UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Um estudo sobre a equação de Schrödinger biharmônica

Heloísa Lopes de Sousa

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Coorientador: Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira

Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, março de 2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Um estudo sobre a equação de Schrödinger biharmônica

Heloísa Lopes de Sousa

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Coorientador: Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho" campus de Presidente Prudente para obtenção do título de mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, março de 2015

FICHA CATALOGRÁFICA

S696e Sousa, Heloísa Lopes de.

Um estudo sobre a equação de Schrödinger biharmônica / Heloísa Lopes de Sousa. - Presidente Prudente : [s.n.], 2015

60 p.

Orientador: Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia

Inclui bibliografia

1. Equações biharmônicas. 2. Métodos variacionais. 3. Métodos de penalização. I. Pimenta, Marcos Tadeu de Oliveira. II. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Título.

unesp UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Presidente Prudente

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA
ORIENTADOR

Prof. Dr. MESSIAS MENEGUETTE JUNIOR
UNESP/FCT

Profa. Dra. MICHELE DE OLIVEIRA ALVES
UEL

Heloísa Lopes de Sousa
HELOÍSA LOPES DE SOUSA

Presidente Prudente (SP), 07 de março de 2015.

Resultado: APROVADO

Faculdade de Ciências e Tecnologia
Seção Técnica de Pós-Graduação
Rua Roberto Simonsen, 305 CEP 19060-900 Presidente Prudente SP
Tel 18 3229-5318 fax 18 3223-4519 posgrad@fct.unesp.br

À minha mãe Fátima
e à memória de meu pai José.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter feito possível este trabalho, pois em minha trajetória ele colocou pessoas especiais que foram imprescindíveis para realizá-lo.

Agradeço em especial a minha mãe Fátima que em meio de todos os imprevistos que a vida nos oferece ela sempre me deu exemplos de força de vontade, generosidade e de dedicação. Ao meu pai José pelas conversas sobre a vida, sempre breves mas valiosas, sinto falta delas. Por eles terem me dado o melhor que puderam oferecer.

Aos meus irmãos Aline e Junior pelas brincadeiras de criança, por todo o apoio e por cuidarem da mãe e do pai quando eu não estava por perto.

Ao meu namorado e amigo Junior pelo seu companheirismo, por sempre me dar forças, por todos os domingos e feriados que passamos estudando Análise e por estar ao meu lado nos momentos difíceis.

À minha ex-colega de república e amiga Juliana Gori (Juh) pelos três anos de convivência, por segurar a barra quando a bolsa atrasava e por todas as conversas que me ajudaram a amadurecer.

Aos meus amigos da UEM que durante os quatro anos de graduação me proporcionaram momentos memoráveis. Aos professores de lá, agradeço por todo conhecimento oferecido, por terem me dado a base de minha formação. Em especial à professora Claudete Matilde Webler Martins que por dois anos me orientou no projeto de iniciação científica, por ter me incentivado a entrar no mestrado, mais do que isto, por ter me feito acreditar que era possível e por ter me dado total apoio para que realmente acontecesse.

Aos professores e amigos do Pós-Mac pela aprendizagem e pelos momentos de descontração e amizade.

Ao professor Suetônio de Almeida Meira pela coorientação, pela disposição em me atender, por todos os conselhos e ensinamentos que me ajudaram muito durante os estudos.

Agradeço ao meu orientador Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta por sua imensa paciência, sempre disposto a me atender. Pela maneira dedicada e profissional que guiou este trabalho, sendo assim um exemplo de professor que pretendo seguir. Pelos ensinamentos e por todas as conversas de apoio e incentivo.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

"A pesquisa básica é como atirar uma flecha para o ar e, onde ela cair, pintar um alvo."

Homer Adkins Burton

Resumo

Neste trabalho teórico em Equações Diferenciais Parciais Elípticas, estudamos uma versão estacionária da equação de Schrödinger não-linear biharmônica. O objetivo principal versa sobre resultados de existência e concentração de soluções não-triviais, quando um parâmetro ϵ tende a zero. São utilizados métodos variacionais para estudar existência das soluções fracas não-triviais com hipóteses sobre o pontecial e sobre a não-linearidade.

Palavras-Chave: *Equações Biharmônicas, Métodos Variacionais, Métodos de Penalização.*

Abstract

In this theoretical work in Elliptic Partial Differential Equations, we study a stationary version of the biharmonic nonlinear Schrödinger equation. The main objective aims existence results and concentration of nontrivial solutions when a parameter ϵ tends to zero. Variational methods are used to study the existence of the weak nontrivial solutions under certain assumptions on the potential and the nonlinearity.

Keywords: *Biharmonic Equations, Variational methods, Penalization methods*.

Índice de Notações

$|A|$ é a medida de Lebesgue de um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^N$;

$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R};\ u$ é continuamente k vezes diferenciável$\}$

$C_0^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega); supp(u)$ é compacto$\}$;

$C^{k,\alpha}(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega); D^k u$ é $\alpha -$ Hölder contínua$\}$;

$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$;

$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R};\ u$ é mensurável e $\|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$;

$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{a \geq 0; \{x \in \Omega; |u(x)| > a\} = 0\}$;

$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R};\ u$ é mensurável e $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty\}$;

$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \forall |\alpha| \leq m\}$, onde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ é um multi-índice;

$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{m} \|D^i u\|_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$;

$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$, onde o fecho é tomado com respeito a norma $\|.\|_{W^{m,p}(\Omega)}$;

$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$;

$H_0^m(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$, onde o fecho é tomado com respeito a norma $\|.\|_{H^m(\Omega)}$;

$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$;

$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$;

$2_* = \frac{2N}{N-4}$;

$2^* = \frac{2N}{N-2}$.

Sumário

Capítulos

Capítulo

1

Introdução

Nos últimos anos, vários autores têm estudado diversas questões relativas à equação de Schrödinger estacionária não-linear

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \Delta u + V(x)u = f(u) \text{ em } \Omega \\ u \in H^1(\Omega), \end{cases} \tag{1.1}$$

com condições de fronteira de Neumann ou Dirichlet, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio não necessariamente limitado. Motivado por Floer e Weinstein [7], Rabinowitz em [13] usou argumentos do tipo passo da montanha para encontrar soluções de energia mínima de (1.1) para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, onde $N \geq 3$, $\Omega = \mathbb{R}^N$ e f é uma não-linearidade superlinear e subcrítica. Sobre o potencial V foi assumida a seguinte condição

$$0 < V_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) < \liminf_{|x| \to \infty} V(x).$$

Em [15], Wang provou que as soluções do passo da montanha encontradas por Rabinowitz em [13] apresentam um fenômeno de concentração em torno de um mínimo global de V, se $\epsilon \to 0$. Em [5], Del Pino e Felmer usaram um método de penalização para provar a existência e concentração de soluções para o problema (1.1), com não-linearidade superlinear e subcrítica e com o potencial V satisfazendo a seguinte condição

$$\inf_{x \in \Lambda} V(x) < \inf_{x \in \partial\Lambda} V(x),$$

onde Λ é um domínio limitado contido em Ω. Esses argumentos inspiraram muitos autores nos últimos anos, entre eles Alves e Figueiredo em [2, 3], que consideraram o problema

(1.1) com o operador de Laplace substituído pelo p-Laplaciano e obtiveram existência, multiplicidade e concentração de soluções positivas.

Embora muitos autores tenham estudado o problema (1.1) para os operadores Laplaciano e p-Laplaciano, poucos trabalhos podem ser encontrados tratando de equações de Schrödinger biharmônicas, dadas por

$$\begin{cases} \epsilon^4 \Delta^2 u + V(x)u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N \\ \qquad\qquad u \in H^2(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{1.2}$$

Em [11, 12], Pimenta e Soares provam a existência de uma família de soluções para (1.2), onde estas apresentam um fenômeno de concentração em torno de um ponto de mínimo global de V, tal como feito em [5]. Já no trabalho [6], Figueiredo e Pimenta provam a existência e multiplicidade de soluções que se concentram em torno de um mínimo global de V, levando-se em conta propriedades topológicas do conjunto onde V atinge o seu mínimo, onde a equação considerada é semelhante a (1.2).

Neste trabalho, realizamos um estudo detalhado do trabalho [11], considerando-se uma não-linearidade f satisfazendo as condições:

(f_1) $f \in C^1(\mathbb{R})$,

(f_2) $f(\xi) = o(\xi)$, quando $\xi \to 0$,

(f_3) existem constantes $a_1, a_2 > 0$ tais que

$$|f(\xi)| \le a_1|\xi| + a_2|\xi|^p, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

onde $1 \le p < \frac{N+4}{N-4}$,

(f_4) para algum $2 < \theta \le p+1$, temos para todo $\xi \neq 0$
$0 \le \theta F(\xi) < f(\xi)\xi$, onde $F(\xi) = \displaystyle\int_0^\xi f(t)dt$,

(f_5) a função $\xi \mapsto \dfrac{f(\xi)}{\xi}$, é crescente para $\xi > 0$, decrescente para $\xi < 0$.

Quanto ao potencial V, vamos supor as seguintes condições:

(V_1) $V \in C^0(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$,

(V_2) existe um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado e $x_0 \in \Omega$ tais que

$$0 < V(x_0) = V_0 = \inf_{\mathbb{R}^N} V < \inf_{\partial\Omega} V.$$

O objetivo é mostrar o seguinte resultado

Teorema 1 *Sejam f e V funções que satisfazem $(f_1)-(f_5)$ e $(V_1)-(V_2)$ respectivamente. Então para toda sequência $\epsilon_n \to 0$ existe uma subsequência que continuaremos a denotar por $\{\epsilon_n\}$ tal que* (1.2) *(com $\epsilon_n = \epsilon$) possui uma solução não-trivial $u_n \in H^2(\mathbb{R}^N)$. Ainda mais, sendo x_n ponto de máximo de $|u_n|$, então $x_n \in \Omega$ e ainda*

$$\lim_{n\to\infty} V(x_n) = \inf_{\mathbb{R}^N} V.$$

No trabalho [11], os autores provam os resultados sem utilizar a condição (f_4) sobre a não-linearidade, chamada de condição de *Ambrosetti-Rabinowitz*. Ao invés dessa, consideraram uma condição de superlinearidade sobre f mais fraca, de modo a abranger um número maior de não-linearidades, o que exigiu a adição de muitos resultados técnicos ao trabalho.

Nossa proposta, ao apresentar o texto com uma condição mais restritiva, foi para que este se torne mais acessível, por conter menos detalhes técnicos, a um iniciante na área que se interesse pelo trabalho [11], onde todas as demonstrações apresentem somente os detalhes inerentes à técnica de penalização utilizada e não aos que são técnicos oriundos da falta da condição de *Ambrosetti-Rabinowitz*.

Para compreender resultados do trabalho [11], foi necessário um estudo prévio de vários resultados abstratos da Teoria da Análise Não-Linear, alguns dos quais compõem o segundo capítulo, como por exemplo o conhecido Teorema do Passo da Montanha.

Capítulo

2

Preliminares

Neste capítulo veremos algumas definições, notações e resultados importantes para o desenvolvimento do trabalho. Primeiramente descrevemos uma nova classe de objetos em que é coerente definir uma derivada (generalizada) onde as regras do cálculo se mantenham e ao mesmo tempo possa-se incluir funções não diferenciáveis no sentido clássico. Tais objetos são as chamadas distribuições.

Após veremos uma importante operação com distribuições, definimos os Espaços de Sobolev e admitimos os Teoremas de Imersões. Por fim demostramos o Teorema do Passo da Montanha.

2.1 Distribuições

Seja $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ uma função contínua no aberto Ω. Então definimos:

Definição 1 *O conjunto* $supp(\phi) = \overline{\{x \in \Omega; \phi(x) \neq 0\}}$ *é chamado de suporte de* ϕ*. Se este conjunto além de fechado for compacto dizemos que* ϕ *tem suporte compacto.*

Definição 2 *O espaço vetorial das funções* $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ *com suporte compacto, o qual chamamos de espaço das funções teste, será denotado por* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$*. Se* Ω *é um aberto do* $\mathbb{R}^N$*, ainda podemos falar do espaço das funções* C^∞ *com suporte compacto contido em* Ω*. Este espaço será denotado por* $\mathcal{D}(\Omega)$*.*

Vamos fornecer à $\mathcal{D}(\Omega)$ uma topologia tal que faça de $\mathcal{D}(\Omega)$ um espaço vetorial topológico. Precisamos então saber o que são sequências convergentes em $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 3 *Uma sequência* $\{\phi_m\}$ *de funções em* $\mathcal{D}(\Omega)$ *é dita convergente para zero se existir um compacto* $K \subset \Omega$ *tal que* $supp(\phi_m) \subset K$*, para todo* m *e todas as suas derivadas convergem uniformemente para zero em* K*.*

Definição 4 *Um funcional linar* T *definido em* $\mathcal{D}(\Omega)$ *é dito uma distribuição em* Ω *sempre que, se* $\phi_m \to 0$ *em* $\mathcal{D}(\Omega)$ *então* $T(\phi_m) \to 0$*, quando* $m \to \infty$*.*

O espaço das distribuições, o qual é o dual do espaço das funções teste, é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemplo 1 (A ditribuição de Dirac) *Seja* $x \in \mathbb{R}^N$*. Defina* δ_x *por* $\delta_x(\phi) = \phi(x)$*, para toda* $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$*. É claro que* δ_x *define uma distribuição. Em particular se* $x = 0$ *escrevemos apenas* δ *e este é o conhecido* δ *de Dirac.*

Definição 5 *Uma função* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *é dita localmente integrável se para qualquer compacto* $K \subset \Omega$ *tivermos que* $\displaystyle\int_K |f| < \infty$*. Denotamos o espaço das funções definidas em* Ω *que são localmente integráveis por* $L^1_{loc}(\Omega)$*.*

Exemplo 2 *Dada uma função localmente integrável* f *defina o funcional linear* T_f *em* $\mathcal{D}(\Omega)$ *por* $T_f(\phi) = \displaystyle\int_\Omega f\phi dx$*. É fácil verificar que* T_f *é uma distribuição em* $\mathcal{D}'(\Omega)$*.*

Vamos agora ver uma operação familiar ao Cálculo aplicada à distribuições, que é a de diferenciação. Começaremos com a definição de multi-índice de Schwartz, a qual será muito útil.

Definição 6 *Um multi-índice* α *é uma* n*-upla* $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$*,* $\alpha_i \geq 0$ *inteiros. Associado a um multi-índice* α *temos:* $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$*, (ordem de* α*);* $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$*;* $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$*, onde* $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*.*
Por fim definimos $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$*.*

Definição 7 *Sejam* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *e* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto. Definimos para todo multi-índice* α *a distribuição* $D^\alpha T$ *por*

$$(D^\alpha T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Exemplo 3 *Consideremos a função de Heaviside em* $\mathbb{R}$

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Esta função é localmente integrável e por isso define uma distribuição, a qual denotaremos por T_H. Seja $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ então

$$\frac{dT_H}{dx}(\phi) = -T_H\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = -\int_{\mathbb{R}} H\frac{d\phi}{dx}dx = -\int_0^{+\infty}\frac{d\phi}{dx}dx = -\lim_{y\to+\infty}\left[\int_0^y \frac{d\phi}{dx}dx\right] = \phi(0) = \delta(\phi)$$

$$\therefore \frac{dT_H}{dx} = \delta \text{ (} \delta \text{ de Dirac).}$$

2.2 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p < +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $u \in L^p(\Omega)$, é sabido que u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas não é verdade, em geral, que $D^\alpha u$ seja uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$.

Quando $D^\alpha u$ é gerada por uma função de $L^p(\Omega)$, defini-se um novo espaço denominado espaço de Sobolev, o qual representamos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, isto é

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}$$

sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições.

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ definimos a norma de u da forma:

$$\|u\|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega |D^\alpha u|^p dx.$$

O espaço normado $(W^{m,p}(\Omega), \|.\|_{m,p})$ é denominado espaço de Sobolev.

Representa-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ devida a estrutura hilbertiana de $L^2(\Omega)$, a qual é herdada pelos espaços $H^m(\Omega)$.

Teorema 2 *Os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ são espaços de Banach.*

Demonstração: Seja u_ν uma sequência de Cauchy em $W^{m,p}(\Omega)$. Mostremos que u_ν converge para uma função $u \in W^{m,p}(\Omega)$. De fato, como u_ν é de Cauchy temos:

$$\|u_\nu - u_\mu\|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega |D^\alpha u_\nu - D^\alpha u_\mu|^p dx \to 0, \quad \nu,\mu \to +\infty.$$

Segue que $(D^\alpha u_\nu)$ é uma sequência de Cauchy do espaço de Banach $L^p(\Omega)$. Logo, para cada $|\alpha| \leq m$, existe $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que: $D^\alpha u_\nu \to u_\alpha$ em $L^p(\Omega)$. Em particular, quando $\alpha = (0, \cdots, 0)$ temos que $u_\nu \to u$ em $L^p(\Omega)$.

Basta mostrar que $D^\alpha u = u_\alpha$. Com efeito, das convergências anteriores, temos as seguintes convergências em $\mathcal{D}'(\Omega)$

$$D^\alpha u_\nu \to u_\alpha \text{ e } D^\alpha u_\nu \to D^\alpha u$$

pela unicidade do limite concluímos o desejado.

■

Corolário 1 *Os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert com o produto interno*

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

■

O espaço das funções C^∞ com suporte compacto contido em Ω é denso em $L^p(\Omega)$, mas não é verdade que este mesmo espaço, o qual passamos a denotar por $C_0^\infty(\Omega)$, seja denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Por esta razão define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}}.$$

Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ também são espaços de Banach e em particular, quando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m$ são espaços de Hilbert.

2.2.1 Teoremas de densidade e imersão

As demostrações dos resultados desta seção podem ser encontradas em [9].

Teorema 3 *O subespaço $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ é denso em $W^{k,p}(\Omega)$.*

Vamos agora enunciar as conhecidas desigualdades de Sobolev para funções em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 4

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{Np}{N-p}}(\Omega) & \textit{para } p < N, \\ C^0(\overline{\Omega}) & \textit{para } p > N. \end{cases}$$

Além disso, existe uma constante $C = C(N,p)$ tal que, para qualquer $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \| u \|_{\frac{Np}{N-p}} &\leq C \| Du \|_p \quad \text{para } p < N, \\ \sup_{\Omega} |u| &\leq C|\Omega|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p}} \| Du \|_p \quad \text{para } p > N. \end{aligned}$$

Definição 8 *Dizemos que um espaço de Banach B_1 está imerso continuamente no espaço de Banach B_2 e denotamos $B_1 \hookrightarrow B_2$, se existir uma aplicação linear limitada e bijetora $B_1 \mapsto B_2$.*

Assim, o Teorema 4 pode ser expresso da forma

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-p}}(\Omega) \quad p < N,$$

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}) \quad p > N.$$

Iterando o Teorema 4 k vezes chegamos a uma extensão para os espaços $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Corolário 2

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-kp}}(\Omega) \quad kp < N,$$

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}) \quad kp > N.$$

2.3 Teorema do Passo da Montanha

Seja E um espaço de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional. Vejamos as seguintes definições.

Definição 9 *O funcional I é Fréchet diferenciável em $u \in E$ se existe uma aplicação linear contínua $L = L(u) : E \to \mathbb{R}$ satisfazendo:*

$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\epsilon, u) > 0$ tal que $|I(u+v) - I(u) - Lv| \leq \epsilon \|v\|$, sempre que $\|v\| \leq \delta$.

A aplicação L é usualmente denotada por $I'(u)$.

Definição 10 *Um ponto crítico u de I é tal que $I'(u) = 0$, isto é,*

$$I'(u)\psi = 0, \quad \forall \psi \in E.$$

O valor de I em u é então chamado de valor crítico de I.

Em aplicações para equações diferenciais parciais, pontos críticos de funcionais correspondem a soluções fracas de equações.

Existem resultados que garantem a existência de ponto crítico de funcionais. O Teorema do Passo da Montanha é um desses resultados e está intimamente relacionado com a condição de Palais-Smale (PS).

Definição 11 *Seja $I \in C^1(E,\mathbb{R})$, E espaço de Banach. Dizemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale (PS) se qualquer sequência $\{u_n\}$ em E tal que $\{I(u_n)\}$ é uma sequência limitada de números reais e $I'(u_n) \to 0$ quando $n \to \infty$, possua uma subsequência convergente.*

Vamos provar a versão usual do Teorema do Passo da Montanha. A prova se torna simples utilizando a seguinte versão do Lema da deformação.

Lema 1 (Lema da deformação) *Seja E um espaço de Banach. Suponha que o funcional $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ é tal que satisfaça a condição (PS). Se $c \in \mathbb{R}$ não é um valor crítico de I, então dado $\overline{\epsilon} > 0$ existe um $\epsilon \in (0,\overline{\epsilon})$ e $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ tais que para qualquer $u \in E$ e $t \in [0,1]$ tem-se:*

1º) *$\eta(t,u) = u$ se, $u \notin I^{-1}\left([c-\overline{\epsilon}, c+\overline{\epsilon}]\right)$;*

2º) *$\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$.*

Demonstração:

Como $c \in \mathbb{R}$ não é um valor crítico de I, devem existir constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que se $u \in I^{-1}\left([c-\alpha, c+\alpha]\right)$ implica que $\|I'(u)\| \geq \beta$, caso contrário, para quaisquer $\alpha, \beta > 0$ existirá $u^* \in I^{-1}\left([c-\alpha, c+\alpha]\right)$ com $\|I'(u^*)\| < \beta$.

Tome para cada $n \in \mathbb{N}$ $\alpha = \frac{1}{n}$ e $\beta = \frac{1}{n}$, assim existirá u_n^* tal que

$$c - \frac{1}{n} \leq I(u_n^*) \leq c + \frac{1}{n} \text{ com } \|I'(u_n^*)\| < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, passando o limite quando $n \to \infty$ obtemos que $I(u_n^*) \to c$ e $I'(u_n^*) \to 0$.

Como I satisfaz a condição (PS) temos que a menos de subsequências $u_n^* \to u$ em E.

Uma vez que $I \in C^1(E,\mathbb{R})$, temos $I(u_n^*) \to I(u)$ e $I'(u_n^*) \to I'(u)$.

Pela unicidade do limite segue que $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$, isto é, c é um valor crítico de I, o que é uma contradição.

Portanto, existem constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que, se $u \in I^{-1}([c-\alpha, c+\alpha])$ então $\|I'(u)\| \geq \beta$.

Agora considere $\overline{\epsilon} \in (0, \alpha]$ fixado, $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$ e $\delta = \dfrac{4\overline{\epsilon}}{\beta}$.

Sejam

$$A = I^{-1}([c-\overline{\epsilon}, c+\overline{\epsilon}]),\ B = I^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]) \text{ e } Y = \{u \in E; I'(u) \neq 0\}.$$

Além disso, considere $V : Y \to X$ um campo pseudo-gradiente para I em Y, isto é, V é uma aplicação contínua localmente Lipschitziana e tal que, para cada $u \in Y$ satisfaz:

(i) $\|V(u)\| \leq 2\|I'(u)\|$,

(ii) $\langle I'(u), V(u)\rangle \geq \|I'(u)\|^2$.

Considere também $0 \leq \rho \leq 1$ uma função localmente Lipschitziana definida por

$$\begin{array}{rcccl} \rho : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & u & \longmapsto & \rho(u) & = \frac{d(u, E\backslash A)}{d(u, E\backslash A) + d(u, B)}. \end{array}$$

Defina $f : E \to E$ por

$$f(u) = \begin{cases} -\rho(u)\frac{V(u)}{\|V(u)\|}, & \text{se } u \in A \\ 0, & \text{se } u \notin A. \end{cases}$$

Temos que f é localmente Lipschitziana e $\|f\| \leq 1$ para toda $u \in E$.

Temos ainda que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}w(t,u) = f(w(t,u)) \\ w(0,u) = u, \end{cases}$$

tem solução única, a qual denotamos por $w(t,u)$, que está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e para cada $u \in E$.

Seja $\eta : [0,1] \times E \to E$ definida por $\eta(t,u) = w(\delta t, u)$. Vamos mostrar que $\eta(t,u) = u$ se $u \notin I^{-1}([c-\overline{\epsilon}, c+\overline{\epsilon}]) = A$.

De fato, seja $w_1(t,u) = u$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Note que $\dfrac{d}{dt}w_1(t,u) = 0 = f(w_1(t,u))$, pois $u \notin A$, o que implica

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}w_1(t,u) = f(w_1(t,u)) \\ w_1(0,u) = u, \end{cases}$$

Por unicidade $w_1(t,u) = u = w(t,u)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo se $u \notin A$ temos que $\eta(t,u) = w(\delta t, u) = u$ para $t \in [0,1]$, o que mostra o primeiro item do Lema.

Para o segundo item do Lema note que para cada $u \in E$ fixado a função $I(w(t,u))$ é decrescente em t. Seja $u \in I^{c+\epsilon}$ iremos considerar dois casos:

(1) Para algum $t \in [0,\delta]$, temos $I(w(t,u)) \leq c - \epsilon$.

Assim como $I(w(t,u))$ é decrescente $I(w(\delta,u)) \leq I(w(t,u)) \leq c - \epsilon$, donde segue $\eta(1,u) = w(\delta,u) \in I^{c-\epsilon}$.

(2) Para todo $t \in [0,\delta]$, temos $I(w(t,u)) \geq c - \epsilon$.

Visto que $I(w(t,u))$ é decrescente $I(w(t,u)) \leq I(w(0,u)) = I(u) \leq c + \epsilon$.

Logo $w(t,u) \in I^{-1}\left([c-\epsilon, c+\epsilon]\right) = B$ para todo $t \in [0,\delta]$.

Usando que $I(w(t,u))$ é decrescente e que $\rho = 1$ em B, obtemos

$$\begin{aligned} I(w(\delta,u)) &= I(u) + \int_0^\delta \frac{d}{dt} I(w(t,u))dt \\ &\leq I(u) + \frac{1}{2}\int_o^\delta \|I'(w(t,u))\|dt \\ &\leq c + \epsilon - \frac{1}{2}\frac{4\epsilon}{\delta}\delta = c - \epsilon. \end{aligned}$$

Mostrando que

$$I(w(\delta,u)) \leq c - \epsilon.$$

Portanto, em qualquer caso, temos que $\eta(1,u) = w(\delta,u) \in I^{c-\epsilon}$ se $u \in I^{c+\epsilon}$, isto é, $\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$.

■

Teorema 5 (Teorema do Passo da Montanha) *Seja E um espaço de Banach e suponha que o funcional $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ e satisfaça a condição (PS).*
Suponha ainda que $I(0) = 0$ e

I_1) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$, e

I_2) existe $e \in E \setminus \overline{B}_\rho$ tal que $I(e) \leq 0$.

Então I possui um valor crítico $c \geq \alpha$. Além disso c pode ser caracterizado como

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{u \in g([0,1])} I(u) = \inf_{g\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(g(t)),$$

onde $\Gamma = \{g \in C([0,1],E); g(0) = 0 \text{ } e \text{ } g(1) = e\}$.

Demonstração: Note que $c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(g(t)) < \infty$. De fato, como $g \in C([0,1],E)$, $g([0,1]) \subset E$ é um conjunto compacto, logo o conjunto $\{I(g(t)); t \in [0,1]\}$ atinge seu máximo.

Afirmação: $\max_{t\in[0,1]} I(g(t)) \geq \alpha$, para toda $g \in \Gamma$. Com efeito, seja $g \in \Gamma$ e defina $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $h(t) = \|g(t)\|$.

É claro que h é contínua e ainda, $h(0) = \|g(0)\| = \|0\| = 0 < \rho$, e como $e \in E \setminus \overline{B}_\rho$ segue que $h(1) = \|g(1)\| = \|e\| > \rho$.

Desta forma $h(0) < \rho < h(1)$, pelo teorema do valor intermediário existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $h(t_0) = \rho$, isto é, $\|g(t_0)\| = \rho$.

Logo $g(t_0) \in \partial B_\rho$ e pela condição $I_1)$ segue que $I(g(t_0)) \geq \alpha$. Como $g \in \Gamma$ é qualquer obtemos que $\max_{t\in[0,1]} I(g(t)) \geq \alpha$, para toda $g \in \Gamma$.

Então o conjunto $H = \left\{\max_{t\in[0,1]} I(g(t)); g \in \Gamma\right\}$ é limitado inferiormente por α.

Portanto $c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(g(t))$ está bem definido e ainda α sendo uma cota inferior do conjunto H segue da definição de c que $c \geq \alpha$.

Basta agora mostrar que c é valor crítico de I.

Suponha que não seja, então pelo Lema da deformação, tomando $\overline{\epsilon} = \frac{\alpha}{2} > 0$ existe um $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$ e $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ tais que $\eta(1,u) = u$ se $I(u) \notin [c - \overline{\epsilon}, c + \overline{\epsilon}]$ e $\eta(1, A_{c+\epsilon}) \subset A_{c-\epsilon}$.

Pela definição de infimo, escolha $g \in \Gamma$ de modo que

$$\max_{t\in[0,1]} I(g(t)) \leq c + \epsilon, \tag{2.1}$$

e considere $h^*(t) = \eta(1, g(t))$. É claro que $h^* \in C([0,1],E)$.

Note que, sendo $g(0) = 0$ então $I(g(0)) = I(0) = 0$, por hipótese.

Logo $I(g(0)) = 0 < \frac{\alpha}{2} \leq c - \overline{\epsilon}$ e assim $I(g(0)) \notin [c - \overline{\epsilon}, c + \overline{\epsilon}]$. Pelo 1º) item do Lema da deformação segue que $h^*(0) = \eta(1, g(0)) = \eta(1, 0) = 0$.

De forma análoga, notemos que $g(1) = e$ e assim $I(g(1)) = I(e) \leq 0$, por hipótese. Logo $I(g(1)) \leq 0 < \frac{\alpha}{2} \leq c - \overline{\epsilon}$ o que implica $I(g(1)) \notin [c - \overline{\epsilon}, c + \overline{\epsilon}]$. Novamente pelo 1º) item do Lema da deformação segue que $h^*(1) = \eta(1, g(1)) = \eta(1, e) = e$.

Com isso, obtemos que $h^* \in \Gamma$.

Logo

$$\max_{t\in[0,1]} I(h^*(t)) \geq c. \tag{2.2}$$

Por (2.1) temos que $g([0,1]) \subset A_{c+\epsilon}$, pois para todo $t \in [0,1]$ tem-se $I(g(t)) \leq c+\epsilon$. Desta forma $h^*([0,1]) = \eta(1, g([0,1])) \subset \eta(1, A_{c+\epsilon}) \subset A_{c-\epsilon}$, pelo 2º) item do Lema da deformação.

Como $h^*([0,1]) \subset A_{c-\epsilon}$ temos que $I(h^*(t)) \leq c-\epsilon$, para todo $t \in [0,1]$, em particular

$$\max_{t\in[0,1]} I(h^*(t)) \leq c-\epsilon,$$

o que contradiz (2.2).

Portanto I possui um valor crítico $c \geq \alpha$.

$\blacksquare$

Capítulo

3

Existência e concentração de soluções

Neste capítulo, vamos estudar questões sobre a existência de soluções que apresentam fenômeno de concentração, para o problema (1.2), onde $\epsilon > 0$, $N \geq 5$ e o potencial V satisfaz as condições (V_1) e (V_2). Vamos admitir que f satisfaz as condições $(f_1) - (f_5)$.

Há dificuldades na abordagem direta do problema (1.2), uma destas dificuldades é de se verificar que o funcional associado ao problema satisfaz a condição de Palais-Smale. Por essa razão, para garantirmos existência de solução, vamos fazer uma modificação na não-linearidade de forma a recuperar a condição (PS). Por fim mostraremos que, para ϵ suficientemente pequeno, a solução do passo da montanha do problema modificado, é de fato solução do problema original.

3.1 O problema modificado

Considere V_0 dado pela condição (V_2). Sejam $k > 2V_0$ e $a > 0$ tais que $\max\left\{\dfrac{f(a)}{a}, \dfrac{f(-a)}{-a}\right\} \leq \dfrac{V_0}{k}$. Defina

$$\tilde{f}(\xi) = \begin{cases} \frac{-f(-a)}{a}\xi, & \text{se } \xi < -a \\ f(\xi), & \text{se } |\xi| \leq a \\ \frac{f(a)}{a}\xi, & \text{se } \xi > a \end{cases}$$

e $g(x,\xi) = \chi_\Omega(x) f(\xi) + (1 - \chi_\Omega(x))\tilde{f}(\xi)$.

Pode-se verificar que g satisfaz as seguintes propriedades:

(g_1) $g(x,\xi) = o(|\xi|)$, quando $\xi \to 0$,

(g_2) existem constantes $c_1, c_2 > 0$ e $1 \leq p < \frac{N+4}{N-4}$ se $N \geq 5$, tais que

$$|g(x,\xi)| \leq c_1|\xi| + c_2|\xi|^p,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^N$,

(g_3) existe $2 < \theta < p+1$ tal que

i) $0 < \theta G(x,\xi) \leq g(x,\xi)\xi$, $\forall x \in \Omega$ e $\xi \in \mathbb{R}$,

ii) $0 \leq 2G(x,\xi) \leq g(x,\xi)\xi \leq \frac{1}{k}V(x)\xi^2$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$ e $x \notin \Omega$, onde $G(x,\xi) = \displaystyle\int_0^\xi g(z,t)dt$,

(g_4) a função $\xi \to \dfrac{g(x,\xi)}{\xi}$ é não-decrescente para $\xi > 0$ e não-crescente para $\xi < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Considere o problema

$$\begin{cases} \epsilon^4 \Delta^2 u + V(x)u = g(x,u) \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u \in H^2(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{3.1}$$

Observe que o problema acima é equivalente ao seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta^2 v + V(\epsilon x)v = g(\epsilon x, v) \text{ em } \mathbb{R}^N \\ v \in H^2(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{3.2}$$

onde suas soluções u_ϵ e v_ϵ de (3.1) e (3.2), respectivamente, estão relacionadas por $v_\epsilon(x) = u_\epsilon(\epsilon x)$.

O espaço adequado para tratar do problema (3.2) é o seguinte espaço de Hilbert $E_\epsilon = \left(H^2(\mathbb{R}^N), <\cdot,\cdot>_\epsilon\right)$, cujo produto interno é dado por

$$< u, v >_\epsilon = \int_{\mathbb{R}^N} (\Delta u \Delta v + V(\epsilon x)uv)\, dx,$$

o qual dá origem a norma $\|u\|_\epsilon^2 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\Delta u|^2 + V(\epsilon x)u^2\right) dx.$

O funcional energia associado a (3.2) dado por

$$J_\epsilon(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\Delta v|^2 + V(\epsilon x)v^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(\epsilon x, v)dx,$$

está bem difinido em E_ϵ e é de classe C^1. Para garantirmos as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha vejamos o primeiro Lema.

Lema 2 *Assuma que a condição* (V_1) *se verifica e considere as propriedades* $(g_1)-(g_3)$. *Então para cada* $\epsilon > 0$ *existem constantes* ρ, $\beta > 0$ *e* $\phi \in E_\epsilon$ *com* $\|\phi\|_\epsilon > \rho$, *tais que*

i) $J_\epsilon(v) \geq \beta$, *sempre que* $\|v\|_\epsilon = \rho$.

ii) $J_\epsilon(\phi) < 0$.

Demonstração: Usando as propriedades (g_1) e (g_2), pode-se verificar que para todo $\eta > 0$ existe uma constante $C(\eta) > 0$ de modo que

$$|G(x,\xi)| \leq \frac{\eta}{2}|\xi|^2 + C(\eta)|\xi|^{p+1}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Assim pelas imersões de Sobolev, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |G(x,u)|dx &\leq \frac{\eta}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx + C(\eta)\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} \\
&= \frac{\eta}{2}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + C(\eta)\|u\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R})} \\
&\leq C_1\frac{\eta}{2}\|u\|^2_\epsilon + C_2 C(\eta)\|u\|^{p+1}_\epsilon \\
&\leq C\|u\|^2_\epsilon\left(\frac{\eta}{2} + C(\eta)\|u\|^{p-1}_\epsilon\right).
\end{aligned}$$

Escolhendo $\|u\|_\epsilon < \left(\dfrac{\eta}{2C(\eta)}\right)^{\frac{1}{p-1}} = \gamma$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |G(x,u)|dx \leq C\|u\|^2_\epsilon \eta.$$

Logo se $\rho \in (0,\gamma)$ e $u \in E_\epsilon$ é tal que $\|u\|_\epsilon = \rho$ obtemos que

$$J_\epsilon(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_\epsilon - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)dx \geq \frac{1}{2}\rho^2 - C\eta\rho^2.$$

Tomando η suficientemente pequeno de modo que $\rho^2\left(\dfrac{1}{2} - C\eta\right) := \beta > 0$, isto prova *i)*.

Pela propriedade (g_3) existem constantes $a_1, a_2 > 0$ e $2 < \theta < p+1$ tais que

$$|G(x,\xi)| \geq a_1|\xi|^\theta - a_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \text{ e } \xi \in \mathbb{R}.$$

Desta forma tomando $u \in C_0^\infty(\Omega) \setminus \{0\}$ segue que

$$
\begin{aligned}
J_\epsilon(tu) &= \frac{1}{2}\|tu\|_\epsilon^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,tu)dx \\
&\leq \frac{t^2}{2}\|u\|_\epsilon^2 - a_1|t|^\theta \int_{\mathbb{R}^N} |u|^\theta dx + \int_{\mathbb{R}^N} a_2 dx \\
&= \frac{t^2}{2}\|u\|_\epsilon^2 - a_1|t|^\theta \int_{supp(u)} |u|^\theta dx + \int_{supp(u)} a_2 dx \\
&\leq \frac{t^2}{2}\|u\|_\epsilon^2 - a_1|t|^\theta \int_{supp(u)} |u|^\theta dx + a_2|supp(u)|.
\end{aligned}
$$

Logo $J_\epsilon(tu) \to -\infty$, quando $t \to +\infty$, já que $\theta > 2$, e assim tomando $t_0 > 0$ de modo que $\|t_0 u\|_\epsilon > \rho$, $J_\epsilon(t_0 u) < 0$, o que prova *ii)*.

■

O próximo Lema nos garante que J_ϵ satisfaz a condição (PS).

Lema 3 *Assuma satisfeita a condição (V_1) e considere as propriedades $(g_1)-(g_3)$. Seja $\{v_n\}$ uma sequência em E_ϵ tal que $\{J_\epsilon(v_n)\}$ é uma sequência limitada de números reais e $J'_\epsilon(v_n) \to 0$. Então $\{v_n\}$ possui uma subsequência que converge em E_ϵ.*

Demonstração: Temos que $\{v_n\}$ é limitada em E_ϵ. De fato, como $\{J_\epsilon(v_n)\}$ é limitada, existe $M > 0$ tal que $|J_\epsilon(v_n)| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, com isso e pela propriedade (g_3) temos

$$
\begin{aligned}
M + \frac{1}{\theta}\|v_n\|_\epsilon o_n(1) &\geq J_\epsilon(v_n) - \frac{1}{\theta}J'_\epsilon(v_n)v_n \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \| u_n \|_\epsilon^2 + \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} (g(x,u_n)u_n - \theta G(x,u_n))\, dx \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \| v_n \|_\epsilon^2 + \frac{1}{\theta}\int_{\Omega^c} (g(\epsilon x,v_n)v_n - \theta G(\epsilon x,v_n))\, dx \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \| u_n \|_\epsilon^2 + \frac{(2-\theta)}{\theta}\int_{\Omega^c} G(x,u_n)dx \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \| v_n \|_\epsilon^2 + \frac{(2-\theta)}{2k\theta}\int_{\Omega^c} V(\epsilon x)v_n^2 dx \\
&\geq \left(\frac{\theta-2}{2\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\Delta v_n|^2 + \left(1-\frac{1}{k}\right) V(\epsilon x)v_n^2\right) dx \\
&\geq \left(\frac{\theta-2}{2\theta}\right)\left(1-\frac{1}{k}\right) \| v_n \|_\epsilon^2,
\end{aligned}
$$

o que implica $\{v_n\}$ limitada em E_ϵ. Como E_ϵ é um espaço de Hilbert e portanto reflexivo, $\{v_n\}$ limitada em E_ϵ temos que, a menos de subsequência $v_n \rightharpoonup v$ em E_ϵ. Esta convergência é na verdade forte. Com efeito, mostremos primeiramente que dado $\delta > 0$, existe um $R > 0$ de modo que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_R^c(0)} \left(|\Delta v_n|^2 + V(\epsilon x) v_n^2\right) dx < \delta. \tag{3.3}$$

Assuma que R é escolhido de tal forma que $\Omega \subset B_{\frac{R}{2}}(0)$. Seja $\eta_R \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\eta_R = 0$ em $B_{\frac{R}{2}}(0)$, $\eta_R = 1$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)$, $0 \leq \eta_R \leq 1$, $|\nabla \eta_R| \leq \frac{C}{R}$ e $|\Delta \eta_R| \leq \frac{C}{R^2}$. Logo, como $\{v_n\}$ limitada e $J'_\epsilon(v_n) \to 0$ temos

$$< J'_\epsilon(v_n), \eta_R v_n >= o_n(1),$$

e assim

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\Delta v_n \Delta(\eta_R v_n) + V(\epsilon x)\eta_R v_n^2\right] dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, v_n)\eta_R v_n dx = o_n(1),$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\Delta v_n|^2 + V(\epsilon x)v_n^2\right)\eta_R dx + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\Delta v_n \Delta\eta_R v_n + 2\nabla\eta_R \nabla v_n \Delta v_n\right) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, v_n)\eta_R v_n dx \\ &+ o_n(1).\end{aligned}$$

Usando a propriedade (g_3) temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\Delta v_n|^2 + V(\epsilon x)v_n^2\right)\eta_R dx &\leq -\int_{\mathbb{R}^N} \left(\Delta v_n \Delta\eta_R v_n + 2\nabla\eta_R \nabla v_n \Delta v_n\right) dx \\ &+\frac{1}{k}\int_{\Omega^c} V(\epsilon x) v_n \eta_R dx + o_n(1),\end{aligned}$$

e pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\int_{B_R^c(0)} \left(|\Delta v_n|^2 + V(\epsilon x)v_n^2\right) dx &\leq \frac{C}{R^2}\|v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|\Delta v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + o_n(1) \\ &+\frac{2C}{R}\|\nabla v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|\Delta v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Tomando o $\limsup$ na última expressão segue (3.3).

Agora, note que pelas propriedades (g_1) e (g_2), pode-se mostrar que existe $C' > 0$ de modo que

$$\int_{B_R^c(0)} |g(\epsilon x, v_n)v_n| dx \leq C' \int_{B_R^c(0)} (|v_n|^2 + |v_n|^p) dx.$$

Note ainda que, pelas imersões de Sobolev e por (3.3) temos que para n suficientemente grande

$$\int_{B^c_R(0)} |g(\epsilon x, v_n)v_n|dx \leq \tilde{C}\left(\|v_n\|^2_\epsilon + \|v_n\|^{p+1}_\epsilon\right) < \tilde{C}\left(\delta + \delta^{\frac{p+1}{2}}\right).$$

Pela integrabilidade de $x \mapsto g(\epsilon x, v)v$, temos que dado $\delta > 0$ existe um $R_\delta > 0$ tal que

$$\int_{B^c_R(0)} g(\epsilon x, v)vdx < \frac{\delta}{4}.$$

Tome δ_1 em (3.3) tal que $\tilde{C}\left(\delta_1 + \delta_1^{\frac{p+1}{2}}\right) < \frac{\delta}{4}$.

Então existe $R > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, (s.p.g. $R > R_\delta$) tal que, para todo $n \geq n_0$

$$\int_{B^c_R(0)} g(\epsilon x, v_n)v_n dx < \tilde{C}\left(\delta_1 + \delta_1^{\frac{p+1}{2}}\right) < \frac{\delta}{4}.$$

Logo, se $n \geq n_0$ temos que

$$\Big|\int_{B^c_R(0)} g(\epsilon x, v_n)v_n dx - \int_{B^c_R(0)} g(\epsilon x, v)vdx\Big| < \frac{\delta}{2}.$$

Observe que $v_n \rightharpoonup v$ em E_ϵ implica que $v_n \to v$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \frac{2N}{N-4}$ pela imersões compactas. Temos ainda que $v_n \to v$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Com isso, usando o Teorema da Convergência Dominada Generalizado (ver [8]), podemos mostrar que

$$\int_{B_R(0)} g(\epsilon x, v_n)v_n dx \to \int_{B_R(0)} g(\epsilon x, v)vdx,$$

e assim para $n \geq n_0$ obtemos que

$$\Big|\int_{B_R(0)} g(\epsilon x, v_n)v_n dx - \int_{B_R(0)} g(\epsilon x, v)vdx\Big| < \frac{\delta}{2}.$$

Portanto

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, v_n)v_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, v)vdx\Big| < \delta.$$

Por fim, note que v é solução fraca de (3.2). Com efeito, para toda $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, pela convergência fraca temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\Delta v_n \Delta\phi + V(\epsilon x)v_n\phi\right)dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \left(\Delta v\Delta\phi + V(\epsilon x)v\phi\right)dx.$$

Pela convergência forte em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e utilizando o Teorema da Convergência Dominada Generalizado segue que

$$\int_{supp(\phi)} g(\epsilon x, v_n)v_n dx \to \int_{supp(\phi)} g(\epsilon x, v)v dx.$$

Assim,

$$0 = \lim_{n\to\infty} J'_\epsilon(v_n)v = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\Delta v|^2 + V(\epsilon x)v^2\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, v)v dx = J'_\epsilon(v)v,$$

$$\Rightarrow \|v\|_\epsilon^2 = \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, v)v dx.$$

Observe ainda que

$$J'_\epsilon(v_n)v_n = \|v_n\|_\epsilon^2 - \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, v_n)v_n dx = o_n(1),$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|v_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, v_n)v_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, v)v dx = \|v\|_\epsilon^2.$$

Portanto $\|v_n\|_\epsilon \to \|v\|_\epsilon$ em E_ϵ e como já sabiamos que convergia fraco concluímos que $v_n \to v$ em E_ϵ.

$\blacksquare$

Pelo Teorema do Passo da Montanha, para cada $\epsilon > 0$ existe $v_\epsilon \in E_\epsilon$ solução fraca não-trivial de (3.2) tal que $J_\epsilon(v_\epsilon) = c_\epsilon$ onde

$$c_\epsilon = \inf_{g\in\Gamma_\epsilon} \max_{t\in[0,1]} J_\epsilon(g(t)),$$

e $\Gamma_\epsilon = \{g \in C([0,1], E_\epsilon); g(0) = 0 \text{ e } J_\epsilon(g(1)) < 0\}$.

Pela propriedade (g_4) podemos ainda caracterizar o nível minimax c_ϵ como

$$c_\epsilon = \inf_{u\in E_\epsilon\setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} J_\epsilon(tu) = \inf_{\mathcal{N}_\epsilon} J_\epsilon,$$

onde $\mathcal{N}_\epsilon$ é definida por

$$\mathcal{N}_\epsilon = \left\{u \in E_\epsilon \setminus \{0\}; J'_\epsilon(u)u = 0\right\}.$$

Agora, vamos considerar uma sequência $\{\epsilon_n\}$ tal que $\epsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Afirmamos que existe uma subsequência, que continuaremos a denotar por $\{\epsilon_n\}$, tal que $v_n := v_{\epsilon_n}$ é solução do problema original (1.2).

Para isto, devemos verificar a igualdade $g(\epsilon x, v_n(x)) = f(v_n(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Pela definição de g esta igualdade vale para todo $x \in \Omega_{\epsilon_n}$, onde $\Omega_{\epsilon_n} = \left\{ \dfrac{x}{\epsilon_n}; x \in \Omega \right\}$. Basta então mostrar que $g(\epsilon x, v_n(x)) = f(v_n(x))$ para $x \notin \Omega_{\epsilon_n}$. Ora, para $x \notin \Omega_{\epsilon_n}$ $g(\epsilon x, v_n(x)) = \tilde{f}(v_n(x))$ e $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $|x| \leq a$, logo é suficiente mostrar que $|v_n(x)| \leq a$ para todo $x \notin \Omega_{\epsilon_n}$, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Vamos então analisar a função $w_n(x) = v_n(x + y_n)$ onde $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ é tal que

$$\liminf_{n \to \infty} \int_{B_R(y_n)} v_n^2 dx \geq \beta > 0, \tag{3.4}$$

para $R, \beta > 0$. Assim, se mostramos que $|w_n(x)| \leq a$, $x \notin (\Omega_{\epsilon_n} - y_n)$ teremos que $|v_n(x)| \leq a$ para todo $x \notin \Omega_{\epsilon_n}$. Afim disto, veremos uma série de lemas, inclusive o lema que garante a existência da sequência $\{y_n\}$ em (3.4), que implicará no desejado.

Lema 4 *Suponha que f satisfaz $(f_1) - (f_5)$. Então, existe uma solução de estado mínimo para o seguinte problema*

$$\Delta^2 w + V_0 w = f(w) \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{3.5}$$

no nível $c_0 = \inf_{\gamma \in \Gamma_0} \sup_{0 \leq t \leq 1} J_0(\gamma(t))$, onde J_0 é o funcional energia associado a (3.5) e

$$\Gamma_0 = \left\{ \gamma \in C^0([0,1], H^2(\mathbb{R}^N)); \gamma(0) = 0 \text{ e } J_0(\gamma(1)) < 0 \right\}.$$

Demonstração: Seja $E_0 = (H^2(\mathbb{R}^N), \|.\|_0)$ onde $\|u\|_0 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\Delta u|^2 + V_0 u^2) dx$. Assim como foi feito no Lema 2 podemos mostrar que J_0 satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha. Então, existe uma sequência $\{w_n\} \subset E_0$, tal que $J_0(w_n) \to c_0$ e $J'(w_n) \to 0$ quando $n \to \infty$. Utilizando os mesmos argumentos usados no Lema 3 mostra-se que $\{w_n\}$ é uma sequência limitada em E_0.

Note que pelo Lema de Lions (ver [10]) uma entre as duas possibilidades ocorre:

(i) $w_n \to 0$ em $L^r(\mathbb{R}^N)$ para $2 < r < 2_* = \frac{2N}{N-4}$;

(ii) Existe uma sequência $(y_n) \in \mathbb{R}^N$ e constantes $R, \beta > 0$ tais que

$$\liminf_{n \to \infty} \int_{B_R(y_n)} w_n^2 dx \geq \beta.$$

De fato, suponha que (ii) não ocorre, ou seja, que para todo $R > 0$

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} w_n^2 dx \to 0,$$

quando $n \to \infty$.

Observe que (w_n) é limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$, enquanto que (∇w_n) é limitada em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$. Então, pelo Lema I.1 de [10] temos que $w_n \to 0$ em $L^r(\mathbb{R}^N)$ para $2 < r < 2_*$, ou seja, (i) ocorre.

Agora suponha que (i) ocorre. Como (w_n) é limitada em E_0 a menos de subsequências $w_n \rightharpoonup w$ em E_0 e assim $w_n \to w$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Por (i) $w_n \to 0$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$, donde segue que $w = 0$ q.t.p.

Logo, utilizando o Teorema da Convergência Dominada (ver [8]) temos que

$$c_0 + o_n(1) = J_0(w_n) - \frac{1}{2}J_0'(w_n)w_n = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}f(w_n)w_n - F(w_n)\right) dx = o_n(1),$$

o que é um absurdo, assim (i) não ocorre e portanto (ii) vale.

Defina $u_n(x) = w_n(x + y_n)$. Temos que (u_n) é limitada em E_0 e como J_0 é invariante por translações segue que $J_0(u_n) \to c_0$ e $J_0'(u_n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

Por (ii) temos que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(0)} u_n^2 dx > \beta.$$

Como (u_n) limitada em E_0, sabemos que (u_n) converge fraco para $u \in E_0 \setminus \{0\}$ e forte em $L^r_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para $2 < r < 2_*$, onde u é solução fraca não trivial de (3.5).

Resta mostrar que $J_0(u) = c_0$. Por um lado é fácil ver que $c_0 \leq J_0(u)$, para a outra desigualdade note que

$$J_0(u_n) - \frac{1}{2}J_0'(u_n)u_n = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)\right) dx,$$

então pelo Lema de Fatou (ver [8]) segue que

$$c_0 \geq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}f(u)u - F(u)\right) dx = J_0(u).$$

Portanto $J_0(u) = c_0$.

■

Lema 5 *Suponha que f satisfaz $(f_1) - (f_4)$ e V satisfaz $(V_1) - (V_2)$. Então,*

$$\limsup_{n\to\infty} c_{\epsilon_n} \leq c_0.$$

Demonstração: Vamos assumir sem perda de generalidade que $x_0 = 0$, onde x_0 é dado pela condição (V_2). Seja w a solução de (3.5) tal que $J_0(w) = c_0$. Seja ainda $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ uma função tal que $0 \leq \psi \leq 1$ e

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & x \in B_\rho(0) \\ 0 & x \notin B_{2\rho}(0), \end{cases}$$

onde $B_\rho(0) \subset B_{2\rho}(0) \subset \Omega$.

Defina $w_n(x) = \psi(\epsilon_n x)w(x)$ e note que $supp(w_n) \subset \Omega_{\epsilon_n}$ onde $\Omega_{\epsilon_n} = \{\frac{x}{\epsilon_n}; x \in \Omega\}$, $w_n \to w$ em $H^2(\mathbb{R}^N)$ e em $L^r(\mathbb{R}^N)$ para $2 < r < 2_*$.

Seja $\varphi_{\epsilon_n}(w_n) > 0$ tal que $\varphi_{\epsilon_n}(w_n)w_n \in \mathcal{N}_{\epsilon_n}$. Suponha que $\varphi_{\epsilon_n}(w_n) \to 1$ quando $n \to \infty$. Então

$$\begin{aligned} c_{\epsilon_n} &\leq J_{\epsilon_n}(\varphi_{\epsilon_n}(w_n)w_n) \\ &= \frac{\varphi_{\epsilon_n}(w_n)^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\Delta w_n|^2 + V(\epsilon_n x)w_n^2\right)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(\varphi_{\epsilon_n}(w_n)w_n)dx \\ &= J_0(\varphi_{\epsilon_n}(w_n)w_n) + \frac{\varphi_{\epsilon_n}(w_n)^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(V(\epsilon_n x) - V(0)\right)w_n^2 dx. \end{aligned}$$

E o resultado segue aplicando o Teorema da Convergência Dominada.

Resta então mostrar que de fato $\varphi_{\epsilon_n}(w_n) \to 1$ quando $n \to \infty$.

Afirmamos que $\{\varphi_{\epsilon_n}(w_n)\}$ é limitada. De fato, caso contrário, existiria $\epsilon_n \to 0$ tal que $\varphi_{\epsilon_n}(w_n) \to \infty$.

Por (f_4) pode-se verificar que considerando $\delta > 0$ existe $a_1 > 0$ e $2 < \theta < p+1$ tais que $|F(t)| \geq a_1|t|^\theta$ para todo $|t| > \delta$.

Seja $r > 0$ tal que $w(x) \geq \delta$ para todo $x \in B_r(0)$. Podemos ainda tomar r suficientemente pequeno de modo que $B_r(0) \subset B_\rho(0)$ e assim se $x \in B_r(0)$

$$\varphi_{\epsilon_n}(w_n)w_n(x) \geq w_n(x) = w(x) > \delta.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|w_n\|_{\epsilon_n}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(\varphi_{\epsilon_n}(w_n)w_n)\varphi_{\epsilon_n}(w_n)w_n}{\varphi_{\epsilon_n}(w_n)^2}dx &> \theta \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(\varphi_{\epsilon_n}(w_n)w_n)}{\varphi_{\epsilon_n}(w_n)^2}dx \\
&\geq \theta \int_{B_r(0)} \frac{F(\varphi_{\epsilon_n}(w_n)w_n)}{\varphi_{\epsilon_n}(w_n)^2}dx \\
&\geq a_1\theta \int_{B_r(0)} \frac{\varphi_{\epsilon_n}(w_n)^\theta w_n^\theta}{\varphi_{\epsilon_n}(w_n)^2}dx \\
&= a_1\theta\varphi_{\epsilon_n}(w_n)^{\theta-2}\|w_n\|_{L^\theta(B_r(0))}^\theta
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi_{\epsilon_n}(w_n)^{\theta-2} \leq \frac{\|w_n\|_{\epsilon_n}^2}{a_1\theta\|w_n\|_{L^\theta(B_r(0))}^\theta} \leq C,$$

o que é uma contradição. Portanto $\{\varphi_{\epsilon_n}(w_n)\}$ é limitada.

Agora vamos verificar que $\varphi_{\epsilon_n}(w_n) \nrightarrow 0$ quando $n \to \infty$. De fato, caso contrário como (w_n) é limitada segue que $\varphi_{\epsilon_n}(w_n)w_n \to 0$, quando $n \to \infty$. Note que por (f_2) e (f_3), dado $\eta > 0$ existe $A_\eta > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq \eta|t| + A_\eta|t|^p, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(\varphi_{\epsilon_n}(w_n)w_n)w_n^2}{\varphi_{\epsilon_n}(w_n)w_n}dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\eta|w_n|^2 + A_\eta\varphi_{\epsilon_n}(w_n)^{p-1}|w_n|^{p+1}\right)dx \\
&\leq \eta\|w_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + A_\eta\varphi_{\epsilon_n}(w_n)^{p-1}\|w_n\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)}^{p+1},
\end{aligned}$$

o que implica

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(\varphi_{\epsilon_n}(w_n)w_n)w_n^2}{\varphi_{\epsilon_n}(w_n)w_n}dx = 0. \tag{3.6}$$

No entanto

$$\|w_n\|_{\epsilon_n}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(\varphi_{\epsilon_n}(w_n)w_n)w_n^2}{\varphi_{\epsilon_n}(w_n)w_n}dx. \tag{3.7}$$

De (3.6) e (3.7) concluímos que $\|w_n\|_{\epsilon_n} \to 0$ o que contradiz $w_n \to w$ e w solução de (3.5) tal que $J_0(w) = c_0 > 0$. Então existem $\alpha, \beta > 0$ tais que $\alpha \leq \varphi_{\epsilon_n}(w_n) \leq \beta$.

Portanto toda subsequência convergente de $\{\varphi_{\epsilon_n}(w_n)\}$ converge para 1 pois, se existir $\overline{\varphi} \neq 1$, sem perda de generalidade suponha $\overline{\varphi} > 1$, limite de alguma subsequência de $\{\varphi_{\epsilon_n}(w_n)\}$ então

$$\|w_n\|_{\epsilon_n}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(\varphi_{\epsilon_n}(w_n)w_n)w_n}{\varphi_{\epsilon_n}(w_n)}dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(\overline{\varphi}w)w}{\overline{\varphi}}dx = \|w\|_{\epsilon_n}^2.$$

Por (f_5) temos que

$$\|w\|_{\epsilon_n}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(\overline{\varphi}w)w}{\overline{\varphi}} dx > \int_{\mathbb{R}^N} f(w)w dx = \|w\|_{\epsilon_n}^2,$$

o que é um absurdo, e assim concluímos o desejado.

■

Lema 6 *$\{v_n\}$ é uma sequência limitada em $H^2(\mathbb{R})$.*

Demonstração: A prova deste Lema é análoga à do Lema 3.

■

Lema 7 *Existe $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ e $R, \beta > 0$ tais que*

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} v_n^2 dx \geq \beta > 0.$$

Demonstração: Suponha o contrário, isto é, que

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} v_n^2 dx = 0.$$

Pelo Lema I.1 de [10] (com $q = 2$ e $p = \frac{2N}{N-2}$), $v_n \to 0$ em $L^r(\mathbb{R}^N)$ para $2 < r < 2_*$.

Assim pelo Teorema da Convergência Dominada:

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon_n x, v_n)v_n dx = o_n(1) \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} G(\epsilon_n x, v_n) dx = o_n(1),$$

quando $n \to \infty$.

Desta forma

$$c_{\epsilon_n} = J_{\epsilon_n}(v_n) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} g(\epsilon_n x, v_n)v_n + G(\epsilon_n x, v_n)\right) dx \longrightarrow 0, \tag{3.8}$$

quando $n \to \infty$.

Por outro lado, como o valor minimax é uma função crescente com respeito ao potencial, se $d > 0$ é o valor minimax associado ao problema

$$\begin{cases} \Delta^2 v + V_0 v = g(\epsilon_n x, v) \text{ em } \mathbb{R}^N \\ v \in H^2(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

temos que $c_{\epsilon_n} \geq d$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas isto contradiz (3.8). Portanto o resultado segue.

■

Para $R > 0$ dado, pelo Lema 7 podemos mostrar o seguinte resultado.

Lema 8 *A sequência* $\{\epsilon_n y_{\epsilon_n}\}$ *é limitada e* $dist(\epsilon_n y_{\epsilon_n}, \Omega) \leq \epsilon_n R$.

Demonstração: Para $\delta > 0$ dado seja K_δ uma δ-vizinhança de Ω. Seja $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi = 0$ em Ω, $\phi = 1$ em $\mathbb{R}^N \setminus K_\delta$, $|\nabla\phi| \leq \frac{c}{\delta}$ e $|\Delta\phi| \leq \frac{c}{\delta^2}$. Seja ainda $\phi_{\epsilon_n} = \phi(\epsilon_n x)$ e considere $v_n\phi_{\epsilon_n}$ como função teste em (3.2). Temos que $J'_{\epsilon_n}(v_n)v_n\phi_{\epsilon_n} = 0$, com isso segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\Delta v_n \Delta(v_n\phi_{\epsilon_n}) + V(\epsilon_n x)v_n^2\phi_{\epsilon_n}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon_n x, v_n)v_n\phi_{\epsilon_n} dx.$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \left[\Delta v_n \left(\Delta v_n\phi_{\epsilon_n} + 2\nabla v_n \nabla\phi_{\epsilon_n} + v_n\Delta\phi_{\epsilon_n}\right) + V(\epsilon_n x)v_n^2\phi_{\epsilon_n}\right] dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon_n x, v_n)v_n\phi_{\epsilon_n} dx.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\Delta v_n|^2 + V(\epsilon_n x)v_n^2\right)\phi_{\epsilon_n} dx = -\int_{\mathbb{R}^N} \left(2\nabla v_n\nabla\phi_{\epsilon_n}\Delta v_n + v_n\Delta\phi_{\epsilon_n}\Delta v_n\right) dx + \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon_n x, v_n)v_n\phi_{\epsilon_n} dx.$$

Note que $\phi_{\epsilon_n} = \phi(\epsilon_n x) = 0$ em $\Omega_{\epsilon_n} = \{\frac{x}{\epsilon_n}; x \in \Omega\}$ e $g(\epsilon_n x, v_n) = \tilde{f}(v_n)$ em $\Omega^c_{\epsilon_n}$. Assim temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\Delta v_n|^2 + V(\epsilon_n x)v_n^2\right)\phi_{\epsilon_n} dx = -\int_{\mathbb{R}^N} \left(2\nabla v_n\nabla\phi_{\epsilon_n}\Delta v_n + v_n\Delta\phi_{\epsilon_n}\Delta v_n\right) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}(v_n)v_n\phi_{\epsilon_n} dx$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\Delta v_n|^2 + \left(V(\epsilon_n x) - \frac{V_0}{k}\right)v_n^2\right]\phi_{\epsilon_n} dx &= -\int_{\mathbb{R}^N} \left(2\nabla v_n\nabla\phi_{\epsilon_n}\Delta v_n + v_n\Delta\phi_{\epsilon_n}\Delta v_n\right) dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} \left(\tilde{f}(v_n)v_n - \frac{V_0}{k}v_n^2\right)\phi_{\epsilon_n} dx \\
&\leq -\int_{\mathbb{R}^N} \left(2\nabla v_n\nabla\phi_{\epsilon_n}\Delta v_n + v_n\Delta\phi_{\epsilon_n}\Delta v_n\right) dx.
\end{aligned}$$

Mas isto implica que,

$$\begin{aligned} V_0\left(1-\frac{1}{k}\right)\int_{\mathbb{R}^N} v_n^2\phi_{\epsilon_n}dx &\leq -\int_{\mathbb{R}^N}(2\nabla v_n\nabla\phi_{\epsilon_n}\Delta v_n + v_n\Delta\phi_{\epsilon_n}\Delta v_n)\,dx \\ &\leq \frac{2\epsilon_n C}{\delta}\|v_n\|^2_{H^2(\mathbb{R}^N)} + \frac{C\epsilon_n^2}{\delta^2}\|v_n\|^2_{H^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \frac{\tilde{C}\epsilon_n}{\delta}\|v_n\|^2_{H^2(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Se para alguma sequência (ϵ_k) tivermos $B_R(y_{\epsilon_k}) \cap \frac{K_\delta}{\epsilon_k} = \emptyset$ então

$$\begin{aligned} V_0\left(1-\frac{1}{k}\right)\int_{B_R(y_{\epsilon_k})} v_n^2dx &\leq V_0\left(1-\frac{1}{k}\right)\int_{\mathbb{R}^N} v_n^2\phi_{\epsilon_k}dx \\ &\leq \frac{\tilde{C}\epsilon_k}{\delta}\|v_n\|^2_{H^2(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $k \to \infty$, o que contradiz o Lema anterior. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe x_n tal que $\epsilon_n x_n \in K_\delta$ e $|y_{\epsilon_n} - x_n| < R$. Como $dist(\epsilon_n y_n, \Omega) < \epsilon_n R + \delta$ para todo $\delta > 0$, o resultado segue.

■

Pelo Lema 8, podemos assumir que $\{\epsilon_n y_{\epsilon_n}\} \subset \overline{\Omega}$ para todo n suficientemente grande. De fato, se não ocorrer, podemos considerar $\epsilon_n^{-1}z_n$ ao invés de y_n, onde $z_n \in \overline{\Omega}$ e é tal que $|\epsilon_n y_n - z_n| \leq \epsilon_n R$. Desta forma, sequência $(z_n\epsilon_n^{-1})$ terá a propriedade do Lema 7, trocando R por $2R$. Assim a menos de subsequência $\epsilon_n y_{\epsilon_n} \to x_0' \in \overline{\Omega}$ e podemos agora demonstrar o seguinte resultado.

Lema 9 *As seguintes afirmações valem:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} c_{\epsilon_n} = c_0,$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} V(\epsilon_n y_{\epsilon_n}) = V_0.$

Demonstração: Consideremos $w_n(x) = v_{\epsilon_n}(x + y_{\epsilon_n})$. Note que pelo Lema 7

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{B_R(0)} w_n^2 \geq \beta > 0.$$

Usando que $\{v_{\epsilon_n}\}$ é limitada, segue que existe $w \in H^2(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$ tal que $w_n \rightharpoonup w$ em $H^2(\mathbb{R}^N)$, $w_n \to w$ em $L^r_{loc}(\mathbb{R}^N)$ onde $2 \leq r < 2_*$ e $w_n \to w$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

Como w_n satisfaz

$$\begin{cases} \Delta^2 w_n + V(\epsilon_n x + \epsilon_n y_n) w_n = g(\epsilon_n x + \epsilon_n y_n, w_n), \text{ em } \mathbb{R}^N \\ w_n \in H^2(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{3.9}$$

então w satisfaz no sentido fraco

$$\begin{cases} \Delta^2 w + V(x_0') w = \tilde{\chi}(x) f(w) + (1 - \tilde{\chi}(x)) \tilde{f}(x) =: \tilde{g}(x, w), \text{ em } \mathbb{R}^N \\ w \in H^2(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{3.10}$$

onde $\tilde{\chi}(x) = \lim_{n\to\infty} \chi(\epsilon_n x + \epsilon_n y_n)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

Uma vez que o funcional associado a (3.10) possui a geometria do passo da montanha, está bem definido o nível minimax $\tilde{c} > 0$ associado (3.10). Seja ainda $\tilde{J} : H^2(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ o funcional associado a (3.10).

Considere o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 w + V(x_0') w = f(w), \text{ em } \mathbb{R}^N \\ w \in H^2(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{3.11}$$

e seja $\bar{J}$ e $\bar{c}$ o funcional energia e o nível minimax associados a (3.11) respectivamente. Vamos mostrar que

$$\bar{c} = \tilde{c}.$$

Uma vez que $\tilde{G}(x, s) = \int_0^s \tilde{g}(x, t) dt \leq F(s)$, segue que $\bar{J}(u) \leq \tilde{J}(u)$, para todo $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$, o que implica $\bar{c} \leq \tilde{c}$. Para a outra desigualdade, vamos supor que

$$\tilde{J}(w) \leq \liminf_{n\to\infty} c_{\epsilon_n}. \tag{3.12}$$

Se (3.12) valer, então

$$\tilde{c} \leq \tilde{J}(w) \leq \liminf_{n\to\infty} c_{\epsilon_n} \leq \limsup_{n\to\infty} c_{\epsilon_n} \leq c_0 \leq \bar{c}. \tag{3.13}$$

Portanto, $\tilde{c} = \bar{c}$, o que implica $\tilde{c} = \bar{c} = c_0$. Por (3.13) temos que

$$\lim_{n\to\infty} c_{\epsilon_n} = c_0,$$

o que prova (i).

Agora, vamos mostrar que de fato (3.12) vale. A prova segue utilizando as ideias do Lema 2.2 de [5].

Com efeito, por estimativas elípticas, mostra-se que w_n converge para w em $C^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Assim, dado $R > 0$ temos

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\int_{B_R(0)}\left(|\Delta w_n|^2 + V(\epsilon_n x + \epsilon_n y_n)w_n^2\right)dx - \int_{B_R(0)} G(\epsilon_n x + \epsilon_n y_n, w_n)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{B_R(0)}\left(|\Delta w|^2 + V(x_0')w^2\right)dx - \int_{B_R(0)} \tilde{G}(x, w)dx.$$

Como a última integral converge para $\tilde{J}(w)$, quando $R \to \infty$, vemos então que dado $\delta > 0$, existe R grande o suficiente de modo que

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\int_{B_R(0)}\left(|\Delta w_n|^2 + V(\epsilon_n x + \epsilon_n y_n)w_n^2\right)dx - \int_{B_R(0)} G(\epsilon_n x + \epsilon_n y_n, w_n)dx\right] \geq \tilde{J}(w) - \delta.$$

Observe então que é suficiente mostra que

$$\liminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\int_{B^c_R(0)}\left(|\Delta w_n|^2 + V(\epsilon_n x + \epsilon_n y_n)w_n^2\right)dx - \int_{B^c_R(0)} G(\epsilon_n x + \epsilon_n y_n, w_n)dx\right] \geq -\delta \tag{3.14}$$

para todo R suficientemente grande.

Com efeito, se (3.14) valer então

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} c_{\epsilon_n} &= \liminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\Delta w_n|^2 + V(\epsilon_n x + \epsilon_n y_n)w_n^2\right)dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(\epsilon_n x + \epsilon_n y_n, w_n)dx\right] \\ &\geq \tilde{J}(w) - 2\delta,\end{aligned}$$

para todo $\delta > 0$. Desta forma (3.12) estará provado.

Resta então mostrar que (3.14) se verifica. Para isto dado $R > 0$, seja $\eta_R \in C^2(\mathbb{R}^N)$ tal que $\eta_R = 1$ em $B^c_R(0)$, $\eta_R = 0$ em $B_{R-1}(0)$ e $|\nabla \eta_R| \leq C$, $|\Delta \eta_R| \leq C$, onde C é uma constante que independe de R. Considerando então $\varphi = \eta_R w_n$ como função teste em

(3.9), temos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}^N} \big(\Delta w_n \Delta(\eta_R w_n) + V(\epsilon_n x + \epsilon_n y_n)\eta_R w_n^2 - g(\epsilon_n x + \epsilon_n y_n, w_n)\eta_R w_n\big)\, dx \\
&= \int_{B_R^c(0)} \big(|\Delta w_n|^2 + V(\epsilon_n x + \epsilon_n y_n) w_n^2 - 2G(\epsilon_n x + \epsilon_n y_n, w_n)\big)\, dx \\
&+ \int_{B_R^c(0)} (2G(\epsilon_n x + \epsilon_n y_n, w_n) - g(\epsilon_n x + \epsilon_n y_n, w_n) w_n)\, dx \\
&+ \int_{B_R(0)\setminus B_{R-1}(0)} \big(\Delta w_n \Delta(\eta_R w_n) + V(\epsilon_n x + \epsilon_n y_n)\eta_R w_n^2 - g(\epsilon_n x + \epsilon_n y_n, w_n)\eta_R w_n\big)\, dx \\
&= A_{1,n} + A_{2,n} + A_{3,n}.
\end{aligned}$$

Observe que (3.14) estará provado se

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2} A_{1,n} \geq -\delta.$$

Por (g_3), $A_{2,n} \leq 0$. Pela convergência de w_n para w em $C^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ temos que

$$\lim_{n\to\infty} A_{3,n} = \int_{B_R(0)\setminus B_{R-1}(0)} \big(\Delta w \Delta(\eta_R w) + V(x_0')\eta_R w^2 - \tilde{g}(x, w)\eta_R w\big)\, dx.$$

Como a última integral, quando calculada sobre $\mathbb{R}^N$, converge, então para todo $R > 0$ grande o suficiente, temos que

$$\lim_{n\to\infty} |A_{3,n}| \leq \delta.$$

Desta forma

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2} A_{1,n} &= \liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{2}\left(A_{2,n} + A_{3,n}\right) \\
&\geq \liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{2} A_{3,n} \\
&\geq -\frac{\delta}{2}.
\end{aligned}$$

O que verifica (3.14). Portanto (3.12) estará provado.

Para (ii) note que, se (ii) não valer, então $V(x_0') > V_0$ e assim $\tilde{c} = \bar{c} > c_0$ o que é uma contradição.

■

Lema 10 *Seja $\{u_n\} \subset H^2(\mathbb{R}^N)$ uma sequência (PS) para J_0 tal que $J_0(u_n) \to d$. Se $u_n \rightharpoonup 0$ e $u_n \not\to 0$ em $H^2(\mathbb{R}^N)$, então $d \geq c_0$.*

Demonstração: Seja $s_n > 0$ tal que $s_n u_n \in \mathcal{N}_0$. Vamos mostrar que

$$\limsup_{n\to\infty} s_n \leq 1. \tag{3.15}$$

Suponha o contrário, que exista $\delta > 0$ de modo que

$$s_n \geq 1+\delta, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.16}$$

a menos de subsequências. Podemos mostrar, assim como foi feito no Lema 3, que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em $H^2(\mathbb{R}^N)$.

Como $J_0'(u_n)u_n = o_n(1)$ e $J_0'(s_n u_n)s_n u_n = 0$ segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{f(s_n u_n)}{s_n u_n} - \frac{f(u_n)}{u_n} \right) u_n^2 dx = o_n(1). \tag{3.17}$$

Pelo Lema I.1 em [10] existe $R, \beta > 0$ e $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tais que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} u_n^2 dx \geq \beta. \tag{3.18}$$

Seja $\overline{u}_n(x) = u_n(x+y_n)$ e note que $\{\overline{u}_n\}$ é também limitada em $H^2(\mathbb{R}^N)$. Logo $\overline{u}_n \rightharpoonup \overline{u} \in H^2(\mathbb{R}^N)$ e por (3.18), $\overline{u} \neq 0$ em $\Lambda \subset B_R(0)$ com $|\Lambda| > 0$.

Por (f_5), (3.16), (3.17) e pelo Lema de Fatou temos que

$$0 < \int_{\Lambda} \left(\frac{f((1+\delta)\overline{u})}{(1+\delta)\overline{u}} - \frac{f(\overline{u})}{\overline{u}} \right) \overline{u}^2 = 0,$$

o que é uma contradição. Logo (3.15) vale.

Agora temos dois casos pra considerar:

1º) $s_n \to s < 1$, a menos de subsequência. Sem perda de generalidade podemos supor que $s_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{aligned} c_0 &\leq J_0(s_n u_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} f(s_n u_n) s_n u_n - F(s_n u_n) \right) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} f(u_n) u_n - F(u_n) \right) dx \\ &= J_0(u_n) - \frac{1}{2} J_0'(u_n) u_n + o_n(1) \\ &= d + o_n(1), \end{aligned}$$

e neste caso o resultado segue.

2º) A menos de subsequência $s_n \to 1$ quando $n \to \infty$.

Neste caso

$$d + o_n(1) = J_0(u_n) = J_0(s_n u_n) + J_0(u_n) - J_0(s_n u_n).$$

Então

$$d + o_n(1) \geq c_0 + J_0(u_n) - J_0(s_n u_n). \tag{3.19}$$

Note que

$$J_0(u_n) - J_0(s_n u_n) = \frac{(1-s_n^2)}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\Delta u_n|^2 + V_0 u_n^2\right) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \left(F(s_n u_n) - F(u_n)\right) dx.$$

Note ainda que, como $s_n \to 1$ e $\{u_n\}$ limitada segue

$$\frac{(1-s_n^2)}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\Delta u_n|^2 + V_0 u_n^2\right) dx = o_n(1).$$

Agora veja que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(F(s_n u_n) - F(u_n)\right) dx = o_n(1).$$

De fato, pelo Teorema do Valor Médio segue que

$$|F(s_n u_n) - F(u_n)| = |f(\theta_n)||s_n - 1||u_n|,$$

onde $\theta_n \in (u_n, s_n u_n)$ ou $\theta_n \in (s_n u_n, u_n)$. Temos por (f_3) que

$$|f(\theta_n)| \leq a_1|\theta_n| + a_2|\theta_n|^p \leq a_1||u_n| + |s_n||u_n|| + a_2||u_n| + |s_n||u_n||^p,$$

o que implica

$$|f(\theta_n)| \leq C_1|u_n| + C_2|u_n|^p.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \left(F(s_n u_n) - F(u_n)\right) dx &\leq C|s_n - 1|\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx + C|s_n - 1|\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{p+1} dx \\
&= o_n(1).
\end{aligned}$$

Desta forma $J_0(u_n) - J_0(s_n u_n) = o_n(1)$ e portanto de (3.19) obtemos que

$$d + o_n(1) \geq c_0 + o_n(1),$$

e concluímos o desejado.

■

Lema 11 *Seja $\{z_n\} \subset H^2(\mathbb{R}^N)$ uma sequência tal que $J_0(z_n) \to c_0$ e $z_n \in \mathcal{N}_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $z_n \rightharpoonup z \neq 0$ em $H^2(\mathbb{R}^N)$, então $z_n \to z$ em $H^2(\mathbb{R}^N)$ a menos de subsequências.*

Demonstração: Pelo Princípio Variacional de Ekeland (ver Teorema 8.5 em [16]), podemos assumir que $\{z_n\}$ é uma sequência (PS) para J_0 em $H^2(\mathbb{R}^N)$ tal que $J_0 \to c_0$. Assim, como z_n converge fraco pra z em $H^2(\mathbb{R}^N)$, forte em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para $\leq p < 2_*$ e em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$, podemos mostrar pelas imersões compactas de Sobolev que $J_0'(z) = 0$. Logo $z \in \mathcal{N}_0$.

Note que pelo Lema de Fatou segue que

$$\begin{aligned} c_0 &= \lim_{n\to\infty} J_0(z_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} f(z_n) z_n - F(z_n) \right) dx \right] \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} f(z) z - F(z) \right) dx \\ &= J_0(z) \\ &\geq c_0, \end{aligned}$$

e assim $J_0(z) = c_0$.

Seja $u_n = z_n - z$ e note que pelo Lema de Brezis-Lieb (ver Lema 1.32 em [16]), $\{u_n\}$ é tal que $J_0(u_n) \to d$, onde $d = c_0 - J_0(z) = 0$.

Note que $u_n \rightharpoonup 0$ em $H^2(\mathbb{R}^N)$. Afirmamos que $u_n \to 0$ em $H^2(\mathbb{R}^N)$, pois caso contrário, se $u_n \not\to 0$, pelo Lema 10 teríamos que $d \geq c_0 > 0$, o que contradiz o fato de que $d = 0$

■

Lema 12 *A sequência $\{w_n\}$ contém uma subsequência fortemente convergente em $H^2(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração: Pelo Lema 9 temos que

$$\lim_{n\to\infty} J_{\epsilon_n}(v_n) = \lim_{n\to\infty} c_{\epsilon_n} = c_0.$$

Dado $v \in H^2(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, por (g_4), existe $\varphi_0 > 0$ tal que $\varphi_0(v)v \in \mathcal{N}_0$.

Seja $\tilde{w}_n = \varphi_0(w_n)w_n$, então

$$\begin{aligned} c_0 \leq J_0(\tilde{w}_n) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\Delta \tilde{w}_n|^2 + V_0\tilde{w}_n^2\right)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(\tilde{w}_n)dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\Delta \tilde{w}_n|^2 + V(\epsilon_n x + \epsilon_n y_n)\tilde{w}_n^2\right)dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(\epsilon_n x + \epsilon_n y_n, \tilde{w}_n)dx \\ &= J_{\epsilon_n}(\varphi_0(w_n)v_n) \leq J_{\epsilon_n}(v_n) = c_{\epsilon_n} = c_0 + o_n(1), \end{aligned}$$

o que implica que $J_0(\tilde{w}_n) \to c_0$ quando $n \to \infty$.

Vamos provar agora que $\varphi_0(w_n) \to \varphi_0 > 0$ a menos de subsequência. Observe que existe $M > 0$ tal que $|\varphi_0(w_n)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, como $w_n \nrightarrow 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|w_n\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} > \delta$ a menos de subsequência.

É fácil ver que $\{\tilde{w}_n\}$ é um sequência limitada em $H^2(\mathbb{R}^N)$. Então

$$|\varphi_0(w_n)|\delta < \|\varphi_0(w_n)w_n\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} \leq k$$

$$\Rightarrow |\varphi_0(w_n)| \leq \frac{k}{\delta} = M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo $\varphi_0(w_n) \to \varphi_0 \geq 0$. Note que $\varphi > 0$, pois caso contrário,

$$\|\tilde{w}_n\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} = |\varphi_0(w_n)|\|w_n\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} \to 0,$$

quando $n \to \infty$, o que é um absurdo.

Então $\tilde{w}_n = \varphi_0(w_n)w_n \rightharpoonup \varphi_0 w \neq 0$ em $H^2(\mathbb{R}^N)$.

Portanto, pelo Lema 11 $\varphi_0(w_n)w_n \to \varphi_0 w$ em $H^2(\mathbb{R}^N)$ a menos de subsequência.

■

Combinando o Lema 12 com as imersões de Sobolev, seque que $w_n \to w \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \frac{N+4}{N-4}$. Então utilizando a recíproca do Corolário 4.27 em [4], obtemos que

$$\int_{B_R^c(0)} |w_n|^{2_*}dx \to 0 \text{ quando } R \to \infty \text{ uniformemente em } n. \tag{3.20}$$

Podemos assim mostrar o seguinte lema.

Lema 13 *$w_n(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$, uniformemente em n.*

Demonstração: Por estimativas estabelecidas por Ramos em [14] temos que

$$\|w_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

onde K independe de n.

Como $\{w_n\}$ é limitada em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, então dado qualquer $x \in \mathbb{R}^N$, a função $w_n \in L^q(B_1(x))$ para todo $q \geq 1$. Como w_n é solução de (3.9) segue do Teorema 7.1 de [1] que

$$\begin{aligned}
\|w_n\|_{W^{4,q}(B_1(x))} &\leq C\left(\|f(w_n)\|_{L^q(B_2(x))} + \|w_n\|_{L^q(B_2(x))}\right)\\
&\leq C\|w_n\|_{L^q(B_2(x))}\\
&\leq C\|w_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{\frac{q-2_*}{q}}\|w_n\|_{L^{2_*}(B_2(0))}^{2_*}\\
&= C\|w_n\|_{L^{2_*}(B_2(0))}^{2_*},
\end{aligned}$$

onde a constante $C > 0$ não depende de x e de n. Observe que na desigualdade acima foi usada a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\|f(w_n)\|_{L^q(B_2(x))}^q &= \int_{B_2(x)} |f(w_n)|^q dy\\
&\leq C\int_{B_2(x)} \left(|w_n| + |w_n|^p\right)^q dy\\
&\leq C\left[\|w_n\|_{L^q(B_2(x))} + \left(\int_{B_2(x)} |w_n|^{pq} dy\right)^{\frac{1}{q}}\right]^q\\
&\leq C\left[\|w_n\|_{L^q(B_2(x))} + K\|w_n\|_{L^q(B_2(x))}\right]^q\\
&\leq C\|w_n\|_{L^q(B_2(x))}^q.
\end{aligned}$$

Para $q > N$ temos a seguinte imersão contínua $W^{4,q}(B_1(x)) \hookrightarrow C^{3,\alpha}(\overline{B}_1(x))$, para $\alpha \in \left(0, 1 - \frac{N}{q}\right)$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\|w_n\|_{C^{3,\alpha}(\overline{B}_1(x))} &\leq C\|w_n\|_{W^{4,q}(B_1(x))}\\
&\leq C\|w_n\|_{L^{2_*}(B_2(x))}^{2_*}.
\end{aligned}$$

Agora, utilizando (3.20) vemos que

$$|w_n(x)| \to 0, \text{ quando } |x| \to \infty,$$

uniformemente em n.

■

Finalmente, podemos verificar que v_n é de fato solução de (1.2). Pelos Lemas 12 e 13, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\rho > 0$ tal que

$$|w_n(x)| < a, \forall x \in B_\rho(0)^c, \forall n \geq n_0.$$

Como $x_0' \in \Omega$ e $\epsilon_n y_{\epsilon_n} \to x_0'$, é possível escolher $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $B_\rho(0) \subset (\Omega_{\epsilon_n} - y_n)$ para todo $n \geq n_1$. Tomando $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ temos que

$$g(\epsilon_n x + \epsilon_n y_n, w_n(x)) = f(w_n(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Desta forma, para $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ segue que w_n satisfaz

$$\Delta^2 w_n + V(\epsilon_n x + \epsilon_n y_n) w_n = f(w_n), \quad \mathbb{R}^N,$$

o que implica v_n satisfaz (1.2).

Para provar o comportamento de concentração de solução, afirmamos que existe $\rho > 0$ tal que $\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \|w_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} > \rho$, para todo $n \in \mathbb{N}$ a menos de subsequência. Caso contrário, se $\|w_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \to 0$, então

$$\begin{aligned}
\|w_n\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\Delta w_n|^2 + V(\epsilon_n x + \epsilon_n y_n) w_n\right) dx \\
&= C \int_{\mathbb{R}^N} f(w_n) w_n dx \\
&\leq \|w_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} f(w_n) dx \to 0
\end{aligned}$$

quando $n \to 0$, o que contradiz o fato de que $w_n \to w$ e $w \neq 0$.

Seja x_n um ponto de máximo de $|u_n|$ em $\mathbb{R}^N$, então

$$p_n := \frac{x_n - \epsilon_n y_n}{\epsilon_n}$$

é ponto de máximo de $|w_n|$. Pelo Lema 13, existe um $R_0 > 0$ tal que $p_n \in B_{R_0}(0)$ para todo n suficientemente grande. Então a menos de subsequência $p_n \to p_0$ quando $n \to \infty$.

Logo

$$x_n = \epsilon_n p_n + \epsilon_n y_n \to x_0' \in \Omega, \text{ quando } n \to \infty,$$

onde $V(x_0') = V_0$, o que mostra o Teorema 1.

Capítulo

4

Considerações Finais

Neste trabalho foi estudado uma versão estacionária da equação de Schrödinger não-linear biharmônica e o objeto principal do estudo foi o recente artigo de Pimenta e Soares [11]. O assunto tratado está em evidência na literatura matemática na área de Equações Diferenciais Parciais e realmente a equação de Schrödinger vem sendo estudada ao longo dos anos por diversos pesquisadores em todo o mundo.

No capítulo introdutório é enunciado o Teorema 1 que é o objetivo do trabalho, o resultado busca soluções não-triviais do problema (1.2) quando um parâmetro ϵ tende a zero. No segundo capítulo foi apresentado estudos preliminares indispensáveis para abordar as técnicas necessárias a fim de se obter soluções da equação, resultados de Análise Não-Linear compõem o capítulo como o conhecido Teorema do Passo da Montanha. Já no terceiro Capítulo demonstra-se o Teorema 1, entretanto foi preciso fazer uma modificação no problema de modo que a compacidade do funcional energia associado ao problema seja resgatada e assim mostra-se a existência de solução do problema modificado. Após isto uma série de Lemas são provados para verificar que de fato a solução do problema modificado é também solução do problema original.

No desenvolvimento do trabalho tive a oportunidade de conhecer vários outros trabalhos visando este assunto, onde diferentes técnicas são utilizadas, me proporcionando assim uma certa familiaridade com as formas de abordagem das Equações Elípticas. Tal familiaridade julgo ser fundamental para dar continuidade aos meus estudos em nível de doutorado, quer seja nesta área ou em outras áreas da Matemática.

Referências

[1] S. Agmon. The L^p approach to the Dirichlet problem. Part I: regularity theorems. *Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa-Classe Di Scienze*, 13(4):405–448, 1959.

[2] C. O. Alves; G. M. Figueiredo. Existence and multiplicity of positive solutions to a p-Laplacian equation in $\mathbb{R}^n$. *Differential and Integral Equations*, 19(2):143–162, 2006.

[3] C. O. Alves; G. M. Figueiredo. On multiplicity and concentration of positive solutions for a class of quasilinear problems with critical exponential growth in $\mathbb{R}^n$. *Journal of Differential Equations*, 246(3):1288–1311, 2009.

[4] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer, 2011.

[5] M. Del Pino; P. L. Felmer. Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 4(2):121–137, 1996.

[6] G. M. Figueiredo; M. T. O. Pimenta. Multiplicity of solutions for a biharmonic equation with subcritical or critical growth. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, 20(3):519–534, 2013.

[7] A. Floer; A. Weinstein. Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equation with a bounded potential. *Journal of Functional Analysis*, 69(3):397–408, 1986.

[8] G. B. Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*. John Wiley & Sons, 2013.

[9] D. Gilbarg; N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*, volume 224. springer, 2001.

[10] P. L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. the locally compact case, part 2. 1(4):223–283, 1984.

[11] M. T. O. Pimenta; S. H. M. Soares. Existence and concentration of solutions for a class of biharmonic equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 390(1):274–289, 2012.

[12] M. T. O. Pimenta; S. H. M. Soares. Singularly perturbed biharmonic problems with superlinear nonlinearities. *Advances in Differential Equations*, 19(1/2):31–50, 2014.

[13] P. H. Rabinowitz. On a class of nonlinear Schrödinger equations. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 43(2):270–291, 1992.

[14] M. Ramos. Uniform estimates for the biharmonic operator in $\mathbb{R}^n$ and applications. *Communications in Applied Analysis*, 8(4):435–458, 2004.

[15] X. Wang. On concentration of positive bound states of nonlinear Schrödinger equations. *Communications in Mathematical Physics*, 153(2):229–244, 1993.

[16] M. Willem. *Minimax theorems.* Number 24. Springer Science & Business Media, 1996.