

Sobre a compacidade lógica e topológica

Hércules de Araujo Feitosa
Mauri Cunha do Nascimento
Marcelo Reicher Soares *

12 de dezembro de 2013

Resumo

Os ambientes da Lógica e da Topologia têm a compacidade como uma propriedade importante. Nos dois diferentes contextos as noções de compacidade são diversas. Na lógica, dizemos que um conjunto de fórmulas Δ é compacto quando a existência de modelo para todo subconjunto finito de Δ implica que também Δ tem modelo. A lógica é compacta, se o conjunto de suas fórmulas válidas é compacto. Na topologia, um conjunto A é compacto, caso qualquer cobertura de A por abertos admita uma subcobertura finita. Neste trabalho, mostramos uma maneira de relacionar tais noções de compacidade.

Palavras Chave: Lógica, Topologia, Compacidade, Modelo de valorações.

Introdução

São muitas as interações entre Lógica e Topologia. Nestas notas, trataremos especificamente da propriedade da compacidade, tratada tanto no contexto da Lógica como da Topologia. Os enunciados nos dois contextos trazem alguma semelhança, mas não são coincidentes.

No contexto lógico, temos a seguinte caracterização. Seja \mathbb{L} um sistema lógico e $\Delta \subseteq For(\mathbb{L})$ um conjunto qualquer de fórmulas de \mathbb{L} . Um *modelo* para Δ é uma estrutura matemática que torna válida cada elemento de Δ . O conjunto Δ é *compacto* se a existência de modelo para cada subconjunto finito $\Delta_0 \subseteq \Delta$ implica na existência de modelo para o conjunto Δ . A recíproca deste resultado é imediata, pois se um conjunto qualquer Δ tem modelo, então este mesmo modelo valida todas as suas fórmulas, as quais podem estar reunidas em quaisquer subconjuntos de Δ . O sistema lógico \mathbb{L} é compacto se todo $\Delta \subseteq For(\mathbb{L})$ é compacto.

Por outro lado, no contexto topológico, se (E, \mathcal{T}) é um espaço topológico e $A \subseteq E$, então A é *compacto* quando para toda cobertura de A por conjuntos abertos de (E, \mathcal{T}) , pode-se encontrar um subcobertura finita para A .

A meta deste artigo é estabelecer um vínculo entre estes dois conceitos de compacidade, no contexto da lógica proposicional clássica.

*Email: reicher@fc.unesp.br. Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, UNESP.

1 Elementos de topologia

Nesta seção apresentamos algumas definições e caracterizações de caráter topológico, que podem ser vistas em [3], [6], [7] e [9]. Apresentamos apenas o necessário para os resultados centrais, que estão nas seções seguintes.

Definição 1 *Seja E um conjunto não vazio. Uma topologia sobre E é um conjunto $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(E)$ tal que:*

- (i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ e $E \in \mathcal{T}$;
- (ii) se $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{T}$, então $B_1 \cap \dots \cap B_n \in \mathcal{T}$;
- (iii) se $\{A_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{T}$, então $\cup A_i \in \mathcal{T}$.

O par (E, \mathcal{T}) é um espaço topológico.

Por questão de simplicidade de notação, em geral, quando não há dúvida quanto à topologia \mathcal{T} considerada, podemos denotar o espaço topológico (E, \mathcal{T}) apenas por E .

Definição 2 *Os elementos de \mathcal{T} são os abertos de (E, \mathcal{T}) . Um subconjunto $B \subseteq E$ é fechado em (E, \mathcal{T}) se o seu complementar é um aberto, isto é, se $B^C \in \mathcal{T}$.*

Para descrevermos todos os abertos de um espaço topológico (E, \mathcal{T}) não precisamos, necessariamente, de todos os elementos de \mathcal{T} . Assim é que temos a definição de base.

Definição 3 *Dado um espaço topológico (E, \mathcal{T}) , uma base para a topologia \mathcal{T} é um subconjunto $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{T}$ tal que para qualquer aberto $A \subseteq E$, tem-se $A = \cup A_i$, com $i \in I$ e $A_i \in \mathfrak{B}$.*

Proposição 4 *Seja E um conjunto não vazio. Dada uma coleção \mathfrak{B} de subconjuntos de E , se as seguintes condições são válidas:*

- (i) $E = \cup\{A : A \in \mathfrak{B}\}$ e
 - (ii) se $x \in A \cap B$, para $A, B \in \mathfrak{B}$, então existe $C \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in C \subset A \cap B$;
- então \mathfrak{B} é uma base de uma topologia sobre E .*

Na proposição acima, a topologia a ser considerada é aquela formada por uniões arbitrárias de elementos de \mathfrak{B} mais o conjunto vazio.

Proposição 5 *Se (E, \mathcal{T}) é um espaço topológico e \mathfrak{B} é uma base para este espaço topológico, então são válidas as condições:*

- (i) $E = \cup\{A : A \in \mathfrak{B}\}$;
- (ii) se $x \in A \cap B$, com $A, B \in \mathfrak{B}$, então existe $C \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in C \subset A \cap B$.

Definição 6 *Sejam (E, \mathcal{T}) um espaço topológico e $A \subseteq E$.*

- (i) *Uma cobertura de A é um conjunto \mathfrak{C} de subconjuntos de E tal que $A \subseteq \cup \mathfrak{C}$.*
- (ii) *A cobertura \mathfrak{C} é uma cobertura de A por abertos, se cada elemento de \mathfrak{C} é um aberto.*
- (iii) *Uma subcobertura da cobertura \mathfrak{C} de A é qualquer subconjunto de \mathfrak{C} que ainda é cobertura de A .*
- (iv) *A cobertura \mathfrak{C} é finita se ela tem um número finito de elementos.*

Definição 7 *Seja (E, \mathcal{T}) um espaço topológico. Um conjunto $A \subseteq E$ é compacto se toda cobertura de A por abertos admite uma subcobertura finita.*

Espaços métricos são exemplos simples e imediatos de espaços topológicos.

Definição 8 Um espaço métrico é um par (M, d) , em que M é um conjunto não vazio e d é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, de maneira que, para todos $x, y, z \in M$ valem:

- (i) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

A função d é denominada métrica e o número real $d(x, y)$ é a distância entre x e y .

Como para os espaços topológicos, quando não há dúvida quanto à métrica d em questão, podemos denotar o espaço métrico (M, d) apenas por M .

Definição 9 Sejam (M, d) um espaço métrico, $a \in M$ e $0 < r \in \mathbb{R}$. Uma bola aberta de centro a e raio r é o conjunto $B_r(a) = \{x \in M : d(x, a) < r\}$, e uma bola fechada é o conjunto $B_r[a] = \{x \in M : d(x, a) \leq r\}$.

Definição 10 Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $A \subseteq M$ é aberto se para todo $a \in A$, existe um número real positivo r tal que $B_r(a) \subseteq A$.

Lema 11 Sejam (M, d) um espaço métrico e $A \subseteq M$. Então o conjunto A é aberto em (M, d) se, e somente se, A é uma união de bolas abertas $B_r(a) \subseteq A$, com $a \in A$.

Definição 12 Um conjunto $B \subseteq M$ é fechado se o seu complementar B^C é aberto.

Lema 13 Seja (M, d) um espaço métrico. Então:

- (i) \emptyset e M são abertos;
- (ii) Se A_1 e A_2 são abertos, então $A_1 \cap A_2$ é aberto;
- (iii) Se $\{A_i\}_{i \in I}$ é um conjunto de abertos, então $\cup_{i \in I} A_i$ também é um aberto.

Teorema 14 Se (M, d) é um espaço métrico, então M é um espaço topológico e o conjunto das bolas abertas determina uma base para sua topologia.

Segue do último teorema que as definições de cobertura e compacidade para espaços topológicos continuam válidas para espaços métricos.

Definição 15 Sejam (M, d) um espaço métrico, $A \subseteq M$ e $b \in M$. O elemento $b \in M$ é um ponto de acumulação de A se para toda bola aberta $B_r(b)$ tem-se $(B_r(b) - \{b\}) \cap A \neq \emptyset$.

Proposição 16 Seja (M, d) um espaço métrico. Se $b \in M$ é um ponto de acumulação de $A \subseteq M$, então para todo aberto B que contém b , o conjunto $(B - \{b\}) \cap A$ é infinito.

Definição 17 Uma sequência (x_n) do espaço métrico (M, d) é convergente se existe $a \in M$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Definição 18 Seja (x_n) uma sequência definida em um espaço métrico (M, d) . A sequência (x_n) é de Cauchy se para todo $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que para todos $n, m \geq k$, tem-se $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Definição 19 Um espaço métrico (M, d) é Cauchy-completo quando nele toda sequência de Cauchy é convergente.

Definição 20 Seja (M, d) um espaço métrico e $A \subseteq M$. O diâmetro de A , denotado por $\text{diam}(A)$, é definido por $\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

Definição 21 *Seja (M, d) um espaço métrico e $A \subseteq M$. O conjunto A é limitado se o seu diâmetro é finito.*

Definição 22 *Um espaço métrico (M, d) é totalmente limitado quando, para cada $\varepsilon > 0$, pode-se exprimir $M = S_1 \cup \dots \cup S_n$, em que cada S_i tem diâmetro menor do que ε .*

Assim, um espaço métrico (M, d) é totalmente limitado se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$, existe um número finito de bolas abertas de raio ε que cobrem M . Ou ainda, para que o espaço métrico (M, d) seja totalmente limitado, é necessário e suficiente que, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, exista um número finito de pontos $a_1, \dots, a_n \in M$ de maneira que todo ponto $x \in M$ dista menos que ε de algum dos a_i .

Teorema 23 *Seja (M, d) um espaço métrico. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) (M, d) é compacto;
- (ii) todo subconjunto infinito de M possui um ponto de acumulação;
- (iii) toda sequência em M possui uma subsequência convergente;
- (iv) (M, d) é completo e totalmente limitado.

Definição 24 *Sejam A um conjunto dado e $(B_i)_{i \in I}$ uma família de subconjuntos de A . A família $(B_i)_{i \in I}$ tem a propriedade da intersecção finita (pif) se, para todo subconjunto finito $J \subseteq I$, tem-se $\bigcap_{j \in J} (B_j) \neq \emptyset$.*

Proposição 25 *Um espaço métrico (M, d) é compacto se, e somente se, toda família de fechados $(B_i)_{i \in I}$ de M com a propriedade da intersecção finita é tal que $\bigcap_{i \in I} (B_i) \neq \emptyset$.*

2 Espaço de modelos da lógica proposicional clássica

Nesta seção tratamos de um espaço de modelos do cálculo proposicional clássico dado pelas valorações booleanas. Noções de lógica clássica podem ser encontradas em [1], [4], [5], [8] e [9].

Maiores detalhes sobre uma formalização da lógica proposicional clássica em Português podem ser encontrados em [5].

A lógica proposicional clássica, denotada por \mathcal{L} , é determinada sobre a linguagem proposicional $L = \{p_1, p_2, \dots, \neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \} \}. O conjunto das variáveis proposicionais de \mathcal{L} é denotado por $Var(\mathcal{L}) = \{p_1, p_2, \dots\}$.$

Definição 26 *O conjunto das fórmulas de \mathcal{L} , denotado por $For(\mathcal{L})$, é definido recursivamente por:*

- (i) os elementos de $Var(\mathcal{L})$ são fórmulas. São as fórmulas atômicas de \mathcal{L} ;
- (ii) se φ e ψ são fórmulas, então $\neg\varphi$ e $\varphi \rightarrow \psi$ são fórmulas;
- (iii) apenas as expressões, sequências finitas de símbolos, dadas nos itens (i) e (ii) são fórmulas.

Agora podemos dizer quais são as fórmulas verdadeiras ou válidas de \mathcal{L} .

Definição 27 *Uma valoração restrita é uma função $\bar{v} : Var(\mathcal{L}) \rightarrow \{0, 1\}$.*

Definição 28 Uma valoração v para o conjunto das fórmulas $For(\mathcal{L})$ é uma extensão indutiva de \bar{v} dada por:

- $$v : For(\mathcal{L}) \rightarrow \{0, 1\}$$
- (i) $v(p_i) = \bar{v}(p_i)$, se $p_i \in Var(\mathcal{L})$;
 - (ii) $v(\neg\varphi) = 0 \Leftrightarrow v(\varphi) = 1$;
 - (iii) $v(\varphi \rightarrow \psi) = 0 \Leftrightarrow v(\varphi) = 1$ and $v(\psi) = 0$.

Cada valoração v é unicamente estendida a partir de uma valoração restrita \bar{v} . Quando $v(\varphi) = 1$, entende-se que a fórmula φ é verdadeira segundo a valoração restrita \bar{v} ou, univocamente, segundo a valoração v .

Também, cada valoração $v : For(\mathcal{L}) \rightarrow \{0, 1\}$ é a função característica do conjunto $\mathcal{A} = \{\varphi \in For(\mathcal{L}) : v(\varphi) = 1\}$. Como a extensão de v a partir de \bar{v} é única, podemos construir este conjunto de fórmulas verdadeiras segundo v a partir de $\mathcal{A}_v = \{p \in Var(\mathcal{L}) : \bar{v}(p) = 1\}$. Ou seja, o subconjunto $\mathcal{A}_v \subseteq Var(\mathcal{L})$ determina univocamente o conjunto $\mathcal{A} \subseteq For(\mathcal{L})$.

Definição 29 Um modelo em \mathcal{L} é um conjunto de variáveis $\mathcal{A}_v = \{p \in Var(\mathcal{L}) : v(p) = 1\}$, determinado por alguma valoração v .

Denotamos o conjunto dos modelos em \mathcal{L} por $Mod(\mathcal{L})$ e, assim, $Mod(\mathcal{L}) = \mathcal{P}(Var(\mathcal{L}))$.

Definição 30 A relação de satisfação de um modelo \mathcal{A} para uma fórmula $\varphi \in For(\mathcal{L})$, denotada por $\mathcal{A} \models \varphi$, é recursivamente definida:

- (i) se φ é p , então $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \mathcal{A}$;
- (ii) se φ é $\neg\psi$, então $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A} \not\models \psi$;
- (iii) se φ é $\psi \rightarrow \sigma$, então $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A} \not\models \psi$ ou $\mathcal{A} \models \sigma$.

Quando $\mathcal{A} \models \varphi$, dizemos que o modelo \mathcal{A} satisfaz a fórmula φ ou é um modelo de φ .

Definição 31 Um modelo \mathcal{A} satisfaz $\Gamma \subseteq For(\mathcal{L})$, se $\mathcal{A} \models \varphi$, para toda $\varphi \in \Gamma$.

Agora definimos quais são as fórmulas válidas da lógica \mathcal{L} .

Definição 32 Uma fórmula $\varphi \in For(\mathcal{L})$ é uma tautologia (ou é válida) se $\mathcal{A} \models \varphi$, para todo modelo \mathcal{A} , ou de modo equivalente, se para toda valoração v , $v(\varphi) = 1$.

Assim, as fórmulas da lógica proposicional clássica que são válidas são aquelas satisfeitas por toda e qualquer valoração v .

Definição 33 A altura de uma fórmula é definida recursivamente por:

- (i) $h(p) = 0$, para $p \in Var(\mathcal{L})$;
- (ii) $h(\neg\varphi) = h(\varphi)$;
- (iii) $h(\varphi \rightarrow \psi) = h(\varphi) + h(\psi) + 1$.

Definição 34 Seja $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ uma enumeração das variáveis proposicionais de \mathcal{L} , isto é, uma enumeração do conjunto $Var(\mathcal{L})$. Define-se o conjunto For_n por:

$$For_n = \{\varphi \in For(\mathcal{L}) : \varphi(p_1, \dots, p_k), 1 \leq k \leq n \text{ e } 0 \leq h(\varphi) \leq n\}.$$

Segue da definição acima que $\emptyset = For_0 \subseteq For_1 \subseteq \dots \subseteq For_n \subseteq \dots$

Definição 35 Dois modelos \mathcal{A}, \mathcal{B} são elementarmente equivalentes se satisfazem exatamente as mesmas fórmulas, isto é, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Leftrightarrow$ para toda $\psi \in For(\mathcal{L})$, $\mathcal{A} \models \psi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \psi$.

Definição 36 Dois modelos \mathcal{A}, \mathcal{B} são n equivalentes se satisfazem exatamente as mesmas fórmulas de For_n , isto é, $\mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B} \Leftrightarrow$ para toda $\psi \in For_n, \mathcal{A} \models \psi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \psi$.

Assim, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, se e somente se, para toda variável $p_i, p_i \in \mathcal{A} \Leftrightarrow p_i \in \mathcal{B}$ e, também, $\mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B}$, se e somente se, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}, p_i \in \mathcal{A} \Leftrightarrow p_i \in \mathcal{B}$. Para quaisquer dois modelos \mathcal{A} e \mathcal{B} vale $\mathcal{A} \equiv_0 \mathcal{B}$

Lema 37 (i) Para cada $n \in \mathbb{N}$, a relação $\mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B}$ é uma relação de equivalência;
(ii) Se $\mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B}$, então, para todo $i \leq n, p_i \in \mathcal{A}$ se, e somente se, $p_i \in \mathcal{B}$;
(iii) $\mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$, para todo $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \leq n$;
(iv) $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ se, e somente se, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale $\mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B}$. Assim, se $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, então $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

3 Uma métrica para o espaço de modelos

A partir das valorações booleanas, definimos um espaço métrico sobre os modelos de \mathcal{L} , e, desse modo, caracterizamos um ambiente topológico, que na próxima seção permitirá o vínculo entre os dois conceitos de compacidade tratados no texto. Seguimos sugestão de [2] para uma métrica entre estruturas de primeira ordem e de [10].

Definição 38 A distância entre dois modelos $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in Mod(\mathcal{L})$ é definida por:

$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf \left\{ \frac{1}{n+1} : \mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B} \right\}.$$

Lema 39 (i) $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{1}{n} \Leftrightarrow \mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$, para todo $m \in \mathbb{N}$, com $m < n$, e $\mathcal{A} \not\equiv_n \mathcal{B}$;
(ii) $d(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \leq \max \{d(\mathcal{A}, \mathcal{B}), d(\mathcal{B}, \mathcal{C})\}$;
(iii) Se $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \neq d(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, então $d(\mathcal{A}, \mathcal{C}) = \max \{d(\mathcal{A}, \mathcal{B}), d(\mathcal{B}, \mathcal{C})\}$.

Demonstração: (i) Segue imediato da definição.

(ii) Sejam $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{1}{n}$ e $d(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \frac{1}{m}$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $m \leq n$ ($\Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m}$). De (i) segue que, para todo $t < \min\{m, n\} = m$, $\mathcal{A} \equiv_t \mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \equiv_t \mathcal{C}$. Logo, para todo $t < m$, $\mathcal{A} \equiv_t \mathcal{C}$ e, por (i), $d(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \leq \frac{1}{m} = \max\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\} = \max\{d(\mathcal{A}, \mathcal{B}), d(\mathcal{B}, \mathcal{C})\}$.

(iii) Em (ii), se $m < n$, suponhamos que $d(\mathcal{A}, \mathcal{C}) < \max \{d(\mathcal{A}, \mathcal{B}), d(\mathcal{B}, \mathcal{C})\} = \frac{1}{m}$. Como $d(\mathcal{B}, \mathcal{A}) = d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{1}{n} < \frac{1}{m}$, então por (ii), $d(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \leq \max \{d(\mathcal{B}, \mathcal{A}), d(\mathcal{A}, \mathcal{C})\} < \frac{1}{m} = d(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, o que é um absurdo. Logo, $d(\mathcal{A}, \mathcal{C}) = \max \{d(\mathcal{A}, \mathcal{B}), d(\mathcal{B}, \mathcal{C})\}$. ■

Proposição 40 A função $d : Mod(\mathcal{L}) \times Mod(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma métrica e, desse modo, $(Mod(\mathcal{L}), d)$ é um espaço métrico.

Demonstração: (i) Segundo a definição da função d , segue que $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq 0$. Do Lema 37, tem-se que $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ se, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B}$, isto é, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ e, portanto, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

(ii) $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf \left\{ \frac{1}{n+1} : \mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B} \right\} = \inf \left\{ \frac{1}{n+1} : \mathcal{B} \equiv_n \mathcal{A} \right\} = d(\mathcal{B}, \mathcal{A})$.

(iii) Segue do lema anterior que $d(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \leq d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + d(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. ■

Uma bola aberta em $(Mod(\mathcal{L}), d)$ é um subconjunto de $Mod(\mathcal{L})$ da seguinte forma:

$$B_{\frac{1}{r+1}}(\mathcal{A}) = \left\{ \mathcal{B} \in Mod(\mathcal{L}) : d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \frac{1}{r+1} \right\}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Assim, $B_{\frac{1}{r+1}}(\mathcal{A}) = \{ \mathcal{B} \in Mod(\mathcal{L}) : \mathcal{A} \equiv_r \mathcal{B} \} = \{ \mathcal{B} \in Mod(\mathcal{L}) : \text{para toda } \psi \in For_r, \mathcal{A} \models \psi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \psi \}$.

Proposição 41 Dado $\varphi \in \text{For}(\mathcal{L})$, cada conjunto $V_\varphi = \{\mathcal{B} \in \text{Mod}(\mathcal{L}) : \mathcal{B} \models \varphi\}$ é um aberto de $(\text{Mod}(\mathcal{L}), d)$.

Demonstração: Sejam $\mathcal{A} \in V_\varphi$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $\varphi \in \text{For}_n$. Se $\mathcal{B} \in B_{\frac{1}{n+1}}(\mathcal{A})$, então $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \frac{1}{n+1}$. Logo, $\mathcal{B} \equiv_n \mathcal{A}$, ou seja, $\mathcal{B} \models \varphi$. Portanto, $B_{\frac{1}{n+1}}(\mathcal{A}) \subseteq V_\varphi$. Assim, V_φ é um aberto. ■

Proposição 42 A família $\{V_\varphi : \varphi \in \text{For}(\mathcal{L})\}$ constitui uma base de conjuntos abertos e fechados para a topologia $(\text{Mod}(\mathcal{L}), d)$.

Demonstração: Mostraremos que as condições da Proposição 4 são satisfeitas. Inicialmente, observemos que $V_{\varphi \wedge \psi} = V_\varphi \cap V_\psi$ e $V_{\neg\varphi} = (V_\varphi)^C$.

Certamente $\text{Mod}(\mathcal{L}) = \cup\{V_\varphi : \varphi \in \text{For}(\mathcal{L})\}$.

Agora, se $\mathcal{A} \in V_\varphi \cap V_\psi$, então $\mathcal{A} \models \varphi$ e $\mathcal{A} \models \psi$. Para $\sigma = \varphi \wedge \psi$, tem-se que $\mathcal{A} \models \sigma$, portanto, $\mathcal{A} \in V_\sigma$. Além disso, se $\mathcal{B} \in V_\sigma$, então $\mathcal{B} \models \sigma$ e, daí, $\mathcal{B} \models \varphi$ e $\mathcal{B} \models \psi$, isto é, $\mathcal{B} \in V_\varphi \cap V_\psi$. Portanto, $V_\sigma \subseteq V_\varphi \cap V_\psi$.

Resta verificar que cada V_φ é fechado. $(V_\varphi)^C = \{\mathcal{A} \in \text{Mod}(\mathcal{L}) : \mathcal{A} \not\models \varphi\} = \{\mathcal{A} \in \text{Mod}(\mathcal{L}) : \mathcal{A} \models \neg\varphi\} = V_{\neg\varphi}$, que é um aberto. ■

4 Uma demonstração topológica da compacidade da lógica proposicional clássica

A partir dos aspectos topológicos do espaço de modelos de \mathcal{L} , daremos uma demonstração nossa de que a lógica \mathcal{L} é compacta.

Teorema 43 O espaço métrico $(\text{Mod}(\mathcal{L}), d)$ é Cauchy-completo.

Demonstração: Seja $(\mathcal{A}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de Cauchy em $(\text{Mod}(\mathcal{L}), d)$. Construiremos uma seqüência de modelos $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e uma seqüência $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de maneira que:

$\mathcal{B}_0 = \emptyset$; e para inteiros $0 < i \leq j$, valem (*): $k_i \leq k_j$, $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}_j \subseteq \text{Var}(\mathcal{L})$ e, para todo $i \geq k_n$, $\mathcal{A}_i \equiv_n \mathcal{B}_n$.

Para $n = 1$, como $(\mathcal{A}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geq k_1$, $d(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_{k_1}) \leq \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}$. Logo, para todo $i \geq k_1$, $\mathcal{A}_i \equiv_1 \mathcal{A}_{k_1}$ e, portanto, $p_1 \in \mathcal{A}_i \Leftrightarrow p_1 \in \mathcal{A}_{k_1}$.

Definimos $\mathcal{B}_1 = \begin{cases} \mathcal{B}_0 & \text{se } p_1 \notin \mathcal{A}_{k_1} \\ \mathcal{B}_0 \cup \{p_1\} & \text{se } p_1 \in \mathcal{A}_{k_1} \end{cases}$.

Assim, para todo $i \geq k_1$, $\mathcal{A}_i \equiv_1 \mathcal{B}_1$.

Consideramos $n > 1$ e que foram construídos as seqüências $(k_m)_{1 \leq m \leq n-1}$ e $(\mathcal{B}_m)_{1 \leq m \leq n-1}$ que satisfazem as condições (*).

Como $(\mathcal{A}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy, existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geq k_n$, $d(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_{k_n}) \leq \frac{1}{n+1}$. Considerando $k_n \geq k_{n-1}$, então $(k_m)_{1 \leq m \leq n}$ satisfaz a condição correspondente de (*). Como $d(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_{k_n}) \leq \frac{1}{n+1}$, $\mathcal{A}_i \equiv_n \mathcal{A}_{k_n}$ e, portanto, $p_n \in \mathcal{A}_i \Leftrightarrow p_n \in \mathcal{A}_{k_n}$.

Definimos $\mathcal{B}_n = \begin{cases} \mathcal{B}_{n-1} & \text{se } p_n \notin \mathcal{A}_{k_n} \\ \mathcal{B}_{n-1} \cup \{p_n\} & \text{se } p_n \in \mathcal{A}_{k_n} \end{cases}$.

Se $i \geq k_n$, então $i \geq k_{n-1}$. Por (*), como $i \geq k_{n-1}$, $\mathcal{A}_i \equiv_{n-1} \mathcal{B}_{n-1}$ e, como $p_n \in \mathcal{A}_i \Leftrightarrow p_n \in \mathcal{B}_n$, então $\mathcal{A}_i \equiv_n \mathcal{B}_n$.

Assim, construímos a seqüência (\mathcal{B}_n) e (k_n) , com $n \in \mathbb{N}$, que satisfazem as condições (*).

Seja $\mathcal{B} = \cup\{\mathcal{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como para cada n , $\mathcal{B}_n \subseteq \text{Var}(\mathcal{L})$, então $\mathcal{B} \subseteq \text{Var}(\mathcal{L})$ e, portanto, \mathcal{B} é um modelo. Mostraremos, agora, que a seqüência de Cauchy (\mathcal{A}_i) , para $i \in \mathbb{N}$, converge para $\mathcal{B} \in \text{Mod}(\mathcal{L})$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Da construção de \mathcal{B} e dos \mathcal{B}_n , temos que $\mathcal{B} \equiv_{2n+1} \mathcal{B}_{2n+1}$ e, desse modo, $d(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{2n+1}) \leq \frac{1}{2n+2}$. Também, para $i \geq k_{2n+1}$, $\mathcal{A}_i \equiv_{2n+1} \mathcal{B}_{2n+1}$ e, portanto, $d(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_{2n+1}) \leq \frac{1}{2n+2}$. Assim, para $i \geq k_{2n+1}$, $d(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}) \leq d(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_{2n+1}) + d(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{2n+1}) \leq \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$.

Portanto, o espaço métrico $(\text{Mod}(\mathcal{L}), d)$ é Cauchy-completo. ■

Teorema 44 O espaço $(\text{Mod}(\mathcal{L}), d)$ é totalmente limitado.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Como, para cada $i \in \{1, 2, \dots, 2^n\}$, existe uma função $w_i : \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \rightarrow \{0, 1\}$, então tomemos $\mathcal{A}_i \in \text{Mod}(\mathcal{L})$ tal que $p_j \in \mathcal{A}_i \Leftrightarrow j \leq n$ e $w_i(p_j) = 1$. Para cada $\mathcal{A} \in \text{Mod}(\mathcal{L})$, existe $i \in \{1, 2, \dots, 2^n\}$ tal que $\mathcal{A} \cap \{p_1, p_2, \dots, p_n\} = \mathcal{A}_i$. Logo, $\mathcal{A} \equiv_n \mathcal{A}_i$ e, portanto, $d(\mathcal{A}, \mathcal{A}_i) < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$, ou seja, $\mathcal{A} \in B_\varepsilon(\mathcal{A}_i)$.

Assim, $\text{Mod}(\mathcal{L}) = \bigcup_{i=1}^{2^n} B_\varepsilon(\mathcal{A}_i)$, ou seja, $(\text{Mod}(\mathcal{L}), d)$ é totalmente limitado. ■

Teorema 45 O espaço $(\text{Mod}(\mathcal{L}), d)$ é compacto.

Demonstração: Segundo o Teorema 44, $(\text{Mod}(\mathcal{L}), d)$ é totalmente limitado e pelo Teorema 43 é Cauchy-completo. Dessa maneira, segundo o Teorema 23, o espaço $(\text{Mod}(\mathcal{L}), d)$ é compacto. ■

Para relembrar, temos as seguintes definições:

(1) Uma lógica \mathbb{L} é compacta se, e somente se, dado qualquer $\Delta \subseteq \text{For}(\mathbb{L})$ se todo subconjunto finito de Δ tem modelo, então também o conjunto Δ tem modelo.

(2) (M, d) é compacto se, e somente se, toda família de fechados $(B_i)_{i \in I}$ de M com a propriedade da intersecção finita é tal que $\bigcap_{i \in I} (B_i) \neq \emptyset$.

Teorema 46 A lógica \mathcal{L} é compacta se, e somente se, o espaço $(\text{Mod}(\mathcal{L}), d)$ é compacto.

Demonstração: (\Rightarrow) Consideremos a lógica \mathcal{L} compacta e $\{F_i\}_{i \in I}$ uma família de fechados de $\text{Mod}(\mathcal{L})$ com a pif (propriedade da intersecção finita).

Como $\{V_\varphi : \varphi \in \text{For}(\mathcal{L})\}$ é uma base para a topologia de $\text{Mod}(\mathcal{L})$, então, para cada $i \in I$, existe J_i tal que $F_i^C = \bigcup_{j \in J_i} V_{\varphi_{ij}}^C$. Logo, $F_i = \bigcap_{j \in J_i} V_{\varphi_{ij}}^C$ e, portanto, $\bigcap_{i \in I} F_i = \bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J_i} V_{\varphi_{ij}}^C$.

Sejam $\Sigma = \{\neg\varphi_{ij} : i \in I, j \in J_i\}$ e Δ um subconjunto finito de Σ , digamos, $\Delta = \{\neg\varphi_{ij} : i \in K, j \in K_i\}$, para $K \subseteq I$, $K_i \subseteq J_i$ e K, K_i finitos.

Como $\{F_i\}_{i \in I}$ possui a pif, então $\bigcap_{i \in K} F_i \neq \emptyset$. Daí, $\bigcap_{i \in K} F_i = \bigcap_{i \in K} \bigcap_{j \in J_i} V_{\varphi_{ij}}^C \subseteq \bigcap_{i \in K} \bigcap_{j \in K_i} V_{\varphi_{ij}}^C$ e, portanto, existe um modelo $\mathcal{A} \in \bigcap_{i \in K} \bigcap_{j \in K_i} V_{\varphi_{ij}}^C$.

Dessa maneira, todo subconjunto finito de Σ possui um modelo e, como a lógica \mathcal{L} é compacta, então Σ possui um modelo \mathcal{B} , ou seja, para todos $i \in I$ e $j \in J_i$, $\mathcal{B} \models \neg\varphi_{ij}$ e, portanto, $\mathcal{B} \in V_{\varphi_{ij}}^C$, para todos i e j . Logo, $\mathcal{B} \in \bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J_i} V_{\varphi_{ij}}^C = \bigcap_{i \in I} F_i$ e, portanto, $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.

Mostramos com isso, que todo conjunto de fechados com a pif possui intersecção não vazia. Logo, pela Proposição 25, $(\text{Mod}(\mathcal{L}), d)$ é um espaço compacto.

(\Leftarrow) Sejam $(\text{Mod}(\mathcal{L}), d)$ um espaço compacto e $\Sigma = \{\varphi_i : i \in I\} \subseteq \text{For}(\mathcal{L})$ tal que todo subconjunto finito seu possua modelo.

Como para cada K finito, $K \subseteq I$, $\{\varphi_i : i \in K\}$ possui um modelo \mathcal{B} , então $\mathcal{B} \models \varphi_i$, para todo $i \in K$ e, portanto, $\mathcal{B} \in \bigcap_{i \in K} V_{\varphi_i}$. Assim, $\{V_{\varphi_i} : i \in I\}$ tem a pif e, pela Proposição 42, é uma família de fechados. Então, como $(\text{Mod}(\mathcal{L}), d)$ é um espaço compacto, segue que $\bigcap_{i \in I} V_{\varphi_i} \neq \emptyset$, ou seja, existe um modelo \mathcal{B} tal que $\mathcal{B} \models \varphi_i$, para todo $i \in I$. Assim, Σ possui um modelo e, portanto, a lógica \mathcal{L} é compacta. ■

Corolário 47 *A lógica \mathcal{L} é compacta.*

Demonstração: *É consequência do Teorema 46 e do Teorema 45.* ■

Por outro lado, em [5] temos uma demonstração de que \mathcal{L} é compacta e, desse modo, de acordo com o Teorema 46 teríamos uma demonstração alternativa de que o espaço $(Mod(\mathcal{L}), d)$ é compacto.

5 Considerações finais

Com estes resultados observamos uma íntima relação entre Lógica e Topologia. Mostramos que as propriedades da compacidade lógica e topológica garantem uma a outra. Usualmente, a compacidade é obtida após uma demonstração da adequação (correção e completude) forte. Uma consequência imediata destes resultados é que podemos obter a compacidade sem apelo à adequação e, desse modo, verificamos que adequação e compacidade são propriedades lógicas independentes.

A reflexão seguinte é para verificar o que precisamos para a obtenção dos resultados destas notas e como eles podem ser aplicados a outros sistemas lógicos, naturalmente proposicionais, porém distintos da lógica clássica. Mais especificamente, será que esta demonstração se aplica diretamente a lógicas modais Booleanas? E a sistemas lógicos não Booleanos como os intuicionistas, multivalorados e fuzzy? Quais mudanças sobre a definição dos espaços de modelos seriam convenientes para se correlacionar a compacidade topológica de tais sistemas e a compacidade lógica, se possível?

Referências

- [1] BELL, J. L.; MACHOVER, M. *A course in mathematical logic*. Amsterdam: North-Holland, 1977.
- [2] CIFUENTES, J. C.; SETTE, A. M.; MUNDICI, D. Cauchy Completeness in Elementary Logic. *The Journal of Symbolic Logic*, v. 61, n. 4, p. 1153-1157, 1996.
- [3] DUGUNDJI, J. *Topology*. Boston: Allyn and Bacon, 1966.
- [4] ENDERTON, H. B. *A mathematical introduction to logic*. San Diego: Academic Press, 1972.
- [5] FEITOSA, H. A.; PAULOVICH, L. *Um prelúdio à lógica*. São Paulo: Editora UNESP, 2005.
- [6] LIMA, E. L. *Elementos de topologia geral*. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009. (Textos Universitários)
- [7] LOIBEL, G. F. *Introdução à topologia*. São Paulo: Editora UNESP, 2007.
- [8] MENDELSON, E. *Introduction to mathematical logic*. Princeton: D. Van Nostrand, 1964.
- [9] RASIOWA, H.; SIKORSKI, R. *The mathematics of metamathematics*. Second edition revised. Warszawa: PWN, 1968.
- [10] SETTE, A. M. *Lógica*. Campinas: UNICAMP, 1993. (Notas de aulas)
- [11] SETTE, A. M.; CIFUENTES, J. C. Compactification of $L(Q)$. *Synthese*, v. 125, n. 1/2, p. 247-252, 2000.