

INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

SÃO PAULO

1987

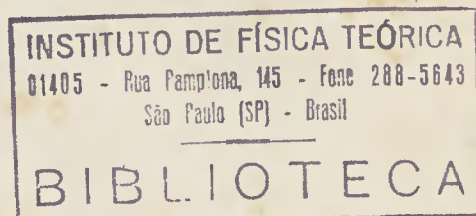
APLICAÇÕES A MODELOS SUPERSIMÉTRICOS DO FORMALISMO

DE DIRAC-KÄLHER NA REDE

Abraham Hirszt Zimerman
Instituto de Física Teórica
São Paulo



Tese apresentada ao
Instituto de Física Teórica
para obtenção de
Título de Doutor.



RESUMO

Usando técnicas de Dirac-Kähler formulamos na rede alguns modelos supersimétricos. Em particular consideramos o modelo de Wess-Zumino com $N=2$ a duas dimensões que é formulado na rede espacial em sua versão Hamiltoniana (tempo contínuo) e na rede espaço-temporal em sua versão Lagrangeana (espaço euclidiano). Na rede espacial (formulação Hamiltoniana) estudamos ainda o modelo de Yang-Mills supersimétrico com $N=4$ a quatro dimensões. Após a introdução das derivadas covariantes na rede para campos na representação adjunta de um grupo compacto escrevemos várias novas relações por nós obtidas e que constituem generalizações na rede daquelas já conhecidas no caso contínuo.

ABSTRACT

Using Dirac-Kähler techniques we formulate some supersymmetric models on the lattice. Specially we consider the Wess-Zumino model with $N=2$ in two dimensions which is formulated on a space lattice in its Hamiltonian version (continuous time) as well as on the space-time lattice in its Lagrangean version (euclidean space). On the space lattice (Hamiltonian formulation) we study also the supersymmetric Yang-Mills model with $N=4$ in four dimensions. After the introduction of lattice covariant derivatives for fields in the adjoint representation of a compact group we write down some new relations which we have obtained and which constitute generalizations on the lattice of those which are known in the continuous case.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO.....	I
-----------------	---

CAPÍTULO.1

Formalismo de Dirac-Kähler.....	1
A Teoria de calibre na rede para campos na representa ção adjunta.....	10
O campo de calibre puro na rede-relações várias....	14

CAPÍTULO.2

Mapeamento de Nicolai.....	21
Modelo de Wess-Zumino com $N=2$ a duas dimensões.....	24
Formalismo Hamiltoniano na rede espacial.....	34
Formalismo Lagrangeano na rede espaço-temporal.....	39
Sobre o tratamento do modelo de Wess-Zumino na lingua gem das formas diferenciais.....	45
O mapeamento de Nicolai na rede.....	49

CAPÍTULO.3

O Modelo de Yang-Mills supersimétrico com $N=4$ a qua tro dimensões formulado na rede espacial.....	52
Conclusões e pesquisas em andamento.....	61

REFERÊNCIAS.....	63
------------------	----

INTRODUÇÃO

Há alguns anos atrás foi feita a proposta de formular as teorias de campo na rede como um método para realizar cálculos não perturbativos⁽¹⁾. Desde então houve várias tentativas de se formular teorias supersimétricas na rede^{(2) (3)} e mais recentemente Elitzur et.al.⁽⁴⁾ procuraram uma subálgebra supersimétrica que contivesse somente a Hamiltoniana. Dessa maneira conseguiram formular na rede espacial o modelo de Wess-Zumino com $N=2$ a duas dimensões.

Ao fazermos a descrição dos férmions na rede devemos ter o cuidado para que não apareça a degenerescência da energia. Vamos explicar o que isto significa num exemplo muito simples. Consideremos a equação de Dirac no espaço bidimensional:

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0 \quad , \quad \text{com} \quad \gamma^0 = \sigma_1 \quad , \quad \gamma^1 = i \sigma_2 \quad , \quad \gamma_5 = \sigma_3.$$

Podemos reescrever:

$$i \psi = -i \gamma_5 \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1)$$

Consideremos os autoestados de quiralidade bem definida:

$$\psi_\pm = e^{-iKx + iEt} \chi_\pm \quad (2)$$

com $\gamma_5 \chi_\pm = \pm \chi_\pm$ e portanto $E = \pm K$.

Indo para a rede espacial, de espaçamento a , podemos substituir $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ por exemplo por:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{2a} \left[\psi(ma+a, t) - \psi(ma-a, t) \right] \quad (3)$$

Neste caso a solução da equação de Dirac na rede espacial se escreve:

$$\Psi_{\pm}(n,t) = e^{i(-Kna+Et)} \chi_{\pm} \quad (4)$$

com a relação de dispersão:

$$E = \pm \frac{\sin ka}{a} \quad (5)$$

Para $K \longrightarrow 0$ $E \longrightarrow \pm K$, o que é correto. Para $Ka \sim \pi$,

$$E \rightarrow \mp \left(\frac{\pi}{a} - K \right) \quad (6)$$

isto é, fazendo $a \longrightarrow 0$ e $K \longrightarrow \infty$ E passará por valores nulos na borda de zona de Brillouin. Não obteremos o limite do contínuo correto e obteremos uma degenerescência na energia.

Já o formalismo de Dirac-Kähler⁽⁵⁾ dá ao invés de (5):

$$E = \pm \frac{2}{a} \sin \frac{ka}{2} \quad (5)$$

e portanto uma função monotônica de K no intervalo 0 a $\frac{\pi}{a}$. Neste caso não temos mais a degenerescência de energia.

Desse modo se vê que a formulação de Dirac-Kähler é bastante natural para ser aplicada a modelos supersimétricos na rede se quisermos obter o limite do contínuo correto.

A formulação do modelo de Wess-Zumino a duas dimensões com $N=2$ na rede espaço-temporal foi abordada por Sakai et.

al.⁽⁶⁾ e Elitzur et.al.⁽⁷⁾ dentro do contexto do mapeamento de Nicolai⁽⁸⁾. Mais recentemente nós, em colaboração com Aratyn⁽⁹⁾, demos a formulação desse modelo na rede usando as técnicas de Dirac-Kähler⁽⁵⁾. A sua conexão com um formalismo do tipo de mapeamento de Nicolai na rede é assunto de um trabalho nosso feito em colaboração com Bessa e Aratyn⁽¹⁰⁾.

Para uma discussão bem interessante do mapeamento de Nicolai veja-se o trabalho de Cecotti e Girardello⁽¹¹⁾.

Para que pudéssemos formular na rede as teorias de calibre supersimétricas nós, em colaboração com Aratyn e Goto, extendemos as noções de derivada covariante na rede⁽¹²⁾ para campos na representação adjunta (veja-se também o trabalho de Mack⁽¹³⁾ o qual não era por nós conhecido na época e que estuda Teorias de Calibre com funções de aresta e plaqueta).

Mais recentemente fizemos alguns progressos sobre esse assunto em colaboração com H.Aratyn⁽¹⁴⁾.

Tendo em mãos o formalismo de uma teoria de calibre na rede para a representação adjunta dos campos, fizemos algumas aplicações, à saber, a formulação Hamiltoniana na rede espacial primeiramente do modelo supersimétrico de Yang-Mills com $N=2$ a quatro dimensões (trabalho feito em colaboração com H. Aratyn e M.Goto⁽¹⁵⁾) e em seguida do modelo supersimétrico de Yang-Mills com $N=4$ a quatro dimensões (trabalho feito em colaboração com H.Aratyn⁽¹⁶⁾).

No capítulo I apresentamos um resumo do formalismo de Dirac-Kähler utilizando o artigo de Becher e Joos⁽⁵⁾. Em seguida desenvolvemos sucintamente a teoria de calibre na rede, para campos na representação adjunta utilizando contribuições nossas de acôrdo com as Referências^{12), 14), 15)} e ¹⁷⁾. No capíu

tulo II aplicamos a formulação de Dirac-Kähler na rede para o modelo de Wess-Zumino com $N=2$ a duas dimensões. Damos uma introdução ao mapeamento de Nicolai no exemplo simples: de mecânica quântica supersimétrica^(18,19). Em seguida de acordo com artigos nossos Refs. 9) e 10) damos uma derivação do modelo de Wess-Zumino a duas dimensões com $N=2$, assim como o correspondente formalismo Hamiltoniano na rede espacial e o formalismo Lagrangeano na rede espaço-temporal. Neste último caso, temos duas Lagrangeanas onde para cada uma delas podemos definir uma transformação supersimétrica na rede. Então pelo uso do teorema de Noether na rede⁽¹⁵⁾ obtemos as correspondentes correntes conservadas. Fazemos ainda uma "derivação" do modelo de Wess-Zumino utilizando diretamente o tratamento por formas diferenciais (para uma discussão mais detalhada de formalismo de superespaço dentro do quadro de Dirac-Kähler veja-se trabalho nosso⁽²⁰⁾ feito em colaboração com Aratyn e Schiffer). Finalmente, dentro da nossa formulação, consideramos o mapeamento de Nicolai na rede espaço-temporal⁽¹⁰⁾.

No capítulo 3 apresentamos o nosso trabalho com Aratyn desenvolvido na Ref. 17) e que aborda o modelo de Yang-Mills supersimétrico com $N=4$ (a quatro dimensões) na rede espacial. Apresentamos no final as conclusões e as pesquisas que estamos efetuando sobre as formulações na rede.

CAPÍTULO 1

FORMALISMO DE DIRAC-KÄHLER

Consideremos uma forma diferencial geral⁽⁵⁾.

$$\Phi = \sum_H \psi(x, H) dx^H \quad (1)$$

onde a base dx^H é definida pelos elementos:

$$\{dx^H\} = \{1, dx^\mu, dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2}, dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3}, \dots\} \quad (2)$$

e os coeficientes:

$$\{\psi(x, H)\} = \{\psi(x), \psi_\mu(x), \psi_{\mu_1 \mu_2}(x), \psi_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}(x), \dots\} \quad (3)$$

com $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots$. Dado o elemento dx^μ definimos o operador de contração $e_\mu \lrcorner$ por:

$$e_\mu \lrcorner = \frac{d}{d(dx^\mu)} \quad (4)$$

Então:

$$e_\mu \lrcorner dx^\nu = \delta_\mu^\nu \quad (5)$$

De (4) e (5) segue:

$$e^\mu \lrcorner dx^\nu \wedge + dx^\nu \wedge e^\mu \lrcorner = g^{\mu\nu} \quad (6)$$

onde $g^{\mu\nu}$ dá a métrica do nosso espaço. Temos:

$$dx^\mu \wedge dx^H = \xi_{\mu,H} dx^{H\vee\mu} \quad (7)$$

$$e_\mu \lrcorner dx^H = \xi_{\mu,H\Delta\mu} dx^{H\setminus\mu} \quad (8)$$

onde $\xi_{\mu,H}$ é uma espécie de tensor de Levi-Civita truncado, com a definição $\xi_{\mu_1\mu_2\mu_3\ldots} = 1$ se $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \ldots$ mudando de sinal pela permutação de dois índices. Se H e K forem conjuntos de índices ordenados $H \Delta K$ é a diferença simétrica. Ele contém elementos de H e K que não pertencem simultaneamente a H e K .

O produto de Clifford é definido por:

$$dx^\mu \vee dx^H = (dx^\mu \wedge + e^\mu \lrcorner) dx^H \quad (9)$$

Daí segue, utilizando (5) e (6):

$$dx^\mu \vee dx^\nu + dx^\nu \vee dx^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (10)$$

Portanto os dx^μ munidos com a operação de produto de Clifford definem uma representação de álgebra de Clifford.

No espaço das formas diferenciais a expressão (6) sugere interpretar $dx^\mu \wedge$ como operador de criação (pois aumenta o grau da forma) e $e^\mu \lrcorner$ como operador de destruição (pois diminui o grau da forma). É natural com estes dois operadores definir dois tipos de derivadas:

$$\begin{aligned} d &= dx^\mu \wedge \partial_\mu \\ \delta &= -e^\mu \lrcorner \partial_\mu \end{aligned} \quad (11)$$

, d = derivada exterior e δ é a sua adjunta (pois $\partial_\mu^+ = -\partial_\mu$).

Valem as relações:

$$d^2 = \delta^2 = 0 \quad (12)$$

Consideremos agora o operador $(d - \delta)$ e aplique-o numa forma Φ :

$$(d - \delta)\Phi = dx^\mu \vee \partial_\mu \Phi \quad (13)$$

onde usamos (9). Agora calculemos $(d - \delta)^2$:

$$(d - \delta)^2 = -d\delta - \delta d = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \square \quad (14)$$

onde utilizamos (6) e (12). Vamos por (10), (13) e (14) que podemos considerar o mapeamento:

$$\gamma^\mu \longleftrightarrow dx^\mu \vee \quad (15)$$

onde as γ^μ são as matrizes γ que aparecem na equação de Dirac. Note-se que além disso (14) mostra que $(d - \delta)$ corresponde à raiz quadrada do operador Laplaciano $\square$. Isto sugere substituir o operador de Dirac $i\gamma^\mu \partial_\mu$ pelo operador diferencial de Dirac-Kähler $i(d - \delta)$ se quisermos fazer o correspondente tratamento por meio de formas diferenciais. O operador de

Hodge $\star$ tem a propriedade:

$$\star \Phi = \Phi \vee \varepsilon \quad (16)$$

onde:

$$\varepsilon = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad (17)$$

Por simplicidade estamos no momento considerando o espaço quadridimensional.

O 0-produto escalar de Kähler é definido por:

$$(\Phi, Z)_0 = \mathcal{P}_0 (\Phi \vee Z) \varepsilon \quad (18)$$

onde $\mathcal{P}_0$ projeta o produto de Clifford acima na zero-forma.

O 1-produto escalar de Kähler é definido por:

$$(\Phi, Z)_1 = e_\alpha \lrcorner (dx^\alpha \vee \Phi, Z)_0 = e_\alpha \lrcorner \{ (dx^\alpha \vee \Phi \vee \mathcal{B} Z) \wedge \varepsilon \} \quad (19)$$

onde o operador $\mathcal{B}$ atuando nos elementos dx^H inverte a ordem dos termos:

$$\mathcal{B} (dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3} \wedge \dots) = \dots dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_1} \quad (20)$$

Podemos definir a corrente, que é uma 1-forma, por:

$$j = j^\mu(x) dx^\mu = - \star^{-1} (\Phi, Z)_1 \quad (21)$$

ela será conservada se :

$$\delta f = -e^\mu \lrcorner \partial_\mu f = -\partial_\mu f^\mu(x) = -\star^{-1} d(\Phi, Z)_1 = 0$$

Isto é, se :

$$d(\Phi, Z)_1 = 0 \quad (22)$$

Agora vale ⁽⁵⁾:

$$d(\Phi, Z)_1 = ((d-\delta)\Phi, Z)_0 + (\Phi, (d-\delta)Z)_0 \quad (23)$$

Então para que a corrente seja conservada é suficiente que Φ e Z satisfaçam à equação de Dirac-Kähler:

$$(d-\delta)\Phi = (d-\delta)Z = 0 \quad (24)$$

Becher e Joos ⁽⁵⁾ reformularam todo esse tratamento para a rede. Daremos um resumo de seus resultados. Consideremos por simplicidade, uma rede cúbica d-dimensional. Os elementos geométricos dessa rede são p-cubos:

$$(x, H) = (x, \mu_1, \mu_2 \dots \mu_p) \quad (25)$$

$p=0, 1, 2, \dots, d$ com H sendo um conjunto ordenado $\mu_1 < \mu_2 < \dots$.

As formas lineares dos p-cubos são chamadas de p-cadeias. Elas geram um espaço vetorial com elementos:

$$C = \sum_{x, H} d(x, H) (x, H) \quad (26)$$

onde os $\alpha(x, H)$ são em geral números complexos ou matrizes.

Para um p-cubo $C_p = (x, H)$ introduzimos o operador básico dual $\check{C}_p = d^{x, H}$ definido através de :

$$d^{x, H}((x', H')) = \delta_{x'}^x \delta_{H'}^H \quad (27)$$

$d^{x, H}$ é chamado de co-cadeia elementar. Uma co-cadeia genérica é dada por:

$$\Phi = \sum_{x, H} \phi(x, H) d^{x, H} \quad (28)$$

onde $\phi(x, H)$ será tomada como uma matriz genérica definida através das representações de um dado grupo compacto.

Para as co-cadeias (28) podemos definir o operador de fronteira dual $\check{\Delta}$ que transforma p-cocadeias em (p+1) cocadeias; também definimos o operador de cofronteria dual $\check{\nabla}$ que transforma p-cocadeias em (p-1) cocadeias. Valem⁽⁵⁾:

$$\check{\Delta}\Phi = \sum_{x, H} \varepsilon_{\mu, H} \Delta_{\mu}^+ \phi(x, H) d^{x, H \cup \mu} \quad (29)$$

$$\check{\nabla}\Phi = - \sum_{x, H} \varepsilon_{\mu, H} \Delta_{\mu}^- \phi(x, H) d^{x, H \setminus \mu} \quad (30)$$

onde $\varepsilon_{H, K}$ já foi definido atrás (o nosso $\varepsilon_{H, K}$ é o $\beta_{H, K}$ de Ref. 5); Δ_{μ}^+ e Δ_{μ}^- são as derivadas na rede definidas por:

$$\begin{aligned}\Delta_{\mu}^{+}\phi(x,H) &= \phi(x+e_{\mu},H) - \phi(x) \\ \Delta_{\mu}^{-}\phi(x,H) &= \phi(x,H) - \phi(x-e_{\mu},H)\end{aligned}\tag{31}$$

$$|e_{\mu}|=1$$

O produto escalar de duas co-cadeias é definido por:

$$(\Phi, \Psi) = \sum_x (\Phi, \Psi)_x.\tag{32}$$

com:

$$(\Phi, \Psi)_x = \sum_H T_H \left(\phi^{\dagger}(x,H) \psi(x,H) \right) d^{x,(1,2,\dots,d)}.\tag{33}$$

No formalismo de Dirac-Kähler há uma correspondência direta entre o formalismo de formas diferenciais e as co-cadeias na rede. Por exemplo o produto exterior das formas diferenciais elementares $dx^H \wedge dx^K$ na rede corresponde ao produto exterior ("cup product") das cocadeias elementares dadas por:

$$d^{x,H} \wedge d^{y,K} = \varepsilon_{H,K} \delta^{x+e_H,y} d^{x,H \cup K}\tag{34}$$

A equação de Dirac-Kähler na rede se escreve:

$$(\check{\Delta} - \check{\nabla})\Phi = d^{\mu} \check{\nabla}_{\mu} \Phi = 0\tag{35}$$

onde introduzimos:

$$d^\mu = \sum_x d^{x,\mu} \quad (36)$$

(35) pode-se reescrever:

$$(\check{\Delta} - \check{\nabla})\Phi = \sum_{x,H} \left[\varepsilon_{\mu,H} \Delta_\mu^+ \phi(x,H) d^{x,HV\mu} + \varepsilon_{\mu,H\Delta\mu} \Delta_\mu^- \phi(x,H) d^{x,H\backslash\mu} \right] \quad (37)$$

A extensão de (19) para a rede é⁽¹⁵⁾:

$$(\Phi, z)_1 = T_\mu e_\mu \downarrow \left[(d^\mu \wedge \Phi, z)_0 + (\Phi, d^\mu \wedge z)_0 \right] \quad (38)$$

onde T_μ é o operador de translação linear na rede⁽⁵⁾:

$$T_\mu d^{x,H} = d^{x-\ell_\mu, H} \quad (39)$$

De (38) obtemos a formula de Green na rede⁽¹⁵⁾:

$$\check{\Delta} (\Phi, z)_1 = ((\check{\Delta} - \check{\nabla})\Phi, z)_0 + (\Phi, (\check{\Delta} - \check{\nabla})z)_0 \quad (40)$$

Como consequência, a corrente definida por:

$$j = \sum_x j_\mu(x) d^{x,\mu} = *^{-1} (\Phi, z)_1 \quad (41)$$

é conservada para o caso livre.

Como exemplo ilustrativo consideremos a 2-cocadeia no espaço a duas dimensões:

$$\Phi = \sum_x \left[f_0(x) d^{x,\phi} + f_{12}(x) d^{x,12} \right] \quad (42)$$

A expressão (29) dá:

$$\delta\Phi = \sum_x \partial_\mu^+ f_0(x) d^{x,\mu} \quad (43)$$

enquanto que:

$$-\delta\Phi = \sum_x \left(\partial_1^- f_{12}(x) d^{x,2} - \partial_2^- f_{12}(x) d^{x,1} \right) . \quad (44)$$

A TEORIA DE CALIBRE NA REDE PARA CAMPOS NA REPRESENTAÇÃO

ADJUNTA

No contínuo, a interação com campos de calibre é introduzida através da substituição formal da derivada ∂_μ pela derivada covariante D_μ :

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig [V_\mu,] \quad (45)$$

onde V_μ descreve o campo de calibre. No formalismo de Dirac-Kähler fazemos a substituição (45) nas expressões (11). Entretanto quando passamos ao formalismo da rede temos dificuldades pelo fato de aparecerem em $\check{\Delta}$ e $\check{\nabla}$ das expressões (29) e (30) dois tipos de derivada à saber Δ_μ^+ e Δ_μ^- respectivamente. Usualmente o campo de calibre na rede é descrito por uma função de aresta ("link") $U(x, \mu)$ com a transformação de calibre:

$$U(x, \mu) \rightarrow G(x) U(x, \mu) G^{-1}(x + \ell^\mu) \quad (46)$$

onde $G(x)$ é uma função de ponto representada por uma matriz unitária:

$$G(x) = e^{-ig \frac{\lambda^a}{2} \omega_a(x)} \quad (47)$$

$\frac{\lambda^a}{2}$ sendo os geradores do nosso grupo, que por simplicidade tomaremos como sendo SU_n definido pela álgebra:

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] = i f^{abc} \frac{\lambda^c}{2} \quad (48)$$

No limite do contínuo escreve-se:

$$U(x, \mu) = e^{i e^\mu g U_\mu(x)} \simeq 1 + i e^\mu g U_\mu(x) + \dots \quad (49)$$

onde e^μ indica o espaçamento da rede na direção μ e $U_\mu(x)$ é o campo de calibre usual $U_\mu(x) = \frac{\lambda^a}{2} U_\mu^a(x)$. Neste caso (46) se reduz à transformação de calibre usual:

$$U_\mu^a(x) \rightarrow U_\mu^a(x) + \partial_\mu \omega^a(x) - f_{abc} \omega^b(x) U_\mu^c(x) \quad (50)$$

Vamos agora dar um resumo de resultados obtidos por nós.

Consideremos as componentes $\phi(x, H)$ de uma cadeia genérica dada pela expressão (28) e que pertença a representação adjunta de SU_n . De modo análogo a (46) definiremos a transformação de calibre geral (12):

$$\phi(x, H) \rightarrow G(x) \phi(x, H) G^{-1}(x + e^H) \quad (51)$$

$$e^H = e^{\mu_1} + e^{\mu_2} + \dots \quad H = \{ \mu_1, \mu_2, \dots \}$$

Para $H = \{ \phi \}$ temos uma função de ponto ($e^H = e^\phi = 0$), para $H = \{ \mu \}$ temos uma função de aresta ($e^H = e^\mu$), para $H = \{ \mu_1, \mu_2 \}$ temos uma função de plaqueta ($e^H = e^{\mu_1} + e^{\mu_2}$) etc.

O Hemiteano conjugado $\phi^\dagger(x, H)$ de $\phi(x, H)$ se comporta sob uma transformação de calibre como:

$$\phi^+(x, H) \rightarrow G(x + e^H) \phi^+(x, H) G^{-1}(x) \quad (52)$$

Neste caso,

$$T_n (\phi^+(x, H) \phi(x, H)) \quad (53)$$

é uma quantidade invariante de calibre; (52) indica que a transformação de calibre depende da natureza geométrica dos objetos considerados. As expressões (29) e (30) sugerem que $D_\mu^+ \phi(x, H)$ e $D_\mu^- \phi(x, H)$ se comportem por transformações de calibre como objetos identificados com os cubos $H \cup \mu$ e $H \setminus \mu$ respectivamente. É natural então que para as derivadas covariantes na rede tenhamos as seguintes transformações de calibre (12):

$$\begin{aligned} D_\mu^+ \phi(x, H) &\rightarrow G(x) D_\mu^+ \phi(x, H) G^{-1}(x + e^H + e^\mu) \\ D_\mu^- \phi(x, H) &\rightarrow G(x) D_\mu^- \phi(x, H) G^{-1}(x + e^H - e^\mu) \end{aligned} \quad (54)$$

Soluções genéricas de (54) são:

$$\begin{aligned} D_\mu^+ \phi(x, H) &= A \mathcal{U}(x, \mu) \phi(x + e^\mu, H) + B \phi(x, H) \mathcal{U}(x + e^H, \mu) \\ D_\mu^- \phi(x, H) &= A' \phi(x, H) \mathcal{U}^+(x + e^H - e^\mu, \mu) + B' \mathcal{U}^+(x - e^\mu, H) \phi(x - e^\mu, H) \end{aligned}$$

pois valem (46) e (52). Fazendo o limite do contínuo obtemos $A = -B = A' = -B' = 1$. Então:

$$D_\mu^+ \phi(x, H) = \mathcal{U}(x, \mu) \phi(x + e^\mu, H) - \phi(x, H) \mathcal{U}(x + e^H, \mu) \quad (55)$$

$$D_{\mu}^{-} \phi(x, H) = \phi(x, H) U^{\dagger}(x + e^H - e^{\mu}, \mu) - U^{\dagger}(x - e^{\mu}, \mu) \phi(x - e^{\mu}, H) \quad (56)$$

que, no limite do contínuo, após usar (49) dão:

$$\frac{1}{e^{\mu}} D_{\mu}^{+} \phi(x, H) \simeq \Delta_{\mu}^{+} \phi(x, H) + ig [U_{\mu}(x) \phi(x + e^{\mu}, H) - \phi(x, H) U_{\mu}(x + e^H)]$$

$$\frac{1}{e^{\mu}} D_{\mu}^{-} \phi(x, H) \simeq \Delta_{\mu}^{-} \phi(x, H) + ig [U_{\mu}(x) \phi(x - e^{\mu}, H) - \phi(x, H) U_{\mu}(x + e^H - e^{\mu})]$$

as quais para $e^{\mu}, e^H \rightarrow 0$ tendem para a expressão correta obtida de (45).

Tendo definido as derivadas covariantes, as interações de calibre na rede são obtidas, através do procedimento usual, à saber pela substituição das diferenças finitas $\Delta_{\mu}^{\pm}$ pelas correspondentes derivadas covariantes $\frac{1}{e^{\mu}} D_{\mu}^{\pm}$.

Fazendo estas substituições nas expressões (29) e (30), obtemos:

$$\check{\Delta} \Phi \rightarrow \check{\Delta}_U \Phi = \sum_{x, H} \varepsilon_{\mu, H \Delta \mu} \frac{1}{e^{\mu}} D_{\mu}^{+} \phi(x, H \setminus \mu) d^{x, H} \quad (57)$$

$$\check{\nabla} \Phi \rightarrow \check{\nabla} \Phi = - \sum_{x, H} \varepsilon_{\mu, H \cup \mu} \frac{1}{e^{\mu}} D_{\mu}^{-} \phi(x, H \cup \mu) d^{x, H} \quad (58)$$

O CAMPO DE CALIBRE PURO NA REDE - RELAÇÕES VÁRIAS

No contínuo, em uma teoria de calibre não abeli-
ana, o conjunto dos campos vetoriais $U_\mu^a(x)$ descreve o
setor de calibre com a densidade de Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \quad (59)$$

com:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu U_\nu^a - \partial_\nu U_\mu^a - g f^{abc} U_\mu^b U_\nu^c \quad (60)$$

A expressão (59) é invariante pelas transformações
de calibre (50). Usando a notação de formas diferenciais:

$$U = U_\mu(x) dx^\mu = \frac{\lambda^a}{2} U_\mu^a(x) dx^\mu \quad (61)$$

$$F = (d + g U \wedge) U \quad (62)$$

a equação de movimento de Yang-Mills se escreve

$$(d - \delta + g U \vee) F = 0 \quad (63)$$

e a identidade de Bianchi:

$$(d + g U \wedge) F = 0 \quad (64)$$

Na rede, considera-se a cocadeia:

$$U = \sum_x U(x, \mu) d^{x, \mu} \quad (65)$$

e o tensor do campo de Yang-Mills:

$$\mathcal{F} = \check{\Delta}_\nu U = \sum_x \frac{1}{\ell^\mu} D_\mu^+ U(x, \nu) d^{x, \mu\nu} = \sum_x \frac{1}{\ell^\mu} \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) d^{x, \mu\nu} \quad (66)$$

Explicitamente,

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) = D_\mu^+ U(x, \nu) - U(x, \mu) U(x + \ell^\mu, \nu) - U(x, \nu) U(x + \ell^\nu, \mu) \quad (67)$$

Observe-se que a derivada covariante $D_\mu^+ U(x, \nu)$ já é antissimétrica por definição. Sob as transformações de calibre (46), $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$ se transforma como:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) \rightarrow G(x) \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) G^{-1}(x + \ell^\mu + \ell^\nu) \quad (68)$$

As identidades de Bianchi (64) e equações (63) de Yang-Mills na rede, podem se escrever respectivamente:

$$\begin{aligned} \check{\Delta}_\nu \mathcal{F} &= 0 \\ \check{\nabla}_\nu \mathcal{F} &= 0 \end{aligned} \quad (69)$$

Observe-se que, como estamos trabalhando no espaço Euclidiano, não há diferença entre índices superiores e inferiores. A fim de se construir a densidade de Lagrangeana, consideramos o conjugado Hermiteano $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$ que se transforma como:

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^+(x) \rightarrow G(x+e^\mu+e^\nu) \tilde{F}_{\mu\nu}^+(x) G^{-1}(x) \quad (70)$$

A densidade de Lagrangeana será:

$$\mathcal{L}_G \sim \left(\frac{\tilde{F}_{\mu\nu}^{ab}(x)}{(e^\mu e^\nu)} \frac{\tilde{F}_{\mu\nu}^{+b_2}(x)}{(e^\mu e^\nu)} \right) \quad (71)$$

Vemos que ela é invariante pelas transformações de calibre (68) e (70).

Pode-se mostrar⁽¹²⁾, que (67), (69) e (71) possuem os limites do contínuo corretos.

Fazendo-se o espaçamento temporal $e^0 \rightarrow 0$ e $e^i = a$ para $i=1,2,3$ e passando-se para o espaço de Minkowski po-de-se agora fazer a formulação Hamiltoniana do nosso sistema de calibre. Impondo-se a condição de calibre:

$$\mathcal{U}^+(x,\mu) \mathcal{U}(x,\mu) = 1 \quad (72)$$

a expressão (71) reduz-se à ação de Wilson. Para maiores de talhes veja o nosso trabalho feito em colaboração com Goto e Aratyn⁽¹²⁾. No apêndice C desse trabalho são demonstradas ainda as seguintes regras de Leibnitz para as derivadas covariantes na rede:

$$D_\mu^+ [\phi(x,\mu) \psi(x+e^\mu, \kappa)] = [D_\mu^+ \phi(x,\mu)] \psi(x+e^\mu+e^\mu, \kappa) + \phi(x,\mu) [D_\mu^+ \psi(x+e^\mu, \kappa)] \quad (73)$$

$$D_\mu^- [\phi(x,\mu) \psi(x+e^\mu, \kappa)] = \phi(x,\mu) [D_\mu^- \psi(x+e^\mu, \kappa)] + [D_\mu^- \phi(x,\mu)] \psi(x+e^\mu, \kappa) \quad (74)$$

e a fórmula para a integração das partes:

$$\begin{aligned} T_n [\psi^+(x, H \cup \mu) D_\mu^+ \phi(x, H)] = & - T_n [(D_\mu^- \psi(x, H \cup \mu))^+ \phi(x, H)] + \\ & + e^\mu T_n [\Delta_\mu^- (\psi^+(x, H \cup \mu) \mathcal{U}(x, \mu) \phi(x + e^\mu, H))] \end{aligned} \quad (75)$$

Também vale:

$$\begin{aligned} T_n [\psi^+(x, H \setminus \mu) D_\mu^- \phi(x, H)] = & - T_n [(D_\mu^+ \psi(x, H \setminus \mu))^+ \phi(x, H)] + \\ & + e^\mu T_n [\Delta_\mu^- (\psi^+(x + e^\mu, H \setminus \mu) \mathcal{U}^+(x, \mu) \phi(x, H))] \end{aligned} \quad (76)$$

Observe que as expressões (75) e (76) são invariantes de calibre:

Também valem (12):

$$[D_\mu^+, D_\nu^+] \phi(x, H) = \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) \phi(x + e^\mu + e^\nu, H) - \phi(x, H) \mathcal{F}_{\mu\nu}(x + e^\mu) \quad (77)$$

$$\begin{aligned} [D_\mu^-, D_\nu^-] \phi(x, H) = & \phi(x, H) \mathcal{F}_{\mu\nu}^+(x + e^\mu - e^\nu - e^\nu) - \\ & - \mathcal{F}_{\mu\nu}^+(x - e^\mu - e^\nu) \phi(x - e^\mu - e^\nu, H) \end{aligned} \quad (78)$$

No limite do contínuo temos (12):

$$[D_\mu^+, D_\nu^+] \phi(x, H) = [D_\mu^-, D_\nu^-] \phi(x, H) \rightarrow i e^\mu e^\nu g [F_{\mu\nu}(x), \phi(x, H)] \quad (79)$$

Vamos agora introduzir os produtos chapéu à esquerda e à direita ("left and right cap products") das cocadeias elementares:

$$\begin{aligned} d^{z, H} \cap_L d^{z, K} &= \varepsilon_{H \setminus K, K} \delta^{z, z + e_H} d^{z, H \setminus K} \\ d^{z, H} \cap_R d^{z, K} &= \varepsilon_{H, K \setminus H} \delta^{z, x} d^{z + e_H, K \setminus H} \end{aligned} \quad (80)$$

Valem as seguintes relações para os 0-produtos es calares de Kähler:

$$(d^{z,H} \cap_L d^{y,K}, d^{z,M})_0 = (d^{x,H}, d^{z,M} \wedge d^{y,K})_0 \quad (81)$$

$$(d^{y,K} \cap_R d^{x,H}, d^{z,M})_0 = (d^{x,H}, d^{y,K} \wedge d^{z,M})_0 \quad (82)$$

Outras relações entre produtos externos e chapéu de três co cadeias elementares podem ser achados em nosso artigo Ref.

(14). Neste trabalho escrevemos ainda as seguintes novas re lações:

$$\Delta_v^2 \Phi = \frac{1}{2} [\mathcal{F}, \Phi]_\Lambda = \frac{1}{2} (\tilde{\mathcal{F}} \wedge \Phi - \Phi \wedge \tilde{\mathcal{F}}) \quad (83)$$

$$\check{\Delta}_v^2 \Phi = \frac{1}{2} [\mathcal{F}^+, \Phi]_{R,L} = \frac{1}{2} (\mathcal{F}^+ \cap_R \Phi - \Phi \cap_L \mathcal{F}^+) \quad (84)$$

Devido a (81) e (82), as relações (83) e (84) são consistentes com o fato de Δ_v e $\check{\Delta}_v$ serem adju nos uma da outra. Para $\Phi = \mathcal{U}$, a expressão (83) dá a identidade de Bianchi devido a associatividade do produto exterior na rede.

A regra de Leibnitz (73) também pode ser escrita como (14):

$$\check{\Delta}_v(\Phi \wedge \Psi) = (\check{\Delta}_v \Phi) \wedge \Psi + (\mathcal{A} \Phi) \wedge (\check{\Delta}_v \Psi) \quad (85)$$

que é a generalização na rede da expressão (A.37) da Ref.5.

O automorfismo principal $\mathcal{A}$ é definido por:

$$A\Phi = (-1)^p \Phi \quad (86)$$

De (73) e (74) obtivemos a seguinte generalização da fórmula de Green⁽¹⁴⁾:

$$\left((\check{\Delta}_0 - \check{\nabla}_0) \Psi, \Phi \right)_0 + \left(\Psi, (\check{\Delta}_0 - \check{\nabla}_0) \Phi \right)_0 = \check{\Delta} (\Psi, \Phi)_1^v \quad (87)$$

onde o 1-produto escalar de Kähler na rede (38) foi generalizado pela substituição:

$$d^\mu \rightarrow U^\mu = \sum_x U(x, \mu) d^{x, \mu} \quad (88)$$

Temos então explicitamente:

$$(\Psi, \Phi)_1^v = T_{-\mu} e_\mu \lrcorner \left[(U^\mu \wedge \Psi, \Phi)_0 + (\Psi, U^\mu \wedge \Phi)_0 \right] \quad (89)$$

No lado direito de (87) comparece o operador de fronteira $\check{\Delta}$ dado por (29).

Se Φ e Ψ satisfizerem as equações de Dirac-Kähler com campo de calibre:

$$(\check{\Delta}_0 - \check{\nabla}_0) \Phi = (\check{\Delta}_0 - \check{\nabla}_0) \Psi = 0 \quad (90)$$

a expressão (87) dará como sequência que a corrente:

$$J = \star^{-1} (\Psi, \Phi)_1^v \quad (91)$$

é conservada; a operação $\star^{-1}$ é definida pela expressão

(A.66) de Ref.5.

Usando as regras de transformação de calibre para os campos Φ , Ψ e $\mathcal{U}$ na representação adjunta, segue-se que esta corrente é invariante de calibre.

No caso de Φ ser uma p-cocadeia, Jourjine⁽²³⁾ escreveu as nossas expressões (57) e (58) numa forma mais compacta:

$$\check{\Delta}_\nu \Phi_p = \mathcal{U} \wedge \Phi_p + (-1)^{p+1} \Phi_p \wedge \mathcal{U} \quad (92)$$

$$\check{\nabla}_\nu \Phi_p = (\Phi_p^+ \wedge_\kappa \mathcal{U})^+ + (-1)^{p+1} (\mathcal{U} \wedge_\kappa \Phi_p^+)^+ \quad (93)$$

com $\mathcal{U}$ dada pela expressão (65).

CAPÍTULO 2

MAPEAMENTO NICOLAI

Ilustremos este mapeamento num exemplo simples da mecânica quântica supersimétrica descrita pela Lagrangeana: ^{(18), (19)}

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}(t)^2 - \frac{1}{2} (V'(q(t)))^2 - i \bar{\Psi}(t) \dot{\Psi}(t) + \bar{\Psi}(t) \Psi(t) V''(q(t)) \quad (1)$$

$$\{\bar{\Psi}(t), \Psi(t)\} = 1, \quad \bar{\Psi}^2 = \Psi^2 = 0$$

com $V(q(t))$ descrevendo a interação, $V' = \frac{dV}{dq}$. Passando para uma métrica euclídeana (1) se reescreve (à menos de um sinal global):

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}(t)^2 + \frac{1}{2} V'^2 + \bar{\Psi} \dot{\Psi} - \bar{\Psi} \Psi V'' \quad (2)$$

A Lagrangeana, quando submetida à transformação supersimétrica:

$$\begin{aligned} \delta q &= \bar{\epsilon} \Psi + \bar{\Psi} \epsilon \\ \delta \Psi &= [\dot{q} + V'] \epsilon \\ \delta \bar{\Psi} &= [-\dot{q} + V'] \bar{\epsilon} \end{aligned} \quad (3)$$

dá:

$$\delta L = \frac{d}{dt} (\dot{q} \bar{\Psi} \epsilon - \Psi V' \bar{\epsilon}) \quad (4)$$

com ϵ e $\bar{\epsilon}$ parâmetros de transformações Grassmanianos e infinitesimais. Utilizando:

$$\int d\psi = 0, \quad \int \psi d\psi = 1, \quad \int \psi(t_1) d\psi(t_2) = \delta(t_1 - t_2) \quad (5)$$

não é difícil de mostrar que:

$$\int_t \prod d\psi(t) d\bar{\psi}(t) e^{-\int \bar{\psi} \left(\frac{d}{dt} + V''(q(t)) \right) \psi dt} = \det \left[\left(\frac{d}{dt} + V'' \right) \delta(t-t') \right] \quad (6)$$

A função de correlação de n pontos é dado por:

$$\langle q(t_1) \dots q(t_n) \rangle = \frac{1}{Z} \int_t \prod dq(t) d\psi(t) d\bar{\psi}(t) q(t_1) \dots q(t_n) e^{-\int L(t') dt'} \quad (7)$$

onde

$$Z = \int_t \prod dq(t) d\psi(t) d\bar{\psi}(t) e^{-\int L(t') dt'} \quad (8)$$

Usando (6) obtemos:

$$\langle q(t_1) \dots q(t_n) \rangle = \frac{1}{Z} \int d\mu(q) q(t_1) \dots q(t_n) \quad (9)$$

com:

$$d\mu(q) = \prod_t dq(t) e^{-\int \left(\frac{1}{2} \dot{q}^2 + \frac{1}{2} V'^2 \right) dt'} \det \left[\left(\frac{d}{dt} + V'' \right) \delta(t-t') \right] \quad (10)$$

Por (9) veremos que $\langle q(t_1) \dots q(t_n) \rangle$ é expresso somente em termos de quantidades bosônicas. Considere a transformação de Nicolai⁽¹⁾ definida por:

$$\dot{\zeta}(t) = \dot{q}(t) \pm V'(q(t)) \quad (11)$$

Daí segue:

$$\frac{d\zeta(t)}{dq(t')} = \left(\frac{d}{dt} \pm V''(q(t)) \right) \delta(t-t') \quad (12)$$

e portanto:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\zeta}^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [\dot{q}^2(t) + V'^2(q(t))] dt \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{q} V' dt \quad (13)$$

O último termo corresponde à carga topológica. À menos desse termo topológico, obtemos:

$$d\mu(q) = \prod_t dq(t) \det \left(\frac{d\dot{\zeta}(t)}{dq(t')} \right) e^{-\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\zeta}^2 dt} = \prod_t d\dot{\zeta}(t) e^{-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\zeta}^2 dt} \quad (14)$$

MODELO DE WESS-ZUMINO COM N=2 A DUAS DIMENSÕES

Considere um espaço Minkowskiano a duas dimensões descrito por x^1 (coordenada espacial) e x^2 (coordenada temporal). A essas duas coordenadas adicionemos as variáveis anti-comutantes θ , $\bar{\theta} = \theta^\dagger \gamma^2$, que são spinores complexos de duas componentes.

Um supercampo genérico $\Phi(x^\mu, \theta, \bar{\theta})$, por uma translação supersimétrica

$$\begin{aligned} \delta\theta &= \varepsilon, & \delta\bar{\theta} &= \bar{\varepsilon} \\ \delta x^\mu &= i(\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\theta - \bar{\theta}\gamma^\mu\varepsilon) \end{aligned} \quad (15)$$

se transforma como:

$$\delta\Phi = \delta x^\mu \frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu} + \delta\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \delta\bar{\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\theta}}$$

e usando (15) obtemos:

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= i(\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\theta - \bar{\theta}\gamma^\mu\varepsilon) \frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu} + \varepsilon \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \bar{\varepsilon} \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\theta}} = \\ &= \bar{\varepsilon} \left(i\gamma^\mu\theta \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} \right) \Phi + \left(-i\bar{\theta}\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial\theta} \right) \varepsilon \Phi. \end{aligned} \quad (16)$$

Definindo as transformações de $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$ por meio dos geradores Q e $\bar{Q}$:

$$\delta\Phi = (\bar{\varepsilon}Q + \bar{Q}\varepsilon)\Phi \quad (17)$$

a expressão (16) dá:

$$Q = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} + i \gamma^\mu \partial_\mu \theta, \quad \bar{Q} = -\frac{\partial}{\partial \theta} - i \bar{\theta} \gamma^\mu \partial_\mu \quad (18)$$

As derivadas covariantes supersimétricas são definidas por:

$$D = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} - i \gamma^\mu \partial_\mu \theta, \quad \bar{D} = -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \bar{\theta} \gamma^\mu \partial_\mu, \quad (19)$$

Introduzindo:

$$x_\pm^\nu = x^\nu \pm i \bar{\theta} \gamma^\nu \theta \quad (20)$$

é fácil de se ver que:

$$D x_\pm^\nu = \bar{D} x_\mp^\nu = 0 \quad (21)$$

Além disso:

$$D \theta = \bar{D} \bar{\theta} = 0 \quad (22)$$

Os campos quirais e antiquirais são definidos respectivamente por:

$$D \Phi = 0, \quad \bar{D} \bar{\Phi} = 0 \quad (23)$$

As soluções gerais de (23) são:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi(x_+) + \bar{\psi}(x_+) \theta + F(x_+) \theta_1 \theta_2$$

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi^*(x_-) + \bar{\theta} \psi(x_-) - F^*(x_-) \theta_1^+ \theta_2^+ \quad (24)$$

Podemos escrever:

$$\psi(x_+) = \psi(x^\nu + i \bar{\theta} \gamma^\nu \theta) = \psi(x^\nu) + i \bar{\theta} \gamma^\nu \partial_\nu \psi - \frac{1}{2} (\bar{\theta} \gamma^\nu \theta) (\bar{\theta} \gamma^\mu \theta) \partial_\nu \partial_\mu \psi$$

e devido às relações:

$$(\bar{\theta} \gamma^\nu \theta) (\bar{\theta} \gamma^\mu \theta) = -g^{\mu\nu} (\bar{\theta} \theta)^2 \quad (25)$$

segue-se que:

$$\psi(x_+) = \psi(x^\nu) + i \bar{\theta} \gamma^\nu \theta \partial_\nu \psi + \frac{1}{2} (\bar{\theta} \theta) \square \psi$$

A parte de $F(x_+)$ que contribue é $F(x^\nu)$. As expressões para campos quirais e antiquirais são, portanto,

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{\psi(x^\nu)}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\theta} \gamma^\nu \theta \partial_\nu \psi + \frac{1}{2\sqrt{2}} (\bar{\theta} \theta)^2 \square \psi + \bar{\psi}(x^\nu) \theta + \\ + i \bar{\theta} \gamma^\nu \theta \partial_\nu \bar{\psi} \theta + F(x^\nu) \theta_1 \theta_2 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} = \frac{\psi^*(x^\nu)}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\theta} \gamma^\nu \theta \partial_\nu \psi^* + \frac{1}{2\sqrt{2}} (\bar{\theta} \theta)^2 \square \psi^* + \bar{\theta} \psi(x^\nu) \\ - i \bar{\theta} \bar{\theta} \gamma^\nu \theta \partial_\nu \psi - F^*(x^\nu) \theta_1^+ \theta_2^+ \end{aligned} \quad (27)$$

Façamos agora o produto $\Phi \bar{\Phi}$ e isolemos aqueles termos

com $\theta_1 \theta_2 \theta_1^+ \theta_2^+$:

$$\begin{aligned} -\Phi \bar{\Phi} \Big|_{\theta_1 \theta_2 \theta_1^+ \theta_2^+} &= -\frac{1}{2} \varphi(x) \square \varphi^*(x) + \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} \varphi^*(x) \square \varphi(x) \\ &+ 2i \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) + F(x) F^*(x) \end{aligned} \quad (28)$$

Vamos agora introduzir os superpotenciais:

$$\begin{aligned} -iV(\Phi) &= -iV\left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}} + \bar{\psi}\theta + F\theta_1\theta_2\right) = -iW(\varphi) - i\sqrt{2} W'(\varphi)(\bar{\psi}\theta + F\theta_1\theta_2) \\ &- iW''(\varphi)(\bar{\psi}\theta)(\bar{\psi}\theta) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} i\bar{V}(\bar{\Phi}) &= i\bar{V}\left(\frac{\varphi^*}{\sqrt{2}} + \bar{\theta}\psi - F^*\theta_1^+\theta_2^+\right) = iW^*(\varphi^*) + i\sqrt{2} W'^*(\varphi^*)(\bar{\theta}\psi - F^*\theta_1^+\theta_2^+) \\ &+ iW^{*''}(\varphi^*)(\bar{\theta}\psi)(\bar{\theta}\psi) \end{aligned} \quad (30)$$

onde $V\left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}}\right) = W(\varphi)$, $W'(\varphi) = \frac{dW}{d\varphi}$ etc...

Integrando as expressões (28) e (30) obtemos:

$$\begin{aligned} -i \int V(\Phi) d\theta_1 d\theta_2 &= i \left(\sqrt{2} W'(\varphi) F + 2 W''(\varphi) \psi_1^+ \psi_2^+ \right) \\ i \int \bar{V}(\bar{\Phi}) d\theta_1^+ d\theta_2^+ &= i \left(\sqrt{2} W'^*(\varphi^*) F^* - 2 W^{*''}(\varphi^*) \psi_1 \psi_2 \right) \end{aligned} \quad (31)$$

onde usamos $(\bar{\psi}\theta)(\bar{\psi}\theta) = 2\theta_1\theta_2\psi_1^+\psi_2^+$, $(\bar{\theta}\psi)(\bar{\theta}\psi) = 2\theta_1^+\theta_2^+\psi_1\psi_2$.

A parte de interação então dá a seguinte contribuição à Lagrangeana:

$$-i\sqrt{2} W'(\varphi) + i\sqrt{2} W'^*(\varphi^*) F^* - 2i W''(\varphi) \psi_1^+ \psi_2^+ - 2i W^{*''}(\varphi^*) \psi_1 \psi_2 \quad (32)$$

Introduzindo:

$$\chi_1 = \frac{\psi_1^+ + \psi_2}{\sqrt{2}}, \quad \chi_2 = \frac{\psi_1^+ - \psi_2}{\sqrt{2}} \quad (33)$$

a expressão (32) se reescreve como:

$$\begin{aligned} & -i\sqrt{2} W'(\varphi) F + i W'^*(\varphi^*) F^* - 2 W''(\varphi) \bar{\chi} \frac{(1+\sigma_1)}{2} \chi - \\ & - 2 W''^*(\varphi^*) \bar{\chi} \frac{(1-\sigma_1)}{2} \chi \end{aligned} \quad (34)$$

onde $\bar{\chi} = \chi^\dagger \sigma_2$.

As expressões (27) e (34) após integração por partes e eliminação dos campos auxiliares ($F = i\sqrt{2} W'^*$, $F^* = -i\sqrt{2} W'$) dão a densidade de Lagrangeana

$$\begin{aligned} L = & \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \frac{\partial \varphi^\dagger}{\partial x_\nu} + i \bar{\chi} \gamma^\mu \partial_\mu \chi - |W'|^2 - W''(\varphi) \bar{\chi} \frac{(1+\sigma_1)}{2} \chi - \\ & - W''^*(\varphi^*) \bar{\chi} \frac{(1-\sigma_1)}{2} \chi \end{aligned} \quad (35)$$

a qual descreve o modelo de Wess-Zumino a 2 dimensões com $N=2$. De (17) e (26) seguem as seguintes transformações:

$$\begin{aligned} \delta \varphi &= \sqrt{2} \bar{\Psi} \varepsilon \\ \delta \varphi^\dagger &= \sqrt{2} i \bar{\varepsilon} \gamma^\nu \partial_\nu \varphi - \sqrt{2} W'^* \varepsilon^\dagger \\ \delta W'^* &= -i\sqrt{2} \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu (\bar{\varepsilon} \gamma^2)^\dagger \end{aligned} \quad (36)$$

as quais deixam a ação de (35) invariante. É interessante exprimir (35) em termos de formas diferenciais. Para tal consideremos o mapeamento:

$$\gamma^\mu \leftrightarrow dx^\mu \quad (37)$$

Vamos assumir que os nossos férmions sejam descri-

tos pelas formas diferenciais:

$$\begin{aligned}\Psi &= f_0 + f_{12} dx^{12} \\ \Psi^* &= f_0^* + f_{12}^* dx^{12}\end{aligned}\quad (38)$$

onde $dx^{12} = dx^1 \wedge dx^2$; f_0^*, f_{12}^* são os complexos conjugados das variáveis de Grassmann f_0, f_{12} satisfazendo às relações de anticomutação a tempos iguais:

$$\begin{aligned}\{f_0^*(x), f_0(y)\} &= \{f_{12}^*(x), f_{12}(y)\} = \frac{1}{2} \delta(x-y) \\ \{f_0, f_{12}\} &= \{f_0^*, f_{12}^*\} = \{f_0, f_{12}^*\} = \{f_0^*, f_{12}\} = 0\end{aligned}\quad (39)$$

Assumimos que o campo basônico seja descrito pelas formas diferenciais:

$$\Phi = \varphi_\mu dx^\mu, \quad \Phi^* = \varphi_\mu^* dx^\mu \quad (40)$$

com

$$\varphi_\mu = \partial_\mu \varphi, \quad \varphi_\mu^* = \partial_\mu \varphi^* \quad (41)$$

φ^* sendo o complexo conjugado do campo escalar complexo φ .

Vamos propor a seguinte densidade de Lagrangeana:⁽⁹⁾

$$\begin{aligned}L = \int_0 \{ & \Phi^* \vee \Phi + 2i \Psi^* \vee (d - \delta) \vee dx^2 \vee \Psi - W'^* W' - \\ & - i \Psi^* \vee dx^2 \vee \Psi \vee (dx^{12} + 1) \vee dx^2 W'' - i \Psi^* \vee dx^2 \vee \Psi \vee (dx^{12} - 1) \vee dx^2 W'' \} \end{aligned} \quad (42)$$

onde W depende só de φ e W^* só de φ^* , ambas as funções supostas serem zero formas.

$\mathcal{P}_0$ projeta as componentes que são zero forma dos produtos de Clifford acima; $W' = \frac{dW}{d\varphi}$, $W'^* = \frac{dW^*}{d\varphi^*}$, $W''^* = \frac{d^2 W^*}{d\varphi^{*2}}$.

É fácil de se ver que fazendo a identificação

$\chi_1 = f_0 + f_{12}$, $\chi_2 = f_0 - f_{12}$, as quais são as componentes de um spinor no espaço a 2 dimensões, a densidade de lagrangeana (42) corresponde exatamente ao modelo de Wess-Zumino usual dado pela expressão (35). De (42) seguem as equações de Dirac-Kähler:

$$(d-\delta)\Phi = -W''^* W' - i \mathcal{P}_0 \left(\Psi^* \vee dx^2 \vee \Psi \vee (dx^{12} - 1) \vee dx^2 \right) W''^{*+} \quad (43)$$

$$(d-\delta)\Psi' = \frac{1}{2} dx^2 \vee \Psi \vee (dx^{12} + 1) W'' + \frac{1}{2} dx^2 \vee \Psi \vee (dx^{12} - 1) W''^{*+} \quad (44)$$

onde introduzimos $\Psi' = dx^2 \vee \Psi \vee dx^2 = \mathcal{B} \Psi = f_0 - f_{12} dx^{12}$, $\mathcal{B}$ sendo o automorfismo definido na Ref.5.

As equações (44), em componentes, se escrevem:

$$\begin{aligned} (\partial_1 + \partial_2)(f_0 + f_{12}) &= - (f_0 - f_{12}) W''^{*+} \\ (\partial_1 - \partial_2)(f_0 - f_{12}) &= - (f_0 + f_{12}) W''^{*+} \end{aligned} \quad (45)$$

Considere o 1-produto escalar de Kähler⁽⁵⁾ construído a partir das formas diferenciais basônicas e fermiônicas $(\Phi, \Psi')_1$. Fazendo uso de identidade (5):

$$\alpha(\Phi, \Psi')_1 = ((d-\delta)\Phi, \Psi')_0 + (\Phi, (d-\delta)\Psi')_0 \quad (46)$$

segue-se de (43) e (44) que

$$\frac{1}{2} d \left[(\Phi, \Psi)_1 + (\Psi', \Phi)_1 \right] = \left[-W''^* W' f_0 + \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2) (f_0 + f_{12}) W'' + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\psi_1 - \psi_2) (f_0 - f_{12}) W''^* \right] \mathcal{E} \quad (47)$$

onde $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} d\alpha^\mu \wedge d\alpha^\nu$ indica o elemento volume ($\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$).

A densidade da Lagrangeana (42) é invariante sob as transformações duais:

$$\Psi \rightarrow \tilde{\Psi} = \Psi \vee d\alpha^2 \quad (\text{ou } f_0 \leftrightarrow f_{12}), \\ W'' \rightarrow -W'' \quad , \quad W''^* \rightarrow -W''^* \quad , \quad \psi \rightarrow -\psi, \quad \psi^* \rightarrow -\psi^*, \\ W' \rightarrow W' \quad , \quad W'^* \rightarrow W'^* \quad . \quad (48)$$

Obtenho a relação dual de (47) fazendo as substituições (48):

$$\frac{1}{2} d \left[(\widetilde{\Phi}, \Psi)_1 + (\Psi', \widetilde{\Phi})_1 \right] = \left[W''^* W' f_{12} + \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2) (f_0 + f_{12}) W'' - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (\psi_1 - \psi_2) (f_0 - f_{12}) W''^* \right] \mathcal{E} \quad (49)$$

Adicionando as expressões (47) e (49) obtemos:

$$d \left[\frac{1}{2} (\Phi, \Psi)_1 + \frac{1}{2} (\Psi', \Phi)_1 + \frac{1}{2} (\widetilde{\Phi}, \Psi)_1 + \frac{1}{2} (\Psi', \widetilde{\Phi})_1 - \right. \\ \left. - W' (\Psi' - \tilde{\Psi}') \vee d\alpha^2 \right] = 0 \quad (50)$$

Aqui usamos a relação

$$d(W' \tilde{\Phi}' dx^2) - d(W' \tilde{\Phi}' dx^2) = (f_0 + f_{12})(\partial_1 + \partial_2)W' - W' W''^* (f_0 - f_{12}) \quad (51)$$

que pode ser obtida das equações de movimento (45). De (50) segue que temos uma supercorrente com componentes:

$$\begin{aligned} j_1 &= (\psi_1 + \psi_2)(f_0 - f_{12}) + (f_0 + f_{12})W' \\ j_2 &= (\psi_1 + \psi_2)(f_0 - f_{12}) - (f_0 + f_{12})W' \end{aligned} \quad (52)$$

que é conservada.

Se em vez de $\tilde{\Phi}$ em (50) usarmos $\tilde{\Phi}^*$ obteremos do mesmo modo uma supercorrente conservada com componentes:

$$\begin{aligned} j_1' &= (\psi_1^* - \psi_2^*)(f_0 + f_{12}) + (f_0 - f_{12})W'^* \\ j_2' &= -(\psi_1^* - \psi_2^*)(f_0 + f_{12}) + (f_0 - f_{12})W'^* \end{aligned} \quad (53)$$

Os complexos conjugados de (52) e (53) também dão supercorrentes conservadas com componentes $j_1^+, j_2^+, j_1'^+, j_2'^+$. Integrando sobre o espaço as componentes temporais destas correntes iremos obter as cargas correspondentes Q, Q', Q^* e Q'^* , que induzirão nas componentes dos campos as seguintes transformações (após uso das regras de anticomutação em tempos iguais (39) e os comutadores a tempos iguais das variáveis de campo bosônicas), com $\delta\psi = [Q, \psi]$, $\delta f_0 = [Q, f_0]$ etc... Por Q :

$$\begin{aligned} \delta\psi &= 0, \quad \delta\psi^* = -i(f_0 - f_{12}), \\ \delta f_0 &= 0, \quad \delta f_0^* = \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) - \frac{1}{2}W', \\ \delta f_{12} &= 0, \quad \delta f_{12}^* = -\frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) - \frac{1}{2}W'. \end{aligned} \quad (54)$$

Por Q' :

$$\begin{aligned}\delta'\varphi &= -i(f_0 + f_{12}), \quad \delta'\varphi^* = 0, \\ \delta'f_0 &= 0, \quad \delta'f_0^* = -\frac{1}{2}(\varphi_1^* - \varphi_2^*) + \frac{1}{2}W'', \\ \delta'f_{12} &= 0, \quad \delta'f_{12}^* = -\frac{1}{2}(\varphi_1^* - \varphi_2^*) - \frac{1}{2}W''.\end{aligned}\tag{55}$$

Por Q^* :

$$\begin{aligned}\delta^*\varphi &= -i(f_0^* - f_{12}^*), \quad \delta^*\varphi^* = 0, \\ \delta^*f_0 &= \frac{1}{2}(\varphi_1^* + \varphi_2^*) - \frac{1}{2}W'', \quad \delta^*f_0^* = 0, \\ \delta^*f_{12} &= -\frac{1}{2}(\varphi_1^* + \varphi_2^*) - \frac{1}{2}W'', \quad \delta^*f_{12}^* = 0.\end{aligned}\tag{56}$$

Por $Q^{*'} :$

$$\begin{aligned}\delta''\varphi &= 0, \quad \delta''\varphi^* = -i(f_0^* + f_{12}^*), \\ \delta''f_0 &= -\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}W', \quad \delta''f_0^* = 0, \\ \delta''f_{12} &= -\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{1}{2}W', \quad \delta''f_{12}^* = 0.\end{aligned}\tag{57}$$

FORMALISMO HAMILTONIANO NA REDE ESPACIAL

Vamos primeiramente considerar o formalismo Hamiltoniano na rede que consiste em tomar o tempo contínuo e o espaço discreto.

Neste caso substituímos em (42) o operador ∂_1 que comparece na derivada exterior d por Δ_1^+ e por Δ_1^- quando o mesmo operador comparece no adjunto δ .

A densidade da Lagrangeana (42) se reescreve então como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & \partial_2 \psi^* \partial_2 \psi - \Delta_1^+ \psi^* \Delta_1^+ \psi + 2i f_0^* (\partial_2 f_0 + \Delta_1^- f_{12}) + 2i f_{12}^* (\Delta_1^+ f_0 + \partial_2 f_{12}) \\ & - W'^* W' - i [f_0^* f_0 - f_{12}^* f_{12} + f_0^* f_{12} - f_{12}^* f_0] W'' + \\ & + i [-f_0^* f_{12} + f_{12}^* f_0 + f_0^* f_0 - f_{12}^* f_{12}] W''^* \end{aligned} \quad (58)$$

AS equações de movimento correspondentes são:

$$\partial_2 f_0 + \Delta_1^- f_{12} = \frac{1}{2} [(f_0 + f_{12}) W'' - (f_0 - f_{12}) W''^*] \quad (59.a)$$

$$\Delta_1^+ f_0 + \partial_2 f_{12} = \frac{1}{2} [-(f_0 + f_{12}) W'' - (f_0 - f_{12}) W''^*] \quad (59.b)$$

$$\partial_2 f_0^* + \Delta_1^- f_{12}^* = \frac{1}{2} [-(f_0^* - f_{12}^*) W'' + (f_0^* + f_{12}^*) W''^*] \quad (59.c)$$

$$\Delta_1^+ f_0^* + \partial_2 f_{12}^* = \frac{1}{2} [-(f_0^* - f_{12}^*) W'' - (f_0^* + f_{12}^*) W''^*] \quad (59.d)$$

$$\partial_2^2 \psi^* - \Delta_1^- \Delta_1^+ \psi^* = -W'^* W'' - i [\quad] W''' \quad (59.e)$$

$$\partial_2^2 \varphi - \Delta_1^- \Delta_2^+ \varphi = -W''^* W' + i [\quad] W'''^* \quad (59.f)$$

onde o $[\quad]$ que multiplica W''' em (59.e) é o mesmo que multiplica W'' na expressão (58). Correspondentemente o $[\quad]$ que multiplica W'''^* em (59.f) é o mesmo que multiplica W''^* em (58).

As supertransformações que correspondem a Q, Q', Q^+ e Q'^* no espaço discreto serão definidas por (54), (55), (56) e (57) respectivamente, onde fazemos as substituições $\varphi_1 \rightarrow \delta_1^+ \varphi$ (quando multiplicado por f_{12}) e $\varphi_1 \rightarrow \Delta_1^- \varphi$ (quando multiplicado por f_0). Não é difícil verificar que as equações (59.a) e (59.f), no caso livre, não apresentam a degenerescência da energia.

Para se estudar as propriedades de transformação de ação (58) e a Hamiltoniana correspondente sob as supertransformações definidas acima, as expressões $[\quad] W''$ e $[\quad] W''^*$ que aparecem em (58) devem ser tomadas simetricamente, isto é, $\frac{1}{2} [\quad] W'' + \frac{1}{2} W'' [\quad]$ e $\frac{1}{2} [\quad] W''^* + \frac{1}{2} W''^* [\quad]$. Nas equações (59.e) e (59.f) devemos fazer a simetrização correspondente.

A densidade da Lagrangeana (58) dá como Hamiltoniana:

$$H = \sum_x \mathcal{H} = \sum_x \mathcal{H}_B + \sum_x \mathcal{H}_F \quad (60)$$

onde a soma se estende sobre os pontos da rede espacial e onde:

$$\mathcal{H}_B = (\Delta_1^\dagger A)^2 + (\partial_2 A)^2 + (\Delta_1^\dagger B)^2 + (\partial_2 B)^2 + U^2 + V^2 \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_F = & -4i\alpha_0\Delta_1^-\alpha_{12} - 4i\beta_0\Delta_1^-\beta_{12} + 4i\frac{\delta U}{\delta A}\alpha_0\alpha_{12} \\ & - 4i\frac{\delta V}{\delta A}\alpha_0\beta_0 + 4i\frac{\delta U}{\delta B}\beta_{12}\alpha_{12} - 4i\frac{\delta V}{\delta B}\beta_{12}\beta_0 \end{aligned} \quad (62)$$

aqui foram utilizadas as definições:

$$\begin{aligned} \varphi = A + iB, \quad f_0 = \alpha_0 + i\beta_0, \quad f_{12} = \alpha_{12} + i\beta_{12}, \quad W' = U + iV, \\ \varphi^* = A - iB, \quad f_0^* = \alpha_0 - i\beta_0, \quad f_{12}^* = \alpha_{12} - i\beta_{12}, \quad W'^* = U - iV. \end{aligned} \quad (63)$$

A Hamiltoniana (60) não é invariante pelas supertransformações na rede que foram definidas atrás a partir de (54), (55), (56) e (57) por discretização. Aparecem diferentes termos de superfície espacial. Separando as supercargas Q, Q', Q^*, Q'^* em suas partes real e imaginária: $Q = Q_1 + iQ_2$, $Q' = Q'_1 + iQ'_2$, e definindo $q_1 = Q_1 + Q'_1, q_2 = Q_2 + Q'_2, q_3 = Q_1 - Q'_1, q_4 = Q_2 - Q'_2$ é possível mostrar que⁽⁹⁾:

$$2q_1^2 = 2q_2^2 = \sum_x (\mathcal{H} + U\Delta_1^\dagger A - V\Delta_1^- B), \quad (64.a)$$

$$2q_3^2 = 2q_4^2 = \sum_x (\mathcal{H} - U\Delta_1^- A + V\Delta_1^\dagger B). \quad (64.b)$$

Nas expressões (64) temos duas diferentes classes de Hamiltoniana na rede espacial, diferindo por termos superficiais na rede. Ao fazermos o limite de espaço contínuo estas Hamiltonianas coincidem.

Na rede espacial vale :

$$\begin{aligned} \{q_1, q_4\} &= -\{q_2, q_3\} = \sum_x [V(x) \Delta_1^s A(x) + U(x) \Delta_1^s B(x)] \\ &= -\frac{1}{2} i \sum_x (W' \Delta_1^s \varphi - W'' \Delta_1^s \varphi^*), \end{aligned} \quad (65)$$

o segundo membro indo para zero no limite do espaço contínuo. Neste caso vale também:

$$\{q_1, q_3\} = \{q_2, q_4\} = \mathbb{P} \quad (66)$$

onde $\mathbb{P}$ é o operador momento do sistema. No espaço-tempo contínuo, introduzindo $Q_1' = q_1 - q_3$, $Q_2' = q_1 + q_3$, $Q_1^2 = q_2 - q_4$, $Q_2^2 = q_2 + q_4$, (64), (65) e (66) darão:

$$\{Q_\alpha^a, Q_\beta^b\} = 2\delta^{ab}(\delta_{\alpha\beta}H - (\sigma_3)_{\alpha\beta}P), \quad (67)$$

$a, b = 1, 2$, $\alpha, \beta = 1, 2$. Também pode-se construir na rede espacial⁽⁶⁾ o operador:

$$T = \sum_x [\alpha_0(x)\beta_0(x) + \alpha_{12}(x)\beta_{12}(x)]. \quad (68)$$

É simples de se ver que valem:

$$[T, q_1] = -q_2, \quad [T, q_2] = q_1 \quad (69)$$

e portanto T é o gerador de um grupo O_2 no espaço (q_1, q_2) . Semelhantemente T é também um gerador de um grupo O_2 no espaço (q_3, q_4) , pois $[T, q_3] = -q_4$ e $[T, q_4] = q_3$. Portanto as duas classes (q_1, q_2) e (q_3, q_4) estão em pé de igualdade embora na rede espacial não possamos considerá-los simultaneamente devido a (65) e (66).

Como T faz as trocas $\alpha_0 \rightarrow \beta_0$, $\beta_0 \rightarrow -\alpha_0$, $\alpha_{12} \rightarrow \beta_{12}$ e $\beta_{12} \rightarrow -\alpha_{12}$ vemos que as Hamiltonianas (64.a) e (64.b) são mantidas invariantes por esse operador.

FORMALISMO LAGRANGEANO NA REDE ESPAÇO-TEMPORAL

Afim de fazemos o tratamento do modelo de Wess-Zu mino na rede espaço-temporal devemos primeiramente reescrever a densidade de Lagrangeano(42) no espaço Euclideano:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_E = \mathcal{P}_0 [& \Phi^* \nabla \Phi + W'^* W' + 2\Psi^* \nabla (d - \delta) dx^2 \nabla \Psi \\ & + \Psi^* \nabla dx^2 \nabla \Psi \nabla (1 - i dx'^2) \nabla dx^2 W'' \\ & + \Psi^* \nabla dx^2 \nabla \Psi \nabla (1 + i dx'^2) \nabla dx^2 W''^*] . \end{aligned} \quad (70)$$

Agora o mapeamento(37) corresponde à escolha das seguintes matrizes euclidianas: $\gamma^2 = \sigma_2$, $\gamma^1 = \sigma_1$.

Para se fazer a passagem à rede espaço-temporal usamos o seguinte procedimento simplificador: em(70) fazemos todos os produtos de Clifford no contínuo e então substituímos $(d - \delta)$ por $(\check{D} - \check{\nabla})$. Desta maneira obtemos a seguinte ação euclideana definida no espaço-tempo:

$$\begin{aligned} S_E = \sum_{x_1, x_2} \{ & \Delta_\mu^+ \varphi^* \Delta_\mu^+ \varphi + W'^* W' \\ & + 2f_0^* (-\Delta_1^- f_{12} + \Delta_2^- f_0) + 2f_{12}^* (\Delta_1^+ f_0 + \Delta_2^+ f_{12}) \\ & + [f_0^* f_0 - f_{12}^* f_{12} + i f_0^* f_{12} + i f_{12}^* f_0] W'' \\ & + [f_0^* f_0 - f_{12}^* f_{12} - i f_0^* f_{12} - i f_{12}^* f_0] W''^* \} . \end{aligned} \quad (71)$$

Para se obter a versão euclideana das transformações de supersimetria na rede (54), (55), (56) e (57) vamos primeiramente transcreve-las na métrica euclideana fazendo as

substituições $\partial_2 \rightarrow -\partial_2$, $f_{12} \rightarrow i f_{12}$, $W' \rightarrow i W'$,
 $f_{12}^* \rightarrow -i f_{12}^*$, $W'^* \rightarrow -i W'^*$. Em seguida impomos
 que a parte livre de (71) seja invariante (com $W' = W'' = 0$).
 Este procedimento leva às seguintes transformações de supersi-
 métria:

$$\begin{aligned} \delta \varphi^* &= i(f_0 - i f_{12}), \quad \delta f_0^* = \frac{1}{2}(\Delta_1^- - i \Delta_2^-) \varphi - \frac{1}{2} i W', \\ \delta f_{12}^* &= -\frac{1}{2} i (\Delta_1^+ - i \Delta_2^+) \varphi + \frac{1}{2} W'; \end{aligned} \quad (54')$$

$$\begin{aligned} \delta' \varphi &= i(f_0 + i f_{12}), \quad \delta' f_0^* = -\frac{1}{2}(\Delta_1^- + i \Delta_2^-) \varphi^* - \frac{1}{2} i W'^*, \\ \delta' f_{12}^* &= -\frac{1}{2} i (\Delta_1^+ + i \Delta_2^+) \varphi^* - \frac{1}{2} W'^*; \end{aligned} \quad (55')$$

$$\begin{aligned} \delta^* \varphi &= i(f_0^* + i f_{12}^*), \quad \delta^* f_0 = \frac{1}{2}(\Delta_1^- - i \Delta_2^+) \varphi^* + \frac{1}{2} i W'^2, \\ \delta^* f_{12} &= \frac{1}{2} i (\Delta_1^+ - i \Delta_2^-) \varphi^* + \frac{1}{2} W'^*; \end{aligned} \quad (56')$$

$$\begin{aligned} \delta'' \varphi^* &= i(f_0^* - i f_{12}^*), \quad \delta'' f_0 = -\frac{1}{2}(\Delta_1^- + i \Delta_2^+) \varphi + \frac{1}{2} i W', \\ \delta'' f_{12} &= \frac{1}{2} i (\Delta_1^+ + i \Delta_2^-) \varphi - \frac{1}{2} W'; \end{aligned} \quad (57')$$

onde só escrevemos os termos que não são nulos. Devido a pre-
 sença da interação, esta invariância não é mantida para toda
 a expressão (71). Entretanto, se considerarmos o par de trans-
 formações $\delta_+ = \delta + \delta'$ e $\delta_- = \delta^* + \delta'^*$, é fácil de se
 construir a partir de (71) as duas diferentes ações:

$$S_{\pm} = S_E + \sum_{x_1, x_2} \{ i W'^* [(-\Delta_1^+ + i\Delta_2^+) \varphi + (-\Delta_1^+ \mp i\Delta_2^+) \varphi^*] + i W' [(\Delta_1^+ + i\Delta_2^+) \varphi^* + (\Delta_1^+ \mp i\Delta_2^+) \varphi] \} \quad (72)$$

com $\Delta_{\pm}^{\pm} = \frac{1}{2} (\Delta_{\pm}^+ \pm \Delta_{\pm}^-)$. As transformações correspondentes, que deixam invariantes S_+ e S_- , são respectivamente:

$$\begin{aligned} \delta_+ \varphi^* &= i(f_0 - i f_{12}), \quad \delta_+ \varphi = i(f_0 + i f_{12}) \\ \delta_+ f_0^* &= \frac{1}{2} [(\Delta_1^- - i\Delta_2^-) \varphi - (\Delta_1^- + i\Delta_2^-) \varphi^*] \\ &\quad - \frac{i}{2} (W' + W'^*) \\ \delta_+ f_0 &= \delta_+ f_{12} = 0 \\ \delta_+ f_{12}^* &= -\frac{i}{2} [(\Delta_1^+ - i\Delta_2^+) \varphi + (\Delta_1^+ + i\Delta_2^+) \varphi^*] \\ &\quad + \frac{1}{2} (W' - W'^*) \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \delta_- \varphi^* &= i(f_0^* + i f_{12}^*), \quad \delta_- \varphi = i(f_0^* - i f_{12}^*) \\ \delta_- f_0^* &= \frac{1}{2} [(\Delta_1^- - i\Delta_2^-) \varphi^* - (\Delta_1^- + i\Delta_2^-) \varphi] \\ &\quad + \frac{i}{2} (W' + W'^*) \\ \delta_- f_0 &= \delta_- f_{12}^* = 0 \\ \delta_- f_{12} &= \frac{i}{2} [(\Delta_1^+ - i\Delta_2^+) \varphi^* + (\Delta_1^+ + i\Delta_2^+) \varphi] \\ &\quad - \frac{1}{2} (W' - W'^*) \end{aligned} \quad (74)$$

No limite de espaçamento nulo obtemos a ação correta para o modelo de Wess-Zumino a 2 dimensões com $N=2$. A partir de (73) e (74) é fácil de se ver que δ_+ e δ_- satisfazem à seguinte álgebra na concha de massa:

$$(\delta_+ \delta_- + \delta_- \delta_+) \chi = 2 \Delta_2^s \chi \quad (75)$$

onde $\chi = \psi, \psi^*, f_0, f_0^*, f_{12}, f_{12}^*$. A expressão (75) foi obtida usando as equações de movimento para os férmions, que são as mesmas para S_+ e S_- . No caso dos bósons, para os quais S_+ e S_- dão equações de movimento diferentes, a expressão (75) vale como uma identidade. No limite do contínuo temos a relação $\{Q, Q^+\} \sim H$. Como discretizamos a direção temporal, esta última relação não vale mais e emergem duas ações diferentes.

Como S_+ e S_- são respectivamente invariantes pelas transformações (73) e (74) podemos obter correntes conservadas através do uso do teorema de Noether adaptado à rede⁽¹⁵⁾. No nosso exemplo simples, esse Teorema afirma que se a densidade de Lagrangeana for de forma $\mathcal{L}(A, \Delta_\mu^+ A, \Delta_\mu^- A)$, onde A é um campo qualquer, então após o uso das equações de Euler-Lagrange⁽¹⁵⁾ obteremos:

$$\delta \mathcal{L} = \Delta_\mu^- K_\mu = \Delta_\mu^- \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}(x+e^\mu)}{\delta(\Delta_\mu^- A(x))} \delta A(x) + \frac{\delta \mathcal{L}(x)}{\delta(\Delta_\mu^+ A(x))} \delta A(x+e^\mu) \right\} \quad (76)$$

Se $\delta \mathcal{L} = \Delta_\mu^- \Omega_\mu$ então $\Delta_\mu^- \eta_\mu = \Delta_\mu^- (K_\mu - \Omega_\mu) = 0$ e obtemos uma corrente conservada η_μ .

Desta maneira, a partir das transformações (79) em S_+ obtemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_{1+} = & f_{12}(x)\Delta_1^+ \varphi(x) + f_0(x+e_1)\Delta_2^+ \varphi(x) \\
 & - f_{12}(x)\Delta_1^+ \varphi^*(x) - f_0(x+e_1)\Delta_2^+ \varphi^*(x) \\
 & - if_{12}(x)\Delta_2^- \varphi(x+e_1) + if_0(x+e_1)\Delta_1^+ \varphi(x) \\
 & - if_{12}(x)\Delta_2^- \varphi^*(x+e_1) + if_0(x+e_1)\Delta_1^+ \varphi^*(x) \\
 & - f_0(x+e_1)W'(x) - if_{12}(x)W'(x+e_1) \\
 & + f_0(x+e_1)W'^*(x) - if_{12}(x)W'^*(x+e_1)
 \end{aligned} \tag{77.a}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_{2+} = & -f_0(x)\Delta_1^- \varphi(x+e_2) + f_{12}(x+e_2)\Delta_2^+ \varphi(x) \\
 & + f_0(x)\Delta_1^- \varphi^*(x+e_2) - f_{12}(x+e_2)\Delta_2^+ \varphi^*(x) \\
 & + if_0(x)\Delta_2^+ \varphi(x) + if_{12}(x+e_2)\Delta_1^+ \varphi(x) \\
 & + if_0(x)\Delta_2^+ \varphi^*(x) + if_{12}(x+e_2)\Delta_1^+ \varphi^*(x) \\
 & - f_{12}(x+e_2)W'(x) + if_0(x)W'(x+e_2) \\
 & + f_{12}(x+e_2)W'^*(x) + if_0(x)W'^*(x+e_2)
 \end{aligned} \tag{77.b}$$

O mesmo procedimento para $\mathcal{J}_-$, com as transformações (74), dá:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_{1-} = & -f_0^*(x+e_1)\Delta_2^- \varphi^*(x) + f_{12}^*(x)\Delta_1^+ \varphi^*(x) \\
 & - if_{12}^*(x)\Delta_2^+ \varphi^*(x+e_1) + f_0^*(x+e_1)\Delta_2^- \varphi(x) \\
 & - f_{12}^*(x)\Delta_1^+ \varphi(x) - if_{12}^*(x)\Delta_2^+ \varphi(x+e_1) \\
 & - if_0^*(x+e_1)\Delta_1^+ \varphi^*(x) - if_0^*(x+e_1)\Delta_1^+ \varphi(x) \\
 & + f_0^*(x+e_1)W'(x) - f_0^*(x+e_1)W'^*(x) \\
 & + if_{12}^*(x)W'(x+e_1) + if_{12}^*(x)W'^*(x+e_1)
 \end{aligned} \tag{78.a}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_{2-} = & i f_{12}^*(x) \Delta_1^+ \varphi^*(x + e_2) + f_{12}^*(x) \Delta_2^+ \varphi^*(x) \\
 & + f_0^*(x + e_2) \Delta_1^- \varphi^*(x) - f_0^*(x + e_2) \Delta_1^- \varphi(x) \\
 & + i f_{12}^*(x) \Delta_1^+ \varphi(x + e_2) - f_{12}^*(x) \Delta_2^+ \varphi(x) \\
 & - i \Delta_2^+ \varphi^*(x) f_0^*(x + e_2) - i f_0^*(x + e_2) \Delta_2^+ \varphi(x) \\
 & + i f_0^*(x + e_2) W'(x) + i f_0^*(x + e_2) W'^*(x) \\
 & - f_{12}^*(x) W'(x + e_2) + f_{12}^*(x) W'^*(x + e_2)
 \end{aligned} \tag{78.b}$$

Pode-se verificar diretamente que $\Delta_\mu^- \int_{\mu^+} = \Delta_\mu^- \int_{\mu^-} = 0$ seguem das equações de movimento derivadas de S_+ e S_- dadas pela expressão (72).

SOBRE O TRATAMENTO DO MODELO DE WESS-ZUMINO NA LINGUAGEM DAS
FORMAS DIFERENCIAIS

Em analogia com (38), os spinores ξ e θ são descritos pelas formas diferenciais:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 + \xi_{12} dx^{12} \\ \theta &= \theta_0 + \theta_{12} dx^{12}\end{aligned}\tag{79}$$

onde ξ_0, ξ_{12} e θ_0, θ_{12} são quantidades de Grassmann anticomutantes. Sando o mapeamento (37) podemos associar a (79) os spinores $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ e $\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$ através das relações:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi_0 - \xi_{12}, & \theta_1 &= \theta_0 - \theta_{12} \\ \xi_2 &= \xi_0 + \xi_{12}, & \theta_2 &= \theta_0 + \theta_{12}\end{aligned}\tag{80}$$

na representação $\gamma^1 = i\sigma_1$, $\gamma^2 = \sigma_2$. As translações (15) podem ser reescritas em forma diferencial como:

$$\begin{aligned}\delta\theta &= \epsilon, & \delta\bar{\theta} &= \bar{\epsilon} \\ \delta x^\mu &= 2i\mathcal{P}_0(\bar{\epsilon} \vee dx^\mu \vee \theta - \bar{\theta} \vee dx^\mu \vee \epsilon) \\ &= i(\bar{\epsilon} \vee dx^\mu \vee \theta - \bar{\theta} \vee dx^\mu \vee \epsilon \\ &\quad + (\mathcal{B}\epsilon^\dagger) \vee dx^\mu \vee dx^2 \vee (\mathcal{B}\theta) \\ &\quad - (\mathcal{B}\theta^\dagger) \vee dx^\mu \vee dx^2 \vee (\mathcal{B}\epsilon))\end{aligned}\tag{81}$$

onde $\bar{\xi} = \xi^\dagger \vee dx^2$, $\bar{\theta} = \theta^\dagger \vee dx^2$, $\xi^\dagger = \xi_0 + \xi_{12}^\dagger dx^{12}$, $\theta^\dagger = \theta_0^\dagger + \theta_{12}^\dagger dx^{12}$,

$\mathcal{B}$ é o antiautomorfismo definido atrás;

$\mathcal{P}_0$ é o operador de projeção em zero-formas.

A expressão (20) pode-se reescrever como uma zero-forma:

$$x_{\pm}^{\nu} = x^{\nu} \pm i \left(\bar{\theta}_{\nu} dx^{\nu} \vee \theta + (\beta \theta^{\dagger})_{\nu} dx^{\nu} \vee \theta \vee dx^2 \right) \quad (82)$$

enquanto que os supercampos se reescrevem como:

$$\begin{aligned} \Phi(x_{+}) = & \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(x_{+}) \\ & + i(\bar{\psi}(x_{+}) \vee \theta \vee dx^2 + \theta \vee dx^2 \vee \bar{\psi}(x_{+})) \\ & \vee dx^{12} - F(x_{+}) \theta \vee dx^2 \vee \theta \vee dx^2 \vee dx^{12} \end{aligned} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} \Phi(x_{-}) = & \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi^{*}(x_{-}) + i(\bar{\theta} \vee \psi(x_{-}) \\ & \vee dx^2 + \psi(x_{-}) \vee dx^2 \vee \bar{\theta}) \vee dx^{12} \\ & + F^{*}(x_{-}) \theta^{\dagger} \vee dx^2 \vee \theta^{\dagger} \vee dx^2 \vee dx^{12} \end{aligned} \quad (84)$$

Calculando $\Phi(x_{+}) \vee \bar{\Phi}(x_{-})$ e considerando só aqueles termos com $\theta_0 \theta_{12} \theta_0^{\dagger} \theta_{12}^{\dagger}$, obtemos, após integrações por partes:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \Phi(x_{+}) \vee \bar{\Phi}(x_{-})|_{\theta_0 \theta_{12} \theta_0^{\dagger} \theta_{12}^{\dagger}} \\ & = \{2(d - \delta) \varphi^{*} \vee (d - \delta) \varphi + FF^{*} \\ & \quad + 2i[\psi^{\dagger}(x) \vee dx^2 \vee (d - \delta) \psi(x) \\ & \quad + \beta(\psi^{\dagger}(x) \vee dx^2 \vee (d - \delta) \psi(x))]\} \end{aligned} \quad (85)$$

que reproduz a expressão (42) e à veremos de um Bautiantomorfismo do campo fermiônico. Não há dificuldade em introduzir a interação. As transformações (36) podem ser escritas na se-

guinte forma diferencial:

$$\begin{aligned}\delta\psi'(x) &= -\sqrt{2}(d-\delta)(\varphi(x)dx^1) \vee (\mathcal{B}\epsilon^1) \\ \delta\varphi(x) &= i\sqrt{2}[\psi' \vee (\mathcal{B}\epsilon) - (\mathcal{B}\psi') \vee \epsilon] \vee dx^{12}\end{aligned}\quad (86)$$

Indo para a rede $(d-\delta) \rightarrow (\check{\Delta}-\check{\nabla})$ podemos deduzir de (86) a seguinte versão discretizada da transformação de supersimetria (no espaço-tempo euclidiano):

$$\begin{aligned}\delta f'_0(x) &= -\sqrt{2}[-\Delta_1^- \varphi(x)\epsilon'_0 - i\Delta_2^- \varphi(x)\epsilon'_{12}] \\ \delta f'_{12}(x) &= i\sqrt{2}[i\Delta_2^+ \varphi(x)\epsilon'_0 + \Delta_1^+ \varphi(x)\epsilon'_{12}]\end{aligned}\quad (87)$$

onde em (86) fizemos primeiramente todos os produtos de Clifford no contínuo e depois aplicamos o operador $(\check{\Delta}-\check{\nabla})$.

Para $\xi_0^+ = -\xi_{12}^+$ reproduzimos a transformação de supersimetria (54') (levando em conta que se deve substituir Ψ por $\mathcal{B}\Psi$).

Em analogia às expressões (19) posso introduzir as derivadas covariantes supersimétricas como formas diferenciais (0,2):

$$\begin{aligned}D &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta^1} - i dx^2 \vee (d-\delta)\theta \\ \bar{D} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta} + i\theta^1 \vee dx^2 \vee (d-\delta)\end{aligned}\quad (88)$$

O significado de $\frac{\partial}{\partial\theta}$ é dado por:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta} \vee \theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_0} + \frac{\partial}{\partial\theta_{12}}dx^{12}\right) \vee (\theta_0 + \theta_{12}dx^{12}) = 1 \quad (89)$$

Semelhantemente para $\frac{\partial}{\partial\theta^+}$. Pode-se então mostrar

que $D_V x^\nu = \bar{D}_V x^\nu = 0$ com x^ν definidos em (82).
A álgebra supersimétrica para estas derivadas covariantes se escreve:

$$\begin{aligned} \{D, D\}_V &= \{\bar{D}, \bar{D}\}_V = 0 \\ \{D, \bar{D}\}_V &= 2i d x^2_V (d - \delta) \end{aligned} \quad (90)$$

onde $\{A, B\}_V = A_V B + B_V A$. Para uma discussão um pouco mais completa do formalismo de superespaço dentro do quadro de Dirac-Kähler veja Ref. (20).

O MAPEAMENTO DE NICOLAI NA REDE

Como já observamos, a discretização que aparece nas transformações (73) e (74) é determinada somente pela parte fermiônica livre de (72). Isto sugere que deve existir um mapeamento de Nicolai que transforme a parte basônica de (72) numa ação gaussiana livre uma vez que o Jacobiano deste mapeamento é fixado pela forma do determinante fermiônico.

Veremos agora que este é o caso.

Introduzindo as componentes spinorais:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= f_0 + i f_{12} \quad , \quad \chi_2 = f_0 - i f_{12} \quad , \\ \chi_1^* &= f_0^* - i f_{12}^* \quad , \quad \chi_2^* = f_0^* + i f_{12}^* \quad , \end{aligned} \quad (91)$$

a parte fermiônica de SE em (71) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} S_E^f = \sum_{x_1, x_2} \left\{ \bar{\chi}(x) \gamma^2 \Delta_2^s \chi(x) + \bar{\chi}(x) \gamma^1 \Delta_1^s \chi(x) \right. \\ \left. - \bar{\chi}(x) \Delta_2^A \chi(x) - i \bar{\chi}(x) \sigma_3 \Delta_1^A \chi(x) \right. \\ \left. + \bar{\chi}(x) \frac{(1 + \sigma_3)}{2} \chi(x) W'' \right. \\ \left. + \bar{\chi}(x) \frac{(1 - \sigma_3)}{2} \chi(x) W''^* \right\} \end{aligned} \quad (92)$$

com $\bar{\chi} = \chi^\dagger \gamma^2$, $\gamma^2 = \sigma_1$, $\gamma^1 = \sigma_2$. Podemos reescrever (92) na forma:

$$S_E^f = \sum_{x_1, x_2} \bar{\chi}(x) \dot{D}(\psi, \psi^*) \chi(x) \quad (93)$$

$$D = \left\{ \gamma^2 \Delta_2^s + \gamma^1 \Delta_1^s - \Delta_2^A - i\sigma_3 \Delta_1^A + \frac{1+\sigma_3}{2} W'' + \frac{1-\sigma_3}{2} W''^* \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} -\Delta_2^A - i\Delta_1^A + W'' & \Delta_2^s - i\Delta_1^s \\ \Delta_2^s + i\Delta_1^s & -\Delta_2^A + i\Delta_1^A + W''^* \end{pmatrix} \quad (94)$$

Seguindo Cecotti e Girardello⁽¹¹⁾ identificamos $\gamma^2 D$ com o Jacobiano funcional:

$$J = \gamma^2 D = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} & \frac{\partial \xi}{\partial \varphi^*} \\ \frac{\partial \xi^*}{\partial \varphi} & \frac{\partial \xi^*}{\partial \varphi^*} \end{pmatrix} \quad (95)$$

Comparando (94) e (95) obtemos:

$$\begin{aligned} \xi &= (\Delta_2^s + i\Delta_1^s)\varphi + (-\Delta_2^A + i\Delta_1^A)\varphi^* + W''(\varphi^*) \\ \xi^* &= (-\Delta_2^A - i\Delta_1^A)\varphi + (\Delta_2^s - i\Delta_1^s)\varphi^* + W''(\varphi) \end{aligned} \quad (96)$$

Não é difícil ver que:

$$\begin{aligned} & \sum_{x_1, x_2} \xi^*(x) \xi(x) \\ &= \sum_{x_1, x_2} \{ (\Delta_2^s + i\Delta_1^s)\varphi(x) \cdot W''(\varphi) \\ & \quad + (-\Delta_2^A + i\Delta_1^A)\varphi^*(x) \cdot W''(\varphi) \\ & \quad + (-\Delta_2^A - i\Delta_1^A)\varphi(x) \cdot W''^*(\varphi^*) + W' W''^* \\ & \quad + W''^*(\varphi^*)(\Delta_2^s - i\Delta_1^s)\varphi^* \\ & \quad + (\Delta_2^s + i\Delta_1^s)\varphi(x)(\Delta_2^s - i\Delta_1^s)\varphi^*(x) \\ & \quad + (-\Delta_2^A + i\Delta_1^A)\varphi^*(x)(-\Delta_2^A - i\Delta_1^A)\varphi(x) \\ & \quad + (\Delta_2^s + i\Delta_1^s)\varphi(x)(-\Delta_2^A - i\Delta_1^A)\varphi(x) \\ & \quad + (-\Delta_2^A + i\Delta_1^A)\varphi^*(x)(\Delta_2^s - i\Delta_1^s)\varphi^*(x) \} \end{aligned} \quad (97)$$

Após uma integração por partes (na rede), os últimos dois termos desaparecem e o resto reproduz exatamente a parte basônica de S_+ dada em (72).

Observe-se que S_+ dado em (71) é invariante sob as transformações de reflexão "temporais":

$$\begin{aligned} f_0(x) &\leftrightarrow f_0^*(x) & , & \quad f_{12}(x) \leftrightarrow -f_{12}^*(x) \\ \Delta_1^\pm &\rightarrow \Delta_1^\mp & , & \quad \Delta_2^\pm \rightarrow \Delta_2^\mp \\ \varphi(x) &\leftrightarrow \varphi^*(x) & , & \quad W''(x) \leftrightarrow -W''^*(x) . \end{aligned} \quad (98)$$

Isto sugere considerar também as expressões obtidas de (96) através das transformações (98):

$$\begin{aligned} \zeta &\rightarrow \zeta' = (\Delta_2^S + i\Delta_1^S)\varphi^* + (\Delta_2^A + i\Delta_1^A)\varphi - W'(\varphi) \\ \zeta^* &\rightarrow \zeta'^* = (\Delta_2^A - i\Delta_1^A)\varphi^* + (\Delta_2^S - i\Delta_1^S)\varphi - W'^*(\varphi^*) \end{aligned} \quad (99)$$

Segue que $\sum_{x_1, x_2} \zeta'^* \zeta'$ reproduz a parte basônica na expressão (72). E de fato S_+ se transforma em S_- pela transformação (98).

Portanto o mapeamento de Nicolai funciona na rede espaço-temporal dando lugar a ações na rede que foram derivadas admitindo só a invariância por transformações de supersimetria. Este resultado já tinha sido indicado na Ref. (7).

Recentemente Oshima⁽²³⁾ aplicou o mapeamento de Nicolai a um modelo especial para férmions de Susskind e reproduziu os nossos resultados.

CAPÍTULO 3

O MODELO DE YANG-MILLS SUPERSIMÉTRICO COM N=4 A QUATRO DIMENSÕES FORMULADO NA REDE ESPACIAL

O modelo de Yang-Mills supersimétrico com N=4 a quatro dimensões é interessante pelo fato de Mandelstam ⁽²⁴⁾, Brink et.al. ⁽²⁵⁾ e Nomazie et.al. ⁽²⁶⁾ terem demonstrado que ele é finito em todas as ordens de teoria das perturbações.

O interesse de desenvolver este modelo na rede prende-se ao fato de se poder fazer um tratamento não perturbativo do mesmo e tentar verificar se a finitude do modelo ainda permanece.

Abordaremos o problema utilizando o enfoque de Elitzur et.al. ⁽⁴⁾ trabalhando com a parte da álgebra supersimétrica que contém só a Hamiltoniana:

$$Q^2 = H \quad (1)$$

Isto significa que consideraremos só a rede espacial com a coordenada temporal sendo mantida contínua.

Vamos assumir que o campo fermiônico seja descrito pela forma diferencial:

$$\Psi = C_0 + i A_\mu dx^\mu - C_i dx^0 \wedge dx^i - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} D_k dx^i \wedge dx^j - B_\mu dx^\mu \wedge \varepsilon - D_0 \varepsilon \quad (2)$$

onde ε é o elemento de volume: $\varepsilon = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ e

$\mu, \nu, \kappa = 1, 2, 3$. Os campos $C_0(x), A_\mu(x)$ são tomados reais.

Ao considerarmos o mapeamento $dx^\mu \leftrightarrow \gamma^\mu$, tomaremos para os γ^μ a representação de Weyl:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

onde os σ^i são as matrizes de Pauli ($i=1, 2, 3$).

Desse modo podemos estabelecer naturalmente a seguinte correspondência entre os quatro spinores de Weyl esquerdos e as componentes dadas na expressão (2):

$$\chi^{(i)} = \begin{pmatrix} \chi_1^{(i)} \\ \chi_2^{(i)} \end{pmatrix} \quad (4)$$

com:

$$\begin{aligned} \chi_1^{(1)} &= C_0 - iD_0 - C_3 + iD_3, & \chi_1^{(2)} &= -C_1 + iD_1 + iC_2 + D_2, \\ \chi_2^{(1)} &= -C_1 + iD_1 - iC_2 - D_2, & \chi_2^{(2)} &= C_0 - iD_0 + C_3 - iD_3, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \chi_1^{(3)} &= iA_0 + B_0 - iA_3 - B_3, & \chi_1^{(4)} &= -iA_1 - B_1 - A_2 + iB_2, \\ \chi_2^{(3)} &= -iA_1 - B_1 + A_2 - iB_2, & \chi_2^{(4)} &= iA_0 + B_0 + iA_3 + B_3. \end{aligned} \quad (5')$$

Dessa maneira estabelecemos uma conexão com a formulação de um modelo $N=4$ supersimétrico de Yang-Mills com uma estrutura $SU_4^{(27)}$. Neste formalismo os campos escalares são descritos por um sexteto ϕ_{pn} de SU_4 com a condição:

$$\phi^{pn a} = \frac{1}{2} \varepsilon^{pnst} \phi_{st}^a = (\phi_{pn}^a)^* \quad p, n, s, t = 1, 2, 3, 4. \quad (6)$$

"a" sendo um índice de um grupo de calibre não abeliano SU_m .

Vamos agora introduzir os seguintes campos:

$$\begin{aligned} P_1 &= \phi^{13} + \phi^{13*}, & S_0 &= i(\phi^{32} - \phi^{32*}), \\ P_2 &= -i(\phi^{13} - \phi^{13*}), & S &= \phi^{43} + \phi^{43*}, \\ P_3 &= \phi^{32} + \phi^{32*}, & S_5 &= i(\phi^{43} - \phi^{43*}). \end{aligned} \quad (7)$$

Estes campos escalares podem ser convenientemente descritos pelas seguintes formas diferenciais:

$$\begin{aligned} W_1 &= S + iS_0 dx^0 + S_5 \epsilon \\ W_2 &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} P_i dx^0 \wedge dx^j \wedge dx^k = P_i dx^i \vee \epsilon. \end{aligned} \quad (8)$$

Observamos que os índices 0, 5 e i que comparecem em W_1 e W_2 são puros índices de sabor (flavour na denominação da Ref.5) e as matrizes correspondentes obtidas pelo mapeamento $dx^\mu \leftrightarrow \gamma^\mu$ atuam em $\mathcal{V}$ como transformações de sabor quando construirmos as correspondentes correntes supersimétricas, sem alterar as propriedades escalares de transformação para S , S_0 , P_i . Esta construção exhibe a natureza geométrica dos graus de liberdade escalares na rede espacial: S e S_0 são funções de ponto, S_5 um cubo e P_i estão ligadas com plaquetas (j, k) .

Considerando primeiramente o caso abeliano propomos a seguinte carga para o modelo N=4 livre:

$$\begin{aligned} Q &= \sum_x J_0(x) \\ J_0 &= E^i A_i - H^i B_i - \epsilon_{ijk} (\Delta_i^- P_j) C_k + (\Delta_k^+ P_k) D_0 - (\Delta_k^+ S_0) C_k + (\Delta_k^+ S) A_k \\ &\quad + (\Delta_k^- S_5) B_k + (\partial_0 P_k) D_k - (\partial_0 S_0) C_0 + (\partial_0 S) A_0 + (\partial_0 S_5) B_0 \end{aligned} \quad (9)$$

a qual, introduzida em (1) dá a seguinte densidade de Hamiltoniana (a menos de normalização).

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2}(E^2 + H^2) + \frac{1}{2}(\partial_0 P_k)(\partial_0 P_k) + \frac{1}{2}(\partial_0 S_0)(\partial_0 S_0) + \frac{1}{2}(\partial_0 S)(\partial_0 S) + \frac{1}{2}(\partial_0 S_5)(\partial_0 S_5) \\ & + \frac{1}{2}(\Delta_i^- P_j)(\Delta_i^- P_j) + \frac{1}{2}(\Delta_i^+ S_0)(\Delta_i^+ S_0) + \frac{1}{2}(\Delta_i^+ S)(\Delta_i^+ S) \\ & + \frac{1}{2}(\Delta_i^- S_5)(\Delta_i^- S_5) + iA_0(\Delta_k^- A_k) + iB_0(\Delta_k^+ B_k) - i\epsilon_{ijk}A_i(\Delta_j^- B_k) \\ & + iC_0(\Delta_k^- C_k) + iD_0(\Delta_k^+ D_k) - i\epsilon_{ijk}C_i(\Delta_j^- D_k) + E^i(\Delta_i^+ S) - H^i(\Delta_i^- S_5) \end{aligned} \quad (10)$$

E^i e H^i são os campos elétricos e magnéticos usuais, ∂_0 sendo a derivada em relação ao tempo. Devido ao ansatz (8) e a associação de Dirac-Kähler das derivadas $\Delta^\pm$ às diferentes entidades geométricas na rede, como expressas em (9), obteremos a Hamiltoniana livre que corresponde aos férmions sem problemas de degenerescência na energia.

Podemos introduzir interações substituindo em (9) $\Delta^\pm$ pelas derivadas covariantes correspondentes na rede, as quais são dadas por (12):

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu^+ \varphi(x, H) &= U(x, \mu) \varphi(x + e^\mu, H) - \varphi(x, H) U(x + e^\mu, \mu) \\ \mathcal{D}_\mu^- \varphi(x, H) &= \varphi(x, H) U^+(x + e^\mu - e^\mu, \mu) - U^+(x - e^\mu, \mu) \varphi(x - e^\mu, H) \end{aligned} \quad (11)$$

$\mathcal{U}(\lambda, \mu)$ sendo a função de aresta que define o grupo de calibre não abeliano SU_n ; $e^H = e^{\mu_1} + e^{\mu_2} + \dots$; $H = \{\mu_1, \mu_2, \dots\}$.

Então (9) é substituída pela expressão invariante de calibre:

$$\begin{aligned}
 J_0 = & \text{Tr} \{ E^k(x) A_k^+(x) - H^k(x) B_k^+(x) - \epsilon_{ijk} (\mathcal{D}_i^- P_j(x)) C_k^+(x) \\
 & + (\mathcal{D}_k^+ P_k(x)) D_0^+(x) - (\mathcal{D}_k^+ S_0(x)) C_k^+(x) + (\mathcal{D}_k^+ S(x)) A_k^+(x) \\
 & + (\mathcal{D}_k^- S_5(x)) B_k^+(x) + (\partial_0 P_k(x)) D_k^+(x) - (\partial_0 S_0(x)) C_0^+(x) \\
 & + (\partial_0 S(x)) A_0^+(x) + (\partial_0 S_5(x)) B_0^+(x) \\
 & + i g [- C_0^+(x) (S_0(x) S(x) - S(x) S_0(x)) \\
 & + D_0^+(x) (S_0(x) S_5(x) - S_5(x) S_0(x + e_5)) \\
 & - B_0^+(x) (S(x) S_5(x) - S_5(x) S(x + e_5)) \\
 & + C_i^+(x + e_5 - e^i) (P_i^+(x) S_5(x) - S_5(x + e_5 - e^i) P^+(x + e_5)) \\
 & - D_i^+(x) (S(x) P_i(x) - P_i(x) S(x + e_5 - e^i)) \\
 & - B_i^+(x) (S_0(x) P_i(x) - P_i(x) S_0(x + e_5 - e^i)) \\
 & - \epsilon_{ijk} B_i^+(x) P_j(x) U^+(x + e^k, i) P_k(x + e^k) U^+(x + e^j + e^k, i)] \}
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

onde $e_5 = e^1 + e^2 + e^3$.

Esta componente zero de corrente é invariante pelas transformações de calibre⁽¹²⁾:

$$\begin{aligned}
 \psi(x, H) & \rightarrow G(x) \psi(x, H) G^{-1}(x + e^H) \\
 \psi^\dagger(x, H) & \rightarrow G(x + e^H) \psi^\dagger(x, H) G^{-1}(x)
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

A nossa supercarga é dada por:

$$Q = \sum_x \frac{1}{2} (J_0(x) + J_0^+(x)). \tag{14}$$

e para se obter a Hamiltoniana na rede impomos as seguintes relações de anticomutação para os campos fermiônicos:

$$\begin{aligned}\{A_\mu^{+ab}(x), A_\nu^{b'a'}(x')\} &= \{B_\mu^{+ab}(x), B_\nu^{b'a'}(x')\} = 2\delta_{aa'}\delta_{bb'}\delta_{\mu,\nu}\delta_{x,x'} \\ \{D_i^{+ab}(x), D_j^{b'a'}(x')\} &= \{C_i^{+ab}(x), C_j^{b'a'}(x')\} = 2\delta_{aa'}\delta_{bb'}\delta_{ij}\delta_{x,x'} \\ \{C_0^{+ab}(x), C_0^{b'a'}(x')\} &= \{D_0^{+ab}(x), D_0^{b'a'}(x')\} = 2\delta_{aa'}\delta_{bb'}\delta_{x,x'}\end{aligned}\quad (15)$$

as outras relações de anticomutação sendo nulas.

Os campos elétricos e magnéticos sendo definidos por (12) :

$$\begin{aligned}E_i(x) &= \frac{i}{ag} \frac{\partial U(x, i)}{\partial t}, & E_i^+(x) &= \frac{-i}{ag} \frac{\partial U^+(x, i)}{\partial t} \\ \mathcal{F}_{ij} &= -ia^2 g \varepsilon_{ijk} H^k(x), & \mathcal{F}_{ij}^+ &= ia^2 g \varepsilon_{ijk} H^{k+}(x)\end{aligned}\quad (16)$$

sendo o espaçamento da rede espacial e :

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) = U(x, \mu)U(x+e^\mu, \nu) - U(x, \nu)U(x+e^\nu, \mu) \quad (17)$$

com as relações de comutação a tempos iguais (12) :

$$\begin{aligned}[\partial U_{aa'}^+(x, i)/\partial t, U_{bb'}(x', j)] &= -2ia^2 g^2 \delta_{ab'}\delta_{a'b}\delta_{ij}\delta_{xx'} \\ [S_0^{ab}(x), \dot{S}_0^{b'a'+}(x')] &= [S^{ab}(x), \dot{S}^{b'a'+}(x')] = [S_3^{ab}(x), \dot{S}_3^{b'a'+}(x')] = 2i\delta_{aa'}\delta_{bb'}\delta_{x,x'} \\ [P_i^{ab}(x), \dot{P}_j^{b'a'+}(x')] &= 2i\delta_{aa'}\delta_{bb'}\delta_{x,x'}\delta_{ij}\end{aligned}\quad (18)$$

Obteremos a seguinte densidade de Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 \quad (19)$$

com:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0 = & \text{Tr} \{ \frac{1}{4} E'(x) E'^{\dagger}(x) + \frac{1}{4} H'(x) H'^{\dagger}(x) + \frac{1}{4} (\partial_0 P_k(x)) (\partial_0 P_k^{\dagger}(x)) \\
& + \frac{1}{4} (\partial_0 S_0(x)) (\partial_0 S_0^{\dagger}(x)) + \frac{1}{4} (\partial_0 S(x)) (\partial_0 S^{\dagger}(x)) \\
& + \frac{1}{4} (\partial_0 S_5(x)) (\partial_0 S_5^{\dagger}(x)) + \frac{1}{4} (\mathcal{D}_i^- P_j(x)) (\mathcal{D}_i^- P_j(x))^{\dagger} \\
& + \frac{1}{4} (\mathcal{D}_i^{\dagger} S_0(x)) (\mathcal{D}_i^{\dagger} S_0(x))^{\dagger} + \frac{1}{4} (\mathcal{D}_i^{\dagger} S(x)) (\mathcal{D}_i^{\dagger} S(x))^{\dagger} \\
& + \frac{1}{4} (\mathcal{D}_i^- S_5(x)) (\mathcal{D}_i^- S_5(x))^{\dagger} + \frac{1}{2} i A_0(x) (\mathcal{D}_i^- A_i(x))^{\dagger} \\
& + \frac{1}{2} i B_k^{\dagger}(x) (\mathcal{D}_k^- B_0(x)) - \frac{1}{2} i \epsilon_{ijk} A_i^{\dagger}(x) (\mathcal{D}_j^- B_k(x)) \\
& + \frac{1}{2} i C_0(x) (\mathcal{D}_k^- C_k(x))^{\dagger} + \frac{1}{2} i D_0^{\dagger}(x) (\mathcal{D}_j^{\dagger} D_j(x)) \\
& - \frac{1}{2} i \epsilon_{ijk} D_j^{\dagger}(x) (\mathcal{D}_i^{\dagger} C_k(x)) - \frac{1}{2} g A_i^{\dagger}(x) (A_i(x) S^{\dagger}(x + e^i) - S^{\dagger}(x) A_i(x)) \\
& + \frac{1}{2} g (B_0^{\dagger}(x) S^{\dagger}(x) - S^{\dagger}(x + e_5) B_0^{\dagger}(x)) B_0(x) \\
& - \frac{1}{2} g (S^{\dagger}(x) C_0^{\dagger}(x) - C_0^{\dagger}(x) S^{\dagger}(x)) C_0(x) \\
& + \frac{1}{2} g D_i^{\dagger}(x) (S(x) D_i(x) - D_i(x) S(x + e_5 - e^i)) \\
& + \frac{1}{2} g (S_5^{\dagger}(x) A_0^{\dagger}(x) - A_0^{\dagger}(x + e_5) S_5^{\dagger}(x)) B_0(x) \\
& - \frac{1}{2} g B_i(x) (A_i(x + e_5 - e^i) S_5^{\dagger}(x) - S_5^{\dagger}(x - e^i) A_i(x - e^i)) \\
& + \frac{1}{2} g (S_5^{\dagger}(x) C_0^{\dagger}(x) - C_0^{\dagger}(x + e_5) S_5^{\dagger}(x)) D_0(x) \\
& - \frac{1}{2} g C_i^{\dagger}(x + e_5 - e^i) (D_i^{\dagger}(x) S_5(x) - S_5(x + e_5 - e^i) D_i^{\dagger}(x + e_5)) \\
& + \frac{1}{2} g (A_0^{\dagger}(x) S_0^{\dagger}(x) - S_0^{\dagger}(x) A_0^{\dagger}(x)) C_0(x) \\
& + \frac{1}{2} g A_i^{\dagger}(x) (C_i(x) S_0^{\dagger}(x + e^i) - S_0^{\dagger}(x) C_i(x)) \\
& - \frac{1}{2} g (B_0^{\dagger}(x) S_0^{\dagger}(x) - S_0^{\dagger}(x + e_5) B_0^{\dagger}(x)) D_0(x) \\
& + \frac{1}{2} g (D_i^{\dagger}(x) S_0^{\dagger}(x) - S_0^{\dagger}(x + e_5 - e^i) D_i^{\dagger}(x)) B_i(x) \\
& - \frac{1}{2} g \epsilon_{ijk} A_i^{\dagger}(x) (C_k^{\dagger}(x - e^k) P_j(x - e^k) - P_j(x) C_k^{\dagger}(x + e^i)) \\
& - \frac{1}{2} g A_i^{\dagger}(x) (D_0(x) P_i^{\dagger}(x + e^i) - P_i^{\dagger}(x - e_5 + e^i) D_0(x - e_5 + e^i))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}g(P_i^+(x)A_0^+(x) - A_0^+(x+e_3-e^l)P_i^+(x))D_i(x) \\
& - \frac{1}{2}g(B_0^+(x)P_i(x) - P_i(x+e_3)B_0^+(x+e_3-e^l))C_i(x+e_3-e^l) \\
& - \frac{1}{2}g(P_i^+(x)C_0^+(x) - C_0^+(x+e_3-e^l)P_i^+(x))B_i(x) \\
& + \frac{1}{2}g\epsilon_{ijk}U(x+e^l+e^k, i)D_k^+(x+e^k)U(x+e^k, i)P_j^+(x)B_i(x) \\
& + \frac{1}{2}g\epsilon_{ijk}U(x+e^l+e^k, i)P_k^+(x+e^k)U(x+e^k, i)D_j^+(x)B_i(x) \\
& + \frac{1}{4}g^2[(S^+(x)S_0^+(x) - S_0^+(x)S^+(x))(S_0(x)S(x) - S(x)S_0(x)) \\
& + (S_5^+(x)S_0^+(x) - S_0^+(x+e_3)S_5^+(x))(S_0(x)S_5(x) - S_5(x)S_0(x+e_3)) \\
& + (S_5^+(x)S^+(x) - S^+(x+e_3)S_5^+(x))(S(x)S_5(x) - S_5(x)S(x+e_3)) \\
& + (S_5^+(x)P_i(x) - P_i(x+e_3)S_5^+(x+e_3-e^l)) \\
& \times (P_i^+(x)S_5(x) - S_5(x+e_3-e^l)P_i^+(x+e_3)) \\
& + (P_i^+(x)S^+(x) - S^+(x+e_3-e^l)P_i^+(x)) \\
& \times (S(x)P_i(x) - P_i(x)S(x+e_3-e^l)) \\
& + (P_i^+S_0^+(x) - S_0^+(x+e_3-e^l)P_i^+(x)) \\
& \times (S_0(x)P_i(x) - P_i(x)S_0(x+e_3-e^l)) \\
& + \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}U(x+e^l+e^k, i)P_k^+(x+e^k)U(x+e^k, i)P_j^+(x)P_m(x) \\
& \times U^+(x+e^n, l)P_n(x+e^n)U^+(x+e^m+e^n, l)] \\
& + \frac{1}{2}g^2\epsilon_{ijk}U(x+e^l+e^k, i)P_k^+(x+e^k)U(x+e^k, i)P_j^+(x) \\
& \times (S_0(x)P_i(x) - P_i(x)S_0(x+e_3-e^l)) + \text{H.C.},
\end{aligned}$$

(20)

$$\begin{aligned}
T_1 = \text{Tr}[\frac{1}{2}ig(P_i^+(x)S^+(x) - S^+(x+e_3-e^l)P_i^+(x))\partial_0 P_i(x) \\
- \frac{1}{2}ig(S^+(x)S_0^+(x) - S_0^+(x)S^+(x))\partial_0 S_0(x) \\
+ \frac{1}{2}ig(S_5^+(x)S^+(x) - S^+(x+e_3)S_5^+(x))\partial_0 S_5(x) \\
+ \frac{1}{2}E^l(x)(\mathcal{D}_i^+ S(x))' - \frac{1}{2}H^l(x)(\mathcal{D}_i^- S_5(x))^+ + \text{H.C.}],
\end{aligned}$$

(21)

$$T_2 = -\frac{1}{4} i a g^2 \varepsilon_{ijk} \text{Tr} [B_i^+(x) P_j(x) U^+(x+e^k, i) P_k(x+e^k) A_l^+(x+e^l+e^k) + B_i^+(x) P_j(x) A_l^+(x+e^k) P_k(x+e^k) U^+(x+e^l+e^k, i)] + \text{HC}, \quad (22)$$

$$T_3 = \text{Tr} [\frac{1}{2} i g (P_i(x) S_0^+(x) - S_0^+(x+e_3-e^l) P_i^+(x)) H^l(x) + \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\mathcal{D}_i^- P_j(x)) (\mathcal{D}_k^+ S_0(x))^+ + \text{HC}], \quad (23)$$

$$T_4 = \text{Tr} [-\frac{1}{4} (\mathcal{D}_i^- P_j(x)) (\mathcal{D}_j^- P_i(x))^+ + \frac{1}{4} (\mathcal{D}_i^+ P_l(x)) (\mathcal{D}_j^+ P_j(x))^+ - \frac{1}{2} i g \varepsilon_{ijk} U(x+e^l+e^k, i) P_k^+(x+e^k) U(x+e^k, i) P_j^+(x) H^l(x) + \text{HC}], \quad (24)$$

$$T_5 = \text{Tr} [\frac{1}{2} i g \varepsilon_{ijk} (S_5^+(x) P_k(x) - P_k(x+e_3) S_5^+(x+e_3-e^k)) (\mathcal{D}_i^- P_j(x+e_3-e^k)) - \frac{1}{2} i g (S_5^+(x) S_0^+(x) - S_0^+(x+e_3) S_5^+(x)) (\mathcal{D}_k^+ P_k(x)) + \frac{1}{2} i g (S_5^+(x) P_i(x) - P_i(x+e_3) S_5^+(x+e_3-e^l)) (\mathcal{D}_i^+ S_0(x+e_3-e^l)) + \frac{1}{2} i g (P_i^+(x) S_0^+(x) - S_0^+(x+e_3-e^l) P_i^+(x)) (\mathcal{D}_i^- S_5(x)) + \frac{1}{2} i g \varepsilon_{ijk} U(x+e^l+e^k, i) P_k^+(x+e^k) U(x+e^k, i) (\mathcal{D}_i^- S_5(x)) + \text{HC}]. \quad (25)$$

$\mathcal{H}_0 + T_1$, após integração por partes e aplicação da lei de Gauss e identidades de Bianchi dá, no limite do contínuo uma Hamiltoniana que é a correta. Os termos extra T_2 , T_3 , T_4 e T_5 tendem a zero no limite do contínuo mas a sua presença é necessária para que se tenha invariância su persimétrica na rede gerada por Q dado pela expressão (14).

Em conclusão conseguimos dar uma formulação Hamiltoniana na rede do formalismo de Yang-Mills com $N=4$ supersimétrico a quatro dimensões.

CONCLUSÕES E PESQUISAS EM ANDAMENTO

1) Extendemos a noção de derivadas covariantes na rede quando aplicadas a campos na representação adjunta de um grupo compacto.

2) Formulamos o modelo de Wess-Zumino, a duas dimensões e com $N=2$ na rede espaço-temporal dentro do formalismo de Dirac-Kähler.

Consideramos importante uma tal formulação, pois ela nos permite considerar problemas similares em que o mapeamento de Nicolai não vale e portanto as técnicas propostas nas Refs.6) e 7) não são aplicáveis. Em colaboração com Aratyn e Iwamoto consideramos um modelo supersimétrico de calibre com $N=2$ e a duas dimensões para o qual não vale o mapeamento de Nicolai e que pelo formalismo de Dirac-Kähler pode ser formulado na rede espaço-temporal⁽²¹⁾.

3) Demos a formulação na rede espacial do modelo supersimétrico de Yang-Mills com $N=4$ a quatro dimensões. Seria interessante estender este tratamento para a rede espaço-temporal inspirando-nos no trabalho de Ref.21.

4) Já que temos uma teoria de calibre na rede estamos investigando a possibilidade de introduzir cargas topológicas à partir de $\tilde{J}_{\mu\nu}$ definido no Cap.1 expressão (67).

5) Estamos também tentando formular o modelo de Schwinger a duas dimensões dentro do quadro de Dirac-Kähler. Esperamos poder ver alguns aspectos da bosonização na rede.

6) Também estamos investigando a possibilidade de reescrever dentro de uma linguagem à la Susskind (28) as transformações supersimétricas nas redes espaço-temporais e espaciais consideradas nos modelos atrás mencionadas e desenvolvidos.

Esta linguagem pode apresentar vantagens do ponto de vista computacional.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO . I

CAPÍTULO . 1

Formalismo de Dirac-Kähler.....	1
A Teoria de calibre na rede para campos na representação adjunta.....	10
O campo de calibre puro na rede-relações várias..	14

CAPÍTULO . 2

Mapeamento de Nicolai.....	21
Modelo de Wess-Zumino com $N=2$ a duas dimensões...	24
Formalismo Hamiltoniano na rede espacial.....	34
Formalismo Lagrangeano na rede espaço-temporal..	39
Sobre o tratamento do modelo de Wess-Zumino na linguagem das formas diferenciais.....	45
O mapeamento de Nicolai na rede.....	49

CAPÍTULO . 3

O Modelo de Yang-Mills supersimétrico com $N=4$ a quatro dimensões formulado na rede espacial.....	52
Conclusões e pesquisas em andamento.....	61

REFERÊNCIAS

- 1) K. Wilson, Phys. Rev. D10, 2445 (1974).
- 2) P. Dondi and H. Nicolai, Nuovo Cim. A41, 1 (1977).
- 3) T. Banks and P. Windey, Nucl. Phys. B198, 226 (1982).
- 4) S. Elitzur, S. Rabinovici and A. Schwimmer, Phys. Lett. 119B, 165 (1982).
- 5) P. Becher and H. Joos, Zeits. Phys. C15, 343 (1982).
- 6) N. Sakai and M. Sakamoto, Nucl. Phys. B229, 173 (1983).
- 7) S. Elitzur and A. Schwimmer, Nucl. Phys. B226, 109 (1983).
- 8) H. Nicolai, Phys. Lett. 89B, 341 (1980); Nucl. Phys. B176, 419 (1980).
- 9) H. Aratyn and A. H. Zimerman, Phys. Lett. 137B, 392 (1984)
Erratum ibid 139B, 465 (1984).
- 10) H. Aratyn, P. F. Bessa and A. H. Zimerman, Zeits. Phys. C27, 535 (1985).
- 11) S. Cecotti, L. Girardello, Ann. Phys. 145, 81 (1983).
- 12) H. Aratyn, M. Goto and A. H. Zimerman, Il. Nuovo Cim. 84A, 255 (1984).
- 13) G. Mack, Nucl. Phys. B235 FS11, 197 (1984).
- 14) H. Aratyn and A. H. Zimerman, Phys. Rev. D33, 2999 (1986).
- 15) H. Aratyn, M. Goto and A. H. Zimerman, Il. Nuovo Cim. 88A, 225 (1985).

- 16) L.Brink, J.H.Schwarz and J.Scherk, Nucl.Phys.B121, 77
(1977).
- 17) H.Aratyn and A.H.Zimerman, J.Phys.A18, L487 (1985).
- 18) H.Nicolai, Acta Phys. Austriaca Suppl. XXV, 71 (1983).
- 19) P.Salomonsen and J.W. van Holten Nucl.Phys.B196, 509 (1982).
- 20) H.Aratyn, M. Schiffer and A.H.Zimerman-Rev.Bres. Fis.14,
27 (1984).
- 21) H.Iwamoto, H.Aratyn and A.H.Zimerman-Zeits.Phys.C31, 99
(1986).
- 22) A.N.Jourjine, Phys.Rev.D34, 1234 (1986); Phys.Rev.D34, 3058
(1986).
- 23) K.Oshima, Prog.Th.Phys.75, 985 (1986).
- 24) S.Mandelstam, Nucl.Phys.B123, 143 (1983).
- 25) L.Brink, O.Lindgren and B.E. Nilsson, Nucl.Phys.B212, 401
(1983).
- 26) M.A. Nomazie, A.Salam and J.Strathdee, Phys.Rev.D28,
1481 (1983).
- 27) L.Brink, J.H. Schwarz and J.Scherk, Nucl.Phys.B121, 77 (1977).
- 28) L.Susskind, Phys.Rev.D16, 3031 (1977).

