meios de Consumo, na Medicina, nas tomadas de decisões, nos sistemas especialistas, nos bancos de dados ou na concepção industrial.

As teorias *fuzzy* possuem grande aplicabilidades, dadas através da imitação ou modelagem do comportamento humano. Isso é possível através do desenvolvimento de sistemas inteligentes que integram os conceitos básicos da teoria dos conjuntos *fuzzy*. A noção de conjuntos *fuzzy*, assim como o entendimento de como podemos operará-los com semelhança aos conjuntos clássicos (podemos realizar uniões, intersecções, complementos), foi de extrema importância, pois as características desses conjuntos têm mostrado uma enorme aplicabilidade em tecnologia.

Devemos ser cautelosos para não confundirmos a lógica *fuzzy* com Inteligência Artificial. Enquanto a teoria *fuzzy* consiste em aproximar a decisão computacional da decisão humana, tornando as máquinas mais eficazes em seus trabalhos, a Inteligência Artificial tem como meta fazer com que as máquinas executem tarefas exatamente como o cérebro humano. Agora, não mais as máquinas se limitam ao "sim" ou "não". Como visto anteriormente, as máquinas podem ter decisões "abstratas" do tipo "talvez sim", "um pouco menos", "quase muito".

Podemos, assim dizer, como citam Shaw e Simões (1999), que a lógica *fuzzy* é uma técnica que incorpora a maneira humana de pensar em um sistema de controle, sendo este, o responsável por fornecer respostas à uma determinada entrada de acordo com sua função de transferência. Dessa forma, existem os controladores *fuzzy*, que podem ser projetados para se comportarem conforme o raciocínio dedutivo, ou seja, para se comportarem conforme o processo que as pessoas utilizam para inferir conclusões que se baseiam em informações que elas já conhecem.

> "(...) operadores humanos podem controlar processos industriais e plantas com características não-lineares e até com comportamento dinâmico pouco conhecido, através de experiência e inferência de relações entre as variáveis do processo. A Lógica *Fuzzy* pode capturar esse conhecimento em um controlador *fuzzy*, possibilitando a implementação de um controlador computacional com desempenho equivalente ao do operador humano" (Shaw e Simões, 1999, p. 2).

Em outras palavras, pelo que foi exposto por Shaw e Simões (1999), a característica especial da lógica *fuzzy* é a de representar uma maneira inovadora de se manusear informações imprecisas, provendo um método de traduzir expressões verbais, imprecisas e vagas, comuns na comunicação humana, em valores numéricos, que possibilitam, então, converter a experiência humana em uma forma compreensiva pelos computadores.

Apesar do estudo sobre a teoria *fuzzy* ter sua origem nos EUA, no início, o país ignorou as pesquisas em aplicações dos sistemas *fuzzy*, pois esses foram associados com inteligência artificial, um campo que ainda não havia ganho credibilidade por parte da indústria americana. O primeiro país a utilizar a tecnologia desenvolvida pela lógica *fuzzy* foi o Reino Unido, em meados da década de 1970, em que foi apresentado o primeiro controlador *fuzzy* por E. Mamdani.

Uma das aplicações mais conhecidas da teoria *fuzzy* é o controlador de vagão do Metrô Sendai da cidade de Sendai, Japão. O controlador *fuzzy* foi proposto por Seiji Yasunobu e Soji Miyamoto, desenvolvido pela *Hitachi,* companhia de estradas de ferro da província japonesa de Ibaraki. O controlador apresentado, inaugurado em 1987, substituiu o trabalho de dois operadores humanos e controlaram o trem durante todo o dia. Essa aplicação *fuzzy* é utilizada para controlar a aceleração, velocidade e frenagem do trem, sem a supervisão humana. Não há maquinista no controle dessas variáveis durante o trajeto do metrô. Para elaborar essa aplicação *fuzzy* foram levados em conta as características de locomoção do trem, com foco na segurança dos passageiros e na manutenção do conforto durante o percurso e no consumo de energia.

Nos bens de consumo, também podemos encontrar as aplicabilidades da teoria *fuzzy*. Empresas do Japão e da Coreia produzem e comercializam máquinas de lavar roupas com controlador *fuzzy*, que ajustam o ciclo de lavagem para cada tipo de roupa, tornando-se possível mudar as técnicas para deixar as roupas limpas: quanto tempo uma mancha levaria para sair da roupa a ser lavada? Qual a temperatura necessária para aquele tipo de roupa? Qual a medida certa de sabão a ser despejada na hora da lavagem? Muito sabão, pouca água, mais quente, um pouco fria? Uma máquina de lavar utilizando a teoria *fuzzy* pode usar até dez regras *fuzzy* para determinar uma grande variedade de estratégias ao lavar roupa.

Como nos mostra Kosmo (1999), os bens de consumo dos japoneses, frequentemente, incorporam sistemas *fuzzy*: o condicionador de ar da empresa *Mitsubishi*, aquece e refrigera com potência até cinco vezes mais que os outros aparelhos de ar, com redução do consumo de energia em mais de 20% e aumento da estabilidade de temperatura, utilizando poucos sensores; Freios anti-trava da empresa *Nissan*, que controlam os freios em casos de perigo, baseado na velocidade e na aceleração do carro e da roda; Lavador de pratos da *Matsushita*, que ajusta o ciclo de lavagem, o enxágue e as estratégias de lavagem de acordo com os números de pratos; Controle do elevador da *Mistubishi* e da *Toshiba*, que reduz o tempo de espera dos usuários, baseados no tráfico de passageiros; Câmera com foco automático da *Canon*, que utiliza um sistema de controle *fuzzy* com entradas para obter dados atuais da claridade e outras entradas para medir a taxa de mudança do movimento da lente, ou seja, mede a claridade da imagem em várias regiões de seu campo de vista, utilizando a informação fornecida para determinar se a imagem está ou não em foco, entre outros.

Um dos grandes benefícios, entre os muitos existentes, em se utilizar os sistemas com controladores *fuzzy*, segundo apontam pesquisas em teoria *fuzzy*, é devido ao fato desses serem muitas vezes menos poluentes, pois calculam de forma mais eficaz o quanto de energia será necessária para a utilização de determinado aparelho. Como exemplo, as empresas *Mitsubishi* e a *Samsung* afirmam que os aspiradores de pó desenvolvidos com a teoria *fuzzy* poupam até 40 % de energia em comparação com outros aspiradores que não são produzidos com a mesma tecnologia.

Desde os estudos sobre os conjuntos *fuzzy* realizados pelo Professor Zadeh em 1965, o mundo testemunhou um grande avanço em teorias e aplicações de sistemas *fuzzy*. Após passar o tempo de críticas, um número muito grande de pesquisadores e profissionais, de todo o mundo, tem contribuído de maneira significativa para o avanço de produções nessa área. Para colaborar ainda mais com a expansão de estudos nesse campo, houve a interação entre os pesquisadores *fuzzy* com os pesquisadores de outras áreas da computação, tal como os pesquisadores de redes neurais.

A "Associação Internacional de Sistemas *Fuzzy"* e a "Sociedade Europeia de Lógica *Fuzzy* e Tecnologia" são as organizações mais importantes que contribuem para o progresso em lógica *fuzzy* e outras áreas afins.

A *Internacional Fuzzy Systems Association* - IFSA (Associação Internacional de Sistemas *Fuzzy*) foi criada em 1984, estimulada pelo desenvolvimento e pelas enormes possibilidades de aplicações existentes dos Sistemas *Fuzzy*. É uma organização mundial dedicada ao apoio e desenvolvimento de estudos das principais questões que envolvem a teoria *fuzzy.* São questões relacionadas com os conjuntos *fuzzy*, lógica *fuzzy*, relações *fuzzy,* variáveis linguísticas, formação de conceitos *fuzzy*, modelagem *fuzzy*, imprecisão *fuzzy*, análise de sistemas *fuzzy*, controladores *fuzzy*, previsão e diagnóstico *fuzzy*. A IFSA organiza a cada dois anos um congresso internacional para incentivar a divulgação de pesquisas e os desenvolvimentos mais recentes na área *fuzzy* e para incentivar a troca de ideias e interação entre os pesquisadores da área.

O mais recente congresso, denominado "*IFSA 2011 World Congress*", aconteceu em meados de junho, no ano de 2011, e foi realizado em Surabaya e Ilha de Bali, na Indonésia. O evento reuniu cientistas nas áreas de conjuntos *fuzzy* e computação, além de engenheiros e profissionais que trabalham na área de lógica *fuzzy* e afins.

As aplicações da lógica *fuzzy* não se restringem apenas a produtos de bens de consumo. Recentemente, outras aplicações tiveram a lógica *fuzzy* como suporte de implementação.

Na área automobilística, a *General Motors Corporation* (GM), maior produtora de automóveis do mundo, utiliza um sistema de transmissão *fuzzy* em seu automóvel Saturno. Já a *Nissan*, empresa de automóveis japonesa, franqueou um sistema de travagem anti-derrapante em um dos seus automóveis, utilizando também, um sistema de transmissão *fuzzy*, além de um injetor de combustível *fuzzy*.

No Japão, através de 500 regras distintas, os sistemas *fuzzy* são utilizados para diagnosticar a saúde de quase dez mil pacientes, sob responsabilidade da empresa *Omron Corporation*, que supervisiona cinco bases de dados médicos em um sistema de gestão de saúde para os funcionários de algumas empresas. Esses sistemas *fuzzy* são os responsáveis por elaborar planos personalizados para prevenir os funcionários de doenças e ajudá-los na redução do estresse.

O MASSIVE, em português, abreviação para Sistema Múltiplo de Agentes de Simulações em Ambiente Virtual, é uma das aplicações mais recentes da lógica *fuzzy*. Através de um pacote de *softwares* para a indústria de efeitos visuais, desenvolvidos pelo engenheiro neozelandês e fundador da empresa MASSIVE, Stephen Regelous, pioneiro na área de computação gráfica, foi possível criar vários agentes que atuam como todos os indivíduos em cenas de filmes, games e séries de televisão. Através da utilização da lógica *fuzzy*, o *software* permite que se criem de maneira rápida, milhares ou até milhões dos chamados "agentes". Em uma cena de guerra de um filme, por exemplo, em que há uma batalha, podemos observar vários soldados. Com o recurso da lógica *fuzzy,* através do *software* criado por Stephen, podemos gerar multidões. Na cena, não temos vários atores interpretando soldados. Tudo o que vemos é realizado através de efeitos visuais para cinema e televisão. O primeiro filme a utilizar o *software* com recurso *fuzzy,* foi "Senhor do Anéis: a Sociedade do Anel", da trilogia mundialmente conhecida, "O Senhor dos Anéis", lançado em 2001. No filme, nas cenas de batalhas, foram criados centenas de milhares de soldados para lutar (os chamados "agentes"). Em 1996, o diretor da trilogia, Peter Jackson, pediu para Stephen criar um programa que pudesse criar as intensas cenas de batalhas nos filmes. Foram anos de estudos para que Regelous desenvolvesse essa aplicação *fuzzy*. O sucesso foi tão grande que Stephen revolucionou o setor cinematográfico e, em 2004, recebeu prêmio de destaque na área científica e engenharia. Atualmente, outros filmes também utilizaram dessa aplicação *fuzzy* em algumas cenas. Podemos citar, dentre outros existentes, os filmes: Avatar, 300, Planeta dos Macacos – a origem, Happy Feet, Crônicas de Nárnia.

Os trabalhos em sistemas *fuzzy* não estão em ascensão apenas no Japão. Vários trabalhos progridem nos EUA e na Europa. Nos EUA, temos o exemplo da agência de proteção ambiental, que investigou o controle *fuzzy* para os motores *energy-efficient*. Já a *National Aeronautics and Space Administration* (NASA), através de estudos com controladores *fuzzy*, mostrou que as simulações desses controladores podem reduzir, de maneira significativa, o consumo de combustível das naves espaciais.

Apresentamos, neste capítulo, um pouco da história da teoria *fuzzy*, introduzida pelo professor Zadeh, bem como algumas de suas aplicações. Estar atento às ideias iniciais acerca dessa teoria é de extrema importância para a compreensão dos capítulos posteriores, em que apresentaremos, com maiores detalhes, aspectos da teoria matemática *fuzzy*, sua conexão com a tradição da lógica e algumas reflexões filosóficas sobre este mundo tecnológico.

Capítulo 2

Quantificadores na perspectiva da teoria *fuzzy*

A seguir, apresentaremos brevemente, algumas ideias importantes sobre a teoria de quantificadores, com destaque para o trabalho apresentado por Aristóteles e a teoria sobre quantificadores generalizados. Essas ideias e o contexto no qual estão inseridas serão fundamentais para compreendermos um pouco sobre os quantificadores na perspectiva da teoria *fuzzy*.

2.1 Um pouco sobre quantificadores

Westerståhl (2005) destaca que Aristóteles introduziu o estudo sobre quantificadores como parte indispensável da Lógica.

No capítulo primeiro deste trabalho, observamos que Aristóteles desenvolveu os silogismos categóricos, tratando-os através do significado das propriedades de quatro expressões básicas de quantificadores: todo, nenhum, algum e algum não. Sendo essas, as sentenças categóricas, denominadas respectivamente, por: afirmação universal, negação universal, afirmação particular e negação particular.

Para Westerståhl (2005), os estudos iniciais de Aristóteles foram decisivos para o estudo da quantificação. O termo "quantificação", de acordo com o que apresenta Hegenberg e Andrade e Silva (2005), com base em dicionários, significa "ato de quantificar" e, por sua vez, "quantificar" corresponde a "exprimir em quantidade".

O quadrado das oposições de Aristóteles, conforme apresentado no capítulo anterior, é um estudo das várias formas de negação combinadas com as expressões de quantificadores. Segundo Westerståhl, o interessante da teoria apresentada por Aristóteles está no fato das expressões de quantificadores possuírem dois termos, que são considerados conjuntos de indivíduos e, dessa forma, temos que a expressão “alguns” pode ser vista como a intersecção não vazia entre dois conjuntos e a expressão “todo” pode significar a relação de inclusão. Essas expressões de quantificadores, “alguns” e “todos”, em um dado universo, são vistas como relações binárias sintática e semanticamente, sendo relações entre conjuntos de indivíduos e não entre indivíduos, ou seja, são relações de segunda ordem. Dessa maneira, os quantificadores seriam os denominados *quantificadores generalizados.*

Feitosa, Grácio e Nascimento (2009) relatam que a insuficiência da lógica clássica de primeira ordem, para tratar de alguns conceitos matemáticos e expressões da linguagem natural, motivou a criação de novos quantificadores, que não são possíveis de serem definidos a partir do quantificador universal ($\forall$) e do quantificador existencial ($\exists$). Para os autores, esses novos quantificadores, os quantificadores não clássicos, poderíam ser utilizados para duas vertentes: a criação de aspectos matemáticos específicos ou para desenvolver a análise de quantificadores presentes nas linguagens, mas não definíveis a partir dos lógicos, tais como: poucos, minoria, quase nenhum, a maioria, quase todos, entre outros. Essa vertente é relevante para a próxima seção deste capítulo.

Rodrigues (2011) afirma que, na teoria dos quantificadores generalizados, considera-se que os quantificadores são relações entre os subconjuntos de um conjunto dado. Este conjunto dado funciona como o universo da quantificação.

Gottlob Frege, segundo Westerståhl (2005), é outro nome relevante quando discutimos a teoria da quantificação. O filósofo, por um lado, apresentou a linguagem da lógica de predicados – conectivos, identidade e os quantificadores universal e existencial – e, por outro, formulou claramente a noção abstrata de um quantificador como uma relação de segunda ordem.

Frápolli Sanz (2007), nos mostra que a teoria da quantificação, da maneira como a conhecemos, apareceu pela primeira vez em 1879, na obra *Conceptografia* de Frege, em que o autor apresentou o primeiro tratado de lógica contemporânea, e foi o primeiro a incorporar uma análise singular dos quantificadores; porém, as expressões “quantificadores” e “lógica de primeira ordem”, com significado contemporâneo, já tinham sido escritas por Peirce em 1883. Enquanto Frege fez uma formalização com a intenção de criar uma linguagem universal da matemática, com uma linguagem livre de ambiguidades e demais imperfeições próprias das linguagens naturais, Peirce pensou na teoria de quantificadores e na notação envolvida apenas como um dos muitos mecanismos lógicos.

No que se refere à interpretação de Frege sobre os quantificadores, introduzida na obra *Conceitografia* e que ganhou destaque na lógica de primeira ordem, o filósofo destaca que esses são funções em que os argumentos são funções de ordem n, com n > 1. São funções monádicas, que formam uma expressão completa quando acompanha uma única função que funciona como argumento.

Para tratar das sentenças quantificadas da linguagem natural, Barwise e Cooper (1981) mostraram que os quantificadores clássicos são insuficientes. Os autores afirmam que existem sentenças quantificadas nas linguagens naturais que não podem ser simbolizadas apenas pelos quantificadores da lógica clássica de primeira ordem, e que a estrutura sintática apresentada nas sentenças quantificadas das linguagens naturais e a estrutura sintática das sentenças quantificadas na lógica clássica de primeira ordem são diferentes. Segundo Barwise e Cooper (1981), os quantificadores que não podem ser definidos a partir dos quantificadores da lógica clássica de primeira ordem são chamados de *quantificadores não lógicos*, já os que podem ser definidos por estes quantificadores são denominados *quantificadores lógicos.*

O primeiro a desenvolver a teoria que aborda expressões de quantidades inseridas na linguagem natural que não podem ser formalizadas apenas pelos quantificadores da linguagem da lógica clássica de primeira ordem, ou seja, a teoria dos quantificadores generalizados, pensando de forma mais matemática, foi Mostowski, que apresentou em 1957, o trabalho nomeado *"On a Generalization of quantifiers"* (Uma generalização dos quantificadores), sobre os quantificadores destinados a estender a teoria da quantificação clássica com outras expressões quantificadas. Agora, o desenvolvimento dos quantificadores generalizados, segundo Barwise e Cooper (1981), diferentemente de Mostowski (1957), é baseado na aproximação da lógica com a linguagem natural.

Os estudos apresentados por Barwise e Cooper tratam de uma sintáxe e uma semântica que abrangeriam tudo o que pode ser identificado como quantificador. Dessa forma, estaríamos considerando que todos os quantificadores seriam expressões substantivas e que todas as expressões substantivas seriam quantificadores; porém, uma definição completa de quantificador não foi encontrada através da teoria dos dois autores.

Barwise e Cooper assumem que existem outros quantificadores, os que são advindos de advérbios temporais, que não são expressões substantivas. Observamos que a sintáxe e a semântica apresentadas nas obras dos autores, não dão conta de todos os quantificadores da linguagem natural.

Loebner (1987) argumentou a existência, na literatura, de três subclasses de substantivos: substantivos definidos, que são termos; substantivos indefinidos, que podem ocorrer em sentenças quantificacionais, porém, neste caso, o contexto deve cumprir algumas condições e, desta forma, não podem ser simplesmente considerados como quantificadores e, por fim, substantivos quantificacionais, em sentido estrito, sem considerar a quarta subclasse de substantivos interrogativos. As três subclasses de substantivos diferem sintática e semanticamente e somente na última, em geral, os substantivos devem ser considerados quantificadores.

Em relação às definições e abordagens dos quantificadores, apesar da teoria proposta por Barwise e Cooper (1981) ser importante para a teoria dos quantificadores generalizados, e servir de base para diversos pesquisadores, como Westerståhl (2005) e outros, Rodrigues (2011), após apresentar a teoria de quantificadores universal e existencial apresentada por Aristóteles, a teoria de Frege e Pierce que foi desenvolvida para tratar dos quantificadores e as teorias sobre quantificadores generalizados apresentadas por Mostowski e Barwise e Cooper, destaca que não há uma definição absoluta que abranja todos os quantificadores, nem formalmente, nem na linguagem natural.

2.2 Quantificadores *fuzzy*

A quantificação é um tópico importante na teoria *fuzzy* e suas aplicações. Liu e Kerre (1997) afirmam que as pesquisas lógicas, nessa vertente, são realizadas principalmente dentro do quadro traçado por Mostowski, apresentado na Seção 2.1 deste capítulo. Isto fez com que um grande número de quantificadores matematicamente interessantes, conhecidos como quantificadores generalizados, fossem descobertos e estudados na Lógica de dois valores e também nas lógicas polivalentes, pois é do conhecimento dos linguístas e lógicos que, apenas os quantificadores universais e existenciais não são poderosos o suficiente para compreender todas as quantificações em linguagem natural e também na Lógica.

Na teoria dos conjuntos *fuzzy*, o conceito de quantificadores *fuzzy* ou quantificadores linguísticos, segundo Novák (2008) e Yager (1991), foi introduzido, pela primeira vez, através de estudos do professor Zadeh[2], e elaborada posteriormente por outros autores. Os quantificadores *fuzzy*, segundo Novák, foram estudados especialmente do ponto de vista semântico, sem uma estratégia claramente distinta do sistema lógico formal.

Como perceberemos, ao longo deste capítulo, muitas das interpretações existentes sobre os quantificadores *fuzzy* estão extremamente relacionadas com o conceito de cardinalidade *fuzzy*. Assuntos voltados à algebrização da teoria *fuzzy* serão discutidos no próximo capítulo, mas entendemos que, neste momento, é de extrema importância apresentarmos uma breve discussão sobre esse assunto para, posteriormente, entendermos um pouco sobre os quantificadores *fuzzy*.

Nos conjuntos finitos clássicos, sabemos que a cardinalidade de um determinado conjunto é expressa por algum número inteiro positivo, obtido através da contagem da quantidade dos elementos que pertencem a esse conjunto. Agora, tentar definir cardinalidade de conjuntos *fuzzy* finito não é algo tão simples, pois a principal diferença existente entre um conjunto *fuzzy* e um conjunto clássico, como apresentamos no Capítulo 1 e discutiremos com mais ênfase no próximo capítulo, é a questão do grau de pertinência. A contagem e o cálculo cardinal sob a incerteza *fuzzy*, tornam-se uma tarefa mais difícil e complicada do que no caso dos conjuntos clássicos. Baseados em Holcapek (2005), Yager (1991) e Wygralak (2003), adotaremos a seguinte definição para cardinalidade de conjuntos *fuzzy*:

Definição 2.2.1: A *cardinalidade* de um conjunto *fuzzy* $\mathcal{A}$, denotada por *card* ($\mathcal{A}$), definida em um conjunto finito universo V, é dada pelo somatório dos graus de pertinência de todos os elementos de V em $\mathcal{A}$:

$$card\ (\mathcal{A}) = \sum_{x \in V} \mu_{\mathcal{A}}(x)$$

[2] O professor Zadeh, bem como sua história e trabalho, foram apresentados no capítulo anterior.

Definição 2.2.2: A *cardinalidade relativa* de um conjunto *fuzzy* $\mathcal{A}$, denotada por *card rel* ($\mathcal{A}$), depende da cardinalidade do conjunto finito universo V. Deve-se escolher o mesmo conjunto finito universo V, para então, comparar conjuntos *fuzzy* através de sua cardinalidade relativa. A cardinalidade relativa é representada pela razão entre a cardinalidade *fuzzy* de $\mathcal{A}$ pela cardinalidade do conjunto finito universo V:

$$card\ rel\ (\mathcal{A}) = \frac{card\ (\mathcal{A})}{card\ (\mathrm{V})}$$

Em 1983, o professor Zadeh publicou um artigo denominado *"A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages*" (Uma abordagem computacional para quantificadores *fuzzy* em linguagens natural), em que o termo quantificador generalizado foi denominado como quantificador generalizado *fuzzy*, ou simplesmente, quantificador *fuzzy*, e empregado para denotar o conjunto de quantificadores das linguagens naturais, cujos elementos representativos seriam, por exemplo: vários, mais, muito mais, não muitos, muitos, poucos, um bom número, alguns grandes, perto de cinco, aproximadamente 10, com frequência, etc.

Na abordagem apresentada no artigo de Zadeh, os quantificadores *fuzzy* são interpretados como números *fuzzy*, o que caracteriza a cardinalidade de conjuntos *fuzzy* em um universo finito V. Podemos dizer que um número *fuzzy* é definido de maneira idêntica à função de pertinência. Refere-se à um conjunto de valores possíveis, em que cada valor pertence ao intervalo real [0, 1]. Esse conceito desempenha um papel essencial no tratamento dos quantificadores *fuzzy*.

Novák (2001) afirma que, apesar de apresentarem uma boa teoria, os quantificadores generalizados, até então, possuíam uma única desvantagem: nenhuma imprecisão estava envolvida neles. Com isso, o autor apresentou o conceito de quantificadores generalizados e destacou a capacidade da lógica *fuzzy* em contribuir para essa teoria. Novák (2001) afirma que os quantificadores generalizados foram introduzidos por Mostowski e que a ideia principal do professor Zadeh era estender a definição clássica de quantificadores universais e existenciais para que quantificadores como “mais”, “alguns”, “poucos”, entre outros, pudessem ser introduzidas na teoria lógica.

Ao apresentar os quantificadores *fuzzy*, com base no que foi desenvolvido por Zadeh, Novák (2001) destaca que esses são apresentados através de dois tipos: Quantificadores *fuzzy* do primeiro tipo, como exemplos, temos “vários”, “poucos”, “muitos”, etc., que caracterizam a cardinalidade de um determinado conjunto *fuzzy* $\mathcal{A}$ contido no universo V, e quantificadores *fuzzy* do segundo tipo, como exemplos, temos “a maior parte”, “uma grande fração”, “muito do”, etc., os quais caracterizam a cardinalidade relativa de um determinado conjunto *fuzzy* $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{V}$ em relação a um conjunto *fuzzy* $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{V}$.

Novák (2001) destaca dois itens importantes ao longo de seu artigo. O primeiro item apresentado pelo autor, avalia as denominadas “predicações linguísticas”. Como exemplo, temos a expressões do tipo “a temperatura é alta”. O segundo item é a teoria dos quantificadores linguísticos, que são palavras como “muito”, “a maioria”, “uma grande quantidade de”, “alguns”, “um pouco”, etc., que são utilizados juntamente com as predicações linguísticas. Para o autor, ambos os tipos de expressões são fundamentais para a teoria da lógica *fuzzy*, cujo objetivo é desenvolver uma teoria natural do racíocio humano.

Consideremos um exemplo:

“A maioria das temperaturas nas cidades localizadas no interior do estado de São Paulo é alta”

Neste exemplo, segundo o que foi apresentado por Nóvak (2001), temos que “a maioria” é considerado um quantificador linguístico, enquanto que “temperaturas nas cidades localizadas no interior do estado de São Paulo é alta” é um predicado linguístico.

Liu e Kerre (1998) afirmam que da mesma forma como foi apresentada por Nóvak (2001), intuitivamente, os quantificadores se relacionam com o conceito de cardinalidade de conjuntos. Os autores destacam que as quantificações apresentadas por Zadeh são vagamente definidas na natureza.

Para o autor Yager (1991), o conceito de quantificador linguístico generaliza os quantificadores existencial e universal da lógica clássica. Segundo ele, na tentativa de preencher a lacuna existente entre sistemas formais e o discurso natural, e para fornecer uma ferramenta de representação mais flexível ao conhecimento, Zadeh, ao desenvolver a sua teoria, fez uma distinção entre dois tipos de quantificadores: um, em termos absolutos, e outro, em termos proporcionais.

Liu e Kerre (1998) e Yager (1991), com base nos estudos levantados pelo professor Zadeh, apresentam os quantificadores através de dois modos:

a) Quantificadores *fuzzy* absolutos: são utilizados para representar quantidades que são de natureza absoluta, estando estes intimamente relacionados com o conceito de cardinalidade dos conjuntos *fuzzy*. Como exemplos, consideremos: “cerca de cinco”, “muito mais do que 10”, “perto de 100”, etc.

b) Quantificadores *fuzzy* relativos: expressam as medições sobre o número total de elementos, que preenchem uma determinada condição, dependendo do número total de elementos possíveis (a proporção de elementos). Exemplos: “cerca da metade”, "a maioria", "a minoria", "pouco", etc.

Da mesma forma, Galindo, Carrasco e Almagro (2008) destacam que quantificadores *fuzzy* ou quantificadores linguísticos permitem expressar quantidades ou proporções *fuzzy* a fim de fornecer uma ideia aproximada do número de elementos de um subconjunto *fuzzy*, que satisfaçam uma determinada condição ou proporção desse número em relação ao número total de elementos possíveis. Os autores também apresentam os quantificadores *fuzzy* absolutos e relativos e citam exemplos semelhantes aos apresentados anteriormente.

De um modo geral, Liu e Kerre (1998) destacam que os quantificadores em Lógica, assumem uma forma genérica do tipo: Qx A(x), em que Q é o quantificador, A(x) é um predicado com variável x, e a quantificação é sobre x.

Liu e Kerre afirmam que há dois tipos de quantificadores relacionados com distribuições de possibilidades, definidos em universos diferentes. Dessa forma, apresentam as seguintes proposições na teoria *fuzzy*: “Existem Q $\mathcal{A}$´s” e “Q $\mathcal{A}$´s são $\mathcal{B}$´s”. As proposições da forma “Existem Q $\mathcal{A}$´s” se relacionam com os quantificadores *fuzzy* absolutos, apresentados anteriormente, que são vistos como distribuições de possibilidades de cardinalidades de conjuntos *fuzzy*. Já as proposições da forma "Q $\mathcal{A}$´s são $\mathcal{B}$´s" referem-se aos quantificadores *fuzzy* relativos, que são interpretados como proporção de cardinalidades de conjuntos *fuzzy*. Os autores destacam que, no cotidiano, usamos os números naturais e porcentagens para nos referirmos à quantidade de um determinado conjunto.

Considerando a proposição *fuzzy*: "Existem Q $\mathcal{A}$´s", temos que Q é um número *fuzzy* no intervalo [0, 1], $\mathcal{A}$ é um conjunto *fuzzy* que descreve como os elementos de um conjunto universo possuem uma propriedade considerada. Em outras palavras, $\mathcal{A}$ é um conjunto *fuzzy* que representa um predicado *fuzzy.* Por exemplo, considerando a seguinte proposição: "Existem cerca de 10 estudantes em uma determinada classe, cuja aptidão para Matemática é alta". No exemplo, temos que Q é um número *fuzzy* que expressa o termo lingüístico "cerca de 10" e $\mathcal{A}$ é um subconjunto *fuzzy* do conjunto de "todos os alunos em uma determinada classe", dentro do intervalo [0, 1], que expressam como os indivíduos possuem a propriedade de "alta aptidão para Matemática".

Já na proposição "Q $\mathcal{A}$´s são $\mathcal{B}$´s", temos que Q é um número *fuzzy* em [0, 1] e, analogamente ao caso anterior, temos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são considerados conjuntos *fuzzy*, que descrevem como os elementos de um conjunto universo possuem uma propriedade considerada. Por exemplo, considerando a seguinte proposição: "Quase todos os jovens estudantes, em uma determinada classe, possuem aptidão para Matemática"; temos então que Q é um número *fuzzy* em [0, 1] que expressa o termo linguístico "quase todos", $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são subconjuntos *fuzzy* do conjunto de todos os alunos em uma determinada classe, dentro do intervalo [0, 1] e, enquanto que o conjunto *fuzzy* $\mathcal{A}$ expressa "os indivíduos que possuem a propriedade ser jovem", o conjunto *fuzzy* $\mathcal{B}$, expressa como os indivíduos possuem a propriedade de "alta aptidão para Matemática".

Yager (1991) destaca que os quantificadores *fuzzy* do segundo tipo, ou seja, os quantificadores *fuzz*y relativos, funcionalmente, são discutidos mais detalhadamente na literatura. Para isso, definimos algumas especiais sub-categorias destes quantificadores: quantificador *fuzzy* crescente, quantificador *fuzzy* descrescente e quantificador *fuzzy* unimodal. Considerando um subconjunto *fuzzy* Q e, para qualquer x $\in$ [0, 1], Q(x) indica o grau com que o valor de x satisfaz o conceito representado por Q.

Dessa forma, segundo o autor, dizemos que um quantificador *fuzzy* relativo é crescente, quando:

(i) $Q(0) = 0$;

(ii) $Q(1) = 1$;

(iii) se $x_1 \geq x_2$, então $Q(x_1) \geq Q(x_2)$.

Estes quantificadores são caracterizados por valores, tais como: "pelo menos α", "todos", "a maioria". Agora, um quantificador *fuzzy* relativo do tipo decrescente é caracterizado pelo fato de:

(i) $Q(0) = 1$;

(ii) $Q(1) = 0$;

(iii) se $x_1 \leq x_2$, então $Q(x_1) \geq Q(x_2)$.

Estes quantificadores caracterizam termos tais como: "alguns", "no máximo α". Por fim, um quantificador unimodal, para algum $0 \leq a \leq b \leq 1$, tem as seguintes propriedades:

(i) $Q(0) = Q(1) = 0$;

(ii) $Q(x) = 1$, para $a \leq x \leq b$;

(iii) se $x_1 < x_2 \leq a$, então $Q(x_1) \leq Q(x_2)$;

(iv) se $b \leq x_1 < x_2$, então $Q(x_1) \geq Q(x_2)$.

Um conceito que desempenha papel importante na teoria dos quantificadores *fuzzy,* segundo Yager (1991)**,** é a ideia de especificidade de um quantificador. Um quantificador como "muito perto de 3", por exemplo, é considerado *mais específico* do que o quantificador "cerca de três". Mais formalmente, se Q_1 e Q_2 são dois quantificadores *fuzzy* tal que $Q_1(x) \leq Q_2(x)$, parta todo x, então Q_1 é mais específico do que Q_2.

Yager destaca que a introdução dos quantificadores *fuzzy* forneceu uma ferramenta para modelar uma série de questões importantes em sistemas inteligentes. Uma aplicação muito importante dos quantificadores *fuzzy*, segundo o autor, tem sido uma alternativa para as lógicas não monotônicas, e considerado um esquema para representar o raciocínio do senso comum. O exemplo de raciocínio de senso comum, utilizado pelo autor, é a declaração: "pássaros voam". Ao afirmarmos que “Tweety é um pássaro”, e como sabemos que “pássaros voam”, podemos concluir que “Tweety voa”. Agora, se adicionarmos a informação de que “Tweety é um pinguim”, e sabendo-se que pinguins não voam, teríamos, então, que retirar a conclusão anterior e apresentar uma nova: a de que "Tweety não voa". Ao invés de introduzir uma nova lógica não-monotônica para lidar com esse problema, Yager (1991) destaca que Zadeh sugeriu que a premissa inicial deveria ser modificada para indicar que "*geralmente* as aves voam". A introdução do quantificador *fuzzy* “geralmente”, seria de extrema importância, nesse caso. No exemplo citado anteriormente, temos um quantificador *fuzzy* do tipo relativo.

Podemos dizer que os quantificadores linguísticos, também denominados de quantificadores *fuzzy*, são uma extensão dos quantificadores tradicionais da lógica e são estudados por alguns autores, sempre segundo os pressupostos apresentados pelo professor Zadeh, variando um pouco na interpretação e nos esquemas de raciocínio. Podemos observar que a definição de quantificador *fuzzy* depende muito do objeto ou contexto no qual ele é utilizado e, da mesma forma, assim como nos quantificadores da lógica clássica, não há uma definição absoluta formal para quantificadores *fuzzy*.

Capítulo 3

Uma Álgebra para os Conjuntos *Fuzzy*

Para a elaboração deste terceiro capítulo, baseamo-nos nas principais ideias apresentadas em: Bojadziev (1995), Bosnjak, Madarász e Vojvdic (2009), Esteva e Quintanilla (1987), Feitosa (1992), Feitosa e Paulovich (2005), Hájek (1998), Hamburg (1988), Miraglia (1987), Rasiowa (1974), Seselja e Tepavcevic (1994), Shaw e Simões (1999), Swamy e Murthy (1992) e Zadeh (1987).

Neste capítulo, apresentaremos uma análise de teorias relacionadas aos conjuntos *fuzzy*, com destaque sobre qual e como seria a álgebra desses conjuntos, de modo a gerarmos uma proposta de formalização dessas propriedades envolvidas no contexto algébrico dentro de uma linguagem lógica.

Conforme convenção do Capítulo 1, os conjuntos *fuzzy* serão representados por letras latinas maiúsculas do tipo: $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, etc., com suas respectivas funções de pertinência: $f_{\mathcal{A}}$, $f_{\mathcal{B}}$, $f_{\mathcal{C}}$, $f_{\mathcal{D}}$, $f_{\mathcal{E}}$ etc., para diferenciar dos conjuntos usuais, que serão denotados por letras maiúsculas do tipo: A, B, C, D, E, etc.

3.1 Conceitos iniciais *fuzzy*

Destacaremos, a seguir, conceitos iniciais importantes para o desenvolvimento da teoria algébrica dos conjuntos *fuzzy*.

Definição 3.1.1: Um conjunto *fuzzy* $\mathcal{A}$ é uma função $f_{\mathcal{A}} : V \to [0, 1]$, em que V é o conjunto universo ou domínio do conjunto *fuzzy* $\mathcal{A}$, [0, 1] é o intervalo de números reais e $f_{\mathcal{A}}$ é denominada a função de verdade ou função de pertinência de $\mathcal{A}$.

Notação: $f_{\mathcal{A}} : V \rightarrow [0, 1]$

$$x \mapsto f_{\mathcal{A}}(x).$$

Poderíamos tomar no lugar do intervalo [0, 1] qualquer outro conjunto parcialmente ordenado. Entretanto, utilizamos o intervalo unidade, contido no conjunto dos números reais, que é um conjunto totalmente ordenado. Esse intervalo é usualmente adotado para a maior facilidade de inter-relação com as demais lógicas multivaloradas.

Na teoria usual de conjuntos, a relação de pertinência que caracteriza os elementos de um conjunto $A \subseteq V$; em que V é o conjunto universo, pode ser estabelecida pelo conceito de *função característica* ou *função de pertinência*, denotada por $f_A(x)$, com apenas dois possíveis valores: 0 para indicar que o argumento não está em A e 1 para indicar a pertinência do argumento no conjunto.

Dessa forma, temos que:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in A; \\ \\ 0, \text{ se } x \notin A, \end{cases}$$

com $f_A(x) \in \{0, 1\}$.

Como exemplo, consideremos o conjunto universo $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ e o subconjunto A de V, dado por $A = \{x_2, x_4, x_5\}$. No exemplo, temos que três, dos cinco elementos do conjunto universo, pertencem também ao conjunto A .

Utilizando a notação de função característica, temos que:

$f_A(x_1) = 0$, $f_A(x_2) = 1$, $f_A(x_3) = 0$, $f_A(x_4) = 1$ e $f_A(x_5) = 1$.

Assim, a função característica do conjunto usual A é dada por:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \text{ é } x_2, x_4 \text{ ou } x_5\,; \\ \\ 0, \text{ se } x \text{ é } x_1 \text{ ou } x_3. \end{cases}$$

Agora, no contexto *fuzzy*, em destaque neste trabalho, dado V um conjunto qualquer, um conjunto usual, temos que um conjunto (subconjunto) *fuzzy* $\mathcal{A}$ em V é caracterizado por uma função de pertinência $f_{\mathcal{A}}(x)$, que associa a cada elemento de V, um número real no intervalo [0, 1]. Este valor $f_{\mathcal{A}}(x)$ indica o grau de pertinência de x em $\mathcal{A}$.

Conforme apresentado, ao considerarmos que um conjunto *fuzzy* é determinado por uma função e, que na teoria usual dos conjuntos, cada função é uma relação binária dada por um conjunto constituído de pares ordenados de elementos, podemos denotar os conjuntos *fuzzy* da seguinte maneira:

$$\mathcal{A} = \{(x, f_{\mathcal{A}}(x)) : x \in V\} \text{ em que } f_{\mathcal{A}}: V \to [0, 1] \text{ é uma função.}$$

Temos que, no par ordernado, o primeiro elemento pertence ao conjunto V e o segundo elemento indica o grau de pertinência do primeiro elemento em $\mathcal{A}$.

A notação apresentada anteriormente, associa a cada elemento x de V, um número real $f_{\mathcal{A}}(x)$ no intervalo real [0, 1].

Com relação à Definição 3.1.1 apresentada, temos que a função característica ou função de pertinência não mais assume apenas os valores 0 e 1, mas pode assumir qualquer dos infinitos valores do intervalo real [0, 1]. Com isso, o conceito de pertinência não é mais algo tão nítido, tornando-se *fuzzy* no sentido de representar os graus de inclusão no conjunto *fuzzy*.

No último exemplo de função característica da teoria usual de conjuntos, apresentado anteriormente, visto que uma função pode ser representada por um conjunto de pares ordenados, então a função característica $f_A: V \to \{0, 1\}$ poderia ser representada do seguinte modo: $f_A = \{(x_1, 0); (x_2, 1); (x_3, 0); (x_4, 1); (x_5, 1)\}$. Assim, a função característica de um subconjunto A de V é um conjunto *fuzzy* em V.

Agora, consideremos o conjunto *fuzzy*:

$$\mathcal{A} = \{(x_1, 0.2); (x_2, 0.1); (x_3, 0.8); (x_4, 1); (x_5, 0.2); (x_6, 0.5); (x_7, 0.3)\}.$$

Esse conjunto *fuzzy* é constituído por sete pares ordenados e os elementos x_i, para $i \in \{1, 2, ..., 7\}$, pertencem ao conjunto usual $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, que é um subconjunto do conjunto universo V. Já a função de pertinência do conjunto *fuzzy* $\mathcal{A}$, indicada por $f_{\mathcal{A}}(x)$, assume os valores no intervalo real [0, 1], sendo eles: $f_{\mathcal{A}}(x_1) = 0.2$; $f_{\mathcal{A}}(x_2) = 0.1$; $f_{\mathcal{A}}(x_3) = 0.8$; $f_{\mathcal{A}}(x_4) = 1$; $f_{\mathcal{A}}(x_5) = 0.2$; $f_{\mathcal{A}}(x_6) = 0.5$ e $f_{\mathcal{A}}(x_7) = 0.3$.

No exemplo, temos que o elemento x_4 é considerado um membro com pertinência total ao conjunto *fuzzy* $\mathcal{A}$, pois o seu grau de pertinência, segundo a função, tem valor 1; enquanto que o elemento x_2 possui a menor pertinência ao conjunto *fuzzy*, pois $f_{\mathcal{A}}(x_2) = 0.1$, que está perto do 0.

Vale destacar que, quando $f_{\mathcal{A}}(x) = 0$, ou seja, a função de pertinência de x no conjunto *fuzzy* $\mathcal{A}$ é zero, entendemos que o elemento x tem grau zero de pertinência em $\mathcal{A}$. Dessa forma, esse elemento não está nesse conjunto *fuzzy*. Com isso, podemos omitir o par ordenado em que ocorre o elemento. Se considerarmos, por exemplo, um conjunto fuzzy $\mathcal{A}$ dado por:

$\mathcal{A} = \{(x_1, 0.3); (x_2, 0.2); (x_3, 0); (x_4, 1); (x_5, 0.2); (x_6, 0); (x_7, 0.3)\}$,

podemos, simplesmente, reescrever esse conjunto omitindo os pares ordenados em que a função de pertinência de x no conjunto *fuzzy* $\mathcal{A}$ tem valor zero. Assim:

$\mathcal{A} = \{(x_1, 0.3); (x_2, 0.2); (x_4, 1); (x_5, 0.2); (x_7, 0.3)\}$.

Podemos assumir dois caminhos diferentes, por exemplo, para especificar os elementos x_i no conjunto $A \subseteq V$, pois eles não são, necessariamente, números.

(i) Assumindo que x_i é número.

Adotando x_i, i = 1,2,..., 7 como números inteiros ($x_i \in \mathbb{Z}$), temos que $x_1 = 1$, $x_2 = 2$,

$x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $x_6 = 6$ e $x_7 = 7$, pertencem ao conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, um subconjunto do universo V = $\mathbb{Z}$.

Dessa forma, o conjunto *fuzzy* torna-se:

$\mathcal{A}$ = {(1, 0.2); (2, 0.1); (3, 0.8); (4, 1); (5, 0.2); (6, 0.5); (7, 0.3)}.

(ii) Assumindo que x_i representa um substantivo (objeto).

Adotando x_i, i = 1, 2,..., 7 como os "nomes de alguns amigos de José", temos que: x_1 = João, x_2 = Pedro, x_3 = Joaquim, x_4 = Arthur, x_5 = Paulo, x_6 = Ricardo e x_7 = Matheus, pertencem ao conjunto de "alguns amigos de José" dado por:

A = {João, Pedro, Joaquim, Arthur, Paulo, Ricardo, Matheus},

que é um subconjunto do universo V (que representa todos os amigos de José). Neste caso, o conjunto *fuzzy* $\mathcal{A}$ dado por:

$\mathcal{A}$ = {(João, 0.2); (Pedro, 0.1); (Joaquim, 0.8); (Arthur, 1); (Paulo, 0.2); (Ricardo, 0.5); (Matheus, 0.3)},

expressa a proximidade dos amigos de José em A $\subseteq$ V. Podemos notar, por exemplo, que Arthur tem pertinência total no conjunto e pode ser considerado como o amigo mais próximo de José. Já Pedro, com grau de pertinência 0.1, de todos os amigos listados, é o menos próximo de José.

A seguir, introduzimos algumas definições adicionais e considerações importantes sobre os conjuntos *fuzzy*.

Assim como na teoria usual dos conjuntos, existem duas importantes relações que envolvem os conjuntos *fuzzy*: a relação de igualdade *fuzzy* e a relação de inclusão *fuzzy*.

Para isso, consideremos fixado um conjunto domínio ou universo V e os conjuntos fuzzy $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ neste universo: $\mathcal{A}$= {(x, $f_{\mathcal{A}}$(x)) : x $\in$ V, $f_{\mathcal{A}}$(x) $\in$ [0, 1]} e $\mathcal{B}$ = {(x, $f_{\mathcal{B}}$(x)) : x $\in$ V, $f_{\mathcal{B}}$(x) $\in$ [0, 1]}.

Definição 3.1.2: Dois conjuntos *fuzzy* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ em V são *iguais*, o que denotamos por $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, se para todo $x \in V$, segue que $f_{\mathcal{A}}(x) = f_{\mathcal{B}}(x)$. Assim, para qualquer conjunto *fuzzy* $\mathcal{A}$, temos que $\mathcal{A} = \mathcal{A}$.

Definição 3.1.3: Dados dois subconjuntos *fuzzy* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ em V, dizemos que $\mathcal{B}$ é um s*ubconjunto fuzzy* de $\mathcal{A}$ (ou $\mathcal{B}$ está contido em $\mathcal{A}$) se para todo $x \in V$, $f_{\mathcal{B}}(x) \leq f_{\mathcal{A}}(x)$. Essa inclusão *fuzzy* é denotada por $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Definição 3.1.4: O conjunto *fuzzy* $\mathcal{B}$ é um *subconjunto próprio* do conjunto *fuzzy* $\mathcal{A}$ se $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ e $\mathcal{B} \neq \mathcal{A}$. Neste caso, denotamos por $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

Definição 3.1.5: O *conjunto fuzzy vazio*, também chamado de conjunto *fuzzy* zero, é dado pela função constante zero:

$$\mathit{0} = \{(x, 0) : x \in V\}.$$

Definição 3.1.6: O *conjunto fuzzy universo*, também denominado de conjunto *fuzzy* unidade, é dado pela função constante um:

$$\mathit{1} = \{(x, 1) : x \in V\}.$$

Com base nos conceitos iniciais *fuzzy*, apresentados nesta seção, destacaremos quais, e como são realizadas, as operações entre os conjuntos *fuzzy*.

3.2 Operações entre os conjuntos *fuzzy*

A seguir, comporemos com os conjuntos *fuzzy* de forma que obtenhamos novos conjuntos *fuzzy*, ou seja, destacaremos as operações existentes entre os conjuntos *fuzzy*. Para isso, o domínio V será mantido nas definições das operações *fuzzy*. Como os conjuntos *fuzzy* estão sempre vinculados ao universo V, podemos encontrar em outros textos a nomeação de subconjuntos *fuzzy*.

Definição 3.2.1: A *união* de dois conjuntos *fuzzy* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é um conjunto *fuzzy* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, tal que, para cada $x \in V$, o seu grau de pertinência no conjunto união é o valor máximo entre $f_{\mathcal{A}}(x)$ e $f_{\mathcal{B}}(x)$. Dessa forma:

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{(x, f_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}(x)) : x \in V\},$$

em que: $f_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}(x) = \max \{f_{\mathcal{A}}(x), f_{\mathcal{B}}(x)\}$.

Temos também que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Como exemplo:

Consideremos o conjunto universo $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ e os conjuntos *fuzzy* $\mathcal{A} = \{(x_1, 0.1); (x_2, 1); (x_3, 0.4); (x_4, 0.8); (x_5, 0.9)\}$ e $\mathcal{B} = \{(x_1, 0.3); (x_2, 0.2); (x_3, 0.9); (x_4, 0.7); (x_5, 0.6)\}$. Pela definição de união entre conjuntos *fuzzy* temos:

$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{(x_1, 0.3); (x_2, 1); (x_3, 0.9); (x_4, 0.8); (x_5, 0.9)\}$.

Definição 3.2.2: A *intersecção* de dois conjuntos *fuzzy* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é um conjunto *fuzzy* $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ que atribui, para cada $x \in V$, o valor mínimo entre $f_{\mathcal{A}}(x)$ e $f_{\mathcal{B}}(x)$.

Assim:

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{(x, f_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(x)) : x \in V\},$$

em que: $f_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(x) = \min \{f_{\mathcal{A}}(x), f_{\mathcal{B}}(x)\}$.

Temos também que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ e $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$.

Voltando para o exemplo anterior, agora com a definição de intersecção entre conjuntos *fuzzy*, temos:

$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{(x_1, 0.1); (x_2, 0.2); (x_3, 0.4); (x_4, 0.7); (x_5, 0.6)\}$.

Agora, sejam: $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$, $\mathcal{A} = \{(x_1, 0.2); (x_2, 0.4); (x_3, 0.5); (x_4, 0.6); (x_5, 0.9); (x_6, 1); (x_7, 0.3)\}$ e $\mathcal{B} = \{(x_1, 0.3); (x_2, 0.9); (x_3, 0.6); (x_4, 0.8); (x_5, 0.5); (x_6, 0.1); (x_7, 0.7); (x_8, 0.2)\}$. Então, temos:

$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{(x_1, 0.3); (x_2, 0.9); (x_3, 0.6); (x_4, 0.8); (x_5, 0.9); (x_6, 1); (x_7, 0.7); (x_8, 0.2)\}$;

$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{(x_1, 0.2); (x_2, 0.4); (x_3, 0.5); (x_4, 0.6); (x_5, 0.5); (x_6, 0.1); (x_7, 0.3)\}$.

Nesse exemplo, podemos observar que no conjunto *fuzzy* $\mathcal{A}$ e no conjunto intersecção *fuzzy* $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, o par ordenado $(x_8, 0)$ foi omitido, visto que o grau de pertinência de x_8 é zero.

Como forma alternativa, as definições de união e de intersecção de conjuntos *fuzzy* poderiam ser dadas pelas duas proposições seguintes, equivalentes às definições dadas.

Proposição 3.2.1: A união de dois conjuntos *fuzzy* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é o menor conjunto *fuzzy* $\mathcal{C}$ que contém $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

Demonstração: Já vimos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Consideremos $\mathcal{C}$ um conjunto *fuzzy* que contém $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Assim, temos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$, ou seja, $(\forall\ x \in V)\ f_{\mathcal{A}}(x) \leq f_{\mathcal{C}}(x)$ e $(\forall\ x \in V)\ f_{\mathcal{B}}(x) \leq f_{\mathcal{C}}(x)$. Dessa forma, $(\forall\ x \in V)\ f_{\mathcal{C}}(x) \geq \max\{f_{\mathcal{A}}(x), f_{\mathcal{B}}(x)\}$. Temos então, que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ e, portanto, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ é o menor conjunto *fuzzy* que contém $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. ■

Proposição 3.2.2: A intersecção de dois conjuntos *fuzzy* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é o maior conjunto *fuzzy* $\mathcal{D}$ que está contido em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

Demonstração: Já vimos que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ e $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$. Consideremos $\mathcal{D}$ um conjunto *fuzzy* que está contido em $\mathcal{A}$ e em $\mathcal{B}$. Assim, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$ e $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$, ou seja, $(\forall\ x \in V)\ f_{\mathcal{D}}(x) \leq f_{\mathcal{A}}(x)$ e $(\forall\ x \in V)\ f_{\mathcal{D}}(x) \leq f_{\mathcal{B}}(x)$. Dessa forma, $(\forall\ x \in V)\ f_{\mathcal{D}}(x) \leq \min\{f_{\mathcal{A}}(x), f_{\mathcal{B}}(x)\}$. Temos então, que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ e, portanto, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ é o maior conjunto *fuzzy* que contém $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. ■

Através dessas duas proposições, verificamos que, dados dois conjuntos *fuzzy* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, os conjuntos *fuzzy* união e intersecção assumem, respectivamente, os valores *supremos* e *ínfimos* das funções de pertinência de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

Definição 3.2.3: Dado um conjunto *fuzzy* $\mathcal{A}$ no domínio V, o seu *complemento fuzzy*, denotado por $\mathcal{A}'$, é:

$$\mathcal{A}' = \{(x, 1 - f_{\mathcal{A}}(x)) : x \in V\}. \text{ Temos que } f_{\mathcal{A}'}(x) = 1 - f_{\mathcal{A}}(x).$$

Para ilustrarmos melhor a definição, consideramos o conjunto universo V = {1, 2, 3, 4, 5} e o conjunto *fuzzy* $\mathcal{A}$ = {(1, 0.2); (2, 0.3); (3, 0.7); (4, 0.8); (5, 1)}.

Assim, temos:

$f_{\mathcal{A}'}(1) = 1 - f_{\mathcal{A}}(1) = 1 - 0.2 = 0.8$

$f_{\mathcal{A}'}(2) = 1 - f_{\mathcal{A}}(2) = 1 - 0.3 = 0.7$

$f_{\mathcal{A}'}(3) = 1 - f_{\mathcal{A}}(3) = 1 - 0.7 = 0.3$

$f_{\mathcal{A}'}(4) = 1 - f_{\mathcal{A}}(4) = 1 - 0.8 = 0.2$

$f_{\mathcal{A}'}(5) = 1 - f_{\mathcal{A}}(5) = 1 - 1 = 0$

Então, $\mathcal{A}'$ = {(1, 0.8); (2, 0.7); (3, 0.3); (4, 0.2)}.

Definição 3.2.4: Dados dois conjuntos *fuzzy* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ no domínio V, a *diferença* entre esses conjuntos, denotada por $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ (lê-se $\mathcal{A}$ menos $\mathcal{B}$), é definida da seguinte maneira:

$$f_{\mathcal{A}-\mathcal{B}}(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } f_{\mathcal{A}}(x) \leq f_{\mathcal{B}}(x); \\ \\ f_{\mathcal{A}}(x) - f_{\mathcal{B}}(x), \text{ se } f_{\mathcal{A}}(x) > f_{\mathcal{B}}(x). \end{cases}$$

Naturalmente, temos que $\mathcal{A} - \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Como exemplo, tomemos o conjunto universo V = $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ e consideramos os conjuntos *fuzzy* $\mathcal{A}$ = $\{(x_1, 0.3); (x_2, 0.2); (x_3, 1); (x_4, 0.6)\}$ e $\mathcal{B}$ = $\{(x_1, 0.7); (x_2, 0.6)\}; (x_3, 0.9); (x_4, 0.2)\}$. Temos que o conjunto *fuzzy* diferença é dado por:

$f_{\mathcal{A}}(x_1) < f_{\mathcal{B}}(x_1)$, logo $f_{\mathcal{A} - \mathcal{B}}(x_1) = 0$

$f_{\mathcal{A}}(x_2) < f_{\mathcal{B}}(x_2)$, logo $f_{\mathcal{A} - \mathcal{B}}(x_2) = 0$

$f_{\mathcal{A}}(x_3) > f_{\mathcal{B}}(x_3)$, temos que $f_{\mathcal{A}}(x_3) - f_{\mathcal{B}}(x_3) = 1 - 0.9 = 0.1$, logo $f_{\mathcal{A} - \mathcal{B}}(x_3) = 0.1$

$f_{\mathcal{A}}(x_4) > f_{\mathcal{B}}(x_4)$, temos que $f_{\mathcal{A}}(x_4) - f_{\mathcal{B}}(x_4)= 0.6 - 0.2 = 0.4$, logo $f_{\mathcal{A} - \mathcal{B}}(x_4) =0.4$

Assim, $\mathcal{A} - \mathcal{B} = \{(x_1, 0); (x_2, 0); (x_3, 0.1); (x_4, 0.4)\} = \{(x_3, 0.1); (x_4, 0.4)\}$.

A seguir, discutiremos a álgebra dada pelos conjuntos *fuzzy*, e suas operações.

3.3 Uma Álgebra para os Conjuntos *Fuzzy*

Utilizaremos, nessa seção, as definições apresentadas na Seção 3.1 e consideremos R = $\{\mathcal{A} : \mathcal{A}$ é um conjunto *fuzzy* para um dado conjunto universo V$\}$.

Nesse momento, nosso interesse de estudo é a verificação da estrutura algébrica determinada pelos conjuntos *fuzzy* em V. Para isso, consideraremos uma estrutura algébrica determinada por (R, $\subseteq$, $\cup$, $\cap$, '), em que a inclusão, a união, a intersecção e o complemento são determinadas para os conjuntos *fuzzy*, como introduzido anteriormente.

- Propriedade Reflexiva:

  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$, pois

  $$(\forall\ x \in V)\ f_{\mathcal{A}}(x) \leq f_{\mathcal{A}}(x).$$

- Propriedade Anti-simétrica:

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}$, pois

$$(\forall\ x \in V)\ f_{\mathcal{A}}(x) = f_{\mathcal{B}}(x) \Leftrightarrow (\forall\ x \in V)\ f_{\mathcal{A}}(x) \leq f_{\mathcal{B}}(x) \text{ e } f_{\mathcal{B}}(x) \leq f_{\mathcal{A}}(x).$$

- Propriedade Transitiva:

  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$, pois

$$(\forall\ x \in V)\ f_{\mathcal{A}}(x) \leq f_{\mathcal{B}}(x) \text{ e } f_{\mathcal{B}}(x) \leq f_{\mathcal{C}}(x) \Rightarrow (\forall\ x \in V)\ f_{\mathcal{A}}(x) \leq f_{\mathcal{C}}(x).$$

Um conjunto não vazio munido de uma relação que admite as propriedades reflexiva, anti-simétrica e transitiva é denominada uma *ordem parcial*.

Destacamos que, da teoria usual dos conjuntos, um conjunto parcialmente ordenado é dado por um par (A, $\leq$), em que A é um conjunto e $\leq$ é uma ordem parcial em A.

Além disso, se para cada par de elementos pertencentes a A, sejam x e y, por exemplo, existe o supremo e o ínfimo do conjunto {x, y} em A, então a estrutura é denominada *reticulado*.

Dessa forma, temos que (R, $\subseteq$) é parcialmente ordenado pela inclusão e, pelas proposições de união e intersecção apresentadas no item 3.2 deste capítulo, temos que (R, $\subseteq$) é um *reticulado*.

Como (R, $\subseteq$) é um reticulado, então a estrutura é equipada com duas operações binárias $\vee$ e $\wedge$ (união e intersecção, respectivamente).

Vale destacar que, como observamos na seção anterior, dados dois conjuntos *fuzzy* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, os conjuntos *fuzzy* união e intersecção assumem, respectivamente, os valores supremos e ínfimos das funções de pertinência de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Dessa forma, sejam $f_{\mathcal{A}}(x)$, $f_{\mathcal{B}}(x) \in [0, 1]$, temos que $f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{B}}(x)$ é o supremo e $f_{\mathcal{A}}(x) \wedge f_{\mathcal{B}}(x)$ é o ínfimo.

As duas operações, de união e intersecção, satisfazem algumas propriedades importantes. Antes de apresentá-las, destacaremos um princípio que nos auxiliará nas futuras demonstrações.

Princípio da dualidade

Segundo Rasiowa e Sikorski (1968), temos que a simetria existente entre os operadores $\cup$ e $\cap$ e os elementos $\varnothing$ e V garantem que tanto $\cup$ e $\cap$, quanto $\varnothing$ e V, podem ser permutados de maneira que os resultados obtidos permaneçam verdadeiros. Dessa forma, em nossa álgebra para os conjuntos *fuzzy*, temos que:

"Todo resultado obtido dos axiomas da estrutura algébrica (R, $\subseteq$, $\cup$, $\cap$, ') permanece válido se nele trocarmos $\cup$ por $\cap$ e 0 por 1 e vice-versa."

Vale aqui destacar que, para as futuras verificações de validade das propriedades, utilizaremos apenas $f_{\mathcal{A}}(x)$ no lugar de $(\forall\ x \in V)\ f_{\mathcal{A}}(x)$.

Considerando (R, $\subseteq$) um reticulado, apresentaremos as propriedades válidas para as operações de união e intersecção dos conjuntos *fuzzy*:

(1) Propriedade de Idempotência:

- $\mathcal{A} \cup \mathcal{A} = \mathcal{A}$

  Isso é válido, pois:

  $f_{\mathcal{A} \cup \mathcal{A}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{A}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x)$.

- $\mathcal{A} \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}$

  É válido pelo princípio da dualidade.

(2) Propriedade Comutativa:

- $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \mathcal{A}$

  Isso é válido, pois:

  $f_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{B}}(x) = f_{\mathcal{B}}(x) \vee f_{\mathcal{A}}(x) = f_{\mathcal{B} \cup \mathcal{A}}(x)$.

- $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$

  É válido pelo princípio da dualidade.

(3) Propriedade Associativa:

- $\mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cup \mathcal{C}$

  É válido, pois:

  $f_{\mathcal{A}\cup(\mathcal{B}\cup\mathcal{C})}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) \vee (f_{\mathcal{B}}(x) \vee f_{\mathcal{C}}(x)) = (f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{B}}(x) \vee f_{\mathcal{C}}(x)) = (f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{B}}(x)) \vee f_{\mathcal{C}}(x) = f_{(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})\cup\mathcal{C}}(x)$.

- $\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap \mathcal{C}$

  É válido pelo princípio da dualidade.

(4) Princípio de Absorção:

- $\mathcal{A} \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \mathcal{A}$

  É válido, pois:

  Para $x \in V$, $f_{\mathcal{A}}(x) \leq f_{\mathcal{B}}(x)$, então $f_{\mathcal{A}\cap(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) \wedge (f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{B}}(x)) = f_{\mathcal{A}}(x) \wedge f_{\mathcal{B}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x)$; e para $x \in V$, se $f_{\mathcal{A}}(x) \geq f_{\mathcal{B}}(x)$, então $f_{\mathcal{A}\cap(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) \wedge (f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{B}}(x)) = f_{\mathcal{A}}(x) \wedge f_{\mathcal{A}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x)$.

- $\mathcal{A} \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \mathcal{A}$

  É válido pelo princípio da dualidade.

A estrutura determinada por um conjunto não vazio, com operações binárias de união e intersecção, que satisfazem as propriedades: idempotência, comutativa, associativa e absorção, também recebe o nome de reticulado. Dessa forma, $(R, \cup, \cap)$ é um reticulado.

O resultado apresentado anteriormente nos mostra que um reticulado pode ser pensado como um conjunto parcialmente ordenado, em que para cada par de elementos, existe um supremo e um ínfimo, ou como um conjunto com operações binárias, que satisfaçam as propriedades de 1 à 4 desta seção.

Assim, podemos dizer que (R, $\cup$, $\cap$) é o mesmo reticulado dado por (R, $\subseteq$), em que sua ordem pode ser expressa da seguinte maneira:

Proposição 3.3.1: $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{A}$

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B}$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Verificaremos $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Como hipótese, temos que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, isto é, $f_{\mathcal{B}}(x) \leq f_{\mathcal{A}}(x)$. Daí, $f_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{B}}(x) =$ $= f_{\mathcal{A}}(x)$. Dessa forma, é válido que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{A}$.

($\Leftarrow$) Vamos verificar $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Como hipótese, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{A}$, isto é, $f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{B}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) \Rightarrow f_{\mathcal{B}}(x) \leq f_{\mathcal{A}}(x)$. Assim, é valido que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Dessa forma, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{A}$.

A demonstração de $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B}$ segue de maneira semelhante. ■

(5) Propriedade Distributiva:

- $\mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{C})$

  $f_{\mathcal{A}\cup(\mathcal{B}\cap\mathcal{C})}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{B}\cap\mathcal{C}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) \vee (f_{\mathcal{B}}(x) \wedge f_{\mathcal{C}}(x)) = *$

  $= (f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{B}}(x)) \wedge (f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{C}}(x)) = (f_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}(x) \wedge f_{\mathcal{A}\cup\mathcal{C}}(x)) = f_{(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})\cap(\mathcal{A}\cup\mathcal{C})}(x)$.

* $f_{\mathcal{A}}(x) \vee (f_{\mathcal{B}}(x) \wedge f_{\mathcal{C}}(x)) = (f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{B}}(x)) \wedge (f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{C}}(x))$, pois, considerando cada uma de todas as possíveis possibilidades, temos:

(a) $f_{\mathcal{A}}(x) \leq f_{\mathcal{B}}(x) \leq f_{\mathcal{C}}(x)$;

(b) $f_{\mathcal{A}}(x) \leq f_{\mathcal{C}}(x) \leq f_{\mathcal{B}}(x)$;

(c) $f_{\mathcal{B}}(x) \leq f_{\mathcal{A}}(x) \leq f_{\mathcal{C}}(x)$;

(d) $f_{\mathcal{B}}(x) \leq f_{\mathcal{C}}(x) \leq f_{\mathcal{A}}(x)$;

(e) $f_{\mathcal{C}}(x) \leq f_{\mathcal{A}}(x) \leq f_{\mathcal{B}}(x)$;

(f) $f_{\mathcal{C}}(x) \leq f_{\mathcal{B}}(x) \leq f_{\mathcal{A}}(x)$.

Agora, verificamos a igualdade apresentada em * para um dos seis casos apresentados anteriormente.

Considerando o caso (e) para verificação, temos que:

(e) $f_{\mathcal{C}}(x) \leq f_{\mathcal{A}}(x) \leq f_{\mathcal{B}}(x)$;

$f_{\mathcal{A}}(x) \vee (f_{\mathcal{B}}(x) \wedge f_{\mathcal{C}}(x)) = f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{C}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x)$ (I)

$(f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{B}}(x)) \wedge (f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{C}}(x)) = f_{\mathcal{B}}(x) \wedge f_{\mathcal{A}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x)$ (II)

Assim, de (I) e (II), temos que $f_{\mathcal{A}}(x) \vee (f_{\mathcal{B}}(x) \wedge f_{\mathcal{C}}(x)) = (f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{B}}(x)) \wedge (f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{C}}(x))$.

As verificações para os outros itens são desenvolvidas de maneira análoga.

Desse modo, é sempre válido que:

$f_{\mathcal{A}}(x) \vee (f_{\mathcal{B}}(x) \wedge f_{\mathcal{C}}(x)) = (f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{B}}(x)) \wedge (f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{C}}(x))$.

- $\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{C})$

  Essa propriedade é válida pelo princípio da dualidade.

Um reticulado no qual vale a propriedade distributiva é denominado *reticulado distributivo*. Assim, temos que $(R, \cup, \cap)$ é um reticulado distributivo.

Proposição 3.3.2: $\mathcal{A} \cup \mathcal{O} = \mathcal{A}$ e $\mathcal{A} \cap \mathcal{O} = \mathcal{O}$.

Demonstração: $f_{\mathcal{A} \cup \mathcal{O}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{O}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) \vee 0 = f_{\mathcal{A}}(x)$

$f_{\mathcal{A} \cap \mathcal{O}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) \wedge f_{\mathcal{O}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) \wedge 0 = f_{\mathcal{O}}(x)$. ■

Proposição 3.3.3: $\mathcal{A} \cup \mathit{1} = \mathit{1}$ e $\mathcal{A} \cap \mathit{1} = \mathcal{A}$.

Demonstração: A demonstração dessa proposição é o dual da proposição anterior. ■

Pelas proposições anteriores, temos que o zero dos conjuntos *fuzzy*, que é igual ao conjunto *fuzzy* vazio ($0 = \mathit{0}$), e o um, que coincide com o conjunto *fuzzy* universo ($1 = \mathit{1}$), são, respectivamente, o ínfimo (zero) e o supremo (unidade) de R. Um reticulado com zero e unidade, que satisfaça as duas proposições anteriormente demonstradas, é um *reticulado com 0 e 1*. Dessa forma, (R, $\cup$, $\cap$, 0, 1) é um reticulado com 0 e 1.

Proposição 3.3.4: $(\mathcal{A}')' = \mathcal{A}$.

Demonstração: $f_{(\mathcal{A}')'}(x) = 1 - f_{\mathcal{A}'}(x) = 1 - (1 - f_{\mathcal{A}}(x)) = f_{\mathcal{A}}(x)$. ■

Proposição 3.3.5: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{A}'$

Demonstração: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Leftrightarrow f_{\mathcal{A}}(x) \leq f_{\mathcal{B}}(x) \Leftrightarrow - f_{\mathcal{B}}(x) \leq - f_{\mathcal{A}}(x) \Leftrightarrow 1 - f_{\mathcal{B}}(x) \leq 1 - f_{\mathcal{A}}(x) \Leftrightarrow f_{\mathcal{B}'}(x) \leq f_{\mathcal{A}'}(x) \Leftrightarrow \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{A}'$. ■

Uma operação unária $'$ como acima é, em geral, conhecida como uma *involução*.

Proposição 3.3.6: Leis de De Morgan:

$$\text{(i) } (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})' = \mathcal{A}' \cap \mathcal{B}'.$$

$$\text{(ii) } (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})' = \mathcal{A}' \cup \mathcal{B}'.$$

Demonstraremos o item (i) da proposição, sabendo-se que o item (ii) será válido de modo semelhante.

Demonstração de (i):

$$f_{(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})'}(x) = 1 - f_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}(x) = 1 - (f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{B}}(x)) = * \ \textbf{(A)}$$

$$* \ f_{\mathcal{A}}(x) \geq f_{\mathcal{B}}(x) \ \Rightarrow \begin{cases} 1 - (f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{B}}(x)) = 1 - f_{\mathcal{A}}(x) \\ \quad \text{e} \\ (1 - f_{\mathcal{A}}(x)) \leq (1 - f_{\mathcal{B}}(x)) \Rightarrow (1 - f_{\mathcal{A}}(x)) \wedge (1 - f_{\mathcal{B}}(x)) = 1 - f_{\mathcal{A}}(x) \end{cases}$$

$$\text{se } f_{\mathcal{A}}(x) < f_{\mathcal{B}}(x) \ \Rightarrow \begin{cases} 1 - (f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{B}}(x)) = 1 - f_{\mathcal{B}}(x) \\ \quad \text{e} \\ (1 - f_{\mathcal{A}}(x)) > (1 - f_{\mathcal{B}}(x)) \Rightarrow (1 - f_{\mathcal{A}}(x)) \wedge (1 - f_{\mathcal{B}}(x)) = 1 - f_{\mathcal{B}}(x). \end{cases}$$

É notável que tanto para o caso $f_{\mathcal{A}}(x) \geq f_{\mathcal{B}}(x)$ quanto para $f_{\mathcal{A}}(x) < f_{\mathcal{B}}(x)$, temos que $1 - (f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{B}}(x)) = (1 - f_{\mathcal{A}}(x)) \wedge (1 - f_{\mathcal{B}}(x))$.

(**A**)

$(1 - f_{\mathcal{A}}(x)) \wedge (1 - f_{\mathcal{B}}(x)) = f_{\mathcal{A}'}(x) \wedge f_{\mathcal{B}'}(x) = f_{\mathcal{A}' \cap \mathcal{B}'}(x)$.

Dessa forma, temos que $f_{(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})'}(x) = f_{\mathcal{A}' \cap \mathcal{B}'}(x)$.

É válido que $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})' = \mathcal{A}' \cap \mathcal{B}'$. ■

Uma operação unária que admite as propriedades das duas últimas proposições apresentadas é chamada de *involução de De Morgan*.

Um reticulado distributivo que admite a involução de De Morgan é denominado *reticulado de De Morgan*. Dessa maneira, a estrutura (R, $\subseteq$, $\cup$, $\cap$, ') é um reticulado de De Morgan.

Apresentaremos, a seguir, outras proposições importantes dos conjuntos *fuzzy*.

Proposição 3.3.7: $\mathcal{A} - \mathcal{B} = \mathcal{O} \Leftrightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

Demonstração: $f_{\mathcal{A} - \mathcal{B}}(x) = 0 \Leftrightarrow f_{\mathcal{A}}(x) \leq f_{\mathcal{B}}(x) \Leftrightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. ■

Proposição 3.3.8: $\mathcal{A} - \mathcal{B} = \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{O}$.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ $\mathcal{A} - \mathcal{B} = \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{O}$.

Considerando, por hipótese, que $\mathcal{A} - \mathcal{B} = \mathcal{A}$, temos então que $f_{\mathcal{A} - \mathcal{B}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x)$.

Caso $f_{\mathcal{A}}(x) > f_{\mathcal{B}}(x)$, temos que $f_{\mathcal{A}}(x) - f_{\mathcal{B}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) \Rightarrow f_{\mathcal{B}}(x) = 0 \Rightarrow f_{\mathcal{B}}(x) \wedge f_{\mathcal{A}}(x) = 0 \Rightarrow$ $f_{\mathcal{A}}(x) \wedge f_{\mathcal{B}}(x) = 0 \Rightarrow f_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(x) = 0 \Rightarrow \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{O}$.

Caso $f_{\mathcal{A}}(x) \leq f_{\mathcal{B}}(x)$, temos que $f_{\mathcal{A} - \mathcal{B}}(x) = 0$. Assim, se $f_{\mathcal{A}}(x) = 0$ e $f_{\mathcal{B}}(x) > 0$, então $f_{\mathcal{A} - \mathcal{B}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x)$, mas $f_{\mathcal{B}}(x) > 0$.

Assim, é válido que $\mathcal{A} - \mathcal{B} = \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{O}$.

$(\Leftarrow)$ $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{O} \Rightarrow \mathcal{A} - \mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Temos que $\mathcal{A} - \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Se $\mathcal{A} - \mathcal{B} \neq \mathcal{A}$, então existe $x \in V$ tal que $f_{\mathcal{A} - \mathcal{B}}(x) < f_{\mathcal{A}}(x)$. Daí, $f_{\mathcal{A}}(x) - f_{\mathcal{B}}(x) < f_{\mathcal{A}}(x) \Rightarrow - f_{\mathcal{B}}(x) < 0 \Rightarrow 0 < f_{\mathcal{B}}(x)$. Logo, $f_{\mathcal{A}}(x) \wedge f_{\mathcal{B}}(x) > 0$, e então, $f_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(x) \neq 0$, ou seja, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \mathcal{O}$.

Então, vale que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{O} \Rightarrow \mathcal{A} - \mathcal{B} = \mathcal{A}$

Dessa forma, é válido $\mathcal{A} - \mathcal{B} = \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{O}$. ■

Proposição 3.3.9: $\mathcal{A} - \mathcal{B} = \mathcal{B} - \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ $\mathcal{A} - \mathcal{B} = \mathcal{B} - \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Seja $\mathcal{A} - \mathcal{B} = \mathcal{B} - \mathcal{A}$. Vamos supor que $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$. Podemos assumir ainda, sem perder a generalidade, que $\exists\, x \in V : f_{\mathcal{A}}(x) > f_{\mathcal{B}}(x)$. Dessa forma: $f_{\mathcal{A} - \mathcal{B}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) - f_{\mathcal{B}}(x) = c;\ c \in (0,1]$. Pela hipótese, teríamos então, que $f_{\mathcal{B}}(x) - f_{\mathcal{A}}(x) = 0$; o que seria uma contradição.

Logo, é válido que $\mathcal{A} - \mathcal{B} = \mathcal{B} - \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}$.

$(\Leftarrow)$ $\mathcal{A} = \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} - \mathcal{B} = \mathcal{B} - \mathcal{A}$.

Consideremos agora, como hipótese, que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, temos então, $f_{\mathcal{A}}(x) = f_{\mathcal{B}}(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f_{\mathcal{A} - \mathcal{B}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) - f_{\mathcal{B}}(x) = 0 = f_{\mathcal{B}}(x) - f_{\mathcal{A}}(x) = f_{\mathcal{B} - \mathcal{A}}(x) \Rightarrow \mathcal{A} - \mathcal{B} = \mathcal{B} - \mathcal{A}$.

Logo, é válido que $\mathcal{A} = \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} - \mathcal{B} = \mathcal{B} - \mathcal{A}$.

Dessa forma, é válido que $\mathcal{A} - \mathcal{B} = \mathcal{B} - \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}$. ■

Proposição 3.3.10: $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathit{0} \Leftrightarrow \mathcal{A} = \mathit{0}$ e $\mathcal{B} = \mathit{0}$.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathit{0} \Rightarrow \mathcal{A} = \mathit{0}$ e $\mathcal{B} = \mathit{0}$.

Por hipótese, temos que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathit{0}$, assim: $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathit{0} \Rightarrow f_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}(x) = 0 \Rightarrow f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{B}}(x) = 0 \Rightarrow f_{\mathcal{A}}(x) = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = \mathit{0}$. Da mesma forma: $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathit{0} \Rightarrow f_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}(x) = 0 \Rightarrow f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{B}}(x) = 0 \Rightarrow f_{\mathcal{B}}(x) = 0 \Rightarrow \mathcal{B} = \mathit{0}$.

Então, é válido que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathit{0} \Rightarrow \mathcal{A} = \mathit{0}$ e $\mathcal{B} = \mathit{0}$.

$(\Leftarrow)$ $\mathcal{A} = \mathit{0}$ e $\mathcal{B} = \mathit{0} \Rightarrow \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathit{0}$.

Por hipótese, temos que $\mathcal{A} = \mathit{0}$ e $\mathcal{B} = \mathit{0}$, assim: $\mathcal{A} = \mathit{0}$ e $\mathcal{B} = \mathit{0} \Rightarrow f_{\mathcal{A}}(x) = 0$ e $f_{\mathcal{B}}(x) = = 0 \Rightarrow f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{B}}(x) = 0 \Rightarrow f_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}(x) = 0 \Rightarrow \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathit{0}$.

Dessa forma, é válido que $\mathcal{A} = \mathit{0}$ e $\mathcal{B} = \mathit{0} \Rightarrow \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathit{0}$.

Temos então que é válido $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathit{0} \Leftrightarrow \mathcal{A} = \mathit{0}$ e $\mathcal{B} = \mathit{0}$. ■

Proposição 3.3.11: $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathit{1} \Leftrightarrow \mathcal{A} = \mathit{1}$ e $\mathcal{B} = \mathit{1}$.

Demonstração: Essa proposição é válida, pois é a dual do anterior. ■

Proposição 3.3.12: $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathit{1}$; $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{B} = \mathit{1}$.

Demonstração: Suponha que $\mathcal{B} \neq \mathit{1}$. Logo, para algum $b \in V$, sendo V o conjunto universo, $f_{\mathcal{B}}(b) < \mathit{1}$. Como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, então $f_{\mathcal{A}}(b) \leq f_{\mathcal{B}}(b) < 1$. Daí, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \neq \mathit{1}$. ■

Proposição 3.3.13: $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathit{0}$; $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A} = \mathit{0}$.

Demonstração: Essa proposição é a dual da proposição anterior. ■

Proposição 3.3.14: $\mathcal{O}' = \mathcal{1}$.

Demonstração: $f_{\mathcal{O}}(x) = 0 \Leftrightarrow f_{\mathcal{O}'}(x) = 1 - f_{\mathcal{O}}(x) \Leftrightarrow f_{\mathcal{O}'}(x) = 1 - 0 \Leftrightarrow f_{\mathcal{O}'}(x) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{O}' = \mathcal{1}$. ■

Proposição 3.3.15: $\exists\, x \in V \,/\, f_{\mathcal{A}}(x), f_{\mathcal{A}'}(x) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{A} \cap \mathcal{A}' \neq \mathcal{O}$.

Demonstração: Como $\exists\, x \in V / f_{\mathcal{A}}(x) \neq 0$ e $f_{\mathcal{A}'}(x) \neq 0$, então $0 < f_{\mathcal{A}}(x), f_{\mathcal{A}'}(x) < 1$ e daí $f_{\mathcal{A} \cap \mathcal{A}'}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) \wedge f_{\mathcal{A}'}(x) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{A} \cap \mathcal{A}' \neq \mathcal{O}$. ■

Proposição 3.3.16: $\exists\, x \in V / f_{\mathcal{A}}(x), f_{\mathcal{A}'}(x) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{A} \cup \mathcal{A}' \neq \mathcal{1}$.

Demonstração: Como $\exists\, x \in V \,/\, f_{\mathcal{A}}(x) \neq 0$ e $f_{\mathcal{A}'}(x) \neq 0$, então $0 < f_{\mathcal{A}}(x), f_{\mathcal{A}'}(x) < 1$ e daí $f_{\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) \vee f_{\mathcal{A}'}(x) \neq 1 \Rightarrow \mathcal{A} \cup \mathcal{A}' \neq \mathcal{1}$. ■

Podemos observar que as proposições sobre os conjuntos *fuzzy*, apresentadas anteriormente, admitem muitas das proposições dos conjuntos usuais, com exceção de algumas proposições, por exemplo, envolvendo o complemento *fuzzy*.

As Proposições 3.3.15 e 3.3.16 nos mostram que o conjunto *fuzzy* $\mathcal{A}$ e o seu complemento $\mathcal{A}'$, são, em geral, não disjuntos, ou seja, a intersecção não é um conjunto vazio, pois possuem uma parte em comum. Dessa maneira, negam a proposição dos conjuntos usuais que diz que dado um conjunto A e seu complemento A', $A \cap A' = \emptyset$.

Da mesma forma, a união do conjunto *fuzzy* $\mathcal{A}$ com seu complemento $\mathcal{A}'$ não é o conjunto universo de discurso, ou seja, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ não preenchem completamente o universo de discurso V. Na teoria dos conjuntos usuais, dado um conjunto A e seu complemento A', temos que $A \cup A' = V$.

Concluímos ainda, pelas proposições 3.3.15 e 3.3.16, que o reticulado que estamos estudando, não é complementado. Dessa forma, temos que a estrutura algébrica $(R, \subseteq, \cup, \cap, ')$ não é uma álgebra de Boole ou um *reticulado booleano*.

Em suma, antes de apresentarmos outras operações algébricas sobre os conjuntos *fuzzy*, através do estudo mostrado até agora, temos que uma Álgebra para os Conjuntos *Fuzzy* é caracterizada pela seguinte estrutura:

- é um reticulado;
- é um reticulado distributivo;
- é um reticulado com 0 e 1;
- é um reticulado de De Morgan;
- não é um reticulado booleano.

3.4 Outras operações algébricas sobre conjuntos *fuzzy*

Além das operações algébricas dos conjuntos *fuzzy* apresentadas nas seções anteriores, destacaremos outras, de grande relevância para nosso estudo e para uma futura análise comparativa com a álgebra dos conjuntos usuais.

Definição 3.4.1: O *produto algébrico* dos conjuntos *fuzzy* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, denotado por $\mathcal{A}.\mathcal{B}$, é definido pelas funções de pertinência de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Assim:

$$\mathcal{A}.\mathcal{B} = f_{\mathcal{A}.\mathcal{B}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) \,.\, f_{\mathcal{B}}(x),\ x \in V.$$

Proposição 3.4.1: Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são conjuntos *fuzzy*, então $\mathcal{A}.\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

Demonstração: Sejam $f_{\mathcal{A}}(x) = k_1$ e $f_{\mathcal{B}}(x) = k_2$, para um dado $x \in V$. Então, temos que $k_1.k_2 = f_{\mathcal{A}}(x) \,.\, f_{\mathcal{B}}(x) = f_{\mathcal{A}.\mathcal{B}}(x) = k$. Sabemos que $k_1, k_2 \in [0, 1]$ e também que $k \in [0, 1]$ e, portanto, $k \leq k_1$ e $k \leq k_2 \Rightarrow k \leq f_{\mathcal{A}}(x) \wedge f_{\mathcal{B}}(x) \Rightarrow \mathcal{A}.\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. ■

Definição 3.4.2: A *soma algébrica* dos conjuntos *fuzzy* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, denotado por $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, é definida em termos de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, pela seguinte relação:

$$f_{\mathcal{A}+\mathcal{B}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) + f_{\mathcal{B}}(x) - f_{\mathcal{A}.\mathcal{B}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) + f_{\mathcal{B}}(x) - f_{\mathcal{A}}(x) \,.\, f_{\mathcal{B}}(x).$$

A seguir, verificaremos que $f_{\mathcal{A}+\mathcal{B}}(x) \in [0, 1]$. Para isso, consideramos $f_{\mathcal{A}}(x) = a$ e $f_{\mathcal{B}}(x) = b$.

Queremos mostrar que $a, b \in [0, 1] \Rightarrow a + b - a.b \in [0, 1]$.

Temos que $a + b - a.b = a.(1 - b) + b$. Como $a, b \in [0, 1]$, temos $0 \leq 1 - b \leq 1$. É verdade que $a.(1 - b) \leq (1 - b)$ (*).

Como $(1 - b) + b = 1$ e vale (*), então $a.(1 - b) + b \leq 1$. Além disso, $a, 1 - b, b \in [0, 1]$ e, naturalmente, $0 \leq a.(1 - b) + b$.

Assim, $0 \leq a.(1 - b) + b \leq 1$.

Proposição 3.4.2: Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são conjuntos *fuzzy*, então $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}+\mathcal{B}$.

Demonstração: Sejam $f_{\mathcal{A}}(x) = k_1$ e $f_{\mathcal{B}}(x) = k_2$, para um dado $x \in V$. Consideremos ainda que $f_{\mathcal{A}.\mathcal{B}}(x) = k$. Sabemos que k_1, k_2 e $k \in [0, 1]$ e, como $f_{\mathcal{A}.\mathcal{B}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) \,.\, f_{\mathcal{B}}(x)$, temos que $k = k_1 \,.\, k_2$. Assim: $f_{\mathcal{A}+\mathcal{B}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) + f_{\mathcal{B}}(x) - f_{\mathcal{A}.\mathcal{B}}(x) = k_1 + k_2 - k$. Como $k \leq k_1$ e $k \leq k_2$, então $k_1 \leq f_{\mathcal{A}+\mathcal{B}}(x)$ e $k_2 \leq f_{\mathcal{A}+\mathcal{B}}(x)$. Logo, $k_1 \vee k_2 \leq f_{\mathcal{A}+\mathcal{B}}(x)$, ou seja, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}+\mathcal{B}$. ■

Considerando um exemplo, tomemos o conjunto universo $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$; e os subconjuntos *fuzzy* dados por $\mathcal{A} = \{(x_1, 1); (x_2, 0.2); (x_3, 0); (x_4, 0.7)\}$ e $\mathcal{B} = \{(x_1, 0.2); (x_2, 0.4); (x_3, 0.9); (x_4, 0.3)\}$. Assim, temos que:

$\mathcal{A}.\mathcal{B} = \{(x_1, (1) \,.\, (0.2)); (x_2, (0.2) \,.\, (0.4)); (x_3, (0) \,.\, (0.9)); (x_4, (0.7) \,.\, (0.3))\} = \{(x_1, 0.2); (x_2, 0.08); (x_3, 0); (x_4, 0.21)\}$;

$\mathcal{A}+\mathcal{B} = \{(x_1, (1+ 0.2 - 0.2)); (x_2, (0.2 + 0.4 - 0.08)); (x_3, (0 + 0.9 - 0)); (x_4, (0.7 + 0.3 - 0.21))\} = (x_1, 1); (x_2, 0.54); (x_3, 0.9); (x_4, 0.79)\}$.

A seguir, enunciaremos as propriedades do produto algébrico e soma algébrica:

(1) Identidade:

- $\mathcal{A} \, . \, \mathit{1} = \mathcal{A}$

$$f_{\mathcal{A}.\mathit{1}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) \, . \, f_{\mathit{1}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) \, . \, 1 = f_{\mathcal{A}}(x).$$

- $\mathcal{A} \, . \, \mathit{O} = \mathit{O}$

$$f_{\mathcal{A}.\mathit{O}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) \, . \, f_{\mathit{O}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) \, . \, 0 = 0 = f_{\mathit{O}}(x).$$

- $\mathcal{A} + \mathit{1} = \mathit{1}$

$$f_{\mathcal{A}+\mathit{1}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) + f_{\mathit{1}}(x) - f_{\mathcal{A}.\mathit{1}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) + 1 - f_{\mathcal{A}}(x) \, . \, 1 = f_{\mathcal{A}}(x) + 1 - f_{\mathcal{A}}(x) = 1 =$$

$$= f_{\mathit{1}}(x).$$

- $\mathcal{A} + \mathit{O} = \mathcal{A}$

$$f_{\mathcal{A}+\mathit{O}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) + f_{\mathit{O}}(x) - f_{\mathcal{A}\,.\,\mathit{O}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) + 0 - f_{\mathcal{A}}(x) \, . \, 0 = f_{\mathcal{A}}(x).$$

(2) Comutatividade

- $\mathcal{A} \, . \, \mathcal{B} = \mathcal{B} \, . \, \mathcal{A}$

$$f_{\mathcal{A}.\mathcal{B}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) \, . \, f_{\mathcal{B}}(x) = f_{\mathcal{B}}(x) \, . \, f_{\mathcal{A}}(x).$$

- $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{B} + \mathcal{A}$

$$f_{\mathcal{A}+\mathcal{B}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) + f_{\mathcal{B}}(x) - f_{\mathcal{A}.\mathcal{B}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) + f_{\mathcal{B}}(x) - f_{\mathcal{A}}(x) \, . \, f_{\mathcal{B}}(x) = f_{\mathcal{B}}(x) + f_{\mathcal{A}}(x) -$$

$$- f_{\mathcal{B}}(x) \, . \, f_{\mathcal{A}}(x) = f_{\mathcal{B}}(x) + f_{\mathcal{A}}(x) - f_{\mathcal{B}.\mathcal{A}}(x) = f_{\mathcal{B}+\mathcal{A}}(x).$$

(3) Associatividade

- $(\mathcal{A} \, . \, \mathcal{B}) \, . \, \mathcal{C} = \mathcal{A} \, . \, (\mathcal{B} \, . \, \mathcal{C})$

$(f_{\mathcal{A}.\mathcal{B}}(x)) \,.\, f_{\mathcal{C}}(x) = (f_{\mathcal{A}}(x) \,.\, f_{\mathcal{B}}(x)) \,.\, f_{\mathcal{C}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) \,.\, (f_{\mathcal{B}}(x) \,.\, f_{\mathcal{C}}(x)) = f_{\mathcal{A}}(x) \,.\, (f_{\mathcal{B}.\mathcal{C}}(x))$.

- $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C} = \mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C})$

Consideremos um conjunto *fuzzy* $\mathcal{D} = (\mathcal{A} + \mathcal{B})$. Dessa forma: $f_{\mathcal{D}}(x) = f_{\mathcal{A}+\mathcal{B}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) + f_{\mathcal{B}}(x) - f_{\mathcal{A}.\mathcal{B}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) + f_{\mathcal{B}}(x) - f_{\mathcal{A}}(x) \,.\, f_{\mathcal{B}}(x)$. E ainda, seja o conjunto *fuzzy* $\mathcal{E} = (\mathcal{B} + \mathcal{C})$, em que: $f_{\mathcal{E}}(x) = f_{\mathcal{B}+\mathcal{C}}(x) = f_{\mathcal{B}}(x) + f_{\mathcal{C}}(x) - f_{\mathcal{B}.\mathcal{C}}(x) = f_{\mathcal{B}}(x) + f_{\mathcal{C}}(x) - f_{\mathcal{B}}(x) \,.\, f_{\mathcal{C}}(x)$. Assim, temos:

$f_{\mathcal{D}+\mathcal{C}}(x) = f_{\mathcal{D}}(x) + f_{\mathcal{C}}(x) - f_{\mathcal{D}.\mathcal{C}}(x) = f_{\mathcal{D}}(x) + f_{\mathcal{C}}(x) - f_{\mathcal{D}}(x) \,.\, f_{\mathcal{C}}(x) = (f_{\mathcal{A}}(x) + f_{\mathcal{B}}(x) - f_{\mathcal{A}}(x) \,.\, f_{\mathcal{B}}(x)) + f_{\mathcal{C}}(x) - ((f_{\mathcal{A}}(x) + f_{\mathcal{B}}(x) - f_{\mathcal{A}}(x) \,.\, f_{\mathcal{B}}(x)) \,.\, f_{\mathcal{C}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) + f_{\mathcal{B}}(x) + f_{\mathcal{C}}(x) - f_{\mathcal{B}}(x) \,.\, f_{\mathcal{C}}(x) - f_{\mathcal{A}}(x) \,.\, (f_{\mathcal{B}}(x) + f_{\mathcal{C}}(x) - f_{\mathcal{B}}(x) \,.\, f_{\mathcal{C}}(x)) = f_{\mathcal{A}}(x) + f_{\mathcal{B}}(x) + f_{\mathcal{C}}(x) - f_{\mathcal{B}.\mathcal{C}}(x) - f_{\mathcal{A}}(x) \,.\, (f_{\mathcal{B}}(x) + f_{\mathcal{C}}(x) - f_{\mathcal{B}.\mathcal{C}}(x)) = f_{\mathcal{A}}(x) + f_{\mathcal{E}}(x) - f_{\mathcal{A}}(x) .\, f_{\mathcal{E}}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) + f_{\mathcal{E}}(x) - f_{\mathcal{A}.\mathcal{E}}(x) = f_{\mathcal{A}+\mathcal{E}}(x)$.

(4) Lei de De Morgan

- $(\mathcal{A} \,.\, \mathcal{B})' = \mathcal{A}' + \mathcal{B}'$

$f_{\mathcal{A}'}(x) + f_{\mathcal{B}'}(x) - f_{\mathcal{A}'.\mathcal{B}'}(x) = f_{\mathcal{A}'}(x) + f_{\mathcal{B}'}(x) - f_{\mathcal{A}'}(x) \,.\, f_{\mathcal{B}'}(x) = 1 - f_{\mathcal{A}}(x) + 1 - f_{\mathcal{B}}(x) - f_{\mathcal{A}'}(x) \,.\, f_{\mathcal{B}'}(x) = 1 - f_{\mathcal{A}}(x) + 1 - f_{\mathcal{B}}(x) - [(1 - f_{\mathcal{A}}(x)) \,.\, (1 - f_{\mathcal{B}}(x))] = 1 - f_{\mathcal{A}}(x) + 1 - f_{\mathcal{B}}(x) - [1 - f_{\mathcal{B}}(x) - f_{\mathcal{A}}(x) + f_{\mathcal{A}}(x) \,.\, f_{\mathcal{B}}(x)] = 1 - f_{\mathcal{A}}(x) + 1 - f_{\mathcal{B}}(x) - 1 + f_{\mathcal{B}}(x) + f_{\mathcal{A}}(x) - f_{\mathcal{A}}(x) \,.\, f_{\mathcal{B}}(x) = 1 - f_{\mathcal{A}}(x) \,.\, f_{\mathcal{B}}(x) = 1 - f_{\mathcal{A}.\mathcal{B}}(x) = f_{(\mathcal{A}.\mathcal{B})'}(x)$.

- $(\mathcal{A} + \mathcal{B})' = \mathcal{A}' \,.\, \mathcal{B}'$

$f_{\mathcal{A}'.\mathcal{B}'}(x) = f_{\mathcal{A}'}(x) \,.\, f_{\mathcal{B}'}(x) = (1 - f_{\mathcal{A}}(x)) \,.\, (1 - f_{\mathcal{B}}(x)) = 1 - f_{\mathcal{B}}(x) - f_{\mathcal{A}}(x) + f_{\mathcal{A}}(x) \,.\, f_{\mathcal{B}}(x) = 1 - (f_{\mathcal{A}}(x) + f_{\mathcal{B}}(x) - f_{\mathcal{A}}(x) \,.\, f_{\mathcal{B}}(x)) = 1 - f_{\mathcal{A}+\mathcal{B}}(x) = f_{(\mathcal{A}+\mathcal{B})'}(x)$.

(5) Distributiva

- $\mathcal{A} \,.\, (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \,.\, \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \,.\, \mathcal{C})$

  Seja $x \in V$ e consideremos $f_{\mathcal{B}}(x) \leq f_{\mathcal{C}}(x)$. O caso $f_{\mathcal{C}}(x) \leq f_{\mathcal{B}}(x)$ é análogo.

  Daí, $f_{\mathcal{A}.(\mathcal{B} \cup \mathcal{C})}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) \,.\, f_{(\mathcal{B} \cup \mathcal{C})}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) \,.\, f_{\mathcal{C}}(x)$.

  Como $f_{\mathcal{B}}(x) \leq f_{\mathcal{C}}(x)$ e $0 \leq f_{\mathcal{A}}(x) \leq 1$, então $f_{\mathcal{A}}(x) \,.\, f_{\mathcal{B}}(x) \leq f_{\mathcal{A}}(x) \,.\, f_{\mathcal{C}}(x)$. Assim:

  $f_{(\mathcal{A}.\mathcal{B}) \cup (\mathcal{A}.\mathcal{C})}(x) = \sup\{ f_{(\mathcal{A}.\mathcal{B})}(x), f_{(\mathcal{A}.\mathcal{C})}(x)\} = \sup \{f_{\mathcal{A}}(x).f_{\mathcal{B}}(x), f_{\mathcal{A}}(x).f_{\mathcal{C}}(x)\} = f_{\mathcal{A}}(x).\, f_{\mathcal{C}}(x)$.

Com isso, $f_{\mathcal{A}.(\mathcal{B} \cup \mathcal{C})}(x) = f_{(\mathcal{A}.\mathcal{B}) \cup (\mathcal{A}.\mathcal{C})}(x)$.

- $\mathcal{A} \,.\, (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \,.\, \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \,.\, \mathcal{C})$

  Segue de modo semelhante ao anterior.

- $\mathcal{A} + (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} + \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} + \mathcal{C})$

  Seja $x \in V$ e consideremos $f_{\mathcal{B}}(x) \leq f_{\mathcal{C}}(x)$. O caso $f_{\mathcal{C}}(x) \leq f_{\mathcal{B}}(x)$ é análogo.

  Daí, $f_{\mathcal{A}+(\mathcal{B} \cup \mathcal{C})}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) + f_{(\mathcal{B} \cup \mathcal{C})}(x) - f_{\mathcal{A}}(x).f_{(\mathcal{B} \cup \mathcal{C})}(x) = f_{\mathcal{A}}(x) + f_{\mathcal{C}}(x) - f_{\mathcal{A}}(x).f_{\mathcal{C}}(x)$.

  Como $f_{\mathcal{B}}(x) \leq f_{\mathcal{C}}(x)$ e $0 \leq 1 - f_{\mathcal{A}}(x) \leq 1$, então $f_{\mathcal{B}}(x) \,.\, (1 - f_{\mathcal{A}}(x)) \leq f_{\mathcal{C}}(x) \,.\, (1 - f_{\mathcal{A}}(x)) \Rightarrow$

$f_{\mathcal{B}}(x) - f_{\mathcal{B}}(x).\, f_{\mathcal{A}}(x)) \leq f_{\mathcal{C}}(x) - f_{\mathcal{C}}(x).f_{\mathcal{A}}(x))$. Assim:

  $f_{(\mathcal{A}.\mathcal{B})+(\mathcal{A}.\mathcal{C})}(x) = \max \{f_{\mathcal{A}+\mathcal{B}}(x), f_{\mathcal{A}+\mathcal{C}}(x)\} = \max \{f_{\mathcal{A}}(x)+f_{\mathcal{B}}(x) - f_{\mathcal{A}}(x).f_{\mathcal{B}}(x), f_{\mathcal{A}}(x)+f_{\mathcal{C}}(x) -$

$f_{\mathcal{A}}(x).f_{\mathcal{C}}(x)\} = f_{\mathcal{A}}(x) + f_{\mathcal{C}}(x) - f_{\mathcal{A}}(x).f_{\mathcal{C}}(x)$.

  Com isso, $f_{\mathcal{A}+(\mathcal{B} \cup \mathcal{C})}(x) = f_{(\mathcal{A}.\mathcal{B})+(\mathcal{A}.\mathcal{C})}(x)$.

- $\mathcal{A} + (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} + \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} + \mathcal{C})$

  Segue de modo semelhante ao anterior.

As propriedades das operações de produto e soma algébricas *fuzzy* são mais restritas quando comparadas às propriedades das operações de união e intersecção dos conjuntos *fuzzy*, pois não há propriedade para a idempotência, ou seja, não vale que $\mathcal{A}.\mathcal{A} = \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}+\mathcal{A} = \mathcal{A}$.

Definição 3.4.3: A *diferença absoluta* dos conjuntos *fuzzy* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, denotada por $|\mathcal{A} - \mathcal{B}|$, é definida da seguinte maneira:

$$f_{|\mathcal{A} - \mathcal{B}|}(x) = |f_{\mathcal{A}}(x) - f_{\mathcal{B}}(x)|.$$

Definição 3.4.4: Para k um número positivo, seja $\mathcal{A}$ um conjunto *fuzzy* com função de pertinência $f_{\mathcal{A}}(x)$, então $\mathcal{A}$ na *potência k*, denotada por $\mathcal{A}^k$, é definida da seguinte maneira:

$$\mathcal{A}^k = \{(x, f_{\mathcal{A}}(x))\}^k = \{(x, (f_{\mathcal{A}}(x))^k)\}.$$

Como exemplo, consideremos um conjunto *fuzzy* $\mathcal{A} = \{(1, 0.2); (2, 0.3); (3, 0); (4, 0.7); (5, 1)\}$ e o valor $k = 4$. Assim:

$\mathcal{A}^k = \mathcal{A}^4 = \{(1, (0.2)^4); (2, (0.3)^4); (3, (0)^4); (4, (0.7)^4); (5, (1)^4\} = \{(1, 0.0016); (2, 0.0081) ; (3, 0); (4, 0.2401) ; (5, 1)\}$.

O princípio, enunciado a seguir, tornou-se importante ferramenta na teoria dos conjuntos *fuzzy* e aplicações.

O denominado *princípio da extensão fuzzy* foi estudado e aplicado nas aritméticas *fuzzy* e utilizado em problemas de engenharia, além de ser utilizado por muitos autores de análises de sistemas dinâmicos discretos, para o estudo de outras vertentes utilizando a teoria *fuzzy*, como por exemplo, os fractais *fuzzy*.

- *O princípio da extensão fuzzy*

Consideremos uma função $y = f(x)$, em que $x \in V$ e $y \in U$. Temos que f é uma função definida de V para U, ou seja, $f: V \rightarrow U$, e y é a imagem de x em f.

Seja um conjunto *fuzzy* $\mathcal{A} = \{(x, f_{\mathcal{A}}(x)) : x \in V\}$.

O princípio da extensão *fuzzy* é definido pela seguinte operação:

$$f(\mathcal{A}) = f(\{(x, f_{\mathcal{A}}(x))\}) = \{(f(x), f_{\mathcal{A}}(x)) : x \in V\}.$$

A imagem de $\mathcal{A}$ em f é o conjunto *fuzzy* de pares ordenados. A aplicação do princípio da extensão *fuzzy* transforma x em f(x), isto é, troca o domínio de x, mas não afeta a função de pertinência $f_{\mathcal{A}}(x)$.

Para um conjunto *fuzzy* com número finito de elementos, seja $\mathcal{A} = \{(x_1, f_{\mathcal{A}}(x_1)); (x_2, f_{\mathcal{A}}(x_2)); (x_3, f_{\mathcal{A}}(x_3)); \ldots; (x_n, f_{\mathcal{A}}(x_n))\}$, o princípio da extensão *fuzzy*, definido anteriormente, afirma que:

$f(\mathcal{A}) = f(\{(x_1, f_{\mathcal{A}}(x_1)); (x_2, f_{\mathcal{A}}(x_2)); (x_3, f_{\mathcal{A}}(x_3)); \ldots; (x_n, f_{\mathcal{A}}(x_n))\}) = \{(f(x_1), f_{\mathcal{A}}(x_1)); (f(x_2), f_{\mathcal{A}}(x_2)); (f(x_3), f_{\mathcal{A}}(x_3)); \ldots; (f(x_n), f_{\mathcal{A}}(x_n))\}$.

Consideremos um exemplo:

Seja $f(x) = x^3$ e $\mathcal{A} = \{(1, 1); (2, 0.3); (3, 0.5); (4, 0.8); (5, 0.1)\}$.

Para diferenciarmos da notação da operação de potência de conjunto *fuzzy*, vamos utilizar $\mathcal{A}_e{}^3$ para representar o princípio da extensão *fuzzy*.

$f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_e{}^3 = \{(1^3, 1); (2^3, 0.3); (3^3, 0.5); (4^3, 0.8); (5^3, 0.1)\} = \{(1, 1); (8, 0.3); (27, 0.5); (64, 0.8); (125, 0.1)\}$.

Apresentadas as operações algébricas sobre os conjuntos *fuzzy*, bem como as propriedades que envolvem essas operações, reservaremos a seção a seguir para destacarmos as relações *fuzzy*.

3.5 Relações *Fuzzy*

A seguir, verificaremos que as relações *fuzzy* generalizam o conceito de relações da teoria usual dos conjuntos e representam o grau da associação entre elementos de dois ou mais conjuntos *fuzzy*. Além disso, definiremos os conceitos de domínio, imagem, campo e comprimento das relações *fuzzy*.

Definição 3.5.1: Sejam $\mathcal{A}$ um subconjunto *fuzzy* de um universo U e $\mathcal{B}$ um subconjunto *fuzzy* de um universo V. Então, o *produto cartesiano fuzzy* de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, denotado por $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, é definido da seguinte maneira:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{((u, v), f_{\mathcal{A}}(u) \wedge f_{\mathcal{B}}(v)) : u \in U, v \in V\}.$$

Dados os conjuntos não *fuzzy* U = {a, b} e V = {1, 2, 3, 4}, considerando os subconjuntos *fuzzy* $\mathcal{A}$ = {(a, 0.4); (b, 0.3)} e $\mathcal{B}$ = {(1, 0.1); (2, 0.6); (3, 1); (4, 0.8)}. Temos que:

$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ = {((a, 1), 0.1); (a, 2), 0.4); ((a, 3), 0.4); ((a, 4), 0.4); ((b, 1), 0.1); ((b, 2), 0.3); ((b, 3), 0.3); ((b, 4), 0.3)}.

Nesse exemplo apresentado, como temos conjuntos finitos, podemos interpretá-los através da notação matricial, da seguinte forma:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \end{array}$$

Definição 3.5.2: Uma *relação fuzzy* $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ é um subconjunto *fuzzy* do produto cartesiano $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, caracterizado por uma função de pertinência $f_{\mathcal{R}}$, a qual associa a cada par (x, y), o seu grau de pertinência $f_{\mathcal{R}}(x, y)$ em $\mathcal{R}$. Assim:

$\mathcal{R} = \{((x, y), z) : x \in U, y \in V \text{ e } z = f_{\mathcal{R}}(x, y)\}$, onde $0 \leq f_{\mathcal{R}}(x, y) \leq f_{\mathcal{A}}(x) \wedge f_{\mathcal{B}}(y)\}$, U e V são, respectivamente, os conjuntos universos dos conjuntos *fuzzy* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

Definição 3.5.3: Uma *relação fuzzy n-ária* é um subconjunto *fuzzy* $\mathcal{R}$ do produto cartesiano $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \ldots \times \mathcal{A}_n$, em que sua função de pertinência é dada por:

$$f_{\mathcal{R}}(x_1,\ x_2,\ \dots\ ,\ x_n)\ \leq\ \wedge_{\ 1\leq i\leq n}\, f_{\mathcal{A}i}(x_i).$$

Definição 3.5.4: A *relação de identidade fuzzy* em um conjunto *fuzzy* $\mathcal{A}$ com conjunto universo V e x,y $\in$ V é representada por um conjunto $\mathcal{I}$ e definida para $\forall$ ((x, y), $f_{\mathcal{I}}$(x, y)) $\in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ pelas suas funções de pertinência, como segue:

$$f_{\mathcal{I}}(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ se } x = y; \\ 0, \text{ se } x \neq y. \end{cases}$$

Definição 3.5.5: Dado o conjunto *fuzzy* $\mathcal{A}$, denominamos *suporte* de $\mathcal{A}$ ao conjunto usual:

$$S(\mathcal{A}) = \{x :\ x \in V \text{ e } f_{\mathcal{A}}(x) > 0\}.$$

Seja $\mathcal{R}$ uma relação *fuzzy* binária em um conjunto *fuzzy* $\mathcal{A}$ com universo V e x, y $\in$ V.

Definição 3.5.6: Temos que o d*omínio* de uma relação *fuzzy* $\mathcal{R}$, denotada por Dom($\mathcal{R}$) é um conjunto *fuzzy* definido por:

$$Dom(\mathcal{R}) = \{(x, f_{Dom(\mathcal{R})}(x)) : x \in U\} \text{ e } f_{Dom(\mathcal{R})}(x) = \sup_y f_{\mathcal{R}}(x, y).$$

Definição 3.5.7: A *imagem* de uma relação *fuzzy* $\mathcal{R}$, denotada por Im($\mathcal{R}$) é um conjunto *fuzzy* definido por:

$$Im(\mathcal{R}) = \{(x, f_{Im\ (\mathcal{R})}(y)) : x \in U\} \text{ e } f_{Im\ (\mathcal{R})}(y) = \sup_x f_{\mathcal{R}}(x, y).$$

Definição 3.5.8: Denominamos *campo* de uma relação *fuzzy* $\mathcal{R}$ ao conjunto denotado por L($\mathcal{R}$), em que L($\mathcal{R}$) = Dom($\mathcal{R}$) $\cup$ Im($\mathcal{R}$).

Definição 3.5.9: O *comprimento* de uma relação *fuzzy* $\mathcal{R}$ é denotada por h($\mathcal{R}$) e definida da seguinte maneira:

$$h(\mathcal{R}) = \sup \{f_{\mathcal{R}}(x, y) : (x, y) \in S(\mathcal{R})\}.$$

Definição 3.5.10: A relação *fuzzy nula* O sobre um conjunto *fuzzy* $\mathcal{A}$ é definida por:

$$f_O(x, y) = 0, \text{ para todos } x, y \in V.$$

Consideremos, $\mathcal{R}$ = {((a, x), 0.3); ((a, y), 1); ((a, z), 0.5); ((b, x), 0.2); ((b, y), 0)}, então, com base nas definições apresentadas, temos:

Dom($\mathcal{R}$) = {(a, 1); (b, 0.2)};

Im($\mathcal{R}$) = {(x, 0.3); (y, 1); (z, 0.5)};

L($\mathcal{R}$) = {(a, 1); (b, 0.2); (x, 0.3); (y, 1); (z, 0.5)};

h($\mathcal{R}$) = 1;

S($\mathcal{R}$) = {(a, x); (a, y); (a, z); (b, x)}.

Apresentadas as definições relacionadas com as relações *fuzzy*, na seção que segue, destacaremos algumas operações básicas existentes sobre as relações *fuzzy*, bem como algumas propriedades.

3.6 Operações básicas em relações *fuzzy*

Consideremos $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$, duas relações *fuzzy* em $\mathcal{A}$ x $\mathcal{B}$. As funções de pertinência de $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$, são, respectivamente, $f_{\mathcal{R}_1}(x, y)$ e $f_{\mathcal{R}_2}(x, y)$. Temos ainda que $f_{\mathcal{R}_1}(x, y)$ e $f_{\mathcal{R}_2}(x, y) \in [0, 1]$. Assim:

$\mathcal{R}_1 = \{((x, y), z_1) : x \in U, y \in V \text{ e } z_1 = f_{\mathcal{R}_1}(x, y)\}$, em que U e V são, respectivamente, os conjuntos universos dos conjuntos *fuzzy* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

$\mathcal{R}_2 = \{((x, y), z_2)) : x \in U, y \in V \text{ e } z_2 = f_{\mathcal{R}_2}(x, y)\}$, em que U e V são, respectivamente, os conjuntos universos dos conjuntos *fuzzy* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

(1) Igualdade:

$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$, see, para cada (x, y) : $x \in U$ e $y \in V$, temos $f_{\mathcal{R}_1}(x, y) = f_{\mathcal{R}_2}(x, y)$.

(2) Inclusão:

Se para cada (x, y) : $x \in U$ e $y \in V$, $f_{\mathcal{R}_1}(x, y) \leq f_{\mathcal{R}_2}(x, y)$, temos que $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$.

(3) União:

A união de $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$, denotada por $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ é definida por:

$$f_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2}(x, y) = \max \{f_{\mathcal{R}_1}(x, y), f_{\mathcal{R}_2}(x, y)\}, \text{ onde } (x, y) : x \in U \text{ e } y \in V.$$

(4) Intersecção:

A intersecção de $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$, denotada por $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ é definida por:

$$f_{\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2}(x, y) = \min \{f_{\mathcal{R}_1}(x, y), f_{\mathcal{R}_2}(x, y)\}, \text{ onde } (x, y) : x \in U \text{ e } y \in V.$$

(5) Complemento:

O complemento de uma relação $\mathcal{R}$, denotado por $\mathcal{R}'$, é definido por:

$$f_{\mathcal{R}'}(x, y) = 1 - f_{\mathcal{R}}(x, y), \forall (x, y) : x \in U \text{ e } y \in V.$$

Definição 3.6.1: Se $\mathcal{R}$ é uma relação *fuzzy* de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ e $\mathcal{S}$ é uma relação *fuzzy* de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{C}$, então a *composição de* $\mathcal{R}$ *e* $\mathcal{S}$ é uma relação *fuzzy* de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{C}$, denotada por $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, e com a função de pertinência definida por:

$$f_{\mathcal{R} \circ \mathcal{S}}(x, z) = \sup_y \{f_{\mathcal{R}}(x, y) \wedge f_{\mathcal{S}}(y, z)\}.$$

Consideremos um exemplo para ilustrar a definição anterior, sejam os conjuntos *fuzzy* $\mathcal{R}$ = {((x_1, y_1), 0.4); ((x_1, y_2), 0.3); ((x_2 , y_1), 0.3); ((x_2 , y_2), 0.7)} e $\mathcal{S}$ = {((y_1, z_1), 0.2); ((y_1, z_2), 0.5); ((y_2 , z_1), 0.7); ((y_2 , z_2), 0.1)}. Assim, a composição desses conjuntos *fuzzy* é dada por:

$\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$= {(($x_1$, z_1), 0.3); ((x_1, z_2), 0.4); ((x_2, z_1), 0.7); ((x_2, z_2), 0.3)}, em que $f_{\mathcal{R} \circ \mathcal{S}}(x_1, z_1)$ = = sup {(x_1 , y_1) $\wedge$ (y_1, z_1), (x_1, y_2) $\wedge$ (y_2, z_1)} = sup{ 0.2 , 0.3} = 0.3 .

Proposição 3.6.1: A composição de relações *fuzzy* em $\mathcal{A}$ é associativa.

Demonstração: Sejam $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ três relações *fuzzy* sobre $\mathcal{A}$.

$f_{(\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{T}}(y, z) = (f_{\mathcal{R}} \circ f_{\mathcal{S}}) \circ f_{\mathcal{T}}(y, z) = \sup_y \{(f_{\mathcal{R}} \circ f_{\mathcal{S}})(x, y) \wedge f_{\mathcal{T}}(y, z)\} = \sup_y \{\sup_t [f_{\mathcal{R}}(x, t) \wedge f_{\mathcal{S}}(t, y)] \wedge f_{\mathcal{T}}(y, z)\} = \sup_y \sup_t \{[f_{\mathcal{R}}(x, t) \wedge f_{\mathcal{S}}(t, y)] \wedge f_{\mathcal{T}}(y, z)\} = \sup_t \sup_y \{f_{\mathcal{R}}(x, t) \wedge [f_{\mathcal{S}}(t, y) \wedge f_{\mathcal{T}}(y, z)] = \sup_t \{f_{\mathcal{R}}(x, t) \wedge \sup_y [f_{\mathcal{S}}(t, y) \wedge f_{\mathcal{T}}(y, z)]\} = \sup_t \{f_{\mathcal{R}}(x, t) \wedge f_{\mathcal{S} \circ \mathcal{T}}(t, z)\} = f_{\mathcal{R} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{T})}(x, z).$

Dessa forma, temos que $f_{(\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{T}}(y, z) = f_{\mathcal{R} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{T})}(x, z)$. ■

Se os universos das variáveis x, y e z são finitos, podemos dar uma representação matricial para a composição de relações. Por exemplo:

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.7 & 0.1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Para encontrarmos a matriz da composição das relações *fuzzy* desenvolvemos o mesmo procedimento realizado para encontrar o produto de matrizes. Basta apenas trocarmos a multiplicação por $\wedge$ e a adição por $\vee$.

3.7 Relações *fuzzy* de similaridade

Sejam $\mathcal{A}$ um conjunto *fuzzy* e $\mathcal{R}$ uma relação *fuzzy* de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$. Assim, dizemos que

$\mathcal{R}$ é uma relação *fuzzy* em $\mathcal{A}$.

Para apresentarmos as propriedades dessa seção, consideremos $\mathcal{S}$ uma relação *fuzzy* em um conjunto *fuzzy* $\mathcal{A}$, em que V é o universo de discurso de $\mathcal{A}$. Dessa forma, as propriedades de uma relação *fuzzy* em $\mathcal{A}$ são os seguintes:

- Reflexiva:

  $\mathcal{S}$ é uma relação reflexiva se $f_{\mathcal{S}}(x, x) > 0 \Leftrightarrow f_{\mathcal{A}}(x) > 0, \forall x \in V$.

- Simétrica:

  $\mathcal{S}$ é uma relação simétrica se $f_{\mathcal{S}}(x, y) = f_{\mathcal{S}}(y, x), \forall x, y \in V$.

- Transitiva:

  $\mathcal{S}$ é uma relação transitiva se $f_{\mathcal{S}}(x, z) \geq \sup_y [f_{\mathcal{S}}(x, y) \wedge f_{\mathcal{S}}(y, z)], \forall x, y \in V$.

- Anti-simétrica:

  $\mathcal{S}$ é uma relação anti-simétrica se $x \neq y$ e $f_{\mathcal{S}}(x, y) > 0 \Rightarrow f_{\mathcal{S}}(y, x) = 0, \forall x, y \in V$.

Definição 3.7.1: Uma relação *fuzzy* $\mathcal{R}$ é dita uma *relação de similaridade* se $\mathcal{R}$ é reflexiva, simétrica e transitiva.

Definição 3.7.2: Seja $\mathcal{S}$ uma relação de similaridade sobre $\mathcal{A}$, então, para cada elemento x em $\mathcal{A}$, denominamos *classe de similaridade* associada a x, o subconjunto *fuzzy* de $\mathcal{A}$ denotado por $\mathcal{S}(x)$ e definido por:

$$\mathcal{S}(x) = \{(z, f_{\mathcal{S}(x)}); f_{\mathcal{S}(x)}(z) = f_{\mathcal{S}}(x, z)\}.$$

3.8 Relações *fuzzy* de ordem

Nessa seção, enunciaremos algumas definições no que se refere às relações *fuzzy* de ordem.

Definição 3.8.1: Uma *ordem fuzzy* em $\mathcal{A}$ é uma relação *fuzzy* transitiva.

Definição 3.8.2: Uma relação *fuzzy* $\mathcal{P}_\sigma$ em $\mathcal{A}$ é denominada uma *relação fuzzy parcialmente ordenada* se $\mathcal{P}_\sigma$ é reflexiva, transitiva e anti-simétrica.

Definição 3.8.3: Uma ordem parcial *fuzzy* $\mathcal{L}$, em que para todo $x \neq y$ em $\mathcal{A}$, temos que $f_{\mathcal{L}}(x, y) > 0$ ou $f_{\mathcal{L}}(y, x) > 0$ é denominada uma *ordem linear fuzzy*.

Definição 3.8.4: Uma relação *fuzzy* $\mathcal{R}$ reflexiva e transitiva é denominada pré-ordem *fuzzy*.

Observamos, ao longo desse capítulo, que as relações dos conjuntos usuais manuseiam os elementos no universo de discurso; já as relações dos conjuntos *fuzzy* manuseiam os graus de pertinência dos referidos elementos. Com isso, visto o que foi apresentado ao longo desse capítulo, temos que esses conceitos permitem uma elaboração da Teoria dos Conjuntos *Fuzzy* de maneira semelhante à Teoria dos Conjuntos clássicos, mas naturalmente com características distintas.

Capítulo 4

Formalização proposicional de uma álgebra para os conjuntos *fuzzy*

Para este capítulo nos baseamos em Hájek (1998), Miraglia (1987) e Rasiowa (1974).

Neste momento, com base nos estudos apresentados no capítulo anterior, em que foram desenvolvidas as propriedades algébricas dos conjuntos *fuzzy*, apresentamos uma álgebra que abstrai os aspectos essenciais daquela álgebra e, em seguida, destacamos uma formalização proposicional para essa estrutura com a explicitação dos axiomas e regras de dedução. Por último, apresentamos uma demonstração da adequação entre a formalização proposicional e a algébrica, introduzidas neste capítulo.

4.1 A Álgebra *c-fuzzy* $\mathcal{A}$

Apresentamos, nesta seção, uma álgebra para dar conta das propriedades algébricas que obtivemos com os conjuntos *fuzzy* no capítulo precedente.

Definição 4.1.1: Uma álgebra *c-fuzzy*, denotada por $\mathcal{A}$, é uma sétupla (A, $\triangle$, $\triangledown$, ', 0, 1, $\rightarrow$) que é um reticulado distributivo, com 0 e 1, de De Morgan e, ainda, vale a seguinte condição: para todos a, $b \in$ A, $a \rightarrow b = 1 \Leftrightarrow a \leq b$.

O símbolo $\rightarrow$ tem, em uma álgebra c-*fuzzy*, apenas a atribuição de indicar se vale a ordem $a \leq b$ entre dois elementos, mas não define o elemento $a \rightarrow b$, para qualquer a e b. Para refinarmos a operação $\rightarrow$, precisaríamos de noções algébricas adicionais, não essenciais a esta algebrização.

Assim, para a estrutura algébrica $\mathcal{A}$, temos que as operações de conjunção e disjunção, denotadas respectivamente por $\triangle$ e $\triangledown$, são associativas, comutativas, idempotentes e admitem a absorção. Valem as propriedades distributivas entre estas duas operações. Temos naturalmente associada uma relação de ordem $\leq$, do reticulado, para a qual 0 e 1 são os elementos mínimo e máximo. A operação ' é uma involução de De Morgan, isto é, uma operação unária que admite as propriedades de De Morgan e mais $0' = 1$, $1' = 0$, $(a')' = a$ e $a \leq b \Leftrightarrow b' \leq a'$.

Contudo, embora seja um reticulado distributivo, este reticulado não é, em geral, complementado. Ele se aproxima de uma álgebra de Boole, mas não é uma álgebra Booleana.

Em suma, como vimos no capítulo anterior, o conjunto *fuzzy* $\mathcal{A}$ e o seu complemento $\mathcal{A}'$ não são, em geral, disjuntos, pois a intersecção não é sempre um conjunto vazio, mas podem possuir uma parte em comum. Da mesma forma, a união do conjunto *fuzzy* $\mathcal{A}$ com seu complemento $\mathcal{A}'$ nem sempre coincide com o conjunto universo ou domínio, ou seja, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ nem sempre preenchem completamente o universo de discurso V. Dessa forma, concluímos que o reticulado não é complementado. Por definição, sabemos que uma álgebra de Boole é um reticulado distributivo e complementado. Por isso, a nossa álgebra $\mathscr{A}$ determinada para os conjuntos *fuzzy* não é uma álgebra de Boole.

Definida uma álgebra para os conjuntos *fuzzy* e com base em tudo o que vimos anteriormente, destacamos, a seguir, a definição de homomorfismo, isomorfismo e monomorfismo de álgebras *c-fuzzy*, importantes para a construção de demonstrações futuras.

Definição 4.1.2: Sejam $\mathscr{A} = (A, \triangle, \triangledown, ', 0, 1, \rightarrow)$ e $\mathscr{A}^* = (A^*, \triangle^*, \triangledown^*, '^*, 0^*, 1^*, \rightarrow^*)$ álgebras *c-fuzzy* e h: A $\rightarrow$ A* uma função. Dizemos que h é um *homomorfismo* de algébras *c-fuzzy* se, para todos a, b $\in$ A , temos:

$$h(a \triangle b) = h(a) \triangle^* h(b);$$

$$h(a \triangledown b) = h(a) \triangledown^* h(b);$$

$$h(a') = (h(a))'^*;$$

$$h(a \rightarrow b) = h(a) \rightarrow^* h(b).$$

Definição 4.1.3: Um *monomorfismo* entre álgebras *c-fuzzy* é um homomorfismo injetivo entre as álgebras.

Definição 4.1.4: Um *isomorfismo* entre álgebras *c-fuzzy* é um homomorfismo bijetivo entre as duas estruturas.

Teorema 4.1.1: Para toda álgebra *c-fuzzy* $\mathcal{A} = (A, \triangle, \triangledown, ', 0, 1, \rightarrow)$, existe um isomorfismo h de $\mathcal{A}$ em uma álgebra *c-fuzzy* de conjuntos.

Demonstração: Pela Definição 4.1.1, temos que uma álgebra *c-fuzzy* $\mathcal{A}$ é um reticulado distributivo. Como $\mathcal{A}$ é um reticulado distributivo, segundo Rasiowa (1974), esta álgebra é isomorfa a um reticulado de conjuntos. Desta forma, existe um isomorfismo de $\mathcal{A}$ em uma álgebra *c-fuzzy* de conjuntos. ■

Na seção seguinte, introduzimos uma formalização proposicional para a álgebra $\mathcal{A}$.

4.2 Formalização proposicional de $\mathcal{A}$

A formalização proposicional de uma álgebra *c-fuzzy* $\mathcal{A}$, aqui determinada por $\mathcal{L}$, é definida sobre a linguagem L $(\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \top)$ em que $\wedge, \vee, \rightarrow$ e $\neg$ são os conectivos lógicos para a conjunção, disjunção, condicional e negação *fuzzy e* $\top$ é uma constante lógica para sentenças válidas. Nossos axiomas e regras de dedução são dados por esquemas, ou seja, φ, ψ e σ representam fórmulas quaisquer de L.

Definição 4.2.1: $\varphi \leftrightarrow \psi =_{df} (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.

A formalização proposicional na lógica $\mathcal{L}$, relativa à álgebra $\mathcal{A}$, fica determinada por meio dos seguintes axiomas e regras de dedução:

Axiomas:

(Ax 01) $\varphi \rightarrow \varphi$

(Ax 02) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$

(Ax 03) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\psi \wedge \varphi)$

(Ax 04) $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$

(Ax 05) $(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\psi \vee \varphi)$

(Ax 06) $(\varphi \wedge (\psi \vee \sigma)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma))$

(Ax 07) $\varphi \rightarrow \top$

(Ax 08) $\varphi \leftrightarrow (\neg\neg\varphi)$

(Ax 09) $(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \vee \psi)$.

Regras de Dedução:

(MP) $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \,/\, \psi$

(SH) $\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \sigma \,/\, \varphi \rightarrow \sigma$

(Inf) $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \rightarrow \sigma \,/\, \varphi \rightarrow (\psi \wedge \sigma)$

(Sup) $\varphi \rightarrow \sigma, \psi \rightarrow \sigma \,/\, (\varphi \vee \psi) \rightarrow \sigma$

(CPo) $\varphi \rightarrow \psi / \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$

(Conj) $\varphi, \psi \,/\, \varphi \wedge \psi$

($\top$) $\vdash \varphi \,/\, \vdash \top \rightarrow \varphi$.

Lema 4.2.1: $\varphi \leftrightarrow \psi \,/\, \varphi \rightarrow \psi$ e $\varphi \leftrightarrow \psi \,/\, \psi \rightarrow \varphi$**.**

Demonstração:

1. $(\varphi\to\psi)\wedge(\psi\to\varphi)$ Definição 4.2.1

2. $((\varphi\to\psi)\wedge(\psi\to\varphi))\to(\varphi\to\psi)$ (Ax 02)

3. $\varphi\to\psi$ (MP) em 1 e 2.

De maneira análoga, utilizando o (Ax 03), temos que $\psi\to\varphi$**.** ■

Definição 4.2.2: $\neg\top=\bot$.

Proposição 4.2.1: $\vdash(\varphi\wedge\psi)\to\psi$.

Demonstração:

1. $(\varphi\wedge\psi)\to(\psi\wedge\varphi)$ (Ax 03)

2. $(\psi\wedge\varphi)\to\psi$ (Ax 02)

3. $(\varphi\wedge\psi)\to\psi$ (SH) em 1 e 2. ■

Proposição 4.2.2: $\vdash(\varphi\wedge\psi)\leftrightarrow(\psi\wedge\varphi)$.

Demonstração: Segue do (Ax 03). ■

Proposição 4.2.3: $\vdash\ \psi\to(\varphi\vee\psi)$.

Demonstração:

1. $\psi\to(\psi\vee\varphi)$ (Ax 04)

2. $(\psi\vee\varphi)\to(\varphi\vee\psi)$ (Ax 05)

3. $\psi\to(\varphi\vee\psi)$ (SH) em 1 e 2**.** ■

Proposição 4.2.4: $\vdash(\psi\vee\varphi)\leftrightarrow(\varphi\vee\psi)$.

Demonstração: Segue do (Ax 05). ■

Proposição 4.2.5: $\vdash(\varphi\wedge(\psi\wedge\sigma))\to((\varphi\wedge\psi)\wedge\sigma)$.

Demonstração:

1. $(\varphi\wedge(\psi\wedge\sigma))\rightarrow\varphi$ (Ax 02)
2. $(\varphi\wedge(\psi\wedge\sigma))\rightarrow(\psi\wedge\sigma)$ Proposição 4.2.1
3. $(\psi\wedge\sigma)\rightarrow\psi$ (Ax 02)
4. $(\varphi\wedge(\psi\wedge\sigma))\rightarrow\psi$ (SH) em 2 e 3
5. $(\varphi\wedge(\psi\wedge\sigma))\rightarrow(\varphi\wedge\psi)$ (Inf) em 1 e 4
6. $(\psi\wedge\sigma)\rightarrow\sigma$ Proposição 4.2.1
7. $(\varphi\wedge(\psi\wedge\sigma))\rightarrow\sigma$ (SH) em 2 e 6
8. $(\varphi\wedge(\psi\wedge\sigma))\rightarrow((\varphi\wedge\psi)\wedge\sigma)$ (Inf) em 5 e 7. ■

Proposição 4.2.6: $\vdash ((\varphi\wedge\psi)\wedge\sigma)\rightarrow(\varphi\wedge(\psi\wedge\sigma))$.

Demonstração:

1. $((\varphi\wedge\psi)\wedge\sigma)\rightarrow(\varphi\wedge\psi)$ (Ax 02)
2. $(\varphi\wedge\psi)\rightarrow\varphi$ (Ax 02)
3. $((\varphi\wedge\psi)\wedge\sigma)\rightarrow\varphi$ (SH) em 1 e 2
4. $(\varphi\wedge\psi)\rightarrow\psi$ Proposição 4.2.1
5. $(\varphi\wedge\psi)\wedge\sigma\rightarrow\psi$ (SH) em 1 e 4
6. $(\varphi\wedge\psi)\wedge\sigma\rightarrow\sigma$ Proposição 4.2.1
7. $((\varphi\wedge\psi)\wedge\sigma)\rightarrow(\psi\wedge\sigma)$ (Inf) em 5 e 6
8. $((\varphi\wedge\psi)\wedge\sigma)\rightarrow(\varphi\wedge(\psi\wedge\sigma))$ (Inf) em 3 e 7. ■

Corolário 4.2.1: $\vdash (\varphi\wedge(\psi\wedge\sigma))\leftrightarrow((\varphi\wedge\psi)\wedge\sigma)$.

Demonstração:

1. $(\varphi\wedge(\psi\wedge\sigma))\rightarrow((\varphi\wedge\psi)\wedge\sigma)$ Proposição 4.2.5
2. $((\varphi\wedge\psi)\wedge\sigma)\rightarrow(\varphi\wedge(\psi\wedge\sigma))$ Proposição 4.2.6

3. $((\varphi\wedge(\psi\wedge\sigma))\rightarrow((\varphi\wedge\psi)\wedge\sigma))\wedge(((\varphi\wedge\psi)\wedge\sigma)\rightarrow(\varphi\wedge(\psi\wedge\sigma)))$ (Conj) em 1 e 2

4. $(\varphi\wedge(\psi\wedge\sigma))\leftrightarrow((\varphi\wedge\psi)\wedge\sigma)$ Definição 4.2.1 em 3. ■

Proposição 4.2.7: $\vdash ((\varphi\vee\psi)\vee\sigma)\rightarrow(\varphi\vee(\psi\vee\sigma))$.

Demonstração:

1. $\psi\rightarrow(\psi\vee\sigma)$ (Ax 04)
2. $\sigma\rightarrow(\psi\vee\sigma)$ Proposição 4.2.3
3. $\varphi\rightarrow(\varphi\vee(\psi\vee\sigma))$ (Ax 04)
4. $(\psi\vee\sigma)\rightarrow(\varphi\vee(\psi\vee\sigma))$ Proposição 4.2.3
5. $\psi\rightarrow(\varphi\vee(\psi\vee\sigma))$ (SH) em 1 e 4
6. $(\varphi\vee\psi)\rightarrow(\varphi\vee(\psi\vee\sigma))$ (Sup) em 3 e 5
7. $\sigma\rightarrow(\varphi\vee(\psi\vee\sigma))$ (SH) em 2 e 4
8. $((\varphi\vee\psi)\vee\sigma)\rightarrow(\varphi\vee(\psi\vee\sigma))$ (Sup) em 6 e 7. ■

Proposição 4.2.8: $\vdash (\varphi\vee(\psi\vee\sigma))\rightarrow((\varphi\vee\psi)\vee\sigma)$.

Demonstração:

1. $\varphi\rightarrow(\varphi\vee\psi)$ (Ax 04)
2. $\psi\rightarrow(\varphi\vee\psi)$ Proposição 4.2.3
3. $(\varphi\vee\psi)\rightarrow((\varphi\vee\psi)\vee\sigma)$ (Ax 04)
4. $\varphi\rightarrow((\varphi\vee\psi)\vee\sigma)$ (SH) em 1 e 3
5. $\psi\rightarrow((\varphi\vee\psi)\vee\sigma)$ (SH) em 2 e 3
6. $\sigma\rightarrow((\varphi\vee\psi)\vee\sigma)$ Proposição 4.2.3
7. $(\psi\vee\sigma)\rightarrow((\varphi\vee\psi)\vee\sigma)$ (Sup) em 5 e 6
8. $(\varphi\vee(\psi\vee\sigma))\rightarrow((\varphi\vee\psi)\vee\sigma)$ (Sup) em 4 e 7. ■

Corolário 4.2.2: $\vdash$ $(\varphi\vee(\psi\vee\sigma))\leftrightarrow((\varphi\vee\psi)\vee\sigma)$.

Demonstração:

1. $((\varphi\vee\psi)\vee\sigma)\rightarrow(\varphi\vee(\psi\vee\sigma))$	Proposição 4.2.7
2. $(\varphi\vee(\psi\vee\sigma))\rightarrow((\varphi\vee\psi)\vee\sigma)$	Proposição 4.2.8
3. $(((\varphi\vee\psi)\vee\sigma)\rightarrow(\varphi\vee(\psi\vee\sigma)))\wedge((\varphi\vee(\psi\vee\sigma)\rightarrow(\varphi\vee\psi)\vee\sigma))$	(Conj) em 1 e 2
4. $(\varphi\vee(\psi\vee\sigma))\leftrightarrow((\varphi\vee\psi)\vee\sigma)$	Definição 4.2.2 em 3. ■

Proposição 4.2.9: $\vdash$ $\neg(\varphi\vee\psi)\rightarrow(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$.

Demonstração:

1. $\varphi\rightarrow(\varphi\vee\psi)$	(Ax 04)
2. $\neg(\varphi\vee\psi)\rightarrow\neg\varphi$	(CPo) em 1
3. $\psi\rightarrow(\varphi\vee\psi)$	Proposição 4.2.3
4. $\neg(\varphi\vee\psi)\rightarrow\neg\psi$	(CPo) em 3
5. $\neg(\varphi\vee\psi)\rightarrow(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$	(Inf) em 2 e 4. ■

Corolário 4.2.3: $\vdash$ $(\neg\varphi\wedge\neg\psi)\leftrightarrow\neg(\varphi\vee\psi)$.

Demonstração:

1. $(\neg\varphi\wedge\neg\psi)\rightarrow\neg(\varphi\vee\psi)$	(Ax 09)
2. $\neg(\varphi\vee\psi)\rightarrow(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$	Proposição 4.2.9
3. $((\neg\varphi\wedge\neg\psi)\rightarrow\neg(\varphi\vee\psi))\wedge(\neg(\varphi\vee\psi)\rightarrow(\neg\varphi\wedge\neg\psi))$	(Conj) em 1 e 2
4. $(\neg\varphi\wedge\neg\psi)\leftrightarrow\neg(\varphi\vee\psi)$	Definição 4.2.1 em 3. ■

Proposição 4.2.10: $\vdash$ $(\neg\varphi\vee\neg\psi)\rightarrow\neg(\varphi\wedge\psi)$.

Demonstração:

1. $(\varphi\wedge\psi)\rightarrow\varphi$	(Ax 02)

2. $\neg\varphi\rightarrow\neg(\varphi\wedge\psi)$ (CPo) em 1

3. $(\varphi\wedge\psi)\rightarrow\psi$ Proposição 4.2.1

4. $\neg\psi\rightarrow\neg(\varphi\wedge\psi)$ (CPo) em 3

5. $(\neg\varphi\vee\neg\psi)\rightarrow\neg(\varphi\wedge\psi)$ (Sup) em 2 e 4. ■

Lema 4.2.2: $\vdash (\neg\neg\varphi\wedge\neg\neg\psi)\rightarrow(\varphi\wedge\psi)$.

Demonstração:

1. $(\neg\neg\varphi\wedge\neg\neg\psi)\rightarrow\neg\neg\varphi$ (Ax 02)

2. $(\neg\neg\varphi\wedge\neg\neg\psi)\rightarrow\neg\neg\psi$ Proposição 4.2.1

3. $\neg\neg\varphi\rightarrow\varphi$ (Ax 08) e Lema 4.2.1

4. $\neg\neg\psi\rightarrow\psi$ (Ax 08) e Lema 4.2.1

5. $(\neg\neg\varphi\wedge\neg\neg\psi)\rightarrow\varphi$ (SH) em 1 e 3

6. $(\neg\neg\varphi\wedge\neg\neg\psi)\rightarrow\psi$ (SH) em 2 e 4

7. $(\neg\neg\varphi\wedge\neg\neg\psi)\rightarrow\varphi\wedge\psi$ (Inf) em 5 e 6. ■

Proposição 4.2.11: $\vdash \neg(\varphi\wedge\psi)\rightarrow(\neg\varphi\vee\neg\psi)$.

Demonstração:

1. $(\neg\varphi\vee\neg\psi)\rightarrow\neg(\varphi\wedge\psi)$ Proposição 4.2.10

2. $\neg\neg(\varphi\wedge\psi)\rightarrow\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)$ (CPo) em 1

3. $(\varphi\wedge\psi)\rightarrow\neg\neg(\varphi\wedge\psi)$ (Ax 08) e Lema 4.2.1 em 2

4. $(\varphi\wedge\psi)\rightarrow\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)$ (SH) em 2 e 3

5. $\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)\rightarrow(\neg\neg\varphi\wedge\neg\neg\psi)$ Proposição 4.2.9

6. $(\neg\neg\varphi\wedge\neg\neg\psi)\rightarrow(\varphi\wedge\psi)$ Lema 4.2.2

7. $\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)\rightarrow(\varphi\wedge\psi)$ (SH) em 5 e 6

8. $\neg(\varphi\wedge\psi)\rightarrow\neg\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)$ (CPo) em 7

9. $\neg\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)\rightarrow(\neg\varphi\vee\neg\psi)$ (Ax 08) e Lema 4.2.1 em 8

10. $\neg(\varphi\wedge\psi)\rightarrow(\neg\varphi\vee\neg\psi)$ (SH) em 8 e 9. ■

Corolário 4.2.4: $\vdash (\neg\varphi\vee\neg\psi)\leftrightarrow\neg(\varphi\wedge\psi)$.

Demonstração:

1. $(\neg\varphi\vee\neg\psi)\rightarrow\neg(\varphi\wedge\psi)$ Proposição 4.2.10

2. $\neg(\varphi\wedge\psi)\rightarrow(\neg\varphi\vee\neg\psi)$ Proposição 4.2.11

3. $((\neg\varphi\vee\neg\psi)\rightarrow\neg(\varphi\wedge\psi))\wedge(\neg(\varphi\wedge\psi)\rightarrow(\neg\varphi\vee\neg\psi))$ (Conj) em 1 e 2

4. $(\neg\varphi\vee\neg\psi)\leftrightarrow\neg(\varphi\wedge\psi)$ Definição 4.2.1 em 3. ■

Proposição 4.2.12: $\vdash ((\varphi\wedge\psi)\vee\psi)\rightarrow\psi$.

Demonstração:

1. $(\varphi\wedge\psi)\rightarrow\psi$ Proposição 4.2.1

2. $\psi\rightarrow\psi$ (Ax 01)

3. $((\varphi\wedge\psi)\vee\psi)\rightarrow\psi$ (Sup) em 1 e 2. ■

Corolário 4.2.5: $\vdash ((\varphi\wedge\psi)\vee\psi)\leftrightarrow\psi$.

Demonstração:

1. $\psi\rightarrow((\varphi\wedge\psi)\vee\psi)$ Proposição 4.2.3

2. $((\varphi\wedge\psi)\vee\psi)\rightarrow\psi$ Proposição 4.2.12

3. $(\psi\rightarrow((\varphi\wedge\psi)\vee\psi))\wedge(((\varphi\wedge\psi)\vee\psi)\rightarrow\psi)$ (Conj) em 1 e 2

4. $((\varphi\wedge\psi)\vee\psi)\leftrightarrow\psi$ Definição 4.2.1 em 3. ■

Proposição 4.2.13: $\vdash \psi\rightarrow((\varphi\vee\psi)\wedge\psi)$.

Demonstração:

1. $\psi\rightarrow(\varphi\vee\psi)$ Proposição 4.2.3

2. $\psi \rightarrow \psi$ (Ax 01)

3. $\psi \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge \psi)$ (Inf) em 1 e 2. ■

Corolário 4.2.6: $\vdash ((\varphi \vee \psi) \wedge \psi) \leftrightarrow \psi$.

Demonstração:

1. $((\varphi \vee \psi) \wedge \psi) \rightarrow \psi$ Proposição 4.2.1

2. $\psi \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge \psi)$ Proposição 4.2.13

3. $(((\varphi \vee \psi) \wedge \psi) \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge \psi))$ (Conj) em 1 e 2

4. $((\varphi \vee \psi) \wedge \psi) \leftrightarrow \psi$ Definição 4.2.1 em 3. ■

Lema 4.2.3: $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ e $\vdash \sigma \rightarrow \delta \Rightarrow \vdash \varphi \vee \sigma \rightarrow \psi \vee \delta$

Demonstração:

1. $\varphi \rightarrow \psi$ Hipótese

2. $\sigma \rightarrow \delta$ Hipótese

3. $\psi \rightarrow \psi \vee \delta$ (Ax 04)

4. $\varphi \rightarrow \psi \vee \delta$ (SH) em 1 e 3

5. $\delta \rightarrow \psi \vee \delta$ Proposição 4.2.3

6. $\sigma \rightarrow \psi \vee \delta$ (SH) em 2 e 5

7. $\varphi \vee \sigma \rightarrow \psi \vee \delta$ (Sup) em 4 e 6. ■

Proposição 4.2.14: $\vdash (\varphi \vee (\psi \wedge \sigma)) \leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma))$.

Demonstração:

1. $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma) \leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge \varphi) \vee ((\varphi \vee \psi) \wedge \sigma)$ (Ax 06)

2. $\varphi \leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge \varphi)$ Corolário 4.2.6 e Proposição 4.2.4

3. $((\varphi \vee \psi) \wedge \sigma) \leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge \sigma)$ (Ax 01)

4. $((\varphi\vee\psi)\wedge\varphi)\vee((\varphi\vee\psi)\wedge\sigma)\leftrightarrow(\varphi\vee((\varphi\vee\psi)\wedge\sigma))$ Lema 4.2.3 em 2 e 3

5. $(\varphi\vee\psi)\wedge(\varphi\vee\sigma)\leftrightarrow(\varphi\vee((\varphi\vee\psi)\wedge\sigma))$ (SH) em 1 e 4

6. $((\varphi\vee\psi)\wedge\sigma)\leftrightarrow(\varphi\wedge\sigma)\vee(\psi\wedge\sigma)$ (Ax 06)

7. $\varphi\leftrightarrow\varphi$ (Ax 01)

8. $\varphi\vee((\varphi\vee\psi)\wedge\sigma)\leftrightarrow\varphi\vee((\varphi\wedge\sigma)\vee(\psi\wedge\sigma))$ Lema 4.2.3 em 6 e 7

9. $(\varphi\vee\psi)\wedge(\varphi\vee\sigma)\leftrightarrow\varphi\vee((\varphi\wedge\sigma)\vee(\psi\wedge\sigma))$ (SH) em 5 e 8

10. $\varphi\vee((\varphi\wedge\sigma)\vee(\psi\wedge\sigma))\leftrightarrow(\varphi\vee(\varphi\wedge\sigma))\vee(\psi\wedge\sigma)$ Corolário 4.2.2

11. $(\varphi\vee\psi)\wedge(\varphi\vee\sigma)\leftrightarrow(\varphi\vee(\varphi\wedge\sigma))\vee(\psi\wedge\sigma)$ (SH) em 9 e 10

12. $\varphi\leftrightarrow(\varphi\vee(\varphi\wedge\sigma))$ Corolário 4.2.5 e Proposições 4.2.2 e 4.2.4

13. $(\psi\wedge\sigma)\leftrightarrow(\psi\wedge\sigma)$ (Ax 01)

14. $\varphi\vee(\psi\wedge\sigma)\leftrightarrow(\varphi\vee(\varphi\wedge\sigma))\vee(\psi\wedge\sigma)$ Lema 4.2.3 em 12 e 13

15. $(\varphi\vee\psi)\wedge(\varphi\vee\sigma)\leftrightarrow\varphi\vee(\psi\wedge\sigma)$ (SH) em 11 e 14. ■

Proposição 4.2.15: $\vdash\ \bot\rightarrow\varphi$.

Demonstração:

1. $\neg\varphi\rightarrow\top$ (Ax 07)

2. $\neg\top\rightarrow\neg\neg\varphi$ (CPo) em 1

3. $\bot\rightarrow\neg\neg\varphi$ Definição 4.2.2 em 2

4. $\neg\neg\varphi\rightarrow\varphi$ (Ax 08) e Lema 4.2.1

5. $\bot\rightarrow\varphi$ (SH) em 3 e 4. ■

Proposição 4.2.16: $\vdash\ \top\rightarrow(\varphi\vee\top)$.

Demonstração:

1. $\top\rightarrow\varphi\vee\top$ Proposição 4.2.3. ■

Corolário 4.2.7: $\vdash \top \leftrightarrow (\varphi \vee \top)$.

Demonstração:

1. $\top \to (\varphi \vee \top)$	Proposição 4.2.16
2. $(\varphi \vee \top) \to \top$	(Ax 07)
3. $((\top \to (\varphi \vee \top)) \wedge ((\varphi \vee \top) \to \top))$	(Conj) em 1 e 2
4. $\top \leftrightarrow (\varphi \vee \top)$	Definição 4.2.1 em 3. ■

Proposição 4.2.17: $\vdash (\varphi \vee \bot) \to \varphi$.

Demonstração:

1. $\varphi \to \varphi$	(Ax 01)
2. $\bot \to \varphi$	Proposição 4.2.15
3. $(\varphi \vee \bot) \to \varphi$	(Sup) em 1 e 2. ■

Corolário 4.2.8: $\vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \bot)$.

Demonstração:

1. $\varphi \to (\varphi \vee \bot)$	(Ax 04)
2. $(\varphi \vee \bot) \to \varphi$	Proposição 4.2.17
3. $(\varphi \to (\varphi \vee \bot)) \wedge ((\varphi \vee \bot) \to \varphi)$	(Conj) em 1 e 2
4. $\varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \bot)$	Definição 4.2.1 em 3. ■

Proposição 4.2.18: $\vdash \bot \to (\varphi \wedge \bot)$.

Demonstração:

1. $\bot \to (\varphi \wedge \bot)$	Proposição 4.2.15. ■

Corolário 4.2.9: $\vdash \bot \leftrightarrow (\varphi \wedge \bot)$.

Demonstração:

1. $(\varphi\wedge\bot)\rightarrow\bot$	Proposição 4.2.1
2. $\bot\rightarrow(\varphi\wedge\bot)$	Proposição 4.2.18
3. $(\bot\rightarrow(\varphi\wedge\bot))\wedge((\varphi\wedge\bot)\rightarrow\bot)$	(Conj) em 1 e 2
4. $\bot\leftrightarrow(\varphi\wedge\bot)$	Definição 4.2.1 em 3. ■

Proposição 4.2.19: $\vdash\ \varphi\rightarrow(\top\wedge\varphi)$.

Demonstração:

1. $\varphi\rightarrow\varphi$	(Ax 01)
2. $\varphi\rightarrow\top$	(Ax 07)
3. $\varphi\rightarrow(\varphi\wedge\top)$	(Inf) em 1 e 2
4. $(\varphi\wedge\top)\rightarrow(\top\wedge\varphi)$	(Ax 03)
5. $\varphi\rightarrow(\top\wedge\varphi)$	(SH) em 3 e 4. ■

Corolário 4.2.10: $\vdash\ \varphi\leftrightarrow(\varphi\wedge\top)$.

Demonstração:

1. $(\varphi\wedge\top)\rightarrow\varphi$	(Ax 02)
2. $\varphi\rightarrow(\top\wedge\varphi)$	Proposição 4.2.19
3. $((\varphi\wedge\top)\rightarrow\varphi)\wedge(\varphi\rightarrow(\top\wedge\varphi))$	(Conj) em 1 e 2
4. $\varphi\leftrightarrow\varphi\wedge\top$	Definição 4.2.1 em 3. ■

Apresentada a formalização proposicional de $\mathcal{L}$ relativa à álgebra $\mathcal{A}$, necessitamos demonstrar que o nosso sistema é adequado. Faremos isso na próxima seção.

4.3 A Adequação entre a formalização proposicional $\mathcal{L}$ e os modelos álgébricos $\mathcal{A}$.

Os sistemas formais, em geral, possuem uma *semântica* ou um *modelo* adequado a eles. O sistema é dito *adequado* quando ele é correto e completo. A *correção fraca* determina que todo teorema é uma fórmula válida; já a *completude fraca* garante que toda fórmula válida é um teorema. Por outro lado, a *correção forte* e a *completude forte* envolvem não apenas teoremas e fórmulas válidas, mas também, consequências semântica e sintática.

A seguir, apresentamos a demonstração da *adequação forte* entre a formalização proposicional $\mathcal{L}$ e os modelos algébricos $\mathcal{A}$.

Vale destacar que uma álgebra c-*fuzzy,* apresentada neste trabalho, é denotada por $\mathcal{A}$ e a formalização proposicional dessa álgebra é indicada por $\mathcal{L}$.

Definição 4.3.1: Uma fórmula $\varphi \in$ For($\mathcal{L}$) é *refutável* em Γ se $\Gamma \vdash \neg\varphi$, caso contrário, φ é *irrefutável*.

Definição 4.3.2: Uma *valoração restrita* é uma função $\boldsymbol{v}^*$: For($\mathcal{L}$)$\rightarrow\mathcal{A}$, que interpreta cada variável de $\mathcal{L}$ em um elemento de $\mathcal{A}$.

Definição 4.3.3: Uma *valoração* é uma função $\boldsymbol{v}$: For($\mathcal{L}$)$\rightarrow\mathcal{A}$, tal que, se p é uma fórmula atômica e φ e ψ são fórmulas quaisquer, então $\boldsymbol{v}$ estende, natural e unicamente, uma valoração restrita $\boldsymbol{v}^*$ do seguinte modo:

$$\boldsymbol{v}(p) = \boldsymbol{v}^*(p)$$

$$\boldsymbol{v}(\neg\varphi) = (\boldsymbol{v}(\varphi))'$$

$$\boldsymbol{v}(\varphi\vee\psi) = \boldsymbol{v}(\varphi)\triangledown\boldsymbol{v}(\psi)$$

$$\boldsymbol{v}(\varphi\wedge\psi) = \boldsymbol{v}(\varphi)\vartriangle\boldsymbol{v}(\psi)$$

$$\boldsymbol{v}(\varphi\rightarrow\psi) = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{v}(\varphi) \leq \boldsymbol{v}(\psi).$$

Na definição acima, os símbolos de operadores apresentados do lado esquerdo das igualdades representam os operadores lógicos; já os símbolos de operadores do lado direito das igualdades representam os operadores algébricos.

Definição 4.3.4: Uma valoração $\boldsymbol{v}$: For($\mathcal{L}$)→$\mathcal{A}$ é um *modelo* para um conjunto $\Gamma \subseteq$ For($\mathcal{L}$) quando $\boldsymbol{v}(\varphi) = 1$, para toda fórmula $\varphi \in \Gamma$.

Em particular, uma valoração $\boldsymbol{v}$: For($\mathcal{L}$)→$\mathcal{A}$ é um modelo para $\varphi \in$ For($\mathcal{L}$), quando $\boldsymbol{v}(\varphi) = 1$.

Definição 4.3.5: Uma fórmula φ é *válida* em uma álgebra c-*fuzzy* $\mathcal{A}$ quando toda valoração $\boldsymbol{v}$: For($\mathcal{L}$) →$\mathcal{A}$ é modelo para φ.

Definição 4.3.6: Uma fórmula φ é *válida* quando ela é válida em toda álgebra *c-fuzzy*.

Denotamos que uma fórmula φ é válida por $\vDash \varphi$.

Definição 4.3.7: Um conjunto de fórmulas Γ é *inconsistente* quando há deduções $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$, para alguma fórmula φ. Caso contrário, Γ é *consistente*.

Definição 4.3.8: Um sistema constituído por uma linguagem formal e regras de dedução é *consistente* quando o seu conjunto de teoremas é consistente. Caso contrário, ele é *inconsistente*.

Definição 4.3.9: A álgebra das fórmulas de $\mathcal{L}$ é dada por (For($\mathcal{L}$), $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$) em que $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\neg$ são os operadores de $\mathcal{L}$.

Uma *álgebra de Lindenbaum* é um conjunto de classes de equivalência obtidas a partir de uma relação específica de equivalência, ou seja, da congruência definida sobre o conjunto de fórmulas de uma determinada lógica, como a seguir. A relação de equivalência que nos dará a álgebra de Lindenbaum de $\mathcal{L}$ é definida por:

Definição 4.3.10: Dado $\Gamma \subseteq$ For($\mathcal{L}$), a relação $\equiv_\Gamma$ é definida por:

$$\varphi \equiv_\Gamma \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ e } \Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi.$$

Neste momento, é importante destacarmos que omitiremos o índice Γ da relação de equivalência, mantendo apenas o símbolo $\equiv$.

Proposição 4.3.1: A relação $\equiv$ é uma *relação de congruência*.

Demonstração: Demonstraremos, inicialmente, que $\equiv$ é uma relação de equivalência.

A relação é:

reflexiva: para toda fórmula $\varphi \in$ For($\mathcal{L}$), $\Gamma \vdash \varphi\rightarrow\varphi$ e, desse modo, $\varphi \equiv \varphi$.

simétrica: se $\varphi \equiv \psi$, então $\Gamma \vdash \varphi\rightarrow\psi$ e $\Gamma \vdash \psi\rightarrow\varphi$ e, daí, $\psi \equiv \varphi$.

transitiva: se $\varphi \equiv \psi$ e $\psi \equiv \sigma$, então $\Gamma \vdash \varphi\rightarrow\psi$, $\Gamma \vdash \psi\rightarrow\varphi$, $\Gamma \vdash \psi\rightarrow\sigma$ e $\Gamma \vdash \sigma\rightarrow\psi$.

Desse modo, temos $\Gamma \vdash \varphi\rightarrow\sigma$ e $\Gamma \vdash \sigma\rightarrow\varphi \Leftrightarrow \varphi \equiv \sigma$.

Assim, $\equiv$ é uma relação de equivalência.

Agora, para concluirmos a demonstração de que a relação $\equiv$ é uma congruência, verificaremos que ela preserva os operadores $\wedge$, $\vee$, e $\neg$ de $\mathcal{L}$ e $\rightarrow$ preserva a ordem.

Para as demonstrações, utilizaremos a Definição 4.3.10.

(i) $\varphi \equiv \psi \Rightarrow \neg\varphi \equiv \neg\psi$

Por hipótese, temos $\varphi \equiv \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi\leftrightarrow\psi$. Utilizando (CPo), temos que: $\Gamma \vdash \varphi\leftrightarrow\psi \Rightarrow \Gamma \vdash \neg\psi\leftrightarrow\neg\varphi \Leftrightarrow \neg\psi \equiv \neg\varphi$. Sabemos que a relação $\equiv$ é uma relação de equivalência. Assim, se $\neg\psi \equiv \neg\varphi$, então $\neg\varphi \equiv \neg\psi$.

(ii) $\varphi \equiv \psi$ e $\sigma \equiv \delta \Rightarrow \varphi \wedge \sigma \equiv \psi \wedge \delta$

Por hipótese, temos $\varphi \equiv \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ e $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$, e ainda, $\sigma \equiv \delta \Leftrightarrow \Gamma \vdash \sigma \leftrightarrow \delta \Leftrightarrow \Gamma \vdash \sigma \rightarrow \delta$ e $\Gamma \vdash \delta \rightarrow \sigma$. Queremos demonstrar $\Gamma \vdash \varphi \wedge \sigma \leftrightarrow \psi \wedge \delta$.

Vamos mostrar que $\Gamma \vdash \varphi \wedge \sigma \rightarrow \psi \wedge \delta$:

Pelo (Ax 02), temos que $\Gamma \vdash \varphi \wedge \sigma \rightarrow \varphi$ e, por hipótese, sabemos que $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Assim, pela Regra de Dedução (SH) nos dois itens antecedentes, temos que $\Gamma \vdash \varphi \wedge \sigma \rightarrow \psi$.

Agora, pela Proposição 4.2.1, temos $\Gamma \vdash \varphi \wedge \sigma \rightarrow \sigma$ e, por hipótese, sabemos que $\Gamma \vdash \sigma \rightarrow \delta$. Pela Regra de Dedução (SH) nos dois itens antecedentes, temos que $\Gamma \vdash \varphi \wedge \sigma \rightarrow \delta$. Então, dos resultados anteriores, temos que $\Gamma \vdash \varphi \wedge \sigma \rightarrow \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi \wedge \sigma \rightarrow \delta$. Agora, pela Regra de Dedução (Inf), temos que $\Gamma \vdash \varphi \wedge \sigma \rightarrow \psi \wedge \delta$.

De modo análogo, verifica-se que $\Gamma \vdash \psi \wedge \delta \rightarrow \varphi \wedge \sigma$.

Dessas informações, temos $\Gamma \vdash \varphi \wedge \sigma \rightarrow \psi \wedge \delta$ e $\Gamma \vdash \psi \wedge \delta \rightarrow \varphi \wedge \sigma$. Logo, $\Gamma \vdash \varphi \wedge \sigma \leftrightarrow \psi \wedge \delta$ e, portanto, $\varphi \wedge \sigma \equiv \psi \wedge \delta$.

(iii) $\varphi \equiv \psi$ e $\sigma \equiv \delta \Rightarrow \varphi \vee \sigma \equiv \psi \vee \delta$.

Por hipótese, temos $\varphi \equiv \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ e $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$, e ainda, $\sigma \equiv \delta \Leftrightarrow \Gamma \vdash \sigma \leftrightarrow \delta \Leftrightarrow \Gamma \vdash \sigma \rightarrow \delta$ e $\Gamma \vdash \delta \rightarrow \sigma$. Queremos demonstrar $\Gamma \vdash \varphi \vee \sigma \leftrightarrow \psi \vee \delta$.

Do Lema 4.2.3, segue que $\Gamma \vdash \varphi \vee \sigma \rightarrow \psi \vee \delta$ e $\Gamma \vdash \psi \vee \delta \rightarrow \varphi \vee \sigma$. Logo, $\Gamma \vdash \varphi \vee \sigma \leftrightarrow \psi \vee \delta$ e, portanto, $\varphi \vee \sigma \equiv \psi \vee \delta$.

(iv) Se $\varphi \equiv \psi$ e $\vdash \sigma \rightarrow \varphi$, então $\vdash \sigma \rightarrow \psi$. (Dualmente, se $\varphi \equiv \psi$ e $\vdash \varphi \rightarrow \sigma$, então $\vdash \psi \rightarrow \sigma$).

Por hipótese e utilizando a Definição 4.3.3, temos $\varphi \equiv \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ e $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$. Ainda, da hipótese, temos $\vdash \sigma \rightarrow \varphi$. Aplicando a Regra de Dedução (SH) em $\vdash \sigma \rightarrow \varphi$ e

$\vdash \varphi \to \psi$, temos que $\vdash \sigma \to \psi$.

Com isso, $\equiv$ é uma relação de congruência. ■

Definição 4.3.11: A *classe de equivalência* de φ módulo $\equiv$ e Γ é dada por: $[\varphi]_\Gamma = \{\psi \in$ **For**$\mathcal{L}$ $: \psi \equiv \varphi\}$.

Definição 4.3.12: A álgebra de Lindenbaum de $\mathcal{L}$, denotada por $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$, é a *álgebra quociente* dada por:

$\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$ = (**For**$\mathcal{L}$ $: \equiv, \wedge_\equiv, \vee_\equiv, \to_\equiv, \neg_\equiv, 0_\equiv, 1_\equiv$), tal que:

$[\varphi] \wedge_\equiv [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$;

$[\varphi] \vee_\equiv [\psi] = [\varphi \vee \psi]$;

$[\varphi] \to_\equiv [\psi] = [\varphi \to \psi]$;

$\neg_\equiv [\varphi] = [\neg\varphi]$;

$0_\equiv = [\bot]$ e

$1_\equiv = [\top]$.

Proposição 4.3.2: Em $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$ temos $[\varphi] \leq [\psi] \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) $[\varphi] \leq [\psi] \Leftrightarrow [\varphi] \wedge [\psi] = [\varphi] \Leftrightarrow [\varphi \wedge \psi] = [\varphi] \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ e $\Gamma \vdash \varphi \to (\varphi \wedge \psi)$.

Assim, temos que $\Gamma \vdash \varphi \to (\varphi \wedge \psi)$. Pela Proposição 4.2.1, $\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \psi$. Agora, pela Regra de Dedução (SH), temos $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

($\Leftarrow$) Pelo (Ax 01), $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi$. Por hipótese, temos $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Agora, utilizando a Regra de Dedução (Inf), temos $\Gamma \vdash \varphi \to (\varphi \wedge \psi)$ (I).

Pelo (Ax 02), temos $\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ (II).

Assim, por (I), (II) e pela definição de $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$, temos $\Gamma \vdash \varphi\rightarrow(\varphi\wedge\psi)$ e $\Gamma \vdash (\varphi\wedge\psi)\rightarrow\varphi$ $\Leftrightarrow \varphi\wedge\psi \equiv \varphi \Leftrightarrow [\varphi\wedge\psi] = [\varphi] \Leftrightarrow [\varphi]\wedge[\psi] = [\varphi] \Leftrightarrow [\varphi] \leq [\psi]$.

Dessa forma, em $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$ temos $[\varphi] \leq [\psi] \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi\rightarrow\psi$. ■

Segue, da proposição anterior, que em $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$ temos $[\varphi] = [\psi] \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi\leftrightarrow\psi$.

Proposição 4.3.3: A álgebra $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$ é uma álgebra *c-fuzzy*.

Demonstração: Devemos mostrar que ($\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$, $0_\equiv$, $1_\equiv$, $\neg_\equiv$, $\wedge_\equiv$, $\vee_\equiv$, $\rightarrow_\equiv$) é um reticulado distributivo, com 0 e 1, de De Morgan, tal que $[\varphi] \rightarrow [\psi] = 1 \Leftrightarrow [\varphi] \leq [\psi]$.

Utilizaremos nesta demonstração a Proposição 4.3.2 e a Definição 4.3.12.

O resultado de $[\varphi] \rightarrow [\psi] = 1 \Leftrightarrow [\varphi] \leq [\psi]$, é imediato pela Proposição 4.3.2.

(i) A relação $[\varphi] \leq [\psi]$ é uma ordem parcial.

Pelo (Ax 01), $\vdash\varphi\rightarrow\varphi$. Logo, $[\varphi] \leq [\varphi]$.

Se $[\varphi] \leq [\psi]$ e $[\psi] \leq [\varphi] \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi\rightarrow\psi$ e $\Gamma \vdash \psi\rightarrow\varphi$. Daí, $\varphi \equiv \psi$ e, portanto, $[\varphi] = [\psi]$.

Se $[\varphi] \leq [\psi]$ e $[\psi] \leq [\sigma] \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi\rightarrow\psi$ e $\Gamma \vdash \psi\rightarrow\sigma$. Pela Regra de Dedução (SH) nos dois itens antecedentes, temos $\Gamma \vdash \varphi\rightarrow\sigma$ e, portanto, $[\varphi] \leq [\sigma]$.

(ii) Existe o supremo e o ínfimo de $\{[\varphi], [\psi]\}$ para todos $\varphi, \psi \in$ For ($\mathcal{L}$).

Consideramos $\{[\varphi], [\psi]\}$ em $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$.

Pelo (Ax 02), $\vdash (\varphi\wedge\psi) \rightarrow \varphi \Leftrightarrow [\varphi\wedge\psi] \leq [\varphi] \Leftrightarrow [\varphi]\wedge[\psi] \leq [\varphi]$.

Pela Proposição 4.2.1, $\vdash (\varphi\wedge\psi) \rightarrow \psi \Leftrightarrow [\varphi\wedge\psi] \leq [\psi] \Leftrightarrow [\varphi]\wedge[\psi] \leq [\psi]$.

Se $[\sigma] \leq [\varphi]$ e $[\sigma] \leq [\psi] \Leftrightarrow \Gamma \vdash \sigma\rightarrow\varphi$ e $\Gamma \vdash \sigma\rightarrow\psi$. Pela Regra de Dedução (Inf) nos dois itens antecedentes, temos $\Gamma \vdash \sigma\rightarrow(\varphi\wedge\psi) \Leftrightarrow [\sigma] \leq [\varphi\wedge\psi] \Leftrightarrow [\sigma] \leq [\varphi]\wedge[\psi]$.

Com isso, $[\varphi]\wedge[\psi] = \inf \{[\varphi], [\psi]\}$.

Agora, pelo (Ax 04), $\vdash \varphi\to(\varphi\vee\psi) \Leftrightarrow [\varphi] \leq [\varphi\vee\psi] \Leftrightarrow [\varphi] \leq [\varphi]\vee[\psi]$.

Pela Proposição 4.2.3, $\vdash \psi\to(\varphi\vee\psi) \Leftrightarrow [\psi] \leq [\varphi\vee\psi] \Leftrightarrow [\psi] \leq [\varphi]\vee[\psi]$.

Se $[\varphi] \leq [\sigma]$ e $[\psi] \leq [\sigma] \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi\to\sigma$ e $\Gamma \vdash \psi\to\sigma$. Pela Regra de Dedução (Sup), temos que $\Gamma \vdash (\varphi\vee\psi)\to\sigma \Leftrightarrow [\varphi\vee\psi] \leq [\sigma] \Leftrightarrow [\varphi]\vee[\psi] \leq [\sigma]$.

Com isso, $[\varphi]\vee[\psi] = \sup \{[\varphi], [\psi]\}$.

Desse modo, de (i) e (ii), temos que a álgebra $\mathcal{A}_\Gamma$ ($\mathcal{L}$) é um reticulado.

(iii) O reticulado $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$ distributivo.

Pela Proposição 4.2.14, $\vdash (\varphi\vee(\psi\wedge\sigma))\leftrightarrow((\varphi\vee\psi)\wedge(\varphi\vee\sigma)) \Leftrightarrow [\varphi\vee(\psi\wedge\sigma)] = [(\varphi\vee\psi)\wedge \wedge(\varphi\vee\sigma)] \Leftrightarrow [\varphi]\vee[\psi\wedge\sigma] = [\varphi\vee\psi]\wedge[\varphi\vee\sigma] \Leftrightarrow [\varphi]\vee([\psi]\wedge[\sigma]) = ([\varphi]\vee[\psi])\wedge([\varphi]\vee[\sigma])$.

Pelo (Ax 06) $\vdash (\varphi\wedge(\psi\vee\sigma))\leftrightarrow((\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\sigma)) \Leftrightarrow [\varphi\wedge(\psi\vee\sigma)] = [(\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\sigma)] \Leftrightarrow [\varphi]\wedge[\psi\vee\sigma] = [\varphi\wedge\psi]\vee[\varphi\wedge\sigma] \Leftrightarrow [\varphi]\wedge([\psi]\vee[\sigma]) = ([\varphi]\wedge[\psi])\vee([\varphi]\wedge[\sigma])$.

Das informações anteriores, temos que o reticulado $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$ é distributivo.

(iv) O reticulado $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$ tem 0 e 1.

Pela Proposição 4.2.15, $\vdash \bot \to \varphi \Leftrightarrow 0 = [\bot] \leq [\varphi]$.

Pelo (Ax 07), $\vdash \varphi \to \top \Leftrightarrow [\varphi] \leq [\top] = 1$.

Assim, o reticulado $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$ tem 0 e 1.

(v) O reticulado $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$ tem uma involução.

Pelo (Ax 08) $\vdash \varphi \leftrightarrow (\neg\neg\varphi) \Leftrightarrow [\neg\neg\varphi] = [\varphi] \Leftrightarrow \neg[\neg\varphi] = [\varphi] \Leftrightarrow \neg\neg[\varphi] = [\varphi]$.

Pela Regra de Dedução (CPo), temos $\vdash \varphi\to\psi \Leftrightarrow [\varphi] \leq [\psi] \Leftrightarrow [\neg\psi] \leq [\neg\varphi] \Leftrightarrow \neg[\psi] \leq \neg[\varphi]$.

Das informações anteriores, temos que o reticulado $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$ tem uma involução.

(vi) A involução do reticulado $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$ é de De Morgan.

Pelo Corolário 4.2.3, $\vdash (\neg\varphi\wedge\neg\psi)\leftrightarrow\neg(\varphi\vee\psi) \Leftrightarrow [\neg\varphi\wedge\neg\psi] = [\neg(\varphi\vee\psi)] \Leftrightarrow [\neg\varphi]\wedge[\neg\psi] = \neg[\varphi\vee\psi] \Leftrightarrow \neg[\varphi]\wedge\neg[\psi] = \neg([\varphi]\vee[\psi])$.

Pelo Corolário 4.2.4, $\vdash (\neg\varphi\vee\neg\psi)\leftrightarrow\neg(\varphi\wedge\psi) \Leftrightarrow [\neg\varphi\vee\neg\psi] = [\neg(\varphi\wedge\psi)] \Leftrightarrow [\neg\varphi]\vee[\neg\psi] = \neg[\varphi\wedge\psi] \Leftrightarrow \neg[\varphi]\vee\neg[\psi] = \neg([\varphi]\wedge[\psi])$.

Assim, a involução do reticulado $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$ é de De Morgan.

Dos itens anteriores, temos que a álgebra $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$ é uma álgebra *c-fuzzy*. ■

Definição 4.3.13: A álgebra $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$ é um modelo cânonico de $\Gamma \subseteq$ For($\mathcal{L}$).

Proposição 4.3.4: Seja $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq$ For($\mathcal{L}$):

(i) $\Gamma \vdash \varphi$ se, e somente se, $[\varphi] = 1$ em $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$.

(ii) $\Gamma \vdash \neg\varphi$ (φ é refutável em Γ) se, e somente se, $[\varphi] = 0$ em $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$.

Demonstração:

(i) ($\Leftarrow$) Se $[\varphi] = 1$, então $[\varphi\rightarrow\varphi] \leq [\varphi]$. Pela Proposição 4.3.2, $\Gamma \vdash (\varphi\rightarrow\varphi)\rightarrow\varphi$. Como $\Gamma \vdash \varphi\rightarrow\varphi$, então, pela regra de Dedução (MP), temos que $\Gamma \vdash \varphi$.

($\Rightarrow$) Se $\Gamma \vdash \varphi$, então, pela Regra de Dedução ($\top$), $\Gamma \vdash \top\rightarrow\varphi$. A álgebra $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$ sempre tem o elemento 1. Logo, pela Proposição 4.3.2, temos $1 = [\top] \leq [\varphi]$ e, portanto, $[\varphi] = 1$.

(ii) Pelo item anterior e pela Definição 4.3.10, temos: $\Gamma \vdash \neg\varphi \Leftrightarrow [\neg\varphi] = 1 \Leftrightarrow \neg[\varphi] = 1 \Leftrightarrow [\varphi] = 0$. ■

Teorema 4.3.1: (Correção) Cada álgebra c-*fuzzy* é um modelo correto para a lógica $\mathcal{L}$.

Demonstração: Seja $\mathcal{A} = (A, \vartriangle, \triangledown, ', 0, 1, \rightarrow)$ uma álgebra c-*fuzzy* e seja $\boldsymbol{v}$: For($\mathcal{L}$)$\rightarrow\mathcal{A}$, uma valoração. Precisamos verificar que os axiomas (Ax 01) a (Ax 09) são válidos e as Regras de Dedução (MP), (SH), (Inf), (Sup), (Cpo), (Conj) e ($\top$) preservam a validade.

(Ax 01) $\boldsymbol{v}(\varphi\rightarrow\varphi) = 1$, pois $\boldsymbol{v}(\varphi) \leq \boldsymbol{v}(\varphi)$.

(Ax 02) $\boldsymbol{v}((\varphi\wedge\psi)\to\varphi) = 1$, pois $\boldsymbol{v}(\varphi\wedge\psi) = \boldsymbol{v}(\varphi)\vartriangle\boldsymbol{v}(\psi) \leq \boldsymbol{v}(\varphi)$.

(Ax 03) $\boldsymbol{v}((\varphi\wedge\psi)\to(\psi\wedge\varphi)) = 1$, pois $\boldsymbol{v}(\varphi\wedge\psi) = \boldsymbol{v}(\varphi)\vartriangle\boldsymbol{v}(\psi) = \boldsymbol{v}(\psi)\vartriangle\boldsymbol{v}(\varphi) = \boldsymbol{v}(\psi\wedge\varphi) \leq \boldsymbol{v}(\psi\wedge\varphi)$.

(Ax 04) $\boldsymbol{v}(\varphi\to(\varphi\vee\psi)) = 1$, pois $\boldsymbol{v}(\varphi) \leq \boldsymbol{v}(\varphi)\triangledown\boldsymbol{v}(\psi) = \boldsymbol{v}(\varphi\vee\psi)$.

(Ax 05)$\boldsymbol{v}((\varphi\vee\psi)\to(\psi\vee\varphi)) = 1$, pois $\boldsymbol{v}(\varphi\vee\psi) = \boldsymbol{v}(\varphi)\triangledown\boldsymbol{v}(\psi) = \boldsymbol{v}(\psi)\triangledown\boldsymbol{v}(\varphi) = \boldsymbol{v}(\psi\vee\varphi) \leq \boldsymbol{v}(\psi\vee\varphi)$.

(Ax 06) $\boldsymbol{v}((\varphi\wedge(\psi\vee\sigma))\leftrightarrow((\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\sigma))) = 1$, pois $\boldsymbol{v}(\varphi\wedge(\psi\vee\sigma)) = \boldsymbol{v}(\varphi)\vartriangle\boldsymbol{v}(\psi\vee\sigma) = \boldsymbol{v}(\varphi)\vartriangle(\boldsymbol{v}(\psi)\triangledown\boldsymbol{v}(\psi)) = (\boldsymbol{v}(\varphi)\vartriangle\boldsymbol{v}(\psi))\triangledown(\boldsymbol{v}(\varphi)\vartriangle\boldsymbol{v}(\sigma)) = \boldsymbol{v}(\varphi\wedge\psi)\ \triangledown\boldsymbol{v}(\varphi\wedge\sigma) = \boldsymbol{v}((\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\sigma))$.

(Ax 07) $\boldsymbol{v}(\varphi\to\top) = 1$, pois$\boldsymbol{v}(\varphi) \leq 1 = \boldsymbol{v}(\top)$.

(Ax 08) $\boldsymbol{v}(\varphi\leftrightarrow(\neg\neg\varphi)) = 1$, pois $\boldsymbol{v}(\neg\neg\varphi) = (\boldsymbol{v}(\neg\varphi))' = ((\boldsymbol{v}(\varphi))')' = \boldsymbol{v}(\varphi)$.

(Ax 09)$\boldsymbol{v}((\neg\varphi\wedge\neg\psi)\to\neg(\varphi\vee\psi)) = 1$, pois $\boldsymbol{v}(\neg\varphi\wedge\neg\psi) = (\boldsymbol{v}(\neg\varphi)\vartriangle\boldsymbol{v}(\neg\psi)) = (\boldsymbol{v}(\varphi))'\vartriangle(\boldsymbol{v}(\psi))' = (\boldsymbol{v}(\varphi)\triangledown\boldsymbol{v}(\psi))' = \boldsymbol{v}(\neg(\varphi\vee\psi)) \leq \boldsymbol{v}(\neg(\varphi\vee\psi))$.

(MP) Se $\boldsymbol{v}(\varphi) = 1$ e $\boldsymbol{v}(\varphi\to\psi) = 1$, então $\boldsymbol{v}(\varphi) \leq \boldsymbol{v}(\psi)$ e, portanto, $\boldsymbol{v}(\psi) = 1$.

(SH) Se $\boldsymbol{v}(\varphi\to\psi) = 1$ e $\boldsymbol{v}(\psi\to\sigma) = 1$, então $\boldsymbol{v}(\varphi) \leq \boldsymbol{v}(\psi)$ e $\boldsymbol{v}(\psi) \leq \boldsymbol{v}(\sigma)$. Logo, $\boldsymbol{v}(\varphi) \leq \boldsymbol{v}(\sigma)$ e, portanto, $\boldsymbol{v}(\varphi\to\sigma) = 1$.

(Inf) Se $\boldsymbol{v}(\varphi\to\psi) = 1$ e $\boldsymbol{v}(\varphi\to\sigma) = 1$, então $\boldsymbol{v}(\varphi) \leq \boldsymbol{v}(\psi)$ e $\boldsymbol{v}(\varphi) \leq \boldsymbol{v}(\sigma)$. Logo, $\boldsymbol{v}(\varphi) \leq \boldsymbol{v}(\psi)\vartriangle\boldsymbol{v}(\sigma) = \boldsymbol{v}(\psi\wedge\sigma)$ e, portanto, $\boldsymbol{v}(\varphi\to(\psi\wedge\sigma)) = 1$.

(Sup) Se $\boldsymbol{v}(\varphi\to\sigma) = 1$ e $\boldsymbol{v}(\psi\to\sigma) = 1$, então $\boldsymbol{v}(\varphi) \leq \boldsymbol{v}(\sigma)$ e $\boldsymbol{v}(\psi) \leq \boldsymbol{v}(\sigma)$. Logo, $\boldsymbol{v}(\varphi\vee\psi) = \boldsymbol{v}(\varphi)\triangledown\boldsymbol{v}(\psi) \leq \boldsymbol{v}(\sigma)$ e, portanto, $\boldsymbol{v}((\varphi\vee\psi))\to\sigma) = 1$.

(CPo) Se $\boldsymbol{v}(\varphi\to\psi) = 1$, então $\boldsymbol{v}(\varphi) \leq \boldsymbol{v}(\psi)$. Daí, $\boldsymbol{v}(\neg\psi) = (\boldsymbol{v}(\psi))' \leq (\boldsymbol{v}(\varphi))' = \boldsymbol{v}(\neg\varphi)$ e, portanto, $\boldsymbol{v}(\neg\psi\to\neg\varphi) = 1$.

(Conj) Se $\boldsymbol{v}(\varphi) = 1$ e $\boldsymbol{v}(\psi) = 1$, então $\boldsymbol{v}(\varphi)\vartriangle\boldsymbol{v}(\psi) = 1$. Logo, $\boldsymbol{v}(\varphi\wedge\psi) = 1$.

($\top$) Se $\boldsymbol{v}(\varphi) = 1$, então $\boldsymbol{v}(\top\to\varphi) = 1$. ■

Proposição 4.3.5: A lógica $\mathcal{L}$ é consistente.

Demonstração: Suponhamos que $\mathcal{L}$ não é consistente. Então, existe $\varphi \in For(\mathcal{L})$ tal que $\vdash \varphi$ e $\vdash \neg\varphi$. Pelo Teorema da Correção, φ e $\neg\varphi$ são fórmulas válidas. Seja $\boldsymbol{v}$ uma valoração em uma álgebra c-*fuzzy* $\mathcal{A}$. Como φ e $\neg\varphi$ são válidas, então $\boldsymbol{v}(\neg\varphi) = 1$ e $\boldsymbol{v}(\varphi) = 1$. De $\boldsymbol{v}(\neg\varphi) = 1$ tem-se que $\boldsymbol{v}(\varphi) = 0$, o que é uma contradição. ■

Lema 4.3.1: Para toda fórmula $\varphi \in For(\mathcal{L})$, as condições seguintes são equivalentes:

(i) $\vdash \varphi$;

(ii) $\vDash \varphi$;

(iii) φ é válida em toda álgebra *c-fuzzy* de conjuntos;

(iv) φ é válida no modelo canônico $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$, isto é, $\boldsymbol{v}_0(\varphi) = 1$.

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Segue do Teorema da Correção.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Se a fórmula φ é *válida*, $\vDash \varphi$, então ela é válida em toda álgebra c-*fuzzy.* E, em particular, φ é válida em toda álgebra *c-fuzzy* de conjuntos.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Pela Proposição 4.3.3, temos que $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$ é uma álgebra *c-fuzzy* de conjuntos. Logo, pelo Teorema 4.1.1, $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$ é isomorfa a uma álgebra c-*fuzzy* de conjuntos $\mathcal{A}^*$. De (iii) segue que se φ é válida em $\mathcal{A}^*$, então φ é válida em $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$, ou seja, $\boldsymbol{v}_0(\varphi) = 1$.

(iv) $\Rightarrow$ (v): Se $\varphi \in For(\mathcal{L})$ e $\nvdash \varphi$ de $\mathcal{L}$, então, pela Proposição 4.3.4, $[\varphi]$ não coincide com a unidade de $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$ e, assim, $\boldsymbol{v}_0(\varphi) \neq 1$. ■

Teorema 4.3.2: (Completude) Para toda fórmula $\varphi \in For(\mathcal{L})$, se φ é uma fórmula válida, então φ é derivável em $\mathcal{L}$.

Demonstração: Segue pelo Lema 4.3.1. ■

Foram demonstrados os Teoremas da Correção e da Completude fracas. A seguir, demonstraremos a Adequação (Correção e Completude) fortes.

Lema 4.3.2: Seja $\Gamma \subseteq$ For($\mathcal{L}$). Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \vDash \varphi$.

Demonstração: Seja $\boldsymbol{v}$: For($\mathcal{L}$)$\rightarrow\mathcal{A}$ um modelo para Γ. Como $\Gamma \vdash \varphi$, φ pode ser um axioma de $\mathcal{L}$, ou uma fórmula obtida por meio de regras de dedução de $\mathcal{L}$, ou uma fórmula de Γ. Pelo Teorema da Correção, os axiomas de $\mathcal{L}$ são válidos e as regras de $\mathcal{L}$ preservam a validade. Além disso, como para toda fórmula $\psi \in \Gamma, \boldsymbol{v}_{\mathcal{A}}(\psi) = 1$, então $\boldsymbol{v}_{\mathcal{A}}(\varphi) = 1$. Logo, $\boldsymbol{v}_{\mathcal{A}}$ é um modelo para φ, isto é, $\boldsymbol{v}_{\mathcal{A}}(\varphi) = 1$. ■

Proposição 4.3.6: Seja $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq$ For($\mathcal{L}$) e $\mathcal{B}$ uma álgebra c-*fuzzy*. Se existe um modelo $\boldsymbol{v}_0$: For ($\mathcal{L}$) $\rightarrow\mathcal{B}$ para Γ, então Γ é consistente.

Demonstração: Suponhamos que Γ não é consistente. Então, existe φ tal que $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$ e, além disso, $\boldsymbol{v}_{\mathcal{B}}(\varphi) = 1$ e $\boldsymbol{v}_{\mathcal{B}}(\neg\varphi) = 1 \Rightarrow (\boldsymbol{v}_{\mathcal{B}}(\varphi))' = 1 \Rightarrow \boldsymbol{v}_{\mathcal{B}}(\varphi) = 0$, temos uma contradição. Portanto, Γ é consistente. ■

Definição 4.3.14: Um modelo $\boldsymbol{v}_0$: For ($\mathcal{L}$) $\rightarrow\mathcal{B}$ é fortemente adequado para Γ quando: $\Gamma \vdash \varphi$ se, e somente se, $\Gamma \vDash_{\mathcal{B}} \varphi$.

Lema 4.3.3: Se $\Gamma \subseteq$ For ($\mathcal{L}$) é consistente, então a valoração canônica é um modelo fortemente adequado para Γ.

Demonstração: Considerando a valoração canônica $\boldsymbol{v}_0$: For($\mathcal{L}$)$\rightarrow\mathcal{A}_{\Gamma}(\mathcal{L})$, $\boldsymbol{v}_0(\varphi) = [\varphi]$, pela Proposição 4.3.4 (i), $\boldsymbol{v}_0(\varphi) = 1$ se, e somente se, $\Gamma \vdash \varphi$. Consequentemente, a valoração canônica $\boldsymbol{v}_0$ é um modelo adequado para Γ. ■

Lema 4.3.4: Para todo conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq$ For($\mathcal{L}$), as seguintes condições são equivalentes:

(i) Γ é consistente;

(ii) existe um modelo fortemente adequado para Γ;

(iii) existe um modelo fortemente adequado para Γ em uma álgebra c-*fuzzy* que é uma álgebra *c-fuzzy* de conjuntos $\mathcal{A}$*****.

(iv) existe um modelo para Γ.

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Segue do Lema 4.3.3.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Temos, pela Proposição 4.3.3, que $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$ é uma álgebra c-*fuzzy* e, pelo Teorema 4.1.1, toda álgebra c-*fuzzy* é isomorfa a uma álgebra c-*fuzzy* de conjuntos $\mathcal{A}$, então, o resultado é imeditato.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): O resultado é imediato.

(iv) $\Rightarrow$ (v): Segue pela Proposição 4.3.6. ■

Teorema 4.3.3: (Adequação forte) Seja $\Gamma \subseteq$ For($\mathcal{L}$). Se Γ é consistente, então as afirmações seguintes são equivalentes:

(i) $\Gamma \vdash \varphi$;

(ii) $\Gamma \vDash \varphi$;

(iii) Todo modelo de Γ em uma álgebra c-*fuzzy* de conjuntos $\mathcal{A}$***** é um modelo para φ.

(iv) $\boldsymbol{v}_0(\varphi) = 1$, para toda valoração canônica $\boldsymbol{v}_0$ no modelo canônico $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$.

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Segue do Lema 4.3.2.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Se $\Gamma \vDash \varphi$, então todo modelo para Γ também é modelo para φ, em particular, todo modelo de Γ em uma álgebra c-*fuzzy* de conjuntos $\mathcal{A}$*****é um modelo para φ.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Por hipótese, Γ é consistente. Logo, pelo Lema 4.3.4, existe um modelo fortemente adequado para Γ em uma álgebra c-*fuzzy* que é uma álgebra c-*fuzzy* de conjuntos $\mathcal{A}$*****. Como, pela Proposição 4.3.3, $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$ é uma álgebra c-*fuzzy* e, pelo Teorema 4.1.1, toda álgebra c-*fuzzy* é isomorfa a uma álgebra *c-fuzzy* de conjuntos $\mathcal{A}$*****, então, para uma valoração canônica $\boldsymbol{v}_0$ no modelo canônico $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L})$, segue que $\boldsymbol{v}_0(\varphi) = 1$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Como, por hipótese, Γ é consistente, o resultado segue pelos Lemas 4.3.3 e

4.3.4. ■

Neste capítulo apresentamos a Formalização proposicional de uma álgebra c-*fuzzy* no estilo hilbertiano, isto é, pela introdução de alguns axiomas (ou esquemas de axiomas) acrescidos de algumas regras de dedução, como é feito usualmente dentro de um ambiente matemático.

Considerações finais

Como vimos, ao longo deste trabalho, Aristóteles foi um pioneiro da Lógica, o primeiro a apresentar, de forma sistemática, resultados de Lógica desenvolvidos em seu tempo, e foi o responsável por estabelecer a estrutura formal do pensamento dedutivo, com a identificação de um conjunto de regras de dedução para que conclusões pudessem ser logicamente válidas. O emprego da Lógica, segundo Aristóteles, levou à uma linha de raciocínio lógico baseado em premissas e conclusões obtidas dedutivamente. Para a lógica aristotélica, os enunciados lógicos portam valores verdade e são sempre verdadeiros ou falsos.

Percebemos que, no cotidiano, muitas experiências humanas não podem ser classificadas simplesmente como verdadeiras ou falsas, certas ou erradas, sim ou não. De um modo geral, fenômenos quantitativos são bem interpretados por variáveis numéricas, que podem ser tratadas dedutivamente, mas as variáveis numéricas nem sempre são apropriadas para representar fenômenos qualitativos e, como esses são bastante frequentes no nosso dia a dia, faz-se importante uma alternativa para a formalização dessas situações.

Dessa maneira, fizeram-se importantes as contribuições ao Mundo *Fuzzy,* as quais nos pusemos a relatar sobre como foram desenvolvidas, em qual época, suas vantagens, bem como entender a relação existente entre os tópicos *fuzzy* e as abordagens usuais. Estende-se essa análise para a denominada lógica *fuzzy*, com destaque para as variáveis linguísticas apresentadas por Zadeh, que se mostraram, segundo ele e seguidores, mais eficientes para a caracterização de fenômenos muito imprecisos ou complexos.

A teoria de conjuntos *fuzzy,* apresentada por Zadeh, teve como objetivo fornecer uma ferramenta matemática para tratar de informações de caráter vago ou impreciso. Como afirma Takács (2004), o cérebro humano possui determinadas características especiais que permitem aprender a raciocinar mesmo em ambientes vagos ou imprecisos. Aí está a importância de tal teoria desenvolvida pelos conjuntos *fuzzy*. A lógica *fuzzy* guarda semelhança com com os raciocínios dedutivos, todavia se diferencia dela pela obtenção da conclusão vaga e imprecisa, deduzida de uma coleção de premissas, que também podem ser imprecisas, e são representadas pelos conjuntos *fuzzy*. Com isso, a lógica *fuzzy,* embora construída de conceitos estabelecidos na lógica clássica, torna-se instrumento de inferência que lida com condições consideradas parcialmente conhecidas e permite, dessa maneira, os denominados raciocínios aproximados, ou seja, podemos reconhecer a lógica *fuzzy* como uma maneira de representar raciocínios aproximados.

Os operadores lógicos, dentro da lógica *fuzzy*, têm sido definidos à semelhança dos usuais e, alguns outros, foram introduzidos ao longo dos anos. Dessa forma, observamos que a lógica *fuzzy* não deve ser vista como oposta à lógica clássica, mas como um complemento.

Em nosso estudo, observamos que a teoria *fuzzy* e o professor Zadeh sofreram preconceitos, e a aceitação de tal teoria não ocorreu de maneira imediata. Hoje, a lógica *fuzzy* (e teorias *fuzzy*) é (são) utilizada(s) com grande sucesso na tecnologia de ponta.

Em outro momento, após destacarmos um pouco a semântica dos quantificadores na lógica de primeira ordem, percebemos que Mostowski (1957) identificou quantificadores que não podem ser definidos por meio dos quantificadores universal e existencial. Nessa vertente, o conceito de quantificadores *fuzzy* foi introduzido, pela primeira vez, através de estudos do professor Zadeh, e elaborado posteriormente por outros pensadores. Um conceito que desempenha papel significativo na manipulação destes quantificadores é a cardinalidade de um conjunto *fuzzy*. Mais especificamente, um quantificador *fuzzy*, como observamos, foi identificado como uma caracterização *fuzzy* da cardinalidade absoluta ou relativa de uma coleção de conjuntos *fuzzy*. Percebemos que os quantificadores *fuzzy* foram estudados por vários autores, com classificações semelhantes aos pressupostos por Zadeh, mas variaram muito na interpretação e nos esquemas de raciocínio. Pudemos observar, ainda, que a definição de quantificador *fuzzy* depende muito do objeto ou contexto em que é utilizado e, da mesma forma como acontece nos quantificadores da lógica clássica, não há uma definição geral e formal para os quantificadores *fuzzy*.

Constatamos a existência de poucos textos produzidos em nosso país sobre a teoria *fuzzy*, principalmente quanto à estrutura estudada do ponto de vista algébrico. Com isso, nosso trabalho procurou contribuir para a organização e sistematização da teoria algébrica dos conjuntos *fuzzy*, teoria essa apresentada de maneira semelhante à teoria dos conjuntos clássicos usuais, mas naturalmente com características distintas e originais.

Nossa álgebra desenvolvida para os conjuntos *fuzzy*, aqui denominada de álgebra c-

fuzzy, com base na teoria de reticulados, nos permitiu observar que, embora essa estrutura algébrica seja um reticulado distributivo, este reticulado não é, em geral, complementado. Ele se aproxima de uma álgebra de Boole, mas não é uma álgebra Booleana. Podemos, assim dizer, que a álgebra c-*fuzzy*, seria “quase booleana”.

Após definirmos a álgebra c-*fuzzy*, apresentamos a sua formalização proposicional, através da introdução de axiomas e regras de dedução. Ao compararmos nosso estudo com outras obras que apresentam uma determinada lógica *fuzzy,* a nossa particular lógica *fuzzy* diferencia-se, por exemplo, da conhecida *BL Logic* (Lógica Básica *Fuzzy*) de Peter Hájeck (1998). É diferente tanto na escolha dos axiomas, quanto nas regras de dedução, e fundamentalmente no conjunto de teoremas. Isso, acreditamos, é um diferencial do trabalho aqui apresentado.

Em suma, entendemos que todo o conteúdo apresentado ao longo desse trabalho, quanto a algebrização e a formalização proposicional não pode ser visto como a única maneira de se desenvolver a teoria *fuzzy*, tampouco isso é o que estamos aqui defendendo. Acreditamos, outrossim, que na literatura *fuzzy*, há outras formas de se apresentar a álgebra e a formalização proposicional dos conjuntos *fuzzy.* O que defendemos aqui, é uma maneira, dentre outras existentes, para a algebrização e a formalização das suas propriedades principais numa linguagem lógica.

Como perspectiva para trabalhos posteriores, vislumbramos a comparação da nossa lógica *fuzzy* com outras introduzidas para serem a contraparte lógica dos conjuntos *fuzzy*. Refinar o nosso sistema lógico e dispô-lo em outros ambientes dedutivos, como dedução natura, tablôs e sequentes. Uma empreitada relevante seria uma maior introspecção nos quantificadores *fuzzy*, de modo a cotejá-los com os desenvolvimentos quantificacionais elaborados no grupo de estudos “Sistemas Adaptativos, Lógica e Computação Inteligente”, SALCI, da UNESP, campus de Bauru.

Referências Bibliográficas

BARWISE, J.; COOPER, R. *Generalized quantifiers and natural language*. Linguistics and Philosophy, v. 4, 1981. p. 159-219.

BETH, E. W. *The foundations of mathematics*. Amsterdam: North Holland, 1959.

BOJADZIEV, G.; BOJADZIEV, M. *Fuzzy sets, Fuzzy Logic, applications*. Advances in fuzzy systems, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, v. 5, 1995.

BOSNJAK,I.; MADARÁSZ,R.; VOJVODI´C, G. Algebras of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 160, 2009. p. 2979–2988.

CARNIELLI, W. A.; EPSTEIN, R. L. *Computabilidade, funções computáveis, Lógica e os fundamentos da Matemática*. São Paulo: Editora Unesp, 2006.

CHARLMERS, A. F. O *que é ciência, afinal?* São Paulo: Brasiliense, 1993.

CÍNTULA, P.; HAJEK, P. *Complexity issues in axiomatic extensions of Lukasiewicz logic;* J. Log. Comput, v. 12, 2009. p. 159-219.

D'OTTAVIANO, I. M. L.; FEITOSA, H. A. *História da lógica e o surgimento das lógicas não clássicas*. Campinas: Unicamp. Centro de lógica, Epistemologia e História da Ciência – CLE, 2003. Disponível em: <http://www.cle.unicamp.br>. Acesso em 02 de dezembro de 2011.

ESTEVA, F.; QUINTANILLA, R. On Symmetric Algebras of Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems,* v. 24, 1987. p. 159-219.

FEITOSA, H. A.; *Princípios Fundamentais da Teoria Fuzzy*. Tese de Mestrado (Mestrado em Fundamentos da Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1992.

FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C.; GRÁCIO, M. C. C. A. *Sobre os quantificadores generaliza-*

dos. Campinas: Unicamp. Centro de lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2009. Disponível em <http://www.cle.unicamp.br>. Acesso em 05 janeiro 2012.

FEITOSA, H. A., PAULOVICH, L. *Um prelúdio à lógica*. São Paulo: Editora Unesp, 2005.

FINGER, M.; MELO, A. C. V.; SILVA, F. S. C. *Lógica para computação*. São Paulo: Thomson Learning, 2006.

FRÁPOLLI SANZ, M. J. Cuantificadores. In: FRÁPOLLI SANZ, M. J. (Coord.). *Filosofía de la lógica*. Madrid: Tecnos, 2007. p. 159-219.

GALINDO, J.; CARRASCO, R. A.; ALMAGRO, A.M. *Fuzzy Quantifiers with and without Arguments for Databases: Definition, Implementation and Application to Fuzzy Dependencies*, 2008. Texto apresentado no *PROCEEDINGS IPMU '08* . Disponível em <http://www.lcc.uma.es/>. Acesso em 05 de janeiro de 2012.

HAACK, S. *Filosofia das lógicas*. Tradução de C. A. Mortari e L. H. A. Dutra. São Paulo: Editora UNESP. Título original: Philosophy of logics, 2002.

HÁJEK, P. *Metamathematics of fuzzy logic*. Kluwer Academic Publishers, 1998.

HÁJEK, P. On vagueness, truth values and fuzzy logics. *Studia* Logica, v. 91,2009. p. 367-382.

HAMBURG, P. Fuzzy Sets and De Morgan Algebras. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 27, 1988. p. 21-29.

HEGENBERG, L.; ANDRADE E SILVA, M. F. *Novo Dicionário de Lógica*. Rio de Janeiro: Pós-Moderno, 2005.

HOLCAPEK, M. *Cardinalities of Fuzzy Sets and Fuzzy: Quantifiers over Residuated Lattices.* Tese doutorado. Tese doutorado, 2005. Disponível em < http://irafm.osu.cz/>. Acessado em 23 de janeiro de 2012.

LIU, Y.; KERRE, E.E. An overview of fuzzy quantifiers. (I). Interpretations. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 95, 1998.p. 1-21.

LOEBNER, S. Natural language and generalized quantifiers theory. In: GÄRDENFORS, P. (Ed.). *Generalized quantifiers*. Holland: D. Reidel Publishing Company, 1987. p. 181-201.

MENDELSON, E. *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton: D. Van Nostrand, 1964.

MIRAGLIA, F. *Cálculo proposicional: uma interação da álgebra e da lógica*. Campinas: UNICAMP/CLE. (Coleção CLE, v. 1), 1987.

MORTARI, C. A. I*ntrodução à Lógica*. São Paulo: Editora Unesp, 2001.

MOSTOWSKI, A. On a generalization of quantifiers. *Fundamenta Mathematicæ*, v. 44, 1957. p. 12-36.

MUKAIDONO, M. *Fuzzy Logic for beginners*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2001.

NARANJO, L. C; *Introducción a la Lógica.* Cartalo: Libro Universitario Regional, 1ª edição*,* Costa Rica, 2002.

NICOLETTI, M. C. SANTOS, F. O. *Learning in Fuzzy Domains*. Apresentação no 4o. SBAI – Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, São Paulo,BRASIL, 1999.

NOVÁK, V. A formal theory of intermediate quantifiers. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 159, 2008. p. 1229 – 1246.

RASIOWA, H. *An Algebraic Approach to non-classsical logics.* North-Hoolland publishing company – Amsterdam-London, American Elsevier Publishing Company, INC – New York. 1974.

RODRIGUES, A. P. *Há uma definição absoluta de quantificadores?.* Kínesis, v. 3, 2011. p. 376-392.

ROGERS, R. *Mathematical logic and formalized theories: A survey of basic concepts and results*. Amsterdam: North-Holland, 1971.

SALMON, W. C. *Lógica*. Tradução de Álvaro Cabral. 3ª edição*,* Rio de Janeiro: Prentice-Hall do

Brasil, 1993.

SESELJA, B.; TEPAVIEVIC, A. Generalization of fuzzy algebras and congruences, *Fuzzy Sets and Systems*, v. 65,1994. p. 85-94.

SHAW, I.S.;SIMÕES, M.G. *Controle e modelagem fuzzy.* São Paulo: Edgard Blücher: FAPESP, 1999.

SMULLYAN, R. M. *First-Order Logic*. New York: Springer-Verlag / Dover Publication, 1968.

SWAMY, U.M.; MURTHY, M.K. Representation of fuzzy Boolean algebras. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 48, 1992. p. 231 – 237.

TAKÁCS, M. *Approximate Reasoning in Fuzzy Systems Based on Pseudo-analysis and Uninorm Residuum.* Edited by Bernard de Baets, János Fodor: Academia Press Gent, 2004.

TARSKI, A. *Acerca do conceito de conseqüência lógica*. Tradução de W. C. Sanz. Princípios: revista de filosofia, UFRN, Natal, v. 8, n. 10, 2001. p. 220-233.

ZADEH, L. A. *Fuzzy sets and applications*. John Wiley & Sons, USA, 1987.

ZADEH, L. A. A Theory of approximate reasoning, In Hayes, J., and editors, *Mashine Intelligence*, v.9, Halstead Press, New York, 1979. pp. 149-194.

WESTERSTÅHL, D. Generalized quantifiers. S*tanford Encyclopedia of Philophy*, 2005. Disponível em: <http://plato.stanford.edu/entries/generalized-quantifiers/>. Acesso em: 11 jan. 2012.

WYGRALAK, M. *Cardinalities of fuzzy sets*. Springer – Verlag Berlin Heidelberg, 2003.

YAGER, R. R. Connectives and quantifiers in fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 40,1991. p. 39-75.

Apêndice

A1. Relações

Definição A1.1: Dados dois conjuntos A e B, *o produto cartesiano de A por B* é a coleção de todos os pares ordenados (x, y), com $x \in A$ e $y \in B$ e denotado por:

$$A \times B =_{df} \{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Definição A1.2: Uma *relação binária* do conjunto A no conjunto B é um subconjunto R do produto cartesiano $A \times B$. Quando A = B dizemos que R é *uma relação em* A ou uma *relação sobre* A.

Assim, uma relação binária é um conjunto de pares ordenados.

Seja R uma relação binária.

Definição A1.3: O *domínio* de $R \subseteq A \times B$, denotado por Dom(R), é dado por:

$$\text{Dom}(R) = \{x \in A : (\exists\ y \in B)\ (x, y) \in R\}.$$

Definição A1.4: A *imagem* de $R \subseteq A \times B$, indicada por Im(R), é definida por:

$$\text{Im}(R) = \{y \in B : (\exists\ x \in A)\ (x, y) \in R\}.$$

Definição A1.5: O *campo* de $R \subseteq A \times B$, denotado por Camp(R), é definido por:

$$\text{Camp}(R) = \{z \in A \cup B : (\exists\ t)\ ((z, t) \in R \vee (t, z) \in R)\}.$$

Definição A1.6: Seja A um conjunto não vazio e R uma relação binária em A. Então, R é:

(i) *reflexiva*: quando, para qualquer $x \in A$, xRx;

(ii) *simétrica*: quando, para quaisquer x, y $\in$ A, se xRy, então yRx;

(iii) *transitiva*: quando, para quaisquer x, y, z $\in$ A, se xRy e yRz, então xRz;

(iv) *anti-simétrica*: quando, para quaisquer x, y $\in$ A, se xRy e yRx, então x = y.

Definição A1.7: Seja A um conjunto não vazio. Uma relação binária R em A é uma *relação de equivalência* em A se ela é reflexiva, simétrica e transitiva.

Definição A1.8: Seja A um conjunto não vazio. Dizemos que uma relação binária $\leq$ em A é uma *ordem* (*ordem parcial*) em A, se é reflexiva, anti-simétrica e transitiva, isto é, para todos x, y, z $\in$ A:

(i) $x \leq x$ (reflexiva);

(ii) se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$ (anti-simétrica);

(iii) se $x \leq y$ e $x \leq z$, então $x \leq z$ (transitiva).

Neste caso, dizemos que o par (A, $\leq$) é uma estrutura de ordem e o conjunto A é ordenado por R.

Observemos que a inclusão de conjuntos é uma ordem no conjunto de todos os subconjuntos de um dado conjunto.

Definição A1.9: Dizemos que uma ordem $\leq$ em um conjunto A é uma *ordem total* quando para todo par de elementos x, y $\in$ A, tem-se que $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Neste caso, temos uma estrutura de ordem total (A, $\leq$) e dizemos que A é um conjunto totalmente ordenado por $\leq$.

Definição A1.10: Sejam (E, $\leq$) uma ordem parcial e $\emptyset \neq A \subseteq E$. Um elemento s de E é um *limitante superior* de A quando: $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \leq s)$. Um elemento i de E é um *limitante infe-*

rior de A quando: $(\forall x)\ (x \in A \rightarrow i \leq x)$.

Definição A1.11: Sejam $(E, \leq)$ uma ordem parcial e $\varnothing \neq A \subseteq E$. O *supremo* de A (sup(A)), caso exista, é o menor dos limitantes superiores de A. O *ínfimo* de A (inf(A)), caso exista, é o maior dos limitantes inferiores de A.

Segue da definição que todo máximo (mínimo, respectivamente) é um limitante superior (limitante inferior, respectivamente).

A2. Reticulados

Definição A2.1: Seja R um conjunto não vazio com duas operações binárias $\wedge$ (conjunção) e $\vee$ (disjunção). Dizemos que a estrutura algébrica **R** = $(R, \wedge, \vee)$ é um *reticulado* se, para todos $x, y, z \in R$, valem:

R1: $x\wedge y = y\wedge x$, $x\vee y = y\vee x$ (comutativa);

R2: $x\wedge(y\wedge z) = (x\wedge y)\wedge z$, $x\vee(y\vee z) = (x\vee y)\vee z$ (associativa);

R3: $(x\wedge y)\vee y = y$, $(x\vee y)\wedge y = y$ (absorção).

Proposição A2.1: Se **R** = $(R, \wedge, \vee)$ é um reticulado, então para todos $x, y \in R$, temos:

(i) $x\wedge x = x = x\vee x$ (idempotência);

(ii) $x\wedge y = x \Leftrightarrow x\vee y = y$ (ordem).

Demonstração: Vamos utilizar a definição anterior para a demonstração.

(i) Por R3, temos que $x \vee x = [(x\vee x)\wedge x]\vee x = x$. Da mesma maneira, por R3, temos que $x \wedge x = [(x\wedge x)\vee x]\wedge x = x$.

(ii) $(\Rightarrow)$ Se $x\wedge y = x$, então $x\vee y = (x\wedge y) \vee y = y$, por R3.

$(\Leftarrow)$ Se $x\vee y = y$, então $x\wedge y = x \wedge (x\vee y) = x\wedge(x\vee y) = x$, por R1 e R3. ■

Definição A2.2: Se **R** = (R, $\wedge,\vee$) é um reticulado e x, y $\in$ R, definimos x $\leq$ y (x menor ou igual a y) por: x $\leq$ y $\Leftrightarrow$ x$\wedge$y = x.

Pela Proposição A2.1, temos que x $\leq$ y $\Leftrightarrow$ x$\wedge$y = x $\Leftrightarrow$ x$\vee$y = y.

Proposição A2.2: A relação $\leq$ em um reticulado **R** = (R, $\wedge,\vee$) é uma ordem parcial, ou seja, para todos x, y, z $\in$ R:

(i) x $\leq$ x (reflexiva);

(ii) x $\leq$ y e y $\leq$ x $\Rightarrow$x = y (anti-simétrica);

(iii) x $\leq$ y e y $\leq$ z $\Rightarrow$x $\leq$ z (transitiva).

Demonstração: (i) Pela Proposição 1 (i), x$\wedge$x = x. Logo, pela Definição A2.2, x $\leq$ x.

(ii) Se x $\leq$ y e y $\leq$ x, então, pela Definição A2.2, x$\wedge$y = x e y$\wedge$x = y. De R1, x = x$\wedge$y = y$\wedge$x = y. Logo, x = y.

(iii) Se x $\leq$ y e y $\leq$ z, então, pela Definição A2.2, temos que x$\wedge$y = x e y$\wedge$z= y. Assim, por R2, x$\wedge$z = (x$\wedge$y)$\wedge$ z = x$\wedge$(y$\wedge$z) = x$\wedge$y = x. Assim, também pela Definição A2.2, x $\leq$ z. ■

Proposição A2.3: A relação $\leq$ em um reticulado **R** = (R, $\wedge,\vee$) é uma ordem parcial e possui a seguinte propriedade, $\forall$x, y, z, t $\in$ R:

x $\leq$ y e z $\leq$ t $\Rightarrow$ x$\wedge$z $\leq$ y$\wedge$t e x$\vee$z $\leq$ y$\vee$t.

Demonstração: Se x $\leq$ y e z $\leq$ t, então, de R1, R2 e pela Definição A2.2, temos que (x$\wedge$z)$\wedge$ $\wedge$(y$\wedge$t) = (x$\wedge$y)$\wedge$(z$\wedge$t) = x$\wedge$z e (x$\vee$z)$\vee$(y$\vee$t) = (x$\vee$y)$\vee$(z$\vee$t) = y$\vee$t. Portanto, x$\wedge$z $\leq$ y$\wedge$t e x$\vee$z $\leq$ y$\vee$t. ■

Proposição A2.4: Se **R** = (R, $\wedge,\vee$) é um reticulado, então as propriedades que seguem são válidas, para todo x, y, z, t $\in$ R.

(i) $x \leq x \vee y$ e $y \leq x \vee y$;

(ii) $x \wedge y \leq x$ e $x \wedge y \leq y$;

(iii) $x \leq z$ e $y \leq z \Rightarrow x \vee y \leq z$;

(iv) $z \leq x$ e $z \leq y \Rightarrow z \leq x \wedge y$;

(v) $x \leq y \Rightarrow x \wedge z \leq y \wedge z$ e $x \vee z \leq y \vee z$.

Demonstração: (i) De R1 e R3, temos que $x \wedge (x \vee y) = (x \vee y) \wedge x = (y \vee x) \wedge x = x$ e $y \wedge (x \vee y) = (x \vee y) \wedge y = y$. Logo, pela Definição A2.2, temos que $x \leq x \vee y$ e $y \leq x \vee y$.

(ii) De R1 e R3, temos que $(x \wedge y) \vee x = (y \wedge x) \vee x = x$ e $(x \wedge y) \vee y = y$. Pela Definição A2.2, temos então, que $x \wedge y \leq x$ e $x \wedge y \leq y$.

(iii) Se $x \leq z$ e $y \leq z$, então de R1, R2, Definição A2.2 e pela Proposição A2.1, temos que $(x \vee y) \vee z = (x \vee y) \vee (x \vee z) = (x \vee x) \vee (y \vee z) = x \vee z = z$. Logo, temos $x \vee y \leq z$.

(iv) Se $z \leq x$ e $z \leq y$, então de R1, R2, Definição A2.2 e pela Proposição A2.1, temos que $z \wedge (x \wedge y) = (z \wedge x) \wedge (x \wedge y) = (z \wedge y) \wedge (x \wedge x) = z \wedge x = z$. Logo, temos $z \leq x \wedge y$.

(v) Se $x \leq y$, então pela Definição A2.2, temos que $x \wedge y = x$ e $x \vee y = y$. Por R1, R2, e pela Proposição A2.1, temos que $(x \wedge z) \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge (z \wedge z) = x \wedge z$ e $(x \vee z) \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee (z \vee z) = y \wedge z$. Assim, temos que $x \wedge z \leq y \wedge z$ e $x \vee z \leq y \vee z$. ■

Proposição A2.5: Em um reticulado **R** = (R, $\wedge, \vee$), para todos $x, y \in R$:

(i) $\sup\{x, y\} = x \vee y$;

(ii) $\inf\{x, y\} = x \wedge y$.

Demonstração: De R3, temos que $x \wedge y \leq y \leq x \vee y$, $\forall x, y \in R$. Assim, $x \vee y$ é limitante superior de $\{x, y\}$ e $x \vee y$ é limitante inferior de $\{x, y\}$. Agora, se $x \leq y$ e $x \leq z$, então, pela Proposição A2.4 (iii), temos que $x \vee y \leq z$. Logo, $x \vee y = \sup\{x, y\}$. De maneira análoga, se $z \leq x$ e $z \leq y$, então, pela Proposição A2.4 (iv), temos que $z \leq x \wedge y$. Logo, $x \wedge y = \inf\{x, y\}$. ■

A definição de reticulado pode ser dada também pela relação de ordem.

Um reticulado pode ser visto como uma estrutura ordenada **R** = (R, $\leq$), tal que para todos x, y $\in$ R estejam definidos inf{x, y} e sup{x, y}.

Proposição A2.6: Seja (R, $\leq$) uma ordem parcial tal que para quaisquer x, y $\in$ R existem sup{x, y} e inf{x, y}. Então, (R, $\wedge$, $\vee$) é um reticulado para $x \vee y$ = sup{x, y} e $x \wedge y$ = inf{x, y}.

Demonstração: Temos que a comutatividade será válida para quaisquer x, y $\in$ R, pois como $y \wedge x$ = inf{y, x}, então $y \wedge x \leq x$ e $y \wedge x \leq y$. Isto nos garante que $y \wedge x$ é um limitante inferior de {x, y}, visto que $x \wedge y$ é inf{x, y}, temos $y \wedge x \leq x \wedge y$. Da mesma forma, como $x \wedge y$ = inf{x, y}, então $x \wedge y \leq y$ e $x \wedge y \leq x$, o que nos garante que $x \wedge y$ é um limitante inferior de {y, x}, visto que $y \wedge x$ = inf {y ,x} e $x \wedge y \leq y \wedge x$. Através da propriedade anti-simétrica, temos que $x \wedge y = y \wedge x$. Vale destacar que o procedimento utilizando o supremo, ou seja, para $x \vee y = y \vee x$ é análogo ao aqui demonstrado.

A associatividade é válida para quaisquer x, y, z $\in$ R, pois, como $(x \wedge y) \wedge z$ = inf{$x \wedge y$, z}, temos que $(x \wedge y) \wedge z \leq z$ (I) e $(x \wedge y) \wedge z \leq x \wedge y$. Sabemos que $x \wedge y$ = inf{x, y}, logo $x \wedge y \leq x$ (II) e $x \wedge y \leq y$. Pela transitividade, como $(x \wedge y) \wedge z \leq x \wedge y$ e $x \wedge y \leq y$, temos que $(x \wedge y) \wedge z \leq y$ (III).

De (I) e (III), temos que $(x \wedge y) \wedge z$ é um limitante inferior de {y, z}. Sabemos que $y \wedge z$ = inf{y, z}, logo $(x \wedge y) \wedge z \leq y \wedge z$ (IV). De (II) e (IV), temos que $(x \wedge y) \wedge z$ é um limitante inferior de {x, $y \wedge z$}. Como $x \wedge (y \wedge z)$ = inf{x, $y \wedge z$}, temos que $(x \wedge y) \wedge z \leq x \wedge (y \wedge z)$. Utilizando a mesma ideia, temos que $x \wedge (y \wedge z) \leq (x \wedge y) \wedge z$. Agora, pela propriedade anti-simétrica, temos que $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$. Vale destacar, novamente, que o procedimento utilizando supremo é realizado de forma análoga para $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.

A absorção é válida para quaisquer x, y $\in$ R, pois como $x \vee y$ = sup{x, y}, então, y $\leq$

$x \vee y$ (V). Através da propriedade de reflexividade, temos que $y \leq y$ (VI).

De (V) e (VI), temos que y é limitante inferior de $\{x \vee y, y\}$. Como $(x \vee y) \wedge y = \inf\{x \vee y, y\}$, então $y \leq (x \vee y) \wedge y$ (VII). Por outro lado, temos que, como $(x \vee y) \wedge y = \inf\{x \vee y, y\}$, então $(x \vee y) \wedge y \leq y$ (VIII).

Agora, de (VII), (VIII) e pela propriedade anti-simétrica, temos que $(x \vee y) \wedge y = y$. O procedimento é realizado de maneira análoga para $(x \wedge y) \vee y = y$.

Com isso, podemos concluir que $(R, \wedge, \vee)$ é um reticulado para $x \vee y = \sup\{x, y\}$ e $x \wedge y = \inf\{x, y\}$. ■

Definição A2.3: Um reticulado **R** = $(R, \wedge, \vee)$ é *distributivo*, se para todos $x, y \in R$:

(i) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

(ii) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Usualmente, colocamos essas duas condições para que o reticulado seja distributivo; porém, se considerarmos apenas uma das condições, a outra é facilmente obtida.

Proposição A2.7: Se **R** = $(R, \wedge, \vee)$ é um reticulado, então para todos $x, y, z \in R$:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \Leftrightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Pela Definição A1.1 e, sabendo que, por hipótese, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee$ $\vee (x \wedge z)$, temos que: $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z] = [(y \vee x) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z] =$ $= x \vee [z \wedge (x \vee y)] = x \vee [(z \wedge x) \vee (z \wedge y)] = [x \vee (z \wedge x)] \vee (z \wedge y)] = [(z \wedge x) \vee x] \vee (z \wedge y) = x \vee (z \wedge y) =$ $= x \vee (y \wedge z)$.

$(\Leftarrow)$ Através da Definição A1.1 e, sabendo que, por hipótese, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, temos que $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = [(x \wedge y) \vee x] \wedge [(x \wedge y) \vee z] = [(y \wedge x) \vee x] \wedge [z \vee (y \wedge x)] = x \wedge [(z \vee y) \wedge$ $\wedge (z \vee y)] = [x \wedge (z \vee x)] \wedge (z \vee y) = [(z \vee x) \wedge x] \wedge (z \vee y) = x \wedge (z \vee y) = x \wedge (y \vee z)$.

Assim, temos que $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \Leftrightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. ■

Neste momento, vale destacar que as definições de supremo, ínfimo, máximo, mínimo, limitante superior e inferior, apresentadas na seção anterior, para conjuntos parcialmente ordenados, aplicam-se, também, aos reticulados. Assim, basta considerarmos $(R, \leq)$ como uma ordem parcial e $\varnothing \neq A \subseteq R$.

Nas definições que seguem, denotaremos o máximo de R por max(R) e o mínimo de R por mín(R).

Proposição A2.8: Seja **R** = $(R, \wedge, \vee)$ um reticulado.

(i) se existe um máximo em R, então ele é único.

(ii) se existe um mínimo em R, então ele é único.

Demonstração: (i) Suponhamos que 1 e m são máximos em R. Desse modo, para todo $x \in R$, $x \vee 1 = 1$ e $x \vee m = m$. Assim, $1 = m \vee 1 = 1 \vee m = m$. Temos, então, 1 = m, ou seja, se existe algum máximo em R, então ele é único.

(ii) Suponhamos que 0 e n são mínimos em R. Desse modo, para todo $x \in R$, $x \wedge 0 = 0$ e $x \wedge n = n$. Assim, 0 = n, ou seja, se existe algum mínimo em R, então ele é único. ■

Definição A2.4: Um reticulado **R** = $(R, \wedge, \vee)$ *tem 0* se existe o mín(R) e *tem 1* se existe o max(R). Indicamos o 0 e 1 de R, respectivamente, por 0 = mín(R) e 1 = max(R).

Observamos que, se $0 \in R$, então $x \wedge 0 = 0$ e $x \vee 0 = x$, para todo $x \in R$. Agora, se $1 \in R$, então $x \wedge 1 = x$ e $x \vee 1 = 1$, para todo $x \in R$.

Proposição A2.9: Todo reticulado finito tem 0 e 1.

Demonstração: Sejam $x_1, \ldots, x_n$ os elementos do reticulado R e seja $y = x_1 \vee \ldots \vee x_n$. Então, y é um 1 do reticulado, pois $x_i \leq y$, para todo i. Analogamente, temos que $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ é um 0 do reticulado. ■

Definição A2.5: Seja **R** = (R, $\wedge$,$\vee$) um reticulado com 0 e x $\in$ R. Caso exista, -x = max {y $\in$ R : x$\wedge$y = 0} em R, dizemos que x é *pseudo-complementado* em R e -x é o seu pseudo-complemento.

Definição A2.7: Um reticulado R é *pseudo-complementado*, se todo x $\in$ R tem o pseudocomplemento em R.

Definição A2.6: Seja **R** = (R, $\wedge$,$\vee$) um reticulado com 0 e 1 e x $\in$ R. Dizemos que x' $\in$ R é um *complemento* de x em R se x$\wedge$x' = 0 e x$\vee$x' = 1.

Definição A2.8: Um reticulado R é *complementado*, se todo x $\in$ R tem complemento em R.

Definição A2.9: Sejam $\mathbf{R_1}$ = (R_1, $\wedge_{R1}$, $\vee_{R1}$) e $\mathbf{R_2}$ = (R_2, $\wedge_{R2}$, $\vee_{R2}$) reticulados e h: $\mathbf{R_1} \to \mathbf{R_2}$ uma função. Dizemos que h é *homomorfismo de reticulados* se, para todos x, y $\in$ R, temos:

$$h(x \wedge_{R1} y) = h(x) \wedge_{R2} h(y) \text{ e}$$

$$h(x \vee_{R1} y) = h(x) \vee_{R2} h(y).$$

Definição A2.10: Um homomorfismo de reticulados h: $\mathbf{R_1} \to \mathbf{R_2}$ é *injetivo* se, para todos x, y $\in$ R, h(x) = h(y) implica em x = y.

Definição A2.11: Um homomorfismo de reticulados h: $\mathbf{R_1} \to \mathbf{R_2}$ é *sobrejetivo* se, para todo y $\in$ R, existe x $\in$ R : h(x) = y.

Definição A2.12: Um homomorfismo de reticulados h: $\mathbf{R_1} \to \mathbf{R_2}$ é *bijetivo* se é injetivo e sobrejetivo.

Definição A2.13: Um isomorfismo de reticulados é um *homomorfismo bijetivo de reticula-*

dos.

A3. Álgebra de Boole

Definição A3.1: Uma *álgebra de Boole* é um reticulado distributivo e complementado.

Aqui, o complemento de x será denotado por $\sim x$ e toda álgebra de Boole será denotada por uma sêxtupla **B** = (B, $\wedge$, $\vee$, $\sim$, 0, 1).

Proposição A3.1: Seja **B** = (B, $\wedge$,$\vee$, $\sim$, 0, 1) uma álgebra de Boole. Então, para todo $x \in B$, existe um único $\sim x \in B$, tal que, $x\vee\sim x = 1$ e $x\wedge\sim x = 0$.

Demonstração: Suponhamos que $\sim x$ e y sejam complementos de x. Então, $x\vee\sim x = x\vee y = = 1$ e $x\wedge\sim x = x\wedge y = 0$. Dessa forma, utilizando as leis de comutatividade, distributividade e a Definição A2.2, temos que:

$y = 0\vee y = (x\wedge\sim x)\vee y = (x\vee y)\wedge(\sim x\vee y) = 1\wedge(\sim x\vee y) = \sim x\vee y$. Logo, $\sim x \leq y$. (I)

$y = 1\wedge y = (x\vee\sim x)\wedge y = (x\wedge y)\vee(\sim x\wedge y) = 0\vee(\sim x\wedge y) = \sim x\wedge y$. Logo, $y \leq \sim x$. (II)

Assim, de (I) e (II), temos $\sim x = y$.

Dessa forma, concluímos que, para todo $x \in B$, existe e é único $\sim x$, tal que $x\vee\sim x = 1$ e $x\wedge\sim x = 0$. ■

Proposição A3.2: Se **B** = (B, $\wedge$,$\vee$, $\sim$, 0, 1) é uma álgebra de Boole e $x \in B$, então $\sim\sim x = x$.

Demonstração: Pela definição de álgebra de Boole, sabemos que $x\vee\sim x = 1$ e $x\wedge\sim x = 0$. Pela propriedade comutativa, temos que $\sim x\wedge x = 0$ e $\sim x\vee x = 1$. Assim, x é o complemento de $\sim x$, ou seja, $\sim\sim x = x$. ■

Proposição A3.3: Seja **B** = (B, $\wedge$,$\vee$, $\sim$, 0,1) uma álgebra de Boole, então:

(i) $1 = \sim 0$;

(ii) $0 = \sim 1$.

Demonstração: Como $0 \wedge 1 = 0$ e $0 \vee 1 = 1$, então 1 é um complemento de 0. Pela Proposição A3.1, temos que o complemento é único. Assim, $1 = \sim 0$.

Como $1 \wedge 0 = 0$ e $1 \vee 0 = 1$, então 0 é um complemento de 1. Pela Proposição A3.1, temos que o complemento é único. Logo, $0 = \sim 1$. ■

Proposição A3.4: Seja **B** = (B, $\wedge, \vee, \sim$, 0, 1) uma álgebra de Boole. Se x, y $\in$ B e x e y possuem complementos $\sim x$ e $\sim y$, respectivamente, então $x \vee y$ e $x \wedge y$ possuem complemento e:

(i) $\sim(x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$;

(ii) $\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$.

Demonstração: (i) Através das propriedades de distributividade, associatividade, comutatividade e pela definição de álgebra booleana, temos que:

$(x \vee y) \wedge (\sim x \wedge \sim y) = (x \wedge (\sim x \wedge \sim y)) \vee (y \wedge (\sim x \wedge \sim y)) = ((x \wedge \sim x) \wedge \sim y) \vee (y \wedge (\sim y \wedge \sim x)) = (0 \wedge \sim y) \vee ((y \wedge \sim y) \wedge \sim x) = 0 \vee (0 \wedge \sim x) = 0 \vee 0 = 0$ e $(x \vee y) \vee (\sim x \wedge \sim y) = ((x \vee y) \vee \sim x) \wedge$ $\wedge ((x \vee y) \vee \sim y) = ((y \vee x) \vee \sim x) \wedge (x \vee (y \vee \sim y)) = (y \vee (x \vee \sim x)) \wedge (x \vee 1) = (y \vee 1) \wedge 1 = 1 \wedge 1 = 1$.

Logo, temos que $\sim x \wedge \sim y$ é o complemento de $x \vee y$, isto é, $\sim(x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$.

(ii) Através das propriedades de distributividade, associatividade, comutatividade e pela definição de álgebra booleana, temos que: $(x \wedge y) \wedge (\sim x \vee \sim y) = ((x \wedge y) \wedge \sim x) \vee ((x \wedge y) \wedge \sim y) = ((y \wedge x) \wedge \sim x) \vee (x \wedge (y \wedge \sim y)) = (y \wedge (x \wedge \sim x) \vee (x \wedge 0) = (y \wedge 0) \vee 0 = 0 \vee 0 = 0$ e $(x \wedge y) \vee (\sim x \vee \sim y) = (x \vee (\sim x \vee \sim y)) \wedge (y \vee (\sim x \vee \sim y)) = ((x \vee \sim x) \vee \sim y) \wedge (y \vee (\sim y \vee \sim x)) = (1 \vee \sim y) \wedge ((y \vee \sim y) \vee \sim x) = 1 \wedge (1 \vee \sim x) = 1 \wedge 1 = 1$. Logo, $\sim x \vee \sim y$ é o complemento de $x \wedge y$, isto é, $\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$. ■

Podemos considerar como um exemplo de álgebra booleana $(B, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$, em que B é o conjunto das classes de equivalência de sentenças proposicionais (P é equivalente a Q see $P \Leftrightarrow Q$ see $P \leftrightarrow Q$ é uma tautologia); $\wedge, \vee$ e $\sim$ são, respectivamente, os conectivos e, ou e não da lógica proposicional clássica; 0 é a classe de equivalência das sentenças logicamente equivalentes a $p \wedge \sim p$ (contradições) e 1 é a classe de equivalência das sentenças logicamente equivalentes a $p \vee \sim p$ (tautologias).

Definição A3.2: Sejam $\mathbf{B_1} = (B_1, \wedge_{B1}, \vee_{B1}, \sim_{B1}, 0_{B1}, 1_{B1})$ e $\mathbf{B_2} = (B_2, \wedge_{B2}, \vee_{B2}, \sim_{B2}, 0_{B2}, 1_{B2})$ álgebras de Boole e h: $\mathbf{B_1} \rightarrow \mathbf{B_2}$ uma função. Dizemos que h é um *homomorfismo* de álgebras de Boole se, para todos x, y $\in$ B, temos:

$$h(x \wedge_{B1} y) = h(x) \wedge_{B2} h(y);$$

$$h(x \vee_{B1} y) = h(x) \vee_{B2} h(y) \text{ e}$$

$$h(\sim_{B1} x) = \sim_{B2} h(x).$$

Definição A3.3: Um *isomorfismo* de álgebra de Boole é um homomorfismo bijetivo de álgebras de Boole.