

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JULIO DE MESQUITA FILHO”

FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**UMA INVESTIGAÇÃO DO MINOS E SUA APLICAÇÃO AO
PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO**

ADILSON PRETO DE GODOI

BAURU/SP

2014

ADILSON PRETO DE GODOI

**UMA INVESTIGAÇÃO DO MINOS E SUA APLICAÇÃO AO
PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO**

Dissertação de Mestrado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho” Campus de Bauru, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientadora: Prof^ª Dra. Edméa Cássia Baptista

Co-orientadora: Prof^ª Dra. Edilaine Martins Soler

BAURU/SP

2014

Godoi, Adilson Preto.

Uma investigação do MINOS e sua aplicação ao
Problema de Fluxo de Potência Ótimo / Adilson Preto de
Godoi, 2014
139 f.

Orientador: Edméa Cássia Baptista
Co-orientador: Edilaine Martins Soler

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual
Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2014

1. Método do Gradiente Reduzido. 2. Função
Lagrangiana Aumentada. 3. MINOS. 4. Fluxo de Potência
Ótimo. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de
Engenharia. II. Título.

**ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE ADILSON PRETO DE
GODOI, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA,
DO(A) FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU.**

Aos 19 dias do mês de maio do ano de 2014, às 08:30 horas, no(a) ANFITEATRO DA SEÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO DA FACULDADE DE ENGENHARIA, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Profa. Dra. EDMEA CASSIA BAPTISTA do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru, Prof. Dr. ANTONIO ROBERTO BALBO do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru, Prof. Dr. EDMARCIO ANTONIO BELATI do(a) Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas/Universidade Federal do ABC, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de ADILSON PRETO DE GODOI, intitulado "UMA INVESTIGAÇÃO DO MINOS E SUA APLICAÇÃO AO PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO". Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que, após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.


Profa. Dra. EDMEA CASSIA BAPTISTA


Prof. Dr. ANTONIO ROBERTO BALBO


Prof. Dr. EDMARCIO ANTONIO BELATI

“A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original”

Albert Einstein.

“A matemática é o alfabeto com o qual DEUS escreveu o universo”

Galileu Galilei.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus pela vida, e por estar sempre comigo.

Aos meu pais, que sempre me incentivaram nas minhas escolhas e a toda minha família.

Em especial à professora Dra. Edméa Cássia Baptista pela confiança depositada em mim para o desenvolvimento deste trabalho, pela excelente orientação, paciência e também pela amizade.

Também à professora Dra. Edilaine Martins Soler pela excelente co-orientação.

Aos professores Antonio Roberto Balbo, Leonardo Nepomuceno e Edmarcio Antonio Belati pela importante participação deste trabalho.

A equipe de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica que direta ou indiretamente contribuíram com o presente trabalho.

Aos amigos do Laboratório de Pesquisa em Otimização e Estudos Econômico em Sistemas de Potência.

A CAPES pela bolsa de estudos.

A todos que participaram da minha vida durante este período, muito obrigado!!!

RESUMO

No presente trabalho investigamos um método, o qual foi desenvolvido para resolver problemas de programação linear e não linear de grande porte. Neste método os problemas de programação linear são resolvidos pelo método primal simplex; já nos problemas com função objetivo não linear e restrições lineares é utilizado o método do gradiente reduzido; e para resolver os problemas com função objetivo e restrições não lineares: uma linearização de Taylor de primeira ordem nas restrições não lineares, uma função Lagrangeana Aumentada e o método do gradiente reduzido são utilizados. Este método está implementado no pacote de otimização MINOS. Neste contexto, propomos analisar a eficiência deste método e a influência da inicialização do parâmetro de penalidade na solução do problema de Fluxo de Potência Ótimo, o qual é estudado na Engenharia Elétrica, na área de Sistemas Elétricos de Potência. Testes computacionais foram realizados com os problemas de Fluxo de Potência Ótimo associados aos sistemas elétricos de 3, 14, 30, 57 e 118 barras.

Palavras-chave: Método do Gradiente Reduzido, função Lagrangiana Aumentada, MINOS, Fluxo de Potência Ótimo.

ABSTRACT

In this work we investigate a method, which was developed to solve large-scale linear and nonlinear programming problems. In this method, the linear programming problems are solved by the simplex primal method; in the problems with nonlinear objective function and linear constraints is used the reduced gradient method; and for solving problems with nonlinear objective function and nonlinear constraints: a first-order Taylor's linearization in the nonlinear constraints, an Augmented Lagrangian Function and the reduced gradient method are used. This method is implemented in the package MINOS. In this context, we propose to analyze the efficiency of this method and the influence of the initialization of penalty parameter in the solution of Optimal Power Flow problem, which is studied in the Electrical Engineering in the Electrical Power Systems area. Computational tests were realized with Optimal Power Flow problems associated with electrical systems 3, 14, 30, 57 and 118 buses.

Keywords: Reduced Gradient Method, function Augmented Lagrangian, MINOS, Optimal Power Flow.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Diagrama do sistema elétrico de 3 barras	77
Figura 2 - Convergência da função objetivo do sistema de 3 barras.....	80
Figura 3 - Magnitude das tensões do sistema de 3 barras.....	80
Figura 4 - Sistema elétrico IEEE 14 barras	82
Figura 5 - Convergência da função objetivo sistema IEEE 14 barras	83
Figura 6 - Magnitude das tensões do sistema IEEE 14 barras.....	84
Figura 7 - Sistema elétrico IEEE 30 barras	85
Figura 8 - Convergência da função objetivo sistema IEEE 30 barras	87
Figura 9 - Magnitude das tensões do sistema IEEE 30 barras.....	87
Figura 10 - Sistema elétrico IEEE 57 barras	89
Figura 11 - Convergência da função objetivo sistema IEEE 57 barras	91
Figura 12 - Magnitude das tensões do sistema de IEEE 57 barras	91
Figura 13 - Sistema elétrico IEEE 118 barras.....	93
Figura 14 - Convergência da função objetivo sistema IEEE 118 barras.....	95
Figura 15 - Magnitude das tensões do sistema IEEE 118 barras	95
Figura 16 - Gráfico de iterações por inicialização do parâmetro de penalidade ..	97

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Soluções obtidas para o problema de FPO de 3 barras.....	79
Tabela 2 – Valores da função objetivo do sistema elétrico IEEE 14 barras.....	83
Tabela 3 – Valores da função objetivo do sistema elétrico IEEE 30 barras.....	86
Tabela 4 – Valores da função objetivo do sistema elétrico IEEE 57 barras.....	90
Tabela 5 – Valores da função objetivo do sistema elétrico IEEE 118 barras.....	94
Tabela 6 – Iterações e tempo computacional.....	98

LISTA DE SÍMBOLOS

$f(x)$ - função objetivo;

$w(x)$ - vetor das restrições de igualdade;

$h(x)$ - vetor das restrições de desigualdade;

x e y - variáveis primais;

\mathbb{R} - conjunto dos números reais;

L - função Lagrangiana;

λ, γ, μ - multiplicadores de Lagrange;

c - parâmetro de penalidade;

ψ - função penalidade associada às restrições de igualdade;

Υ - função penalidade associada às restrições de desigualdade;

ζ - tolerância de convergência;

τ - atualizador do parâmetro de penalidade;

La - função Lagrangiana Aumentada;

∇_x - vetor gradiente em relação à x ;

ε - perturbação na restrição de igualdade;

re^{\max} - resíduo máximo;

z, s_1, s_2 e s - variáveis de folga;

∇_z - vetor gradiente em relação à z ;

$A, A_1, A_2, A_3, B, N, S$ - matrizes dos coeficientes das variáveis;

x_B - vetor das variáveis básicas;

x_N - vetor das variáveis não básicas;

x_S - vetor das variáveis superbásicas;

Gr - gradiente reduzido com variáveis básicas e superbásicas;

∇_N - vetor gradiente em relação à x_N ;

∇_B - vetor gradiente em relação à x_B ;

d_N - direção das variáveis não básicas;

d_B - direção das variáveis básicas;

α - passo;

cr - custo reduzido da função linear;

$F(x)$ - função objetivo não linear;

$Gradred$ - gradiente reduzido do MINOS;

$grad$ - gradiente reduzido da função objetivo;

Z - matriz coluna;

I - matriz identidade;

$grad_B$ - gradiente em relação à x_B ;

$grad_S$ - gradiente em relação à x_S ;

$grad_N$ - gradiente em relação à x_N ;

π - vetor das variáveis duais;

crn - custo reduzido da função não linear;

R - matriz triangular;

H - matriz Hessiana;

p_s - direção das variáveis superbásicas;

p_B - direção das variáveis básicas;

p_N - direção das variáveis não básicas;

p - direção das variáveis;

α_{\max} - passo máximo;

$g(x)$ - função não linear;

$\bar{g}(x)$ - função linearizada;

J_k - jacobiana avaliada no ponto x_k ;

V - magnitude da tensão;

θ - ângulo de fase da tensão;

tap - tap dos transformadores;

Q_k - potência reativa na barra k ;

P_k - potência ativa na barra k ;

V_k - magnitude da tensão na barra k ;

θ_k - ângulo de fase da tensão na barra k ;

ΔP_i - variação da potência ativa na barra i ;

ΔQ_i - variação da potência reativa na barra j ;

V_k^{\min} - limite inferior da tensão na barra k ;

V_k^{\max} - limite superior da tensão na barra k ;

tap_k^{\min} - limite inferior do tap dos transformadores;

tap_k^{\max} - limite superior do tap dos transformadores;

Q_k^{\min} - limite inferior da potência reativa na barra k ;

Q_k^{\max} - limite superior da potência reativa na barra k ;

g_{km} - condutância da linha km ;

b_{im} - susceptância da linha im ;

b_{jm}^{sh} - susceptância *shunt* da linha jm ;

b_j^{sh} - susceptância *shunt* da barra j ;

P_i^G - potência ativa gerada na barra i ;

P_i^C - potência ativa consumida na barra i ;

Q_j^G - potência reativa gerada na barra j ;

Q_j^C - potência reativa consumida na barra j ;

SUMÁRIO

Capítulo 1.....	1
Introdução	1
Capítulo 2.....	6
Uma visão do desenvolvimento da função Lagrangiana Aumentada.....	6
2.1 Apresentação do problema	6
2.2 Histórico da função Lagrangiana Aumentada.....	7
Capítulo 3.....	30
Métodos de otimização	30
3.1 O método dual-Lagrangiano.....	30
3.1.1 Algoritmo.....	31
3.1.2 Dificuldades computacionais	32
3.2 O método da função penalidade.....	33
3.2.1 Algoritmo.....	35
3.2.2 Dificuldades computacionais	35
3.3 O método da função Lagrangiana Aumentada.....	36
3.3.1 A função Lagrangiana Aumentada de HESTENES e POWELL.....	36
3.3.1.1 Algoritmo.....	40
3.3.2 A função Lagrangiana Aumentada de ROCKAFELLAR.....	42
3.3.2.1 Algoritmo.....	46
3.4 O método do gradiente reduzido	48
3.4.1 Algoritmo.....	51
Capítulo 4.....	53
O algoritmo do pacote de otimização MINOS	53
4.1 Introdução.....	53
4.2 Algoritmo para problemas lineares.....	54
4.3 Algoritmo para problemas com função objetivo não linear.....	56
4.4 Algoritmo para problemas com restrições não lineares.....	62

4.5 Algoritmo	66
Capítulo 5.....	70
O problema de Fluxo de Potência Ótimo	70
5.1 Introdução.....	70
5.2 Formulação matemática do FPO reativo	71
5.2.1 Função Objetivo	73
5.2.2 Restrições de igualdade.....	73
5.2.3 Restrições de desigualdade.....	74
Capítulo 6.....	76
Resultados numéricos	76
6.1 Sistemas elétricos de potência	76
6.1.1 Sistema elétrico de 3 barras.....	77
6.1.2 Sistema elétrico IEEE 14 barras.....	81
6.1.3 Sistema elétrico IEEE 30 barras.....	84
6.1.4 Sistema elétrico IEEE 57 barras.....	88
6.1.5 Sistema elétrico IEEE 118 barras.....	92
6.1.6 Análise dos resultados	96
6.1.7 Uma comparação com KNITRO.....	97
Capítulo 7.....	99
Conclusões	99
Trabalhos publicados.....	101
Bibliografia	103
Apêndice A.....	112
Saída do pacote de otimização MINOS	112
14 barras.....	112
30 barras.....	113
57 barras.....	115
118 barras.....	118
Apêndice B.....	126
Banco de dados dos sistemas elétricos.....	126

3 Barras.....	126
14 Barras.....	126
30 Barras.....	127
57 Barras.....	129
118 Barras.....	132

Capítulo 1

Introdução

Desde muito tempo, nossos antepassados, mesmo que informalmente, já tinham a noção de números. Tal conhecimento foi se tornando importante, pois com a lei da sobrevivência, fomos tendo que nos adaptar com ferramentas que nos ajudassem a melhorar nossas vidas. Vale ressaltar que os números, ao longo dos anos, sofreram uma série de modificações até chegarem às características de hoje.

O mesmo aconteceu com DANTZIG (1948), quando deparou-se com um grande problema durante a segunda guerra mundial: destinar os recursos escassos de alimentos de modo eficiente. Ele decidiu desenvolver uma ferramenta que o ajudasse a resolver seu problema, otimizando seus recursos. O método desenvolvido por ele é denominado de método Simplex.

Hoje em dia, encontramos problemas de otimização para serem resolvidos em várias áreas do conhecimento tais como: na engenharia, na matemática, na economia, na produção, no planejamento, entre outros. Os problemas de otimização podem ser divididos de várias maneiras, entre elas destacamos: os Problemas de Programação Linear (PPL) que apresentam função objetivo linear e também podem apresentar restrições lineares. Estes problemas podem ser resolvidos utilizando o método Simplex; e Problemas de Programação Não Linear (PPNL) que apresentam função objetivo não linear ou restrições não lineares, e em alguns casos ambos.

Para escolher que ferramentas devemos utilizar para resolver um PPNL, precisamos analisar as características que cada problema apresenta. Por exemplo, quando o problema é irrestrito, pode-se utilizar, entre outros, o método de Newton. Quando o problema apresentar função objetivo não linear e restrições lineares, o método do gradiente reduzido é uma ferramenta que pode ser utilizada em sua resolução. Por fim, caso o problema apresente função objetivo não linear e restrições não lineares, pode-se utilizar o método da função Lagrangiana Aumentada.

Dentre os métodos de solução para PPNL, destacamos neste trabalho os métodos: de Newton; do gradiente reduzido e da Lagrangiana Aumentada.

O método de Newton, consiste em aproximar localmente a função objetivo a ser otimizada por uma função quadrática e então otimizá-la. Este método utiliza o gradiente e a matriz Hessiana da função objetivo para encontrar a direção de busca. Quando a Hessiana é obtida de forma aproximada temos os métodos denominados quase-Newton.

Já, o método do gradiente reduzido foi proposto por WOLFE (1962), na década de 60, com o intuito de resolver problemas com função objetivo não linear e restrições lineares, o método transforma o problema original em subproblemas menores, dividindo-o em dois tipos de variáveis, as básicas e não básicas, e a otimização é realizada perturbando-se as variáveis não básicas para posteriormente ajustar as variáveis básicas de modo a continuar satisfazendo as restrições do problema.

Ainda na mesma década, mais precisamente em 1969, dois pesquisadores, HESTENES (1969) e POWELL (1969), apresentaram uma função auxiliar denominada de função Lagrangiana Aumentada. Os autores apresentaram,

simultaneamente e independentemente, seus trabalhos e chegaram aos mesmos resultados. Esta função é uma combinação dos métodos Dual-Lagrangiano e Penalidade. A função Lagrangiana Aumentada apresentada por eles, introduz na função objetivo uma combinação das restrições multiplicadas por um multiplicador de Lagrange e um parâmetro de penalidade. Apesar dos bons resultados conquistados, a função por eles apresentada foi desenvolvida para problemas apenas com restrições de igualdade. Posteriormente, ROCKAFELLAR (1973) expandiu a função Lagrangiana Aumentada apresentada por HESTENES (1969) e POWELL (1969) para problemas com restrições de igualdade e de desigualdade.

Outros métodos foram desenvolvidos e aprimorados nos últimos anos e pacotes de otimização eficientes foram disponibilizados à comunidade científica.

Destacamos o método implementado no pacote de otimização MINOS, o qual foi proposto por MURTAGH e SAUNDERS (1978), revisado em 1982, e posteriormente em 2003, pelo mesmos autores. Este método pode ser utilizado para problemas de programação linear, na qual o método utilizado é o primal simplex; para problemas de programação não linear com restrições lineares em que o método utilizado é do gradiente reduzido; por fim, para problemas com função objetivo e restrições não lineares em que as restrições não lineares são linearizadas por Taylor de primeira ordem, e é utilizada uma função Lagrangiana Aumentada para a resolução do problema original, em que a diferença entre as restrições e suas respectivas linearizações são incorporadas à função objetivo e associa-se a elas um multiplicador de Lagrange e um parâmetro de penalidade. O novo problema é então resolvido por um método do gradiente reduzido.

Vários problemas podem ser resolvidos pelo método de otimização implementado no pacote MINOS. Dentre eles, destacamos o Problema de Fluxo de Potência Ótimo (FPO), o qual é estudado na Engenharia Elétrica, na área de sistemas de energia. Seu modelo foi proposto por CARPENTIER (1962).

Após a formulação do FPO, vários métodos foram utilizados na sua resolução, entre eles destacamos os métodos do gradiente, de penalidade, de barreira, da função Lagrangiana Aumentada, pontos interiores, entre outros. Resolver o problema FPO consiste em determinar um ponto ótimo de operação para o Sistema Elétrico de Potência (SEP) levando em conta um determinado objetivo, melhorando o desempenho do sistema e respeitando os limites operacionais e físicos da rede elétrica. O FPO é um problema de otimização restrito, não linear, não convexo, de grande porte, com variáveis inteiras e canalizadas tornando-o assim, de difícil resolução.

Neste trabalho, propomos investigar a eficiência do método implementado no pacote de otimização MINOS na resolução do FPO e identificar a influência da inicialização do parâmetro de penalidade em sua resolução.

Este trabalho encontra-se dividido em 7 capítulos.

No capítulo 2, é apresentada uma revisão histórica do desenvolvimento do método da função Lagrangiana Aumentada. No capítulo 3, é realizada uma revisão dos métodos de otimização não linear. Os métodos implementados no pacote de otimização MINOS são explorados no capítulo 4. No capítulo 5, é apresentada a formulação o Problema de Fluxo de Potência Ótimo. Os resultados numéricos obtidos na resolução do FPO através MINOS são encontrados e discutidos no capítulo 6; e, por fim, no capítulo 7, são apresentadas as conclusões.

Capítulo 2

Uma visão do desenvolvimento da função Lagrangiana Aumentada

Neste capítulo apresentaremos um histórico do desenvolvimento do método da função Lagrangiana Aumentada. Esta revisão é baseada nos trabalhos de BAPTISTA (2001) e MASIERO (2011).

2.1 Apresentação do problema

Considere um problema de programação não linear restrito dado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \textit{Minimizar} && f(x) \\
 & \textit{sujeito a:} && w_i(x) = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \\
 & && h_j(x) \leq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, p \quad ; \\
 & && x_{\min} \leq x \leq x_{\max}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$, $w(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e todas as funções envolvidas são de classe C^2 .

2.2 Histórico da função Lagrangiana Aumentada

O método da função Lagrangiana Aumentada pode ser visto como uma combinação dos métodos da função penalidade e o Lagrangiano com o objetivo de aproveitar as melhores qualidades de ambos. Vários pesquisadores desenvolveram inúmeros estudos a respeito do tema. Seguem alguns deles e as principais características de seus resultados.

Em 1969, HESTENES (1969) apresentou um novo método para a resolução de problemas de programação não linear restritos, considerando uma única restrição de igualdade. Verificou que o método de penalidade apresentava problemas numéricos, como, por exemplo, o mau condicionamento da matriz Hessiana, quando o fator de penalidade tendia a infinito. Por isso, sugeriu uma mudança no método da função penalidade, originando o método dos multiplicadores. Neste, HESTENES (1969) utilizou uma nova função auxiliar, denominada função Lagrangiana Aumentada, a qual “incorpora” a função Lagrangiana clássica e um termo de penalidade quadrática. Uma das grandes vantagens desse método é que o fator de penalidade não precisa ser muito grande, pois o método converge para valores moderados deste fator. Entretanto, apresenta uma dificuldade: a necessidade de encontrar uma estimativa inicial do multiplicador de Lagrange.

No mesmo ano, POWELL (1969) trabalhou com o problema (2.1), considerando apenas as restrições de igualdade e apresentou uma forma equivalente do método dos multiplicadores, independentemente de HESTENES (1969). Neste trabalho, um algoritmo detalhado foi fornecido. A sua contribuição está em adotar uma regra para aumentar o valor do fator de

penalidade, visando a melhoria na convergência e garantindo sempre que o resíduo máximo das equações de igualdade diminua a cada iteração. POWELL (1969) preocupou-se em apresentar provas que garantam que o algoritmo apresentado é finito e que converge para a solução ótima do problema. Aqui, justifica-se a utilização da atualização dos multiplicadores de Lagrange, mostrando que a taxa de convergência do método, quando utiliza tais atualizações, é linear se as coordenadas do fator de penalidade escolhidas são suficientemente grandes.

Após a apresentação da função Lagrangiana Aumentada, muitos pesquisadores passaram a trabalhar nessa área. MIELE *et al.* (1972), com o objetivo de acelerar a convergência do método dos multiplicadores proposto por HESTENES (1969), apresentaram o método dos multiplicadores modificado e utilizaram algoritmos de primeira ordem. As modificações feitas no método de HESTENES (1969) foram: diminuição do número de iterações e mudança na regra de atualização dos multiplicadores. Esse novo método ficou conhecido como o método dos multiplicadores modificado 2 (MM-2). Por meio de exemplos, concluíram que o método apresentado converge mais rápido, ou seja, em um número menor de iterações, que o método proposto por HESTENES (1969). Apesar das diferenças, tanto no método de HESTENES (1969) quanto no método de MIELE *et al.* (1972), o número de iterações mínimo está diretamente ligado à escolha do fator de penalidade c .

Ainda não satisfeitos, com o objetivo de acelerar a convergência do método MM-2, MIELE *et al.* (1972), sugeriram a inclusão de mais uma modificação e denominaram o novo método de método dos multiplicadores modificado 3 (MM-3). Essa modificação consiste na seleção de um fator de penalidade de modo apropriado. Após a elaboração de ambos os métodos,

observando as duas versões apresentadas, os autores destacam que o método MM-3 mostrou-se mais eficiente em termos de convergência que o MM-2.

Outro pesquisador importante nessa área foi ROCKAFELLAR (1973a) que desenvolveu seu trabalho a partir do trabalho de HESTENES (1969), apresentando uma função Lagrangiana Aumentada para problemas convexos com restrições de desigualdade e a relação dessa função com a teoria da dualidade. Considerou o problema (2.1) apenas com restrições de desigualdade, transformou-as em de igualdade, incluindo uma variável de folga positiva, e construiu a Lagrangiana Aumentada vista em HESTENES (1969) associada ao novo problema. Com isso, ele conseguiu minimizá-la em função da variável de folga positiva, obtendo, então, uma nova função Lagrangiana Aumentada. Podemos destacar que a preocupação desse autor foi dar uma forma geral de funcionamento do método e não em fornecer um algoritmo particular.

Dando continuidade ao seu trabalho, ROCKAFELLAR (1973b), para o caso de restrições de desigualdade e problema convexo, forneceu a generalização do algoritmo apresentado simultaneamente por HESTENES (1969) e POWELL (1969) usando a função Lagrangiana Aumentada. Garantiu, também, a convergência global de seu algoritmo para o fator de penalidade fixo. Além disso, observou que a sequência de multiplicadores converge, mas pode existir mais de um limite, dependendo da escolha inicial do multiplicador, e deduziu algumas consequências das propriedades vistas em seu trabalho anterior para o método dos multiplicadores de HESTENES (1969) e POWELL (1969).

Seguindo com as contribuições, foi ARROW *et al.* (1973) que apresentou uma teoria de ponto de sela para problemas não convexos, aplicada a uma classe de funções denominadas funções Lagrangianas modificadas, em que se inclui a

função Lagrangiana Aumentada apresentada em HESTENES (1969) e a proposta por ROCKAFELLAR (1973a). Vale ressaltar a importância deste autor, pois anteriormente a contribuição dele somente caracterizava-se ponto de sela para problemas convexos e função Lagrangiana clássica.

Mais uma vez, agora em 1974, e seguindo a mesma linha, ROCKAFELLAR (1974) preocupou-se com problemas não convexos. Trabalhando com o problema (2.1), somente com restrições de desigualdade, ele usou a sua função Lagrangiana Aumentada para remover o *gap* de dualidade que normalmente ocorre em problemas não convexos quando utilizamos a função Lagrangiana clássica. Baseando-se nos resultados de ARROW *et al.* (1973) sobre ponto de sela para problemas não convexos, introduziu perturbações ao problema original, forneceu condições necessárias e suficientes (em termos da estabilidade) para a existência de um ponto de sela global da Lagrangiana Aumentada.

No ano seguinte, em 1975, FLETCHER (1975) retomou o trabalho de POWELL (1969) e apresentou uma função Lagrangiana Aumentada para o problema (2.1), considerando somente as restrições de desigualdade. Provou que, na ausência da condição de complementaridade estrita, o algoritmo converge para um ótimo, quando c é suficientemente grande.

Apesar de tantos avanços realizados, BERTSEKAS (1976a) propôs uma teoria de dualidade muito parecida com a proposta em ROCKAFELLAR (1974), diferenciando-a, entretanto, pela construção da função objetivo dual, a qual é definida a partir de um problema primal perturbado. No caso de restrições de desigualdade, ele trabalhou com a mesma função Lagrangiana Aumentada apresentada em ROCKAFELLAR (1974) e mostrou que o

procedimento é similar ao desenvolvido para igualdade. Optou por fazer uma interpretação do método dos multiplicadores para a resolução de problemas não lineares e não convexos usando o ponto de vista da função penalidade, ao invés de encará-lo como um método primal-dual. Ele desenvolveu o que denominou de algoritmo da função penalidade generalizado, no qual englobou o método da função penalidade e o método dos multiplicadores. Em seu algoritmo, a função Lagrangiana Aumentada de HESTENES (1969) é minimizada para uma sequência de escalares e vetores, com a imposição de que a sequência deve permanecer dentro de um conjunto arbitrário S limitado. Os resultados de convergência em relação ao método dos multiplicadores são globais e significam uma melhoria substancial para os resultados locais existentes, ressaltando-se o fato de que o método dos multiplicadores converge mais rapidamente que o método das penalidades. Além disso, o mesmo autor apresentou um estudo sobre as propriedades de convergência do método dos multiplicadores cujo objetivo foi de demonstrar a superioridade deste sobre os métodos de penalidade clássicos.

Em 1979, GLAD (1979) forneceu um algoritmo para a minimização de uma função Lagrangiana Aumentada. Examinou as propriedades de convergência do seu método dos multiplicadores para três técnicas distintas de atualização dos multiplicadores de Lagrange, utilizando uma função Lagrangiana Aumentada análoga à apresentada por ROCKAFELLAR (1973a). Identificou propriedades e teoremas de convergência local para o problema (2.1), somente com restrições de igualdade. O autor estendeu essas propriedades e teoremas para problemas com restrições de desigualdade. Observou que a técnica da função penalidade é utilizada como um último recurso para garantir

a convergência, isto é, a atualização do fator de penalidade só é idealizada para garantir a convergência.

No mesmo ano, HAN (1979) estudou o método dos multiplicadores baseando-se nos trabalhos de HESTENES (1969), POWELL (1969) e ROCKAFELLAR (1973a) e utilizou uma função Lagrangiana Aumentada semelhante à apresentada por GLAD (1979). Verificou que, quando o fator de penalidade tende ao infinito, o método dos multiplicadores tem uma taxa de convergência superlinear, mas podem ocorrer instabilidades numéricas. Com o objetivo de evitar tal dificuldade e, ao mesmo tempo, encontrar uma taxa superlinear de convergência, propôs a determinação dos multiplicadores por meio da solução de subproblemas de programação quadrática restrita não negativa e utilizou para atualização dos fatores de penalidade a estratégia desenvolvida por POWELL (1969) e FLETCHER (1975).

DI PILLO e GRIPPO (1979) introduziram uma nova classe de função Lagrangiana Aumentada para a resolução do problema (2.1) somente com restrições de igualdade. A nova classe é obtida ao adicionar-se à função Lagrangiana Aumentada proposta por HESTENES (1969) um fator de penalidade sobre a condição necessária de primeira ordem aplicada à função Lagrangiana clássica. Consideraram, também, o método dos multiplicadores, que resolve uma sequência de problemas de minimização irrestrita. Os autores mostraram que, usando a sua Lagrangiana Aumentada e hipóteses adequadas, uma solução local do problema restrito e os valores correspondentes dos multiplicadores de Lagrange podem ser encontrados, fazendo-se uma única minimização local irrestrita dessa Lagrangiana em relação às variáveis x e λ , para valores finitos do fator de penalidade, não sendo utilizada a inversão de matrizes. Usaram uma função penalidade exata. Aplicaram o seu método aos

exemplos de MIELE *et. al* (1972). Apesar de todos os resultados, esse método apresentou algumas desvantagens em relação aos demais, como o aumento da dimensão do problema e a presença de derivadas de primeira ordem na sua função Lagrangiana Aumentada.

Relacionada à proposta por DI PILLO e GRIPPO (1979), BOGGS e TOLLE (1980) introduziram uma nova classe de função Lagrangiana Aumentada para o mesmo problema somente com restrições de igualdade. O objetivo era evitar as falhas que ocorriam na função Lagrangiana clássica e nas funções Lagrangianas Aumentadas até então estudadas. A nova função Lagrangiana Aumentada incorpora as propriedades da função estudada por HESTENES (1969), tem um comportamento melhor com respeito ao vetor multiplicador. Os autores ressaltaram que, em alguns resultados apresentados, o valor do fator de penalidade é irrelevante e desenvolveram uma teoria de dualidade que utilizava a nova função Lagrangiana Aumentada e estabeleceram relação entre os passos de Newton para a Lagrangiana clássica e para a nova Lagrangiana Aumentada.

De maneira análoga à apresentada em seu trabalho de 1979, DI PILLO & GRIPPO (1982) apresentaram uma nova função Lagrangiana Aumentada, desenvolvida, considerando o mesmo problema, apenas com restrições de desigualdade. Neste trabalho, as restrições de desigualdade foram convertidas em de igualdade pela introdução de variáveis de folga. Dedicaram seu trabalho a resultados teóricos sobre as propriedades da sua função Lagrangiana Aumentada.

Inspirado nos trabalhos de DI PILLO e GRIPPO (1979, 1982), LUCIDI (1988) introduziu uma nova classe de funções Lagrangianas Aumentadas exatas

e continuamente diferenciáveis para o problema (2.1), em que considerou apenas as restrições de desigualdade. Apresentou um algoritmo com convergência global e determinou que o objetivo de seu trabalho era o de estabelecer resultados similares entre a função Lagrangiana Aumentada e a sua função penalidade exata.

Preocupados com a resolução de problemas de grande porte e em sanar as dificuldades encontradas nesta área, CONN *et al.* (1991) deram continuidade ao trabalho, no qual desenvolveram um algoritmo de programação restrita para problemas de grande porte, utilizando uma função Lagrangiana clássica. Foi utilizado o algoritmo dentro de uma estrutura de Lagrangiana Aumentada. Trabalharam, inicialmente, com uma função Lagrangiana Aumentada associada ao problema (2.1) somente com restrições de igualdade; a seguir, estenderam o resultado para o caso de variáveis canalizadas e apresentaram dois algoritmos para resolver o problema (2.1). Por último, estabeleceram a convergência global para seu algoritmo.

HAGER (1993) trabalhou com o problema (2.1) apenas com restrições de igualdade. Apresentou um algoritmo de otimização irrestrita, que combina, em um esquema de otimização irrestrita, o método do gradiente conjugado, a função Lagrangiana Aumentada vista em HESTENES (1969) e uma atualização do multiplicador para obter convergência quadrática global.

Em 1993 e tendo como base a função Lagrangiana apresentada por si mesmo em 1973, ROCKAFELLAR (1993) apresentou uma teoria sobre multiplicadores de Lagrange para problemas com restrições de igualdade e desigualdade. O autor definiu e demonstrou um teorema de ponto de sela, o qual é muito mais poderoso que o definido para a Lagrangiana clássica, devido

ao fato de ser válido na ausência de convexidade no problema original. Ressaltou, ainda, que, apesar de todas as vantagens da Lagrangiana Aumentada, ela não possui a separabilidade da Lagrangiana clássica com respeito à x , a qual é extremamente importante na resolução de problemas de grande porte.

No mesmo ano, BERTSEKAS e TSENG (1993) analisaram o método dos multiplicadores exponencial para problemas de minimização restrita convexa, os quais trabalham com o método da função Lagrangiana Aumentada, utilizando uma função penalidade exponencial. Eles justificaram a escolha em usar a Lagrangiana Aumentada exponencial pelo fato de ela ser duas vezes diferenciável se as funções f e h também o são, podendo ser utilizado o método de Newton de modo mais eficiente e com garantia de convergência superlinear. Esse método desenvolvido pelos autores tem sido usado para resolver muitos problemas de programação linear encontrados na programação da produção de energia em sistemas de potência.

BOUKARI e FIACCO (1995) apresentaram um levantamento histórico dos métodos de programação não linear e uma lista de programas existentes que utilizam tais métodos. O objetivo desses autores foi o de relatar o que cada autor fez no período de 1968 a 1993.

Com a finalidade de obter uma convergência global robusta e uma convergência local rápida, PSIAKI (1995) propôs um novo algoritmo para programação não linear, utilizando a função Lagrangiana Aumentada, proposta por POWELL (1969) para problemas com restrições de igualdade, e estendida por FLETCHER (1975) para problemas com restrições de desigualdade. O autor

caracterizou seu algoritmo como uma variação do algoritmo proposto por HESTENES (1969) e por POWELL (1969).

A partir dos próximos trabalhos, encontraremos métodos que passam a utilizar o método da função barreira e o método da função Lagrangiana Aumentada associados.

SHANNO *et al.* (1996) sugeriram, em seu trabalho, o uso de uma função mista para resolver o problema (2.1). Nesse estudo, é mostrado que nessa função mista as restrições de igualdade são tratadas por uma função Lagrangiana Aumentada e as de desigualdade por uma função barreira-penalidade que foi estudada em BREITFELD & SHANNO (1996).

CONN *et al.* (1997) apresentaram uma classe de métodos denominados métodos de barreira Lagrangianos. Trabalharam com o problema (2.1) somente com restrições de desigualdade do tipo maior ou igual e, ainda, acrescentaram a ele a canalização da variável primal x . Formularam uma nova função auxiliar com restrições de igualdade e de desigualdade do tipo maior ou igual. Essa função é denominada função Lagrangiana Aumentada/barreira lagrangiana. Nela, as restrições de desigualdade e igualdade são tratadas pela função barreira e função Lagrangiana Aumentada, respectivamente. Para os autores, seu método de barreira lagrangiano resolveu noventa por cento dos problemas-testes e, na maioria das vezes, foi considerado mais eficiente que o da função Lagrangiana Aumentada.

Baseados em uma função Lagrangiana Aumentada não quadrática, para a qual os fatores de penalidade são funções dos multiplicadores, BEN-TAL e ZIBULEVSKY (1997) estudaram uma classe de métodos para resolver problemas convexos. Esses métodos ficaram conhecidos como métodos dos

multiplicadores barreira/penalidade (PBM). A principal característica deles é que são especificados por uma função barreira/penalidade e uma função de atualização do fator de penalidade (função sublinear dos multiplicadores). Trabalharam com o problema (2.1), considerando apenas as restrições de desigualdade. Para desenvolver seu trabalho, utilizaram duas funções: uma função penalidade logarítmica-quadrática e uma função penalidade *reciprocal-quadrática*. Apresentaram, também, uma interpretação dual do método e as propriedades de convergência. Descreveram a implementação, ressaltando as funções de atualização dos fatores de penalidade. E para determinar a solução x que minimiza a sua função Lagrangiana Aumentada utilizaram o método de Newton. Os autores apresentaram as atualizações dos multiplicadores de Lagrange e dos fatores de penalidade.

No ano seguinte, DUSSAULT (1998) trabalhou com a mesma função Lagrangiana Aumentada apresentada em HESTENES (1969), com o intuito de analisar a taxa de convergência. Utilizou o problema (2.1) considerando as restrições de igualdade. Analisou a taxa de convergência local para as variáveis primais e duais, utilizando o método com diferentes regras de atualização dos multiplicadores de Lagrange. Com o algoritmo apresentado, garantiu sua convergência global e mostrou algumas regras para a atualização dos fatores de penalidade. Com esse trabalho, foi possível concluir que o método da função Lagrangiana Aumentada pode ter uma convergência rápida por meio de uma cuidadosa atualização dos fatores de penalidade.

Em 1999, DOSTÁL *et al.* (1999) introduziram um algoritmo que trabalha com problemas de programação quadrática estritamente convexa com restrições de igualdade. O principal interesse na elaboração desse método é a resolução de problemas de grande porte. Trata-se de um algoritmo modificado em relação ao

que foi visto em HESTENES (1969). Os autores utilizaram um controle de precisão da solução dos problemas de minimizar a Lagrangiana Aumentada com relação à variável primal x . Para os autores, esse controle de precisão é caracterizado como a principal melhora do método de HESTENES (1969) e exige que o erro do gradiente da função Lagrangiana Aumentada seja menor que um escalar positivo multiplicado pelo erro nas restrições. Tal controle, bem como o algoritmo, é muito semelhante ao visto em HAGER (1993), diferenciando-se deste por ser usado como critério de parada, ao invés de indicar quando o fator de penalidade deve ser aumentado.

Ainda em 1999, foi apresentado um método denominado método da Lagrangiana Aumentada barreira modificada, para resolver o problema (2.1) com restrições de igualdade e desigualdade do tipo maior ou igual. Seus autores foram GOLDFARB *et al.* (1999). Esse trabalho é a combinação dos métodos da Lagrangiana Aumentada de HESTENES (1969) e POWELL (1969) e o da função barreira modificada de POLYAK (1992). Pode ser considerado um método de Lagrangiana Aumentada interior-exterior. As restrições de desigualdade são tratadas por meio de um termo de barreira modificada; e as restrições de igualdade, por um termo de Lagrangiana Aumentada.

Já em 2000, KREJIC *et al.* (2000) introduziram um algoritmo da função Lagrangiana Aumentada, estudada em HESTENES (1969), que utilizava aproximações Gauss-Newton, da matriz Hessiana, nas iterações internas. Através desse modelo de Gauss-Newton, as aproximações quadráticas da função Lagrangiana Aumentada tornam-se convexas. Como utilizaram aproximações da Hessiana, ao invés da Hessiana clássica, os autores consideraram seu método mais eficiente.

Um novo método para resolução de problemas de minimização com função objetivo não linear, restrições lineares e não lineares, e variáveis canalizadas, foi apresentado por MIJANGOS e NABONA (2001). Nesse método, o problema original é resolvido por meio de sucessivas minimizações de um problema auxiliar que minimiza uma função Lagrangiana Aumentada que inclui somente as restrições não lineares. Como referência, os autores utilizaram a função Lagrangiana Aumentada de HESTENES (1969) e POWELL (1969). O método se destaca quando as restrições lineares são equações de conservação de fluxo, pois existem técnicas eficientes para resolver problemas de rede não linear. Analisaram a viabilidade de estimar os multiplicadores das restrições não lineares pela aplicação das condições de KKT e utilizaram técnicas de redução de variáveis durante a otimização. Além disso, compararam o desempenho computacional dessa estimativa com a atualização dos multiplicadores, proposta por HESTENES (1969) e POWELL (1969).

Com o objetivo de resolver problemas de programação linear, SHERALI *et al.* (2001) demonstraram uma investigação de três abordagens de função penalidade exterior. Estas abordagens são: método penalidade conjunto ativo I, método penalidade baseado na igualdade-desigualdade e método da função da Lagrangiana Aumentada. Foram exploradas variantes particulares eficazes para cada método juntamente com comentários e experiências sobre estratégias e alternativas de algoritmos investigados empiricamente. Testes de classificação, com base na média dos resultados computacionais obtidos, foram realizados utilizando duas estatísticas diferentes que avaliam a velocidade de convergência e qualidade e precisão da solução. Em geral, a variante do método da função Lagrangiana Aumentada foi a que rendeu o melhor desempenho no que diz respeito às duas estatísticas citadas anteriormente. No entanto, para problemas

de programação linear esparsos, o método de penalidade conjunto ativo I pareceu ser a melhor alternativa entre os algoritmos testados. Os métodos testados foram competitivos (por vezes favorável) em alcançar uma solução definitiva (ainda que apenas perto do ideal) para problemas de programação linear de grande porte e baixa densidade.

BELTRAN e HEREDIA (2002) propuseram uma relaxação da Lagrangiana Aumentada para o problema de *Unit commitment*. Porém, uma das principais desvantagens do método de relaxação da Lagrangiana Aumentada é que o termo quadrático introduzido por este método não é separável. Foram comparados dois métodos designados para lidar com a não separabilidade da função Lagrangiana: o método do problema de princípio auxiliar e o método de blocos de coordenadas descendentes. Além disso, foi usado o problema de *Unit commitment* para testar ambos os métodos. O objetivo do problema de *Unit commitment* é otimizar a produção e distribuição de eletricidade.

No mesmo ano, ARGAEZ e TAPIA (2002) mostraram uma linha de pesquisa do método primal-dual de pontos interiores para Programação não linear introduzido por El-Bakry, Tapia, Tsuchiya e Zhang. Eles utilizaram uma função mérito nova, que incorpora uma modificação da função Lagrangiana Aumentada-padrão e uma fraca noção de centralidade. Eles estabeleceram uma teoria de convergência global.

No ano seguinte MOGUERZA e PRIETO (2003) descreveram uma implementação eficiente de um algoritmo de método de pontos interiores Lagrangiana Aumentada para problemas não convexos que usou direções de curvatura negativa. Como o objetivo principal do trabalho foi a utilização prática de curvatura negativa, um conjunto de resultados numéricos em

problemas testes pequenos foi apresentado. As diretrizes propostas asseguraram a convergência de segunda ordem de KKT e melhoraram a eficiência computacional do processo. O interessante desse método foi a estratégia de combinar uma direção de curvatura negativa e uma direção de Newton modificado. Com base nos resultados obtidos, a relevância da utilização de direções de curvatura negativa foi discutida.

Na área da programação não linear geral, foram AVELINO e VICENTE (2003) que contribuíram para o desenvolvimento de multiplicadores do método da função Lagrangiana Aumentada, introduzindo uma nova atualização para os multiplicadores correspondentes às restrições de desigualdade. Essa atualização mantém a positividade dos multiplicadores sem a necessidade de uma projeção positiva, como resultado da verificação das condições necessárias de primeira ordem para a minimização de uma função de penalidade Lagrangiana Aumentada modificada. No novo método dos multiplicadores, o papel destes são trocados: os multiplicadores correspondentes às restrições de desigualdade são atualizados de forma explícita, ao passo que os multiplicadores correspondentes às restrições de igualdade são aproximados implicitamente. Foi mostrado que as propriedades básicas da convergência local do método tradicional dos multiplicadores são válidos também para o método proposto.

No ano seguinte, DINIZ-EHRHARDT *et al.* (2004) introduziram métodos da função Lagrangiana Aumentada utilizando o gradiente projetado espectral (SPG) para a solução das restrições convexas. Esse gradiente é um algoritmo de grande porte vinculado à otimização com restrições e mostrou-se eficaz para a solução de muitos problemas de minimização de grande porte, com restrições canalizadas. Portanto, é comum testar o seu desempenho nas resoluções dos

subproblemas que aparecem em métodos de programação não linear baseados em Lagrangianas Aumentadas.

No ano 2005, foram introduzidas mais alternativas para o método da função Lagrangiana Aumentada, com BIRGIN *et al.* (2005). O mais conhecido algoritmo da Lagrangiana Aumentada para minimização com restrições de desigualdade é o método de Powell-Hestenes-Rockafellar (PHR). Porém, este método apresenta uma desvantagem: a função objetivo do subproblema não é duas vezes continuamente diferenciável. Isto motivou a realização deste trabalho e a introdução de novas alternativas.

Ainda em 2005, BAPTISTA *et al.* (2005) apresentaram uma nova abordagem para resolução do problema de FPO, baseada no método Lagrangiana Aumentada barreira Logarítmica. Foi considerada a aplicação do método primal-dual barreira logarítmica para magnitude de tensão e os *taps* variáveis dos transformadores e as demais restrições foram tratadas através do método da função Lagrangiana Aumentada. A função Lagrangiana agregou todas as restrições.

Através de técnicas de minimização irrestrita, DU *et al.* (2006) mostraram uma classe de Lagrangiana Aumentada para resolver problemas de otimização não linear com restrições de igualdade. Com isso, os autores demonstraram que uma solução do problema original restrito e os correspondentes valores dos multiplicadores de Lagrange, podem ser encontrados através da realização de uma única minimização irrestrita da Lagrangiana Aumentada. Para problemas de programação quadrática com restrições de igualdade, o otimizador é obtido pela minimização de uma função quadrática no espaço relaxado.

Em 2006, são introduzidos, por ANDREANI *et al.* (2006) dois algoritmos da Lagrangiana Aumentada para resolver sistemas de KKT. Os algoritmos diferem na maneira na qual os parâmetros de penalidade são atualizados. Foi provado que os pontos factíveis que satisfazem as restrições, são soluções de KKT. O limitante dos parâmetros de penalidade foi estabelecido e experimentos numéricos foram apresentados.

Considerando os programas de otimização não linear com restrições de desigualdade matricial, também conhecidos como programas semidefinidos não lineares, NOLL (2007) provou a convergência local do método da função Lagrangiana Aumentada que utiliza funções de penalidade. Para isso, a condição de otimalidade suficiente de segunda ordem e um teorema da função implícita adequado foram utilizados, sem a necessidade de conduzir o parâmetro de penalidade a 0.

LUO *et al.* (2007) descreveram vários tipos de funções Lagrangiana Aumentada para otimização restrita. Uma das principais contribuições deste trabalho foi mostrar que a suposição do limite dos multiplicadores de Lagrange, que parece indispensável na análise de convergência clássica, pode ser descartada se certas regras de atualização para esses multiplicadores forem apresentadas. Isso resultou em algoritmos da Lagrangiana Aumentada com duas estratégias, uma de atualização do multiplicador condicional e outra de multiplicador normalizado. Resultados de convergência global de cada um desses algoritmos foram provados sem o pressuposto do limite. Essa pesquisa sugere investigações futuras, tais como a eficácia dessas regras de atualização em relação ao desempenho numérico e sob quais condições que cada um dos algoritmos propostos de Lagrangiana Aumentada modificada goza de uma taxa de convergência linear.

Ainda em 2007, BIRGIN e MARTÍNEZ (2007) propuseram uma aproximação quase-Newton com pré-condicionadores secantes, tendo em conta a estrutura da Lagrangiana Aumentada que vem do trabalho popular de Powell-Hestenes-Rockafellar. Sugeriram um algoritmo combinado que usa o método quase-Newton (ou Newton-truncado), dependendo da existência de restrições ativas na função Lagrangiana Aumentada. Métodos da função Lagrangiana Aumentada para otimização em larga escala geralmente exigem algoritmos eficientes para minimização restrita.

No mesmo ano, CARVALHO *et al.* (2008) estabeleceram uma combinação do método do gradiente reduzido e o método da função Lagrangiana Aumentada com barreiras, como nova abordagem para resolver o problema de FPO. Além disso, também foram exploradas as características específicas das relações entre as variáveis do problema de FPO.

Em 2008, LUO *et al.* (2008) apresentaram novas propriedades de convergência dos métodos primal-dual baseados na função Lagrangiana Aumentada de ROCKAFELLAR (1973) para problemas de otimização com restrições de desigualdade. Quatro diferentes estratégias algorítmicas foram consideradas para contornar a condição de limite dos multiplicadores na análise de convergência para o método primal-dual. Convergência para uma solução ótima global do problema original foi primeiro estabelecido por um esquema básico primal-dual. As propriedades de convergência do método da função Lagrangiana Aumentada usando a regra de atualização dos multiplicadores condicional foram então apresentadas. Além disso, os autores investigaram o uso de critérios de atualização do parâmetro de penalidade e normalização dos multiplicadores nos métodos da função Lagrangiana Aumentada; e

apresentaram alguns resultados numéricos preliminares para as quatro estratégias de métodos da função Lagrangiana Aumentada.

Como mais uma colaboração em 2008, MENDONÇA *et al.* (2008) utilizaram métodos quase-Newton para resolver sistemas não lineares como aceleradores de algoritmos do método da função Lagrangiana Aumentada com restrições de igualdade. Este método é importante para a resolução de problemas de otimização restrita. Em muitas situações, geralmente isso envolve a solução de uma série de sistemas de equações não lineares. A melhora do desempenho do método da função Lagrangiana Aumentada é geralmente associada ao desenvolvimento de uma abordagem inovadora para a solução destes sistemas, no caso deste artigo, a abordagem dos métodos quase-Newton citados acima. Correções de rank 1 foram introduzidas e a convergência e resultados numéricos foram apresentados mostrando a confiabilidade da abordagem proposta.

WU *et al.* (2009) apresentaram as propriedades de convergência global do método primal-dual usando uma classe de funções Lagrangiana Aumentada para problemas de otimização não convexos com restrições de desigualdade. Para isso, foram construídos quatro métodos da função Lagrangiana Aumentada modificada baseados em diferentes estratégias algorítmicas; e, com isso, mostraram que a convergência para um ponto KKT pode ser assegurada sem a necessidade de condição de limite da sequência de multiplicadores.

WANG e LI (2009) classificaram diferentes funções Lagrangianas Aumentadas em três classes unificadas. Com base em duas formulações, foram construídos, respectivamente, dois métodos da função Lagrangiana Aumentada convergentes que não exigem a solvabilidade global da relaxação Lagrangiana e

cujas propriedades de convergência global, não exigem o limite da sequência de multiplicadores e a qualificação da restrição. Em particular, quando a sequência de pontos não converge, é dada uma condição necessária e suficiente para a convergência do valor objetivo dos pontos de iteração. Derivaram dois algoritmos dos multiplicadores que exigem a mesma condição de convergência e possuem as mesmas propriedades que as propostas nos métodos da função Lagrangiana Aumentada convergentes. A existência de um ponto de sela global é fundamental para garantir o sucesso da pesquisa dual. Além de tudo isso que propuseram, os autores generalizaram os teoremas de existência de um ponto de sela global na literatura no âmbito das classes unificadas de funções Lagrangiana Aumentada.

Em 2010, IUSEM e NASRI (2010) introduziram métodos da função Lagrangiana Aumentada para resolver problemas em que os conjuntos factíveis são definidos por desigualdades convexas, generalizando o método da função Lagrangiana Aumentada proximal para otimização restrita. Em cada iteração, as variáveis primais são atualizadas resolvendo um problema de desigualdade variacional irrestrito, e, em seguida, as variáveis duais são atualizadas através de uma fórmula. A análise completa de convergência é apresentada e permite a solução inexata dos subproblemas.

Para resolver o FPO reativo de uma maneira coordenada e descentralizada no contexto de um sistema de energia interligado multi-área, ECHEVERRI *et al.* (2010) aplicaram dois métodos de decomposição matemática. O primeiro método é baseado em uma abordagem da Lagrangiana Aumentada usando o princípio de problema auxiliar (APP). O segundo método usa as técnicas de decomposição baseadas nas condições de otimalidade de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). A viabilidade de cada método

que foi utilizado na decomposição de multi-área FPOR foi estudada e os correspondentes modelos matemáticos são apresentados. Sistemas testes foram usados para demonstrar o funcionamento e a eficácia dos métodos de decomposição.

Em 2010 GILL e ROBINSON (2010) propuseram uma função Lagrangiana Aumentada primal-dual para problemas restritos linearmente. O método é baseado na função apresentada por HESTENES. As vantagens do método, segundo o autor, é a habilidade de controlar a qualidade das variáveis duais durante a resolução dos subproblemas; a disponibilidade de estimativas de variáveis duais melhores sob o término precoce do subproblema; a habilidade para regularizar o sub problema impondo limites nas variáveis duais. O autor propõe em seu trabalho três métodos: Método primal-dual lagrangiano com restrições de limitantes; Método primal-dual Lagrangiano com restrições lineares; Método primal-dual de programação quadrática sequencial.

BIRGIN e MARTÍNEZ (2011) propuseram uma estratégia de diminuir o parâmetro de penalidade da função Lagrangiana Aumentada, uma vez que este impacta diretamente no desempenho do método, o aumento do parâmetro de penalidade pode dificultar a resolução do problema para uma determinada precisão. Visando evitar esse problema o autor propõe analisar que o processo parece estar convergindo e os multiplicadores de Lagrange estão bem próximos pode-se diminuir o parâmetro de penalidade.

Ainda em 2011, XIAO *et al.* (2011) no trabalho apresentado propuseram um algoritmo da função Lagrangiana Aumentada, na qual ela é separável, tanto a função objetivo quanto as restrições do problema, resolvendo um subproblema

variável fixando a outra parte do problema. Os autores também propõem uma linearização para a resolução do subproblema.

BIRGIN *et al.* (2012) discutiram a dificuldade do parâmetro de penalidade precisar ser muito grande, na Lagrangiana Aumentada é que isto dificulta avaliar o processo de resolução do problema. Por este motivo os autores propõem uma função Lagrangiana Aumentada com limite no parâmetro de penalidade, e também a heurística de aumento este parâmetro moderadamente para conseguir convergência no método.

Em 2013 TAPPENDEN *et al.* (2013) apresentaram um trabalho comparando os métodos: de aproximação quadrática diagonal e de descida de coordenadas paralelas, para problemas de otimização convexa com função objetivo separável. Estes métodos são utilizados para minimização da função Lagrangiana Aumentada associada ao problema. Os autores mostram que a Lagrangiana Aumentada é não separável pelo método acima devido a alguns termos cruzados, porém para utilizarem os métodos fazem uma aproximação separável da função em torno de um ponto, desprezando esses termos cruzados. Por fim mostram que os métodos: de aproximação quadrática diagonal e de descida de coordenadas paralelas são equivalentes.

Os autores DUAN e HUANG (2013) propõem um método da Lagrangiana Aumentada de ponto fixo para problemas convexos. Eles utilizam no termo de penalidade quadrática o produto interno da norma quadrática associada com o parâmetro de penalidade. Os autores ainda propõem uma regra de atualização dos multiplicadores de Lagrange para melhorar a convergência do método. Por fim eles aplicam o método proposto em problemas de processamento de imagens.

Em 2014 JIANG *et al.* (2014) propõem um algoritmo para problemas não lineares de programação de dois níveis. No algoritmo proposto as condições de KKT são utilizadas no nível inferior do problema para transformar o problema de dois níveis em um problema de um único nível com restrições complementares, posteriormente, é adotada uma função de suavização ao problema, pois o problema é não diferenciável, por fim é utilizada a função Lagrangiana Aumentada no problema suavizado para resolve-lo.

No próximo capítulo nós apresentamos uma revisão de alguns métodos de otimização.

Capítulo 3

Métodos de otimização

Neste capítulo apresentamos uma revisão de alguns métodos de otimização, os quais são utilizados no método que será investigado no capítulo 4: dual-Lagrangiano, função penalidade, função Lagrangiana Aumentada e do gradiente reduzido.

3.1 O método dual-Lagrangiano

O método dual-Lagrangiano foi desenvolvido para resolver problemas convexos. O método consiste em associar uma função auxiliar ao problema (2.1), na qual incorpora-se uma combinação das restrições à função objetivo, tornando o problema (2.1) um problema irrestrito. A função auxiliar é denominada de função Lagrangiana e é apresentada da seguinte forma:

$$L(x, \lambda, \gamma) = f(x) + \lambda^t w(x) + \gamma^t h(x); \quad (3.1)$$

em que λ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange associado às restrições de igualdade e γ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade.

Se o problema (2.1) é convexo, existem multiplicadores λ^* e γ^* que aplicados ao problema irrestrito:

$$\underset{x}{\text{Minimizar}} \quad L(x, \lambda^*, \gamma^*) \quad ; \quad (3.2)$$

fazem com que a solução encontrada para o problema (3.2) seja a mesma solução do problema (2.1). A solução ótima é encontrada quando as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) forem satisfeitas. O problema (3.2) é denominado de problema Lagrangiano. A seguir apresentaremos o algoritmo do método dual-Lagrangiano para resolução de problemas da forma (2.1).

3.1.1 Algoritmo

Algoritmo do método dual-Lagrangiano

- I. Dado o problema (2.1), construa a função Lagrangiana (3.1);
- II. Faça $k = 0$ e escolha os valores iniciais para x , λ e γ ;
- III. Resolva o problema Lagrangiano por algum método de otimização irrestrita para λ^k e γ^k fixos

$$\underset{x}{\text{Minimizar}} \quad f(x) + (\lambda^k)^t w(x) + (\gamma^k)^t h(x)$$

IV. Se x^{k+1} satisfaz KKT, PARE Senão, atualize os multiplicadores de Lagrange utilizando alguma heurística, determinando

$$\begin{aligned}\lambda^{k+1} &= \lambda^k + \Delta\lambda^k \\ \gamma^{k+1} &= \gamma^k + \Delta\gamma^k\end{aligned}$$

e volte para o passo III.

Para gerar os multiplicadores de Lagrange, podemos utilizar vários algoritmos. Uma alternativa é o método do gradiente, que gera uma sequência de multiplicadores atualizando-os a cada iteração pela seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \lambda^{k+1} \\ \gamma^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^k \\ \gamma^k \end{bmatrix} + \phi \begin{bmatrix} w(x) \\ ac \end{bmatrix}; \quad (3.3)$$

sendo $ac_j = \begin{cases} h_j(x), & \text{se } \gamma_j^k < 0 \\ \max\{0, h_j(x)\}, & \text{se } \gamma_j^k = 0 \end{cases}$, e o $\phi \in \mathbb{R}$ é estimado para garantir a

busca da variável dual, este pode ser obtido através de uma busca unidimensional.

3.1.2 Dificuldades computacionais

O método não apresenta bons resultados quando aplicado a problemas não convexos em torno da solução, pois pode ocorrer a existência do *gap* de dualidade e com isso o método não obtém a solução ótima do problema. Outra questão relacionada ao método dual-Lagrangiano é o aumento do número de variáveis com relação ao problema original.

3.2 O método da função penalidade

O método da função penalidade associa ao problema (2.1) uma sequência de problemas irrestritos, o método consiste em utilizar uma função auxiliar em que as restrições do problema são introduzidas na função objetivo através de um parâmetro de penalidade, o qual penaliza a restrição que viola algum de seus limites.

A função auxiliar tem a seguinte forma:

$$f(x) + cP(x); \quad (3.4)$$

em que c é o parâmetro de penalidade e $P(x)$ a função penalidade que é dada por:

$$P(x) = \sum_{i=1}^m \Psi(w_i(x)) + \sum_{j=1}^p \Upsilon(h_j(x)); \quad (3.5)$$

em que Ψ e Υ são funções contínuas de uma variável r , tais que:

$$\Psi(r) = 0, \text{ se } r = 0 \text{ e } \Psi(r) > 0, \text{ se } r \neq 0; \quad (3.6)$$

$$\Upsilon(r) = 0, \text{ se } r \leq 0 \text{ e } \Upsilon(r) > 0, \text{ se } r > 0; \quad (3.7)$$

As funções (3.6) e (3.7) podem assumir as seguintes formas:

$$Y(r) = \left[\max\{0, r\} \right]^{pr} ; \quad (3.8)$$

$$\Psi(r) = |r|^{pr} ; \quad (3.9)$$

em que pr é um número inteiro positivo. A função $P(x)$ (3.5) é denominada de função penalidade quadrática para $pr = 2$ nas equações (3.8) e (3.9).

Desta maneira temos que o problema auxiliar a ser resolvido é da seguinte forma:

$$\underset{x}{\text{Minimizar}} \quad f(x) + cP(x) ; \quad (3.10)$$

para $c > 0$. À medida que $P(x) \rightarrow 0$ e $c \rightarrow \infty$ a solução do problema (3.10) converge para a solução do problema (2.1) se $cP(x) \rightarrow 0$.

O método gera uma sequência de pontos inactivos, sequência essa que converge para a solução do problema original.

O parâmetro de penalidade pode ser atualizado por várias heurísticas, uma delas é da seguinte forma:

$$c^{k+1} = \tau c^k ; \quad (3.11)$$

em que $\tau > 1$.

3.2.1 Algoritmo

Algoritmo do método de penalidade

- I. Dado o problema (2.1), construa a função penalidade (3.5);
- II. Faça $k=0$ e escolha os valores iniciais para x , $c>0$, τ e uma tolerância de convergência $\zeta > 0$;
- III. Utilizando algum método de minimização irrestrita, resolva o problema:

$$\underset{x}{\text{Minimizar}} \quad f(x) + cP(x);$$

- IV. Se $c^k P(x^{k+1}) < \zeta$, PARE Senão, atualize c por (3.11), faça $k=k+1$ e volte para o passo III.
-

3.2.2 Dificuldades computacionais

A escolha do parâmetro de penalidade c por ser um número grande, faz com que a solução do problema (3.10) seja próxima da solução do problema (2.1), porém o método apresenta um problema de mal condicionamento da matriz Hessiana devido a sua dependência de c . Salientamos que a escolha

inicial do parâmetro de penalidade c e do atualizador τ afetam a convergência do método.

3.3 O método da função Lagrangiana Aumentada

O método da função Lagrangiana Aumentada foi proposto quase que simultaneamente, mas independentemente, por HESTENES (1969) e POWELL (1969) em 1969 para o problema (2.1) com restrições de igualdade somente. Posteriormente, ROCKFELLAR (1973) expandiu o método para problemas com restrições de desigualdade. Nas próximas secções detalharemos os métodos citados.

3.3.1 A função Lagrangiana Aumentada de HESTENES e POWELL

HESTENES (1969) apresentou um novo método para resolver o problema (2.1), com apenas uma restrição de igualdade, ou seja:

$$\begin{array}{l} \textit{Minimizar} \quad f(x) \\ \textit{sujeito a} : \quad w(x) = 0 \end{array} ; \quad (3.12)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$.

O autor utilizou primeiramente a função Lagrangiana associada ao problema (3.12) e obteve a seguinte função auxiliar

$$La(x, \lambda) = f(x) + \lambda w(x); \quad (3.13)$$

em que λ é o multiplicador de Lagrange.

Adicionou na função (3.13) o termo de penalidade quadrática obtendo a função Lagrangiana Aumentada:

$$La(x, \lambda) = f(x) + \lambda w(x) + \frac{1}{2} cw^2(x); \quad (3.14)$$

em que $c > 0$ é o parâmetro de penalidade.

O autor minimizou (3.14) em relação a x , para λ e c fixos, e constatou que a seguinte condição necessária deveria ser válida:

$$\nabla_x f(x) + \lambda \nabla_x w(x) + c \nabla_x w(x) w(x) = 0; \quad (3.15)$$

reescrevendo:

$$\nabla_x f(x) + (\lambda + c w(x)) \nabla_x w(x) = 0; \quad (3.16)$$

Por fim HESTENES (1969) sugeriu que a atualização dos multiplicadores de Lagrange seja feita por:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + c^k w(x^k); \quad (3.17)$$

e o parâmetro de penalidade por

$$c^{k+1} = \tau c^k; \quad (3.18)$$

em que $\tau > 0$.

Simultaneamente POWELL (1969) apresentou a mesma função Lagrangiana Aumentada. O autor considerou (2.1) somente com restrições de igualdade e perturbou as restrições da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(x) \\ & \text{sujeito a : } w_i(x) = \varepsilon, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad ; \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ao problema (3.19) associou a função auxiliar:

$$La(x, c) = f(x) + c \sum_{i=1}^m (w_i(x) - \varepsilon_i)^2; \quad (3.20)$$

em que ε é o vetor de perturbações e a função (3.20), foi por ele denominada de função Lagrangiana Aumentada.

Desenvolvendo (3.20) tem-se:

$$La(x, c) = f(x) + c \sum_{i=1}^m w_i^2(x) - 2c \sum_{i=1}^m w_i(x) \varepsilon_i + c \sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2 ; \quad (3.21)$$

denominando $-2c\varepsilon_i$ de λ_i e desconsiderando o termo $c \sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2$, POWELL reescreveu a função (3.21) como:

$$La(x, c) = f(x) + \lambda_i \sum_{i=1}^m w_i(x) + c \sum_{i=1}^m w_i^2(x); \quad (3.22)$$

que foi a mesma função Lagrangiana Aumentada apresentada por HESTENES, em que $\lambda_i, i = 1, 2, 3, \dots, m$, são os multiplicadores de Langranges e c é o parâmetro de penalidade.

Em seu trabalho, POWELL (1969) sugere que o parâmetro de penalidade c seja suficientemente grande e que uma estimativa para λ^k pode ser como em (3.17).

POWELL apresentou em seu trabalho a exigência da redução do resíduo máximo que é calculado por

$$re^{\max} = \max_i \|w_i(x^k)\| ; \quad (3.23)$$

em que:

$$k \rightarrow \infty, re^{\max} \rightarrow 0; \quad (3.24)$$

A função Lagrangiana Aumentada pode ser vista de duas maneiras:

- ❖ Como a função Lagrangiana associada ao problema

$$\text{Minimizar } \left\{ f(x) + c \sum_{i=1}^m w_i^2(x) : w_i(x) = 0 \right\}; \quad (3.25)$$

- ❖ Como a função Penalidade quadrática associada ao problema

$$\text{Minimizar } \left\{ f(x) + \lambda w(x) : w_i(x) = 0 \right\}; \quad (3.26)$$

3.3.1.1 Algoritmo

Algoritmo do método da função Lagrangiana Aumentada

HESTENES (1969) em seu trabalho não apresentou um algoritmo, porém POWELL (1969) se preocupou em apresentar esse algoritmo para sua abordagem, o qual foi proposto da seguinte forma:

- I. Dado o problema (2.1), construa a função Lagrangiana Aumentada (3.22);
- II. Faça $k=0$ e escolha os valores iniciais para x , $c>0$, para todos λ e o atualizador τ do parâmetro de penalidade;
- III. Inicie $re(x^0) = \infty$, em que $re(x) = \max \{|w_i(x)|, i = 1, 2, 3, \dots, m\}$, ou seja, é a maior das violações das restrições;
- IV. Resolva o problema seguinte utilizando algum método de minimização irrestrita, para λ e c fixos:

$$\underset{x}{\text{Minimizar}} \quad La(x, \lambda) = f(x) + \lambda_i \sum_{i=1}^m w_i(x) + c \sum_{i=1}^m w_i^2(x)$$

- V. Se $re(x^{k+1}) = 0$, PARE
- Se $re(x^{k+1}) > \frac{re(x^k)}{4}$, vá para o passo VI
- Se $re(x^{k+1}) \leq \frac{re(x^k)}{4}$, vá para o passo VII
- VI. Faça $c^{k+1} = \tau c^k$ e volte para IV;
- VII. Faça $\lambda_i^{k+1} = \lambda^k + c^k w_i(x^k)$ e volte para IV.



3.3.2 A função Lagrangiana Aumentada de ROCKAFELLAR

ROCKAFELLAR (1973a) baseou-se nos trabalhos apresentados por HESTENES (1969) e POWELL (1969), e definiu uma função Lagrangiana Aumentada para problemas com restrições de desigualdades.

Desta forma, seja o problema:

$$\begin{aligned} & \textit{Minimizar} \quad f(x) \\ & \textit{sujeito a:} \quad h_j(x) \leq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, p \quad ; \end{aligned} \quad (3.27)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$.

Ao problema (3.27), o autor adicionou variáveis de folga positivas nas restrições transformando-as em igualdades e obtendo o problema equivalente:

$$\begin{aligned} & \textit{Minimizar} \quad f(x) \\ & \textit{sujeito a:} \quad h_j(x) + z_j = 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, p \quad ; \\ & \quad \quad \quad z_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, p \end{aligned} \quad (3.28)$$

Associou a função penalidade quadrática ao problema (3.28) e obteve:

$$\begin{aligned} & \textit{Minimizar} \quad f(x) + \frac{1}{2} c \sum_{j=1}^p (h_j(x) + z_j)^2 \quad ; \\ & \textit{sujeito a:} \quad z_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, p \end{aligned} \quad (3.29)$$

em que $c > 0$ é o parâmetro de penalidade.

A função Lagrangiana Aumentada associada ao problema (3.29) é definida por:

$$La(x, \mu) = f(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j (h_j(x) + z_j) + \frac{1}{2} c \sum_{j=1}^p (h_j(x) + z_j)^2; \quad (3.30)$$

em que μ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange.

ROCKAFELLAR (1973a) propôs minimizar a função (3.30) em relação a z_j , $j = 1, 2, 3, \dots, p$, e aplicar as condições necessárias de otimalidade, tal que:

$$\nabla_{z_j} La(x, \mu) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, p; \quad (3.31)$$

ou seja,

$$\mu_j + c(h_j(x) + z_j) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, p; \quad (3.32)$$

isolando z_j ,

$$z_j = -\frac{\mu_j}{c} - h_j(x), \quad j = 1, 2, 3, \dots, p; \quad (3.33)$$

Logo por z_j ser uma variável de folga, necessariamente $z_j \geq 0$, e duas possibilidades podem ocorrer:

$$z_j = \begin{cases} -\frac{\mu_j}{c} - h_j(x), & \text{se } (-\frac{\mu_j}{c} - h_j(x)) \geq 0, \\ 0, & \text{se } (-\frac{\mu_j}{c} - h_j(x)) \leq 0 \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, \dots, p; \quad (3.34)$$

Substituindo (3.34) em (3.30), obtemos a função Lagrangiana Aumentada para problemas com restrições de desigualdade apresentada por ROCKAFELLAR (1973a):

$$La(x, \mu) = f(x) + \sum_{j=1}^p \begin{cases} \mu_j h_j(x) + \frac{1}{2} c h_j^2(x), & \text{se } (-\frac{\mu_j}{c} \leq h_j(x)), \\ -\frac{\mu_j^2}{2c}, & \text{se } (-\frac{\mu_j}{c} \geq h_j(x)) \end{cases}; \quad (3.35)$$

em que μ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange.

O método da função Lagrangiana Aumentada resolve uma sequência de problemas irrestritos, para um valor fixo do multiplicador de Lagrange, da seguinte maneira:

$$\underset{x}{\text{Minimizar}} \quad La(x, \mu) \quad ; \quad (3.36)$$

minimizando (3.36) temos:

$$\nabla_x La = \nabla_x f(x) + \sum_{j=1}^p \begin{cases} \mu_j \nabla_x h_j(x) + \frac{1}{2} c \nabla_x h_j(x) h_j(x), & \text{se } (-\frac{\mu_j}{c} \leq h_j(x)), \\ 0, & \text{se } (-\frac{\mu_j}{c} \geq h_j(x)) \end{cases} = 0; \quad (3.37)$$

reescrevendo,

$$\nabla_x f(x) + \sum_{j=1}^p \begin{cases} \nabla_x h_j(x) (\mu_j + c h_j(x)), & \text{se } (-\frac{\mu_j}{c} \leq h_j(x)), \\ 0, & \text{se } (-\frac{\mu_j}{c} \geq h_j(x)) \end{cases} = 0; \quad (3.38)$$

desta maneira ROCKAFELLAR (1973a) sugeriu que a atualização dos multiplicadores de Lagrange fosse realizada da seguinte maneira:

$$\mu_j^{k+1} = \begin{cases} \mu_j^k + c^k h_j(x^k), & \text{se } (-\frac{\mu_j^k}{c^k} \leq h_j(x^k)), \\ 0, & \text{se } (-\frac{\mu_j^k}{c^k} \geq h_j(x^k)) \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, \dots, p; \quad (3.39)$$

Em seu trabalho ROCKAFELLAR (1973a) também apresentou a função Lagrangiana Aumentada para o problema (2.1), ou seja, que contém tanto as restrições de igualdade, quanto as restrições de desigualdade, e ela é da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 La(x, \mu) = & f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i(x) + c \sum_{i=1}^m w_i^2(x) + \\
 & + \sum_{j=1}^p \begin{cases} \mu_j h_j(x) + \frac{1}{2} c h_j^2(x), & \text{se } (-\frac{\mu_j}{c} \leq h_j(x)), \\ -\frac{\mu_j^2}{2c}, & \text{se } (-\frac{\mu_j}{c} \geq h_j(x)) \end{cases} ;
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

em que λ_i , $i = 1, 2, 3, \dots, m$ são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade, μ_j , $j = 1, 2, 3, \dots, p$ são os multiplicadores de Lagrange associados a desigualdade e c é o parâmetro de penalidade.

3.3.2.1 Algoritmo

Algoritmo do método da função Lagrangiana Aumentada

ROCKAFELLAR (1973a) não apresentou um algoritmo em seu trabalho, então apresentamos a seguir um algoritmo para esse método. O algoritmo aqui

apresentado é baseado no algoritmo apresentado por POWELL (1969) em seu trabalho.

- I. Dado o problema (2.1), construa a função Lagrangiana Aumentada (3.40);
- II. Faça $k=0$ e escolha os valores iniciais para x , $c>0$, para todos λ e μ e o atualizador τ do parâmetro de penalidade;
- III. Resolva o problema seguinte utilizando algum método de minimização irrestrita, para λ , μ e c fixo:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } La(x, \lambda) = & f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i(x) + c \sum_{i=1}^m w_i^2(x) + \\ & x \\ & + \sum_{j=1}^p \begin{cases} \mu_j h_j(x) + \frac{1}{2} c h_j^2(x), & \text{se } (-\frac{\mu_j}{c} \leq h_j(x)), \\ -\frac{\mu_j^2}{2c}, & \text{se } (-\frac{\mu_j}{c} \geq h_j(x)) \end{cases} \end{aligned}$$

- V. Se x^{k+1} satisfaz KKT, PARE Senão, atualize os multiplicadores de Lagrange e o parâmetro de penalidade por:

➤ Faça $c^{k+1} = \tau c^k$

➤ Faça $\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + c^k w_i(x^k)$

➤ Faça $\mu_j^{k+1} = \begin{cases} \mu_j^k + c^k h_j(x^k), & \text{se } (-\frac{\mu_j^k}{c^k} \leq h_j(x^k)), \\ 0, & \text{se } (-\frac{\mu_j^k}{c^k} \geq h_j(x^k)) \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, \dots, p$

- IV. Faça $k = k + 1$ e volte para III.



3.4 O método do gradiente reduzido

O método do gradiente reduzido foi desenvolvido por WOLFE (1962). Esta seção está baseada no livro do BAZARAA (2006). O método é utilizado na resolução de problemas de programação não linear, cujas restrições são lineares de igualdade. O método particiona as variáveis do problema, reduzindo sua dimensão.

Considere o problema:

$$\begin{aligned} & \textit{Minimizar} \quad f(x) \\ & \textit{sujeito a:} \quad Ax = b; \\ & \quad \quad \quad x \geq 0 \end{aligned} \tag{3.41}$$

em que $f(x)$ é diferenciável e contínua nas primeiras derivadas, ou seja é de classe C^1 , A é uma matriz de dimensão $m \times n$ com $m < n$ e posto completo e b é um vetor de dimensão m e $x \in \mathbb{R}^n$.

Este método propõe que o vetor x seja particionado da seguinte maneira:

$$x = [x_B, x_N]; \tag{3.42}$$

em que x_B é denominado o vetor das variáveis básicas, ou dependentes, e x_N é o vetor das variáveis não básicas, ou independentes.

Assim como o vetor x , a matriz A também é particionada como segue:

$$A = [B, N]; \quad (3.43)$$

em que B é uma matriz quadrada, não singular, a qual é composta pelas m primeiras colunas de A referentes às variáveis básicas, ou seja, B corresponde ao vetor x_B ; e N é uma matriz retangular composta pelas $(n - m)$ colunas restantes de A , isto é N corresponde ao vetor x_N .

Desta forma, o problema (3.41), pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(x_B, x_N) \\ & \text{sujeito a: } Bx_B + Nx_N = b ; \\ & \quad \quad \quad x_B > 0 ; x_N \geq 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

A ideia do método do gradiente reduzido é considerar, a cada iteração, um problema somente em termos das variáveis não básicas x_N . Logo, as variáveis básicas, x_B , podem ser calculadas isolando-as na restrição de igualdade de (3.44) em função de x_N , ou seja,

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N ; \quad (3.45)$$

Desta maneira, a função objetivo pode ser considerada somente como função das variáveis não básicas, x_N , ou seja, pode-se substituir as variáveis básicas pelas não básicas, e pode ser escrita como:

$$f(x_B, x_N) = f(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, x_N); \quad (3.46)$$

O Gradiente reduzido é determinado calculando-se o gradiente da função objetivo dada em (3.46), ou seja,

$$Gr = \nabla_N f(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, x_N) - \nabla_B f(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, x_N)B^{-1}N; \quad (3.47)$$

Uma direção de descida para as variáveis não básicas, d_N , pode ser obtida da seguinte forma:

$$d_N = \begin{cases} -Gr & , se \ Gr \leq 0 \\ -x_N Gr & , se \ Gr > 0 \end{cases}; \quad (3.48)$$

Já a direção para as variáveis básicas, d_B , é calculada de modo a manter a factibilidade do problema (3.44), ou seja,

$$d_B = -B^{-1}Nd_N; \quad (3.49)$$

Um passo α é obtido por uma busca unidimensional na direção do vetor (d_B, d_N) a partir do ponto anterior, respeitando as factibilidades das restrições e também $x_B > 0$ e $x_N \geq 0$, isto é:

$$\underset{\alpha}{\text{Minimizar}} \{f(x + \alpha d)\}. \quad (3.50)$$

3.4.1 Algoritmo

Algoritmo do método do gradiente reduzido

Considere o problema (3.41):

- I. Particione:
 - x por (3.42);
 - A conforme (3.43);
- II. Determine o vetor Gradiente reduzido utilizando (3.47);
- III. Determine a direção d_n por (3.48);
 - Se $d_n = 0$, PARE, x satisfaz KKT
 - Senão vá para o passo IV
- IV. Calcule a direção d_b por (3.49);
- V. Calcule
 - $\alpha_1 = \arg \max \{ \alpha / x_b + \alpha d_b \geq 0 \}$
 - $\alpha_2 = \arg \max \{ \alpha / x_n + \alpha d_n \geq 0 \}$

$$\triangleright \alpha = \arg \min \{f(x + \alpha d) / 0 \leq \alpha \leq \min(\alpha_1, \alpha_2)\}$$

$$\triangleright \text{Faça } x = x + \alpha d$$

VI. Se $\alpha < \alpha_1$ volte ao passo I. Senão, substitua a variável x_b nula por uma x_n positiva, atualize as matrizes B e N e volte para o passo I.



No próximo capítulo, apresentaremos os métodos implementados no pacote de otimização MINOS.

Capítulo 4

O algoritmo do pacote de otimização MINOS

Neste capítulo apresentamos uma visão geral do algoritmo implementado no pacote de otimização MINOS para problemas lineares, problemas com função objetivo não linear e restrições lineares e problemas não lineares. Neste trabalho utilizamos o algoritmo para resolução de problemas não lineares.

4.1 Introdução

O pacote de otimização MINOS foi proposto por MURTAGH e SAUNDERS (1978) no final dos anos 70, devido às deficiências nos algoritmos de MURTAGH e SARGENT (1969 e 1973), especialmente quando aplicados a problemas de grande porte. Este pacote foi resultado de uma pesquisa que tinha como objetivo resolver problemas com função objetivo não linear e restrições lineares. O algoritmo utiliza um método que combina técnicas de esparsidade no tratamento das matrizes, o método *simplex revisado*, o método quase-Newton e o método do gradiente reduzido.

Uma nova versão do MINOS foi lançada por MURTAGH e SAUNDERS (1982) em que o algoritmo de MURTAGH e SAUNDERS (1978) foi aprimorado. Nesta versão, os problemas a serem resolvidos passam a ter

restrições lineares e não lineares, sempre visando problemas de grande porte e esparsos. Para esta nova abordagem do MINOS foi utilizada o algoritmo proposto por ROBINSON (1972), que transforma o problema com restrições não lineares em uma sequência de problemas de minimização com restrições lineares. É utilizada uma função Lagrangiana Aumentada para a resolução do problema original, na qual a diferença entre as restrições e suas linearizações são incorporadas à função objetivo e associa-se a elas um multiplicador de Lagrange e um parâmetro de penalidade.

O MINOS, em sua versão atual, é um pacote de otimização desenvolvido para resolver problemas lineares, problemas com função objetivo não linear e restrições lineares e problemas não lineares. Seu código está implementado em FORTRAN. O MINOS pode ser utilizado em alguns sistemas, tais como: *AIMMS*[®], *GAMS*[®], *AMPL*[®], *MATLAB*[®]. O desenvolvimento do seu algoritmo segue as etapas descritas nesta seção.

4.2 Algoritmo para problemas lineares

Considere o problema linear:

$$\text{Minimizar } c^T x \tag{4.1}$$

$$\text{sujeito a: } Ax \sim b; \tag{4.2}$$

$$l \leq x \leq u \tag{4.3}$$

em que c , b , l e u são vetores e A é uma matriz, cujas componentes são números reais. As componentes do vetor x são denominadas de variáveis lineares. Em (4.2) o sinal “ \sim ” indica que podemos ter restrições do tipo “ \geq ”, “ $=$ ” ou “ \leq ”.

O algoritmo implementado no pacote MINOS transforma todas as restrições de desigualdade de (4.1)-(4.3) em igualdades adicionando um vetor de variáveis de folga s cujas coordenadas são positivas, e o vetor das variáveis x permanece canalizado. Desse modo, o problema (4.1)-(4.3) é reescrito por:

$$\text{Minimizar } c^T x; \quad (4.4)$$

$$\text{sujeito a : } Ax + s = b; \quad (4.5)$$

$$l \leq x \leq u; \quad (4.6)$$

$$l_s \leq s \leq u_s; \quad (4.7)$$

O problema (4.4) é resolvido pelo método primal simplex. Desta forma as restrições de igualdade são divididas da seguinte maneira:

$$Bx_B + Nx_N = b; \quad (4.8)$$

em que a matriz base B é uma submatriz de $(A \ I)$ quadrada e não singular, x_N são as variáveis não básicas e x_B são as variáveis básicas. O conjunto das variáveis não básicas é formado pelas variáveis que se encontram em algum dos seus limites, já o conjunto das variáveis básicas é formado pelas variáveis que estão dentro de seus limites. O vetor custo é particionado em:

$$c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

O vetor das variáveis duais π é calculado da seguinte maneira:

$$B^T \pi = c_B ; \quad (4.10)$$

e o vetor custo reduzido é calculado por:

$$cr_N = c_N - N^T \pi ; \quad (4.11)$$

em que c_B e c_N é a partição do vetor c .

A seguir apresentamos o algoritmo para problemas com função objetivo não linear.

4.3 Algoritmo para problemas com função objetivo não linear

Seja o problema não linear, com restrições lineares:

$$\text{Minimizar } F(x) + c^T y \quad (4.12)$$

$$\text{sujeito a: } A_1 x + A_2 y \sim b ; \quad (4.13)$$

$$l_x \leq x \leq u_x \quad (4.14)$$

$$l_y \leq y \leq u_y \quad (4.15)$$

em que c , b , l , e u são vetores e A_1 e A_2 são matrizes, cujas componentes são números reais e a função $F(x)$ é uma função não linear em x . O sinal “ \sim ” indica que temos restrições do tipo “ \geq ”, “ $=$ ” ou “ \leq ”. As componentes do vetor x são variáveis associadas à função não lineares e as componentes do vetor y são as variáveis associadas à função lineares.

O algoritmo implementado no pacote de otimização MINOS resolve o problema (4.12)-(4.15) usando o método do gradiente reduzido combinado com o método quase-Newton. Assim como nos problemas lineares são adicionadas folgas positivas nas restrições de desigualdade e, posteriormente, o sistema é particionado, porém neste caso em três partes conforme segue:

$$Bx_B + Sx_S + Nx_N = b; \quad (4.16)$$

em que B é uma matriz quadrada e não singular como no método simplex, x_B é o conjunto das variáveis básicas, x_S é o conjunto das variáveis superbásicas e x_N é o conjunto das variáveis não básicas.

Da mesma forma que nos problemas lineares o conjunto das variáveis não básicas é formado pelas variáveis que se encontram em algum dos seus limites, já o conjunto das variáveis básicas e superbásicas são formados pelas variáveis que estão dentro de seus limites.

As variáveis associadas às matrizes B e S , correspondentes à x_B e x_S , respectivamente, são livres, portanto elas podem variar dentro dos seus

respectivos limites. No método do gradiente reduzido o conjunto das variáveis superbásicas x_S é considerado como um conjunto de variáveis livres ou independentes, pois estas são otimizadas. Elas são otimizadas de modo a reduzir o valor da função objetivo ou diminuir a soma das infeasibilidades. Já o conjunto das variáveis básicas, x_B , são ajustadas de modo a continuar a satisfazer as restrições lineares do problema.

Caso ocorra, no processo de otimização, de uma variável superbásica alcançar um de seus limites (tanto inferior, quanto superior), essa variável é movida do conjunto S para o conjunto N . Porém, se uma variável básica atingir um de seus limites, a variável é movida do conjunto B para o conjunto N e uma coluna do conjunto S é movida para o conjunto B .

Uma iteração no método do gradiente reduzido consiste em encontrar uma direção de descida para a função objetivo.

O gradiente reduzido é calculado da seguinte maneira:

$$Gradred = Z^T grad; \quad (4.17)$$

em que

$$Z = \begin{pmatrix} -B^{-1}S \\ I \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (4.18)$$

e $grad$ é definido como o gradiente da função objetivo do problema (4.12).

Assim como as variáveis, o gradiente da função objetivo também pode ser particionado da seguinte maneira:

$$grad = \begin{bmatrix} grad_B \\ grad_S \\ grad_N \end{bmatrix}; \quad (4.19)$$

Uma estimativa para as variáveis duais pode ser calcula por:

$$B^T \pi = grad_B; \quad (4.20)$$

O custo reduzido é calculado conforme segue:

$$crn = grad_N - N^T \pi; \quad (4.21)$$

em que crn é o caso análogo para o problema de programação linear.

O gradiente reduzido pode ser reescrito a partir da decomposição do gradiente (4.19) e das variáveis duais (4.20), da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
Gradred &= [-S^T (B^{-1})^T, I, 0] \begin{bmatrix} grad_B \\ grad_S \\ grad_N \end{bmatrix} = \\
&= grad_S - S^T (B^{-1})^T grad_B = \quad ; \quad (4.22) \\
&= grad_S - S^T (B^{-1})^T (B)^T \pi = \\
&= grad_S - S^T \pi
\end{aligned}$$

Isso garante a otimização realizada nas variáveis superbásicas. Enquanto isso as variáveis básicas são ajustadas de modo a satisfazer as restrições lineares.

Um algoritmo quase-Newton é utilizado para a otimização das variáveis superbásicas e isso pode gerar uma convergência superlinear para todas as iterações, caso a partição B , S e N não se altere. Uma direção p_s , para as variáveis superbásicas, é obtida resolvendo-se um sistema da seguinte forma:

$$R^T R p_s = -Gradred; \quad (4.23)$$

em que $Gradred$ é o gradiente reduzido e R é uma matriz triangular superior. A matriz R pode ser atualizada de várias maneiras, de modo a ser uma aproximação da hessiana reduzida, isto é:

$$R^T R \approx Z^T H Z; \quad (4.24)$$

em que H é a matriz hessiana de $F(x)$.

Como as variáveis básicas são calculadas em função das variáveis superbásicas, então elas são dadas por:

$$p_B = -B^{-1}Sp_S. \quad (4.25)$$

As direções das variáveis não básicas são:

$$p_N = 0; \quad (4.26)$$

pois elas se encontram em algum do seus limites.

Logo o vetor de direção p é dado por:

$$p = \begin{bmatrix} p_B \\ p_S \\ p_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B^{-1}Sp_S \\ p_S \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (4.27)$$

Com o vetor direção foi calculado, um passo α é determinado através de uma busca unidimensional da seguinte maneira:

$$\textit{Minimizar } F(x + \alpha p); \quad (4.28)$$

$$\textit{sujeito a: } 0 < \alpha < \alpha_{\max}; \quad (4.29)$$

de modo que $x + \alpha_{\max} p$ continue satisfazendo os limites das variáveis.

Na próxima seção é apresentado o algoritmo para problemas com restrições não lineares.

4.4 Algoritmo para problemas com restrições não lineares

Considere o problema:

$$\text{Minimizar } F(x) + c^T x + d^T y; \quad (4.30)$$

$$\text{sujeito a: } g(x) + A_1 y \sim b_1; \quad (4.31)$$

$$A_2 x + A_3 y \sim b_2; \quad (4.32)$$

$$l_x \leq x \leq u_x; \quad (4.33)$$

$$l_y \leq y \leq u_y; \quad (4.34)$$

em que c , d , b_1 , b_2 , l e u são vetores e A_1 , A_2 e A_3 são matrizes, cujas componentes são números reais, as funções $F(x)$ e $g(x)$ são não lineares em x e duas vezes diferenciáveis. O sinal “ \sim ” indica que temos restrições do tipo “ \geq ”, “ $=$ ” ou “ \leq ”. As componentes do vetor x são variáveis associadas à função não lineares e as componentes do vetor y são as variáveis associadas à função lineares. As restrições (4.31) e (4.32) do problema são não lineares e lineares, respectivamente. Já as restrições (4.33) e (4.34) representam os limites inferiores e superiores das variáveis.

O algoritmo proposto no pacote de otimização MINOS propõe a resolução de uma sequência de subproblemas, em que as funções que compõem as restrições não lineares (4.31) associadas ao problema (4.30)-(4.34) são linearizadas usando a série de Taylor de primeira ordem, ou seja:

$$\bar{g}(x, x_k) = g(x_k) + J(x_k)(x - x_k); \quad (4.35)$$

ou resumidamente temos:

$$\bar{g}(x) = g_k + J_k(x - x_k); \quad (4.36)$$

em que g_k e J_k são a função e a matriz Jacobiana avaliadas em x_k , respectivamente.

Desta maneira, associa-se uma função Lagrangiana ao problema (4.30)-(4.34) introduzindo a diferença entre as funções não lineares e suas linearizações na função objetivo e resolve-se o seguinte problema restrito linearmente:

$$\text{Minimizar } F(x) + c^T x + d^T y - \lambda^T (g - \bar{g}) + \frac{1}{2} c (g - \bar{g})^T (g - \bar{g}) \quad (4.37)$$

$$\text{sujeito a: } \bar{g}(x) + A_1 y \sim b_1 \quad (4.38)$$

$$A_2 x + A_3 y \sim b_2; \quad (4.39)$$

$$l_x \leq x \leq u_x \quad (4.40)$$

$$l_y \leq y \leq u_y \quad (4.41)$$

em que a nova função objetivo (4.37) é denominada de função Lagrangiana Aumentada, λ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange, c é o parâmetro de penalidade e que $(g - \bar{g})$ é utilizado no lugar da violação convencional da restrição.

O problema (4.37)-(4.41) tem função objetivo não linear e restrições lineares e o algoritmo utiliza uma combinação do método do gradiente reduzido com o algoritmo quase-Newton na sua resolução.

O algoritmo para a resolução do problema (4.37)-(4.41) é composto por uma iteração interior e uma iteração exterior.

Na iteração interior o método do gradiente reduzido é utilizado para resolver o problema (4.37)-(4.41), para um determinado valor do multiplicador de Lagrange, λ , e parâmetro de penalidade, c , fixos. Para esse fim, as restrições (4.38) e (4.39) são transformadas em igualdade através da adição de vetores de variáveis auxiliares positivas s_1 e s_2 . Os vetores dos termos independentes b_1 e b_2 , são incorporados a estas variáveis de folga e as restrições linearizadas são escritas da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} J_k & A_1 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_k x_k + g_k \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

Para simplicidade de notação (4.42) será denotadas por:

$$Ax + Is = b; \quad (4.43)$$

As matrizes J_k , A_1 , A_2 e A_3 são tratadas como esparsas. Da mesma forma (4.43) é particionado igualmente por (4.16) e o problema (4.37)-(4.41) também é resolvido pelo mesmo processo do (4.12)-(4.15). Na iteração exterior são atualizados os valores dos multiplicadores de Lagrange e o parâmetro de penalidade.

Neste algoritmo é implementada uma heurística para a atualização do parâmetro de penalidade da seguinte forma:

- a) se o problema aparenta não estar convergindo ou as violações das restrições não lineares aumentam muito, o parâmetro de penalidade c é incrementado (os autores inicializam o parâmetro de penalidade em $c=0,1$ e sugerem que ele deve ser aumentado para 2, 4 ou 10) e repete-se a iteração exterior;
- b) se o problema apresenta convergência, a alteração dos multiplicadores de Lagrange é suficientemente pequena e as violações das restrições não lineares são menores do que 10^{-2} , o parâmetro de penalidade é reduzido, ou seja, tende a zero (os autores sugerem que seja multiplicado por 10^{-1}). Neste caso, as violações das restrições não lineares são calculadas da seguinte maneira:

$$\frac{\|g(x_{k+1}) + A_1 y_{k+1} - b_1\|}{1 + \|[x_{k+1}, y_{k+1}]\|} \leq 10^{-2}; \quad (4.44)$$

em que $\|g(x_{k+1}) + A_1 y_{k+1} - b_1\|$ é a norma das restrições não lineares e $\|x_{k+1}, y_{k+1}\|$ é a norma da solução atual;

- c) caso o parâmetro de penalidade não seja atualizado como em a)
e b) mantêm-se esse parâmetro constante.

A seguir apresentaremos o algoritmo do MINOS.

4.5 Algoritmo

Algoritmo do MINOS

[MURTAGH e SAUNDERS (1978 e 1982)]

Iteração exterior

- I. Inicie com os valores para x_k, y_k, c_k , faça $k = 0$;
- II. Construa (4.30)-(4.34)
- III. Faça:
 - Resolva o problema (4.37)-(4.41) para encontrar os novos valores para x_{k+1}, y_{k+1} e π (ver iteração interior);
 - λ_{k+1} receber as m_1 primeiras componentes de π ;

IV. Verifique:

- Se $[x_{k+1}, y_{k+1}]$ satisfaz as restrições não lineares com uma determinada precisão, isto é:

$$\frac{\|g(x_k) + A_1 y_k - b_1\|}{1 + \|[x_{k+1}, y_{k+1}]\|} \leq 10^{-6}$$

- e os pontos $[x_{k+1}, y_{k+1}]$ satisfazem KKT para o problema linearizado, PARE Senão vá para o passo V;

V. Se o problema aparenta não estar convergindo ou as violações das restrições aumentam muito aumente o valor de c para 2, 4 ou 10 e vá para o passo III. Senão vá para VI.

VI. Se

$$\frac{\|g(x_k) + A_1 y_k - b_1\|}{1 + \|[x_{k+1}, y_{k+1}]\|} \leq 10^{-2}$$

e

$$\frac{\|\lambda_{k+1} - \lambda_k\|}{1 + \|\lambda_{k+1}\|} \leq 10^{-2}$$

Faça $c = \frac{c}{10}$ e vá para VII, senão mantenha c constante e vá para o passo VII;

VII. Relinearize as restrições com os pontos $[x_{k+1}, y_{k+1}]$, faça $k = k + 1$ e volte para o passo III.

Iteração interior

- I. Inicie com uma tolerância para $tolcrn$;
- II. Faça:
 - Particione x em $[x_B, x_S, x_N]$;
 - Particione $grad$ por (4.19);
 - Fatore a matrix B em LU ;
 - Fatore a aproximação da Hessiana $Z^T HZ$ em $R^T R$;
- III. Calcule π por (4.20) e $Gradred_s$ por (4.22). Se $\|Gradred_s\| > 10^{-6}$, vá para o passo IV. Senão, calcule o custo reduzido (4.21) e verifique se existe:
 - $crn < -tolcrn$

Se não há crn fora da tolerância, PARE, o ponto satisfaz as condições de KKT. Caso exista, mova uma coluna de N para S e recalcule R e vá para IV.
- IV. Resolva:
 - $R^T R p_S = Gradred_s$;
 - $B p_B = -S p_S$;
 - $p_N = 0$;

- V. Encontre o maior passo α_{\max} de modo que:
- $x + \alpha_{\max} p$ continue satisfazendo os limites das variáveis;
- VI. Faça uma busca unidimensional para α utilizando o problema (4.28)-(4.29);
- VII. Faça $x^{k+1} = x^k + \alpha p$;
- VIII. Atualize R para o novo ponto;
- IX. Caso alguma variável superbásica encontre algum de seus limites, mova-a de S para N . Caso alguma variável básica encontre algum de seus limites, mova-a de B para N , procure uma variável superbásica adequada e mova-a de S para B . Caso ocorra alteração atualize R . Volte para o passo III.
-
-

No próximo capítulo, nós apresentaremos a formulação do problema de Fluxo de Potência Ótimo.

Capítulo 5

O problema de Fluxo de Potência Ótimo

Neste capítulo apresentamos o problema de Fluxo de Potência Ótimo e sua formulação matemática.

5.1 Introdução

Um sistema elétrico de potência (SEP) é composto, basicamente, por unidades geradoras, linhas de transmissão, transformadores e unidades de carga, em que as unidades geradoras são incumbidas de fornecer a energia elétrica para o SEP de modo que, atenda a demanda, respeite os padrões de qualidade e tenha continuidade no serviço prestado.

O problema Fluxo de Potência Ótimo (FPO) foi proposto por CARPENTIER (1962), e a partir dele é possível encontrar a melhor condição de operação de um sistema elétrico de potência sob um determinado objetivo. Carpentier propôs um modelo matemático para o problema no qual incorporava as equações de fluxo de potência ao problema de Despacho Econômico (DE). Seu desenvolvimento deu-se a partir do problema de DE. O problema de FPO é um problema de otimização restrita, não convexo, não linear, de grande porte e com variáveis inteiras. A formulação tem como função objetivo um desempenho

do sistema elétrico; as restrições referem-se às: equações de fluxo de potência, restrições funcionais e variáveis de estado. O problema de FPO considerado neste trabalho é o FPO reativo, na formulação adotada neste trabalho as variáveis de decisão do problema de FPO são: magnitude de tensão nas barras (V), ângulo de tensão na barra (θ) e os *taps* dos transformadores (*taps*). Neste trabalho todas as variáveis foram consideradas contínuas.

5.2 Formulação matemática do FPO reativo

O problema de Fluxo de Potência Ótimo é estudado na Engenharia Elétrica, área de Sistemas Elétricos de Potência. Seu modelo foi proposto por CARPENTIER (1962), baseado no problema de DE. Do ponto de vista matemático é possível descrevê-lo como um problema não linear, restrito, não convexo e de grande porte, que pode ser escrito da mesma forma que (2.1).

Em que:

$x = (V, \theta, tap) \in \mathbb{R}^n$: vetor das variáveis de estado e controle;

$f(x)$: função objetivo que representa algum desempenho do sistema;

$w(x) = 0$: corresponde às equações do fluxo de potência;

$h(x) \leq 0$: corresponde as inequações funcionais do fluxo de potência;

x_{\min}, x_{\max} : vetor dos limites inferiores e superiores das variáveis, respectivamente.

A função $f(x)$ e as restrições $w(x)$ e $h(x)$ tem cinco grandezas associadas que são:

Q_k - potência reativa líquida injetada na barra k ;

P_k - potência ativa líquida injetada na barra k ;

θ_k - ângulo da fase da tensão da barra k ;

V_k - magnitude da tensão na barra k ;

tap_k - tap dos transformadores na barra k .

Com essas grandezas, segundo MONTICELLI (1983), podemos reescrever o problema (2.1) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar } f(V, \theta, tap) \\
 & \text{sujeito a : } \Delta P_i(V, \theta, tap) = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, NBC + NBCR \\
 & \quad \Delta Q_j(V, \theta, tap) = 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, NBC \quad ; \\
 & \quad Q_l^{\min} \leq Q_l(V, \theta, tap) \leq Q_l^{\max} \quad l = 1, 2, 3, \dots, NBCR \quad (5.1) \\
 & \quad V_k^{\min} \leq V_k \leq V_k^{\max} \quad k = 1, 2, 3, \dots, NB \\
 & \quad tap_o^{\min} \leq tap_o \leq tap_o^{\max} \quad o = 1, 2, 3, \dots, NT
 \end{aligned}$$

em que:

NBC é o número de barras de carga;

NBCR é o número de barras com controle de tensão;

NB é o número de barras do sistema elétrico;

NT é o número de transformadores com tap variável.

Q_l^{\min} e Q_l^{\max} são os limites mínimos e máximos de geração de potência reativa, respectivamente;

V_k^{\min} e V_k^{\max} são os limites mínimos e máximos das magnitudes das tensões, respectivamente;

tap_k^{\min} e tap_k^{\max} são os limites mínimos e máximos dos *taps* dos transformadores, respectivamente.

5.2.1 Função Objetivo

Neste trabalho, a função objetivo adotada representa as perdas de potência ativa nas linhas de transmissão, e é escrita da seguinte forma:

$$f(V, \theta) = \sum_{km \in \Theta} g_{km} (V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos(\theta_k - \theta_m)); \quad (5.2)$$

em que Θ representa o conjunto de todas as linhas de transmissão e g_{km} é a condutância da linha que liga a barra k com a barra m .

5.2.2 Restrições de igualdade

As restrições de igualdade representam o balanço de potência ativa e reativa do sistema elétrico.

O balanço de potência ativa das barras de controle reativo e de carga, em (5.1), é dado por:

$$\Delta P_i(V, \theta, tap) = P_i^G - P_i^C - \sum_{m \in \Theta_i} g_{im} (tap_{im} V_i)^2 - tap_{im} V_i V_m [g_{im} \cos(\theta_i - \theta_m) + b_{im} \text{sen}(\theta_i - \theta_m)]; \quad (5.3)$$

em que Θ_i é o conjunto das barras vizinhas à barra i , P_i^C e P_i^G são as potências ativas consumidas e geradas na barra i , respectivamente, e b_{im} é a susceptância da linha im .

O balanço de potência reativa das barras de carga, em (5.1), é dado por:

$$\Delta Q_j(V, \theta, tap) = Q_j^G - Q_j^C + b_j^{sh} V_j^2 - \sum_{m \in \Theta_j} -(b_{jm} + b_{jm}^{sh})(tap_{jm} V_j)^2 + tap_{jm} V_j V_m [b_{jm} \cos(\theta_j - \theta_m) - g_{jm} \text{sen}(\theta_j - \theta_m)] ; \quad (5.4)$$

em que Θ_j é o conjunto das barras vizinhas à barra j , Q_j^C e Q_j^G são as potências reativas consumidas e geradas na barra j , respectivamente e b_{jm}^{sh} e b_j^{sh} são a susceptância *shunt* da linha jm e da barra j , respectivamente.

5.2.3 Restrições de desigualdade

Estas restrições representam os limites físicos ou limites operacionais relacionados com a segurança da operação do sistema.

A geração de potência reativa injetada nas barras de controle reativo, em (5.1), é dada por:

$$Q_l^{\min} \leq Q_l^G \leq Q_l^{\max} \quad (5.5)$$

em que:

$$\begin{aligned}
Q_l^G(V, \theta, tap) = & Q_l^C - b_l^{sh} V_l^2 + \sum_{lm \in \Theta} -(b_{lm} + b_{lm}^{sh})(tap_{lm} V_l)^2 + \\
& + tap_{lm} V_l V_m [b_{lm} \cos(\theta_l - \theta_m) - g_{lm} \sin(\theta_l - \theta_m)]
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Os módulos das tensões e os *taps* em (5.1), devem estar dentro dos limites mínimo e máximo permitidos para cada barra do sistema elétrico. Assim como as tensões os *taps* dos transformadores também devem estar dentro dos limites mínimos e máximos. Outras restrições não são utilizadas neste trabalho.

No próximo capítulo, apresentaremos os resultados obtidos pelo MINOS na resolução do problema de FPO.

Capítulo 6

Resultados numéricos

Neste capítulo, apresentamos os resultados obtidos pelo método implementado no pacote de otimização MINOS, quando aplicado aos problemas de FPO para os sistemas elétricos de 3 barras DOMMEL e TINNEY (1968) e IEEE 14, 30, 57 e 118 barras (<http://www.ee.washington.edu/research/pstca/>). Os dados destes sistemas elétricos encontram-se no apêndice B. A leitura dos bancos de dados e a montagem de cada um dos problemas de FPO foram implementados no Matlab R2009a (<http://www.mathworks.com>).

O pacote de otimização MINOS foi utilizado na interface com o *General Algebraic Modeling System – GAMS* (www.gams.com), um sistema de modelagem para programação matemática.

Os testes foram realizados com o objetivo de verificar a influência da inicialização do parâmetro de penalidade na resolução do problema de FPO e a eficiência do método estudado na resolução desse problema.

6.1 Sistemas elétricos de potência

Nos testes realizados em todos os sistemas de potência foi adotado como potência base $100MVA$, precisão do critério de parada do método como 10^{-7} e os parâmetros iniciais do algoritmo implementado no pacote de otimização

MINOS foram utilizados como *default* exceto o parâmetro de penalidade, o qual é objeto de estudo do trabalho.

6.1.1 Sistema elétrico de 3 barras

O sistema elétrico de potência de 3 barras, apresentado por DOMMEL *et al.* (1968) é composto como segue:

- ❖ 1 barra de carga;
- ❖ 1 barra de geração;
- ❖ 1 barra de controle de reativo;
- ❖ 2 linhas de transmissão;
- ❖ 5 variáveis.

A Figura 1 apresenta o diagrama do sistema elétrico de 3 barras.

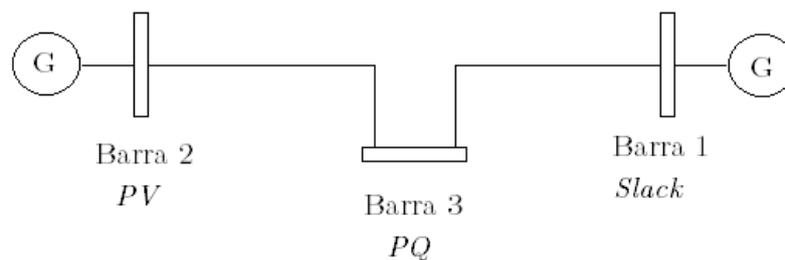


Figura 1 - Diagrama do sistema elétrico de 3 barras

Na figura 1 *PV* indica barra de controle de reativo, *PQ* representa barra de carga e *Slack* é a barra de geração.

A formulação matemática do problema de FPO, associado ao sistema de 3 barras, com o objetivo de minimizar as perdas de potência ativa na transmissão da rede, pode ser escrito matematicamente da seguinte forma:

$$\text{Minimizar } 4 \left[\left(V_1^2 + V_3^2 - 2V_1V_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) \right) + \left(V_2^2 + V_3^2 - 2V_2V_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \right) \right]$$

$$\text{sujeito a: } 4V_2^2 - 4V_2V_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) + 10V_2V_3 \text{sen}(\theta_2 - \theta_3) - 1,7 = 0$$

$$4V_3^2 - 4V_3V_2 \cos(\theta_3 - \theta_2) + 10V_3V_2 \text{sen}(\theta_3 - \theta_2) + 4V_3^2 - 4V_3V_1 \cos(\theta_3 - \theta_1) + 5V_3V_1 \text{sen}(\theta_3 - \theta_1) + 2,0 = 0$$

$$10V_3^2 - 10V_3V_2 \cos(\theta_3 - \theta_2) - 4V_3V_2 \text{sen}(\theta_3 - \theta_2) + 5V_3^2 - 5V_3V_1 \cos(\theta_3 - \theta_1) - 4V_3V_1 \text{sen}(\theta_3 - \theta_1) + 1,0 = 0$$

$$-V_2 \left(10V_2 - 10V_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) - 4V_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \right) + 0,1 \leq 0$$

$$V_2 \left(10V_2 - 10V_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) - 4V_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \right) - 2,0 \leq 0$$

$$0,80 \leq V_1 \leq 1,20$$

$$0,80 \leq V_2 \leq 1,20$$

$$0,99 \leq V_3 \leq 1,01$$

$$\theta_1 = 0$$

Os valores iniciais para as tensões e ângulos do problema foram adotados da seguinte maneira: $V_1 = V_2 = V_3 = 1,0$ p.u. e $\theta_2 = \theta_3 = 0$, e adota-se $\theta_1 = 0$. A tensão V_3 apresenta os seus limites muito próximos a $1,0$ p.u., conforme BAPTISTA (2001).

Na tabela 1 apresentamos as soluções obtidas com o pacote de otimização MINOS na resolução do problema de FPO associado ao sistema elétrico de 3 barras, para diferentes valores iniciais do parâmetro de penalidade c .

Tabela 1 – Soluções obtidas para o problema de FPO de 3 barras

	$c = 100$	$c = 1$	$c = 10^{-3}$	$c = 10^{-5}$
Iterações	10	7	5	5
V_1	1,080	1,080	1,080	1,080
V_2	1,133	1,133	1,133	1,133
V_3	1,010	1,010	1,010	1,010
θ_1	0	0	0	0
θ_2	0,076	0,076	0,076	0,076
θ_3	-0,022	-0,022	-0,022	-0,022
F. Objetivo	12,66707MW	12,66707MW	12,66707MW	12,66707MW
Iterações (c constante)	5	4	3	3
Penalidade Final	10^{-2}	10^{-2}	10^{-5}	10^{-7}

Na tabela 1, podemos observar que obtemos as mesmas soluções para os diferentes valores iniciais do parâmetro de penalidade c , havendo uma pequena variação no número de iterações.

Na Figura 2, apresentamos a curva da convergência da função objetivo para todas as inicializações do parâmetro de penalidade.

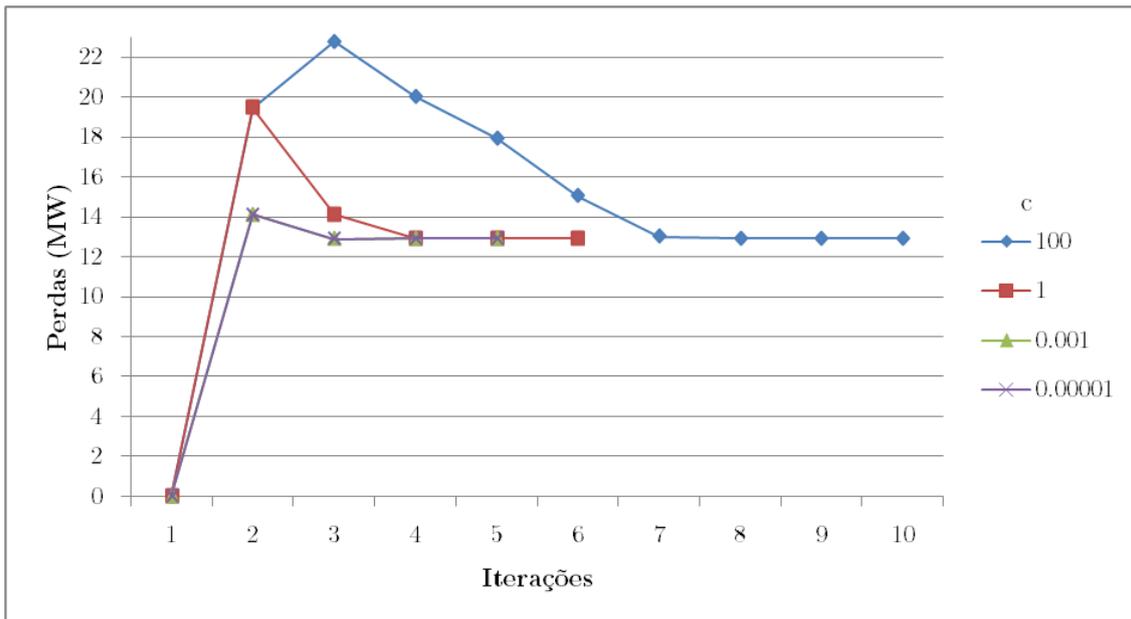


Figura 2 - Convergência da função objetivo do sistema de 3 barras

Na Figura 3, apresentamos as magnitudes das tensões ao final do processo de minimização.

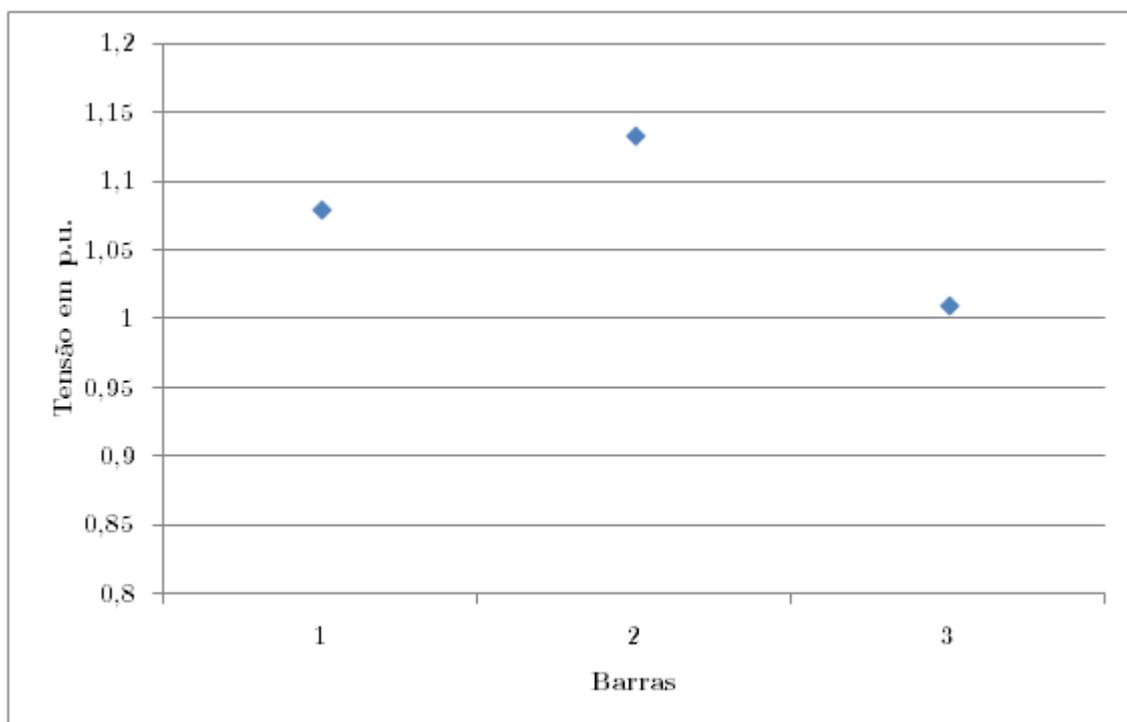


Figura 3 - Magnitude das tensões do sistema de 3 barras

Observamos que em todos os testes realizados a magnitude das tensões satisfazem os limites impostos.

6.1.2 Sistema elétrico IEEE 14 barras

O sistema elétrico IEEE 14 barras é composto da seguinte maneira:

- ❖ 9 barras de carga;
- ❖ 1 barra de geração;
- ❖ 4 barras de controle de reativo;
- ❖ 17 linhas de transmissão;
- ❖ 30 variáveis.

A formulação matemática do problema de FPO, associado ao sistema elétrico IEEE 14 barras, com o objetivo de minimizar as perdas de potência ativa na transmissão da rede possui:

- ❖ 13 equações de balanço de potência ativa;
- ❖ 9 equações de balanço de potência reativa;
- ❖ 10 inequações de geração de potência reativa;
- ❖ 3 restrições canalizadas dos *taps*;
- ❖ 14 restrições canalizadas das tensões.

A Figura 4 apresenta o diagrama do sistema elétrico IEEE 14 barras.

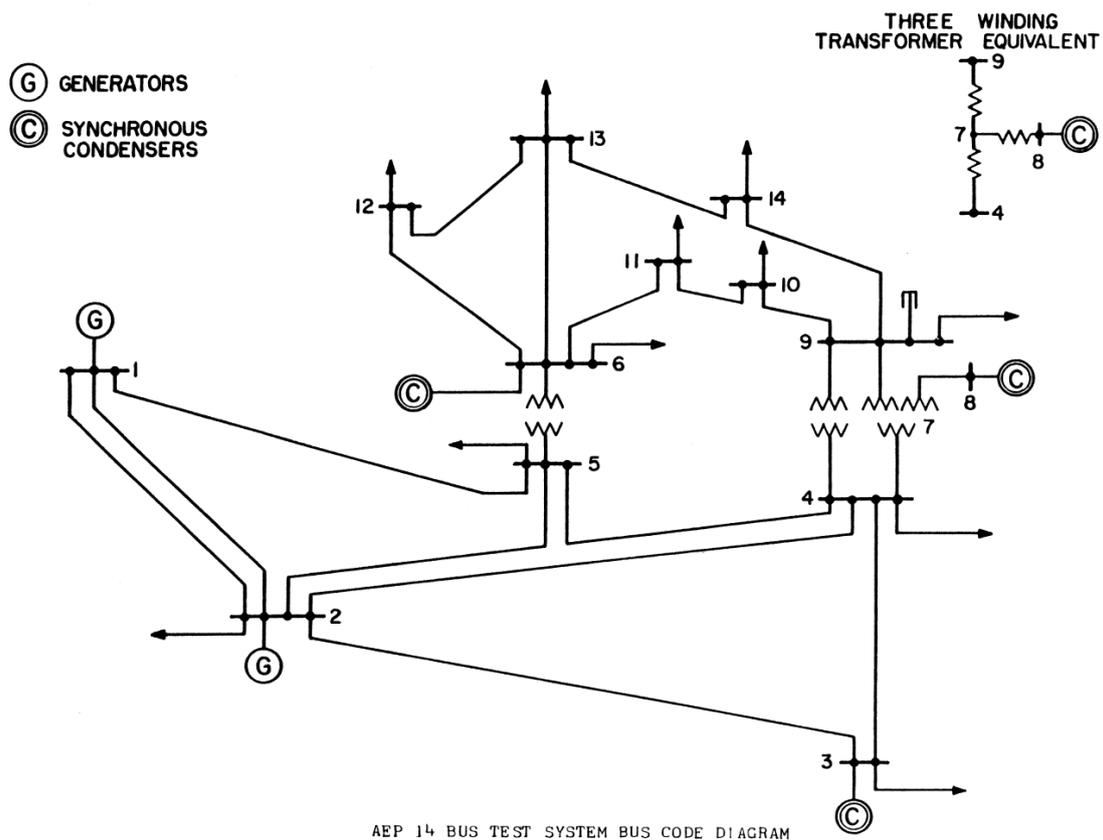


Figura 4 - Sistema elétrico IEEE 14 barras

Fonte: <http://www.ee.washington.edu/research/pstca/pf14/14bus600.tif>

Nos teste realizados com o problema de FPO para o sistema elétrico IEEE 14 barras os limites mínimos e máximos das tensões em cada uma das barras foram adotados como $V_k^{\min} = 0,95p.u.$ e $V_k^{\max} = 1,10p.u.$, para os *taps* os limites mínimos e máximos os valores adotados foram $tap_k^{\min} = 0,95p.u.$ e $tap_k^{\max} = 1,05p.u.$, respectivamente.

Os valores iniciais para as tensões, ângulos e limites das restrições do problema foram tomados conforme o banco de dados que pode ser encontrado no Apêndice B.

Na tabela 2 apresentamos os valores da função objetivo (perdas) nas soluções obtidas pelo pacote de otimização MINOS na resolução do problema de

FPO associado ao sistema elétrico IEEE 14 barras para diferentes inicializações do parâmetro de penalidade c .

Tabela 2 – Valores da função objetivo do sistema elétrico IEEE 14 barras

	$c = 100$	$c = 1$	$c = 10^{-3}$	$c = 10^{-5}$
Iterações	8	6	4	4
F. Objetivo	12,29967MW	12,29967MW	12,29967MW	12,29967MW
Iterações (c constante)	4	3	3	3
Penalidade Final	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-6}

Os valores das tensões, dos ângulos e dos *taps* nas soluções obtidos nos testes realizados na tabela 2 estão no Apêndice A. Todos os testes realizados com o sistema elétrico IEEE 14 barras determinaram a mesma solução e esta será apresentada uma única vez.

Na Figura 5, apresentamos a curva da convergência da função objetivo do problema de FPO para o sistema elétrico IEEE 14 barras, para todas as inicializações do parâmetro de penalidade.

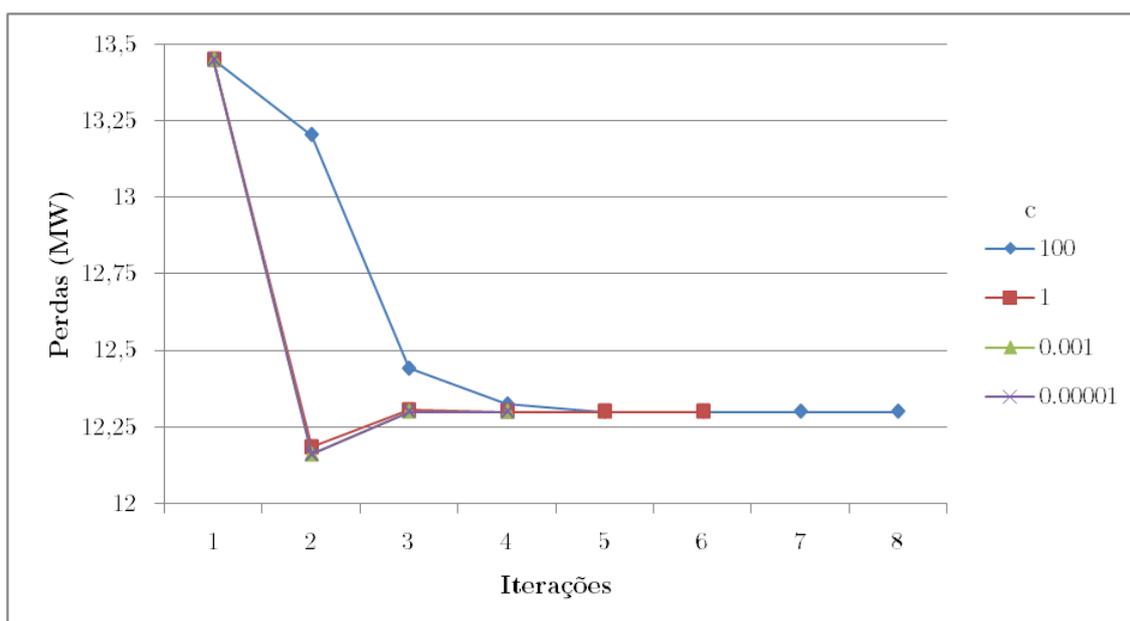


Figura 5 - Convergência da função objetivo sistema IEEE 14 barras

Na Figura 6, apresentamos as magnitudes das tensões ao final do processo de minimização.

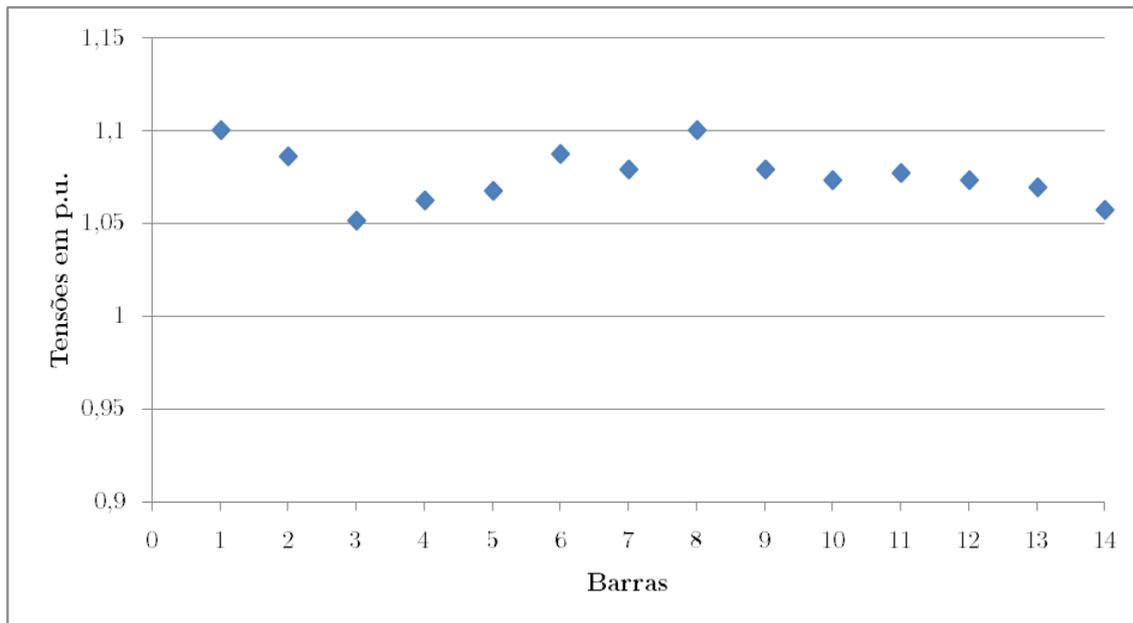


Figura 6 - Magnitude das tensões do sistema IEEE 14 barras

Na Figura 6, observamos que em todos os testes realizados a magnitude das tensões satisfaz os limites impostos. Os taps também estão dentro dos seus respectivos limites conforme Apêndice A.

6.1.3 Sistema elétrico IEEE 30 barras

O sistema elétrico IEEE 30 barras é composto da seguinte maneira:

- ❖ 24 barras de carga;
- ❖ 1 barra de geração;
- ❖ 5 barras de controle de reativo;
- ❖ 37 linhas de transmissão;
- ❖ 63 variáveis.

A formulação matemática do problema de FPO, associado ao sistema elétrico IEEE 30 barras, com o objetivo de minimizar as perdas de potência ativa na transmissão da rede possui:

- ❖ 29 equações de balanço de potência ativa;
- ❖ 24 equações de balanço de potência reativa;
- ❖ 12 inequações de geração de potência reativa;
- ❖ 4 restrições canalizadas dos *taps*;

30 restrições canalizadas das tensões.

A Figura 7 apresenta o diagrama do sistema elétrico IEEE 30 barras.

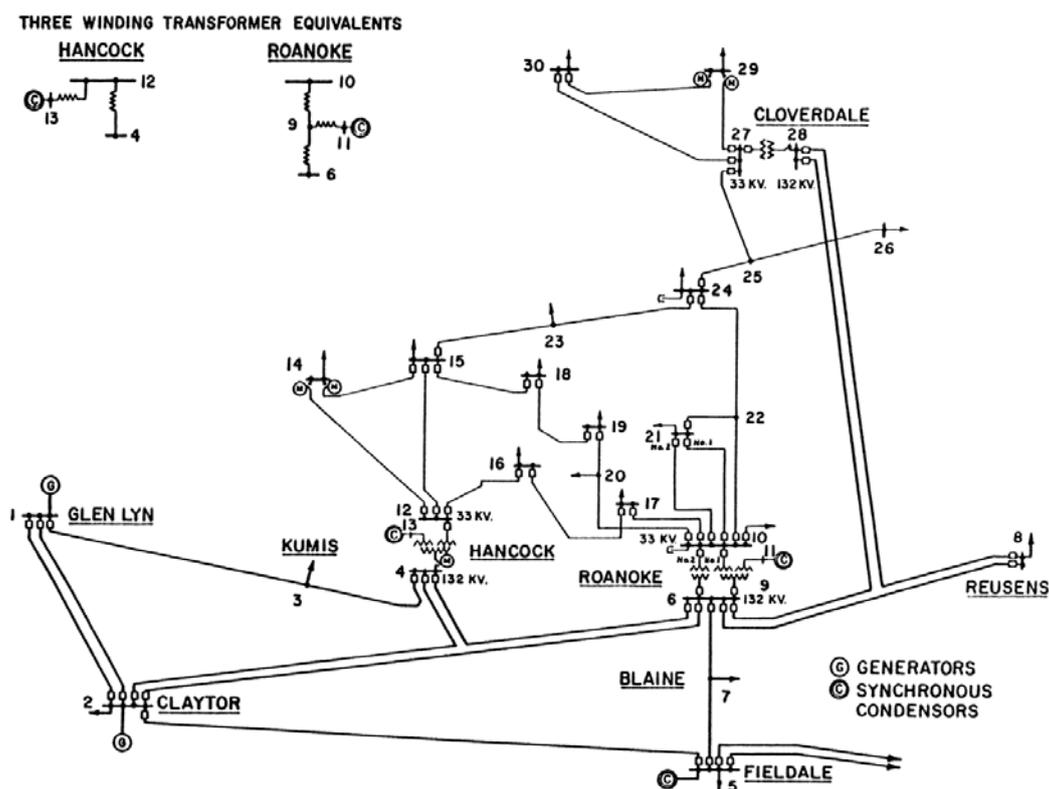


Figura 7 - Sistema elétrico IEEE 30 barras

Fonte: <http://www.ee.washington.edu/research/pstca/pf30/30bus600.tif>

Nos teste realizados com o problema de FPO para o sistema elétrico IEEE 30 barras os limites mínimos e máximos das tensões em cada uma das barras foram adotados como $V_k^{\min} = 0,95p.u.$ e $V_k^{\max} = 1,10p.u.$, para os *taps* os limites mínimos e máximos os valores adotados foram $tap_k^{\min} = 0,95p.u.$ e $tap_k^{\max} = 1,05p.u.$, respectivamente.

Os valores iniciais para as tensões, ângulos e limites das restrições do problema foram fixados conforme o banco de dados que pode ser encontrado no Apêndice B.

Na tabela 3 apresentamos os valores da função objetivo (perdas) nas soluções obtidas pelo pacote de otimização MINOS na resolução do problema de FPO associado ao sistema elétrico IEEE 30 barras para diferentes inicializações do parâmetro de penalidade c .

Tabela 3 – Valores da função objetivo do sistema elétrico IEEE 30 barras

	$c = 100$	$c = 1$	$c = 10^{-3}$	$c = 10^{-5}$
Iterações	8	6	5	5
F. Objetivo	16,13163MW	16,13163MW	16,13163MW	16,11363MW
Iterações (c constante)	4	4	3	3
Penalidade Final	10^{-2}	10^{-2}	10^{-5}	10^{-8}

Os valores das tensões, dos ângulos e dos *taps* finais obtidos nos testes realizados na tabela 3 está no Apêndice A. Todos os testes realizados no sistema elétrico de 30 barras determinaram a mesma solução e esta será apresentada uma única vez.

Na Figura 8, apresentamos a curva da convergência da função objetivo do problema de FPO para o sistema elétrico IEEE 30 barras, para todas as inicializações do parâmetro de penalidade.

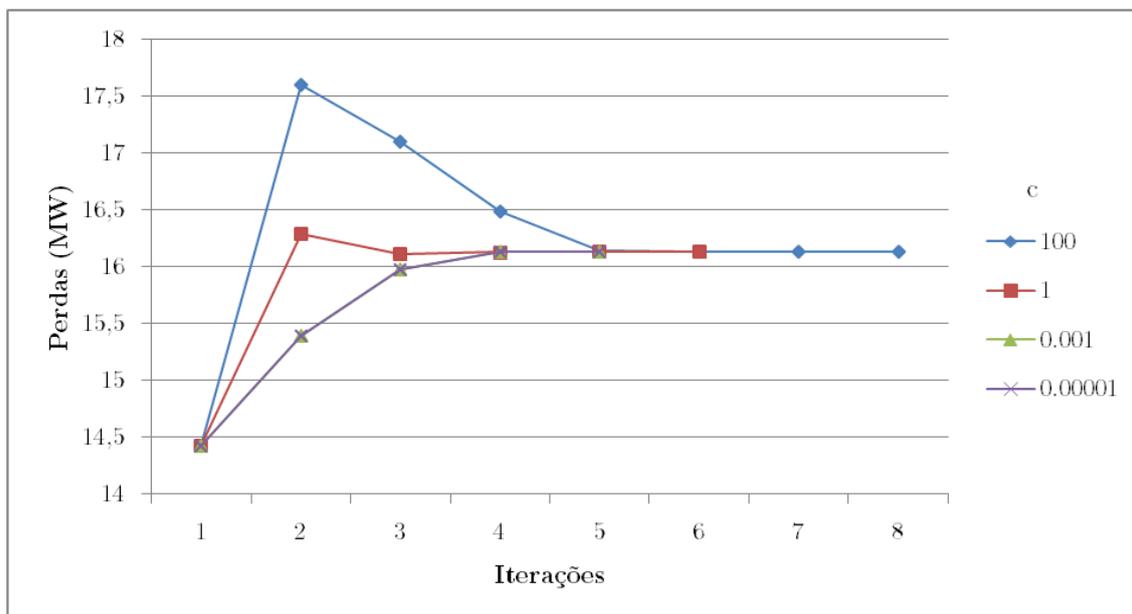


Figura 8 - Convergência da função objetivo sistema IEEE 30 barras

Na Figura 9 apresentamos as magnitudes das tensões ao final do processo de minimização.

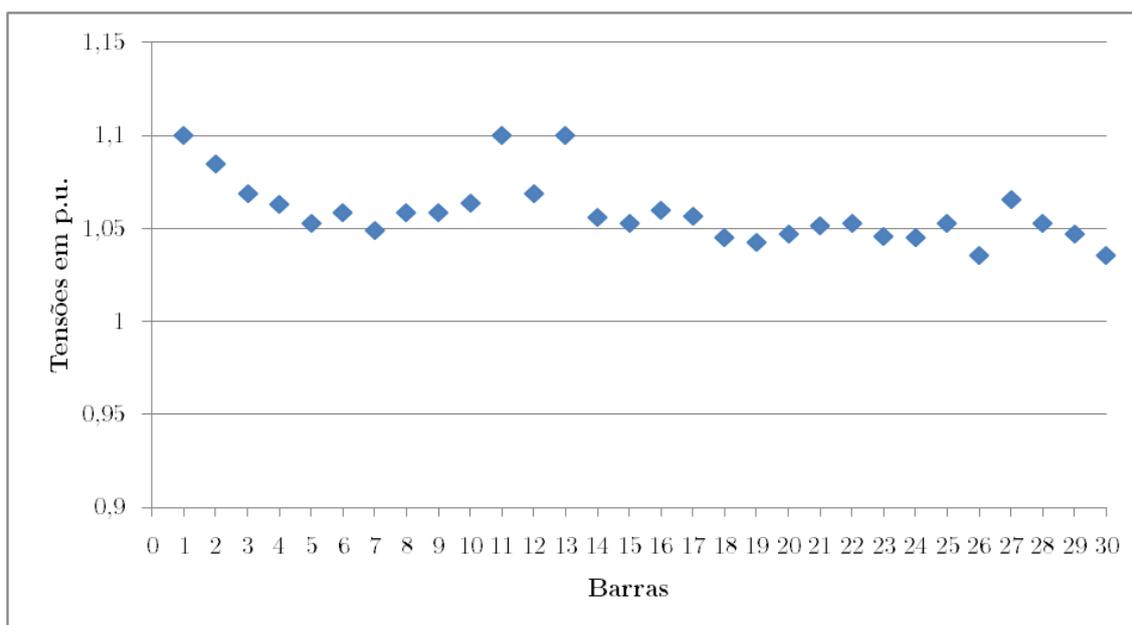


Figura 9 - Magnitude das tensões do sistema IEEE 30 barras

Na Figura 9, observamos que em todos os testes realizados a magnitude das tensões satisfaz os limites impostos. Os taps também estão dentro dos seus respectivos limites conforme Apêndice A.

6.1.4 Sistema elétrico IEEE 57 barras

O sistema elétrico IEEE 57 barras é composto da seguinte maneira:

- ❖ 50 barras de carga;
- ❖ 1 barra de geração;
- ❖ 6 barras de controle de reativo;
- ❖ 80 linhas de transmissão;
- ❖ 128 variáveis.

A formulação matemática do problema de FPO, associado ao sistema IEEE 57 barras, com o objetivo de minimizar as perdas de potência ativa na transmissão da rede possui:

- ❖ 56 equações de balanço de potência ativa;
- ❖ 50 equações de balanço de potência reativa;
- ❖ 14 inequações de geração de potência reativa;
- ❖ 15 restrições canalizadas dos *taps*;
- ❖ 57 restrições canalizadas das tensões.

A Figura 10 apresenta o diagrama do sistema elétrico IEEE 57 barras.

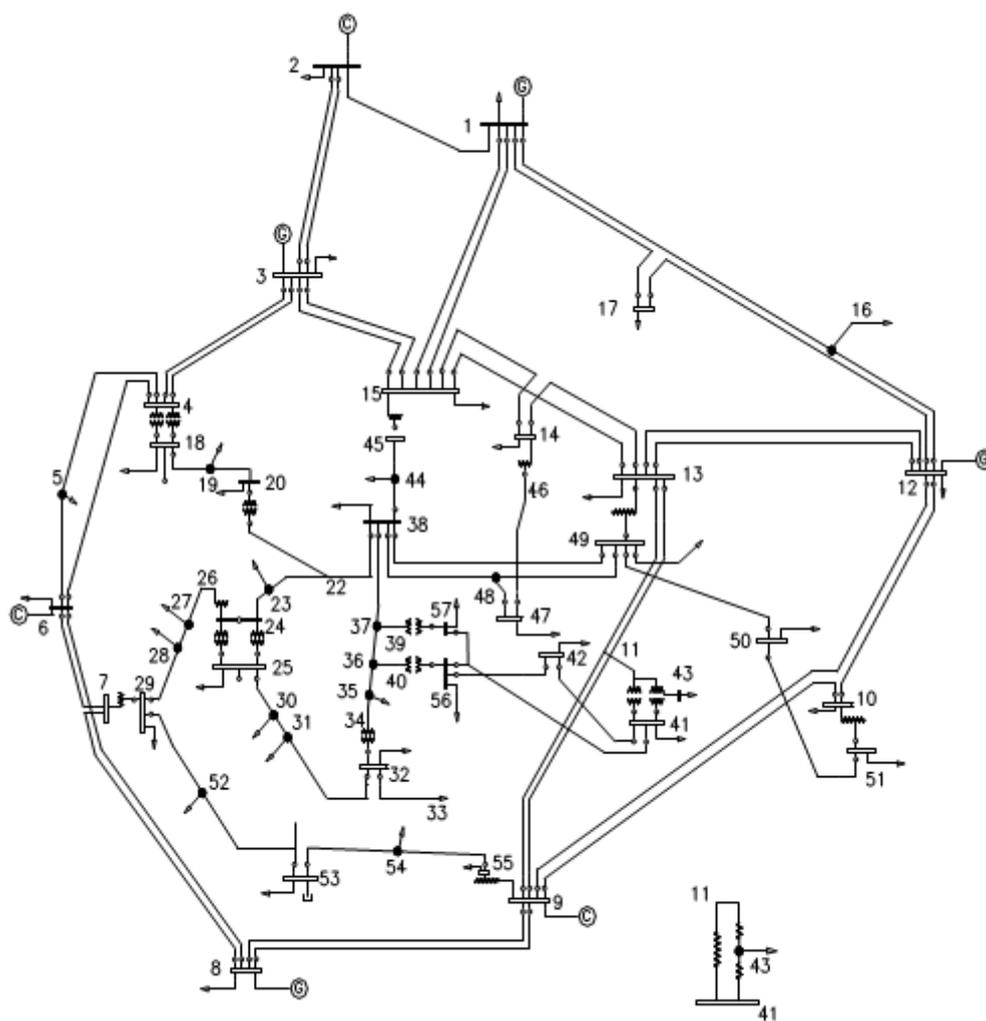


Figura 10 - Sistema elétrico IEEE 57 barras

Fonte: http://www.ee.washington.edu/research/pstca/pf57/pg_tca57fig.htm

Nos teste realizados com o problema de FPO para o sistema elétrico IEEE 57 barras os limites mínimos e máximos das tensões em cada uma das barras foram adotados como $V_k^{\min} = 0,95p.u.$ e $V_k^{\max} = 1,10p.u.$, para os *taps* os limites mínimos e máximos os valores adotados foram $tap_k^{\min} = 0,90p.u.$ e $tap_k^{\max} = 1,05p.u.$, respectivamente.

Os valores iniciais para as tensões, ângulos e limites das restrições do problema foram tomados conforme o banco de dados que pode ser encontrado no Apêndice B.

Na tabela 4 apresentamos os valores da função objetivo (perdas) nas soluções obtidas pelo pacote de otimização MINOS na resolução do problema de FPO associado ao sistema elétrico IEEE 57 barras para diferentes inicializações do parâmetro de penalidade c .

Tabela 4 – Valores da função objetivo do sistema elétrico IEEE 57 barras

	$c = 100$	$c = 1$	$c = 10^{-3}$	$c = 10^{-5}$
Iterações	10	7	6	6
F. Objetivo	22,82965MW	22,82965MW	22,82965MW	22,82965MW
Iterações (c constante)	4	4	4	4
Penalidade Final	10^{-2}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-7}

Os valores das tensões, dos ângulos e dos *taps* finais obtidos nos testes realizados na tabela 4 estão no Apêndice A. Todos os testes realizados no sistema elétrico IEEE 57 barras determinou a mesma solução e esta será apresentada uma única vez.

Na Figura 11, é apresentamos a curva da convergência da função objetivo do problema de FPO para o sistema elétrico IEEE 57 barras, para todas as inicializações do parâmetro de penalidade.

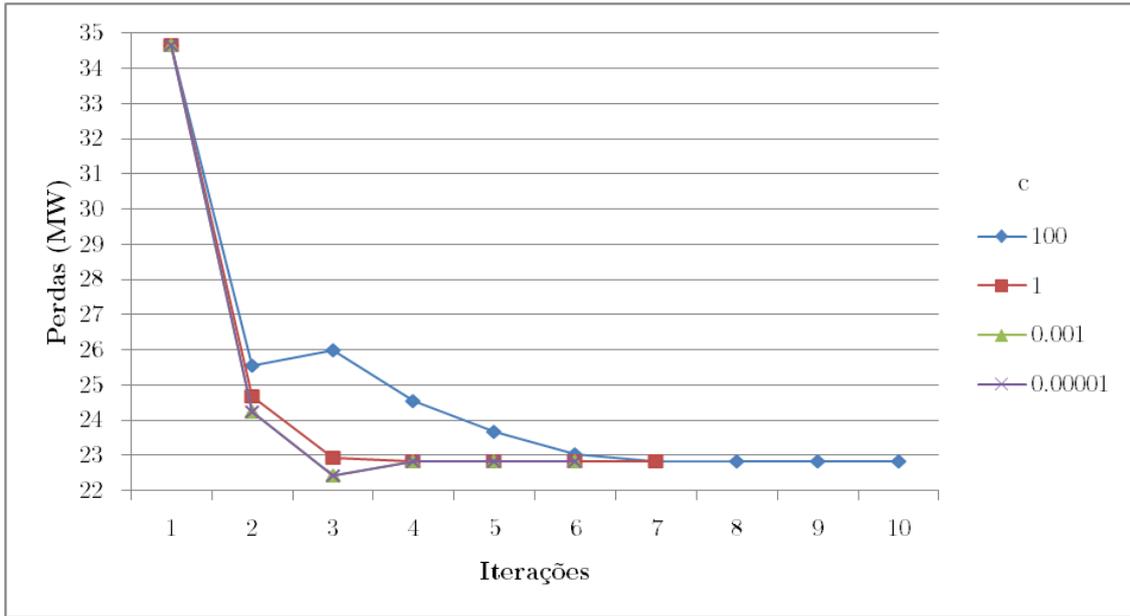


Figura 11 - Convergência da função objetivo sistema IEEE 57 barras

Na Figura 12 apresentamos as magnitudes das tensões ao final do processo de minimização.

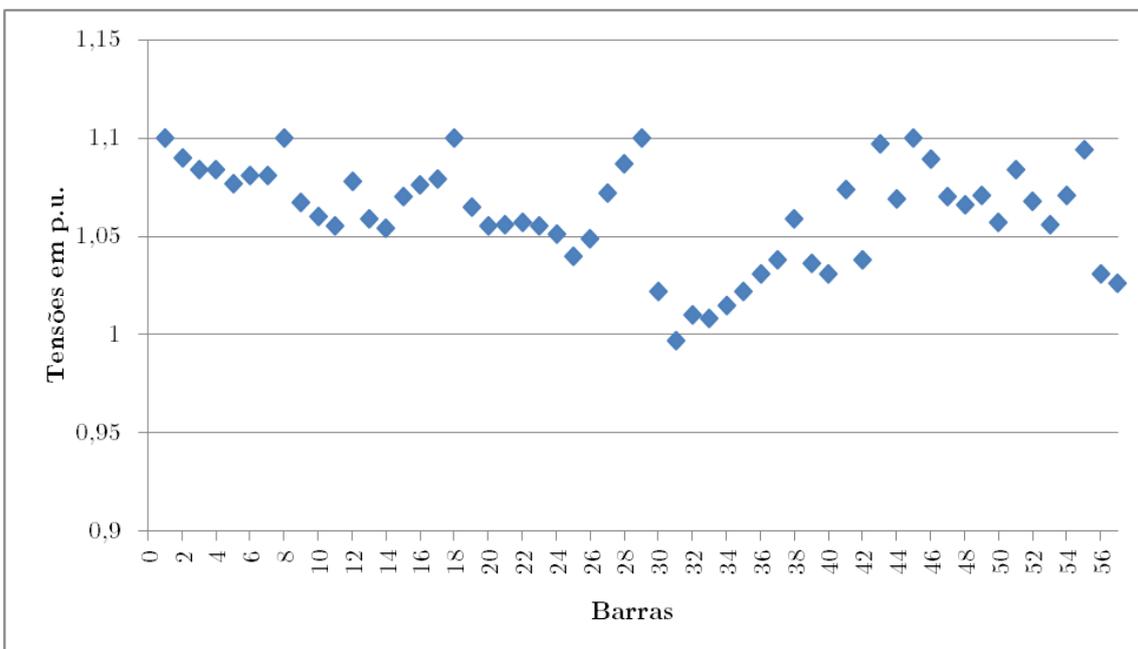


Figura 12 - Magnitude das tensões do sistema de IEEE 57 barras

Na Figura 12 observamos que em todos os testes realizados a magnitude das tensões satisfaz os limites impostos. Os taps também estão dentro dos seus respectivos limites conforme Apêndice A.

6.1.5 Sistema elétrico IEEE 118 barras

O sistema elétrico IEEE 118 barras é composto da seguinte maneira:

- ❖ 66 barras de carga;
- ❖ 1 barra de geração;
- ❖ 51 barras de controle de reativo;
- ❖ 186 linhas de transmissão;
- ❖ 244 variáveis.

A formulação matemática do problema de FPO, associado ao sistema elétrico IEEE 118 barras, com o objetivo de minimizar as perdas de potência ativa na transmissão da rede possui:

- ❖ 117 equações de balanço de potência ativa;
- ❖ 64 equações de balanço de potência reativa;
- ❖ 54 inequações de geração de potência reativa;
- ❖ 9 restrições canalizadas dos *taps*;
- ❖ 118 restrições canalizadas das tensões.

A Figura 13 apresenta o diagrama do sistema elétrico IEEE 118 barras.

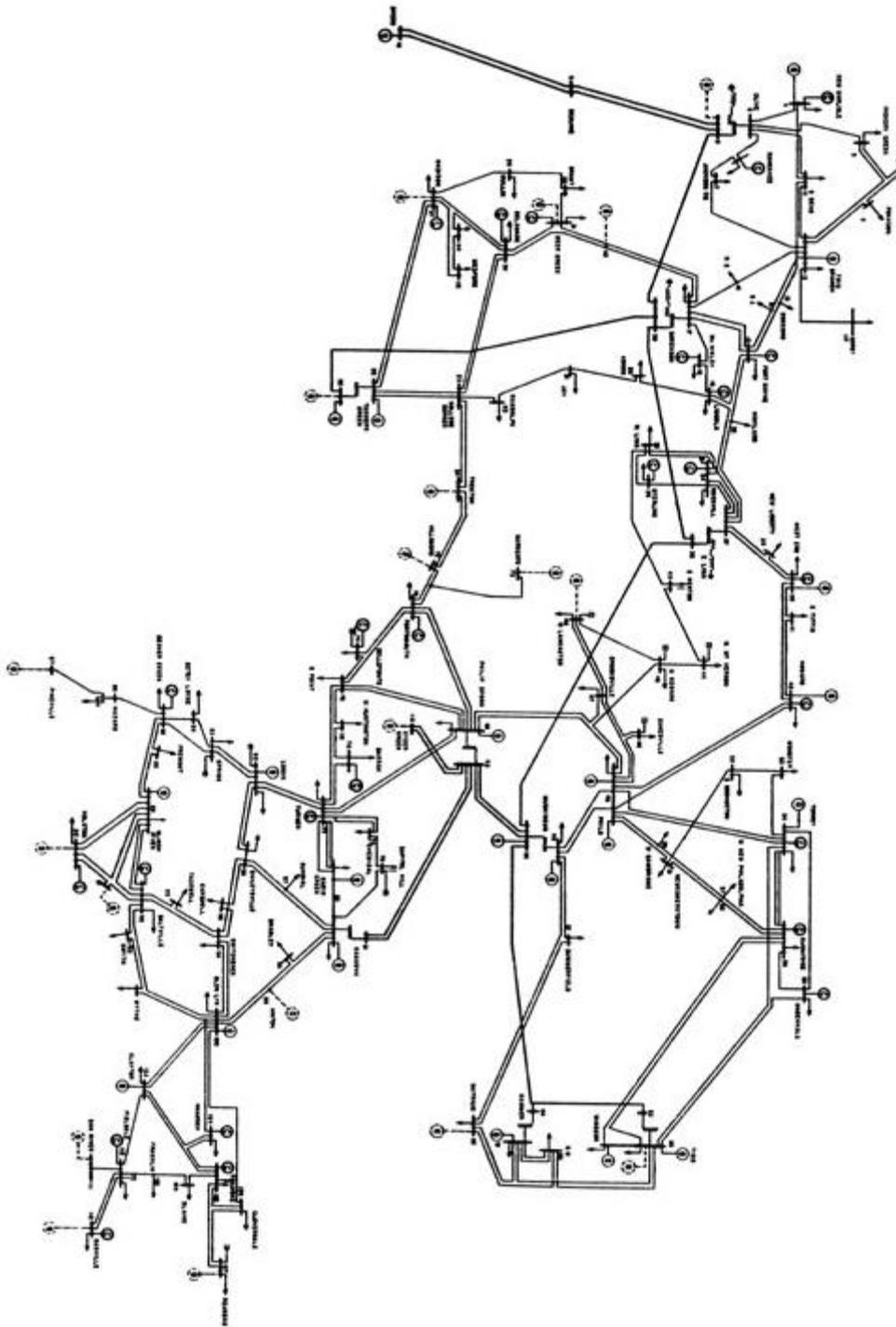


Figura 13 - Sistema elétrico IEEE 118 barras

Fonte: http://www.ee.washington.edu/research/pstca/pf118/pg_tca118fig.htm

Nos teste realizados com o problema de FPO para o sistema elétrico IEEE 118 barras os limites mínimos e máximos das tensões em cada uma das

barras foram adotados como $V_k^{\min} = 0,90p.u.$ e $V_k^{\max} = 1,10p.u.$, para os *taps* os limites mínimos e máximos os valores adotados foram $tap_k^{\min} = 0,95p.u.$ e $tap_k^{\max} = 1,05p.u.$, respectivamente.

Os valores iniciais para as tensões, ângulos e limites das restrições do problema foram tomados conforme o banco de dados que pode ser encontrado no Apêndice B.

Na tabela 5 apresentamos os valores da função objetivo (perdas) nas soluções obtidas pelo pacote de otimização MINOS na resolução do problema de FPO associado ao sistema elétrico IEEE 118 barras para diferentes inicializações do parâmetro de penalidade c .

Tabela 5 – Valores da função objetivo do sistema elétrico IEEE 118 barras

	$c = 100$	$c = 1$	$c = 10^{-3}$	$c = 10^{-5}$
Iterações	15	12	11	10
F. Objetivo	106,1035MW	106,1035MW	106,1035MW	106,1035MW
Iterações (c constante)	10	9	10	9
Penalidade Final	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-6}

Os valores das tensões, dos ângulos e dos *taps* finais obtidos nos testes realizados na tabela 5 estão no Apêndice A. Todos os testes realizados no sistema elétrico IEEE 118 barras determinou a mesma solução e esta será apresentada uma única vez.

Na Figura 14, apresentamos a curva da convergência da função objetivo do problema de FPO para o sistema elétrico IEEE 118 barras, para todas as inicializações do parâmetro de penalidade.

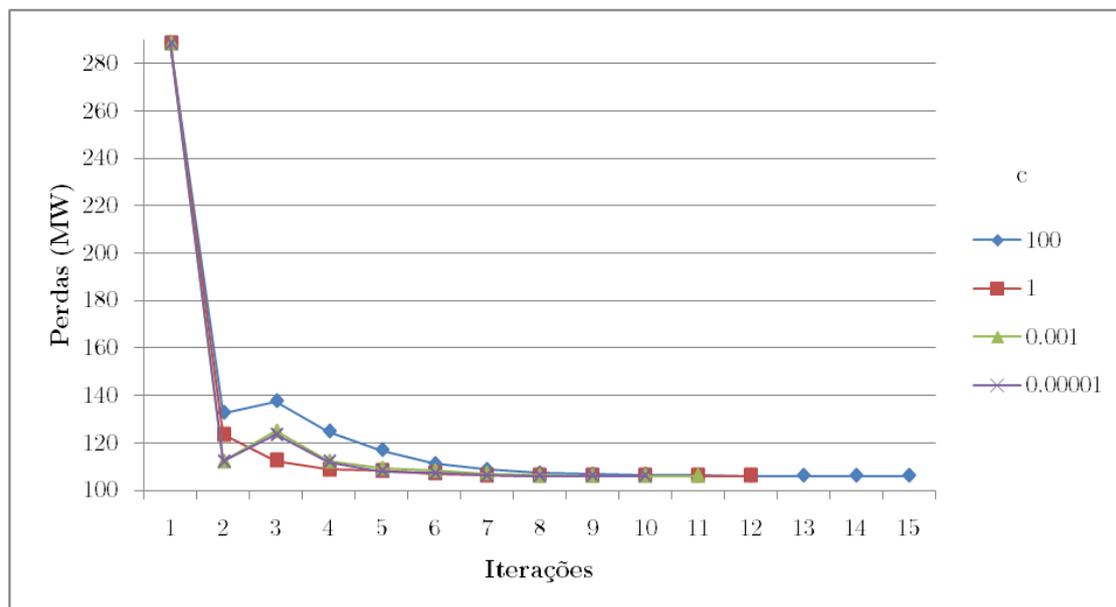


Figura 14 – Convergência da função objetivo sistema IEEE 118 barras

Na Figura 15 apresentamos as magnitudes das tensões ao final do processo de minimização.

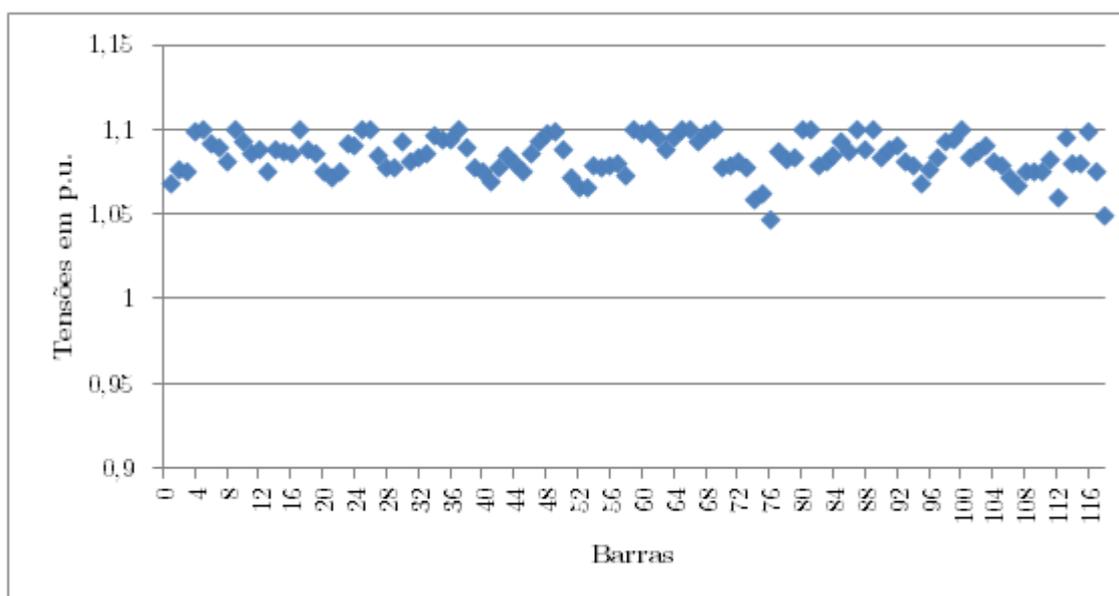


Figura 15 - Magnitude das tensões do sistema IEEE 118 barras

Na Figura 15 observamos que em todos os testes realizados a magnitude das tensões satisfaz os limites impostos. Os taps também estão dentro dos seus respectivos limites conforme Apêndice A.

6.1.6 Análise dos resultados

No capítulo 4 apresentamos o método implementado no pacote de otimização MINOS que utiliza a linearização das funções não lineares, uma função Lagrangiana Aumentada e o método do gradiente reduzido.

Observando os testes realizados com os problemas de FPO associados a diferentes sistemas elétricos concluímos que o método é eficiente em sua resolução.

O número de iterações está diretamente ligado à inicialização do parâmetro de penalidade. De acordo com os testes realizados, o número de iterações diminui quando diminuimos a aproximação inicial do parâmetro de penalidade. Isso pode ser constatado na Figura 16. Também ressaltamos que em nenhum dos testes realizados o parâmetro de penalidade aumentou.

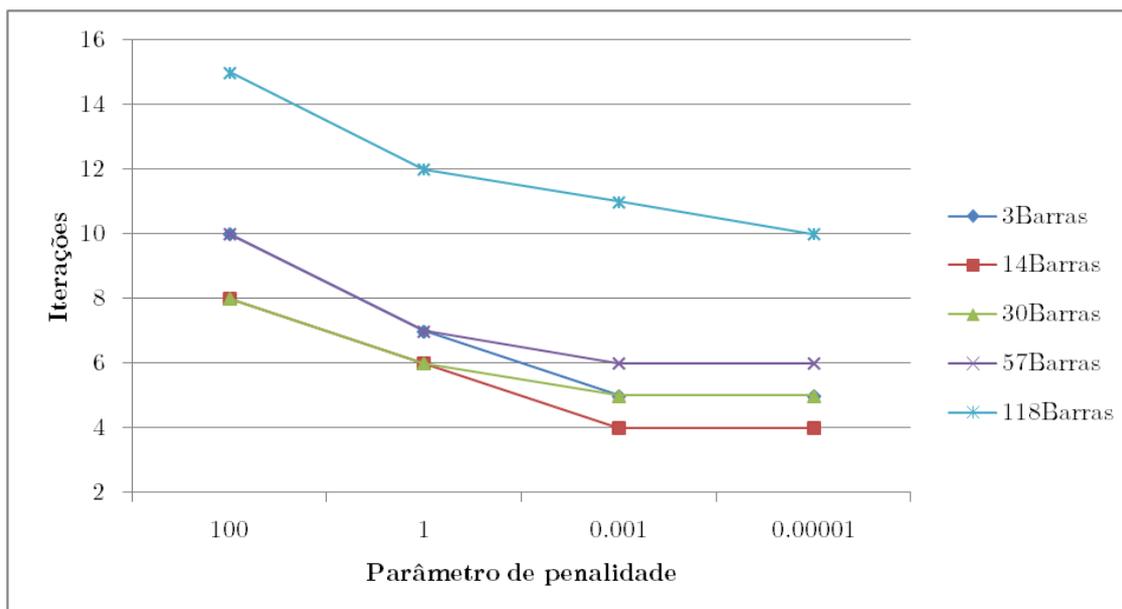


Figura 16 - Gráfico de iterações por inicialização do parâmetro de penalidade

Em relação à função objetivo do problema observamos que a inicialização do parâmetro de penalidade influencia na trajetória de convergência da função objetivo, como pode ser notado nas Figuras 2, 5, 8, 11 e 14.

Salientamos que, em outros testes realizados, ao escolhermos parâmetros de penalidades iniciais muito pequenos, isto é, menor que 10^{-5} , o número de iterações permanece constante.

6.1.7 Uma comparação com KNITRO

Com o intuito de verificar a eficiência do método comparamos o algoritmo implementado no pacote de otimização MINOS com o algoritmo implementado no pacote de otimização KNITRO.

O KNITRO é uma ferramenta de otimização para problemas não lineares e de grande porte. O seu algoritmo contém dois métodos implementados, um método de pontos interiores e um método do conjunto ativo. Uma heurística é

implementada para realizar a mudança de um método para outro, caso um dos métodos não consiga a convergência para o problema. Nesta comparação utilizamos a opção *default* do MINOS e do KNITRO.

Na tabela 6 apresentamos os resultados obtidos pelos dois pacotes de otimização.

Tabela 6 – Iterações e tempo computacional

Sistemas	IEEE 57 Barras		IEEE 118 Barras	
Pacotes	MINOS	KNITRO	MINOS	KNITRO
Iterações	7	9	12	13
Tempo (s)	0,198	0,182	0,599	0,299

Observamos que o valor da função objetivo e a solução encontrada, são as mesmas nos dois pacotes de otimização.

No próximo capítulo apresentamos as conclusões.

Capítulo 7

Conclusões

No presente trabalho inicialmente apresentamos um breve histórico a respeito do desenvolvimento da função Lagrangiana Aumentada desde sua definição por HESTENES e POWELL (1969). Uma revisão sobre alguns métodos de otimização matemática foi realizada descrevendo: método Dual-Lagrangiano, método da função Penalidade, método da função Lagrangiana Aumentada e método do gradiente reduzido.

Investigamos o método implementado no pacote de otimização MINOS, o qual foi desenvolvido inicialmente para resolver problemas com função objetivo e restrições lineares pelo método primal simplex e problemas com função objetivo não linear e restrições lineares pelo método do gradiente reduzido. Posteriormente, foi expandido para problemas com função objetivo e restrições não lineares, que transforma o problema com restrições não lineares em uma sequência de problemas de minimização com restrições lineares. É utilizada uma função Lagrangiana Aumentada para a resolução do problema original, na qual a diferença entre as funções não lineares e suas linearizações são incorporadas à função objetivo e associa-se a elas um multiplicador de Lagrange e um parâmetro de penalidade.

Aplicamos o método implementado no algoritmo MINOS ao problema de FPO e verificamos sua eficiência, bem como, a influência da inicialização do parâmetro de penalidade em sua solução.

Observamos através dos resultados apresentados no capítulo 6, que o método é eficiente na resolução dos problemas associados aos sistemas elétricos FPO de 3, 14, 30, 57 e 118 barras.

Além disso, destacamos que: o número de iterações está diretamente ligado à inicialização do parâmetro de penalidade e que este número diminui quando diminuimos a aproximação do parâmetro; que parâmetros iniciais muito pequenos existe uma tendência a manter constante o número de iterações e a trajetória de convergência da função objetivo muda de acordo com os parâmetros de penalidade.

As contribuições deste trabalho podem ser resumidas em dois aspectos: na área da Matemática contribuimos com a investigação do método baseado na função Lagrangiana Aumentada; na área da Engenharia Elétrica aplicamos e resolvemos de maneira eficiente o problema de FPO, o qual é de grande interesse para os estudos realizados no planejamento e na programação de operação de sistemas de energia elétrica.

O trabalho ainda deixa algumas perspectivas de trabalhos futuros:

- ❖ Investição de regras especiais para inicialização e atualização do parâmetro de penalidade e dos multiplicadores de Lagrange;
- ❖ Realização de testes mais elaborados com sistemas elétricos maiores, por exemplo 300 barras e 810 barras;
- ❖ Variação do método em relação à utilização de outros métodos de busca multidimensional.

Trabalhos publicados

1. Título: Um estudo de caso dos parâmetro das função Lagrangiana Aumentada e o Fluxo de Potência Ótimo.

Resumo publicado e apresentado em pôster no Congresso Ibero Latinoamericano de Investigação Operacional (CLAIO) e Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO), 2012, Rio de Janeiro – RJ.

2. Título: Um estudo de caso usando a Lagrangiana Aumentada com diferentes atualizações dos parâmetros e sua influência na solução do FPO.

Resumo publicado e apresentado em pôster no II Seminário da Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2012, Bauru – SP.

3. Título: O método da Função Lagrangiana Aumentada-Barreira Logarítmica e uma investigação da atualização de seus parâmetros.

Resumo publicado e apresentado no II Congresso de Matemática Aplicada e Computacional (CMAC), 2013, Bauru – SP.

4. Título: Uma investigação do MINOS e sua aplicação ao problema de Fluxo de Potência Ótimo.

Trabalho completo publicado no XX Simpósio de Engenharia de Produção (SIMPEP), 2013, Bauru – SP.

5. Título: Fluxo de Potência Ótimo e o MINOS.

Trabalho completo publicado e apresentado no III Seminário da Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2013, Bauru – SP.

6. Título: Uma análise da inicialização do parâmetro de penalidade em uma função Lagrangiana Aumentada e o Fluxo de Potência Ótimo.

Trabalho completo submetido para o XLVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO), 2014, Salvador – BA.

7. Título: An investigation about package MINOS and Optimal Power Flow problems.

Resumo publicado na 20th Conference of the International Federation of Operational Research (IFORS), 2014, Barcelona-Spain.

Bibliografia

ANDREANI, R.; BIRGIN, E.G.; MARTÍNEZ, J.M.; SCHUVERDT, M.L. (2006). Augmented Lagrangian methods under the constant positive linear dependence constraint qualification. *Mathematical Programming*, v. 111, p.234-252.

ARGAEZ, M.; TAPIA, R.A. (2002). On the global convergence of a modified Augmented Lagrangian linesearch interior-point Newton method for nonlinear programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 114, p. 1-25.

ARROW, K.J.; GOULD, F.J.; HOWE, S.M. (1973). A General Saddle Point for Constrained Optimization. *Mathematical Programming*, v. 5, n. 1, p. 225-234.

AVELINO, C.P.; VICENTE, L.N. (2003). Updating the multipliers associated with inequality constraints in an augmented Lagrangian multiplier method. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 119, p. 215-233.

BAPTISTA, E.C.; BELATI, E.A.; COSTA, G.R.M. (2005). Logarithmic barrier-augmented Lagrangian function to the optimal power flow problem. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, v. 27, p. 528-532.

BAPTISTA, E. C.; BELATI, E.; SOUZA V.; COSTA, G.R.M. (2006). Primal-Dual Logarithmic Barrier and Augmented Lagrangian Function to the Loss Minimization in Power Systems. *Electric Power Components and Systems Lexington – USA*, v. 34, n. 7, p. 775-784.

BAPTISTA, E. C. (2001). Método da função Lagrangiana Aumentada-barreira logarítmica para a solução do problema de Fluxo de Potência Ótimo. São Carlos. 175p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

BAZARAA, M.S.; SHERALI, H.D.; SHETTY, C.M. (2006). Nonlinear Programming: Theory and Algorithms. 3 ed. New Jersey, John Wiley.

- BELTRAN, C.; HEREDIA, F.J. (2002). Unit commitment by augmented Lagrangian relaxation: Testing two decomposition approaches. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 112, p. 295-314.
- BEN-TAL, A.; ZIBULEVSKY, M. (1997). Penalty/Barrier Multiplier Methods For Convex Programming Problems. *SIAM Journal of Optimization*, v. 7, n. 2, p.347-366.
- BERTSEKAS, D.P. (1976a). On Penalty and Multiplier Methods for Constrained Minimization. *SIAM Journal Control and Optimization*, v.14, n. 2, p. 216-235.
- BERTSEKAS, D.P. (1976b). Multiplier Methods: A Survey. *Automática*, v. 12, n. 2, p.133-145.
- BERTSEKAS, D.P.; TSENG, P. (1993). On the Convergence of the Exponential Multiplier Method for Convex Programming. *Mathematical Programming*, v. 60, n. 1, p. 1-19.
- BIRGIN, E.G.; CASTILLO, R.A.; MARTINEZ, J.M. (2005). Numerical comparison of Augmented Lagrangian algorithms for nonconvex problems. *Computational Optimization and Applications*, v. 31, p. 31-55.
- BIRGIN, E.G.; MARTINEZ, J.M. (2007). Structured minimal-memory inexact quasi-Newton method and secant preconditioners for augmented Lagrangian optimization. *SIAM Journal on Optimization*, v. 12, p. 1112-1130.
- BIRGIN, E.G.; MARTÍNEZ, J.M. (2011). Augmented Lagrangian method with nonmonotone penalty parameters for constrained optimization. *Comput. Math. Appl.* 51. p. 941-965.
- BIRGIN, E.G.; MARTÍNEZ, J.M.; FERNÁNDEZ D.; (2012). The boundedness of penalty parameters in an Augmented Lagrangian method with constrained subproblems. *Optimization Methods and Software*. v.27. p.1001-1024.
- BOGGS, P.T.; TOLLE, J.W. (1980). Augmented Lagrangians Which Are Quadratic in the Multiplier. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 31, n. 1, p. 17-26.

BOUKARI, D.; FIACCO, A.V. (1995). Survey of Penalty, Exact-Penalty and Multiplier Methods From 1968 to 1993. *Optimization*, v. 32, p.301-334.

CARPENTIER, J. L. (1962). Contribution a L'etude du Dispatching Economique. *Bull-Soc. Fr Elec.*, Ser. B3, p. 431 – 447.

CARVALHO, E.P.; SANTOS, A. MA, T.F. (2008). Reduced gradient method combined with augmented Lagrangian and barrier for the optimal power flow problem. *Applied Mathematics and Computation*, v. 200, p. 529-536.

CONN, R.A.; GOULD, N.I.M.; TOINT, P.L. (1991). A Globally Convergent Augmented Lagrangian Algorithm for Optimization With General Constraints and Simple Bounds. *SIAM Journal Numerical Analysis*, v. 28, n. 2, p. 545-572.

CONN, A.R.; GOULD, N.; TOINT, P.L. (1997). A Globally Convergent Lagrangian Barrier Algorithm for Optimization With General Inequality Constraints and Simple Bounds. *Mathematics of Computation*, v. 66, n. 217, p. 261 –288.

DANTZIG, G. B. (1948). Programming in a Linear Structure. *Comptroller United States Air Force*. Washington, D.C.

DINIZ-EHRHARDT, M.A.; GOMES-RUGGIERO, M.A.; MARTINEZ, J.M.; SANTOS, S.A. (2004). Augmented Lagrangian algorithms based on the spectral projected gradient method for solving nonlinear programming problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 123, p. 497-517.

DI PILLO, G. A.; GRIPPO, L. (1979). New Class of Augmented Lagrangians in Nonlinear Programming. *SIAM Journal Control and Optimization*, v. 17, n. 5, p.618-628.

DI PILLO, G.; GRIPPO, L. (1982). A New Augmented Lagrangian Function for Inequality Constraints in Nonlinear Programming Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 36, n.4, p. 495-519.

DOMMEL H. W.; TINNEY W. F. Optimal Power Flow Solutions [Journal] . IEEE. Transactions on Power Apparatus and Systems. - 1968. - Vol. 87. - pp. 1866-1876.

- DOSTAL, Z.; FRIEDLANDER, A.; SANTOS, S.A. (1999). Augmented Lagrangians with Adaptive Precision Control for Quadratic Programming with Equality Constraints. *Computational Optimization and Applications*, v. 14, p. 37-53.
- DU, X.W.; ZHANG, L.S.; GAO, Y.L. (2006). A class of Augmented Lagrangians for Equality Constraints in Nonlinear Programming Problems. *Applied Mathematics and Computation*, v. 172, p. 644-663.
- DUAN, Y.; HUANG, W. (2013). A fixed-point Augmented Lagrangian method for total variation minimization problems. *J. Vis. Commun. Image R.* 24. p.1168-1181.
- DUSSAULT, J.P. (1998). Augmented Penalty Algorithms. *IMA Journal of Numerical Analysis*, v. 18, p. 355-372.
- ECHEVERRI, M.G.; FLORES, M.J.R.; MANTOVANI, J.R.S. (2010). Two Decomposition Approaches Applied to the Multi-Area Optimal Reactive Power Flow Problem. *Dyna-Colombia*, v. 66, p. 303-312.
- FLETCHER, R. (1975). Ideal Penalty for Constrained Optimization, *Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications*, v. 15, n. 3, p. 319-342.
- GILL, P.E.; MURRAY, W. (1974). Newton-type Methods for unconstrained and Linearly Constarined Optimization. *Mathematical Programming*. p.311-350.
- GILL, P. E; ROBINSON, D. P. (2010). A primal-dual augmented Lagrangian. *Comput. Math. Comp.* 51. P.1-25.
- GLAD, S.T. (1979). Properties of Updating Methods for the Multipliers in Augmented Lagrangians. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v.28, n. 2, p. 135-156.
- GOLDFARB, D.; POLYAK, R.A.; SCHEINBERG, K.; YUZEFOVICH, I. (1999). A modified Barrier-Augmented Lagrangian Method for Constrained Minimization, *Computational Optimization and Applications*, v. 14, p. 55-74.

- HAGER, W.W. (1993). Analysis an Implementation of a Dual Algorithm for Constrained Optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v.79, n. 3, p.427-462.
- HAN, S.P. (1979). Penalty Lagrangian Methods Via a Quasi-Newton Approach. *Mathematics of Operations Research*, v. 4, n. 3, p.291-302.
- HESTENES, M.R. (1969). SURVEY PAPER – Multiplier and Gradient Methods. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 4, n.5, p.303-320.
- IUSEM, A.N.; NASRI, M. (2010). Augmented Lagrangian Methods for Variational Inequality Problems. *Rairo-Operations Research*, v. 44, p. 5-25.
- KREJIK, N.; MARTINEZ, J.M., MELLO, M.; PILLOTTA, E.A. (2000). Validation of an augmented lagrangian algorithm witch a Gauss-Newton Hessian approximation using a set of hard-spheres problems. *Computational Optimization and Applications*, v. 16, n. 3, p. 247-263.
- KUHN, H.W.; TUCKER A.W. (1951). Nonlinear Programming. in *Proceedings of the 2nd Berkeley Symposium*, p.481-492.
- LUCIDI, S. (1988). New Results on a Class of Exact Augmented Lagrangians. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 58, n. 2, p. 259-282.
- LUO, H.Z.; SUN, X.L.; LI, D. (2007). On the convergence of augmented Lagrangian methods for constrained global optimization. *SIAM Journal on Optimization*, v. 18, p.1209-1230.
- LUO, H.Z.; SUN, X.L.; WU, H.X. (2008). Convergence properties of augmented Lagrangian methods for constrained global optimization. *Optimization Methods & Software*, v. 23, p.763-778.

MASIERO, M. C. S. (2011). Método da função Lagrangiana Aumentada-barreira modificada para a solução do problema de Fluxo de Potência Ótimo. Bauru. 175p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista.

MENDONÇA, L.F. (2008). Quasi-Newton acceleration for equality-constrained minimization. *Computational Optimization and Applications*, v. 40, p. 373-388.

MIELE, A.; MOSELEY, P.E.; CRAGG, E.E. (1972). On the Method of Multipliers for Mathematical Programming Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 10, n. 1, p.1- 33.

MIJANGOS, E.; NABONA, N. (2001). On the first-order estimation of multipliers from Kuhn-Tucker systems. *Computers & Operations Research*, v. 28, n. 3, p.243-270.

MOGUERZA, J.M.; PRIETO, F.J. (2003). An augmented Lagrangian interior-point method using directions of negative curvature. *Mathematical Programming*, v. 95, p. 573-616.

MOMOH, J.A; EL-HAWARY, M.E.; ADAPA, R. (1999.a). A review of Selected Optimal Power Flow Literature to 1993 – Part I: NonLinear and Quadratic Programming Approaches. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 14, n.1, p.96-104.

MONTICELLI, A.J. (1983). Fluxo de carga em redes de Energia Elétrica. São Paulo, Edgard Blücher.

MURTAGH, B.A.; SARGENT, R.W. (1969). A constrained minimization method with quadratic convergence. In: Fletcher, ed., *Optimization*. p.215-246.

MURTAGH, B.A.; SAUNDERS, M.A. (1978). Large-Scale Linearly Constrained Optimization. *Mathematical Programming*. p.41-72.

MURTAGH, B.A.; SAUNDERS, M.A. (1982). A Projected Lagrangian Algorithm and its Implementation for Sparse Nonlinear Constraints. *Mathematical Programming*. p.84-117.

- MURTAGH, B.A.; SAUNDERS, M.A. (1983). Projection Methods for Nonlinear Programming. *Mathematical Programming*. p.245-268.
- MURTAGH, B.A.; SAUNDERS, M.A. (1995). "MINOS 5.4 User's Guide". *Technical Report Sol 83-20R*, Systems Optimization Laboratory, California, Usa.
- MURTAGH, B.A.; SAUNDERS, M.A. (1998). "MINOS 5.5 User's Guide". *Technical Report Sol 83-20R*, Systems Optimization Laboratory, California, Usa.
- MURTAGH, B.A.; SAUNDERS, M.A. (2003). "MINOS 5.51 User's Guide". *Technical Report Sol 83-20R*, Systems Optimization Laboratory, California, Usa.
- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. (1999). Numerical Optimization. New York: Springer-Verlag.
- NOLL, D. (2007). Local convergence of an augmented Lagrangian method for matrix inequality constrained programming. *Optimization Methods & Software*, v. 22, p. 777-802.
- POLYAK, R. A. (1992). Modified barrier functions. *Mathematical Programming*, v. 54, n. 2, p. 177-222.
- POWELL, M.J.D. (1969). A Method for Nonlinear Constraints in Minimization Problems. In: FLETCHER, R. *Optimization*, New York, Academic Press, p.283-298.
- PSIAKI, M.L.; PARK, K. (1995). Augmented Lagrangian Nonlinear Programming Algorithm That Uses SQP and Trust Region Techniques. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 86, n. 2, p. 311-325.
- ROBINSON, S.M. (1972). A Quadratically-Convergent Algorithm for General Nonlinear Programming Problems. *Mathematical Programming*. p.145-156.
- ROCKAFELLAR, R.T. (1973a). A Dual Approach to Solving Nonlinear Programming Problems by Unconstrained Optimization. *Mathematical Programming*, v. 5, p.354-373.

ROCKAFELLAR, R.T. (1973b). The Multiplier Method of Hestenes and Powell Applied to Convex Programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 12, n. 6, p. 555-562.

ROCKAFELLAR, R.T. (1974). Augmented Lagrange Multiplier Functions and Duality in Nonconvex Programming. *SIAM Journal of Control*, v. 12, n. 2, p.268-285.

ROCKAFELLAR, R.T. (1993). Lagrange Multipliers and Optimality. *SIAM Review*, v.35, n. 2, p. 183-238.

SARGENT, R.W.; MURTAGH, B.A. (1973). Projection methods for nonlinear programming. *Mathematical Programming 4*. p.245-268.

SHANNO, D.F.; BREITFELD, M.G.; SIMANTIRAKI, E.M. (1996). Implementing Barrier Methods for Nonlinear Programming, in: *Interior Point Methods of Mathematical Programming*. Netherlands. Kluwer Academic Publishers, p. 399-414.

SHERALI, H.D.; OZDARYAL, B.; ADAMS, W.P.; ATTIA, N. (2001). On using Exterior Penalty approaches for solving Linear Programming Problems. *Computers & Operations Research*, v. 28, p. 1049-1074.

TAPPENDEN, R.; RICHTÁRIK, P.; BÜKE, B.; (2013). Separable Approximation and Decomposition Methods for the Augmented Lagrangian. *Optimization and Control*. arXiv:1308.6774v.

WANG, C.Y.; LI, D. (2009). Unified theory of augmented Lagrangian methods for constrained global optimization. *Journal of Global Optimization*, v. 44, p. 433-458.

WU, H.X.; LUO, H.Z.; LI, S. L. (2009). The global convergence of augmented Lagrangian methods based on NCP function in constrained nonconvex optimization. *Applied Mathematics and Computation*, v. 207, p. 124-134.

XIAO, Y.; WU, S. Y.; LI, D. H. (2011). Splitting and linearizing augmented Lagrangian algorithm for subspace recovery from corrupted observations. *Adv. Comput. Math.* 38. p. 837-858.

WOLFE, P. (1962). The reduced-gradient method. Unpublished manuscript, Rand Corporation.

Apêndice A

Saída do pacote de otimização MINOS

Abaixo está o arquivo de saída do pacote de otimização MINOS, em que LOWER e UPPER é o limite inferior e superior da variável, respectivamente, e LEVEL o valor final da variável. V_ são as tensões de cada barra do sistema elétrico, em que o número logo a frente do V representa a sua respectiva barra. th_ são os ângulos de cada barra do sistema elétrico, em que o número logo a frente do th representa a sua respectiva barra.

14 barras

	LOWER	LEVEL	UPPER
V1	0.950	1.100	1.100
V2	0.950	1.086	1.100
V3	0.950	1.051	1.100
V4	0.950	1.062	1.100
V5	0.950	1.067	1.100
V6	0.950	1.087	1.100
V7	0.950	1.079	1.100
V8	0.950	1.100	1.100
V9	0.950	1.079	1.100
V10	0.950	1.073	1.100
V11	0.950	1.077	1.100
V12	0.950	1.073	1.100
V13	0.950	1.069	1.100
V14	0.950	1.057	1.100
th2	-INF	-0.080	+INF
th3	-INF	-0.204	+INF

th4	-INF	-0.167	+INF
th5	-INF	-0.143	+INF
th6	-INF	-0.235	+INF
th7	-INF	-0.219	+INF
th8	-INF	-0.219	+INF
th9	-INF	-0.245	+INF
th10	-INF	-0.248	+INF
th11	-INF	-0.244	+INF
th12	-INF	-0.249	+INF
th13	-INF	-0.250	+INF
th14	-INF	-0.264	+INF
tap4_7	0.950	0.993	1.050
tap4_9	0.950	1.050	1.050
tap5_6	0.950	1.013	1.050

30 barras

	LOWER	LEVEL	UPPER
V1	0.950	1.100	1.100
V2	0.950	1.085	1.100
V3	0.950	1.069	1.100
V4	0.950	1.063	1.100
V5	0.950	1.053	1.100
V6	0.950	1.059	1.100
V7	0.950	1.049	1.100
V8	0.950	1.059	1.100
V9	0.950	1.059	1.100
V10	0.950	1.064	1.100
V11	0.950	1.100	1.100
V12	0.950	1.069	1.100
V13	0.950	1.100	1.100
V14	0.950	1.056	1.100
V15	0.950	1.053	1.100
V16	0.950	1.060	1.100
V17	0.950	1.057	1.100

V18	0.950	1.045	1.100
V19	0.950	1.043	1.100
V20	0.950	1.047	1.100
V21	0.950	1.052	1.100
V22	0.950	1.053	1.100
V23	0.950	1.046	1.100
V24	0.950	1.045	1.100
V25	0.950	1.053	1.100
V26	0.950	1.036	1.100
V27	0.950	1.066	1.100
V28	0.950	1.053	1.100
V29	0.950	1.047	1.100
V30	0.950	1.036	1.100
th2	-INF	-0.089	+INF
th3	-INF	-0.130	+INF
th4	-INF	-0.157	+INF
th5	-INF	-0.231	+INF
th6	-INF	-0.184	+INF
th7	-INF	-0.212	+INF
th8	-INF	-0.196	+INF
th9	-INF	-0.237	+INF
th10	-INF	-0.263	+INF
th11	-INF	-0.237	+INF
th12	-INF	-0.252	+INF
th13	-INF	-0.252	+INF
th14	-INF	-0.267	+INF
th15	-INF	-0.269	+INF
th16	-INF	-0.262	+INF
th17	-INF	-0.266	+INF
th18	-INF	-0.278	+INF
th19	-INF	-0.281	+INF
th20	-INF	-0.278	+INF
th21	-INF	-0.271	+INF
th22	-INF	-0.271	+INF
th23	-INF	-0.275	+INF
th24	-INF	-0.277	+INF
th25	-INF	-0.270	+INF

th26	-INF	-0.277	+INF
th27	-INF	-0.261	+INF
th28	-INF	-0.194	+INF
th29	-INF	-0.281	+INF
th30	-INF	-0.295	+INF
tap6_9	0.950	0.955	1.050
tap6_10	0.950	1.050	1.050
tap4_12	0.950	0.996	1.050
tap28_27	0.950	1.037	1.050

57 barras

	LOWER	LEVEL	UPPER
V1	0.950	1.100	1.100
V2	0.950	1.090	1.100
V3	0.950	1.084	1.100
V4	0.950	1.081	1.100
V5	0.950	1.077	1.100
V6	0.950	1.081	1.100
V7	0.950	1.081	1.100
V8	0.950	1.100	1.100
V9	0.950	1.067	1.100
V10	0.950	1.060	1.100
V11	0.950	1.055	1.100
V12	0.950	1.078	1.100
V13	0.950	1.059	1.100
V14	0.950	1.054	1.100
V15	0.950	1.070	1.100
V16	0.950	1.076	1.100
V17	0.950	1.079	1.100
V18	0.950	1.100	1.100
V19	0.950	1.065	1.100
V20	0.950	1.055	1.100
V21	0.950	1.056	1.100
V22	0.950	1.057	1.100

V23	0.950	1.055	1.100
V24	0.950	1.051	1.100
V25	0.950	1.040	1.100
V26	0.950	1.049	1.100
V27	0.950	1.072	1.100
V28	0.950	1.087	1.100
V29	0.950	1.100	1.100
V30	0.950	1.022	1.100
V31	0.950	0.997	1.100
V32	0.950	1.010	1.100
V33	0.950	1.008	1.100
V34	0.950	1.015	1.100
V35	0.950	1.022	1.100
V36	0.950	1.031	1.100
V37	0.950	1.038	1.100
V38	0.950	1.059	1.100
V39	0.950	1.036	1.100
V40	0.950	1.031	1.100
V41	0.950	1.074	1.100
V42	0.950	1.038	1.100
V43	0.950	1.097	1.100
V44	0.950	1.069	1.100
V45	0.950	1.100	1.100
V46	0.950	1.089	1.100
V47	0.950	1.070	1.100
V48	0.950	1.066	1.100
V49	0.950	1.071	1.100
V50	0.950	1.057	1.100
V51	0.950	1.084	1.100
V52	0.950	1.068	1.100
V53	0.950	1.056	1.100
V54	0.950	1.071	1.100
V55	0.950	1.094	1.100
V56	0.950	1.031	1.100
V57	0.950	1.026	1.100
th2	-INF	-0.023	+INF
th3	-INF	-0.100	+INF

th4	-INF	-0.119	+INF
th5	-INF	-0.137	+INF
th6	-INF	-0.139	+INF
th7	-INF	-0.123	+INF
th8	-INF	-0.077	+INF
th9	-INF	-0.149	+INF
th10	-INF	-0.174	+INF
th11	-INF	-0.157	+INF
th12	-INF	-0.158	+INF
th13	-INF	-0.150	+INF
th14	-INF	-0.144	+INF
th15	-INF	-0.113	+INF
th16	-INF	-0.134	+INF
th17	-INF	-0.082	+INF
th18	-INF	-0.184	+INF
th19	-INF	-0.204	+INF
th20	-INF	-0.207	+INF
th21	-INF	-0.202	+INF
th22	-INF	-0.201	+INF
th23	-INF	-0.202	+INF
th24	-INF	-0.208	+INF
th25	-INF	-0.285	+INF
th26	-INF	-0.204	+INF
th27	-INF	-0.182	+INF
th28	-INF	-0.167	+INF
th29	-INF	-0.156	+INF
th30	-INF	-0.293	+INF
th31	-INF	-0.304	+INF
th32	-INF	-0.290	+INF
th33	-INF	-0.291	+INF
th34	-INF	-0.223	+INF
th35	-INF	-0.219	+INF
th36	-INF	-0.215	+INF
th37	-INF	-0.211	+INF
th38	-INF	-0.199	+INF
th39	-INF	-0.212	+INF
th40	-INF	-0.216	+INF

th41	-INF	-0.219	+INF
th42	-INF	-0.239	+INF
th43	-INF	-0.175	+INF
th44	-INF	-0.186	+INF
th45	-INF	-0.147	+INF
th46	-INF	-0.171	+INF
th47	-INF	-0.193	+INF
th48	-INF	-0.195	+INF
th49	-INF	-0.199	+INF
th50	-INF	-0.207	+INF
th51	-INF	-0.192	+INF
th52	-INF	-0.181	+INF
th53	-INF	-0.192	+INF
th54	-INF	-0.182	+INF
th55	-INF	-0.167	+INF
th56	-INF	-0.244	+INF
th57	-INF	-0.253	+INF
tap4_18	0.900	1.020	1.050
tap21_20	0.900	0.996	1.050
tap24_26	0.900	0.997	1.050
tap7_29	0.900	1.025	1.050
tap34_32	0.900	1.027	1.050
tap11_41	0.900	1.050	1.050
tap15_45	0.900	1.036	1.050
tap14_46	0.900	1.045	1.050
tap10_51	0.900	1.030	1.050
tap13_49	0.900	1.050	1.050
tap11_43	0.900	1.050	1.050
tap40_56	0.900	0.993	1.050
tap39_57	0.900	1.024	1.050
tap9_55	0.900	1.033	1.050

118 barras

	LOWER	LEVEL	UPPER
V1	0.900	1.069	1.100

V2	0.900	1.077	1.100
V3	0.900	1.076	1.100
V4	0.900	1.099	1.100
V5	0.900	1.100	1.100
V6	0.900	1.092	1.100
V7	0.900	1.090	1.100
V8	0.900	1.082	1.100
V9	0.900	1.100	1.100
V10	0.900	1.093	1.100
V11	0.900	1.086	1.100
V12	0.900	1.089	1.100
V13	0.900	1.075	1.100
V14	0.900	1.088	1.100
V15	0.900	1.087	1.100
V16	0.900	1.086	1.100
V17	0.900	1.100	1.100
V18	0.900	1.089	1.100
V19	0.900	1.086	1.100
V20	0.900	1.076	1.100
V21	0.900	1.072	1.100
V22	0.900	1.076	1.100
V23	0.900	1.092	1.100
V24	0.900	1.091	1.100
V25	0.900	1.100	1.100
V26	0.900	1.100	1.100
V27	0.900	1.085	1.100
V28	0.900	1.078	1.100
V29	0.900	1.078	1.100
V30	0.900	1.093	1.100
V31	0.900	1.081	1.100
V32	0.900	1.084	1.100
V33	0.900	1.086	1.100
V34	0.900	1.097	1.100
V35	0.900	1.095	1.100
V36	0.900	1.095	1.100
V37	0.900	1.100	1.100
V38	0.900	1.090	1.100

V39	0.900	1.078	1.100
V40	0.900	1.076	1.100
V41	0.900	1.070	1.100
V42	0.900	1.078	1.100
V43	0.900	1.085	1.100
V44	0.900	1.080	1.100
V45	0.900	1.075	1.100
V46	0.900	1.086	1.100
V47	0.900	1.093	1.100
V48	0.900	1.098	1.100
V49	0.900	1.099	1.100
V50	0.900	1.089	1.100
V51	0.900	1.072	1.100
V52	0.900	1.066	1.100
V53	0.900	1.066	1.100
V54	0.900	1.079	1.100
V55	0.900	1.078	1.100
V56	0.900	1.079	1.100
V57	0.900	1.080	1.100
V58	0.900	1.073	1.100
V59	0.900	1.100	1.100
V60	0.900	1.098	1.100
V61	0.900	1.100	1.100
V62	0.900	1.096	1.100
V63	0.900	1.089	1.100
V64	0.900	1.096	1.100
V65	0.900	1.100	1.100
V66	0.900	1.100	1.100
V67	0.900	1.093	1.100
V68	0.900	1.098	1.100
V69	0.900	1.100	1.100
V70	0.900	1.078	1.100
V71	0.900	1.079	1.100
V72	0.900	1.082	1.100
V73	0.900	1.078	1.100
V74	0.900	1.059	1.100
V75	0.900	1.062	1.100

V76	0.900	1.047	1.100
V77	0.900	1.087	1.100
V78	0.900	1.083	1.100
V79	0.900	1.084	1.100
V80	0.900	1.100	1.100
V81	0.900	1.100	1.100
V82	0.900	1.079	1.100
V83	0.900	1.081	1.100
V84	0.900	1.085	1.100
V85	0.900	1.093	1.100
V86	0.900	1.087	1.100
V87	0.900	1.100	1.100
V88	0.900	1.089	1.100
V89	0.900	1.100	1.100
V90	0.900	1.084	1.100
V91	0.900	1.088	1.100
V92	0.900	1.091	1.100
V93	0.900	1.081	1.100
V94	0.900	1.079	1.100
V95	0.900	1.068	1.100
V96	0.900	1.077	1.100
V97	0.900	1.084	1.100
V98	0.900	1.093	1.100
V99	0.900	1.095	1.100
V100	0.900	1.100	1.100
V101	0.900	1.084	1.100
V102	0.900	1.087	1.100
V103	0.900	1.091	1.100
V104	0.900	1.082	1.100
V105	0.900	1.079	1.100
V106	0.900	1.072	1.100
V107	0.900	1.067	1.100
V108	0.900	1.076	1.100
V109	0.900	1.075	1.100
V110	0.900	1.075	1.100
V111	0.900	1.083	1.100
V112	0.900	1.060	1.100

V113	0.900	1.096	1.100
V114	0.900	1.080	1.100
V115	0.900	1.080	1.100
V116	0.900	1.099	1.100
V117	0.900	1.075	1.100
V118	0.900	1.049	1.100
th1	-INF	-0.270	+INF
th2	-INF	-0.261	+INF
th3	-INF	-0.256	+INF
th4	-INF	-0.202	+INF
th5	-INF	-0.195	+INF
th6	-INF	-0.235	+INF
th7	-INF	-0.241	+INF
th8	-INF	-0.121	+INF
th9	-INF	-0.008	+INF
th10	-INF	0.114	+INF
th11	-INF	-0.239	+INF
th12	-INF	-0.246	+INF
th13	-INF	-0.260	+INF
th14	-INF	-0.258	+INF
th15	-INF	-0.266	+INF
th16	-INF	-0.251	+INF
th17	-INF	-0.228	+INF
th18	-INF	-0.262	+INF
th19	-INF	-0.270	+INF
th20	-INF	-0.258	+INF
th21	-INF	-0.236	+INF
th22	-INF	-0.200	+INF
th23	-INF	-0.129	+INF
th24	-INF	-0.133	+INF
th25	-INF	-0.018	+INF
th26	-INF	0.011	+INF
th27	-INF	-0.212	+INF
th28	-INF	-0.235	+INF
th29	-INF	-0.248	+INF
th30	-INF	-0.154	+INF
th31	-INF	-0.246	+INF

th32	-INF	-0.220	+INF
th33	-INF	-0.275	+INF
th34	-INF	-0.266	+INF
th35	-INF	-0.273	+INF
th36	-INF	-0.273	+INF
th37	-INF	-0.259	+INF
th38	-INF	-0.183	+INF
th39	-INF	-0.308	+INF
th40	-INF	-0.324	+INF
th41	-INF	-0.331	+INF
th42	-INF	-0.308	+INF
th43	-INF	-0.269	+INF
th44	-INF	-0.236	+INF
th45	-INF	-0.209	+INF
th46	-INF	-0.167	+INF
th47	-INF	-0.134	+INF
th48	-INF	-0.145	+INF
th49	-INF	-0.129	+INF
th50	-INF	-0.161	+INF
th51	-INF	-0.202	+INF
th52	-INF	-0.216	+INF
th53	-INF	-0.230	+INF
th54	-INF	-0.218	+INF
th55	-INF	-0.222	+INF
th56	-INF	-0.220	+INF
th57	-INF	-0.201	+INF
th58	-INF	-0.214	+INF
th59	-INF	-0.156	+INF
th60	-INF	-0.100	+INF
th61	-INF	-0.087	+INF
th62	-INF	-0.096	+INF
th63	-INF	-0.106	+INF
th64	-INF	-0.080	+INF
th65	-INF	-0.031	+INF
th66	-INF	-0.029	+INF
th67	-INF	-0.072	+INF
th68	-INF	-0.034	+INF

th70	-INF	-0.114	+INF
th71	-INF	-0.119	+INF
th72	-INF	-0.136	+INF
th73	-INF	-0.122	+INF
th74	-INF	-0.130	+INF
th75	-INF	-0.110	+INF
th76	-INF	-0.128	+INF
th77	-INF	-0.050	+INF
th78	-INF	-0.054	+INF
th79	-INF	-0.049	+INF
th80	-INF	-0.011	+INF
th81	-INF	-0.026	+INF
th82	-INF	-0.042	+INF
th83	-INF	-0.025	+INF
th84	-INF	0.010	+INF
th85	-INF	0.032	+INF
th86	-INF	0.014	+INF
th87	-INF	0.020	+INF
th88	-INF	0.079	+INF
th89	-INF	0.139	+INF
th90	-INF	0.046	+INF
th91	-INF	0.044	+INF
th92	-INF	0.053	+INF
th93	-INF	0.011	+INF
th94	-INF	-0.020	+INF
th95	-INF	-0.034	+INF
th96	-INF	-0.036	+INF
th97	-INF	-0.029	+INF
th98	-INF	-0.036	+INF
th99	-INF	-0.043	+INF
th100	-INF	-0.027	+INF
th101	-INF	-0.006	+INF
th102	-INF	0.032	+INF
th103	-INF	-0.081	+INF
th104	-INF	-0.125	+INF
th105	-INF	-0.142	+INF
th106	-INF	-0.144	+INF

th107	-INF	-0.184	+INF
th108	-INF	-0.157	+INF
th109	-INF	-0.163	+INF
th110	-INF	-0.173	+INF
th111	-INF	-0.150	+INF
th112	-INF	-0.212	+INF
th113	-INF	-0.228	+INF
th114	-INF	-0.225	+INF
th115	-INF	-0.225	+INF
th116	-INF	-0.040	+INF
th117	-INF	-0.268	+INF
th118	-INF	-0.125	+INF
tap8_5	0.950	1.030	1.050
tap26_25	0.950	0.950	1.050
tap30_17	0.950	1.017	1.050
tap38_37	0.950	1.026	1.050
tap63_59	0.950	1.020	1.050
tap64_61	0.950	1.003	1.050
tap65_66	0.950	1.011	1.050
tap68_69	0.950	1.050	1.050
tap81_80	0.950	1.012	1.050

Apêndice B

Banco de dados dos sistemas elétricos

Abaixo encontram-se os bancos de dados utilizados neste trabalho. No caso do banco de dados de barra, a coluna tipo é caracterizada por barras de geração (2), barras de controle de reativo (1) e barras de carga (0).

3 Barras

Dados de Barra										
Barra	Tipo	V		Pg	Qg	Qmin	Qmax	Pc	Qc	Bsh barra
1	2	1,000	0	0	0	-99,99	99,99	0	0	0
2	1	1,000	0	0	0	-99,99	99,99	-0,170	0	0
3	0	1,000	0	0	0	0	0,20	200,0	100,0	0

Dados das linhas						
Linhas		g		b	bsh	tap
2	3	4,00000		-10,00000	0	-
3	1	4,00000		-5,00000	0	-

14 Barras

Dados de Barra										
Barra	Tipo	V	θ	Pg	Qg	Qmin	Qmax	Pc	Qc	Bsh barra
1	2	1,060	0	0	0	-99,99	99,99	0	0	0
2	1	1,045	-0,0873	0	0	-0,40	0,50	-0,183	0,127	0
3	1	1,010	-0,2269	0	0	0	0,20	0,942	0,190	0
4	0	1,019	-0,1745	0	0	0	0	0,478	-0,039	0
5	0	1,020	-0,1536	0	0	0	0	0,076	0,016	0
6	1	1,070	-0,2443	0	0	-0,06	0,24	0,112	0,075	0
7	0	1,062	-0,2269	0	0	0	0	0	0	0
8	1	1,090	-0,2269	0	0	-0,06	0,24	0	0	0

9	0	1,056	-0,2618	0	0	0	0	0,295	0,166	0,170
10	0	1,051	-0,2618	0	0	0	0	0,090	0,058	0
11	0	1,057	-0,2618	0	0	0	0	0,035	0,018	0
12	0	1,055	-0,2618	0	0	0	0	0,061	0,016	0
13	0	1,050	-0,2618	0	0	0	0	0,135	0,058	0
14	0	1,036	-0,2793	0	0	0	0	0,149	0,050	0

Dados das linhas					
Linhas		g	b	bsh	tap
1	2	4,99913	-15,26309	0,02640	-
1	5	1,02590	-4,23498	0,02460	-
2	3	1,13502	-4,78186	0,02190	-
2	4	1,68603	-5,11584	0,01870	-
2	5	1,70114	-5,19393	0,01700	-
3	4	1,98598	-5,06882	0,01730	-
4	5	6,84098	-21,57855	0,00640	-
4	7	0	-4,78194	0	1,02249
4	9	0	-1,79798	0	1,03199
5	6	0	-3,96794	0	1,07296
6	11	1,95503	-4,09407	0	-
6	12	1,52597	-3,17596	0	-
6	13	3,09893	-6,10276	0	-
7	8	0,00032	-5,67698	0	-
7	9	0	-9,09008	0	-
9	10	3,90205	-10,36539	0	-
9	14	1,42401	-3,02905	0	-
10	11	1,88088	-4,40294	0	-
12	13	2,48902	-2,25197	0	-
13	14	1,13699	-2,31496	0	-

30 Barras

Dados de Barra										
Barra	Tipo	V	θ	Pg	Qg	Qmin	Qmax	Pc	Qc	Bsh barra
1	2	1,053	0	0	0	-99,99	99,99	0	0	0
2	1	1,032	-0,0016	0	0	-0,40	0,50	-0,183	0,127	0
3	0	1,018	-0,0024	0	0	0	0	0,024	0,012	0
4	0	1,010	-0,0030	0	0	0	0	0,076	0,016	0
5	1	1,010	-0,0044	0	0	-0,40	0,40	0,942	0,190	0
6	0	1,004	-0,0035	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0,998	-0,0040	0	0	0	0	0,228	0,109	0
8	1	1,010	-0,0037	0	0	-0,10	0,40	0,300	0,300	0
9	0	1,017	-0,0045	0	0	0	0	0	0	0
10	0	1,015	-0,0051	0	0	0	0	0,058	0,020	0,184

11	1	1,072	-0,0045	0	0	-0,06	0,24	0	0	0
12	0	1,019	-0,0047	0	0	0	0	0,112	0,075	0
13	1	1,057	-0,0047	0	0	-0,06	0,24	0	0	0
14	0	1,005	-0,0051	0	0	0	0	0,062	0,016	0
15	0	1,001	-0,0051	0	0	0	0	0,082	0,025	0
16	0	1,010	-0,0051	0	0	0	0	0,035	0,018	0
17	0	1,008	-0,0051	0	0	0	0	0,090	0,058	0
18	0	0,994	-0,0052	0	0	0	0	0,032	0,009	0
19	0	0,992	-0,0054	0	0	0	0	0,095	0,034	0
20	0	0,997	-0,0052	0	0	0	0	0,022	0,007	0
21	0	1,003	-0,0052	0	0	0	0	0,175	0,112	0
22	0	1,004	-0,0051	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0,994	-0,0052	0	0	0	0	0,032	0,016	0
24	0	0,994	-0,0052	0	0	0	0	0,087	0,067	0,044
25	0	1,001	-0,0051	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0,983	-0,0052	0	0	0	0	0,035	0,023	0
27	0	1,013	-0,0049	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0,997	-0,0037	0	0	0	0	0	0	0
29	0	0,993	-0,0054	0	0	0	0	0,024	0,009	0
30	0	0,982	-0,0056	0	0	0	0	0,106	0,019	0

Dados das linhas

Linhas		g	b	bsh	tap
1	2	5,22465	-15,64673	0,01320	-
1	3	1,24374	-5,09602	0,01020	-
2	4	1,70553	-5,19738	0,00920	-
3	4	8,19545	-23,53087	0,00210	-
2	5	1,13596	-4,77248	0,01045	-
2	6	1,68614	-5,11648	0,00935	-
4	6	6,41312	-22,31120	0,00225	-
5	7	2,95402	-7,44927	0,00510	-
6	7	3,59021	-11,02611	0,00425	-
6	8	6,28931	-22,01258	0,00225	-
6	9	0	-4,80769	0	0,96339
6	10	0	-1,79856	0	1,04603
9	11	0,00023	-4,80769	0	-
9	10	0,00083	-9,09091	0	-
4	12	0	-3,90625	0	0,98522
12	13	0	-7,14286	0	-
12	14	1,52657	-3,17343	0	-
12	15	3,09540	-6,09728	0	-
12	16	1,95200	-4,10436	0	-
14	15	2,49095	-2,25087	0	-
16	17	1,88261	-4,39352	0	-
15	18	1,80770	-3,69142	0	-
18	19	3,07569	-6,21876	0	-
19	20	5,88235	-11,76471	0	-

10	20	1,78483	-3,98536	0	-
10	17	3,95604	-10,31745	0	-
10	21	5,10185	-10,98071	0	-
10	22	2,61932	-5,40077	0	-
21	22	16,77464	-34,12772	0	-
15	23	1,96835	-3,97606	0	-
22	24	2,54054	-3,95440	0	-
23	24	1,46141	-2,98924	0	-
24	25	1,30989	-2,28762	0	-
25	26	1,21653	-1,81714	0	-
25	27	1,96929	-3,76021	0	-
28	27	0	-2,52525	0	1,04384
27	29	0,99553	-1,88101	0	-
27	30	0,68746	-1,29397	0	-
29	30	0,91205	-1,72336	0	-
8	28	1,44398	-4,54081	0,01070	-
6	28	4,36284	-15,46357	0,00325	-

57 Barras

Dados de Barra										
Barra	Tipo	V	θ	Pg	Qg	Qmin	Qmax	Pc	Qc	Bsh barra
1	2	1,04	0	0	0	-99,99	99,99	0,550	0,170	0
2	1	1,01	0	0	0	-0,17	0,50	0,030	0,880	0
3	1	0,985	0	0,4	0	-0,10	0,60	0,410	0,210	0
4	0	1	0	0	0	0,00	0,00	0	0	0
5	0	1	0	0	0	0	0	0,130	0,040	0
6	1	0,98	0	0	0	-0,08	0,25	0,750	0,020	0
7	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	1,005	0	4,5	0	-1,40	2,00	1,500	0,220	0
9	1	0,98	0	0	0	-0,03	0,09	1,210	0,260	0
10	0	1	0	0	0	0	0	0,050	0,020	0
11	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
12	1	1,015	0	3,1	0	-0,50	1,55	3,770	0,240	0
13	0	1	0	0	0	0	0	0,180	0,023	0
14	0	1	0	0	0	0	0	0,105	0,053	0
15	0	1	0	0	0	0	0	0,220	0,050	0
16	0	1	0	0	0	0	0	0,430	0,030	0
17	0	1	0	0	0	0	0	0,420	0,080	0
18	0	1	0	0	0	0	0	0,272	0,098	0,100

19	0	1	0	0	0	0	0	0,033	0,006	0
20	0	1	0	0	0	0	0	0,023	0,010	0
21	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	1	0	0	0	0	0	0,063	0,021	0
24	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	1	0	0	0	0	0	0,063	0,032	0,059
26	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0	1	0	0	0	0	0	0,093	0,005	0
28	0	1	0	0	0	0	0	0,046	0,023	0
29	0	1	0	0	0	0	0	0,170	0,026	0
30	0	1	0	0	0	0	0	0,036	0,018	0
31	0	1	0	0	0	0	0	0,058	0,029	0
32	0	1	0	0	0	0	0	0,016	0,008	0
33	0	1	0	0	0	0	0	0,038	0,019	0
34	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
35	0	1	0	0	0	0	0	0,060	0,030	0
36	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
37	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
38	0	1	0	0	0	0	0	0,140	0,070	0
39	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
40	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
41	0	1	0	0	0	0	0	0,063	0,030	0
42	0	1	0	0	0	0	0	0,071	0,044	0
43	0	1	0	0	0	0	0	0,020	0,010	0
44	0	1	0	0	0	0	0	0,120	0,018	0
45	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
46	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
47	0	1	0	0	0	0	0	0,297	0,116	0
48	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
49	0	1	0	0	0	0	0	0,180	0,085	0
50	0	1	0	0	0	0	0	0,210	0,105	0
51	0	1	0	0	0	0	0	0,180	0,053	0
52	0	1	0	0	0	0	0	0,049	0,022	0
53	0	1	0	0	0	0	0	0,200	0,100	0,063
54	0	1	0	0	0	0	0	0,041	0,014	0
55	0	1	0	0	0	0	0	0,068	0,034	0
56	0	1	0	0	0	0	0	0,076	0,022	0
57	0	1	0	0	0	0	0	0,067	0,020	0

Dados das linhas					
Linhas		g	b	bsh	tap
1	2	9,73162	-32,82956	0,03225	-
2	3	3,67310	-10,47696	0,02045	-
3	4	7,64505	-24,98294	0,00950	-
4	5	2,93011	-6,188394	0,00645	-
4	6	1,81030	-6,23079	0,00870	-

6	7	1,85117	-9,44095	0,00690	-
6	8	1,09080	-5,56660	0,01175	-
8	9	3,73830	-19,06912	0,01370	-
9	10	1,24865	-5,68151	0,01100	-
9	11	3,28383	-10,79336	0,00545	-
9	12	0,71034	-3,23380	0,01930	-
9	13	1,76335	-5,79230	0,01015	-
13	14	6,41462	-21,09048	0,00275	-
13	15	3,25067	-10,50123	0,00575	-
1	15	2,07029	-10,58405	0,02470	-
1	16	1,02029	-4,62951	0,01365	-
1	17	1,94596	-8,83043	0,00715	-
3	15	5,27440	-17,25575	0,01360	-
4	18	0	-1,80180	0	1,03093
4	18	0	-2,32558	0	1,02249
5	6	6,01492	-12,76676	0,00310	-
7	8	2,64125	-13,52931	0,00485	-
10	12	1,65931	-7,55972	0,00820	-
11	13	3,80837	-12,50100	0,00470	-
12	13	4,83585	-15,75727	0,01510	-
12	16	2,59602	-11,72536	0,00540	-
12	17	1,18095	-5,32467	0,01190	-
14	15	5,20627	-16,65398	0,00370	-
18	19	0,67620	-1,00477	0	-
19	20	1,05422	-1,61672	0	-
21	20	0	-1,28750	0	0,95877
21	22	3,85220	-6,12374	0	-
22	23	30,08661	-46,19359	0	-
23	24	1,78318	-2,74997	0,00210	-
24	25	0	-0,84602	0	-
24	25	0	-0,81301	0	-
24	26	0	-21,14165	0	0,95877
26	27	1,79854	-2,76866	0	-
27	28	4,78313	-7,38367	0	-
28	29	8,04941	-11,30383	0	-
7	29	0	-15,43210	0	1,04167
25	30	2,28701	-3,42205	0	-
30	31	0,92277	-1,40680	0	-
31	32	0,61300	-0,91286	0	-
32	33	13,83868	-12,70899	0	-
34	32	0	-1,04932	0	1,02564
34	35	5,91716	-8,87574	0,00080	-
35	36	9,08574	-11,34661	0,00040	-
36	37	13,29934	-16,78468	0	-
37	38	4,51493	-6,99780	0,00005	-
37	39	11,90464	-18,87807	0	-
36	40	9,76702	-15,17144	0	-

22	38	15,49774	-23,81164	0	-
11	41	0	-1,33511	0	1,04712
41	42	1,24136	-2,11091	0	-
41	43	0	-2,42718	0	-
38	44	6,78808	-13,74059	0,00050	-
15	45	0	-9,59693	0	1,04712
14	46	0	-13,60544	0	1,11111
46	47	4,46342	-13,19620	0,00080	-
47	48	20,82070	-26,65507	0	-
48	49	3,53441	-5,46690	0,00120	-
49	50	3,51316	-5,61403	0	-
50	51	2,04999	-3,25396	0	-
10	51	0	-14,04494	0	1,07527
13	49	0	-5,23560	0	1,11732
29	52	2,58596	-3,35350	0	-
52	53	4,91962	-6,35290	0	-
53	54	2,10791	-2,60403	0	-
54	55	2,13037	-2,78596	0	-
11	43	0	-6,53595	0	1,04384
44	45	3,22991	-6,42877	0,00010	-
40	56	0	-0,83682	0	1,04384
56	41	0,91072	-0,90414	0	-
56	42	1,24654	-2,07658	0	-
39	57	0	-0,73801	0	1,02041
57	56	1,77776	-2,65642	0	-
38	49	2,58114	-3,97271	0,00150	-
38	48	9,46407	-14,62077	0	-
9	55	0	-8,29876	0	1,06383

118 Barras

Dados de Barra										
Barra	Tipo	V	θ	Pg	Qg	Qmin	Qmax	Pc	Qc	Bsh barra
1	1	0,955	0	0	0	-0,05	0,15	0,51	0,27	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0,20	0,09	0
3	0	1	0	0	0	0	0	0,39	0,10	0
4	1	0,998	0	-0,09	0	-3,00	3,00	0,30	0,12	0
5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-0,40
6	1	0,99	0	0	0	-0,13	0,50	0,52	0,22	0
7	0	1	0	0	0	0	0	0,19	0,02	0
8	1	1,015	0	-0,28	0	-3	3	0	0	0
9	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
10	1	1,05	0	4,50	0	-1,47	2,00	0	0	0
11	0	1	0	0	0	0	0	0,70	0,23	0

12	1	0,99	0	0,85	0	-0,35	1,20	0,47	0,10	0
13	0	1	0	0	0	0	0	0,34	0,16	0
14	0	1	0	0	0	0	0	0,14	0,01	0
15	1	0,97	0	0	0	-0,10	0,30	0,90	0,30	0
16	0	1	0	0	0	0	0	0,25	0,10	0
17	0	1	0	0	0	0	0	0,11	0,03	0
18	1	0,973	0	0	0	-0,16	0,50	0,60	0,34	0
19	1	0,962	0	0	0	-0,08	0,24	0,45	0,25	0
20	0	1	0	0	0	0	0	0,18	0,03	0
21	0	1	0	0	0	0	0	0,14	0,08	0
22	0	1	0	0	0	0	0	0,10	0,05	0
23	0	1	0	0	0	0	0	0,07	0,03	0
24	1	0,992	0	-0,13	0	-3,00	3,00	0	0	0
25	1	1,05	0	2,20	0	-0,47	1,40	0	0	0
26	1	1,015	0	3,14	0	-10,00	10,00	0	0	0
27	1	0,968	0	-0,09	0	-3,00	3,00	0,62	0,13	0
28	0	1	0	0	0	0	0	0,17	0,07	0
29	0	1	0	0	0	0	0	0,24	0,04	0
30	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
31	1	0,967	0	0,07	0	-3,00	3,00	0,43	0,27	0
32	1	0,963	0	0	0	-0,14	0,42	0,59	0,23	0
33	0	1	0	0	0	0	0	0,23	0,09	0
34	1	0,984	0	0	0	-0,08	0,24	0,59	0,26	0,145
35	0	1	0	0	0	0	0	0,33	0,09	0
36	1	0,98	0	0	0	-0,08	0,24	0,31	0,17	0
37	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-0,25
38	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
39	0	1	0	0	0	0	0	0,27	0,11	0
40	1	0,97	0	-0,46	0	-3,00	3,00	0,20	0,23	0
41	0	1	0	0	0	0	0	0,37	0,10	0
42	1	0,985	0	-0,59	0	-3,00	3,00	0,37	0,23	0
43	0	1	0	0	0	0	0	0,18	0,07	0
44	0	1	0	0	0	0	0	0,16	0,08	0,100
45	0	1	0	0	0	0	0	0,53	0,22	0,100
46	1	1,005	0	0,19	0	-1,00	1,00	0,28	0,10	0,099
47	0	1	0	0	0	0	0	0,34	0,00	0
48	0	1	0	0	0	0	0	0,20	0,11	0,150
49	1	1,025	0	2,04	0	-0,85	2,10	0,87	0,30	0
50	0	1	0	0	0	0	0	0,17	0,04	0
51	0	1	0	0	0	0	0	0,17	0,08	0
52	0	1	0	0	0	0	0	0,18	0,05	0
53	0	1	0	0	0	0	0	0,23	0,11	0
54	1	0,955	0	0,48	0	-3	3	1,13	0,32	0
55	1	0,952	0	0	0	-0,08	0,23	0,63	0,22	0
56	1	0,954	0	0	0	-0,08	0,15	0,84	0,18	0
57	0	1	0	0	0	0	0	0,12	0,03	0
58	0	1	0	0	0	0	0	0,12	0,03	0

59	1	0,985	0	1,55	0	-0,60	1,80	2,77	1,13	0
60	0	1	0	0	0	0	0	0,78	0,03	0
61	1	0,995	0	1,60	0	-1,00	3,00	0	0	0
62	1	0,998	0	0	0	-0,20	0,20	0,77	0,14	0
63	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
64	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
65	1	1,005	0	3,91	0	-0,67	2,00	0	0	0
66	1	1,05	0	3,92	0	-0,67	2,00	0,39	0,18	0
67	0	1	0	0	0	0	0	0,28	0,07	0
68	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
69	2	1,035	0	5,16	0	-3,00	3,00	0	0	0
70	1	0,984	0	0	0	-0,10	0,32	0,66	0,20	0
71	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
72	1	0,98	0	-0,12	0	-1,00	1,00	0	0	0
73	1	0,991	0	-0,06	0	-1,00	1,00	0	0	0
74	1	0,958	0	0	0	-0,06	0,09	0,68	0,27	0,131
75	0	1	0	0	0	0	0	0,47	0,11	0
76	1	0,943	0	0	0	-0,08	0,23	0,68	0,36	0
77	1	1,006	0	0	0	-0,20	0,70	0,61	0,28	0
78	0	1	0	0	0	0	0	0,71	0,26	0
79	0	1	0	0	0	0	0	0,39	0,32	0,200
80	1	1,04	0	4,77	0	-1,65	2,80	1,30	0,26	0
81	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
82	0	1	0	0	0	0	0	0,54	0,27	0,200
83	0	1	0	0	0	0	0	0,20	0,10	0,100
84	0	1	0	0	0	0	0	0,11	0,07	0
85	1	0,985	0	0	0	-0,08	0,23	0,24	0,15	0
86	0	1	0	0	0	0	0	0,21	0,10	0
87	1	1,015	0	0,04	0	-1,00	10,00	0	0	0
88	0	1	0	0	0	0	0	0,48	0,10	0
89	1	1,005	0	6,07	0	-2,10	3,00	0	0	0
90	1	0,985	0	-0,85	0	-3,00	3,00	0,78	0,42	0
91	1	0,98	0	-0,1	0	-1,00	1,00	0	0	0
92	1	0,99	0	0	0	-0,03	0,09	0,65	0,10	0
93	0	1	0	0	0	0	0	0,12	0,07	0
94	0	1	0	0	0	0	0	0,30	0,16	0
95	0	1	0	0	0	0	0	0,42	0,31	0
96	0	1	0	0	0	0	0	0,38	0,15	0
97	0	1	0	0	0	0	0	0,15	0,09	0
98	0	1	0	0	0	0	0	0,34	0,08	0
99	1	1,01	0	-0,42	0	-1,00	1,00	0	0	0
100	1	1,017	0	2,52	0	-0,50	1,55	0,37	0,18	0
101	0	1	0	0	0	0	0	0,22	0,15	0
102	0	1	0	0	0	0	0	0,05	0,03	0
103	1	1,01	0	0,4	0	-0,15	0,40	0,23	0,16	0
104	1	0,971	0	0	0	-0,08	0,23	0,38	0,25	0
105	1	0,965	0	0	0	-0,08	0,23	0,31	0,26	0,215

106	0	1	0	0	0	0	0	0,43	0,16	0
107	1	0,952	0	-0,22	0	-2,00	2,00	0,28	0,12	0,066
108	0	1	0	0	0	0	0	0,02	0,01	0
109	0	1	0	0	0	0	0	0,08	0,03	0
110	1	0,973	0	0	0	-0,08	0,23	0,39	0,30	0,063
111	1	0,98	0	0,36	0	-1,00	10,00	0	0	0
112	1	0,975	0	-0,43	0	-1,00	10,00	0,25	0,13	0
113	1	0,993	0	-0,06	0	-1,00	2,00	0	0	0
114	0	1	0	0	0	0	0	0,08	0,03	0
115	0	1	0	0	0	0	0	0,22	0,07	0
116	1	1,005	0	-1,84	0	-10,00	10,00	0	0	0
117	0	1	0	0	0	0	0	0,20	0,08	0
118	0	1	0	0	0	0	0	0,33	0,15	0

Dados das linhas						
Linhas		g	b	bsh	tap	
1	2	2,78030	-9,1667	0,01270	-	
1	3	6,56766	-21,5867	0,00541	-	
4	5	26,35599	-119,5004	0,00105	-	
3	5	1,96818	-8,8201	0,01420	-	
5	6	3,89193	-17,6609	0,00713	-	
6	7	10,11664	-45,8445	0,00275	-	
8	9	2,60627	-32,5784	0,58100	-	
8	5	0	-37,4532	0	1,01523	
9	10	2,47246	-30,8578	0,61500	-	
4	11	4,04236	-13,3069	0,00874	-	
5	11	4,00922	-13,4694	0,00869	-	
11	12	14,18144	-46,7153	0,00251	-	
2	12	4,51228	-14,8640	0,00786	-	
3	12	1,73212	-5,7260	0,02030	-	
7	12	7,00640	-27,6354	0,00437	-	
11	13	3,81080	-12,5200	0,00938	-	
12	14	3,93720	-12,9470	0,00908	-	
13	15	1,13994	-3,7446	0,03134	-	
14	15	1,43148	-4,6914	0,02510	-	
12	16	2,86293	-11,2627	0,01070	-	
15	17	6,33419	-20,9700	0,02220	-	
16	17	1,31605	-5,2207	0,02330	-	
17	18	4,55296	-18,6930	0,00649	-	
18	19	4,37844	-19,2902	0,00571	-	
19	20	1,75928	-8,1681	0,01490	-	
15	19	7,07397	-23,2262	0,00505	-	
20	21	2,42612	-11,2556	0,01080	-	
21	22	2,12273	-9,8519	0,01230	-	
22	23	1,29297	-6,0112	0,02020	-	

23	24	5,18654	-18,9021	0,02490	-
23	25	2,34821	-12,0421	0,04320	-
26	25	0	-26,1780	0,00000	1,04167
25	27	1,15300	-5,9100	0,08820	-
27	28	2,49212	-11,1383	0,01080	-
28	29	2,50683	-9,9744	0,01190	-
30	17	0	-25,7732	0,00000	1,04167
8	30	1,68443	-19,6972	0,25700	-
26	30	1,07107	-11,5284	0,45400	-
17	31	1,77685	-5,8591	0,01995	-
29	31	8,90905	-27,3046	0,00415	-
23	32	2,21694	-8,0635	0,05865	-
31	32	2,81390	-9,3010	0,01255	-
27	32	3,67892	-12,1292	0,00963	-
15	33	2,24595	-7,3525	0,01597	-
19	34	1,12804	-3,7051	0,03160	-
35	36	20,53960	-93,5286	0,00134	-
35	37	4,24532	-19,1811	0,00659	-
33	37	1,89617	-6,4881	0,01830	-
34	36	10,96834	-33,7487	0,00284	-
34	37	26,97190	-99,0374	0,00492	-
38	37	0	-26,6667	0	1,06952
37	39	2,61690	-8,6415	0,01350	-
37	40	1,86828	-5,2929	0,02100	-
30	38	1,57956	-18,3828	0,21100	-
39	40	4,60137	-15,1295	0,00776	-
40	41	5,61593	-18,8618	0,00611	-
40	42	1,51767	-5,0042	0,02330	-
41	42	2,05968	-6,7819	0,01720	-
43	44	0,95122	-3,8393	0,03034	-
34	43	1,37835	-5,6102	0,02113	-
44	45	2,59868	-10,4527	0,01120	-
45	46	2,00126	-6,7843	0,01660	-
46	47	2,16241	-7,2270	0,01580	-
46	48	1,52798	-4,8051	0,02360	-
47	49	4,47196	-14,6334	0,00802	-
42	49	0,65332	-2,9514	0,04300	-
42	49	0,65332	-2,9514	0,04300	-
45	49	1,74159	-4,7359	0,02220	-
48	49	6,23550	-17,5918	0,00629	-
49	50	4,19289	-11,8092	0,00937	-
49	51	2,29994	-6,4834	0,01710	-
51	52	5,24612	-15,1956	0,00698	-
52	53	1,42744	-5,7626	0,02029	-
53	54	1,68853	-7,8327	0,01550	-
49	54	0,82161	-3,2527	0,03690	-
49	54	0,94218	-3,1551	0,03650	-

54	55	3,19827	-13,3798	0,01010	-
54	56	27,84387	-96,6942	0,00366	-
55	56	19,37858	-59,9624	0,00187	-
56	57	3,26416	-9,1930	0,01210	-
50	57	2,34621	-6,6328	0,01660	-
56	58	3,26416	-9,1930	0,01210	-
51	58	4,38155	-12,3542	0,00894	-
54	59	0,91274	-4,1609	0,02990	-
56	59	1,18183	-3,5956	0,02845	-
56	59	1,26319	-3,7597	0,02680	-
55	59	0,97080	-4,4207	0,02823	-
59	60	1,43895	-6,5820	0,01880	-
59	61	1,39125	-6,3624	0,01940	-
60	61	13,95204	-71,3457	0,00728	-
60	62	3,72897	-17,0077	0,00734	-
61	62	5,56134	-25,3770	0,00490	-
63	59	0	-25,9067	0	1,04167
63	64	4,26843	-49,6329	0,10800	-
64	61	0	-37,3134	0	1,01523
38	65	0,91909	-10,0580	0,52300	-
64	65	2,92622	-32,8519	0,19000	-
49	66	2,05254	-10,4794	0,01240	-
49	66	2,05254	-10,4794	0,01240	-
62	66	0,96695	-4,3734	0,02890	-
62	67	1,79733	-8,1507	0,01550	-
65	66	0	-27,0270	0	1,06952
66	67	2,07330	-9,3947	0,01341	-
65	68	5,35082	-62,0385	0,31900	-
47	69	1,00123	-3,2955	0,03546	-
49	69	0,85892	-2,8253	0,04140	-
68	69	0	-27,0270	0	1,06952
69	70	1,76170	-7,4579	0,06100	-
24	70	0,01305	-2,4301	0,05099	-
70	71	6,59172	-26,5313	0,00439	-
24	72	1,19615	-4,8042	0,02440	-
71	72	1,29692	-5,2342	0,02222	-
71	73	4,05401	-21,2531	0,00589	-
70	74	2,09824	-6,9226	0,01684	-
70	75	1,97118	-6,4939	0,01800	-
69	75	2,45094	-7,3831	0,06200	-
74	75	6,83466	-22,5599	0,00517	-
76	77	1,85966	-6,1989	0,01840	-
69	77	2,76986	-9,0536	0,05190	-
75	77	1,37933	-4,5878	0,02489	-
77	78	22,39460	-73,8545	0,00632	-
78	79	8,73360	-39,0293	0,00324	-
77	80	6,43635	-18,3625	0,02360	-

77	80	2,47280	-8,8314	0,01140	-
79	80	3,00028	-13,5397	0,00935	-
68	81	4,25685	-49,1362	0,40400	-
81	80	0	-27,0270	0	1,06952
77	82	3,65011	-10,4481	0,04087	-
82	83	7,62599	-24,9547	0,01898	-
83	84	2,93011	-6,1884	0,01290	-
83	85	1,81030	-6,2308	0,01740	-
84	85	6,01492	-12,7668	0,00617	-
85	86	2,14015	-7,5211	0,01380	-
86	87	0,64545	-4,7336	0,02225	-
85	88	1,85117	-9,4409	0,01380	-
85	89	0,78360	-5,6721	0,02350	-
88	89	2,64125	-13,5293	0,00967	-
89	90	1,36218	-4,9438	0,02640	-
89	90	2,26526	-9,4893	0,05300	-
90	91	3,32717	-10,9508	0,01070	-
89	92	3,73830	-19,0691	0,02740	-
89	92	1,48078	-5,9570	0,02070	-
91	92	2,18922	-7,1956	0,01634	-
92	93	3,28383	-10,7934	0,01090	-
92	94	1,76335	-5,7923	0,02030	-
93	94	3,80837	-12,5010	0,00938	-
94	95	6,41462	-21,0905	0,00555	-
80	96	1,03514	-5,2920	0,02470	-
82	96	5,27440	-17,2557	0,02720	-
94	96	3,25067	-10,5012	0,01150	-
80	97	2,02021	-10,3108	0,01270	-
80	98	1,94596	-8,8304	0,01430	-
80	99	1,02029	-4,6295	0,02730	-
92	100	0,71034	-3,2338	0,03860	-
94	100	4,83585	-15,7573	0,03020	-
95	96	5,20627	-16,6540	0,00737	-
96	97	2,12752	-10,8835	0,01200	-
98	100	1,18095	-5,3247	0,02380	-
99	100	2,59602	-11,7254	0,01080	-
100	101	1,65931	-7,5597	0,01640	-
92	102	3,75446	-17,0630	0,00732	-
101	102	1,87084	-8,5177	0,01470	-
100	103	5,31164	-17,4288	0,02680	-
100	104	1,03322	-4,6735	0,02705	-
103	104	1,70933	-5,8103	0,02035	-
103	105	1,82790	-5,5520	0,02040	-
100	106	1,07841	-4,0819	0,03100	-
104	105	6,50675	-24,7440	0,00493	-
105	106	4,39134	-17,1576	0,00717	-
105	107	1,46014	-5,0416	0,02360	-

105	108	4,64140	-12,5016	0,00922	-
106	107	1,46014	-5,0416	0,02360	-
108	109	11,17390	-30,6484	0,00380	-
103	110	1,13562	-5,2711	0,02305	-
109	110	4,22539	-11,5818	0,01010	-
110	111	3,55742	-12,2084	0,01000	-
110	112	5,24852	-13,5994	0,03100	-
17	113	9,22812	-30,4235	0,00384	-
32	113	1,36693	-4,5120	0,02590	-
32	114	3,43713	-15,5817	0,00814	-
27	115	2,84734	-12,8651	0,00986	-
114	115	20,27325	-91,6703	0,00138	-
68	116	20,58348	-245,1856	0,08200	-
12	117	1,59072	-6,7690	0,01790	-
75	118	5,74517	-19,0581	0,00599	-
76	118	5,08004	-16,8509	0,00678	-
