

unesp 

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA



**PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA**

Ações de Grupo sobre Conjuntos e o Teorema de Burnside

Ana Paula Brandão de Melo

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO/SP

2020



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Ações de Grupo sobre Conjuntos e o Teorema de Burnside

Ana Paula Brandão de Melo

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Rio Claro.

Orientadora
Profa. Dra. Elíris Cristina Rizzioli

Rio Claro
2020

M528a Melo, Ana Paula Brandão de
 Ações de Grupo sobre Conjuntos e o Teorema de Burnside / Ana
 Paula Brandão de Melo. -- Rio Claro, 2020
 150 p. : il., tabs., fotos + 1 CD-ROM

 Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual
 Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio
 Claro

 Orientadora: Elíris Cristina Rizziolli

 1. Ação de Grupo sobre Conjuntos. 2. Isotropia. 3. Órbitas. 4.
 Teorema de Burnside. 5. Escher. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

TERMO DE APROVAÇÃO

Ana Paula Brandão de Melo

AÇÕES DE GRUPO SOBRE CONJUNTOS E O TEOREMA DE
BURNSIDE

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Elíris Cristina Rizzioli
Orientadora

Prof. Dr. João Peres Vieira
Departamento de Matemática - UNESP/Rio Claro

Prof. Dr. Rodrigo Martins
Departamento de Matemática - UEM/Maringá

Rio Claro, 08 de dezembro de 2020

*Dedico essa vitória
aos meus pais e a todos que passaram em minha vida,
principalmente a todos os meus professores,
pois através de cada um
eu me tornei a pessoa que sou hoje.*

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, por nunca ter desistido de mim, sempre me dando força e sabedoria para enfrentar as adversidades da vida, pois da mesma forma que ele trabalhou em oculto na vida de Ester ele fez o mesmo na minha, aliás ele me preparou e me mostrou que não importava a onde eu estivesse, ele sempre estaria comigo, pois seu amor é imenso. Além disso, colocou anjos em forma de pessoas em meu caminho como: minha orientadora maravilhosa, o grupo PET Matemática - UNESP Rio Claro, grupo Pocket, grupo da Luluzinha, grupo da Lurdes Paulina, grupo Faz de Conto, família Carvalho que me acolheu e cuidou de mim com tanto carinho, aos meus amigos Naty, André, Lu e Isaac que estiveram ao meu lado em uma fase difícil, minha amiga e irmã de alma e sobrenome Roberta Paula Brandão Novais, agradeço o meu amigo Rafael Froner por me auxiliar sempre com o LaTeX e a minha amiga Derê, musa do GeoGebra, pelo auxílio com esse programa e por compartilhar esse momento mágico comigo. Em especial, a minha amiga irmã Babuína (Dani Souza) que esteve e está comigo em todo tempo, Odinha e Gerson, meus parceiros que a graduação me presenteou, Leo Chimini por ter me introduzido ao meio acadêmico e me apoiado em todos os momentos, José Paulo e Allan Edley por ter me apresentado essa parte linda da Álgebra.

Agradeço o Leonardo Henrique de Carvalho por ter me auxiliado desde o dia que nos conhecemos, me mostrando um mundo diferente, cheio de amor, carinho e companheirismo, uma amizade que cresceu e floresceu como um lindo campo de girassóis o qual sempre renasce cada dia mais belo. Além disso, me mostrou que todo pântano por mais escuro que seja traz consigo uma lótus, sensível, mas ao mesmo tempo resistente, a qual, faz daquele lugar escuro e sombrio, o mais lindo. Obrigada por ser essa pessoa especial, iluminada e que torna os meus dias mais incríveis.

Agradeço a vida, pelos momentos bons e nem tão bons, pois eles contribuíram para que eu me tornasse mais forte e com isso, me apresentou pessoas queridas.

Agradeço o João Peres por ser esse excelente profissional, por ter analisado o meu trabalho com todo carinho e de forma minuciosa, além disso em um momento complicado o senhor entrou na sala da Elíris e me elogiou, o senhor podia não saber, mas aquelas palavras fizeram a diferença na minha vida e me ajudaram a prosseguir nesse sonho, pois era um momento que eu não estava vendo em mim qualidades em relação ao meio acadêmico, porém o senhor viu, muito obrigada!

Elíris, o que falar de você? Uma pessoa espetacular, que emite luz, que foi e é uma professora excelente em conhecimento, didática, paixão, compreensão, persistência e uma série de qualificações. Além disso, é uma ótima tutora, mãe, amiga, orientadora, aliás você é incrível e esteve comigo em todos os momentos, você é uma mulher que eu admiro muito, na qual eu me espelho e desejo que essa luz irradie muitas pessoas nesse mundo incrível da Matemática e da vida. Obrigada por tudo!

Agora, vou agradecer os meus amores, o real motivo de mais uma grande conquista,

minha mãe Cristina Brandão e meu pai Sebastião Melo, pois os senhores são peças fundamentais nessa vitória, agradeço por terem me apoiado e estado ao meu lado nesse e em todos os momentos, vocês são maravilhosos, meus presentes de Deus e eu os amo muito.

Não citei o nome de todos, mas cada um sabe da importância que tiveram, têm e continuarão tendo em minha vida. Agradeço todos os meus amigos sejam eles de Rio Claro, Panorama, Paulicéia, Campinas, Três Lagoas, Campo Grande e mundo, ao grupo PET Conexões de Saberes Matemática - Três Lagoas/MS, a minha família, em especial o meu tio Osmar Araújo que antes mesmo de descansar sempre desejou que eu deixasse o coração me guiar e aos meus professores desde a Educação Infantil até os do Mestrado, pois todos contribuíram para quem eu sou hoje.

Com isso, encerro os meus agradecimentos com um poema de Cris Pizzimenti:

Sou feita de retalhos.

Pedacinhos coloridos de cada vida que passa pela minha e que vou costurando na alma.

Nem sempre bonitos, nem sempre felizes, mas me acrescentam e me fazem ser quem eu sou.

Em cada encontro, em cada contato, vou ficando maior...

Em cada retalho, uma vida, uma lição, um carinho, uma saudade...

Que me tornam mais pessoa, mais humana, mais completa.

E penso que é assim mesmo que a vida se faz: de pedaços de outras gentes que vão se tornando parte da gente também.

E a melhor parte é que nunca estaremos prontos, finalizados...

Haverá sempre um retalho novo para adicionar a alma.

Portanto, obrigada a cada um de vocês, que fazem parte da minha vida e que me permitem engrandecer minha história com os retalhos deixados em mim. Que eu também possa deixar pedacinhos de mim pelos caminhos e que eles possam ser parte das suas histórias.

E que assim, de retalho em retalho, possamos nos tornar, um dia, um imenso bordado de “nós”.

*“Seja forte e corajoso!
Não fique desanimado, nem tenha medo,
porque eu, o Senhor, seu Deus,
estarei com você em qualquer lugar
para onde você for!”
(Josué 1:9).*

Resumo

Neste trabalho estudamos algumas noções de grupos, subgrupos, homomorfismo, isomorfismo, ações de grupos sobre conjuntos, subgrupos isotrópicos, órbitas e todos esses são elementos importantes para o principal resultado desse trabalho que é o Teorema de Burnside. Além disso, abordamos algumas aplicações do Teorema de Burnside e como aplicação especial estudamos o Padrão Combinatorial de Escher e finalizamos com algumas curiosidades sobre o artista gráfico Maurits Cornelis Escher. A relevância deste tema segue da inter e multidisciplinaridade que este promove entre as áreas: Álgebra e Geometria.

Palavras-chave: Ação de Grupo sobre Conjuntos, Isotropia, Órbitas, Teorema de Burnside, Escher.

Abstract

In this work we study some notions of groups, subgroups, homomorphism, isomorphism, group actions on sets, isotropic subgroups, orbits and all these are important elements for the main result of this work, which is the Burnside Theorem. In addition, we covered some applications of Burnside's Theorem and as a special application we studied Escher's Combinatorial Pattern and ended with some curiosities about the graphic artist Maurits Cornelis Escher. The relevance of this theme follows from the inter and multidisciplinary that it promotes between the areas: Algebra and Geometry.

Keywords: Group Action on Sets, Isotropy, Orbits, Burnside's Theorem, Escher.

Lista de Figuras

1.1	Polígono Inscrito	38
1.2	Eixos de Simetria do Triângulo Equilátero	39
1.3	Composição de Simetrias do Triângulo Equilátero	40
1.4	Eixos de Simetria do Quadrado	41
1.5	Composição de Simetrias do Quadrado	41
1.6	Eixos de Simetria do Tetraedro	42
1.7	Composição de Simetrias do Tetraedro	43
1.8	Eixo de Simetria da Pirâmide de Base Dodecaédrica	44
1.9	Isomorfismo do Grupo de Simetrias do Tetraedro	61
2.1	Objetos no Quadrado	69
3.1	William Burnside	75
3.2	St. John's College e Pembroke College- Cambridge	76
3.3	Oxford And Cambridge University Boat Race Finish, 1892	76
3.4	1899 - Medalha De Morgan	77
3.5	The Theory of Groups of Finite Order	78
3.6	Dado Inicial: D	79
3.7	Faces do Cubo	79
3.8	Planificação D_1	80
3.9	Planificação D_2	81
3.10	Planificação D_3	81
3.11	Planificação D_4	82
3.12	Planificação D_5	82
3.13	Planificação D_6	83
3.14	Dado: 1 fixo	83
3.15	Dado: 2 fixo	84
3.16	Dado: 3 fixo	84
3.17	Dado: 4 fixo	85
3.18	Dado: 5 fixo	85
3.19	Dado: 6 fixo	86
3.20	Conjunto X dos 64 triângulos	89
3.21	Eixos de Simetria do Triângulo Equilátero	90
3.22	Elementos fixados por X_{ρ_0}	90
3.23	Elementos fixados por X_{ρ_1}	91
3.24	Elementos fixados por X_{μ_1}	91
3.25	Elementos fixados por X_{μ_2}	91
3.26	Elementos fixados por X_{μ_3}	92
3.27	Órbitas de triângulos	92

4.1	Motivos de crochê	94
4.2	Quadrado de Motivo	94
4.3	Matriz inicial	95
4.4	Ladrilhamento	95
4.5	Motivo: Swans (Escher)	96
4.6	Obra: Swans	96
4.7	Motivo: Lagartos	96
4.8	Obra: Lagartos	96
4.9	Obra: Two Birds	97
4.10	Carimbo	97
4.11	Ladrilhamento - Carimbo ABCD	98
4.12	Reflexões pelos eixos x e y	99
4.13	Ladrilhamento monocromático	99
4.14	Ladrilhamento destacando a matriz inicial	100
4.15	Reflexão no eixo y	100
4.16	Reflexão no eixo x	101
4.17	Composição das reflexões dos eixos x e y	101
4.18	Ladrilhamento destacando as simetrias	102
4.19	Ladrilhamento com o carimbo em destaque	102
4.20	Eixos de simetrias - reflexões	103
4.21	Gerando os elementos - Órbita 01	105
4.22	Gerando os elementos - Órbita 02	105
4.23	Gerando os elementos - Órbita 08	106
4.24	Gerando os elementos - Órbita 44	106
4.25	Gerando os elementos - Órbita 76	107
4.26	Ladrilhamento ABCD destacando as simetrias	107
4.27	Ladrilhamento destacando as simetrias - motivo: seta	108
4.28	Órbitas 1 ao 6	108
4.29	Órbitas 7 ao 12	109
4.30	Órbitas 13 ao 18	109
4.31	Órbitas 19 ao 24	110
4.32	Órbitas 25 ao 30	110
4.33	Órbitas 31 ao 36	111
4.34	Órbitas 37 ao 42	111
4.35	Órbitas 43 ao 48	112
4.36	Órbitas 49 ao 54	112
4.37	Órbitas 55 ao 60	113
4.38	Órbitas 61 ao 66	113
4.39	Órbitas 67 ao 72	114
4.40	Órbitas 73 ao 76	114
4.41	Retrato de Escher com Cavaleiro.	116
4.42	Vista da Alhambra - Espanha	117
4.43	Interior do palácio de Alhambra	118
4.44	Algumas obras de Escher: Tessellation IV and Tessellation V (1957) . .	118
4.45	Algumas obras de Escher: Still life and street (1937) and Eight heads (1922)	119
4.46	Favo de mel	119
4.47	Processo de formação: etapa 1 a 3	120

4.48	Processo de formação: etapa 3 a 4	120
4.49	Processo de formação: etapa 5 a 7	120
4.50	Processo de formação: etapa 8	121
4.51	Processo de formação: etapa 8 e 9	121
4.52	Processo de formação: etapa 10 a 12	121
4.53	Processo de formação: etapa 13	122
4.54	Quadrado laranja	122
4.55	1º Recorte	123
4.56	2º Recorte	124
4.57	Eliminando os rastros do quadrado	125
4.58	Quadrado de motivo visível	125
4.59	Ladrilhamento - Illustrator	126
4.60	Ladrilhamento - Cores	126
4.61	Outras Tentativas	127
4.62	Ferramenta “Padrão”	128
4.63	Esboço inicial	129
4.64	Recortes destacando o motivo quadrado	129
4.65	Motivo	130
4.66	Ladrilhamento	130
4.67	Obra final	131
4.68	Selo postal com a obra de M. C. Escher	132
4.69	Fase bônus - Sonic [22]	132
4.70	Obra: Sky and Water, 1938 - xilogravura	133
4.71	Filme: “A origem”	133
4.72	Obra: House of Stairs	134
4.73	Filme: Donnie Darko	134
4.74	Obra: Eye, 1946 - mezzotinta	135
4.75	A fila sem fim (Os Simpsons, T2:E18).	135
4.76	Corra corra te peguei (Os Simpsons, T5:E5).	136
4.77	Obra: Subindo e descendo, 1960	136
4.78	Acima ou abaixo? (Os Simpsons, T6:E12).	137
4.79	Obra: Relatividade, 1953.	137
4.80	Dia e noite(Os Simpsons, T21:E12).	138
4.81	Obra: Dia e noite, 1938.	138
4.82	Obra: Drawing hands, 1948.	138
4.83	Family Guy.	139
4.84	Futurama.	139
4.85	Around the world	140
4.86	Obra: Encounter	140
4.87	Quadro da sala do PET: Fish, 1941 - xilogravura	141
4.88	Triângulo de Penrose	141
4.89	Camisa de 25 anos do PET Matemática (2019)	142
4.90	Obra: Ascending and descending, 1960 - lithograph	142
4.91	Obra: Relativity, 1953 - lithograph	143
4.92	Obra: Waterfall, 1961 - lithograph	143
4.93	Logo: Google Drive	144

Lista de Tabelas

1.1	Tábua do Grupo das Permutações S_3	38
1.2	Tábua do Grupo de Simetrias D_3	40
1.3	Tábua do Grupo de Simetrias D_4	42
1.4	Tábua Subgrupo Normal	52
1.5	Tábua do Grupo das Permutações S_3	60
1.6	Tábua do Grupo de Simetrias D_3	60
2.1	Tábua Composição em D_4	68
2.2	Tábua de X como um D_4 -conjunto	69

Sumário

Introdução	23
1 Sobre a Estrutura Algébrica: Grupo	25
1.1 Noções de Grupos	25
1.2 Subgrupos e Grupo Quociente	44
1.3 Homomorfismo e Isomorfismo	59
2 Ação de Grupo sobre Conjuntos	63
2.1 Noção de uma Ação de Grupo	63
2.2 Subgrupos de Isotropia	70
2.3 Órbita	71
3 Sobre o Teorema de Burnside e Aplicações	75
3.1 Biografia de William Burnside	75
3.2 Problematização Inicial	79
3.3 O Teorema de Burnside e suas Aplicações	87
4 Relação do Teorema de Burnside e as Obras de Escher	93
4.1 Padrão Combinatorial de Escher	93
4.2 Curiosidades sobre Escher	116
4.2.1 Biografia de M. C. Escher	116
4.2.2 Tesselação	117
4.2.3 Obras	132
5 Conclusão	145
Referências	147

Introdução

Neste trabalho realizaremos um estudo sobre os Ação de Grupo sobre Conjuntos e o Teorema de Burnside com aplicações lúdicas o qual envolverá o artista gráfico Maurits Cornelis Escher.

Nosso objetivo neste trabalho foi de tornar o estudo de grupos, de uma forma mais lúdica, onde conseguimos visualizar o que consideramos um lado abstrato da Matemática.

O trabalho está organizado da seguinte maneira:

No primeiro capítulo, apresentaremos algumas noções da estrutura álgbrica grupo baseado nas referências [2], [3], [5], [13], [15], [16], [21] e [31], onde abordaremos definições e exemplos sobre grupos, grupos aditivos e multiplicativos, grupo das matrizes, grupos de permutações, ordem, grupo diedral, grupo de simetrias, subgrupos, relação de equivalência, classe de equivalência, conjunto-quociente, classe lateral, índice, subgrupo normal, grupo quociente, transposição, ciclo de comprimento, permutação par, permutação ímpar, grupo alternado de grau n , homomorfismo e isomorfismo, os quais serão utilizados no desenvolvimento do trabalho.

No segundo capítulo, aparecem os elementos cruciais para entendermos o Teorema de Burnside, quais sejam, noção de ação de grupo sobre conjuntos, subgrupos de isotropia e órbita, esses elementos foram baseados na referência [13].

O terceiro capítulo, é o capítulo central deste trabalho, baseado nas referências [13] e [18]. A priori, abordaremos a biografia de William Burnside, feito isso traremos um exemplo ilustrativo e um tanto quanto interessante, no intuito de elucidar o mesmo, em seguida traremos o Teorema de forma teórica e demonstrada e, por fim, encontraremos aplicações atraentes, lúdicas e de maneira bem completa no qual exemplificará como o Teorema pode ser aplicado.

No último capítulo apresentaremos a relação do Teorema de Burnside com as obras conhecidas do artista gráfico Maurits Cornelis Escher. Esse capítulo engloba tanto um exemplo de aplicação direta como curiosidades sobre o artista.

1 Sobre a Estrutura Algébrica: Grupo

Neste capítulo tratamos das noções básicas sobre a estrutura algébrica chamada grupo. Abordamos também subgrupos, classes laterais, grupo quociente e homomorfismo.

Detalhes sobre este assunto e demais considerações podem ser encontrados em [2, 3, 5, 13, 15, 16, 21, 31].

1.1 Noções de Grupos

Definição 1.1. Sejam G um conjunto não vazio e \cdot uma operação binária de G (isto é, uma função de $G \times G$ em G) tal que $(x, y) \mapsto x \cdot y$.

Dizemos que (G, \cdot) é um grupo em relação a esta operação binária ou que \cdot define uma estrutura de grupo sobre o conjunto G se, e somente se, valem as seguintes propriedades:

- (a) Associativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall a, b, c \in G$;
- (b) Existência do elemento neutro: $\exists e \in G \mid a \cdot e = a = e \cdot a, \forall a \in G$;
- (c) Existência de elemento simétrico: $\forall a \in G, \exists a' \in G \mid a \cdot a' = e = a' \cdot a$.

Observação 1.2. Dizemos que um grupo é aditivo ou multiplicativo, se as operações binárias são chamadas de adição ou multiplicação, respectivamente. Adotamos para grupo aditivo as notações: $e = 0$ e $a' = (-a)$ e chamamos de elementos neutro e oposto, respectivamente. Para um grupo multiplicativo usamos: $e = 1$ e $a' = a^{-1}$, e chamamos de elementos identidade e inverso, respectivamente.

Proposição 1.3. *Propriedades elementares de um grupo (G, \cdot) :*

- (i) *O elemento neutro, cuja existência é assegurada por (b), é único.*
- (ii) *Cada elemento do grupo possui um único elemento simétrico.*
- (iii) *Quaisquer que sejam $x, y \in G$, tem-se*
 - $(x')' = x$.
 - $(x \cdot y)' = y' \cdot x'$.
- (iv) *Se $x_1, \dots, x_n \in G$, então*

$$(x_1 \cdot \dots \cdot x_n)' = x_n' \cdot \dots \cdot x_1'.$$

(v) Quaisquer que sejam $a, x, y \in G$, temos que

$$a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y$$

e

$$x \cdot a = y \cdot a \Rightarrow x = y.$$

Tais propriedades são as leis do cancelamento à esquerda e à direita, respectivamente.

Demonstração. (i) Seja e_0 o elemento neutro de G , ou seja,

$$e_0 \cdot a = a = a \cdot e_0, \forall a \in G. \quad (I)$$

Suponhamos agora que exista outro elemento e_1 tal que, para qualquer $a \in G$: $e_1 \cdot a = a = a \cdot e_1$. Em particular, para $a = e_0$ temos:

$$e_0 \cdot e_1 = e_0.$$

Por outro lado, de (I), considerando $a = e_1$, segue que $e_0 \cdot e_1 = e_1$.

Consequentemente,

$$e_1 = e_0 \cdot e_1 = e_0.$$

Portanto, $e_1 = e_0$. Ou seja, o elemento neutro é único.

(ii) Se y e z são ambos elementos opostos de x em G temos

- $x \cdot y = e = y \cdot x$;
- $x \cdot z = e = z \cdot x$.

Deste modo,

$$z = e \cdot z = (y \cdot x) \cdot z = y \cdot (x \cdot z) = y \cdot e = y.$$

Portanto, $y = z$. Ou seja, cada elemento do grupo possui um único elemento simétrico.

(iii) Se e é o elemento neutro de G , temos $(x')' = x$, pois $x' \cdot x = e$ e $x \cdot x' = e$.

Provemos que $(x \cdot y)' = y' \cdot x'$. Como G é um grupo, dados $x, y \in G$, temos

$$x' \cdot x = e = x \cdot x'$$

e

$$y' \cdot y = e = y \cdot y'.$$

Deste fato e usando a propriedade associativa segue:

$$(x \cdot y) \cdot (y' \cdot x') = [(x \cdot y) \cdot y'] \cdot x' = [x \cdot (y \cdot y')] \cdot x' = (x \cdot e) \cdot x' = x \cdot x' = e$$

e

$$(y' \cdot x') \cdot (x \cdot y) = [(y' \cdot x') \cdot x] \cdot y = [y' \cdot (x' \cdot x)] \cdot y = (y' \cdot e) \cdot y = y' \cdot y = e.$$

Consequentemente, $y' \cdot x'$ é o elemento oposto de $x \cdot y$.

Portanto, $(x \cdot y)' = y' \cdot x'$.

(iv) Sejam $x_1, \dots, x_n \in G$, provemos por meio do Princípio da Indução Finita que

$$(x_1 \cdot \dots \cdot x_n)' = x'_n \cdot \dots \cdot x'_1, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (I)$$

Obviamente a igualdade (I) é válida para $n = 1$.

Segue do item (iii), que (I) também é válida para $n = 2$.

Assumamos como hipótese de indução que a igualdade seja válida para $n = k$. Ou seja,

$$(x_1 \cdot \dots \cdot x_k)' = x'_k \cdot \dots \cdot x'_1.$$

Mostremos agora que (I) é válida para $n = k + 1$. De fato:

$$(x_1 \cdot \dots \cdot x_{k+1})' = ((x_1 \cdot \dots \cdot x_k) \cdot x_{k+1})' = x'_{k+1} \cdot (x_1 \cdot \dots \cdot x_k)' = x'_{k+1} \cdot x'_k \cdot \dots \cdot x'_1.$$

Portanto, nestas condições, segue do Princípio de Indução Finita que:

$$(x_1 \cdot \dots \cdot x_n)' = x'_n \cdot \dots \cdot x'_1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

(v) Por hipótese temos $a \cdot x = a \cdot y$. Logo,

$$x = e \cdot x = (a' \cdot a) \cdot x = a' \cdot (a \cdot x) = a' \cdot (a \cdot y) = (a' \cdot a) \cdot y = e \cdot y = y.$$

Portanto, $x = y$.

Analogamente, se $x \cdot a = y \cdot a$, segue

$$x = x \cdot e = x \cdot (a \cdot a') = (x \cdot a) \cdot a' = (y \cdot a) \cdot a' = y \cdot (a \cdot a') = y \cdot e = y. \quad \square$$

Exemplo 1.4. Grupo Aditivo dos Reais. \mathbb{R} munido da adição usual, $(\mathbb{R}, +)$ é um grupo.

Exemplo 1.5. Grupo Aditivo dos Complexos.

Seja $\mathbb{C} = \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}\}$ o conjunto dos números complexos.

Definimos em \mathbb{C} a seguinte operação:

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha + \beta := (a + c) + (b + d)i,$$

admitindo $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Veja que $\alpha + \beta \in \mathbb{C}$, logo $+$ é uma operação binária e ainda:

- (a) Dados $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ e $\gamma = f + gi$, elementos quaisquer em \mathbb{C} temos, pela propriedade associativa da adição usual em \mathbb{R} que

$$\begin{aligned}\alpha + (\beta + \gamma) &= a + bi + ((c + f) + (d + g)i) = (a + (c + f)) + (b + (d + g))i = \\ &= ((a + c) + f) + ((b + d) + g)i = ((a + c) + (b + d))i + f + gi = (\alpha + \beta) + \gamma.\end{aligned}$$

Portanto, vale a propriedade associativa.

- (b) Dado $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ qualquer, usando a propriedade do elemento neutro em \mathbb{R} temos que $0 = 0 + 0i \in \mathbb{C}$ satisfaz

$$\alpha + 0 = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi = \alpha,$$

e

$$0 + \alpha = (0 + a) + (0 + b)i = a + bi = \alpha,$$

ou seja, existe elemento neutro para $(\mathbb{C}, +)$.

- (c) Para cada $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$, pela propriedade de elemento neutro de \mathbb{R} , o elemento $-\alpha = -a - bi$ é tal que

$$\begin{aligned}\alpha + (-\alpha) &= (a + bi) + (-a - bi) = (a + (-a)) + (b + (-b))i = 0 + 0i = 0, \text{ e} \\ (-\alpha) + \alpha &= ((-a) + a) + ((-b) + b)i = 0 + 0i = 0.\end{aligned}$$

Portanto, segue dos itens (a), (b) e (c) que $(\mathbb{C}, +)$ é um grupo.

Exemplo 1.6. O Produto Direto.

Dados (G, Δ) e (G', \diamond) grupos quaisquer, o conjunto $G \times G'$, formado por todos os pares (x, x') com $x \in G$ e $x' \in G'$ é um grupo se munido da seguinte operação: $(x, x') \cdot (y, y') := (x \Delta y, x' \diamond y')$, $\forall (x, x'), (y, y') \in G \times G'$. Com efeito,

- (a) Para quaisquer $(x, x'), (y, y'), (z, z')$ em $G \times G'$, temos pela propriedade associativa de (G, Δ) e (G', \diamond) :

$$(x, x') \cdot [(y, y') \cdot (z, z')] = (x, x') \cdot (y \Delta z, y' \diamond z') =$$

$$(x \Delta (y \Delta z), x' \diamond (y' \diamond z')) = ((x \Delta y) \Delta z, (x' \diamond y') \diamond z') =$$

$$(x \Delta y, x' \diamond y') \cdot (z, z') = [(x, x') \cdot (y, y')] \cdot (z, z').$$

Portanto, vale a propriedade associativa.

- (b) Seja $(x, x') \in G \times G'$ qualquer. Defina $e = (e_G, e_{G'})$, onde e_G e $e_{G'}$ são os elementos identidade de G e G' , respectivamente. Desta forma:

$$(x, x') \cdot e = (x, x') \cdot (e_G, e_{G'}) = (x \Delta e_G, x' \diamond e_{G'}) = (x, x') =$$

$$(e_G \Delta x, e_{G'} \diamond x') = (e_G, e_{G'}) \cdot (x, x') = e \cdot (x, x').$$

Logo, $(x, x') \cdot e = (x, x') = e \cdot (x, x')$.

Portanto, $e = (e_G, e_{G'})$ é o elemento identidade de $G \times G'$.

(c) Para qualquer $X = (x, x') \in G \times G'$, considere $\bar{X} := (\bar{x}, \bar{x}')$, onde \bar{x} e \bar{x}' são os elementos inversos de x e x' , respectivamente. Observe que

$$X \cdot \bar{X} = (x, x') \cdot (\bar{x}, \bar{x}') = (x \Delta \bar{x}, x' \diamond \bar{x}') = (e_G, e_{G'}) = e.$$

e

$$\bar{X} \cdot X = (\bar{x}, \bar{x}') \cdot (x, x') = (\bar{x} \Delta x, \bar{x}' \diamond x') = (e_G, e_{G'}) = e.$$

Logo, $X \cdot \bar{X} = e = \bar{X} \cdot X$.

Portanto, \bar{X} é o elemento inverso de X em $G \times G'$.

Exemplo 1.7. O Produto Direto de um número finito de Grupos.

Dados $(G_1, \Delta_1), \dots, (G_n, \Delta_n)$ grupos quaisquer, o conjunto $\prod_{i=1}^n G_i = G_1 \times \dots \times G_n$ é um grupo munido da operação \cdot , definida da seguinte forma:

Para quaisquer $X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n) \in \prod_{i=1}^n G_i$, segue que

$$X \cdot Y := (x_1 \Delta_1 y_1, \dots, x_n \Delta_n y_n).$$

A demonstração segue usando o Princípio da Indução Finita e o exemplo anterior.

Definição 1.8. Dizemos que um grupo (G, \cdot) é abeliano ou comutativo se, e somente se, a operação binária $(x, y) \mapsto x \cdot y$ é comutativa, isto é,

$$x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in G.$$

Exemplo 1.9. Grupo Aditivo dos Inteiros.

Por propriedades da adição usual em \mathbb{Z} temos: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$,

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

$$a + 0 = a = 0 + a,$$

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a,$$

$$a + b = b + a.$$

Logo $(\mathbb{Z}, +)$, Grupo Aditivo dos Inteiros, é um grupo abeliano.

Exemplo 1.10. Grupo Aditivo dos Racionais. O par $(\mathbb{Q}, +)$, onde \mathbb{Q} é o conjunto dos racionais e $+$ é a adição usual em \mathbb{Q} , é um grupo abeliano.

Exemplo 1.11. Grupo Aditivo dos Reais. \mathbb{R} munido da adição usual, $(\mathbb{R}, +)$ é um grupo abeliano.

Exemplo 1.12. Nas condições do Exemplo (1.6), se (G, Δ) e (G', \Diamond) são grupos abelianos, então o produto direto $(G \times G', \cdot)$ também o é. De fato,

$$\begin{aligned} \forall X = (x, x'), Y = (y, y') \in G \times G' : \\ X \cdot Y = (x, x') \cdot (y, y') := (x\Delta y, x'\Diamond y') = \\ (y\Delta x, y'\Diamond x') := (y, y') \cdot (x, x') = Y \cdot X \end{aligned}$$

Portanto, $X \cdot Y = Y \cdot X$.

Por exemplo, \mathbb{R}^n munido da operação $+$ para n -uplas é um grupo abeliano.

Exemplo 1.13. Grupo Multiplicativo dos Racionais não nulos.

Sejam \cdot a multiplicação usual em \mathbb{Q} e \mathbb{Q}^* o conjunto dos números racionais não nulos. O par (\mathbb{Q}^*, \cdot) é um grupo abeliano. Observe que \mathbb{Q}^* é fechado para esta operação, pois para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}^*$, temos $ab \neq 0$ e portanto $ab \in \mathbb{Q}^*$. Ainda,

(a) Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Q}^*$

$$(ab)c = a(bc);$$

(b) Temos que 1 é o elemento identidade de (\mathbb{Q}^*, \cdot) , já que

$$a1 = a = 1a;$$

(c) Cada elemento $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$ tem como elemento inverso $\frac{b}{a}$, pois

$$\frac{a}{b} \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = 1 = \frac{ba}{ab} = \frac{b}{a} \frac{a}{b};$$

(d) Para $a, b \in \mathbb{Q}^*$ quaisquer, temos que $ab = ba$.

Exemplo 1.14. Grupo Multiplicativo dos Reais não nulos.

O par (\mathbb{R}^*, \cdot) , onde \mathbb{R}^* é o conjunto dos reais não nulos e a operação \cdot é a multiplicação usual, é outro exemplo canônico de grupo abeliano.

Exemplo 1.15. Grupo Multiplicativo dos Complexos não nulos.

Seja \mathbb{C}^* o conjunto dos números complexos não nulos. Considere em \mathbb{C}^* a seguinte operação: $\forall \alpha = a + bi, \beta = c + di \in \mathbb{C}^*$

$$\alpha\beta = (a + bi)(c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Veja que (\mathbb{C}^*, \cdot) é um grupo abeliano.

Com efeito:

(a) $\forall \alpha = a + bi, \beta = c + di, \gamma = e + fi \in \mathbb{C}^*, \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$, pois

$$\begin{aligned} \alpha(\beta\gamma) &= (a + bi)((ce - df) + (cf + de)i) = \\ &[a(ce - df) - b(cf + de)] + [a(cf + de) + b(ce - df)]i = \\ &[ace - adf - bcf - bde] + [acf + ade + bce - bdf]i = \end{aligned}$$

$$[(ac - bd)e - (ad + bc)f] + [(ac - bd)f + (ad + bc)e]i =$$

$$[(ac - bd) + (ad + bc)i](e + fi) = (\alpha\beta)\gamma =$$

Portanto, $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

(b) Seja $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}^*$, qualquer. Observe que $1 = 1 + 0i$ é tal que

$$\alpha 1 = (a1 - b0) + (a0 + b1)i = a + bi = (1a - 0b) + (0a + 1b)i = 1\alpha.$$

Logo, $\alpha 1 = \alpha = 1\alpha$.

Portanto, $1 = 1 + 0i$ é o elemento identidade de (\mathbb{C}^*, \cdot) .

(c) Para cada $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}^*$, vejamos como determinar $\alpha^{-1} \in \mathbb{C}^*$ tal que

$$\alpha\alpha^{-1} = 1 = \alpha^{-1}\alpha.$$

Suponha $\alpha^{-1} = c + di$. Veja que $\alpha\alpha^{-1} = 1$ equivale a $(a + bi)(c + di) = 1 + 0i$, ou ainda, $(ac - bd) + (ad + bc)i = 1 + 0i$.

Consequentemente, as incógnitas c e d devem satisfazer o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} ac - bd = 1 \\ bc + ad = 0 \end{cases}.$$

Via regra de Cramer ¹ temos que a solução deste sistema é

$$\begin{aligned} c &= \frac{a}{a^2 + b^2} \\ d &= -\frac{b}{a^2 + b^2} \end{aligned}.$$

Note que a igualdade $\alpha^{-1}\alpha = 1$ gera o mesmo sistema linear. Portanto, para cada $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}^*$, o seu elemento inverso é dado por $\alpha^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$, conforme comprovamos a seguir:

$$\begin{aligned} \alpha\alpha^{-1} &= (a + bi) \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i \right) = \\ & \left(a \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right) - b \left(\frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \right) + \left(a \left(\frac{-b}{a^2 + b^2} \right) + b \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right) \right) i = \\ & \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} \right) + \left(-\frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{ab}{a^2 + b^2} \right) i = \\ & \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} \right) + \left(\frac{(-ab) + (ab)}{a^2 + b^2} \right) i = 1 + 0i = 1. \end{aligned}$$

Analogamente, $\alpha^{-1}\alpha = 1 + 0i = 1$.

¹Para noções sobre sistema linear e regra de Cramer sugerimos consultar [3], páginas 29 e 77, respectivamente.

(d) Para quaisquer $\alpha = a + bi, \beta = c + di$,

$$\alpha\beta = \beta\alpha.$$

De fato,

$$\alpha\beta = (ac - bd) + (ad + bc)i = (ca - db) + (da + cb)i = \beta\alpha.$$

Portanto, (\mathbb{C}^*, \cdot) , o Grupo Multiplicativo dos Complexos não nulos é um grupo abeliano.

Exemplo 1.16. Grupo das Matrizes.

Seja (G, \cdot) um grupo qualquer.

Defina $M_{m \times n}(G)$ como sendo o conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ com coeficientes em G . Neste conjunto considere a seguinte operação:

Para quaisquer

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(G),$$

$$A \Delta B = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} & \cdots & a_{1n} \cdot b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{m1} & \cdots & a_{mn} \cdot b_{mn} \end{pmatrix}.$$

O par $(M_{m \times n}(G), \Delta)$ é um grupo. De fato:

(a) $A \Delta (B \Delta C) :=$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Delta \left[\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} b_{11} \cdot c_{11} & \cdots & b_{1n} \cdot c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} \cdot c_{m1} & \cdots & b_{mn} \cdot c_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \cdot (b_{11} \cdot c_{11}) & \cdots & a_{1n} \cdot (b_{1n} \cdot c_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \cdot (b_{m1} \cdot c_{m1}) & \cdots & a_{mn} \cdot (b_{mn} \cdot c_{mn}) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (a_{11} \cdot b_{11}) \cdot c_{11} & \cdots & (a_{1n} \cdot b_{1n}) \cdot c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1} \cdot b_{m1}) \cdot c_{m1} & \cdots & (a_{mn} \cdot b_{mn}) \cdot c_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} & \cdots & a_{1n} \cdot b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{m1} & \cdots & a_{mn} \cdot b_{mn} \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\left[\left(\begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right) \Delta \left(\begin{array}{ccc} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{array} \right) \right] \Delta \left(\begin{array}{ccc} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{array} \right) =$$

$$[A \Delta B] \Delta C.$$

Portanto, Δ é associativa.

- (b) Sendo e_G o elemento neutro de G , então $e := \begin{pmatrix} e_G & \cdots & e_G \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_G & \cdots & e_G \end{pmatrix}$ é o elemento neutro para $M_{m \times n}(G)$. De fato:

$$\begin{aligned} A \Delta e &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} e_G & \cdots & e_G \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_G & \cdots & e_G \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot e_G & \cdots & a_{1n} \cdot e_G \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \cdot e_G & \cdots & a_{mn} \cdot e_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

Analogamente, $e \Delta A = A$.

Logo, $A \Delta e = A = e \Delta A$.

Portanto, e é o elemento neutro de $(M_{m \times n}, \Delta)$.

- (c) Para cada $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ em $M_{m \times n}(G)$,

defina $\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{m1} & \cdots & \bar{a}_{mn} \end{pmatrix}$, onde \bar{a}_{ij} é o elemento oposto de a_{ij} em G .

Desta forma,

$$\begin{aligned} A \Delta \bar{A} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{m1} & \cdots & \bar{a}_{mn} \end{pmatrix} := \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot \bar{a}_{11} & \cdots & a_{1n} \cdot \bar{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \cdot \bar{a}_{m1} & \cdots & a_{mn} \cdot \bar{a}_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_G & \cdots & e_G \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_G & \cdots & e_G \end{pmatrix} = e. \end{aligned}$$

Analogamente, $\bar{A} \Delta A = e$.

Logo,

$$A \triangle \bar{A} = e = \bar{A} \triangle A.$$

Portanto \bar{A} é o elemento oposto de A em $M_{m \times n}(G)$.

Portanto, segue dos itens (i), (ii) e (iii) que $(M_{m \times n}(G), \triangle)$ é um grupo.

Observamos ainda que se (G, \cdot) é um grupo abeliano, então $(M_{m \times n}(G), \triangle)$ também o é, pois para quaisquer

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(G), \\ A \triangle B &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \triangle \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} := \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} & \cdots & a_{1n} \cdot b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{m1} & \cdots & a_{mn} \cdot b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \cdot a_{11} & \cdots & b_{1n} \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} \cdot a_{m1} & \cdots & b_{mn} \cdot a_{mn} \end{pmatrix} := \\ &= \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \triangle \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = B \triangle A. \end{aligned}$$

Como aplicação deste exemplo, podemos considerar os grupos aditivos $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$. Nestes casos, temos os grupos aditivos das matrizes com coeficientes em \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} , respectivamente.

Exemplo 1.17. Grupo Multiplicativo das Matrizes Invertíveis com Coeficientes Reais.

Seja $GL(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$, com $M_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes de ordem n sobre \mathbb{R} . Considere $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$ matrizes quaisquer em $GL(n)$. Definimos o produto de A por B , AB , como sendo a matriz $C = (c_{ik})$, tal que

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}, \forall i, k \in \{1, \dots, n\}.$$

Observe que este produto está bem definido em $GL(n)$ no seguinte sentido: se $A, B \in GL(n)$, então $AB \in GL(n)$.

De fato, uma vez que $A, B \in GL(n)$ segue que $\det A \neq 0$ e $\det B \neq 0$. Agora, pela propriedade de determinante, sabemos que

$$\det AB = \det A \det B \tag{I}$$

Como $\det A \neq 0$ e $\det B \neq 0$ segue que $\det A \det B \neq 0$. Consequentemente, por (I), segue que $\det AB \neq 0$.

Afirmção: $(GL(n), \cdot)$ é um grupo.

Com efeito,

(a) $\forall A = (a_{ij}), B = (b_{jk}), C = (c_{kl}) \in GL(n)$, temos que

$$\begin{aligned} A(BC) &= \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k=1}^n b_{jk} c_{kl} \right) \right) = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} (b_{j1}c_{1l} + b_{j2}c_{2l} + \dots + b_{jn}c_{nl}) \right) = \\ &= (a_{i1}(b_{11}c_{1l} + b_{12}c_{2l} + \dots + b_{1n}c_{nl}) + a_{i2}(b_{21}c_{1l} + b_{22}c_{2l} + \dots + b_{2n}c_{nl}) + \dots + a_{in}(b_{n1}c_{1l} + \\ &+ b_{n2}c_{2l} + \dots + b_{nn}c_{nl})) = \\ &= ((a_{i1}b_{11})c_{1l} + (a_{i1}b_{12})c_{2l} + \dots + (a_{i1}b_{1n})c_{nl} + (a_{i2}b_{21})c_{1l} + (a_{i2}b_{22})c_{2l} + \dots + (a_{i2}b_{2n})c_{nl} + \\ &+ \dots + (a_{in}b_{n1})c_{1l} + (a_{in}b_{n2})c_{2l} + \dots + (a_{in}b_{nn})c_{nl}) = \\ &= [(a_{i1}b_{11})c_{1l} + (a_{i2}b_{21})c_{1l} + \dots + (a_{in}b_{n1})c_{1l}] + \dots + [(a_{i1}b_{11})c_{nl} + (a_{i2}b_{21})c_{nl} + \dots + \\ &+ (a_{in}b_{n1})c_{nl}] = \\ &= ((a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \dots + a_{in}b_{n1})c_{1l} + \dots + (a_{i1}b_{1n} + a_{i2}b_{2n} + \dots + a_{in}b_{nn})c_{nl}) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n (a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk})c_{kl} \right) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} \right) c_{kl} \right) = (AB)C. \end{aligned}$$

Portanto, $A(BC) = (AB)C$, isto é, vale a propriedade associativa para $(GL(n), \cdot)$.

(b) Para qualquer $A = (a_{ij}) \in GL(n)$, a matriz $I_n = (\delta_{jk})$, cujas entradas são dadas por $\delta_{jk} = 1$, se $j = k$, e $\delta_{jk} = 0$, se $k \neq j$, é o elemento identidade de $GL(n)$. Primeiro observe que $I_n \in GL(n)$, já que $\det I_n = 1 \neq 0$.

Ainda, $AI_n = (c_{ik})$, onde $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}\delta_{jk} = a_{i1}\delta_{1k} + \dots + a_{ik}\delta_{kk} + \dots + a_{in}\delta_{nk} = a_{ik}$. Logo, $AI_n = (a_{ik}) = A$.

Analogamente, $I_n A = A$. Consequentemente, $AI_n = A = I_n A$, ou seja, I_n é o elemento neutro de $(GL(n), \cdot)$.

(c) Seja $A = (a_{ij}) \in GL(n)$, qualquer. Definimos a matriz dos cofatores de A como sendo a matriz $\bar{A} = (\Delta_{ij})$, onde $\Delta_{ij} = (-1)^{(i+j)} \det(A_{ij})$, com A_{ij} a submatriz de A obtida extraindo-se a i -ésima linha e a j -ésima coluna de A .

Afirmção: $B = \frac{1}{\det A} \bar{A}^t$ é tal que $AB = I_n = BA$.

Com efeito, primeiro observe que a matriz B está bem definida já que $\det A \neq 0$.

Ainda,

$$AB = A \left[\left(\frac{1}{\det A} \right) \bar{A}^t \right] = \frac{1}{\det A} [A \bar{A}^t].$$

Agora,

$$A \bar{A}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{1i} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{i1} & \cdots & \Delta_{ii} & \cdots & \Delta_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \cdots & \Delta_{ni} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}^t =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{i1} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1i} & \cdots & \Delta_{ii} & \cdots & \Delta_{ni} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \cdots & \Delta_{in} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} = (c_{ij}),$$

onde $c_{ii} = \det A$ e $c_{ij} = 0$, pois observe que escolhendo a i -ésima linha para calcular o determinante ² de A segue que:

$$\det A = a_{i1}\Delta_{i1} + \cdots + a_{ii}\Delta_{ii} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}.$$

Mas, $c_{ii} = a_{i1}\Delta_{i1} + \cdots + a_{ii}\Delta_{ii} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}$.

Portanto, $c_{ii} = \det A$.

Por outro lado, usando o desenvolvimento de Laplace ³, é possível mostrar que

$$c_{ij} = a_{i1}\Delta_{j1} + a_{i2}\Delta_{j2} + \cdots + a_{in}\Delta_{jn} = 0.$$

Por exemplo, se $n = 3$ temos a seguinte situação:

$$c_{12} = -a_{11} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Assim,

$$c_{12} = -a_{11}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{12}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{13}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) = 0.$$

Logo,

$$A\bar{A}^t = \det A I_n.$$

Consequentemente,

$$AB = A \frac{1}{\det A} \bar{A}^t = \frac{1}{\det A} \det A I_n = I_n.$$

Analogamente, podemos mostrar que $BA = I_n$.

Note ainda que, como B é tal que $AB = I_n$ segue que

$$\det AB = \det I_n \neq 0.$$

Logo, $\det A \det B = \det AB \neq 0$ e deste modo temos $\det B \neq 0$, isto é, $B \in GL(n)$.

Portanto, B é a matriz inversa de A em $(GL(n), \cdot)$.

Por fim, pelos itens (a), (b) e (c), segue que $(GL(n), \cdot)$ é um grupo.

Observamos que este grupo não é comutativo. Por exemplo, se $n = 2$ e escolhendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ temos}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } BA = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Portanto, $AB \neq BA$.

²Para detalhes sobre o algoritmo para encontrar o determinante via matriz dos cofatores vide [3] p.64.

³Este desenvolvimento é encontrado em [3], p. 73.

Exemplo 1.18. Grupos de Permutações.

Seja E um conjunto não vazio. Denotamos por $S(E)$ o conjunto de todas as funções $f : E \rightarrow E$ bijetoras.

Neste conjunto definimos a operação composição \circ , $(f, g) \mapsto f \circ g, \forall f, g \in S(E)$.

O par $(S(E), \circ)$ é um grupo denominado grupo das permutações sobre E .

A seguir mostramos que $(S(E), \circ)$ satisfaz as condições de um grupo.

- (a) A propriedade associativa é satisfeita, pois, para qualquer $x \in E$, segue da definição de composição de funções que

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = (f \circ (g \circ h))(x).$$

Portanto, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

- (b) Para qualquer $f \in S(E)$ a função identidade $i_{d_E} : E \rightarrow E$ é o elemento neutro de $(S(E), \circ)$. De fato, para qualquer $x \in E$, segue que

$$(f \circ i_{d_E})(x) = f(i_{d_E}(x)) = f(x) = i_{d_E}(f(x)) = (i_{d_E} \circ f)(x).$$

Portanto, $f \circ i_{d_E} = f = i_{d_E} \circ f$.

- (c) Para cada $f \in S(E)$, como f é bijetora existe $f^{-1} \in S(E)$ tal que

$$f \circ f^{-1} = i_{d_E} = f^{-1} \circ f.$$

Portanto, pelos itens (a), (b) e (c) o par $(S(E), \circ)$ é um grupo.

Em particular, se $E = \{1, 2, \dots, n\}, n \geq 1$, denotamos $S(E)$ por S_n e o chamamos de grupo simétrico de grau n . Através de análise combinatória sobre os elementos de E podemos constatar que S_n é um grupo com $n!$ elementos.

Ainda, um elemento $f \in S_n$ é indicado por

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix},$$

onde $i_r = f(r)$, com r variando entre 1 e n .

Para efetuar a composição de dois elementos $f, g \in S_n$, digamos

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix},$$

procedemos da seguinte maneira: $(f \circ g)(r) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & i_r & \cdots & n \\ j_1 & \cdots & j_{i_r} & \cdots & j_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cdots & r & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_r & \cdots & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & r & \cdots \\ \cdots & j_{i_r} & \cdots \end{pmatrix},$$

pois $(f \circ g)(r) = f(g(r)) = f(i_r) = j_{i_r}$, para todo $r \in \{1, \dots, n\}$.

Observe que, se $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$, então $f^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

De fato:

$$(f^{-1} \circ f)(r) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & r & \cdots & n \end{pmatrix} = i_{d_{S_n}}(r) = (f \circ f^{-1})(r).$$

Por exemplo, para $n = 3$ temos: $S_3 = \{f_0, f_1, f_2, g_1, g_2, g_3\}$ em que

$$f_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

cujas tábuas são dadas por:

Tabela 1.1: Tábua do Grupo das Permutações S_3

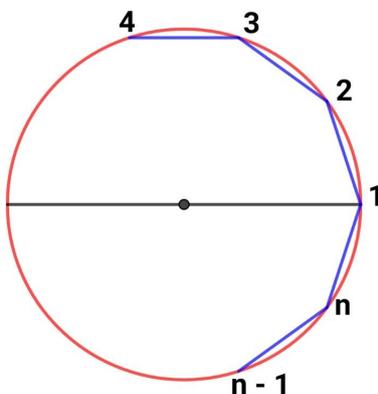
\circ	f_0	f_1	f_2	g_1	g_2	g_3
f_0	f_0	f_1	f_2	g_1	g_2	g_3
f_1	f_1	f_2	f_0	g_3	g_1	g_2
f_2	f_2	f_0	f_1	g_2	g_3	g_1
g_1	g_1	g_2	g_3	f_0	f_1	f_2
g_2	g_2	g_3	g_1	f_2	f_0	f_1
g_3	g_3	g_1	g_2	f_1	f_2	f_0

No texto por vezes denotamos $f \circ g$ simplesmente por fg .

Definição 1.19. Dizemos que um grupo (G, \cdot) é finito se o conjunto G é finito. O número de elementos de G é chamado de ordem do grupo G e denotado por $o(G)$ ou $|G|$.

Exemplo 1.20. Como exemplo de grupo finito com aplicação geométrica temos o Grupo Diedral. A saber: seja P_n um polígono regular com n -lados, qualquer. Consideramos no plano do polígono um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas de maneira que sua origem seja o centro de P_n e o eixo- x contenha um de seus vértices o qual indicamos pelo símbolo 1. Os vértices consecutivos serão indicados por 2, 3, ..., n , respectivamente, no sentido anti-horário, como na figura a seguir:

Figura 1.1: Polígono Inscrito



Fonte: Elaborada pela autora.

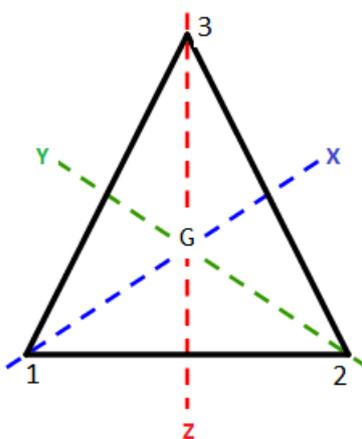
Considere D_n o conjunto formado pelos movimentos rígidos em um polígono regular de n lados e \circ a operação composição de movimentos. O par (D_n, \circ) é um grupo de ordem $2n$ dado por,

$$D_n = \{e, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, rs, r^2s, \dots, r^{n-1}s\},$$

onde a operação $r \circ s$ é abreviada por rs e, os movimentos $r, s \in D_n$ são tais que r é uma rotação de $\frac{2\pi}{n}$ em torno da origem (após n rotações com este ângulo o polígono volta a sua posição inicial) e s é uma reflexão em torno do eixo- x .

Exemplo 1.21. Grupo, D_3 , das Simetrias de um Triângulo Equilátero: consideremos um triângulo equilátero e denotamos os vértices por 1, 2, 3. Seja G o baricentro do triângulo, ou seja, se x, y e z são as retas do espaço passando pelas medianas do triângulo, então G é a intercessão das medianas conforme a figura abaixo:

Figura 1.2: Eixos de Simetria do Triângulo Equilátero



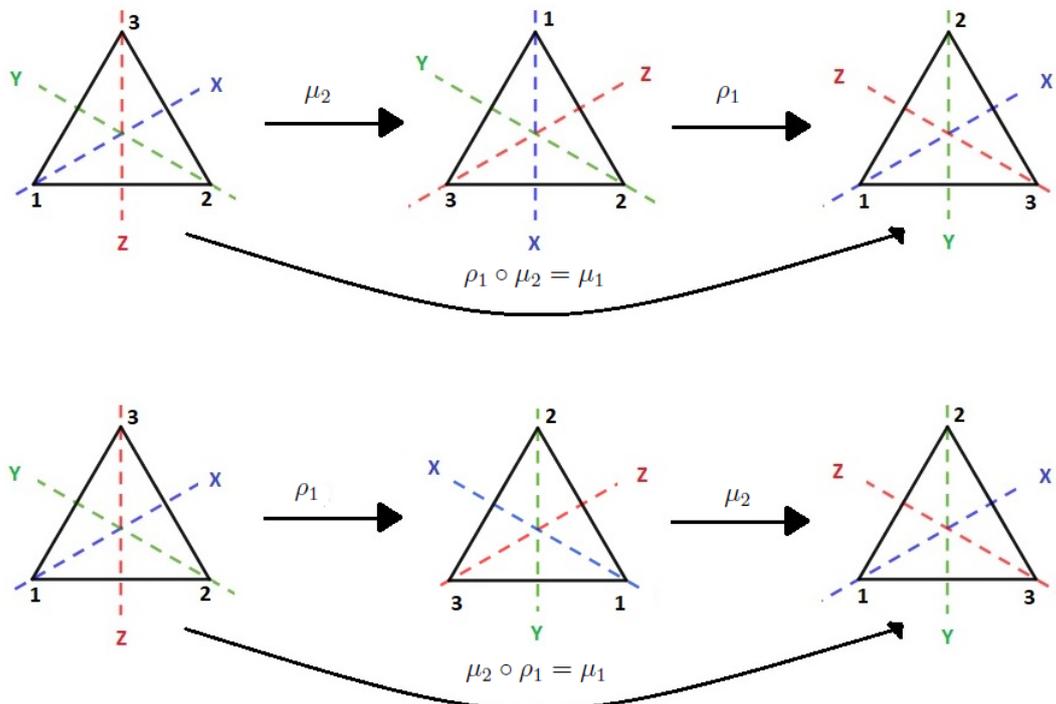
Fonte: Elaborada pela autora.

As transformações que preservam o triângulo, ou seja, os movimentos rígidos, são:

- 1) ρ_0, ρ_1, ρ_2 : as rotações planas centradas em G , no sentido anti-horário, de ângulos $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ respectivamente.
- 2) μ_1, μ_2, μ_3 : as reflexões de ângulo π com os eixos x, y, z , respectivamente.

Vejam geometricamente como se obtém, por exemplo, $\rho_1 \circ \mu_2$ e $\mu_2 \circ \rho_1$:

Figura 1.3: Composição de Simetrias do Triângulo Equilátero



Fonte: Elaborada pela autora.

Vejamos através da tábua a seguir, que estas simetrias constituem um grupo:

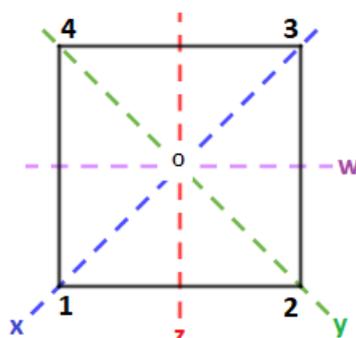
Tabela 1.2: Tábua do Grupo de Simetrias D_3

\circ	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	μ_3	μ_1	μ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_3	μ_1
μ_1	μ_1	μ_2	μ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2
μ_2	μ_2	μ_3	μ_1	ρ_2	ρ_0	ρ_1
μ_3	μ_3	μ_1	μ_2	ρ_1	ρ_2	ρ_0

Por meio desta tábua se verifica o fechamento, ainda que ρ_0 é elemento neutro e também que $\rho_0^{-1} = \rho_0, \rho_1^{-1} = \rho_2, \rho_2^{-1} = \rho_1, \mu_1^{-1} = \mu_1, \mu_2^{-1} = \mu_2$ e $\mu_3^{-1} = \mu_3$. Valendo a associatividade por se tratar de composição de transformações, logo trata-se de um grupo. Denotamos esse grupo por D_3 (é o grupo de simetrias de um polígono regular de 3 lados). Além disso, como a tábua do grupo não é simétrica em relação à diagonal principal, então tal grupo não é comutativo. Portanto, $D_3 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ com a operação composição é um grupo não abeliano.

Exemplo 1.22. Grupo D_4 das Simetrias de um Quadrado: seja um quadrado com vértices consecutivos 1,2,3,4. Denotamos por O o centro de gravidade do quadrado e chamamos de x,y,z,w as retas do espaço determinadas pelas diagonais e pelas mediatrizes do quadrado.

Figura 1.4: Eixos de Simetria do Quadrado

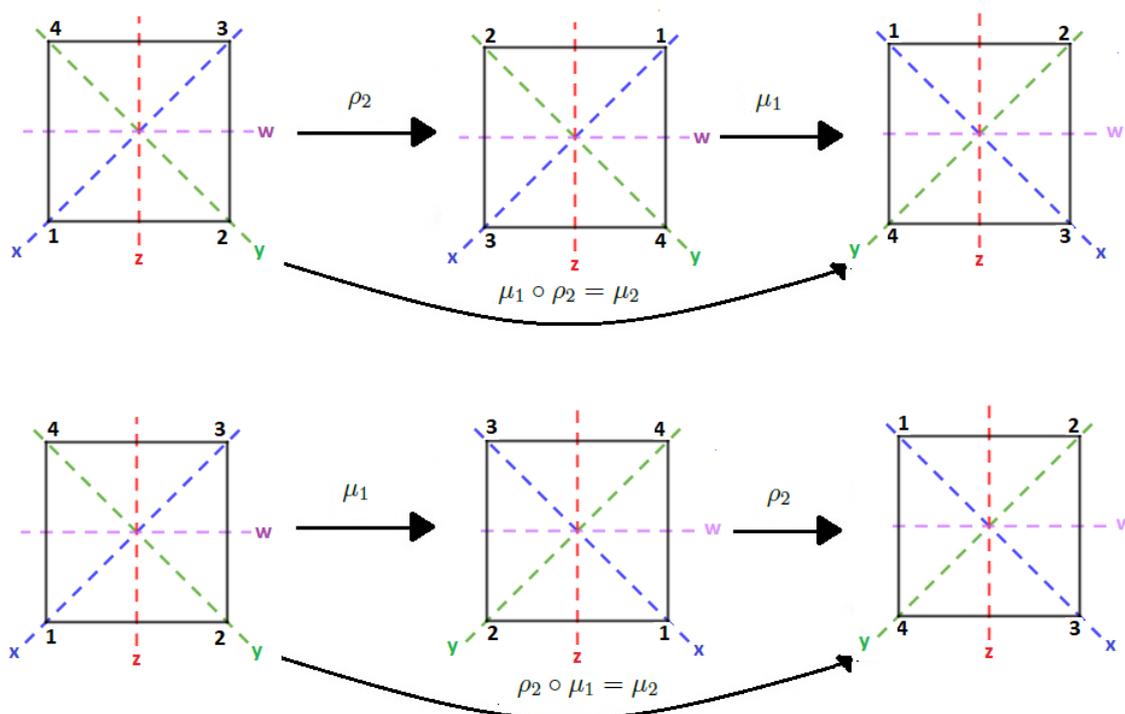


Fonte: Elaborada pela autora.

As transformações que preservam o quadrado, ou seja, os movimentos rígidos são:

- 1) $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3$: as rotações planas centradas em O , no sentido anti-horário, de ângulos $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ respectivamente.
 - 2) $\delta_1, \delta_2, \mu_1, \mu_2$: as reflexões de ângulo π com os eixos x, y, z, w , respectivamente.
- Vejam, geometricamente, como se obtém, por exemplo, $\mu_1 \circ \rho_2$ e $\rho_2 \circ \mu_1$:

Figura 1.5: Composição de Simetrias do Quadrado



Fonte: Elaborada pela autora.

Efetuando-se as demais composições, a tábua obtida é a seguinte:

Tabela 1.3: Tábua do Grupo de Simetrias D_4

\circ	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	δ_1	δ_2	μ_1	μ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	δ_1	δ_2	μ_1	μ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	μ_1	μ_2	δ_2	δ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	δ_2	δ_1	μ_2	μ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_2	μ_1	δ_1	δ_2
δ_1	δ_1	μ_2	δ_2	μ_1	ρ_0	ρ_2	ρ_3	ρ_1
δ_2	δ_2	μ_1	δ_1	μ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	ρ_3
μ_1	μ_1	δ_1	μ_2	δ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_0	ρ_2
μ_2	μ_2	δ_2	μ_1	δ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_0

Seja D_4 o conjunto das simetrias do quadrado, através desta tábua temos que a composição de simetrias é uma operação binária em D_4 . A associatividade da operação vale por se tratar de particular composição de aplicação, além disso, temos ρ_0 como elemento neutro e todos os elementos possuem simétrico, a saber:

$$\rho_0^{-1} = \rho_0, \rho_1^{-1} = \rho_3, \rho_2^{-1} = \rho_2, \delta_1^{-1} = \delta_1, \delta_2^{-1} = \delta_2, \mu_1^{-1} = \mu_1, \mu_2^{-1} = \mu_2.$$

Logo, (D_4, \circ) é um grupo. Este grupo não é abeliano, pois, por exemplo, $\delta_1 \circ \mu_1 = \rho_3$ e $\mu_1 \circ \delta_1 = \rho_1$.

Nos exemplos anteriores estudamos as simetrias de figuras planas. A seguir exploramos simetrias que são realizadas em figuras espaciais.

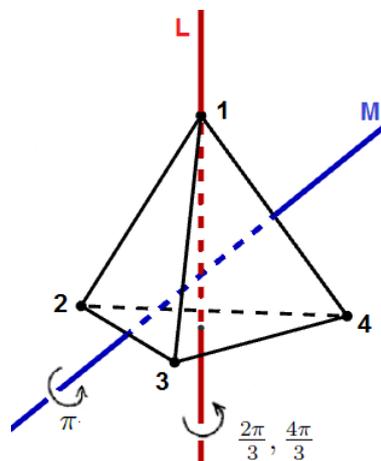
Exemplo 1.23. Grupo de Simetrias do Tetraedro:

Considere agora o tetraedro da Figura (1.6). Note que temos quatro eixos do tipo L (eixo de simetria rotacional), onde cada um destes eixos determina duas rotações no sentido anti-horário, gerando assim um total de 8 simetrias.

Além disso, existem três eixos do tipo M , em que existe apenas uma rotação de π em cada um, resultando em mais três simetrias. Por último temos a simetria identidade, que pode ser obtida a partir de uma rotação de 2π em qualquer um dos eixos.

No total temos 12 simetrias rotacionais no tetraedro.

Figura 1.6: Eixos de Simetria do Tetraedro

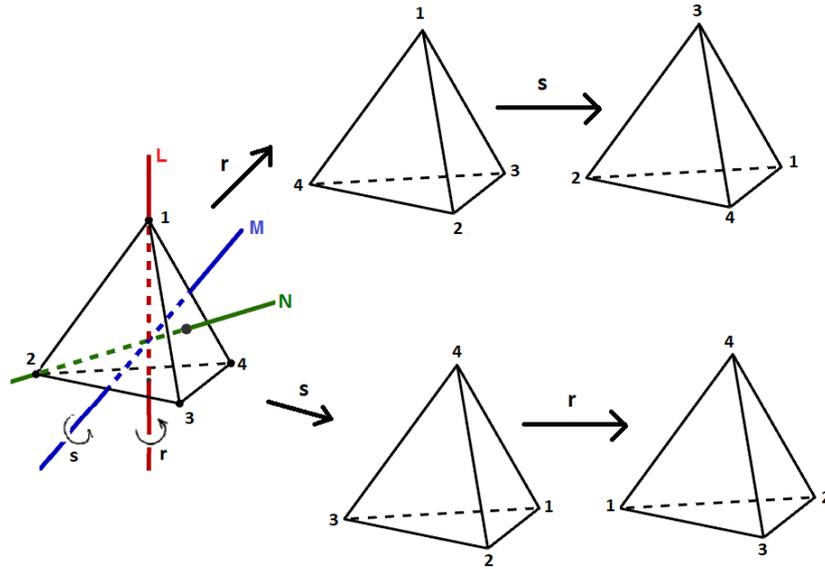


Fonte: Elaborada pela autora.

Dadas duas rotações u e v , se compormos primeiro v e depois u , obtemos uma nova rotação denotada por uv .

Por exemplo considere as rotações r e s ilustradas a seguir, então obtemos duas novas rotações sr e rs :

Figura 1.7: Composição de Simetrias do Tetraedro



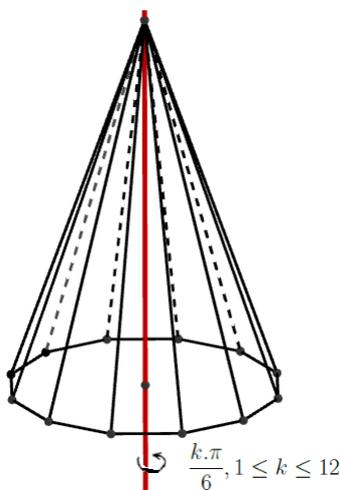
Fonte: Elaborada pela autora.

Com a operação de composição dada acima é possível mostrar que o conjunto das simetrias do tetraedro tem a estrutura de um grupo, o qual é denominado por grupo de simetrias do tetraedro, porém não é um grupo abeliano.

Exemplo 1.24. Pirâmide de Base Dodecaédrica: observamos agora a pirâmide de base dodecaédrica dada na Figura (1.8). Veja que nesta pirâmide existe apenas um eixo de rotação, que passa pelo vértice de encontro das arestas e pelo centro da base.

Temos então 12 simetrias determinadas a partir das 12 rotações no sentido anti-horário $\frac{k\pi}{6}$ para $1 \leq k \leq 12$.

Figura 1.8: Eixo de Simetria da Pirâmide de Base Dodecaédrica



Fonte: Elaborada pela autora.

Observe que o conjunto das simetrias da pirâmide de base dodecaédrica, com a operação de composição de funções, é um grupo com 12 elementos.

1.2 Subgrupos e Grupo Quociente

Definição 1.25. Seja (G, \cdot) um grupo. Dizemos que um subconjunto não vazio $H \subset G$ é um subgrupo de G se, e somente se,

- (i) $\forall a, b \in H \Rightarrow a \cdot b \in H$;
- (ii) (H, \cdot) tem estrutura de grupo.

Teorema 1.26. Para que um subconjunto não vazio $H \subset G$ seja subgrupo de um grupo (G, \cdot) , é necessário e suficiente que

$$\forall a, b \in H \implies a \cdot \bar{b} \in H,$$

onde \bar{b} é o elemento inverso de b .

Demonstração.

(\Rightarrow) Por hipótese, temos que H é um subgrupo de G , isto é, para quaisquer $a, b \in H$ temos que $a \cdot b \in H$, e também que (H, \cdot) tem estrutura de grupo.

Queremos mostrar que para quaisquer $a, b \in H$, temos que $a \cdot \bar{b} \in H$.

Primeiramente, mostramos que $e_H = e_G$, onde e_H é o elemento identidade de H e e_G é o elemento identidade de G . De fato, como e_H é o elemento identidade de H temos que $e_H \cdot e_H = e_H$. Por outro lado, como $e_H \in H \subset G$, segue que $e_H \cdot e_G = e_H$. Logo,

$$e_H \cdot e_H = e_H = e_H \cdot e_G.$$

Assim, pela lei do cancelamento em G ,

$$e_H = e_G.$$

Denotamos $e_H = e_G := e$.

Também pela lei do cancelamento segue que, para cada $a \in H$ temos $\bar{a}_H = \bar{a}$, onde \bar{a}_H é o elemento inverso de a em H e \bar{a} é o elemento inverso de a em G . Com efeito,

$$a \cdot \bar{a}_H = e_H = e_G = a \cdot \bar{a}.$$

Logo, $\bar{a}_H = \bar{a}$.

Consequentemente, para quaisquer $a, b \in H$, temos que

$$a \cdot \bar{b} = a \cdot \bar{b}_H \in H.$$

(\Leftarrow) Temos por hipótese que para todo $a, b \in H, a \cdot \bar{b} \in H$. Então, $e \in H$, já que $e = a \cdot \bar{a} \in H, \forall a \in H$.

Como $e \cdot a = a = a \cdot e$, para qualquer $a \in H \subset G$, segue que e é o elemento identidade para (H, \cdot) .

Também, para cada $b \in H, \bar{b} \in H$, pois

$$\bar{b} = e \cdot \bar{b} \in H.$$

E para cada $b \in H \subset G$,

$$b \cdot \bar{b} = e = \bar{b} \cdot b.$$

Portanto, \bar{b} é o elemento inverso de b em (H, \cdot) .

Em particular, dados $a, b \in H$, como $\bar{b} \in H$, segue por hipótese que

$$a \cdot b = a \cdot \bar{\bar{b}} \in H.$$

Finalmente, a propriedade associativa para H é válida uma vez que G é um grupo e $H \subset G$. \square

Observação 1.27. Todo grupo G admite pelo menos dois subgrupos a saber, G e $\{e\}$, chamados de subgrupos triviais de G .

Observação 1.28. Lembramos que, para um determinado elemento b , a notação de seu oposto \bar{b} será b^{-1} , para grupos multiplicativos e $-b$, para grupos aditivos.

Exemplo 1.29. Para o grupo multiplicativo dos reais não nulos (\mathbb{R}^*, \cdot) , tomemos $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Sejam $a, b \in H$. Como $b > 0$, então $\bar{b} = b^{-1} = \frac{1}{b} > 0$ e igualmente $ab^{-1} > 0$. Assim $ab^{-1} \in H$ e, portanto, H é um subgrupo de (\mathbb{R}^*, \cdot) .

Exemplo 1.30. Seja agora o grupo aditivo dos reais $(\mathbb{R}, +)$ e tomemos o subconjunto \mathbb{Z} dos inteiros. Então,

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \implies a + (-b) = a - b \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, $(\mathbb{Z}, +)$ é subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.

Exemplo 1.31. Seja $(\mathbb{R}^n, +)$ grupo aditivo de vetores de n coordenadas reais. O subconjunto A consistindo de todos os vetores que tem 0 como a primeira coordenada é subgrupo de \mathbb{R}^n .

Sejam $a = (0, x_2, \dots, x_n), b = (0, y_2, \dots, y_n) \in A$ então $-b = (0, -y_2, \dots, -y_n)$ e assim

$$a - b = (0, x_2, \dots, x_n) + (0, -y_2, \dots, -y_n) = (0, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n) \in A.$$

A partir de agora, no intuito de simplificar a notação, admitimos que G é um grupo multiplicativo.

Definição 1.32. O produto cartesiano de dois conjuntos não vazios E e F , denotado por $E \times F$, é o conjunto de todos os pares ordenados onde o primeiro elemento pertence a E e o segundo pertence a F , ou seja,

$$E \times F = \{(x, y) : x \in E, y \in F\}.$$

Definição 1.33. Chama-se relação binária de E em F todo subconjunto R de $E \times F$. Logo,

$$(R \text{ é relação de } E \times F) \text{ se, e somente se, } R \subset E \times F.$$

Notação: xRy , ou seja, $(x, y) \in R$ e $x \not R y$, ou seja, $(x, y) \notin R$.

Definição 1.34. Uma relação R sobre um conjunto E não vazio é chamada de relação de equivalência sobre E se, e somente se, R é reflexiva, simétrica e transitiva. Ou seja, R deve cumprir, respectivamente as seguintes propriedades:

- i) se $x \in E$, então xRx ;
- ii) se $x, y \in E$ e xRy , então yRx ;
- iii) se $x, y, z \in E$ e xRy e yRz , então xRz .

Exemplo 1.35. A relação $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$ sobre $E = \{a, b, c\}$ é uma relação de equivalência.

Definição 1.36. Seja R uma relação de equivalência sobre E . Dado a , com $a \in E$, chama-se classe de equivalência determinada por a , módulo R , o subconjunto \bar{a} de E constituído pelos elementos x tais que xRx .

$$\text{Notação: } \bar{a} = \{x \in E | xRa\}.$$

Definição 1.37. O conjunto das classes de equivalência módulo R será indicado por E/R e chamado conjunto-quotiente de E por R .

Proposição 1.38. *Seja R uma relação de equivalência sobre E e sejam $a \in E$ e $b \in E$. As seguintes proposições são equivalentes:*

- i) aRb ;
- ii) $a \in \bar{b}$;

iii) $b \in \bar{a}$;

iv) $\bar{a} = \bar{b}$.

Demonstração. Devemos provar que $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv) \Rightarrow i)$.

$i) \Rightarrow ii)$: É decorrência pela definição de classe de equivalência.

$ii) \Rightarrow iii)$: Como $a \in \bar{b}$, então aRb . Daí, pela simetria de R , bRa e, portanto, $b \in \bar{a}$.

$iii) \Rightarrow iv)$: Por hipótese, $b \in \bar{a}$, ou seja, bRa . Logo, aRb . Temos de provar que $\bar{a} \subset \bar{b}$ e $\bar{b} \subset \bar{a}$.

Para provar a primeira dessas inclusões, tomemos $x \in \bar{a}$. Então, xRa e, levando em conta que aRb , concluímos, pela transitividade de R , que xRb . Daí $x \in \bar{b}$ e, então, $\bar{a} \subset \bar{b}$. Analogamente se prova que $\bar{b} \subset \bar{a}$.

$iv) \Rightarrow i)$: Como $a \in \bar{a}$ e $b \in \bar{b}$, os conjuntos \bar{a} e \bar{b} não são vazios. Tomemos um $x \in \bar{a} = \bar{b}$. Então, xRa e xRb . Daí, pela simetria de R , valem aRx e xRa . A transitividade de R garante, então, que aRb . \square

Proposição 1.39. *Seja H subgrupo de um grupo G , definimos a seguinte relação em G :*

$$\forall a, b \in G : aRb, a \sim b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$$

a relação \sim é uma relação de equivalência, cuja as classes de equivalência são $aH = \{ax, x \in H\}$.

Notação: aRb ou $a \sim b$.

Demonstração. Para a relação \sim ser uma relação de equivalência precisamos mostrar que a relação \sim é reflexiva, simétrica e transitiva.

i) Reflexiva: Seja $a \in G$, qualquer. Como $e = a^{-1}a \in H$, temos $a \sim a$, logo a relação \sim é reflexiva.

ii) Simétrica: Se $a \sim b$, então $a^{-1}b \in H$, como H é subgrupo de G , temos que

$$(a^{-1}b)^{-1} = b^{-1}a \in H, \text{ ou seja, } b \sim a,$$

logo a relação \sim é simétrica.

iii) Transitiva: Se $a \sim b$ e $b \sim c$, então $a^{-1}b \in H$ e $b^{-1}c \in H$, com isso temos:

$$(a^{-1}b)(b^{-1}c) = a^{-1}(bb^{-1}c) = a^{-1}(ec) = a^{-1}c, \text{ ou seja, } a \sim c,$$

logo a relação \sim é transitiva.

Portanto, a relação \sim é uma relação de equivalência.

Seja $a \in G$, qualquer:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \{b \in G : a \sim b\} \\ &= \{b \in G : a^{-1}b \in H\} \\ &= \{b \in G : a^{-1}b = h, \text{ com } h \in H\} \\ &= \{b \in G : b = ah, \text{ com } h \in H\} \\ &= \{ah, \text{ com } h \in H\} \\ &= aH. \end{aligned}$$

□

Observação 1.40. De modo análogo a Proposição (1.39) é possível mostrar que a relação $a \sim b \Leftrightarrow ba^{-1} \in H$ é uma relação de equivalência, cuja as classes de equivalência são os conjuntos $Ha = \{xa, x \in H\}$.

Definição 1.41. No contexto da Proposição (1.39) a classe de equivalência aH é chamada classe lateral a esquerda módulo H .

Exemplo 1.42. Sejam o grupo $G = (\{1, i, -1, -i\}, \cdot)$ e seu subgrupo $H = \{1, -1\}$. Para encontrar as classes laterais à esquerda basta fazermos os seguintes cálculos:

$$1 \cdot H = \{1 \cdot 1, 1 \cdot (-1)\} = \{1, -1\} = H \quad 1 = H.$$

$$(-1)H = \{(-1) \cdot 1, (-1) \cdot (-1)\} = \{-1, 1\} = H \quad (-1) = H.$$

$$i \cdot H = \{i \cdot 1, i \cdot (-1)\} = \{i, -i\} = iH.$$

$$(-i)H = \{(-i) \cdot 1, (-i) \cdot (-1)\} = \{-i, i\} = iH.$$

Logo, há duas classes laterais à esquerda módulo H distintas: $H = \{1, -1\}$ e $iH = \{-i, i\}$.

No que segue exploramos propriedades de classes laterais que, embora sejam enunciadas usando classes laterais à esquerda, todas são válidas para classes laterais à direita (as demonstrações são análogas).

Proposição 1.43. A união de todas as classes laterais módulo H é igual a G .

Demonstração. Queremos mostrar que

$$\bigcup_{a \in G} aH = G.$$

Façamos isto.

$$(i) \quad \bigcup_{a \in G} aH \subset G.$$

Seja $x \in \bigcup_{a \in G} aH$, qualquer, então $x \in a_0H$, para algum $a_0 \in G$. Consequentemente, existe $h \in H$ tal que $x = a_0h$. Mas, $a_0h \in G$, logo $x = a_0h \in G$. Portanto,

$$\bigcup_{a \in G} aH \subset G.$$

$$(ii) \quad G \subset \bigcup_{a \in G} aH.$$

Seja $a_0 \in G$, qualquer. Observe que, como G é um grupo, temos que $a_0 = a_0e$, onde e denota o elemento neutro de G . Mas e pertence a H , já que H é subgrupo de G . Assim,

$$a_0 = a_0e \in a_0H.$$

Por sua vez,

$$a_0H \subset \bigcup_{a \in G} aH.$$

Logo, $a_0 \in \bigcup_{a \in G} aH$.

Portanto, $G \subset \bigcup_{a \in G} aH$.

Consequentemente, por (i) e (ii) segue que

$$G = \bigcup_{a \in G} aH.$$

□

Proposição 1.44. *Seja G um grupo. Para quaisquer $a, b \in G$:*

$$aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H.$$

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que $aH = bH$. Sabemos pela Proposição (1.43) que a pertence a aH , mas $aH = bH$, logo $a \in bH$. Disto segue que

$$a = bh, \quad \text{para algum } h \in H.$$

Mas,

$$a = bh \Rightarrow a^{-1} = h^{-1}b^{-1} \Rightarrow a^{-1}b = h^{-1} \in H.$$

Portanto, $a^{-1}b \in H$.

(\Leftarrow) Suponha $a^{-1}b \in H$, então existe $h \in H$ tal que $a^{-1}b = h$.

Logo,

$$b^{-1}a = h^{-1} \Rightarrow a = bh^{-1} \quad \text{e } b = ah. \tag{I}$$

Mostremos agora que $aH = bH$.

(i) $aH \subset bH$. Se $y \in aH$, qualquer, então

$$y = ah_1 \stackrel{I}{=} (bh^{-1})h_1 = b(h^{-1}h_1) \in bH,$$

já que $h^{-1}h_1 \in H$, pois H é subgrupo de G .

Portanto, $aH \subset bH$.

(ii) $bH \subset aH$. Se $y \in bH$, qualquer, então

$$y = bh_2, \quad \text{para algum } h_2 \in H.$$

Assim,

$$y = bh_2 \stackrel{I}{=} (ah)h_2 = a(hh_2) \in aH,$$

pois $hh_2 \in H$ uma vez que H é subgrupo de G .

Portanto, $bH \subset aH$.

Assim, por (i) e (ii), segue que

$$aH = bH.$$

□

Proposição 1.45. *Se aH e bH são duas classes laterais à esquerda módulo H , então*

$$aH \cap bH = \emptyset \quad \text{ou} \quad aH = bH.$$

Demonstração. Suponha que $aH \cap bH \neq \emptyset$, logo existe $x \in aH \cap bH$, ou seja,

$$x \in aH \quad \text{e} \quad x \in bH.$$

Disto segue que existem $h_1, h_2 \in H$ tais que

$$ah_1 = x = bh_2.$$

Mas,

$$ah_1 = bh_2 \Rightarrow a^{-1}b = h_1h_2^{-1},$$

com $h_1h_2^{-1} \in H$, pois H é subgrupo de G . Isto é, $a^{-1}b \in H$.

Com isto, pela Proposição (1.44), segue que

$$aH = bH.$$

Portanto, por dicotomia da igualdade,

$$aH \cap bH = \emptyset \quad \text{ou} \quad aH = bH.$$

□

Observação 1.46. Pelas Proposições (1.43), (1.45), (1.44) segue que o conjunto das classes laterais à esquerda módulo H formam uma partição ⁴ em G .

Observação 1.47. Toda classe lateral à esquerda (ou à direita) módulo H , subgrupo de um grupo G , tem o mesmo número de elementos de H . De fato, seja $g \in G$, qualquer.

Defina a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \phi : H &\longrightarrow gH \\ h &\longmapsto \phi(h) := gh. \end{aligned}$$

Veja que essa aplicação é bijetora, com efeito:

⁴Seja E um conjunto não vazio. Diz-se que uma coleção \mathcal{F} de subconjuntos não vazios de E é uma partição de E se, e somente se:

- (a) Dois membros quaisquer de \mathcal{F} ou são iguais ou são disjuntos.
- (b) A união dos membros de \mathcal{F} é igual a E .

i) ϕ é sobrejetora, pois: $\forall y \in gH$, temos que $y = gh_0$, para algum $h_0 \in H$. Tomando $h := h_0 \in H$ temos:

$$\phi(h) = \phi(h_0) = gh_0 = y.$$

ii) ϕ é injetora, pois: $\forall h_1, h_2 \in H$, se $\phi(h_1) = \phi(h_2)$ então:

$$\begin{aligned} gh_1 &= gh_2 \Rightarrow \\ g^{-1}(gh_1) &= g^{-1}(gh_2) \Rightarrow \\ (g^{-1}g)h_1 &= (g^{-1}g)h_2 \Rightarrow \\ eh_1 &= eh_2 \Rightarrow \\ h_1 &= h_2. \end{aligned}$$

Portanto, H e gH têm o mesmo número de elementos.

Definição 1.48. Sejam G um grupo e H subgrupo de G . A quantidade de classes laterais à esquerda (ou à direita) módulo H em G é chamada índice de H em G e denotada por $(G : H)$.

Teorema 1.49. (Teorema de Lagrange) Se H é um subgrupo de um grupo finito G , então a ordem de H é um divisor da ordem de G . Mais ainda,

$$|G| = (G : H) |H|.$$

Demonstração. Digamos que $|G| = m$, $|H| = r$ e $(G : H) = s$.

Para cada $g \in G$, temos pela Observação (1.47) que a classe lateral à esquerda gH tem r elementos, pela Proposição (1.44), $G = \bigcup_{g \in G} gH$ e ainda pela Observação (1.47) que o conjunto das classes laterais à esquerda módulo H forma uma partição em G , segue que:

$$m = s.r$$

Portanto,

$$|G| = (G : H) |H|.$$

□

Definição 1.50. Dizemos que um subgrupo N de um grupo G é um subgrupo normal quando satisfaz a seguinte propriedade

$$xN = Nx, \forall x \in G,$$

Notação: $H \triangleleft G$.

Proposição 1.51. Um subgrupo N de um grupo G é normal se, e somente se, $\forall n \in N, a \in G$ temos $a^{-1}na \in N$.

Demonstração. (\Rightarrow)

Supondo $N \triangleleft G$, temos que: $aN = Na, \forall a \in G$.

Agora, se $n \in N$ é qualquer, então:

$$na \in Na = aN \Rightarrow na = an', \text{ para algum } n' \in N \Rightarrow$$

$$a^{-1}na = a^{-1}an' \Rightarrow a^{-1}na = n' \in N \Rightarrow a^{-1}na \in N.$$

(\Leftarrow)

(i) $aN \subset Na$.

Se $x \in aN$ é qualquer, então $x = an$, para algum $n \in N$. Temos por hipótese que $xa^{-1} = ana^{-1} \in N$. Assim, como $xa^{-1} \in N$, temos que $xa^{-1} = n'$ para algum $n' \in N$ e isto implica em $x = xe = x(a^{-1}a) = (xa^{-1})a = n'a \in Na$. Logo, $x \in Na$.

(ii) $Na \subset aN$.

Se $x \in Na$ é qualquer, então $x = na$, para algum $n \in N$. Por hipótese temos que $a^{-1}x = a^{-1}na \in N$. Assim, como $a^{-1}x \in N$, temos $a^{-1}x = n'$ para algum $n' \in N$ e isto implica em $x = (aa^{-1})x = a(a^{-1}x) = an' \in aN$. Logo, $x \in aN$.

Portanto, de (i) e (ii) segue que $aN = Na, \forall a \in G$.

□

Exemplo 1.52. Sejam $G = \{1, i, -1, -i\}$ e $H = \{1, -1\}$ como no Exemplo (1.42), definimos a operação $xH \cdot yH = (xy)H, \forall x, y \in G$. Então temos a seguinte tábua

Tabela 1.4: Tábua Subgrupo Normal

\cdot	H	iH
H	H	iH
iH	iH	H

Portanto, H é um subgrupo normal de G , pois

$$\begin{aligned} 1H &= H1 \\ iH &= \{i, -i\} = Hi \\ (-1)H &= \{-1, 1\} = H(-1) \\ (-i)H &= \{-i, i\} = H(-i). \end{aligned}$$

Lema 1.53. Se o grupo G é abeliano, então todo subgrupo de G é normal.

Demonstração. Seja N um subgrupo de G , qualquer.

Para quaisquer $a \in G$ e $n \in N$ temos por hipótese que $na = an$. Assim, temos $a^{-1}na = a^{-1}(na) = a^{-1}(an) = (a^{-1}a)n = en = n \in N$ e, portanto, $a^{-1}na \in N$.

Desta maneira, $a^{-1}na \in N$, para todo $a \in G$. Logo, pela Proposição (1.51), $N \triangleleft G$. □

Definição 1.54. Sejam (G, \cdot) um grupo e $N \triangleleft G$. Definimos o grupo quociente, G/N , como o seguinte conjunto:

$$G/N := \{aN, a \in G\},$$

munido da operação:

$$\begin{aligned} \bullet : G/N \times G/N &\longrightarrow G/N \\ (aN, bN) &\longmapsto (aN) \bullet (bN) := (ab)N. \end{aligned}$$

Uma vez que G é um grupo segue que $ab \in G$, logo $(ab)N \in G/N$, isto é, a operação acima é binária e é bem definida, conforme vemos a seguir

Sejam $(aN, bN), (a'N, b'N) \in G/N \times G/N$, tais que

$$(aN, bN) = (a'N, b'N).$$

Temos,

$$(aN) \cdot (bN) := (ab)N.$$

e

$$(a'N) \cdot (b'N) := (a'b')N.$$

Queremos mostrar que $(ab)N = (a'b')N$, o que é equivalente a $(ab)^{-1}a'b' \in N$.

Por hipótese,

$$\begin{cases} aN = a'N \\ bN = b'N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^{-1}a' \in N \\ b^{-1}b' \in N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^{-1}a' = n_1, & n_1 \in N \\ b^{-1}b' = n_2, & n_2 \in N \end{cases} \quad (I)$$

Agora,

$$(ab)^{-1}a'b' = (b^{-1}a^{-1})a'b' = b^{-1}(a^{-1}a')b' = b^{-1}n_1b'. \quad (II)$$

Como N é normal, segue que $b'N = Nb'$, conseqüentemente, como temos que $n_1b' \in Nb' = b'N$, segue que existe $n_3 \in N$ tal que:

$$n_1b' = b'n_3. \quad (III)$$

Substituindo (III) em (II) e usando (I) segue que

$$(ab)^{-1}a'b' = b^{-1}(n_1b') = b^{-1}(b'n_3) = (b^{-1}b')n_3 = n_2n_3 \in N.$$

Portanto, $(ab)^{-1}a'b' \in N$.

Lema 1.55. $(G/N, \bullet)$ é um grupo.

Demonstração. Já sabemos que a operação \bullet está bem definida.

Verifiquemos a associatividade e a existência dos elementos identidade e inverso.

- (i) Se $a, b, c \in G$, então $(aN) \bullet [(bN) \bullet (cN)] = (aN) \bullet ((bc)N) = (a(bc))N = ((ab)c)N = ((ab)N) \bullet (cN) = [(aN) \bullet (bN)] \bullet (cN)$.
- (ii) Assumindo e elemento identidade de G , então temos como elemento identidade de G/N a classe eN , pois para qualquer $a \in G$ temos

$$(aN) \bullet (eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN) \bullet (aN).$$

- (iii) Dado $b \in G$, qualquer, o elemento inverso da classe bN é o elemento $(b^{-1}N)$:

$$(bN) \bullet (b^{-1}N) = (bb^{-1})N = eN = (b^{-1}b)N = (b^{-1}N) \bullet (bN).$$

□

Observação 1.56. (i) Dados G um grupo e N um subgrupo normal de G , existe uma função sobrejetora de G em G/N , a saber,

$$\begin{array}{ccc} p: G & \rightarrow & G/N \\ a & \mapsto & aN \end{array}$$

Note que de fato p é uma função sobrejetora, pois cada classe K em G/N é da forma xN para algum $x \in G$, logo, tomando x em G , temos $p(x) = K$.

- (ii) Veja que pela Observação (1.46) o grupo quociente G/N é uma partição para o grupo G .

Finalizamos esta seção apresentando um importante subgrupo do grupo de permutações S_n , a saber, o subgrupo A_n , chamado de grupo alternado de grau n .

Para tanto inicialmente precisamos definir o que é uma transposição.

Definição 1.57. Sejam $E = \{1, 2, \dots, n\}$ e $a_1, a_2, \dots, a_n \in E$ distintos. Se $f \in S_n$ é tal que:

$f(a_1) = a_2, f(a_2) = f^2(a_1) = a_3, \dots, f(a_{r-1}) = f^{r-1}(a_1) = a_r$ e $f(a_r) = f^r(a_1) = a_1$ e $f(x) = x, \forall x \in E - \{a_1, \dots, a_r\}$, então dizemos que f é um ciclo de comprimento r e que $\{a_1, \dots, a_r\}$ é o conjunto suporte de f .

Denotamos tal ciclo por:

$$f = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_r).$$

Quando $r = 2$, chamamos tal ciclo de transposição.

Se dois conjuntos suporte são disjuntos, dizemos que os respectivos ciclos são disjuntos.

Exemplo 1.58. Seja $f \in S_5$, dado por: $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Veja que f é o ciclo $f = (1 \ 4 \ 2)$, já que:

$$f(1) = 4, f(4) = f^2(1) = 2, f(2) = f(f(4)) = f(f^2(1)) = f^3(1) = 1.$$

O suporte de f é o conjunto $\{1, 2, 4\}$.

Veja que um mesmo conjunto suporte gera ciclos diferentes. No caso de

$g = (2 \ 4 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, o conjunto suporte desse ciclo também é $\{1, 2, 4\}$, porém $f \neq g$.

Proposição 1.59. *Toda permutação $f \in S_n$, com exceção da permutação idêntica, pode ser decomposta como produto de ciclos disjuntos.*

Demonstração. Seja $f \in S_n$ uma permutação sobre $E = \{1, 2, \dots, n\}$. Para escrevermos f na forma de ciclos disjuntos, iniciamos escolhendo qualquer membro de E . Tomemos a_1 , e seja

$$a_2 = f(a_1), a_3 = f(f(a_1)), \dots$$

e assim sucessivamente, até chegarmos em $a_1 = f^m(a_1)$ para algum m . Sabemos que tal m existe pois a sequência a_1, a_2, \dots deve ser finita e portanto haverá a repetição em algum momento, digamos que $f^i(a_1) = f^j(a_1)$, para algum i e j , onde $i < j$. Deste modo, $a_1 = f^m(a_1)$, onde $m = j - i$. Expressamos a relação a_1, a_2, \dots, a_m como

$$f = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m) \dots$$

Os três pontos ao final indicam que podemos não ter esgotado o conjunto I_n , deste modo tomaremos um novo elemento b_1 , tal que b_1 ainda não tenha aparecido no primeiro ciclo, e realizaremos o mesmo processo. Continuaremos esse processo até esgotarmos I_n .

Observe que o ciclo seguinte não tem elementos em comum com os ciclos anteriores. Suponha, por absurdo, que $f^i(a_1) = f^j(b_1)$, para algum i e j , então $f^{j-i}(a_1) = b_1$ e, portanto, $b_1 = a_t$, para algum t , o que contradiz com o modo como b_1 foi escolhido por hipótese.

Temos, portanto,

$$f = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m)(b_1 \ b_2 \ \dots \ b_k) \dots (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_s).$$

Deste modo, vemos que toda permutação pode ser escrita como o produto de ciclo disjuntos. \square

Corolário 1.60. *Se $n \geq 2$, então toda permutação de S_n pode ser decomposta como um produto de transposições.*

Demonstração. Pela Proposição (1.59), já temos que toda permutação pode ser decomposta em ciclos disjuntos e cada ciclo pode ser decomposto em produtos de transposições, da seguinte maneira:

$$(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_r) = (a_1 \ a_r)(a_1 \ a_{r-1}) \dots (a_1 \ a_2).$$

\square

Lema 1.61. *Seja e a permutação identidade de S_n . Se $e = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_r$, onde cada β_j é uma transposição, então r é par.*

Demonstração. Suponha

$$e = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{r-2} \beta_{r-1} \beta_r \tag{1.1}$$

Note primeiramente que $r \neq 1$, pois se $r = 1$, teríamos $\beta_1 = (ab)$, o que é um absurdo, pois neste caso β_1 não seria a aplicação identidade. Agora, se $r = 2$, então já temos a decomposição par como queríamos.

Suponha agora $r > 2$ ($r - 2 > 0$):

Usaremos o Segundo Princípio de Indução. Para isso, suponha que “se $\beta = \beta_1 \dots \beta_l$ então l é par” é válida para qualquer $l < r$.

Mostraremos que dada a decomposição $e = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_{r-2}\beta_{r-1}\beta_r$, sempre é possível obter uma decomposição com $r - 2$ transposições. De fato:

Suponha que β_r é (ab) . Temos as seguintes possibilidades para o produto $\beta_{r-1}\beta_r$, que são:

1. $\beta_{r-1}\beta_r = (ab)(ab)$;
2. $\beta_{r-1}\beta_r = (ac)(ab)$;
3. $\beta_{r-1}\beta_r = (bc)(ab)$;
4. $\beta_{r-1}\beta_r = (cd)(ab)$.

Se o primeiro caso ocorrer, podemos cancelar este produto da igualdade (1.1) e obtemos uma decomposição com $(r - 2)$ -transposições. Além disso, pelo Segundo Princípio da Indução Finita, segue que $(r - 2)$ é par.

Se acontecer os demais três casos, usando uma das igualdades:

2. $\beta_{r-1}\beta_r = (ac)(ab) = (ab)(bc)$
3. $\beta_{r-1}\beta_r = (bc)(ab) = (ac)(cb)$
4. $\beta_{r-1}\beta_r = (cd)(ab) = (ab)(cd)$

obtemos que o elemento “ a ” ocorre em β_{r-1} , ou seja, movemos o elemento a para a transposição da esquerda. Fazendo o mesmo processo para $\beta_{r-2}\beta_{r-1}$, temos que se $\beta_{r-2}\beta_{r-1}$ é a identidade, cancelamos do produto e obtemos uma decomposição com $(r - 2)$ -transposições e portanto, pelo Segundo Princípio da Indução Finita, r é par.

Caso contrário, ou seja, $\beta_{r-2}\beta_{r-1}$ não ser a identidade, mais uma vez movemos o elemento a , a saber, agora para a transposição β_{r-2} .

Continuando esse processo, necessariamente obtemos um produto de $(r - 2)$ transposições, pois do contrário teríamos um produto resultando a identidade com o elemento a apenas na transposição β_1 , o que é absurdo, pois se “ a ” está apenas em β_1 , segue que “ a ” não está fixado, logo a igualdade (1.1) não seria a aplicação identidade.

Portanto, sempre podemos obter a partir da igualdade (1.1) uma decomposição com $(r - 2)$ transposições.

Como $(r - 2) < r$, segue pela nossa hipótese de indução que $(r - 2)$ é par.

Agora se $(r - 2)$ é par, ou seja, $r - 2 = 2k$, então $r = 2k + 2 \Rightarrow r = 2(k + 1)$, que também é par e portanto, r é par e sendo assim, concluímos que se $e = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_r$, então r é par, para todo $r \in \mathbb{N}$.

□

Teorema 1.62. *Se uma permutação f pode ser expressa como um produto de um número par (ou ímpar) de transposições, então toda decomposição de f em um produto de transposições deve ter um número par (ou ímpar) de transposições. Isto é:*

$f = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_r$ e $f = \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_s$, onde β_j e γ_k são transposições, então r e s são ambos pares ou ambos ímpares.

Demonstração. Observe que, se $\beta_1\beta_2 \cdots \beta_r = \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_s$, então:

$$e = (\gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_s)(\beta_r^{-1} \cdots \beta_2^{-1}\beta_1^{-1}).$$

Então, o Lema (1.61) garante que $r + s$ é par. Disso, segue que r e s são ambos pares ou ambos ímpares. □

Definição 1.63. Uma permutação que pode ser expressa como um produto de um número par de transposições é chamada uma permutação par. Uma permutação que pode ser expressa como um produto de um número ímpar de transposições é chamada uma permutação ímpar.

Exemplo 1.64. Em S_4 , se $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, então

$$f = (1 \ 2 \ 3 \ 4) = (1 \ 4)(1 \ 3)(1 \ 2)$$

Logo, f é uma permutação ímpar. Podemos, também, acrescentar elementos sem que seja alterado o elemento final, se acrescentamos, por exemplo, $e = (2 \ 3)(3 \ 2)$. Ou seja, podemos escrever f como

$$f = (1 \ 4)(1 \ 3)(1 \ 2)(2 \ 3)(3 \ 2).$$

E ainda assim f é uma permutação ímpar.

Teorema 1.65. O conjunto das permutações pares de S_n forma um subgrupo normal de S_n , que denotamos por A_n . Além disso, $|A_n| = \frac{n!}{2}$.

Demonstração. Temos pelo Lema (1.61) que a permutação identidade e de S_n é par, ou seja, $e \in A_n$. Ainda, se $f, g \in A_n$, ou seja, f e g se expressam ambas como o produto de um número par de transposições, então a composição fg também é expressa como o produto de um número par de transposições, ou seja, $fg \in A_n$, já que no máximo pares de transposição são cancelados. Agora se $f \in A_n$ então f^{-1} também se expressa como o produto de um número par de transposições, já que podemos obter f^{-1} apenas considerando a expressão de f ao sentido contrário. Portanto, A_n é um subgrupo de S_n . Além disso, para qualquer $f \in S_n$ temos as seguintes considerações sobre as classes laterais:

- se f é par, então $fA_n = A_n$;
- se f é ímpar, então $fA_n = S_n - A_n$.

Também,

- se f é par, então $A_n f = A_n$;
- se f é ímpar, então $A_n f = S_n - A_n$.

Sabemos também que:

$$S_n = A_n \cup (S_n - A_n)$$

Logo,

- se f é par, então:

$$fA_n = A_n = A_n f;$$

- se f é ímpar, então:

$$fA_n = S_n - A_n = A_n f.$$

Ou seja, as classes laterais à esquerda e à direita módulo A_n coincidem:

$$fA_n = A_nf, \forall f \in S_n.$$

Portanto, A_n é subgrupo normal de S_n .

Além disso, a estrutura de grupo quociente $\frac{S_n}{A_n}$ é dada pela tábua:

\circ	A_n	fA_n
A_n	A_n	fA_n
fA_n	fA_n	A_n

Com isso, segue que $(S_n : A_n) = 2$. Além disso, já sabemos que $|S_n| = n!$, logo pelo Teorema de Lagrange (1.49) temos:

$$|S_n| = (S_n : A_n) |A_n| \Rightarrow n! = 2 \cdot |A_n| \Rightarrow |A_n| = \frac{n!}{2}.$$

□

Definição 1.66. O grupo das permutações pares de S_n , denotado por A_n , é chamado de grupo alternado de grau n .

Exemplo 1.67. Vejamos como definir A_4 subgrupo de S_4 .

$$S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Veja que podemos reescrever os elementos de S_4 como ciclos disjuntos, deste modo, teremos:

$$S_4 = \{e, (1\ 4)(2\ 3), (1\ 4), (1\ 2)(3\ 4), (3\ 4), (1\ 3), (1\ 4)(1\ 2), (1\ 2)(1\ 3), (2\ 3)(2\ 4), (2\ 3), (1\ 2), (1\ 3)(1\ 4)(1\ 2), (2\ 4), (1\ 4)(1\ 3), (1\ 2)(1\ 4), (1\ 3)(1\ 2)(1\ 4), (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4), (1\ 3)(1\ 4), (1\ 4)(1\ 3)(1\ 2), (1\ 3)(2\ 4), (2\ 4)(2\ 3), (1\ 3)(1\ 2), (1\ 2)(1\ 4)(1\ 3), (1\ 4)(1\ 2)(1\ 3)\}.$$

Sabemos que os elementos de A_4 são os que possuem um número par de composições, ou seja,

$$A_4 = \{e, (1\ 4)(2\ 3), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(1\ 2), (1\ 2)(1\ 3), (2\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(1\ 3), (1\ 2)(1\ 4), (1\ 3)(1\ 4), (2\ 4)(2\ 3), (1\ 3)(1\ 2)\}.$$

1.3 Homomorfismo e Isomorfismo

Definição 1.68. Dá-se o nome de homomorfismo de um grupo (G, \cdot) em um grupo (J, Δ) a toda aplicação $f : G \rightarrow J$ tal que, quaisquer que sejam $x, y \in G$:

$$f(x \cdot y) = f(x) \Delta f(y).$$

Se além disso, f é bijetora, então dizemos que f é um isomorfismo.

Exemplo 1.69. Seja $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$, dada por $f(x) = \bar{x}$ onde $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$ (Classes módulo n) é um grupo com a operação $\bar{a} +_n \bar{b} = \overline{a+b}$.

Temos que

$$f(a+b) = \overline{a+b} = \bar{a} +_n \bar{b} = f(a) +_n f(b).$$

Logo, f é um homomorfismo.

Exemplo 1.70. Dado $f : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a$$

Verificaremos se f é um homomorfismo:

$$\begin{aligned} f \left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \right] &= f \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} = a_1 + a_2 = \\ &= f \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.71. Se $G = J = (\mathbb{Z}, +)$, então $f : G \rightarrow J$, $f(x) = 2x$ é um homomorfismo de grupos pois, $f(x+y) = 2x+2y = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in G$.

Exemplo 1.72. Sejam $G = (\mathbb{Q}^*, \cdot)$ e $J = (\mathbb{R}^*, \cdot)$, então $f : \mathbb{Q}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $f(x) = x^2$ é um homomorfismo de grupos, pois $f(x \cdot y) = (x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2 = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}^*$.

Exemplo 1.73. Sejam $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $J = (\mathbb{R}^*, \cdot)$ e $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, $g(x, y) = 2^{(x-y)}$. Para quaisquer $(x, y), (z, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} g((x, y) + (z, w)) &= g(x+z, y+w) = 2^{(x+z)-(y+w)} \\ &= 2^{(x-y)+(z-w)} = 2^{(x-y)} \cdot 2^{(z-w)} = g(x, y) \cdot g(z, w). \end{aligned}$$

Logo, g é um homomorfismo de G em J .

Exemplo 1.74. Se G é um grupo e N é subgrupo normal de G então a aplicação $p : G \rightarrow G/N$ da Observação (1.56) é um homomorfismo. De fato, $\forall a, b \in G$,

$$p(ab) = (ab)N = (aN) * (bN) = p(a) * p(b).$$

Exemplo 1.75. A função $f(x) = \log(x)$ é um isomorfismo de $G = (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ em $J = (\mathbb{R}, +)$ pois

i) $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log(x)$ é bijetora;

ii) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, temos

$$f(x \cdot y) = \log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y) = f(x) + f(y).$$

Exemplo 1.76. Sejam $C = \left\{ M \in GL_2(\mathbb{R}) \mid M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ e $f : (C, \cdot) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$ dada por

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right) = a + bi.$$

Então, f é um isomorfismo. De fato, f é bijetora, além disso

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -bc - ad & -bd + ac \end{pmatrix}\right) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \\ &= (a + bi) \cdot (c + di) \\ &= f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right) \cdot f\left(\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Analisaremos agora como estão relacionados alguns grupos de simetria e permutações estudados nos capítulos anteriores. Vejamos os exemplos abaixo de isomorfismos entre grupos de permutação e simetria.

Exemplo 1.77. Veja que existe um isomorfismo entre o Grupo de Simetrias do Triângulo Equilátero D_3 , Exemplo (1.21), com o Grupo das Permutações S_3 , Exemplo (1.18), via a correspondência:

$$f_0 \leftrightarrow \rho_0, \quad f_1 \leftrightarrow \rho_1, \quad f_2 \leftrightarrow \rho_2, \quad g_1 \leftrightarrow \mu_1, \quad g_2 \leftrightarrow \mu_2 \quad \text{e} \quad g_3 \leftrightarrow \mu_3.$$

Ainda, comparando as Tabelas (1.1) e (1.5) vemos que existe uma analogia entre as operações.

Tabela 1.5: Tábua do Grupo das Permutações S_3

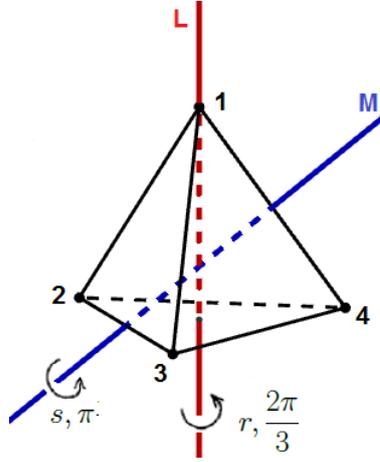
\circ	f_0	f_1	f_2	g_1	g_2	g_3
f_0	f_0	f_1	f_2	g_1	g_2	g_3
f_1	f_1	f_2	f_0	g_3	g_1	g_2
f_2	f_2	f_0	f_1	g_2	g_3	g_1
g_1	g_1	g_2	g_3	f_0	f_1	f_2
g_2	g_2	g_3	g_1	f_2	f_0	f_1
g_3	g_3	g_1	g_2	f_1	f_2	f_0

Tabela 1.6: Tábua do Grupo de Simetrias D_3

\circ	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	μ_3	μ_1	μ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_3	μ_1
μ_1	μ_1	μ_2	μ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2
μ_2	μ_2	μ_3	μ_1	ρ_2	ρ_0	ρ_1
μ_3	μ_3	μ_1	μ_2	ρ_1	ρ_2	ρ_0

Exemplo 1.78. Enumerando os vértices de um tetraedro com os números 1, 2, 3 e 4, como na Figura (1.9), cada simetria rotacional determina uma permutação do conjunto $E = \{1, 2, 3, 4\}$, ou seja, cada simetria determina um elemento de A_4 .

Figura 1.9: Isomorfismo do Grupo de Simetrias do Tetraedro



Fonte: Elaborada pela autora.

Por exemplo, a rotação r , induz a permutação cíclica $(234) = (24)(23) \in A_4$ e s induz a permutação $(14)(23) \in A_4$.

Além disso, se duas rotações, r, s induzem as permutações f, g , respectivamente, então rs induz a permutação $f \circ g$. Portanto a correspondência

simetria rotacional \rightarrow permutação induzida

define um isomorfismo entre o grupo de Simetria do Tetraedro e o subgrupo A_4 de S_4 .

No próximo capítulo utilizamos as noções básicas de um grupo, aqui apresentadas, para tratar de ação de um grupo sobre um conjunto.

2 Ação de Grupo sobre Conjuntos

Neste capítulo abordamos definições e propriedades envolvendo ação de um grupo em um conjunto. Este tópico é necessário para estudar o Teorema de Burnside o qual tomamos como referência base [13].

2.1 Noção de uma Ação de Grupo

Definição 2.1. Definimos uma operação binária $*$ sobre um conjunto S , como sendo uma função $* : S \times S \rightarrow S$ tal que para qualquer $(s_1, s_2) \in S \times S$ tem-se $s_1 * s_2 \in S$.

Definição 2.2. Sejam X um conjunto e (G, \cdot) um grupo. Uma ação de G em X é uma aplicação

$$\begin{aligned} * : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto *(g, x) := g * x \end{aligned}$$

de tal modo que:

- (i) $e * x = x, \forall x \in X$;
- (ii) $(g_1 g_2) * x = g_1 * (g_2 * x), \forall x \in X$ e $\forall g_1, g_2 \in G$.

Além disso, dizemos que X é um G -conjunto se existir uma ação do grupo G no conjunto X , ou seja, um G -conjunto é uma terna $(X, G, *)$ formada pelo conjunto X , pelo grupo G e por uma ação $*$.

Exemplo 2.3. Se X é um conjunto qualquer e H é um subgrupo do grupo S_X de todas as permutações de X então X é um H -conjunto, em que ação é dada por:

$$\begin{aligned} H \times X &\longrightarrow X \\ (\sigma, x) &\longmapsto \sigma * x := \sigma(x). \end{aligned}$$

Veja que, de fato $*$ é uma ação de H em X , pois:

- 1) $\forall x \in X$,
 $e * x := e(x) = x$, em que e é a aplicação identidade de X em X .
- 2) $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in H, \forall x \in X$:
 $(\sigma_1 \sigma_2) * x = (\sigma_1 \sigma_2)(x) = \sigma_1(\sigma_2(x)) = \sigma_1 * (\sigma_2(x)) = \sigma_1 * (\sigma_2 * x)$.

Nosso primeiro teorema mostra que para todo G -conjunto X e para cada $g \in G$, a função $\sigma_g : X \rightarrow X$ definida por $\sigma_g(x) := g * x$ é uma permutação de X , e que existe um homomorfismo $\phi : G \rightarrow S_X$, de modo que a ação de G em X pode ser vista como a ação dada no Exemplo (2.3), ou seja, como a ação do subgrupo $H = \phi(G)$ de S_X em X . Portanto, as ações dos subgrupos de S_X em X descrevem todas as ações de grupo possíveis em X .

Teorema 2.4. *Sejam (G, \cdot) um grupo e X um G -conjunto. Para a função $\sigma_g : X \rightarrow X$ definida por $\sigma_g(x) := g * x, \forall x \in X$ e $\forall g \in G$, são válidas as seguintes afirmações:*

- i) $\sigma_g \in S_X$;
- ii) A aplicação $\phi : G \rightarrow S_X$ definida por $\phi(g) = \sigma_g$ é um homomorfismo tal que $\phi(g)(x) := g * x$.

Demonstração. i) Seja X um G -conjunto e para cada $g \in G$ defina $\sigma_g : X \rightarrow X$ por $\sigma_g(x) := g * x$. Mostremos que $\sigma_g \in S_X$, ou seja, σ_g é uma bijeção.
De fato,

- 1) σ_g é injetora, pois para quaisquer $x_1, x_2 \in X$, temos:

$$\begin{aligned} \sigma_g(x_1) = \sigma_g(x_2) &\Rightarrow \\ g * x_1 = g * x_2 &\Rightarrow \\ g^{-1} * (g * x_1) = g^{-1} * (g * x_2) &\Rightarrow \\ (g^{-1}g) * (x_1) = (g^{-1}g) * (x_2) &\Rightarrow \\ e * x_1 = e * x_2 &\Rightarrow \\ x_1 = x_2. \end{aligned}$$

- 2) σ_g é sobrejetora, pois dado $x \in X$, tomemos $a = g^{-1} * x \in X$, temos:

$$\sigma_g(a) = \sigma_g(g^{-1} * x) = g * (g^{-1} * x) = (gg^{-1}) * x = e * x = x.$$

Portanto, por (1) e (2) temos que σ_g é bijetora.

- ii) Mostremos agora que a aplicação $\phi : G \rightarrow S_X$, dada por $\phi(g) = \sigma_g$ é um homomorfismo de grupos, em que $\sigma_g : X \rightarrow X$ é tal que $\sigma_g(x) = g * x$.
Sejam g_1 e $g_2 \in G$, quaisquer, queremos mostrar a seguinte igualdade de aplicações em S_X :

$$\phi(g_1g_2) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2).$$

Façamos isto: para quaisquer $x \in X$, temos:

$$\begin{aligned} \phi(g_1g_2)(x) &= \sigma_{g_1g_2}(x) \\ &= (g_1g_2) * x \\ &= g_1 * (g_2 * x) \\ &= g_1 * (\sigma_{g_2}(x)) \\ &= \sigma_{g_1}(\sigma_{g_2}(x)) \\ &= (\sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2})(x) \\ &= (\phi(g_1) \circ \phi(g_2))(x). \end{aligned}$$

Veja ainda que, para todo $x \in X$, $\phi(g)(x) = \sigma_g(x) = g * x$.

□

A partir do Teorema (2.4) podemos concluir que toda ação pode ser vista como a imagem de um homomorfismo sobre S_X .

Observação 2.5. Quando nos referirmos a um G -conjunto estará implícito que (G, \cdot) é um grupo.

Lema 2.6. Se X é um G -conjunto, então o subconjunto N de G que deixa todo elemento de X fixo é um subgrupo normal de G . Em outras palavras, o subconjunto

$$N = \{g \in G : g * x = x, \forall x \in X\}$$

e tal que $N \triangleleft G$.

Demonstração. Primeiro verificamos que N é subgrupo de G .

i) Como $e * x = x, \forall x \in X$, segue que $e \in N$.

ii) Dados, $a, b \in N$, temos:

$$(ab) * x = a * (b * x) = a * x = x, \forall x \in X.$$

Logo, $ab \in N$.

iii) $\forall a \in N, a^{-1} \in N$, pois

$$a^{-1} * x = a^{-1} * (a * x) = (a^{-1}a) * x = e * x = x, \forall x \in X.$$

Portanto, N é subgrupo de G .

Agora verificamos que N é subgrupo normal de G . Para quaisquer $g \in G, a \in N$ e $x \in X$, temos:

$$\begin{aligned} (gag^{-1}) * x &= g(ag^{-1}) * x \\ &= g * ((ag^{-1}) * x) \\ &= g * (a * (g^{-1} * x)) \\ &= g * (g^{-1} * x) \\ &= (gg^{-1}) * x \\ &= e * x \\ &= x. \end{aligned}$$

Portanto, $gag^{-1} \in N$, logo N é subgrupo normal de G .

Observação 2.7. Como N é subgrupo normal de G podemos definir o grupo quociente $\frac{G}{N}$. Se X é um G -conjunto, então podemos olhar X como um

$\frac{G}{N}$ -conjunto considerando a seguinte aplicação: ¹

$$\begin{aligned} \star : \frac{G}{N} \times X &\rightarrow X \\ (gN, x) &\mapsto (gN) \star x = g * x \end{aligned}$$

Mostremos que \star é uma ação de $\frac{G}{N}$ sobre X .

i) $e_{\frac{G}{N}} \star x = (eN) \star x = e * x = x, \forall x \in X.$

ii) $\forall g_1N, g_2N \in \frac{G}{N}$ e $\forall x \in X$, temos:

$$\begin{aligned} (g_1N g_2N) \star x &= (g_1 g_2 N) \star x \\ &= (g_1 g_2) * x \\ &= g_1 * (g_2 * x) \\ &= g_1 * (g_2 N \star x) \\ &= g_1 N \star (g_2 N \star x) \\ &= g_1 N \star (g_2 N \star x). \end{aligned}$$

Logo, \star é uma ação de $\frac{G}{N}$ sobre X .

□

Definição 2.8. No contexto do Lema (2.6) dizemos que G age fielmente sobre X quando:

$$N = \{g \in G : g * x = x, \forall x \in X\} = \{e\}.$$

Definição 2.9. Dizemos que um grupo G é transitivo sobre um G -conjunto X se para cada $x_1, x_2 \in X$, existe $g \in G$ tal que:

$$g * x_1 = x_2.$$

Definição 2.10. Se A é um conjunto qualquer, então um subgrupo H de S_A é transitivo sobre A se para quaisquer $a, b \in A$ existe $\sigma \in H$ tal que $\sigma(a) = b$.

Lema 2.11. No contexto do Teorema (2.4), G é transitivo se, e somente se, o subgrupo $\phi(G)$ de S_X é transitivo sobre X .

Demonstração. (\Rightarrow) Temos que G é transitivo sobre o G -conjunto X , isto é, para todo $x_1, x_2 \in X$ existe $g_0 \in G$ tal que $g_0 * x_1 = x_2$.

1

· operação do grupo

* operação da ação

★ operação de $\frac{G}{N}$ definida.

Queremos mostrar que $\phi(G) = \{\sigma_g, g \in G\}$ (que é subgrupo de S_X) é transitivo sobre X , isto é, para todo $x_1, x_2 \in X$, existe $\sigma_g \in \phi(G)$ tal que, $\sigma_g(x_1) = x_2$, ou seja, $g * x_1 = x_2$.

Veja que por hipótese, para quaisquer $x_1, x_2 \in X$ existe $g_0 \in G$ tal que $g_0 * x_1 = x_2$. Assim temos

$$\sigma_{g_0}(x_1) = x_2$$

isto é, $\phi(G)$ é transitivo sobre X .

(\Leftarrow) Temos que o subgrupo $\phi(G)$ de S_X é transitivo sobre X , ou seja, para todo $x_1, x_2 \in X$, existe $\sigma_g \in \phi(G) \mid \sigma_g(x_1) = x_2$. Assim, existe $g \in G$ tal que $g * x_1 = x_2$, isto é, G é transitivo sobre X . □

Exemplo 2.12. Todo grupo (G, \cdot) é um G -conjunto, ou seja, todo grupo age sobre ele próprio. A ação neste caso é a própria operação do grupo.

Para todos $g_1, g_2 \in G$, definimos $g_1 * g_2 = g_1 g_2$.

Veja que de fato tal operação é uma ação sobre G , pois

i) $e * g = e(g) = g, \forall g \in G$.

ii) $\forall g_1, g_2, g \in G :$

$$\begin{aligned} (g_1 g_2) * g &= (g_1 g_2)g \\ &= g_1 (g_2 g) \\ &= g_1 * (g_2 g) \\ &= g_1 * (g_2 * g). \end{aligned}$$

Além disso, se H é um subgrupo de (G, \cdot) podemos olhar G como H -conjunto, cuja ação é dada por:

$$\forall h \in H, \forall g \in G : h * g = hg.$$

Veja que de fato tal aplicação é uma ação:

i) $e * g = eg = g, \forall g \in G$;

ii) $(h_1 h_2) * g = (h_1 h_2)g = h_1 (h_2 g) = h_1 * (h_2 g) = h_1 * (h_2 * g), \forall h_1, h_2 \in H, \forall g \in G$.

Exemplo 2.13. Se H é um subgrupo de (G, \cdot) então G é um H -conjunto, cuja a ação é dada pela seguinte conjugação:

$$h * g = hgh^{-1}.$$

Veja que de fato tal operação é uma ação:

i) $e * g = ege^{-1} = ege = eg = g, \forall g \in G$;

ii) $\forall h_1, h_2 \in H, \forall g \in G,$

$$\begin{aligned} (h_1 h_2) * g &= (h_1 h_2) g (h_1 h_2)^{-1} \\ &= (h_1 h_2) g (h_2^{-1} h_1^{-1}) \\ &= h_1 (h_2 g h_2^{-1}) h_1^{-1} \\ &= h_1 (h_2 * g) h_1^{-1} \\ &= h_1 * (h_2 * g). \end{aligned}$$

Exemplo 2.14. Se H é um subgrupo de G e L_H é o conjunto de todas as classes laterais de H , então L_H é um G -conjunto, com a ação de cada elemento g em G na classe lateral à esquerda xH dada por

$$\begin{aligned} * : G \times L_H &\longrightarrow L_H \\ (g, xH) &\mapsto g * (xH) := (gx)H. \end{aligned}$$

Veja que a operação $(*)$ está bem definida, ou seja, se $(g, xH) = (g', yH)$, então $g * (xH) = g' * (yH)$, pois $(g, xH) = (g', yH) \Rightarrow g = g'$ e $xH = yH$ daí: $g = g'$ e $x^{-1}y \in H$. Como $x^{-1}y \in H \Rightarrow x^{-1}y = h, h \in H \Rightarrow y = xh, h \in h$. Assim:

$$g' * (yH) = g * (yH) = (gy)H = g(xh)H = (gx)(hH) = (gx)H = g * (xH).$$

Exemplo 2.15. Seja G o grupo $D_4 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2\}$ de simetria do quadrado cuja tábua é dada por

Tabela 2.1: Tábua Composição em D_4

\circ	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	δ_1	δ_2	μ_1	μ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	δ_1	δ_2	μ_1	μ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	μ_1	μ_2	δ_2	δ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	δ_2	δ_1	μ_2	μ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_2	μ_1	δ_1	δ_2
δ_1	δ_1	μ_2	δ_2	μ_1	ρ_0	ρ_2	ρ_3	ρ_1
δ_2	δ_2	μ_1	δ_1	μ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	ρ_3
μ_1	μ_1	δ_1	μ_2	δ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_0	ρ_2
μ_2	μ_2	δ_2	μ_1	δ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_0

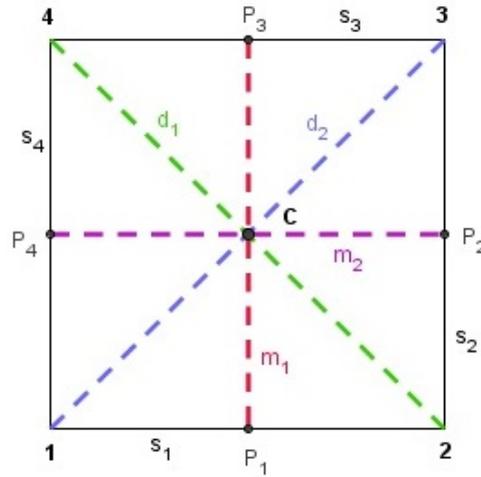
Considere a seguinte configuração no quadrado:

em que 1, 2, 3, 4 indicam os vértices, s_1, s_2, s_3, s_4 os lados do quadrado, d_1, d_2 as diagonais, m_1 e m_2 os eixos vertical e horizontal, respectivamente, C é o centro do quadrado e P_i os respectivos pontos médios dos lados $s_i, \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Nessa configuração veja que ρ_i são rotações de $\frac{\pi}{2}i$ radianos no sentido anti-horário, μ_i são reflexões sobre os eixos m_i e δ_i são reflexões sobre as diagonais d_i , respectivamente. Considere o seguinte conjunto:

$$X = \{1, 2, 3, 4, s_1, s_2, s_3, s_4, m_1, m_2, d_1, d_2, C, P_1, P_2, P_3, P_4\}.$$

Figura 2.1: Objetos no Quadrado



Fonte: Elaborada pela autora.

Veja que, X é um D_4 -conjunto em que a ação $* : D_4 \times X \rightarrow X$ é dada pela seguinte Tabela (2.2).

Tabela 2.2: Tábua de X como um D_4 -conjunto

*	1	2	3	4	s_1	s_2	s_3	s_4	m_1	m_2	d_1	d_2	C	P_1	P_2	P_3	P_4
ρ_0	1	2	3	4	s_1	s_2	s_3	s_4	m_1	m_2	d_1	d_2	C	P_1	P_2	P_3	P_4
ρ_1	2	3	4	1	s_2	s_3	s_4	s_1	m_2	m_1	d_2	d_1	C	P_2	P_3	P_4	P_1
ρ_2	3	4	1	2	s_3	s_4	s_1	s_2	m_1	m_2	d_1	d_2	C	P_3	P_4	P_1	P_2
ρ_3	4	1	2	3	s_4	s_1	s_2	s_3	m_2	m_1	d_2	d_1	C	P_4	P_1	P_2	P_3
μ_1	2	1	4	3	s_1	s_4	s_3	s_2	m_1	m_2	d_2	d_1	C	P_1	P_4	P_3	P_2
μ_2	4	3	2	1	s_3	s_2	s_1	s_4	m_1	m_2	d_2	d_1	C	P_3	P_2	P_1	P_4
δ_1	3	2	1	4	s_2	s_1	s_4	s_3	m_2	m_1	d_1	d_2	C	P_2	P_1	P_4	P_3
δ_2	1	4	3	2	s_4	s_3	s_2	s_1	m_2	m_1	d_1	d_2	C	P_4	P_3	P_2	P_1

Por exemplo, $\mu_1 * 1 = 2$, $\mu_1 * m_2 = m_2$, $\mu_1 * d_1 = d_2$, $\mu_1 * s_2 = s_4$, $\mu_1 * C = C$, $\mu_1 * P_2 = P_4$.

2.2 Subgrupos de Isotropia

Sendo X um G -conjunto, $x \in X$ e $g \in G$, é importante saber quando $g * x = x$. No que segue denotamos:

$$X_g = \{x \in X \mid g * x = x\} \text{ e } G_x = \{g \in G \mid g * x = x\}.$$

Exemplo 2.16. Para o D_4 -conjunto X do Exemplo (2.15), temos:

$$X_{\rho_0} = X, \quad X_{\rho_1} = \{C\}, \quad X_{\rho_2} = \{m_1, m_2, d_1, d_2, C\}, \quad X_{\rho_3} = \{C\}, \quad X_{\delta_1} = \{2, 4, d_1, d_2, C\}, \\ X_{\delta_2} = \{1, 3, d_1, d_2, C\}, \quad X_{\mu_1} = \{s_1, s_3, m_1, m_2, C, P_1, P_3\} \text{ e } X_{\mu_2} = \{s_2, s_4, m_1, m_2, C, P_2, P_4\}.$$

E

$$G_1 = \{\rho_0, \delta_2\}, \quad G_2 = \{\rho_0, \delta_1\}, \quad G_3 = \{\rho_0, \delta_2\}, \quad G_4 = \{\rho_0, \delta_1\}, \quad G_C = D_4, \\ G_{s_1} = \{\rho_0, \mu_1\}, \quad G_{s_2} = \{\rho_0, \mu_2\}, \quad G_{s_3} = \{\rho_0, \mu_1\}, \quad G_{s_4} = \{\rho_0, \mu_2\}, \\ G_{m_1} = \{\rho_0, \rho_2, \mu_1, \mu_2\}, \quad G_{m_2} = \{\rho_0, \rho_2, \mu_1, \mu_2\}, \quad G_{d_1} = \{\rho_0, \rho_2, \delta_1, \delta_2\}, \quad G_{d_2} = \{\rho_0, \rho_2, \delta_1, \delta_2\}, \\ G_{P_1} = \{\rho_0, \mu_1\}, \quad G_{P_2} = \{\rho_0, \mu_2\}, \quad G_{P_3} = \{\rho_0, \mu_1\} \text{ e } G_{P_4} = \{\rho_0, \mu_2\}.$$

Teorema 2.17. *Se X é um G -conjunto, então G_x é subgrupo de G , para todo $x \in X$.*

Demonstração. $\forall x \in X$,

- i) Como $e * x = x$, segue que $e \in G_x$.
- ii) Se $g_1, g_2 \in G_x$ quaisquer, então $g_1 * x = x$ e $g_2 * x = x$. Conseqüentemente,

$$(g_1 g_2) * x = g_1 * (g_2 * x) = g_1 * x = x.$$

Logo, $g_1 g_2 \in G_x$.

- iii) $\forall g \in G_x$,

$$x = e * x = (g^{-1} g) * x = g^{-1} * (g * x) = g^{-1} * x \Rightarrow g^{-1} * x = x. \text{ Logo, } g^{-1} \in G_x.$$

Portanto, G_x é subgrupo de G .

□

Definição 2.18. Sejam X um G -conjunto e $x \in X$, qualquer. O subgrupo G_x é chamado subgrupo de isotropia de x .

2.3 Órbita

Teorema 2.19. *Seja X um G -conjunto. Defina a seguinte relação:*

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \sim x_2 \iff \exists g \in G : g * x_1 = x_2.$$

A relação \sim é de equivalência em X .

Demonstração. Devemos mostrar que \sim é uma relação de equivalência. Com efeito,

- i) Reflexiva: $\forall x \in X$, temos $e * x = x$, em que $e \in G$, logo $x \sim x$.
- ii) Simétrica: Suponha $x_1 \sim x_2$, logo existe $g \in G$ tal que $g * x_1 = x_2$. Então,

$$\begin{aligned} x_2 = g * x_1 &\Rightarrow g^{-1} * x_2 = g^{-1} * (g * x_1) = (g^{-1}g) * x_1 = e * x_1 = x_1 \\ &\Rightarrow g^{-1} * x_2 = x_1, \end{aligned}$$

em que $g^{-1} \in G$, ou seja, $x_2 \sim x_1$.

- iii) Transitiva: Se $x_1 \sim x_2$ e $x_2 \sim x_3$, temos:

$g_1 * x_1 = x_2$ e $g_2 * x_2 = x_3$, para determinados $g_1, g_2 \in G$. Então,

$$\begin{aligned} (g_2g_1) * x_1 &= g_2 * (g_1 * x_1) \\ &= g_2 * x_2 \\ &= x_3 \\ &\Rightarrow g * x_1 = x_3, \end{aligned}$$

em que $g = g_2g_1 \in G$, ou seja, $x_1 \sim x_3$.

□

Definição 2.20. *Seja X um G -conjunto. Cada classe de equivalência descrito no Teorema (2.19) é uma órbita sobre G . Se $x \in X$, a classe contendo x é uma órbita sobre x , denotada por $G * x$.*

Observação 2.21.

- Denotamos $|X|$ o número de elementos de um G -conjunto X .
- Quando G é grupo o número de elementos de G , ou seja, $|G|$ também é chamado de ordem de G .

Teorema 2.22. *Se X é um G -conjunto e $x \in X$, então $|G * x| = (G : G_x)$. Além disso, se $|G|$ é finito, então $|G * x|$ é um divisor de $|G|$.*

Demonstração. Vamos definir uma correspondência biunívoca ψ entre $G * x$ e a coleção ζ das classes laterais à esquerda de G_x em G , a saber,

$$\begin{aligned}\psi : G * x &\longrightarrow \zeta \\ x_1 &\mapsto \psi(x_1) = g_1 G_x,\end{aligned}$$

veja que, como $x_1 \in G * x$, então existe $g_1 \in G$ tal que $g_1 * x = x_1$. Ou seja, $\psi(x_1)$ é classe lateral à esquerda de g_1 com relação a G_x , isto é, $\psi(x_1) = g_1 G_x$.

Devemos mostrar que ψ está bem definida, ou seja, independente da escolha de $g_1 \in G$ tal que $g_1 * x = x_1$.

Suponha que $g'_1 \in G$ seja tal que $g'_1 * x = x_1$, então

$$g_1 * x = x_1 = g'_1 * x \Rightarrow g_1 * x = g'_1 * x$$

assim,

$$\begin{aligned}g_1^{-1} * (g_1 * x) &= g_1^{-1} * (g'_1 * x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (g_1^{-1} g_1) * x = (g_1^{-1} g'_1) * x \\ &\Rightarrow e * x = (g_1^{-1} g'_1) * x \\ &\Rightarrow x = (g_1^{-1} g'_1) * x.\end{aligned}$$

Sendo assim, $g_1^{-1} g'_1 \in G_x$, logo $g_1 G_x = g'_1 G_x$.

Portanto, ψ está bem definida.

Mostraremos agora que ψ é sobrejetora. Para isso seja $y \in \psi$ qualquer. Como $y \in \psi$ então $y = g_1 G_x$, para algum $g_1 \in G$. Tomemos $a = g_1 * x$, logo

$$\psi(a) = \psi(g_1 * x) = g_1 G_x = y.$$

Portanto, ψ é sobrejetora.

Mostraremos agora que ψ é injetora. Para isso suponha que, $x_1, x_2 \in G * X$, com $\psi(x_1) = \psi(x_2)$. Logo, $g_1 G_x = g_2 G_x$, em que $g_1, g_2 \in G$ são tais que $g_1 * x = x_1$ e $g_2 * x = x_2$. Agora, $g_2 \in g_2 G_x = g_1 G_x \Rightarrow g_2 \in g_1 G_x$, ou seja, $g_2 = g_1 g$ para algum $g \in G_x$. Assim:

$$x_2 = g_2 * x = (g_1 g) * x = g_1 * (g * x) = g_1 * x = x_1 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Portanto, ψ é injetora.

Consequentemente, ψ é bijetora.

Se G é finito, então o número de classes laterais sobre G_x , $(G : G_x)$, é finito e então, da bijetividade de ψ , segue que, $|G * x| = (G : G_x)$. Assim, pelo Teorema de Lagrange temos:

$$|G| = (G : G_x) |G_x| = |G * x| |G_x|.$$

Logo, $|G * x|$ é um divisor de $|G|$. □

Exemplo 2.23. Seja X o D_4 -conjunto do Exemplo (2.15), cuja a ação estabelecida na Tabela (2.2).

Denotando $G = D_4$, temos:

$$G * 1 = \{1, 2, 3, 4\}$$

e

$$G_1 = \{\rho_0, \delta_2\}.$$

Uma vez que $|G| = 8$ e pelo Teorema de Lagrange (1.49), temos:

$$\begin{aligned}|G| &= (G : G_1) \cdot |G_1| \Rightarrow \\ 8 &= (G : G_1) \cdot 2 \Rightarrow \\ \frac{8}{2} &= (G : G_1) \Rightarrow \\ 4 &= (G : G_1).\end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema (2.22):

$$|G * x| = (G : G_1) = 4,$$

o que já era de se esperar, pois $G * 1 = \{1, 2, 3, 4\}$.

3 Sobre o Teorema de Burnside e Aplicações

Neste capítulo exploramos o Teorema de Burnside. Antes apresentamos uma breve biografia do autor desse resultado, a saber: William Burnside. Detalhes sobre este assunto e demais considerações podem ser encontrados em [13, 18, 25].

3.1 Biografia de William Burnside

Figura 3.1: William Burnside



Fonte: Imagem retirada da referência [39].

William Burnside nasceu em 2 de julho de 1852, em Paddington, Londres. Seus pais eram Emma e William. No entanto, Burnside ficou órfão aos seis anos de idade. Com isso, foi educado no *Christ's Hospital* onde se destacou em gramática e Matemática. Em outubro de 1871, depois de ganhar uma bolsa de estudos, ele entrou no *St. John's College*, Cambridge. Em 1873, mudou de *St. John's College* para o *Pembroke College* (Universidade de Cambridge), não por razões acadêmicas, mas porque o *St. John's College* tinha uma equipe de remo tão excelente que Burnside não era bom o suficiente para participar dessa equipe. Porém, ele poderia participar da equipe de Pembroke, então se mudou para lá, formando-se em 1875 como segundo *wrangler*, ou seja, a pessoa com notas mais altas. Logo após, ele foi nomeado professor em Cambridge.

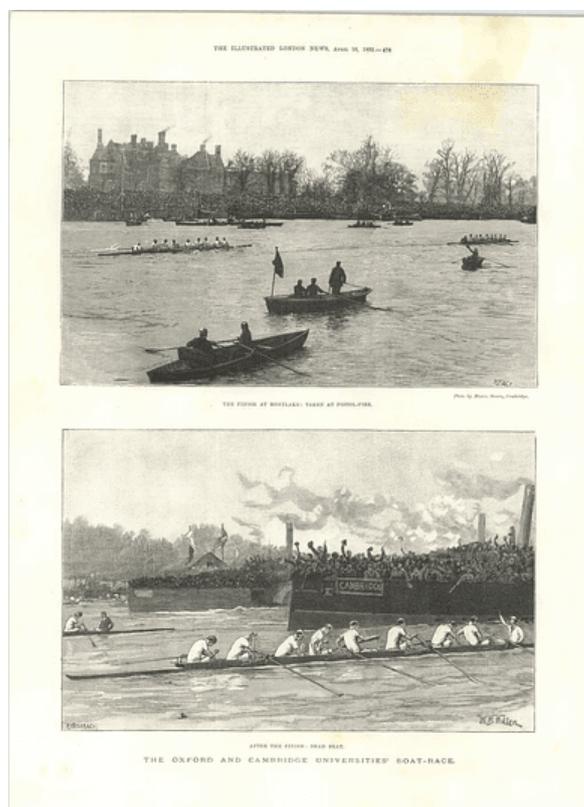
Figura 3.2: St. John's College e Pembroke College- Cambridge



Fonte: Imagens retiradas das referências [36] e [27].

Burnside foi bem instruído, pois entre seus professores em Cambridge estavam Stokes, Adams e Maxwell em Matemática Aplicada e Cayley em Matemática Pura. Eles deveriam influenciar bastante a direção que a pesquisa de Burnside deveria tomar, porém uma decisão tomada por causa do remo foi amplamente responsável pela direção que Burnside tomou em seu ensino e pesquisa Matemática. Burnside foi o primeiro a conquistar o Prêmio Smith, prêmio para estudantes pesquisadores de física teórica, Matemática e Matemática Aplicada da Universidade de Cambridge.

Figura 3.3: Oxford And Cambridge University Boat Race Finish, 1892



Fonte: Imagem retirada da referência [26].

Ele lecionou hidrodinâmica, mas seu primeiro artigo, publicado em 1883, considerou funções elípticas. Depois em 1885, ele então aceitou uma posição no *Royal Naval College* em Greenwich e passou o resto de sua carreira nesse cargo. Mesmo não tendo se destacado nas equipes de remo das universidades, Burnside manteve o interesse em remar e depois em pescar. Em 1886, casou-se com Alexandrina Urquhart tendo dois filhos e três filhas.

Grande parte do trabalho de Burnside sobre hidrodinâmica envolvia o uso de variáveis complexas e, em artigos de 1891 e 1892, ele abordou o grupo linear de transformações fracionárias de uma variável complexa. No entanto, foi em 1893 que ele publicou seu primeiro artigo sobre grupos simples finitos, mostrando que o grupo alternado A_5 é o único grupo simples finito cuja ordem é o produto de quatro primos (não necessariamente distintos). Seu trabalho rapidamente se voltou para o estudo de grupos e, a partir de 1894, ele estava ocupado quase inteiramente com o estudo da teoria de grupos.

Por exemplo, ele provou em um artigo publicado em 1895 que se um grupo de ordem par possui um subgrupo cíclico de Sylow, então o grupo não pode ser simples. Seu trabalho sobre teoria de grupos progrediu rapidamente e, em 1897, ele publicou *The Theory of Groups of Finite Order*, o primeiro tratado sobre teoria de grupos em inglês. Em 1899 Burnside foi eleito para o Conselho da Sociedade Matemática de Londres e no mesmo ano a Sociedade lhe concedeu a *Medalha De Morgan*¹.

Figura 3.4: 1899 - Medalha De Morgan



Fonte: Imagem retirada da internet².

Agora examinaremos algumas contribuições de Burnside à teoria dos grupos. Frobenius iniciou seu desenvolvimento da teoria da representação de grupos e da teoria da caracterização em 1896. Burnside rapidamente reconheceu a importância dos métodos de Frobenius e começou a usar a teoria da caracterização. Um de seus resultados mais importantes, a saber, que grupos de ordem $p^m \cdot q^n$ são solúveis, apareceram em 1904. Casos especiais desse resultado foram comprovados por Sylow (o caso $n = 0$ em 1872),

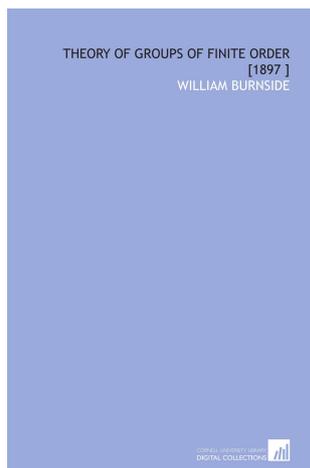
¹Prêmio concedido para contribuições gerais à Matemática. Disponível em: <https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n44_Informacoes.pdf>. Acesso: 8 dez. 2020.

²Disponível em: <<https://images.app.goo.gl/bUcaJPb5tNVaqKnK7>>. Acesso: 3 jun. 2020.

Frobenius (o caso $n = 1$ em 1895) e Jordan (o caso $n = 2$ em 1898). Burnside conjecturou que todo grupo finito de ordem ímpar é solúvel, porém falhou ao tentar provar esse resultado o qual só foi provado em 1962 por Feit e Thompson.

Um exemplo de relevância em seu trabalho está no problema que carrega seu nome, responsável por abordar sobre a finitude de grupos quando os elementos fixam ordens finitas (Tema alvo do livro *The Theory of Groups of Finite Order* – Burnside, 1897). Sendo este objeto de trabalho do medalhista de Campos E. Zelmanov.

Figura 3.5: The Theory of Groups of Finite Order



Fonte: Imagem retirada da referência [4].

De fato, nos últimos anos de sua vida, ele se voltou para a teoria das probabilidades e seu primeiro artigo sobre o assunto apareceu em 1918. Ele deixou um manuscrito completo de um livro sobre probabilidades que foi publicado como *The Theory of Probability* no ano seguinte à sua morte. Em 22 de dezembro de 1925, Burnside teve um derrame, o qual foi aconselhado por uma junta médica a se afastar do seu interesse pela Matemática. Porém, Burnside voltou à sua Matemática, publicando em *On a group of order 25920 and the projective transformation of a cubic surface* no final daquele ano. Burnside foi o primeiro que conjecturou que um grupo G de ordem ímpar possui uma série de subgrupos normais,

$$G = G_0 \geq G_1 \geq G_2 \geq \cdots \geq G_n = \{e\},$$

de modo que G_i/G_{i+1} é abeliano. Essa conjectura foi comprovada, mais de 50 anos depois, por Feit e Thompson em um artigo de 255 páginas. Burnside morreu em 21 de agosto de 1927.

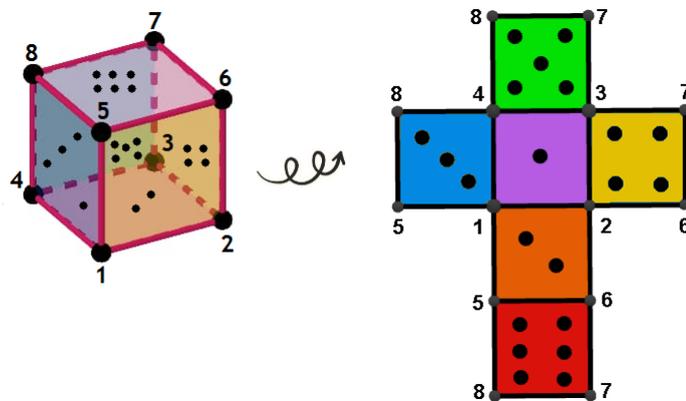
Essa biografia foi baseada nas referências: (JOSEPH, p.505) [18] e o site MacTutor [25].

3.2 Problematização Inicial

Após a biografia apresentamos a baixo um exemplo ilustrativo e um tanto quanto interessante, sobre as variedades de aplicações sobre o Teorema de Burnside.

Exemplo 3.1. Neste exemplo apresentamos uma aplicação de G -conjunto para a contagem. Suponha, por exemplo, que desejamos contar de quantas maneiras distintas as seis faces de um cubo pode ser marcado com “um a seis pontos” para formar um dado. O dado padrão, denotado por D^3 é marcado de tal forma que quando colocado sobre uma mesa esteja com o 1 ponto (●) na base, 2 pontos na frente, 3 pontos na esquerda, 4 pontos na direita, 5 pontos atrás e 6 pontos no topo.

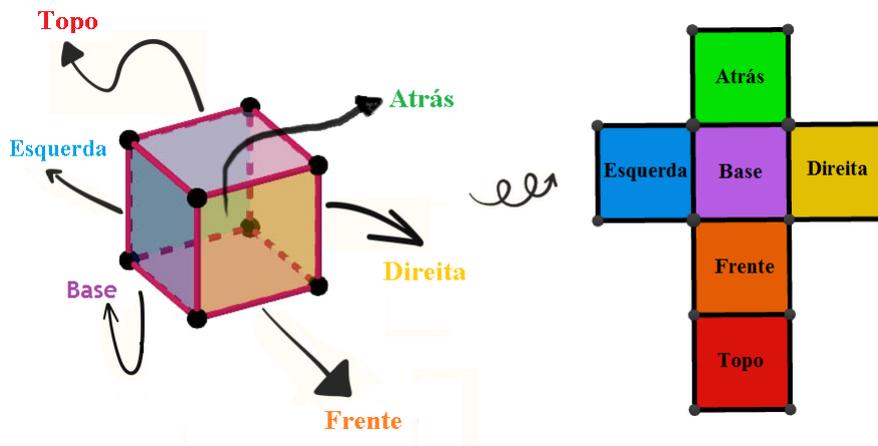
Figura 3.6: Dado Inicial: D



Fonte: Elaborada pela autora.

Observe que, outras maneiras de marcar o cubo resultando em um dado são possíveis. As faces de um cubo serão chamadas de: base, topo, esquerda, direita, frente e atrás.

Figura 3.7: Faces do Cubo



Fonte: Elaborada pela autora.

³Afim de curiosidade, o dado inicial D elaborado no GeoGebra pela autora encontra-se disponível no site <<https://www.geogebra.org/m/cqh6jsa6>> o qual sua construção foi baseado nas orientações disponíveis em: <<http://www.ogeogebra.com.br/arquivos/dados.pdf>>. Acesso em: 5 dez. 2020.

Então a base pode ter uma das seis marcações de “um a seis pontos”, o topo pode ter marcações dos cinco pontos restantes e assim por diante. Portanto, são

$$6! = 720$$

maneiras que podem marcar as faces do cubo. Algumas marcações permanecem o mesmo dado que outros, no sentido que uma marcação pode ser levada a outra por uma rotações do cubo marcado. Por exemplo, se o dado padrão descrito acima é rotacionado 90° no sentido anti horário quando olhamos para baixo sobre ele, então 3 estará sobre a face “frente” ao invés de 2, mas este é o mesmo dado. Existem 24 posições possíveis de um cubo sobre uma mesa, a saber para qualquer uma das seis faces podem ser colocadas para baixo e então qualquer uma das 4 para a frente, dando $6 \cdot 4 = 24$ posições possíveis. Qualquer posição pode ser encontrada a partir de qualquer outra por uma rotação do dado. Tais rotações formam um grupo G , o qual, como veremos é isomorfo a um subgrupo de S_8 . Com efeito,

Considerando r_{ij} sendo i a quantidade de pontos na face fixada “na mesa” e j o número de rotações realizadas de $\frac{\pi}{2}$ radianos, ou seja, $j \cdot \frac{\pi}{2}$, $j = 0, 1, 2, 3$. Temos:

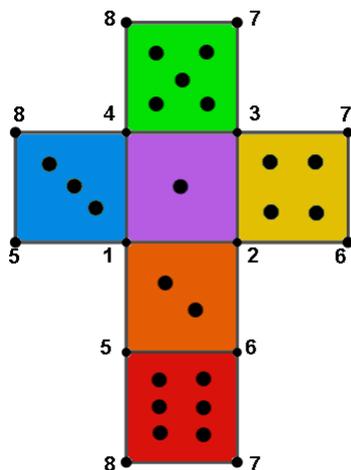
$r_{10}(D_1 = D)$: nessa configuração temos D sendo o dado inicial conforme a Figura (3.6) com a face que tem 1 ponto (●) fixada “na mesa”;

$r_{11}(D_1 + \frac{\pi}{2})$: D_1 rotacionado $\frac{\pi}{2}$ radianos;

$r_{12}(D_1 + \pi)$: D_1 rotacionado π radianos;

$r_{13}(D_1 + \frac{3\pi}{2})$: D_1 rotacionado $\frac{3\pi}{2}$ radianos;

Figura 3.8: Planificação D_1



Fonte: Elaborada pela autora.

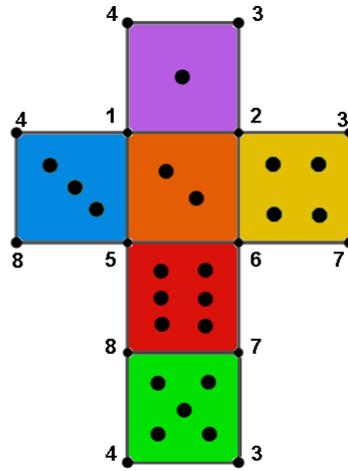
$r_{20}(D_2 = D + 1$ movimento para frente): nessa configuração a face com 2 pontos fica fixada “na mesa”;

$r_{21}(D_2 + \frac{\pi}{2})$: D_2 rotacionado $\frac{\pi}{2}$ radianos;

$r_{22}(D_2 + \pi)$: D_2 rotacionado π radianos;

$r_{23}(D_2 + \frac{3\pi}{2})$: D_2 rotacionado $\frac{3\pi}{2}$ radianos;

Figura 3.9: Planificação D_2



Fonte: Elaborada pela autora.

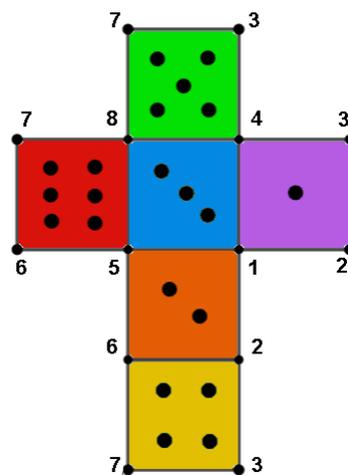
$r_{30}(D_3 = D + 1$ movimento para esquerda): nessa configuração a face com 3 pontos fica fixada “na mesa”;

$r_{31}(D_3 + \frac{\pi}{2})$: D_3 rotacionado $\frac{\pi}{2}$ radianos;

$r_{32}(D_3 + \pi)$: D_3 rotacionado π radianos;

$r_{33}(D_3 + \frac{3\pi}{2})$: D_3 rotacionado $\frac{3\pi}{2}$ radianos;

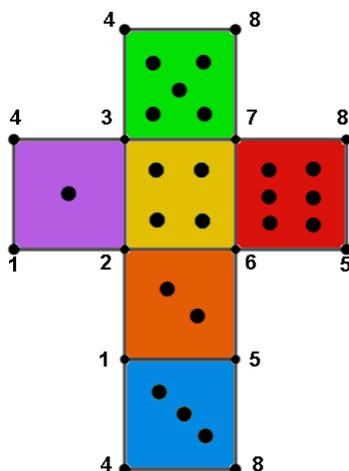
Figura 3.10: Planificação D_3



Fonte: Elaborada pela autora.

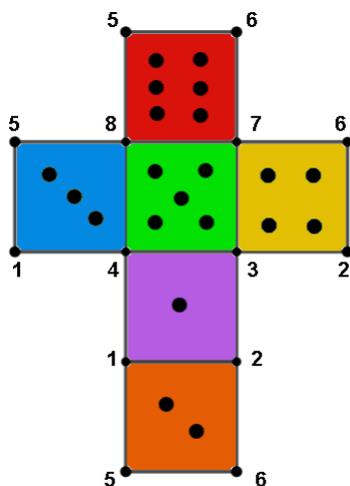
$r_{40}(D_4 = D + 1$ movimento para direita) : nessa configuração a face com 4 pontos fica fixada “na mesa”;

- $r_{41}(D_4 + \frac{\pi}{2})$: D_4 rotacionado $\frac{\pi}{2}$ radianos;
 $r_{42}(D_4 + \pi)$: D_4 rotacionado π radianos;
 $r_{43}(D_4 + \frac{3\pi}{2})$: D_4 rotacionado $\frac{3\pi}{2}$ radianos;

Figura 3.11: Planificação D_4 

Fonte: Elaborada pela autora.

- $r_{50}(D_5 = D + 1 \text{ movimento para atrás})$: nessa configuração a face com 5 pontos fica fixada “na mesa”;
 $r_{51}(D_5 + \frac{\pi}{2})$: D_5 rotacionado $\frac{\pi}{2}$ radianos;
 $r_{52}(D_5 + \pi)$: D_5 rotacionado π radianos;
 $r_{53}(D_5 + \frac{3\pi}{2})$: D_5 rotacionado $\frac{3\pi}{2}$ radianos;

Figura 3.12: Planificação D_5 

Fonte: Elaborada pela autora.

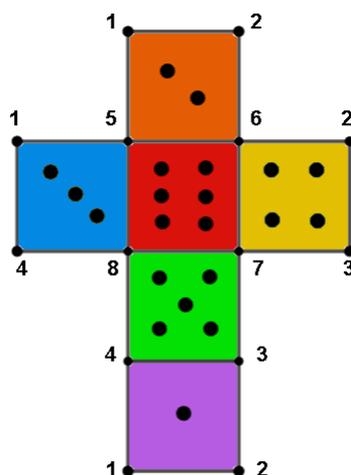
$r_{60}(D_6 = D + 2$ movimentos para frente): nessa configuração a face com 6 pontos fica fixada “na mesa”;

$r_{61}(D_6 + \frac{\pi}{2})$: D_6 rotacionado $\frac{\pi}{2}$ radianos;

$r_{62}(D_6 + \pi)$: D_6 rotacionado π radianos e

$r_{63}(D_6 + \frac{3\pi}{2})$: D_6 rotacionado $\frac{3\pi}{2}$ radianos.

Figura 3.13: Planificação D_6



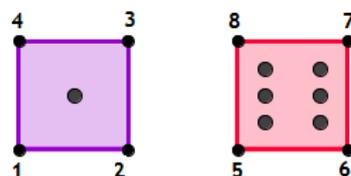
Fonte: Elaborada pela autora.

Com isso, temos o grupo:

$$G = \{r_{ij}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{ e } j = 1, 2, 3\}.$$

Considere agora os seguintes elementos de S_8 : **Fixando o 1** na base e o 6 no topo, temos:

Figura 3.14: Dado: 1 fixo



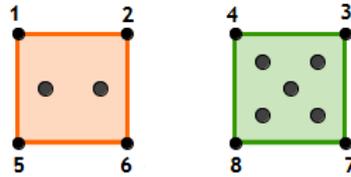
Fonte: Elaborada pela autora.

$$\rho_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \rho_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \rho_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Fixando o 2 na base e o 5 no topo, temos:

Figura 3.15: Dado: 2 fixo



Fonte: Elaborada pela autora.

$$\rho_{20} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

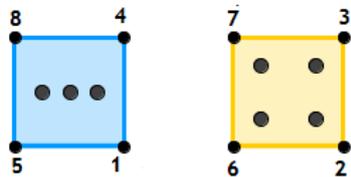
$$\rho_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Fixando o 3 na base e o 4 no topo, temos:

Figura 3.16: Dado: 3 fixo



Fonte: Elaborada pela autora.

$$\rho_{30} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

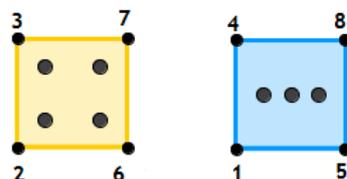
$$\rho_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Fixando o 4 na base e o 3 no topo, temos:

Figura 3.17: Dado: 4 fixo



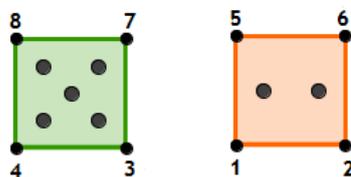
Fonte: Elaborada pela autora.

$$\rho_{40} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \quad \rho_{41} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{42} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \rho_{43} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Fixando o 5 na base e o 2 no topo, temos:

Figura 3.18: Dado: 5 fixo



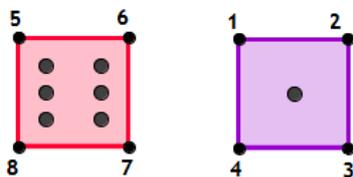
Fonte: Elaborada pela autora.

$$\rho_{50} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \rho_{51} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{52} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \rho_{53} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Fixando o 6 na base e o 1 no topo, temos:

Figura 3.19: Dado: 6 fixo



Fonte: Elaborada pela autora.

$$\rho_{60} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho_{61} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{62} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \rho_{63} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Veja que o subgrupo formado por tais elementos formam um subgrupo de S_8 isomorfo a G , via a correspondência

$$\begin{array}{ll} r_{10} \rightarrow \rho_{10} & r_{40} \rightarrow \rho_{40} \\ r_{11} \rightarrow \rho_{11} & r_{41} \rightarrow \rho_{41} \\ r_{12} \rightarrow \rho_{12} & r_{42} \rightarrow \rho_{42} \\ r_{13} \rightarrow \rho_{13} & r_{43} \rightarrow \rho_{43} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} r_{20} \rightarrow \rho_{20} & r_{50} \rightarrow \rho_{50} \\ r_{21} \rightarrow \rho_{21} & r_{51} \rightarrow \rho_{51} \\ r_{22} \rightarrow \rho_{22} & r_{52} \rightarrow \rho_{52} \\ r_{23} \rightarrow \rho_{23} & r_{53} \rightarrow \rho_{53} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} r_{30} \rightarrow \rho_{30} & r_{60} \rightarrow \rho_{60} \\ r_{31} \rightarrow \rho_{31} & r_{61} \rightarrow \rho_{61} \\ r_{32} \rightarrow \rho_{32} & r_{62} \rightarrow \rho_{62} \\ r_{33} \rightarrow \rho_{33} & r_{63} \rightarrow \rho_{63} \end{array}$$

Observe agora que sendo X o conjunto das 720 maneiras possíveis de marcar o cubo e G o grupo das 24 rotações possíveis sobre o cubo podemos considerar uma ação do G sobre X definida por aplicar uma rotação r_{ij} ao cubo marcado d obtendo outra marcação do cubo, ou seja, um elemento de X .

$$\begin{aligned} * : G \times X &\rightarrow X \\ (r_{ij}, d) &\mapsto r_{ij} * d \end{aligned}$$

Consideramos que duas marcações no cubo resultam no mesmo dado se podemos levar um dado no outro dado sob uma ação de um elemento de G , isto, é por meio de uma rotação do cubo. Em outras palavras, consideramos cada órbita em X sob G para corresponder a um único dado, a menos de rotação, e então temos diferentes órbitas e diferentes dados. Para a determinação do número de dados diferentes no sentido anterior precisamos lidar com a questão de determinar o número de órbita sob G em um G -conjunto X .

Ou seja, neste exemplo temos o conjunto X formado pelas 720 configurações possíveis para marcar um cubo usando de “um a seis pontos”, resultando em 720 dados; além disso apresentamos o grupo G das 24 rotações possíveis em um cubo.

Veja que o número de órbitas em X sob a ação de G é exatamente a quantidade de dados distintos a menos das 24 rotações. E para calcular esse número de órbitas que usamos o Teorema de Burnside como veremos mais adiante.

Entretanto, nesse exemplo, é possível determinar o número de tais órbitas através da análise combinatorial. A saber: ao marcar um cubo qualquer para ser um dado podemos assumir que a face marcada por “um ponto” (\bullet) está para baixo, ou seja, está na “base”. Agora, existem cinco escolhas para a face do topo (face oposta à base).

Levando em consideração as rotações já apresentadas, qualquer uma das quatro faces restantes poderiam ser trazidas para a posição “da frente”, logo não existem escolhas diferentes envolvidas para a face “da frente”. Mas a partir da marcação escolhida para a face “da frente” existem ainda: 3.2.1 possibilidades para marcar as três faces restantes.

Portanto, existem: $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 30$ possibilidades ao todo, isto é, existem 30 configurações de dados distintos a menos de rotações, ou seja, existem 30 órbitas.

Nesse exemplo foi possível encontrar a quantidade de órbitas usando simplesmente a análise combinatorial, mas de modo geral não se tem a mesma sorte, nesse sentido o Teorema de Burnside é fundamental.

3.3 O Teorema de Burnside e suas Aplicações

Teorema 3.2. (*Fórmula de Burnside*) *Sejam G um grupo finito e X um G -conjunto finito. Se r é o número de órbitas distintas em X sobre G , então*

$$r \cdot |G| = \sum_{g \in G} |X_g|.$$

Ou seja,

$$(\text{número de órbitas distintas de } X \text{ sobre } G) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X_g|.$$

Demonstração. Antes de iniciar a demonstração relembremos que para cada $x \in X$, denotamos

$G_x = \{g \in G : g * x = x\}$ e $G * x$ denota a órbita de x sob G .

Queremos mostrar que:

$$r \cdot |G| = \sum_{g \in G} |X_g|.$$

Defina o seguinte conjunto

$$N = \{ \text{quantidade de pares } (g, x) \in G \times X : g * x = x \}.$$

Para cada $g_0 \in G$ existem $|X_{g_0}|$ pares tendo g_0 como primeiro membro na coordenada, já que podemos ver N como

$$N = \{(g, x) : x \in X_g\}.$$

Portanto

$$N = \sum_{g \in G} |X_g|.$$

Por outro lado, para cada $x_0 \in X$ existem $|G_{x_0}|$ pares tendo x_0 como segunda coordenada já que podemos ver N como

$$N = \{(g, x) : g \in G_x\}.$$

Portanto,

$$N = \sum_{x \in X} |G_x|.$$

Mas, já provamos no Teorema (2.22) que $(G : G_x) = |G * x|$ e $(G : G_x) = \frac{|G|}{|G_x|}$, assim

$$|G * x| = \frac{|G|}{|G_x|} \Rightarrow |G_x| = \frac{|G|}{|G * x|}.$$

Logo,

$$\sum_{g \in G} |X_g| = N = \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|G * x|} = |G| \cdot \sum_{x \in X} \frac{1}{|G * x|}.$$

Veja que $\frac{1}{|G * x|}$ tem o mesmo valor para todo x na mesma órbita e se denotarmos por \mathcal{O} uma órbita qualquer, temos:

$$\sum_{x \in \mathcal{O}} \frac{1}{|G * x|} = \sum_{x \in \mathcal{O}} \frac{1}{|\mathcal{O}|} = 1 \Rightarrow \sum_{x \in X} \frac{1}{|G * x|} = 1 + 1 + \dots + 1 = r,$$

em que r é o número de órbitas distintas \mathcal{O} .

Portanto,

$$\sum_{g \in G} |X_g| = |G| \cdot \sum_{x \in X} \frac{1}{|G * x|} = |G| \cdot r,$$

em que r é o número de órbitas distintas \mathcal{O} . □

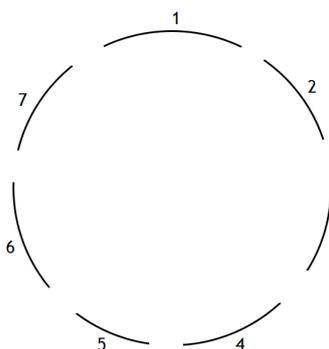
Exemplo 3.3. No contexto do Exemplo (3.1), veja que $|G| = 24$ e para cada $g \in G$ com $g \neq e$, temos $X_g = \emptyset$, pois qualquer rotação diferente da identidade muda qualquer uma das 720 configurações, ou seja, $|X_g| = 0$, para todo $g \in G - \{e\}$. Entretanto, $|X_e| = 720$ já que $X_e = X$, pois a identidade deixa todas as 720 configurações fixadas. Com essas informações, segue que o total de órbitas é:

$$(\text{número de órbitas distintas de } X \text{ sobre } G) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X_g| = \frac{1}{24} \cdot 720 = 30,$$

o que comprova a quantidade encontrada anteriormente.

Exemplo 3.4. Quantas maneiras distintas podem ser sentadas sete pessoas em uma mesa redonda, onde não há “cabeça” distinguível para a mesa? Claro que existem $7!$ maneiras de designar pessoas para as diferentes cadeiras. Tomamos X o conjunto das $7!$ possíveis possibilidades de associação. Uma rotação de pessoas pedindo a cada pessoa que mude um lugar para a direita, resulta no mesmo arranjo. Essa rotação gera um grupo cíclico G de ordem 7, que consideramos atuar em X . Novamente, apenas a identidade e deixa qualquer arranjo fixo e deixa todos os $7!$ arranjos fixos. Pelo Teorema de Burnside(3.2), temos:

$$(\text{número de órbitas distintas de } X \text{ sobre } G) = \frac{1}{7} \cdot 7! = 6! = 720.$$

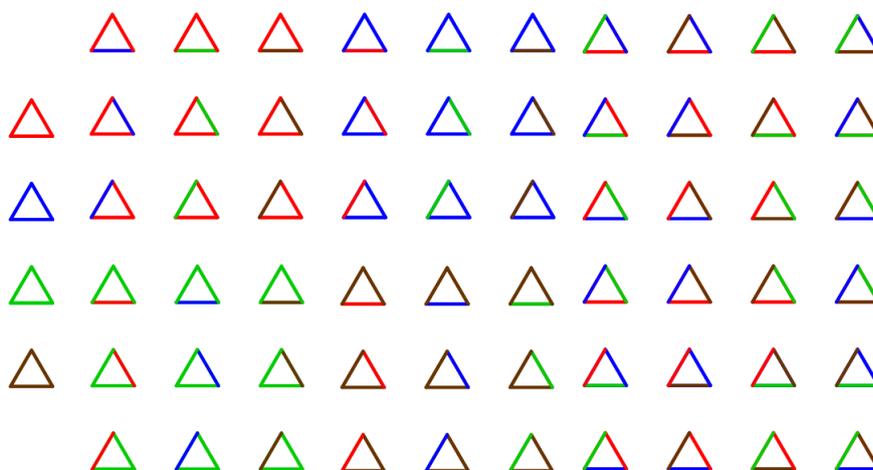


Fonte: Elaborada pela autora.

Exemplo 3.5. Dado 4 cores diferentes de tinta, vamos encontrar o número de maneiras distintas pelas quais as arestas de um triângulo equilátero podem ser pintadas.

Temos que, existem $4^3 = 64$ maneiras de pintar as arestas ao todo.

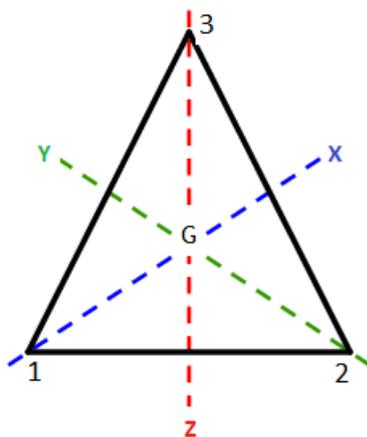
Figura 3.20: Conjunto X dos 64 triângulos



Fonte: Elaborada pela autora.

Consideramos X o conjunto desses 64 possíveis triângulos pintados. O grupo G atuando em X é o grupo, D_3 , de simetrias do triângulo.

Figura 3.21: Eixos de Simetria do Triângulo Equilátero



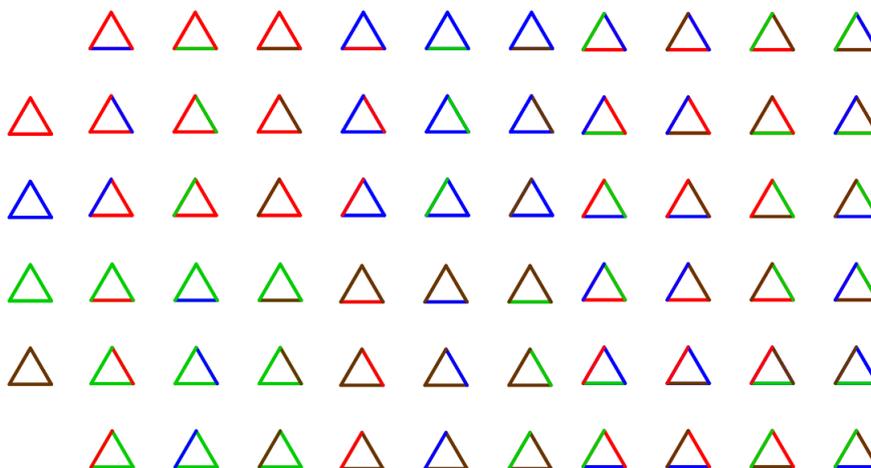
Fonte: Elaborada pela autora.

As transformações que preservam o triângulo, ou seja, os movimentos rígidos, são:

- 1) ρ_0, ρ_1, ρ_2 : as rotações planas centradas em G , no sentido anti-horário, de ângulos $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ respectivamente.
- 2) μ_1, μ_2, μ_3 : as reflexões de ângulo π com os eixos x, y, z , respectivamente.

Precisamos calcular $|X_g|$ para cada um dos seis elementos g em D_3 . Calculando, temos:

$|X_{\rho_0}| = 64$, pois: todo triângulo pintado é fixado por ρ_0 .

Figura 3.22: Elementos fixados por X_{ρ_0} 

Fonte: Elaborada pela autora.

$|X_{\rho_1}| = 4$, pois: para serem invariantes em ρ_1 , todas as arestas devem ter a mesma cor e existem 4 cores possíveis.

Figura 3.23: Elementos fixados por X_{ρ_1}

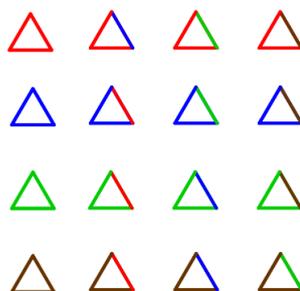


Fonte: Elaborada pela autora.

$|X_{\rho_2}| = 4$, pela mesma razão para ρ_1 .

$|X_{\mu_1}| = 16$, pois: as arestas trocadas devem ser da mesma cor (4 possibilidades) e a outra aresta também pode ser qualquer uma das cores (vezes 4 possibilidades).

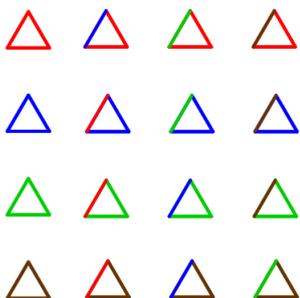
Figura 3.24: Elementos fixados por X_{μ_1}



Fonte: Elaborada pela autora.

$|X_{\mu_2}| = 16$, análogo ao μ_1 .

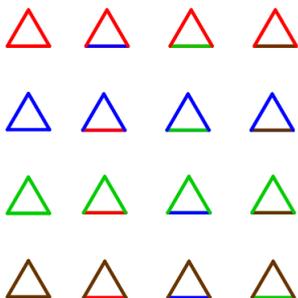
Figura 3.25: Elementos fixados por X_{μ_2}



Fonte: Elaborada pela autora.

$|X_{\mu_3}| = 16$, análogo ao μ_1 .

Figura 3.26: Elementos fixados por X_{μ_3}



Fonte: Elaborada pela autora.

então

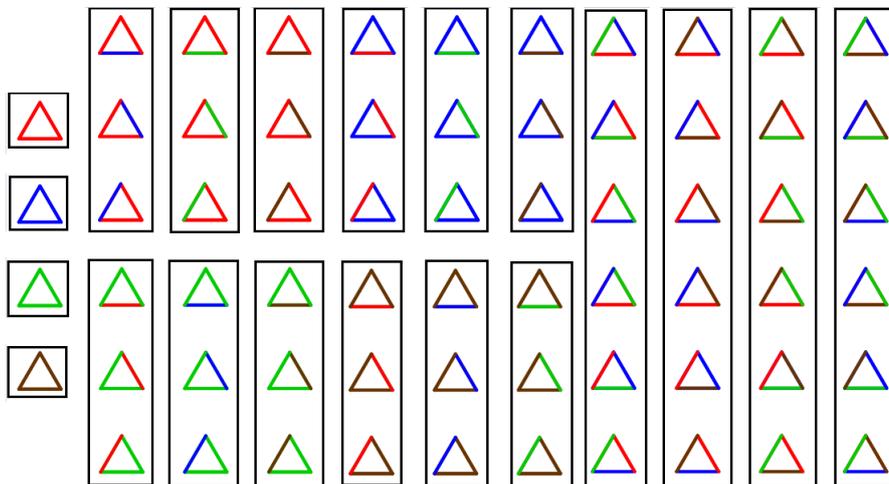
$$\sum_{g \in D_3} |X_g| = 64 + 4 + 4 + 16 + 16 + 16 = 120.$$

Portanto,

$$(\text{número de órbitas distintas de } X \text{ sobre } G) = \frac{1}{6} \cdot 120 = 20,$$

e existem 20 órbitas de triângulos pintados a menos de simetrias.

Figura 3.27: Órbitas de triângulos



Fonte: Elaborada pela autora.

Exemplo 3.6. Repetimos o Exemplo (3.5) com a suposição de que uma cor diferente é usada em cada borda. O número de maneiras possíveis de pintar as arestas é então $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, e deixamos X ser o conjunto de 24 possíveis triângulos pintados. Novamente, o grupo que atua em X pode ser considerado S_3 . Como todas as arestas são de cores diferentes, vemos $|X_{\rho_0}| = 24$ enquanto $|X_g| = 0$ para $g \neq \rho_0$. Portanto,

$$(\text{número de órbitas distintas de } X \text{ sobre } G) = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4,$$

então existem 4 triângulos pintados distinguíveis.

4 Relação do Teorema de Burnside e as Obras de Escher

Neste capítulo abordaremos a relação do Teorema de Burnside com as obras de Escher baseado nas referências [6, 13, 18, 23, 32, 33].

4.1 Padrão Combinatorial de Escher

Maurits Cornelis Escher foi um artista gráfico holandês famoso pelas suas xilogravuras, litografias e meios-tons. Escher é muito conhecido pelas suas obras incomuns, surrealistas, com várias perspectivas, pelo ilusionismo lúdico e pelo uso frequente da geometria, uma característica da arte islâmica. Suas obras tendem a representar construções impossíveis, preenchimento regular do plano, explorações do infinito e as metamorfoses - padrões geométricos entrecruzados que se transformam gradualmente para formas completamente diferentes. Ele também era conhecido pela execução de transformações geométricas nas suas obras. Com isso, Escher foi considerado um artista matemático, sobretudo geométrico. Porém, o artista dizia não ter nenhuma habilidade com os números, mas seu talento para criar padrões geométricos vem sendo estudado por matemáticos até hoje e através disso aplicaremos o Teorema de Burnside (3.2) com base em suas obras.

Em 1958, Escher publicou a *Divisão Regular do Plano* e, neste trabalho, ele diz:

“No começo, eu não tinha ideia da possibilidade de construir sistematicamente minhas figuras. Eu não sabia [...] isso era possível para alguém não treinado em Matemática e, principalmente, como resultado de apresentar minha teoria de leigos, que me forçou a pensar nas possibilidades. ¹”

Com isso, na divisão regular do plano por formas congruentes ele desenvolveu sua teoria, onde chamou de “Teoria de Leigos”, além disso, ele passou a criar padrões repetidos com quadrados, triângulos, hexágonos e outras formas geométricas.

Antes de analisarmos essa teoria utilizada por Escher primeiro vamos compreender com um exemplo do cotidiano o que significa “motivo” e “quadrado de motivo”. No crochê, motivo é um padrão que se repete para formar uma peça maior, podendo se referir a um desenho ou a uma peça menor já confeccionada. Além disso, esses motivos podem ser confeccionados em separado e depois unidos. Se o motivo estiver dentro de um quadrado denominaremos como quadrado de motivo. Vejamos alguns exemplos:

¹Disponível em: <http://www.eng.biu.ac.il/~weberof/Escher/Html/escher_background.html>. Acesso em: 2 ago. 2020

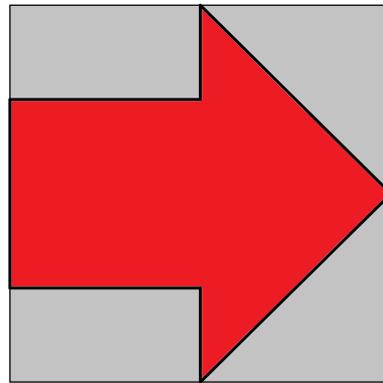
Figura 4.1: Motivos de crochê



Fonte: Montagem elaborada pela autora.²

Agora, para melhor compreensão da técnica empregada por Escher pegue um quadrado e coloque dentro dele algum desenho, no qual chamaremos de “quadrado de motivo”. No caso a seguir, usaremos o motivo sendo a seta, afim de facilitar a visualização.

Figura 4.2: Quadrado de Motivo

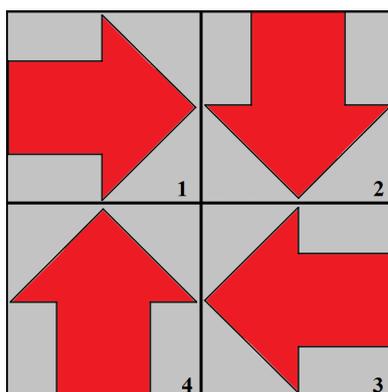


Fonte: Elaborada pela autora.

Em seguida, monte quatro cópias do quadrado para formar uma matriz quadrada 2×2 , a qual denominaremos como matriz inicial. Esses quadrados na matriz podem estar em qualquer configuração (não necessariamente distintos), ou seja, cada um pode ser qualquer cópia rotacionada ou refletida do “quadrado de motivo”.

²Montagem a partir de imagens coletadas do site <<https://www.livemaster.ru/topic/873977-vyazhem-i-uteplyaem-sya>>. Acesso em: 8 de nov. 2020.

Figura 4.3: Matriz inicial

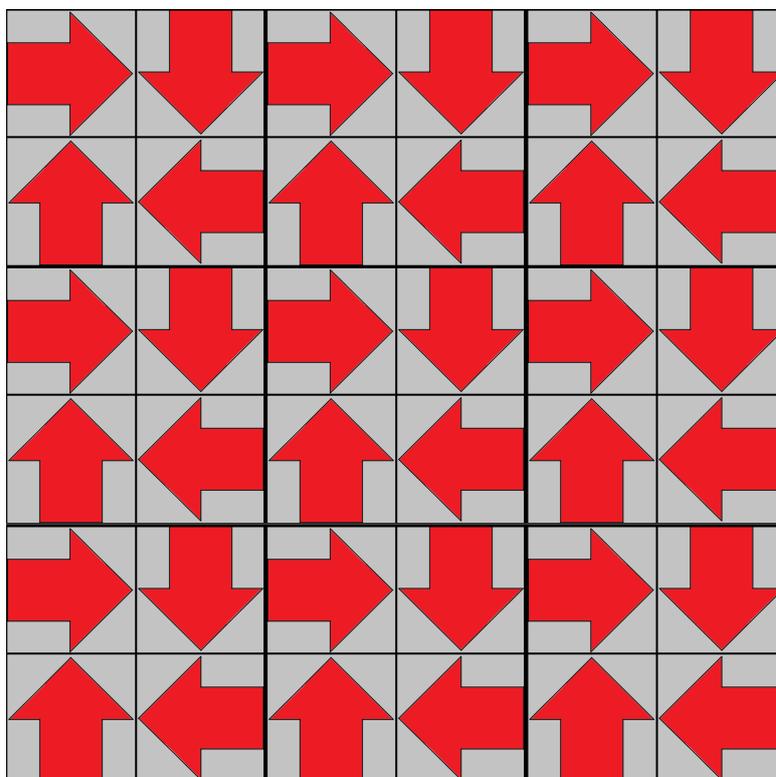


Fonte: Elaborado pela autora.

Como podemos observar na Figura (4.3), o 1º quadrado (nº1) é o quadrado de motivo, o nº2 é o quadrado de motivo rotacionado $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido horário (90°), o nº3 é o quadrado de motivo rotacionado π radianos no sentido horário (180°) e o nº4 é o quadrado de motivo rotacionado $\frac{2\pi}{3}$ radianos no sentido horário (270°).

Por fim, pegue a matriz inicial e a repita aos lados dos quadrados para preencher o plano com um padrão, onde chamamos de ladrilhamento.

Figura 4.4: Ladrilhamento

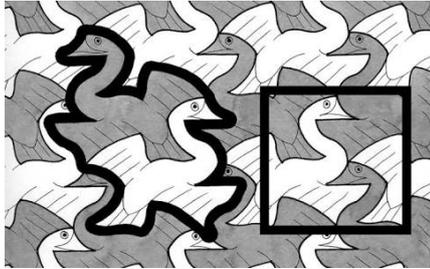


Fonte: Elaborado pela autora.

Escher utiliza essa técnica apresentada e a composição de diversas outras em suas criações (veja mais sobre esse assunto na Seção (4.2) - Curiosidades sobre Escher).

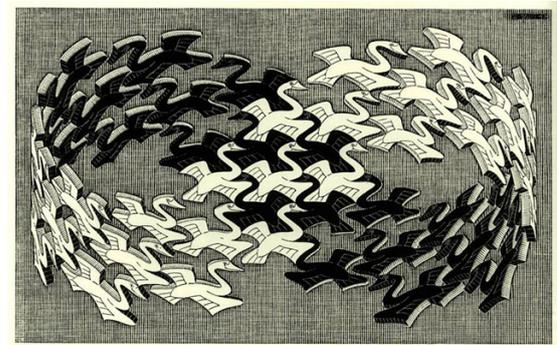
A seguir, mostraremos algumas obras de Escher, lembrando que ele utiliza mais de uma técnica em suas obras. Em algumas dessas imagens conseguiremos observar o motivo e as rotações, porém nem sempre visualizaremos de forma clara a figura geométrica.

Figura 4.5: Motivo: Swans (Escher)



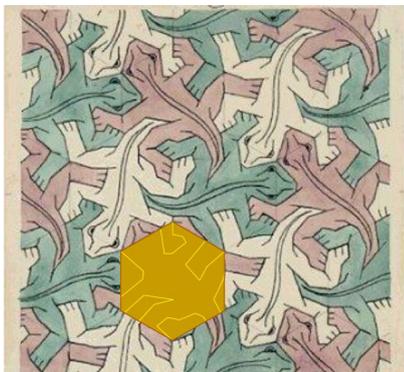
Fonte: Artistic tiling [Escher 55] [34].

Figura 4.6: Obra: Swans



Fonte: Maurits Cornelis Escher. Swan, 1956 [10].

Figura 4.7: Motivo: Lagartos



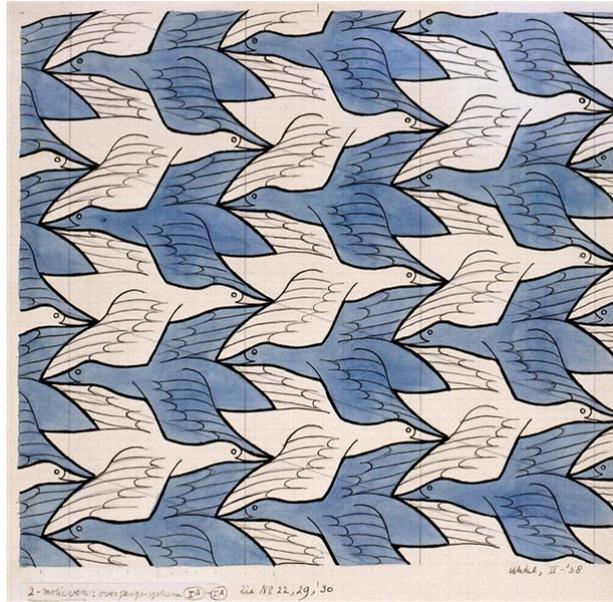
Fonte: Teselaciones de M. C. Escher (Manuel Sada) [30].

Figura 4.8: Obra: Lagartos



Fonte: Lagartos, 1942 - Escher, aquarela [9].

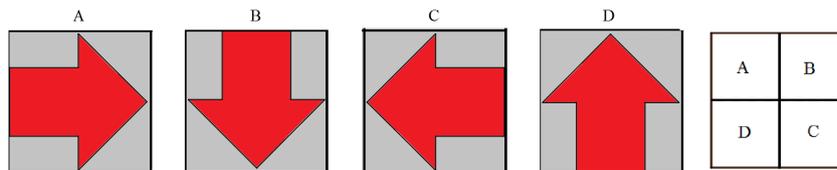
Figura 4.9: Obra: Two Birds



Fonte: Two Birds, 1938 - M.C. Escher [11].

Tomando como exemplo o motivo da Figura (4.2), podemos compor nossa matriz inicial com quatro possíveis configurações dadas através de rotações do motivo, logo podemos produzir $4^4 = 256$ padrões distintos na construção da matriz inicial. Para facilitar essa análise iremos representar as quatro configurações de rotação de cada motivo pelas letras A, B, C e D afim de nomeá-las, com isso, gerando o carimbo do ladrilhamento.

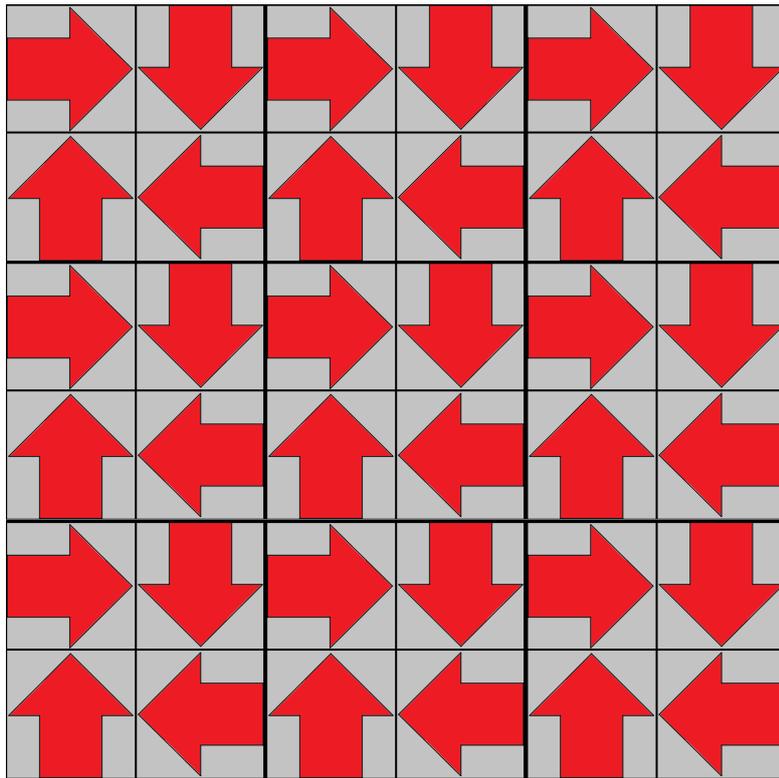
Figura 4.10: Carimbo



Fonte: Elaborado pela autora.

Logo, o carimbo do ladrilhamento da Figura (4.11) é ABCD. Sempre analisaremos o carimbo do ladrilhamento no sentido horário.

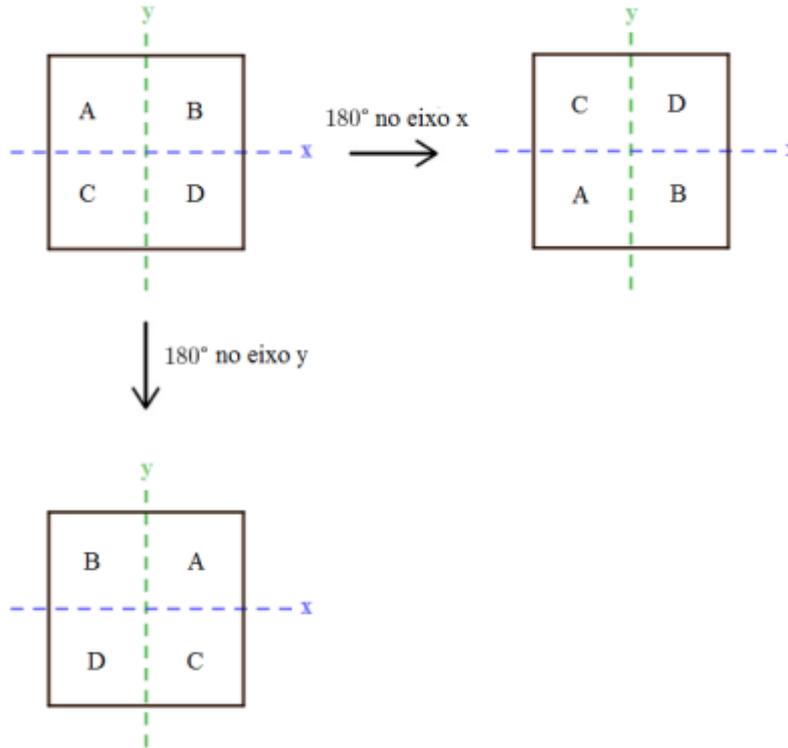
Figura 4.11: Ladrilhamento - Carimbo ABCD



Fonte: Elaborado pela autora.

As simetrias relacionam as distintas configurações do motivo em um ladrilhamento e cada padrão possui simetria periódica provocada pelas diversas cópias da matriz inicial tanto na horizontal como na vertical. Com isso, podemos analisar as reflexões no eixo horizontal e no eixo vertical de cada matriz inicial dentro do ladrilhamento, ou seja, reflexões de ângulo π nos eixos x e y .

Figura 4.12: Reflexões pelos eixos x e y

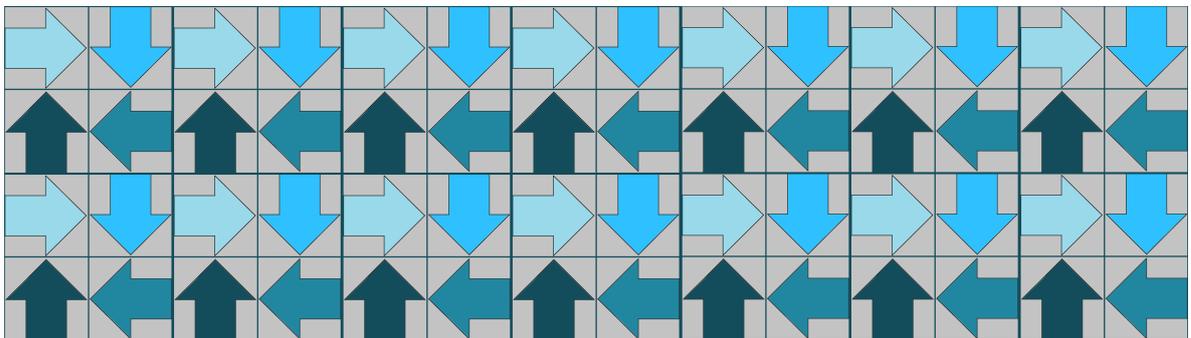


Fonte: Elaborado pela autora.

Podemos observar que através das reflexões geramos novos carimbos, logo ao refletirmos o eixo y geramos o carimbo (BADC) pela permutação $(12)(34)$ e ao refletirmos o eixo x geramos o carimbo (CDBA) pela permutação $(14)(23)$. Além disso, podemos compor as reflexões gerando novos carimbos, com novas permutações.

Para melhor compreensão analise o ladrilhamento da Figura (4.13).

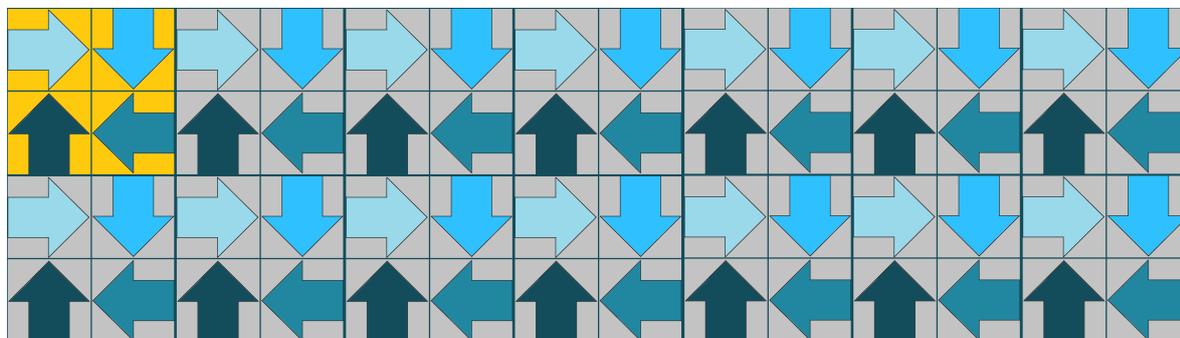
Figura 4.13: Ladrilhamento monocromático



Fonte: Elaborado pela autora.

Agora vamos analisar as reflexões e através disso, nomear o nosso ladrilhamento através do carimbo. Na imagem a seguir conseguimos analisar o motivo e a nossa matriz inicial como destacado na Figura (4.14). Nessa figura o carimbo do ladrilhamento é ABCD.

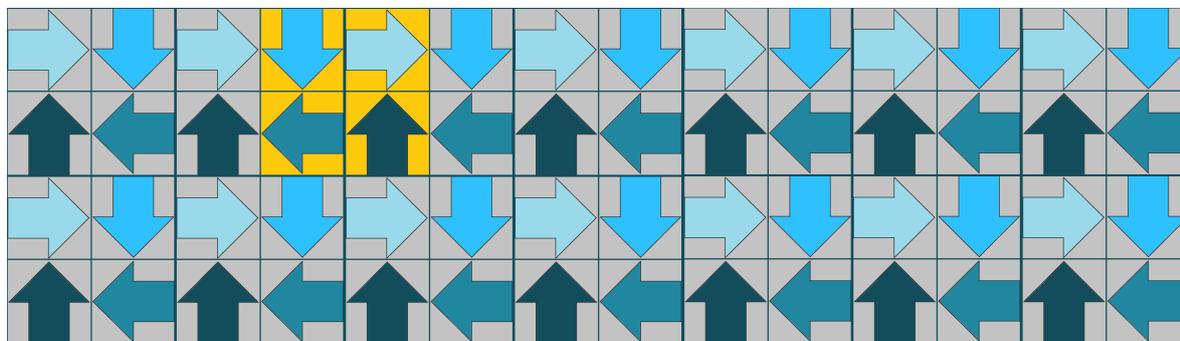
Figura 4.14: Ladrilhamento destacando a matriz inicial



Fonte: Elaborado pela autora.

Apenas movendo a matriz inicial Figura (4.14) horizontalmente uma unidade de motivo que troca as colunas desse bloco, ou seja, possuem uma reflexão no eixo y da matriz inicial, assim, também reorganiza a ordem das letras na sequência do carimbo (BADC) pela permutação $(12)(34)$.

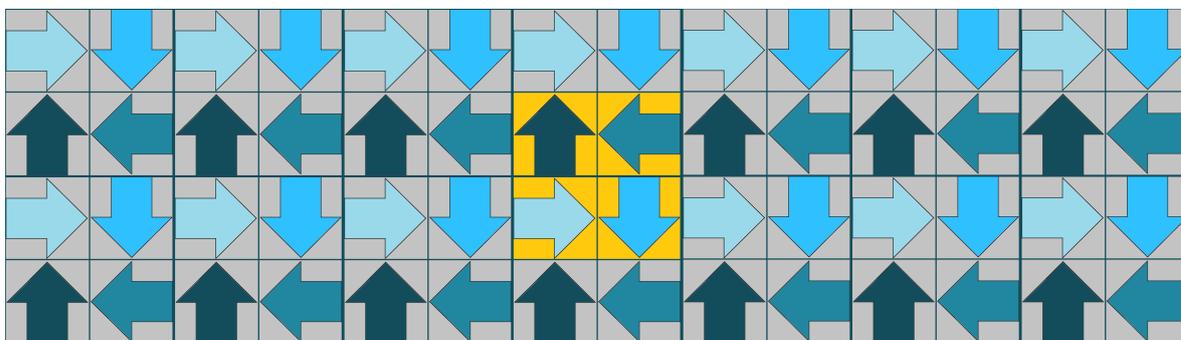
Figura 4.15: Reflexão no eixo y



Fonte: Elaborado pela autora.

Movendo a a matriz inicial Figura (4.14) verticalmente uma unidade de motivo que troca as linhas desse bloco, ou seja, possuem uma reflexão no eixo x da matriz inicial, assim, também reorganiza a ordem das letras na sequência do carimbo (DCBA) pela permutação (14)(23).

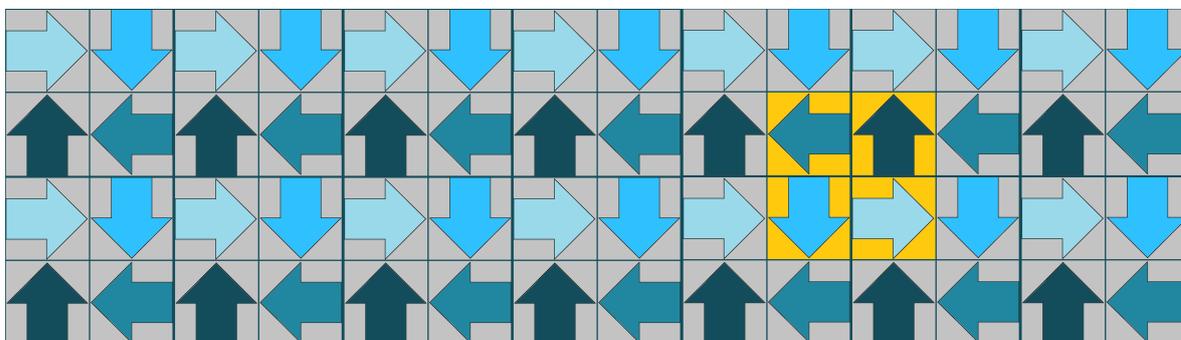
Figura 4.16: Reflexão no eixo x



Fonte: Elaborado pela autora.

Além disso, movendo a matriz inicial Figura (4.14) horizontalmente e verticalmente uma unidade, ou seja, possuem uma composição entre as reflexões x e y , ou seja, 1° reflete o eixo x e depois o eixo y , assim também reorganiza a ordem das letras na sequência do carimbo (CDAB) pela permutação (13)(24).

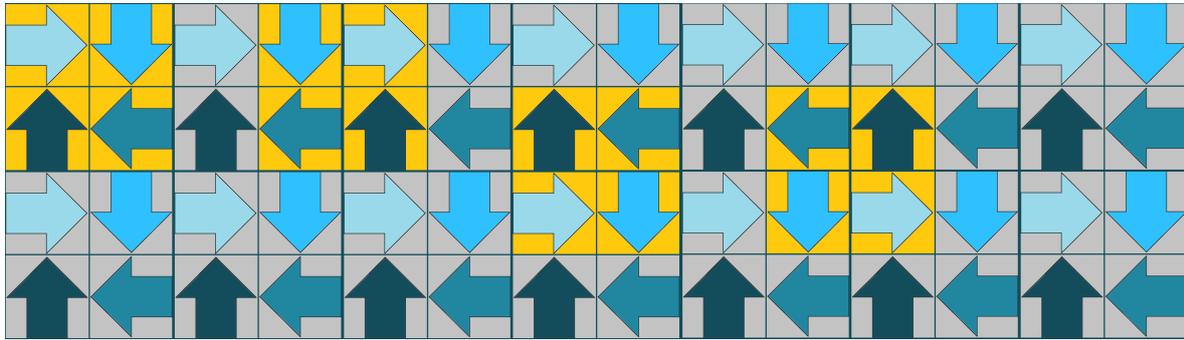
Figura 4.17: Composição das reflexões dos eixos x e y



Fonte: Elaborado pela autora.

Através do ladrilhamento podemos analisar as simetrias destacadas:

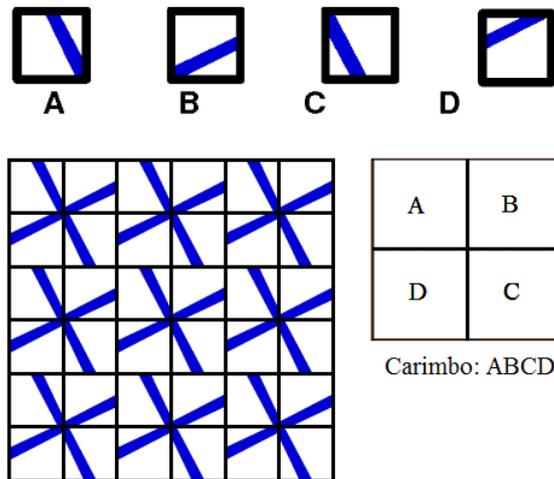
Figura 4.18: Ladrilhamento destacando as simetrias



Fonte: Elaborado pela autora.

Analisando o ladrilhamento a seguir e as nomenclaturas dadas através do carimbo definimos quem será o nosso conjunto e o nosso grupo para calcularmos as órbitas através do Lema de Burnside (3.2).

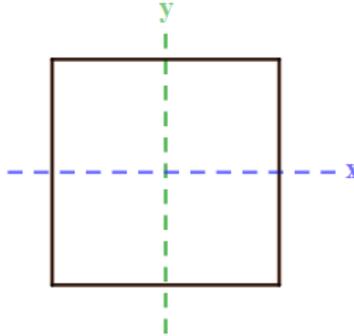
Figura 4.19: Ladrilhamento com o carimbo em destaque



Fonte: Elaborado pela autora a partir da referência [32].

Temos que, existem $4^4 = 256$ maneiras distintas para a construção da matriz inicial. Considerando X o conjunto dessas 256 maneiras distintas para a construção da matriz inicial e o grupo abeliano $G = \{e, \mu_1, \mu_2, \mu_1\mu_2\}$, subgrupo de A_4 , atuando em X .

Figura 4.20: Eixos de simetrias - reflexões



Fonte: Elaborado pela autora.

As simetrias são:

- e : o elemento neutro.
- μ_1, μ_2 : as reflexões de ângulo π , ou seja, 180° com os eixos x e y respectivamente.
- $\mu_1\mu_2$: a composição das reflexões com os eixos x e y .

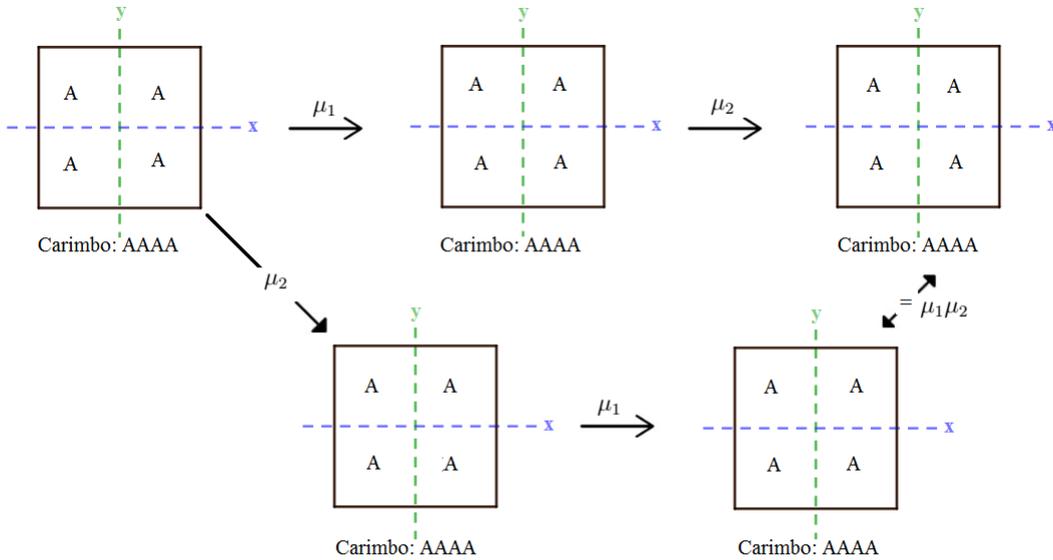
Como vimos, X é o conjunto das 256 maneiras distintas para a construção da matriz inicial. A seguir veja os 256 elementos.

$X = \{AAAA; AAAB; AABA; BAAA; ABAA; AD DD; DADD; DDDA;$
 $DDAD; AAAC; AACA; CAAA; ACAA; ACCC; CACC; CCCA;$
 $CACC; AAAD; AADA; DAAA; ADAA; ABBB; BABB; BBBA;$
 $BBAB; AAAB; BBAA; ADDA; DAAD; AACC; CCAA; AADD;$
 $DDAA; ABBA; BAAB; AACB; AABC; BC AA; CBAA; ADDB;$
 $DABD; BDDA; DBAD; ADCC; DACC; CCDA; CCAD; AADB;$
 $AABD; BDAA; DBAA; ADDC; DACD; CDDA; DCAD; ABBC;$
 $BACB; CBBA; BCAB; AADC; AACD; CDAA; DCAA; ABCC;$
 $BACC; CCBA; CCAB; ABBD; BADB; DBBA; BDAB; ABAB;$
 $BABA; ADAD; DADA; ACAC; CACA; ABAC; BACA; CABA$
 $ACAB; ADBD; DADB; DBDA; BDAD; ACDC; CACD; CDCA;$
 $DCAC; ABAD; BADA; DABA; ADAB; ADCD; DADC; DCDA;$
 $CDAD; ABCB; BABC; BCBA; CBAB; ACAD; CADA; DACA;$
 $ADAC; ACBC; CACB; CBCA; BCAC; ABDB; BABD; BDBA;$
 $DBAB; ACCA; CAAC; ABCA; BAAC; ACBA; CAAB; ABDD;$
 $BADD; DDBA; DDAB; ACCD; CADC; DCCA; CDAC; ABDA;$
 $BAAD; ADBA; DAAB; ACDD; CADD; DDCA; DDAC; ACBB;$
 $CABB; BB CA; BBAC; ACDA; CAAD; ADCA; DAAC; ACCB;$
 $CABC; BCCA; CBAC; ADBB; DABB; BBDA; BBAD; ABCD;$
 $BADC; DCBA; CDAB; ABDC; BACD; CDBA; DCAB; ACBD;$
 $CADB; DBCA; BDAC; ACDB; CABD; BDC A; DBAC; ADBC;$
 $DACB; CBDA; BCAD; ADCB; DABC; BCDA; CBAD; BBBB;$
 $CCCC; DDDD; BBBC; BBCB; CBBB; BCBB; BBBB; BBDB;$
 $DBBB; BDBB; BDDD; DBDD; DDD B; DDBD; BCCC; CBCC;$
 $CCCB; CCBC; BBCC; CCBB; BBDD; DDBB; CBCB; CBBC;$
 $BBDC; BB CD; CDBB; DCBB; BCCD; CBDC; DCCB; CDBC;$
 $BCDD; CBDD; DDCB; DDBC; BCBC; CBCB; BDBD; DBDB;$
 $BCBD; CBDB; DBCB; BDBC; BCDC; CB CD; CDCB; DCBC;$
 $BDCD; DBDC; DCDB; CDBD; BDD B; DBBD; BCDB; CBBD;$
 $BDCB; DBBC; BDCC; DBCC; CCDB; CCBD; BDDC; DBCD;$
 $CDD B; DCBD; C CCD; CCDC; DCCC; CDCC; CDDD; DCDD;$
 $DDDC; DD CD; CCDD; DDCC; CDDC; DCCD; CD CD; DCDC\}$.

Agora analisaremos as órbitas. Para encontrar a quantidade de órbitas podemos fazer de duas formas, a saber:

De forma manual, analisando as simetrias passo a passo, por exemplo:

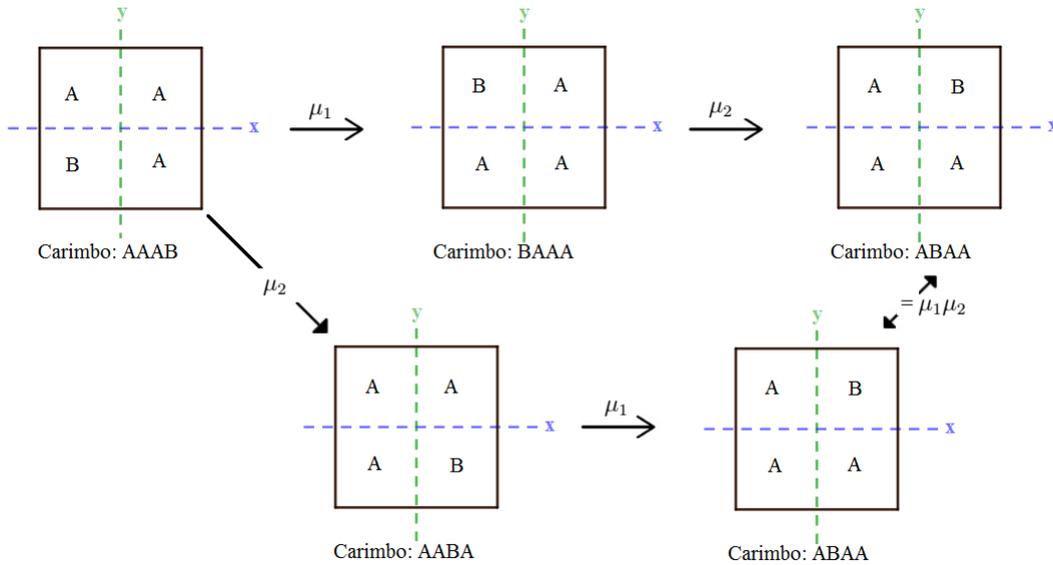
Figura 4.21: Gerando os elementos - Órbita 01



Órbita 01: {AAAA}.

Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 4.22: Gerando os elementos - Órbita 02

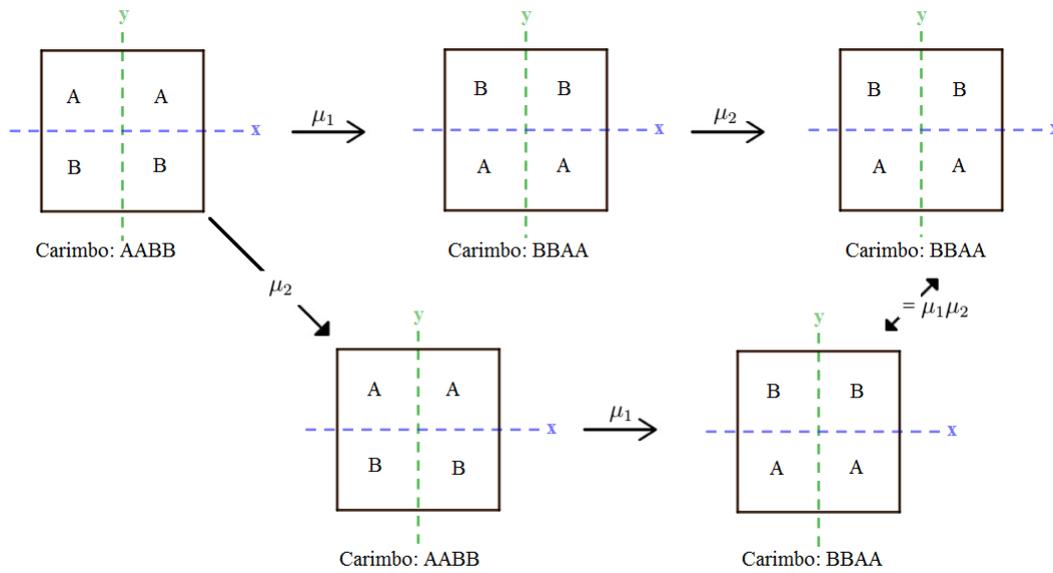


Órbita 02: {AAAB, AABA, BAAA, ABAA}.

Fonte: Elaborado pela autora.

⋮

Figura 4.23: Gerando os elementos - Órbita 08

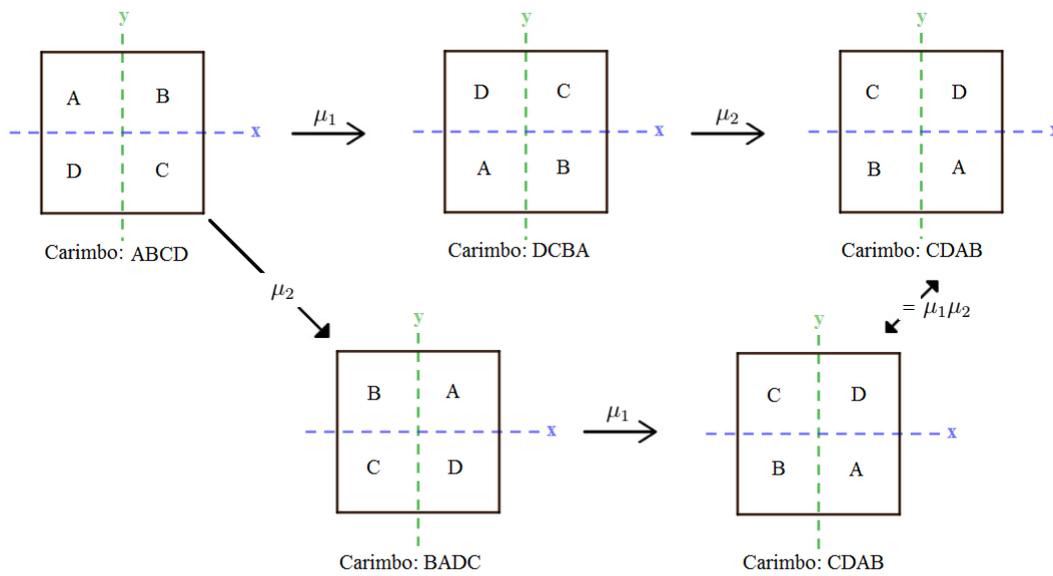


Órbita 08: {AABB, BBAA}.

Fonte: Elaborado pela autora.

⋮

Figura 4.24: Gerando os elementos - Órbita 44

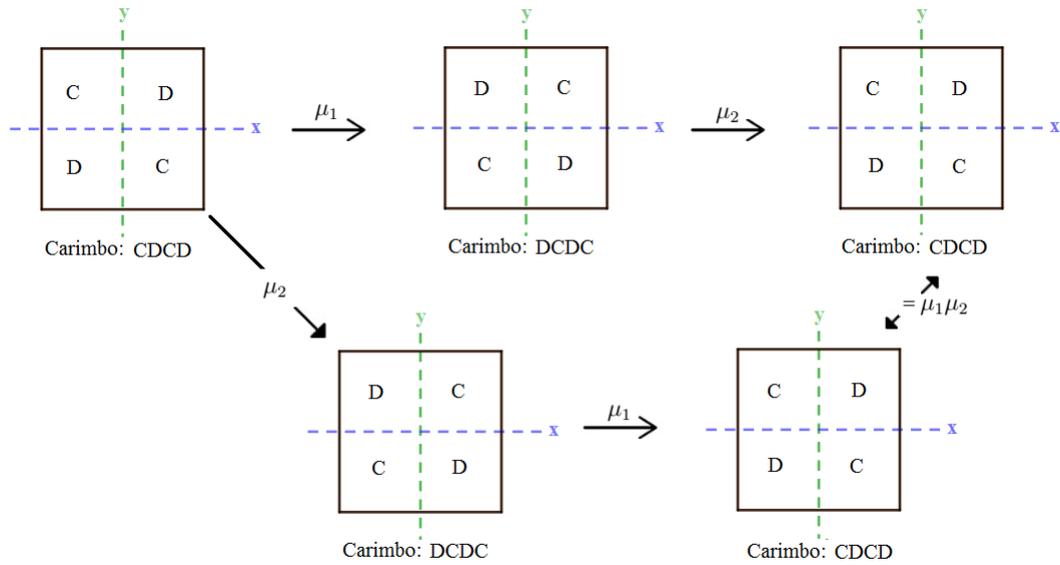


Órbita 44: {ABCD, BADC, DCBA, CDAB}.

Fonte: Elaborado pela autora.

⋮

Figura 4.25: Gerando os elementos - Órbita 76

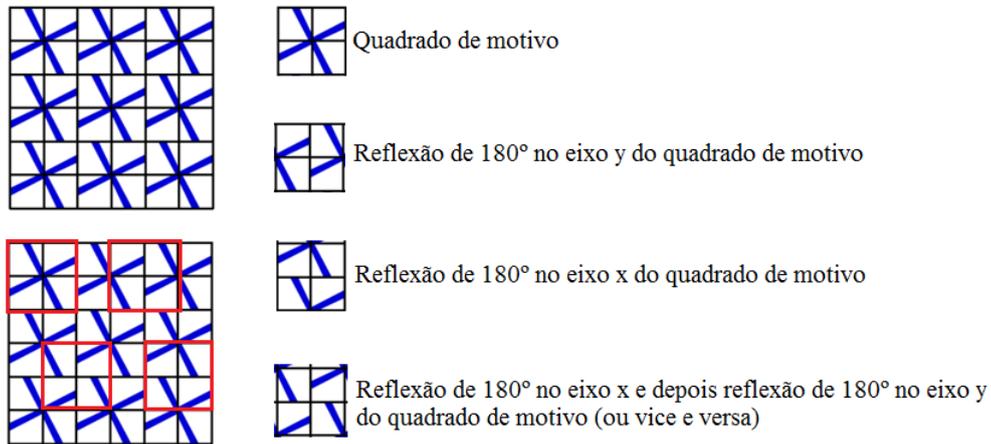


Órbita 76: {CDCD, DCDC}.

Fonte: Elaborado pela autora.

Com base na Figura (4.24) analisamos as simetrias relacionadas ao carimbo ABCD e agora destacaremos as simetrias mostrando a real imagem com o seu motivo, conforme a explicação referente a Figura (4.18).

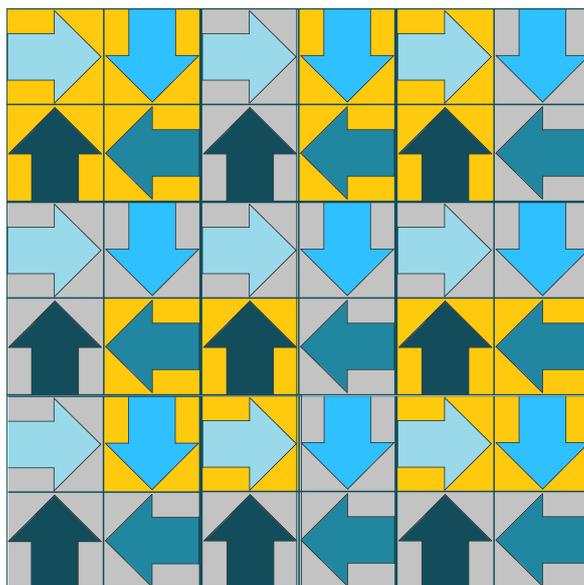
Figura 4.26: Ladrilhamento ABCD destacando as simetrias



Fonte: Elaborado pela autora a partir da referência [32].

Obs.: Na Figura (4.18) se construíssemos um ladrilhamento 6 × 6 com o mesmo padrão teríamos as simetrias destacadas da seguinte forma:

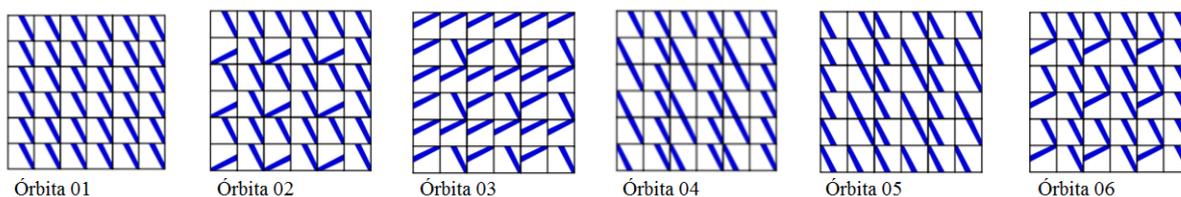
Figura 4.27: Ladrilhamento destacando as simetrias - motivo: seta



Fonte: Elaborado pela autora.

Para analisar as órbitas de forma manual, primeiro analisamos todos os elementos de X que continham a 1ª letra da assinatura sendo A, com isso, aplicamos as reflexões, ou seja, os elementos do grupo G e fomos organizando em “caixinhas” (órbitas) assim, como fizemos na Figura (3.27). Depois, fizemos para todos que possuam a inicial B e assim, por diante. Veja a seguir as órbitas geradas pelas assinaturas da Figura (4.19) e suas respectivas imagens.

Figura 4.28: Órbitas 1 ao 6



Órbita 01

Órbita 02

Órbita 03

Órbita 04

Órbita 05

Órbita 06

Fonte: Elaborado pela autora a partir da referência [32].

Órbita 01: {AAAA};

Órbita 02: {AAAB, AABA, BAAA, ABAA};

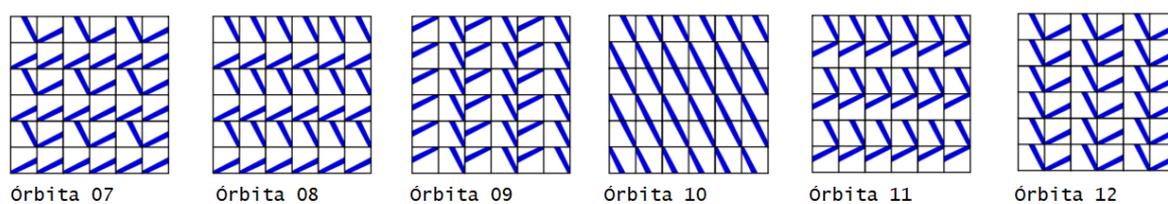
Órbita 03: {ADDD, DADD, DDDA, DDAD};

Órbita 04: {AAAC, AACA, CAAA, CAA};

Órbita 05: {ACCC, CACC, CCCA, CACC};

Órbita 06: {AAAD, AADA, DAAA, ADAA};

Figura 4.29: Órbitas 7 ao 12



Fonte: Elaborado pela autora a partir da referência [32].

Órbita 07: $\{ABBB, BABB, BBBA, BBAB\}$;

Órbita 08: $\{AAAB, BBAA\}$;

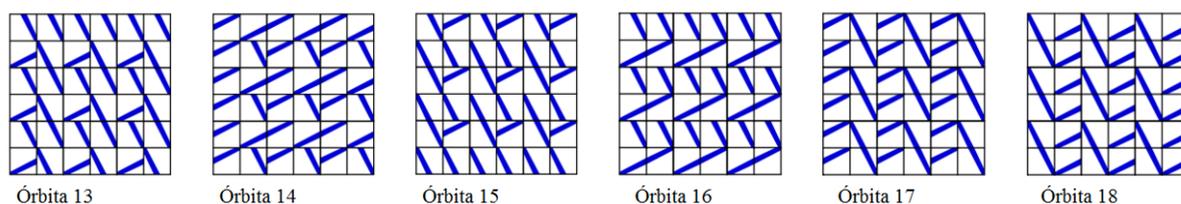
Órbita 09: $\{ADDA, DAAD\}$;

Órbita 10: $\{AACC, CCAA\}$;

Órbita 11: $\{AADD, DDAA\}$;

Órbita 12: $\{ABBA, BAAB\}$;

Figura 4.30: Órbitas 13 ao 18



Fonte: Elaborado pela autora a partir da referência [32].

Órbita 13: $\{AACB, AABC, BCAA, CBAA\}$;

Órbita 14: $\{ADDB, DABD, BDDA, DBAD\}$;

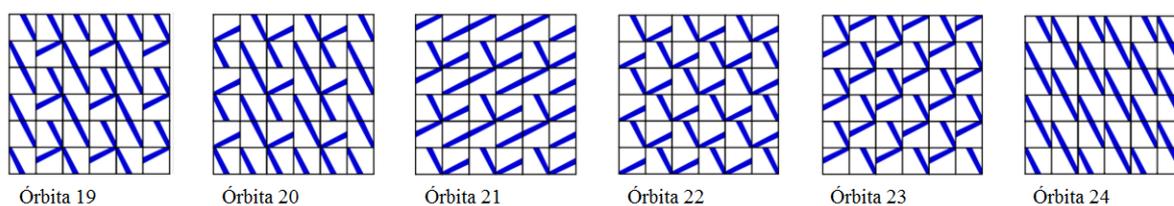
Órbita 15: $\{ADCC, DACC, CCDA, CCAD\}$;

Órbita 16: $\{AADB, AABD, BDAA, DBAA\}$;

Órbita 17: $\{ADDC, DACD, CDDA, DCAD\}$;

Órbita 18: $\{ABBC, BACB, CBBA, BCAB\}$;

Figura 4.31: Órbitas 19 ao 24



Fonte: Elaborado pela autora a partir da referência [32].

Órbita 19: $\{AADC, AACD, CDAA, DCAA\}$;

Órbita 20: $\{ABCC, BACC, CCBA, CCAB\}$;

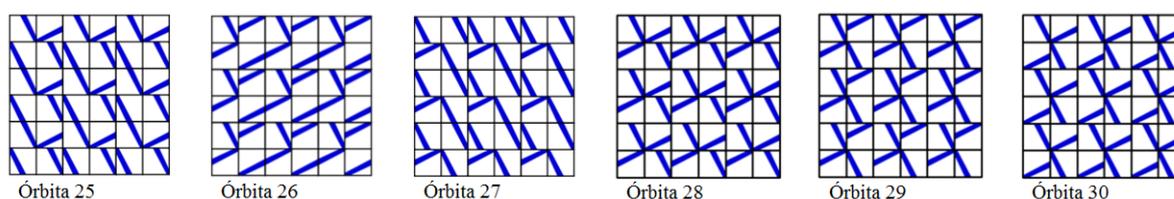
Órbita 21: $\{ABBD, BADB, DBBA, BDAB\}$;

Órbita 22: $\{ABAB, BABA\}$;

Órbita 23: $\{ADAD, DADA\}$;

Órbita 24: $\{ACAC, CACA\}$;

Figura 4.32: Órbitas 25 ao 30



Fonte: Elaborado pela autora a partir da referência [32].

Órbita 25: $\{ABAC, BACA, CABA, ACAB\}$;

Órbita 26: $\{ADBD, DADB, DBDA, BDAD\}$;

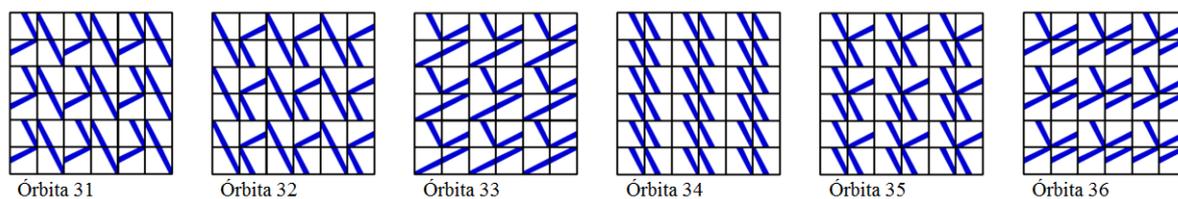
Órbita 27: $\{ACDC, CACD, CDCA, DCAC\}$;

Órbita 28: $\{ABAD, BADA, DABA, ADAB\}$;

Órbita 29: $\{ADCD, DADC, DCDA, CDAD\}$;

Órbita 30: $\{ABCB, BABC, BCBA, CBAB\}$;

Figura 4.33: Órbitas 31 ao 36



Fonte: Elaborado pela autora a partir da referência [32].

Órbita 31: $\{ACAD, CADA, DACA, ADAC\}$;

Órbita 32: $\{ACBC, CACB, CBCA, BCAC\}$;

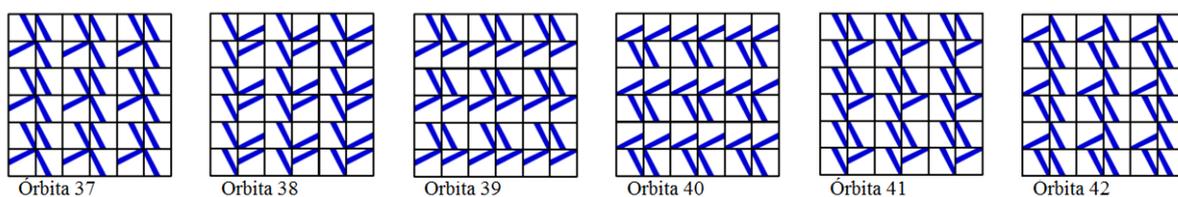
Órbita 33: $\{ABDB, BABD, BDBA, DBAB\}$;

Órbita 34: $\{ACCA, CAAC\}$;

Órbita 35: $\{ABCA, BAAC, ACBA, CAAB\}$;

Órbita 36: $\{ABDD, BADD, DDBA, DDAB\}$;

Figura 4.34: Órbitas 37 ao 42



Fonte: Elaborado pela autora a partir da referência [32].

Órbita 37: $\{ACCD, CADC, DCCA, CDAC\}$;

Órbita 38: $\{ABDA, BAAD, ADBA, DAAB\}$;

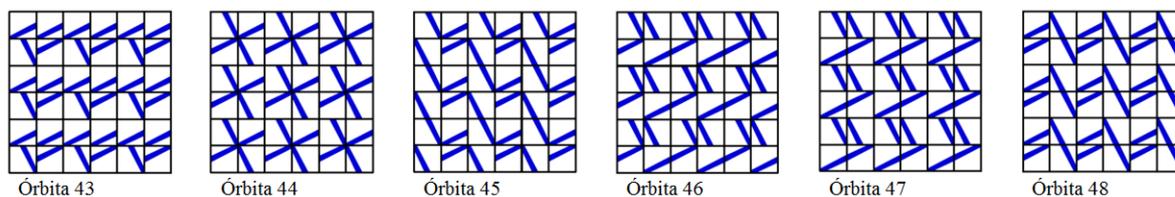
Órbita 39: $\{ACDD, CADD, DDCA, DDAC\}$;

Órbita 40: $\{ACBB, CABB, BBCA, BBAC\}$;

Órbita 41: $\{ACDA, CAAD, ADCA, DAAC\}$;

Órbita 42: $\{ACCB, CABC, BBCA, CBAC\}$;

Figura 4.35: Órbitas 43 ao 48



Fonte: Elaborado pela autora a partir da referência [32].

Órbita 43: $\{ADBB, DABB, BBDA, BBAD\}$;

Órbita 44: $\{ABCD, BADC, DCBA, CDAB\}$;

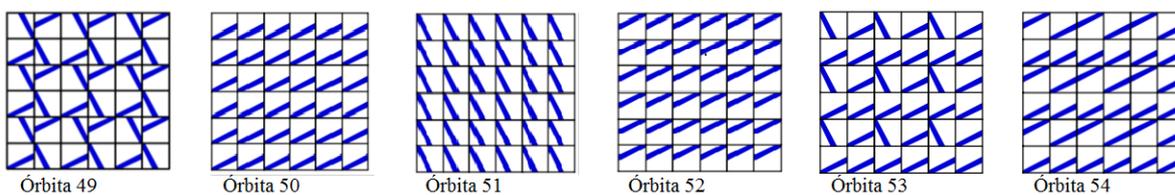
Órbita 45: $\{ABDC, BACD, CDBA, CABD\}$;

Órbita 46: $\{ACBD, CADB, DBCA, BDAC\}$;

Órbita 47: $\{ACDB, CABD, BDCA, DBAC\}$;

Órbita 48: $\{ADBC, DACB, CBDA, BCAD\}$;

Figura 4.36: Órbitas 49 ao 54



Fonte: Elaborado pela autora a partir da referência [32].

Órbita 49: $\{ADCB, DABC, BCDA, CBAD\}$;

Órbita 50: $\{BBBB\}$;

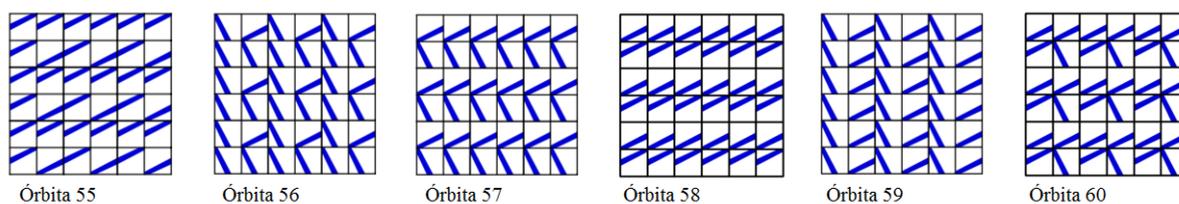
Órbita 51: $\{CCCC\}$;

Órbita 52: $\{DDDD\}$;

Órbita 53: $\{BBBC, BBCB, CBBB, BCBB\}$;

Órbita 54: $\{BBBD, BBDB, DBBB, BDBB\}$;

Figura 4.37: Órbitas 55 ao 60



Fonte: Elaborado pela autora a partir da referência [32].

Órbita 55: $\{BDDD, DBDD, DDD B, DDBD\}$;

Órbita 56: $\{BCCC, CBCC, CCCB, CCBC\}$;

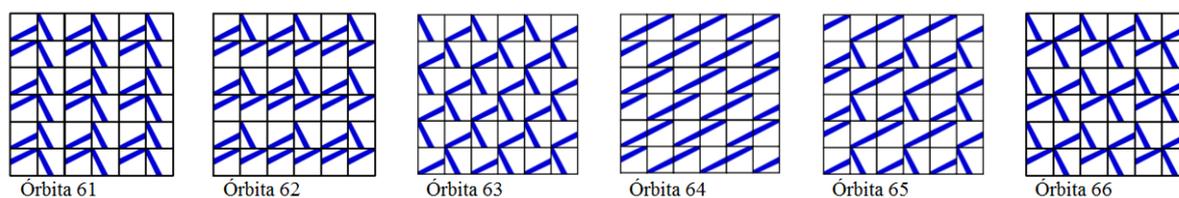
Órbita 57: $\{BBCC, CCBB\}$;

Órbita 58: $\{BBDD, DDBB\}$;

Órbita 59: $\{CBCB, CBBC\}$;

Órbita 60: $\{BBDC, BB CD, CDBB, DCBB\}$;

Figura 4.38: Órbitas 61 ao 66



Fonte: Elaborado pela autora a partir da referência [32].

Órbita 61: $\{BCCD, CBDC, DCCB, CDBC\}$;

Órbita 62: $\{BCDD, CBDD, DDCB, DDBC\}$;

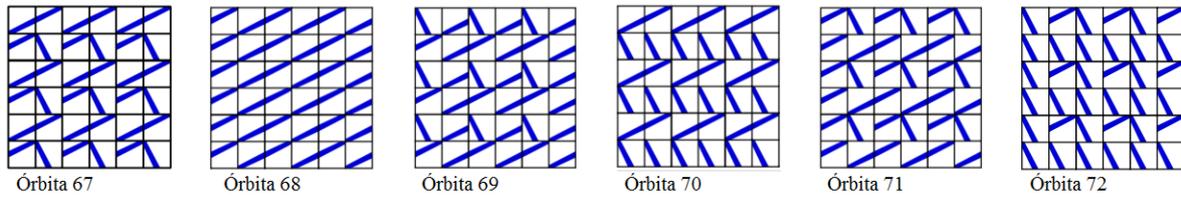
Órbita 63: $\{BCBC, CBCB\}$;

Órbita 64: $\{BDBD, DBDB\}$;

Órbita 65: $\{BCBD, CBDB, DBCB, BDBC\}$;

Órbita 66: $\{BCDC, CBCD, CDCB, DCBC\}$;

Figura 4.39: Órbitas 67 ao 72



Fonte: Elaborado pela autora a partir da referência [32].

Órbita 67: $\{BDCD, DBDC, DCDB, CDBD\}$;

Órbita 68: $\{BDDDB, DBBD\}$;

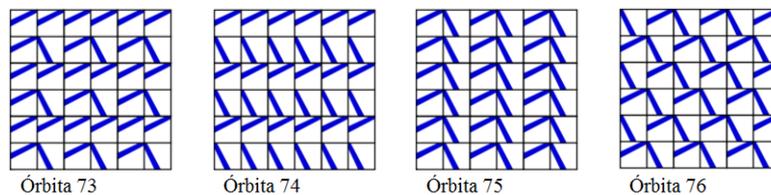
Órbita 69: $\{BCDB, CBBD, BDCB, DBBC\}$;

Órbita 70: $\{BDCC, DBCC, CCDB, CCBD\}$;

Órbita 71: $\{BDDC, DBCD, CDDDB, DCBD\}$;

Órbita 72: $\{CCCD, CCDC, DCCC, CDCC\}$;

Figura 4.40: Órbitas 73 ao 76



Fonte: Elaborado pela autora a partir da referência [32].

Órbita 73: $\{CDDD, DCDD, DDDC, DDCD\}$;

Órbita 74: $\{CCDD, DDCC\}$;

Órbita 75: $\{CDDC, DCCD\}$;

Órbita 76: $\{CDCD, DCDC\}$.

Essa forma manual é interessante quando queremos visualizar todas as imagens geradas de cada órbita, mas se o intuito é apenas descobrir o número de órbitas distintas de X sobre G não é um método viável, pelo fato de demandar muito tempo, pois temos 256 elementos. Entretanto, temos uma outra forma que é aplicando o Teorema de Burnside (3.2). Para isso, precisamos analisar os X_g , ou seja, quem são os elementos de X que são fixados pelos elementos de G e com isso analisar o número de elementos que ele possui.

$$|X_e| = 256; \text{ pois ele fixa todos os elementos de } X$$

$|X_{\mu_1}| = 16$; pois, $X_{\mu_1} = \{AAAA, BBBB, CCCC, DDDD, ADDA, DAAD, ABBA, BAAB, ACCA, CAAC, CBBC, BCCB, DCCD, CDDC, BDDB, DBBD\}$

$|X_{\mu_2}| = 16$; pois, $X_{\mu_2} = \{AAAA, BBBB, CCCC, DDDD, AABB, BBAA, AACC, CCAA, AADD, DDAA, BBCC, CCBB, BBDD, DDBB, CCDD, DDCC\}$

$|X_{\mu_1\mu_2}| = 16$; pois, $X_{\mu_1\mu_2} = \{AAAA, BBBB, CCCC, DDDD, ABAB, BABA, ADAD, DADA, ACAC, CACA, BCBC, CBCB, BDBD, DBDB, CDCD, DCDC\}$

Logo, pelo Teorema de Burnside (3.2), temos:

$$\begin{aligned} (\text{número de órbitas distintas de } X \text{ sobre } G) &= \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X_g| \\ &= \frac{1}{4} \cdot (256 + 16 + 16 + 16) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (304) = 76. \end{aligned}$$

Portanto, existem 76 órbitas distintas de ladrilhamentos a menos de simetrias.

Além disso, pelo Teorema (2.22) podemos afirmar que cada órbita só poderá conter 1, 2 ou 4 elementos, pois são os números que dividem a ordem do grupo G . Porém, usando o Teorema de Burnside (3.2) apenas conseguiremos encontrar a quantidade de órbitas e não exibi-las. Se caso tiver a intenção de exibi-las é necessário fazer de forma manual.

4.2 Curiosidades sobre Escher

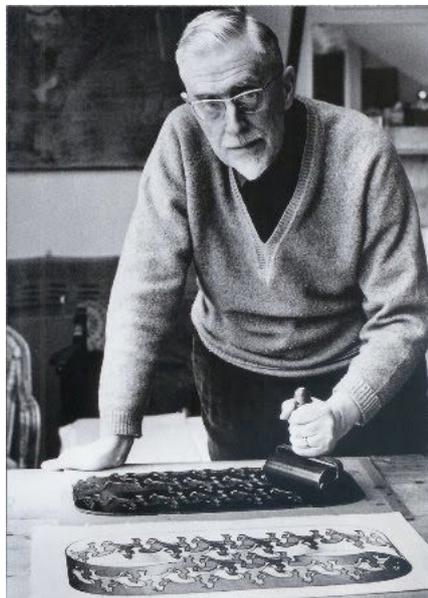
Nesta seção abordaremos a biografia, uma das técnicas empregadas pelo artista e algumas de suas obras em destaque, baseado nas referências [18, 6, 23, 32, 33].

4.2.1 Biografia de M. C. Escher

Maurits Cornelis Escher (Leeuwarden, 17 de junho de 1898 - Hilversum, 27 de março de 1972) mais conhecido como M. C. Escher foi um artista gráfico holandês o qual é um dos artistas gráficos mais famosos no mundo.

Apesar de não ser bom aluno destacou-se logo cedo nas aulas de desenho. Escher estudou arquitetura, mas seu gosto estava mais para artes decorativas e influenciado por um professor passou a adotar técnicas de xilogravura³ e litografia⁴. (ERNST,1976).

Figura 4.41: Retrato de Escher com Cavaleiro.



Fonte: Imagem retirada da p. 153 da referência [37].

As principais técnicas empregadas por ele foram a xilogravura e litografia. Suas obras tendem a representar ilusão de ótica, construções impossíveis, exploração do infinito, padrões geométricos, isometrias, divisão regular do plano, entre outros que representavam obras fantásticas e incomuns. Escher foi considerado um artista matemático, sobretudo geométrico e foi através dessa abordagem de conceitos matemáticos em suas obras que foi de grande contribuição para essa dissertação, de forma a trazer aplicações práticas para uma teoria Matemática um tanto quanto abstrata.

Nas subseções a seguir abordaremos alguns tópicos e mais detalhes sobre o artista Escher.

³Técnica ou arte de fazer gravuras em madeira, talhadas em relevo, pintadas para reprodução em papel ou em outro suporte. Definição disponível em: <<https://www.dicio.com.br/xilogravura/>>. Acesso em: 8 dez. 2020

⁴Arte de reproduzir pela impressão desenhos feitos com um corpo gorduroso em pedra calcária. Definição disponível em: <<https://www.dicio.com.br/litografia/>>. Acesso em: 8 dez. 2020

4.2.2 Tesselação

Agora analisaremos uma das técnicas empregadas pelo artista gráfico M. C. Escher a qual se denomina *tesselação*, apesar de ter a mesma fonética que tecelagem (tecer - entrelaçar fios) os significados são distintos.

De acordo com o site *docplayer*⁵ tesselação se origina do termo *tesselation*, do inglês, também chamada de ladrilhamento, pavimentação ou mosaico e consiste no recobrimento de um plano usando uma ou mais formas geométricas chamadas de tesselas ou telhas de forma que não existam espaços, sobreposições ou lacunas entre eles. Essas figuras geométricas podem ser polígonos regulares ou não regulares, podem ter lados curvos ou não possuírem vértices, pois a condição essencial é que eles estejam interligados e sem espaçamentos formando uma única figura.

Historicamente, tesselações foram usados na arte islâmica e na Roma antiga, como na decoração geométrica decorativa do Palácio Alhambra Figura (4.42), a qual foi inspiração para Escher. No século XX, o trabalho de M. C. Escher costumava fazer uso de tesselações, tanto na geometria euclidiana ordinária quanto na geometria hiperbólica, por efeito artístico.

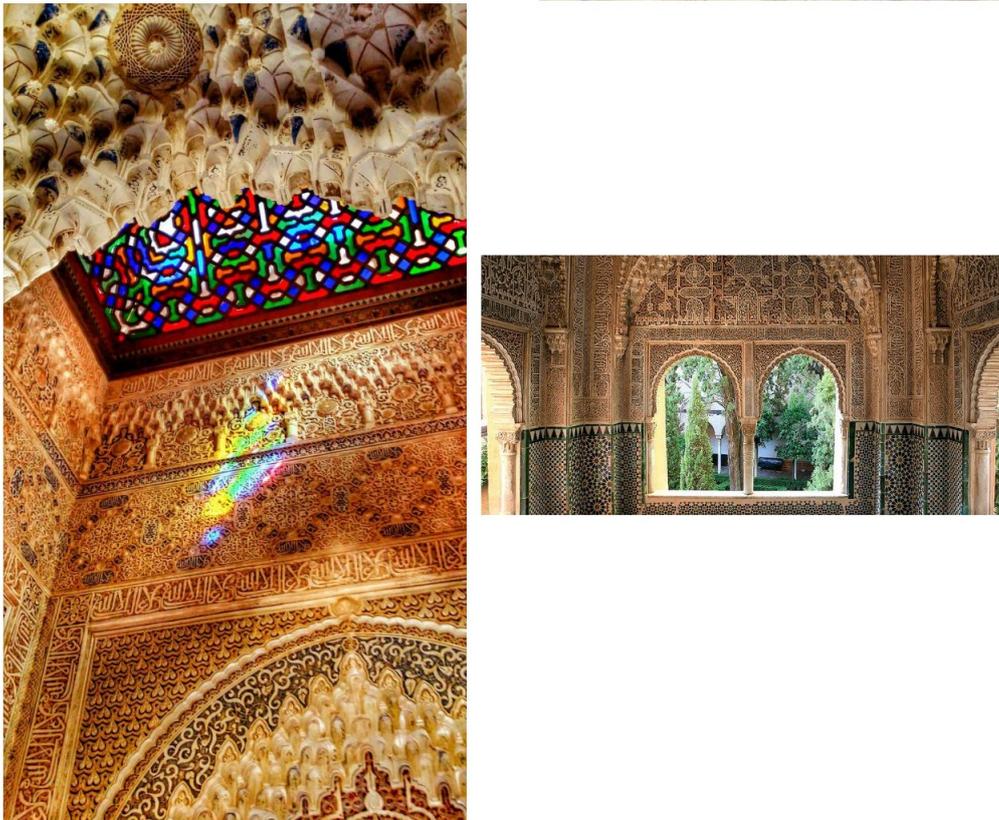
Figura 4.42: Vista da Alhambra - Espanha



Fonte: Imagem retirada da referência [1].

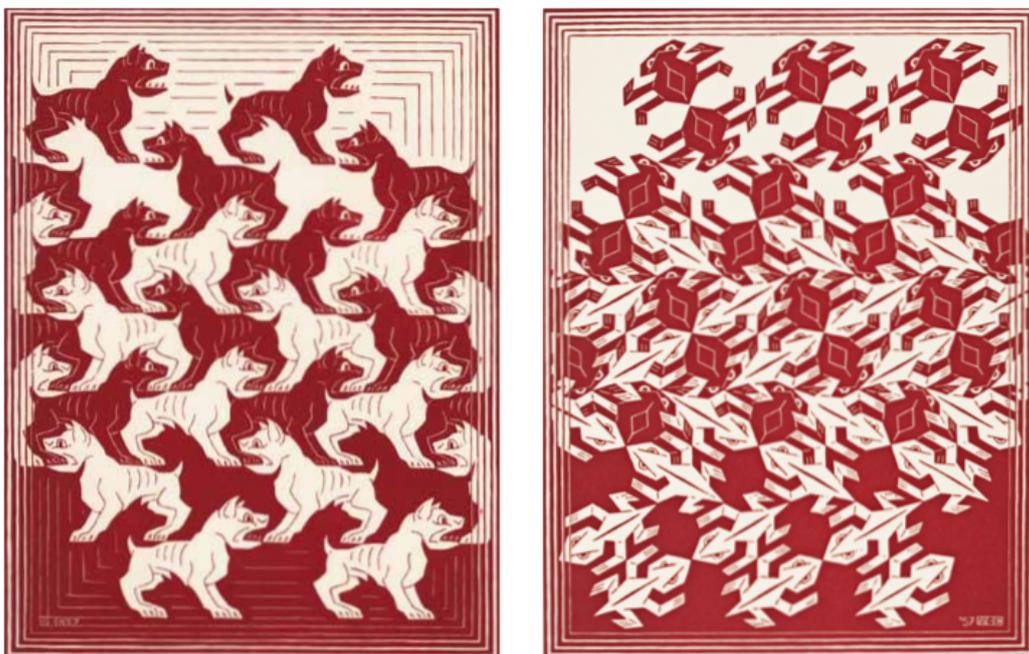
⁵Disponível em: <<https://docplayer.com.br/30478206-Mosaicos-descricao-mosaico-tesselacao-recobrimento-do-plano.html>>. Acesso em: 26 out. 2020.

Figura 4.43: Interior do palácio de Alhambra



Fonte: Imagem retirada da referência [17].

Figura 4.44: Algumas obras de Escher: Tessellation IV and Tessellation V (1957)



Fonte: Imagens retiradas da p. 111 da referência [37].

Figura 4.45: Algumas obras de Escher: Still life and street (1937) and Eight heads (1922)



Fonte: Imagens retiradas da p. 75 e 25 da referência [37].

Tesselações formam uma classe de padrões na natureza, por exemplo nas matrizes de células hexagonais encontradas em favos de mel.

Figura 4.46: Favo de mel



Fonte: Rayker (2014) [28].

Para entender melhor a técnica “Tesselação” empregada por Escher, tomaremos como referência o site “*Desvendando a técnica de M.C. Escher*”⁶ para exibir um objeto de construção.

⁶Disponível em: <<https://waltermattos.com/tutoriais/desvendando-a-tecnica-de-escher/>>. Acesso em: 2 ago. 2020

Primeiro escolhemos uma forma geométrica como o quadrado, triângulo, hexágono, entre outras. Para uma melhor compreensão seguindo a explicação de Walter Mattos escolhemos um quadrado para o nosso exemplo, logo após desenhamos uma forma qualquer em um dos lados desse quadrado, essa forma deve começar e terminar tocando apenas um dos lados desse quadrado.

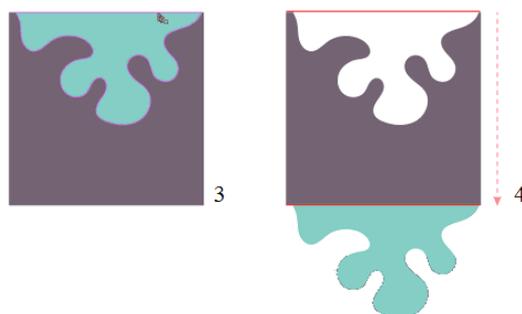
Figura 4.47: Processo de formação: etapa 1 a 3



Fonte: Mattos (2015) [23].

Logo após, selecionamos a figura em azul (como um recorte) e fizemos o movimento de translação.

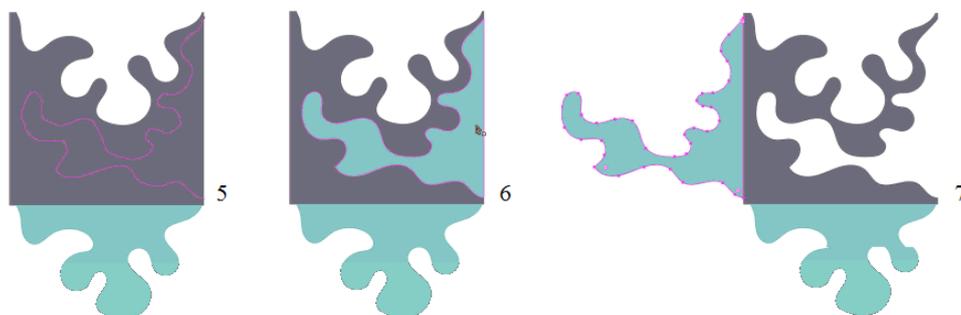
Figura 4.48: Processo de formação: etapa 3 a 4



Fonte: Mattos (2015)[23].

Agora criamos uma nova forma em uma das laterais que sobraram e aplicamos o mesmo processo de recorte e translação.

Figura 4.49: Processo de formação: etapa 5 a 7

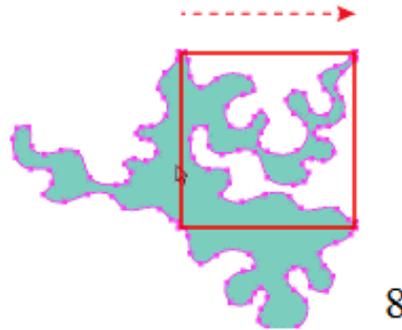


Fonte: Mattos (2015) [23].

Através da técnica tesselação podemos obter resultados desde os mais simples ao mais complexos, porém o princípio é de fácil compreensão.

Com base na Seção (4.1) - “Padrão Combinatorial de Escher” podemos identificar nosso quadrado de motivo na Figura (4.50). Lembramos que, sempre que aparecer a palavra “motivo” se refere a um padrão que se repete.

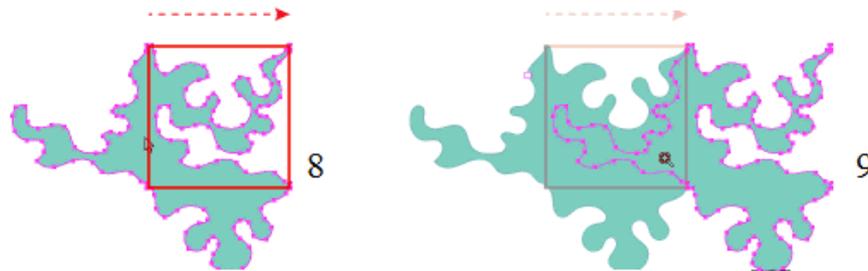
Figura 4.50: Processo de formação: etapa 8



Fonte: Mattos (2015) [23].

Para finalizarmos, basta multiplicarmos esse objeto para qualquer lado, e contanto que respeitemos o mesmo movimento de translação, eles se encaixam perfeitamente, sem se sobreporem ou deixarem espaço entre eles, assim criando um ladrilhamento.

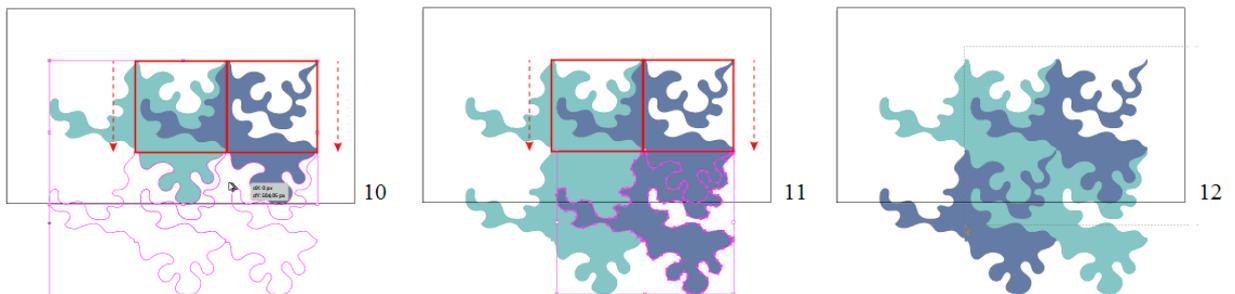
Figura 4.51: Processo de formação: etapa 8 e 9



Fonte: Mattos (2015) [23].

Depois é só alternar as cores e continuar multiplicando até formar um padrão.

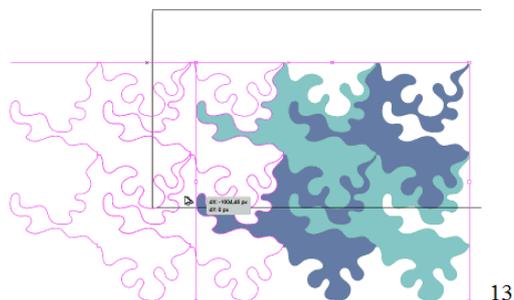
Figura 4.52: Processo de formação: etapa 10 a 12



Fonte: Mattos (2015) [23].

Após fazer todos esses procedimentos a figura estará finalizada.

Figura 4.53: Processo de formação: etapa 13



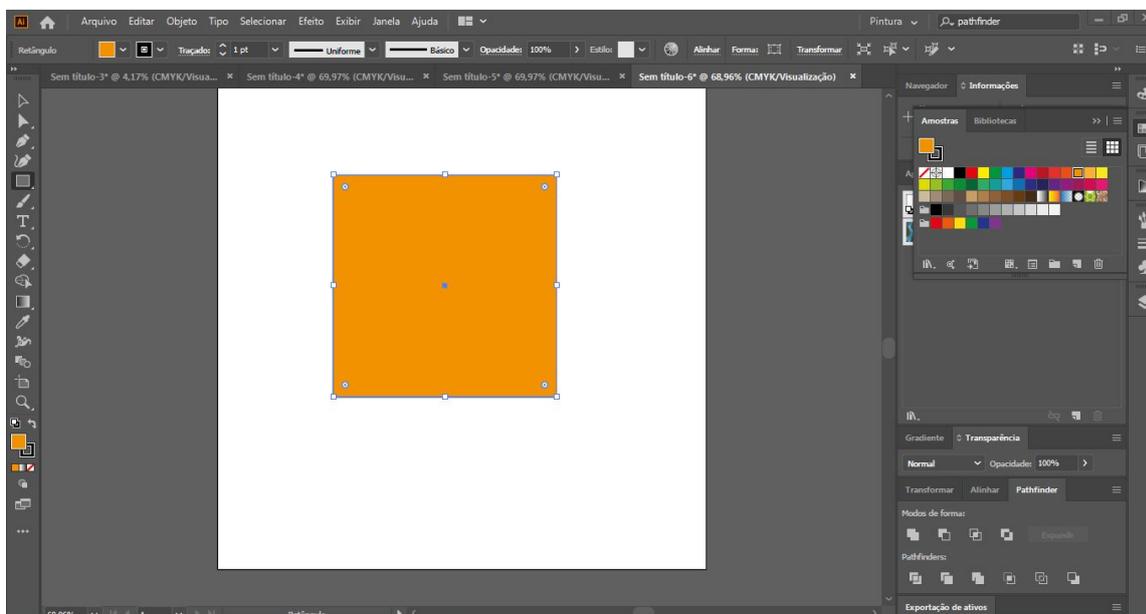
Fonte: Mattos (2015) [23].

Esse foi um dos exemplos, mas no site “Desvendando a técnica de Escher”⁷ Walter Mattos mostra como recriou, à sua maneira a obra Pegasus n^o. 105 do artista M. C. Escher, com um tutorial animado para uma melhor compreensão. Além disso, Walter Mattos mostra a sua recriação através da ferramenta *Illustrator*⁸.

A fim de seguir os passos mencionados por Walter Mattos e produzir uma tesselação, fizemos uma tentativa através da ferramenta *illustrator*, o qual se resultou nos seguintes passos:

Primeiro escolhemos o quadrado como forma geométrica com a cor laranja de fundo. Logo após, desenhamos uma forma na parte superior desse quadrado, essa forma começou e terminou tocando apenas o lado superior do quadrado.

Figura 4.54: Quadrado laranja



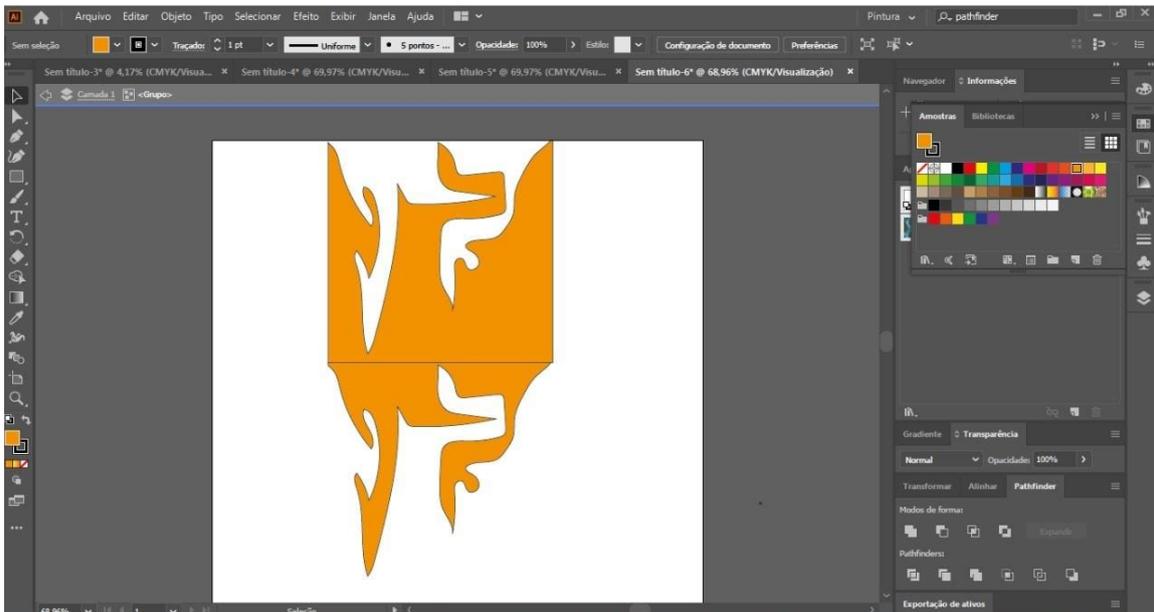
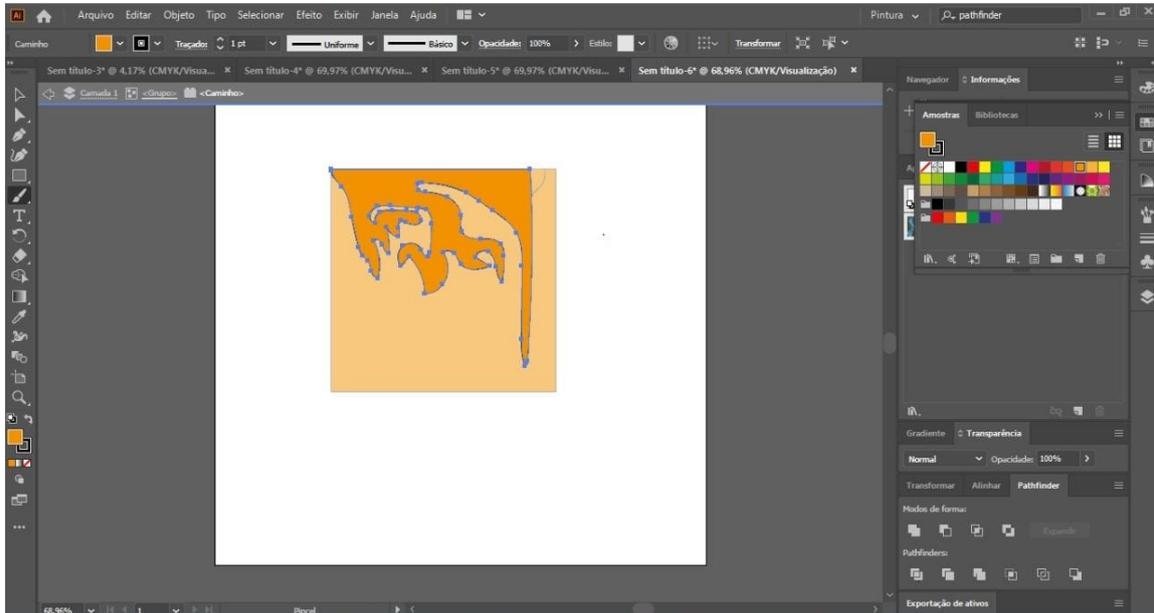
Fonte: Elaborado pela autora.

⁷Disponível em: <<https://waltermattos.com/tutoriais/desvendando-a-tecnica-de-escher/>>. Acesso em: 2 ago. 2020

⁸O Illustrator é um software gráfico focado na edição de imagens vetoriais.

Logo após, selecionamos a figura com o contorno em azul (como um recorte) e fizemos o movimento de translação para a parte inferior do quadrado.

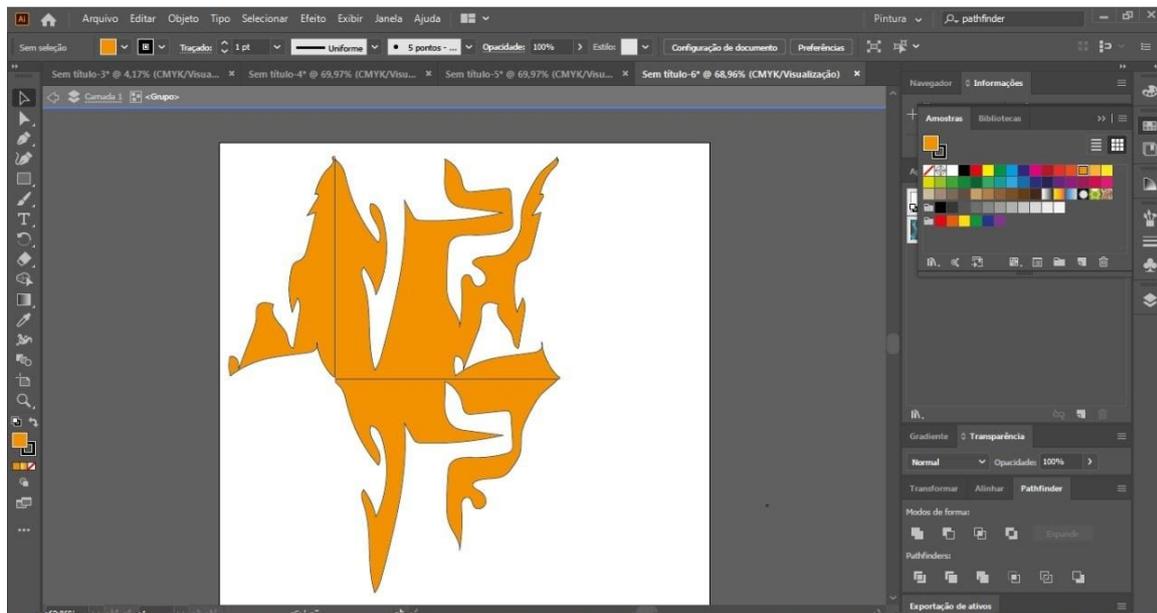
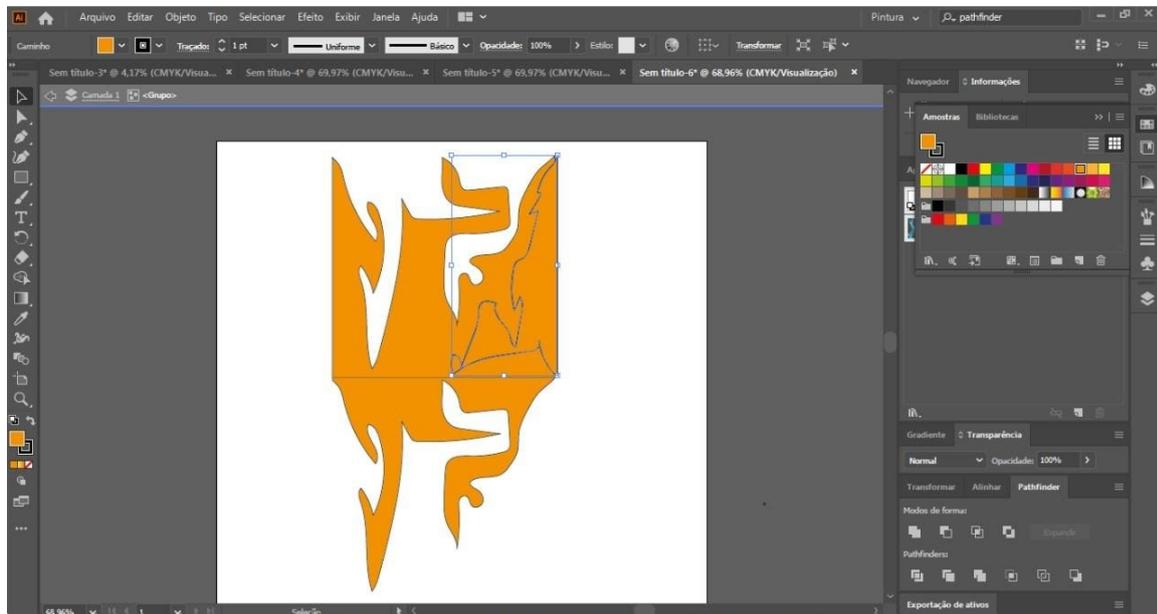
Figura 4.55: 1º Recorte



Fonte: Elaborado pela autora.

Após feito isso, criamos uma nova forma no lado direito do quadrado e aplicamos o mesmo processo de recorte e depois a translação para o lado esquerdo.

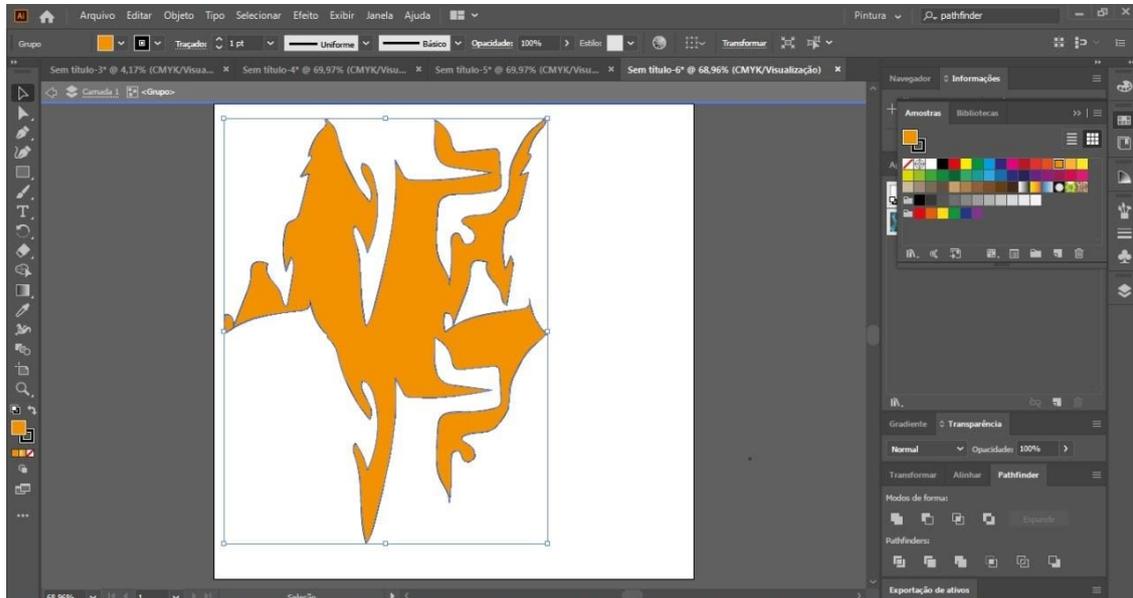
Figura 4.56: 2º Recorte



Fonte: Elaborado pela autora.

Depois, unimos toda a figura a fim de eliminar os riscos deixado pelos lados do quadrado.

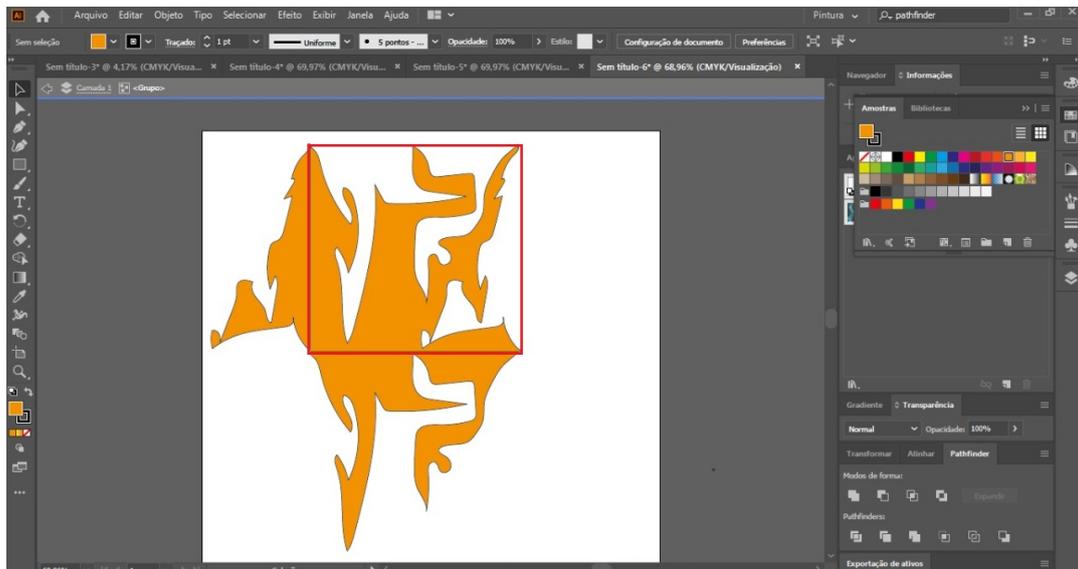
Figura 4.57: Eliminando os rastros do quadrado



Fonte: Elaborado pela autora.

Mesmo tendo feito todos esses passos podemos identificar o nosso quadrado de motivo.

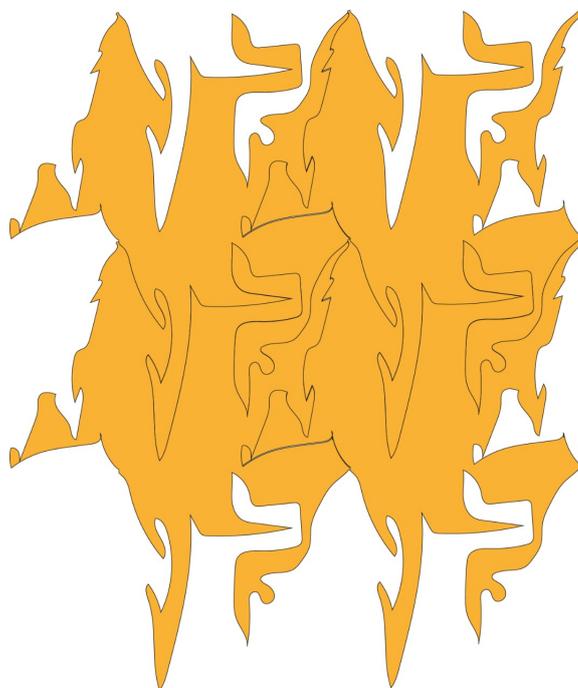
Figura 4.58: Quadrado de motivo visível



Fonte: Elaborado pela autora.

Por fim, multiplicamos esse objeto para direita e para baixo da figura inicial, de forma a respeitar o mesmo movimento de translação, para obter um melhor encaixe gerando o nosso ladrilhamento.

Figura 4.59: Ladrilhamento - Illustrator



Fonte: Elaborado pela autora.

Depois alternamos as cores e continuamos multiplicando até formar um padrão.

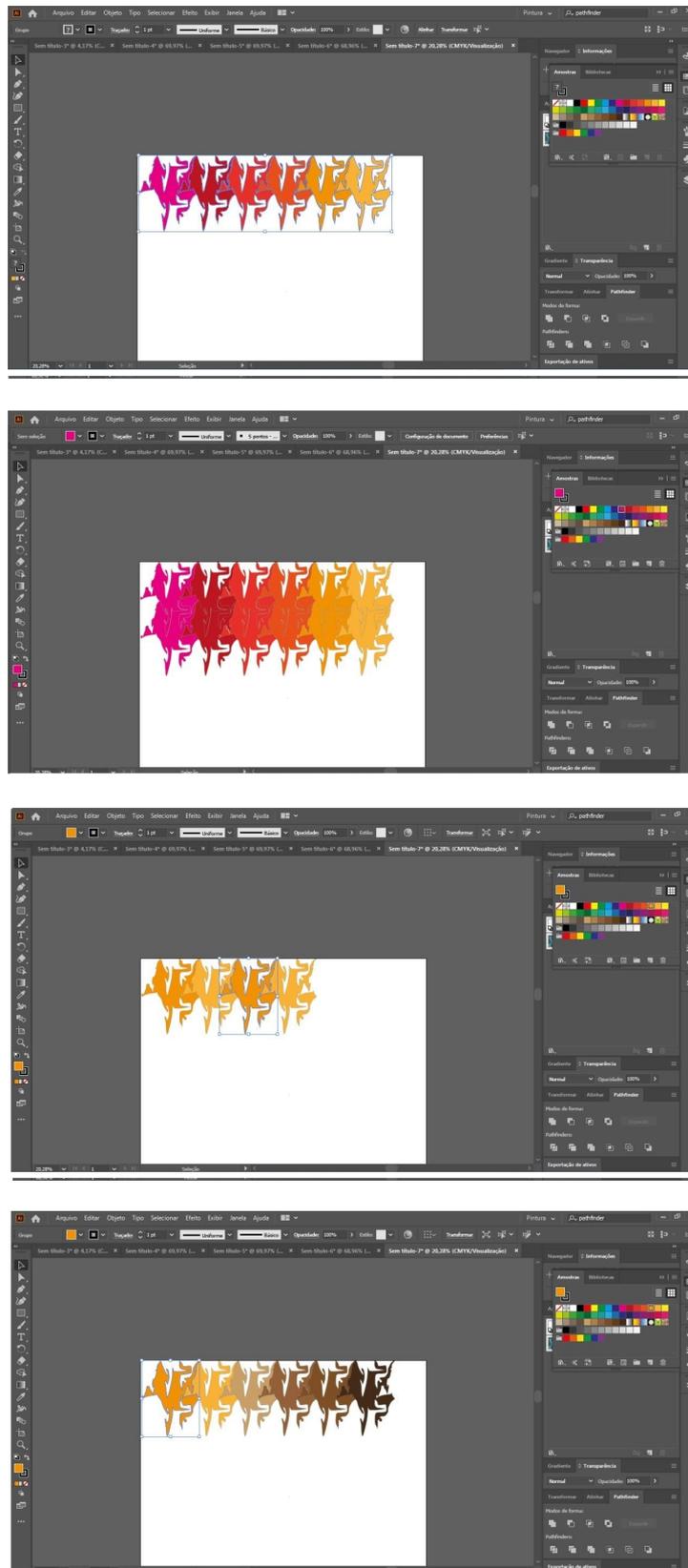
Figura 4.60: Ladrilhamento - Cores



Fonte: Elaborado pela autora.

Veja algumas outras tentativas:

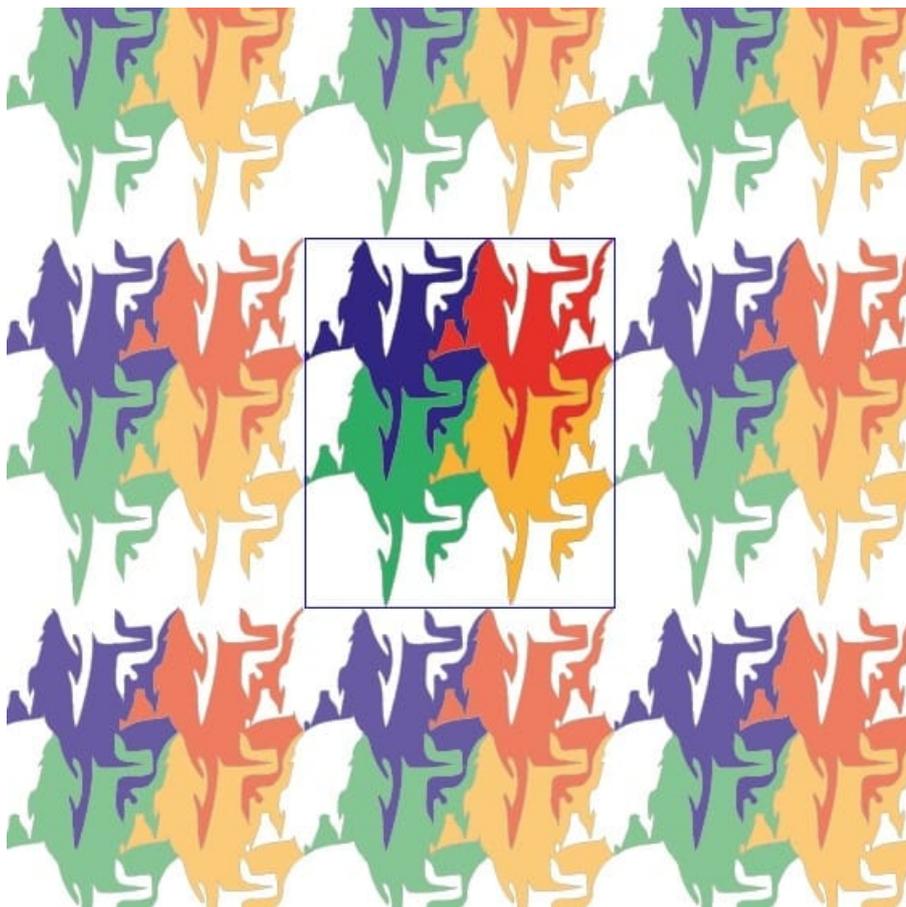
Figura 4.61: Outras Tentativas



Fonte: Elaborado pela autora.

Ao utilizar a opção “padrão” da ferramenta *illustrator* obtemos a imagem a seguir, porém não se aplica a uma das técnicas empregadas por Escher que seria a cobertura total do plano, pois encontramos alguns espaços vazios, ou seja, em branco. Porém, se analisarmos os espaços em branco veremos que são preenchidos pelos mesmos recortes que formam a Figura Inicial (4.55). Por isso, se desenharmos ou colorirmos os espaços em branco produziremos por completo a técnica tesselação.

Figura 4.62: Ferramenta “Padrão”



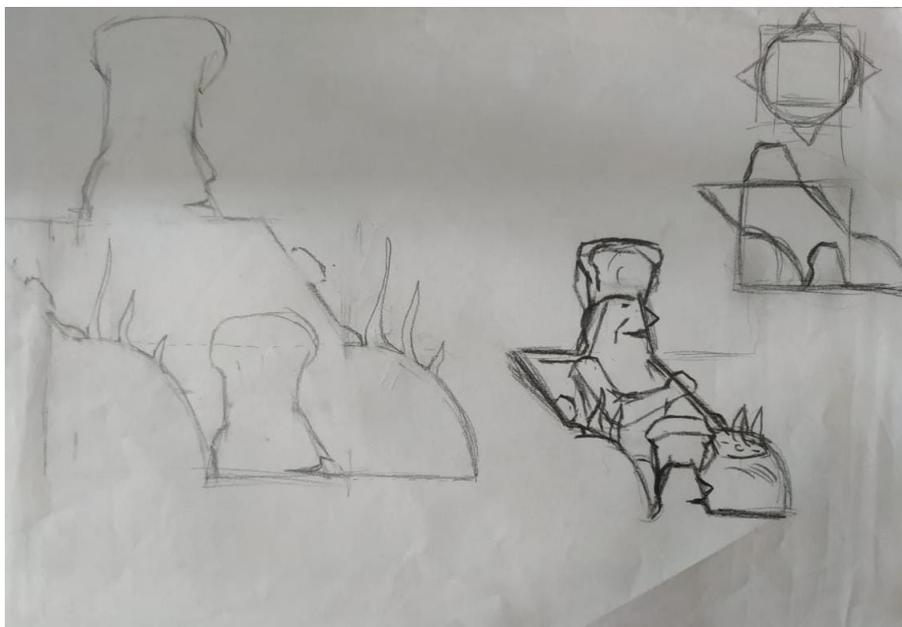
Fonte: Elaborado pela autora.

Após fazer todos esses procedimentos a figura se encontra finalizada, porém podem ser adicionados detalhes, conforme podemos notar na maioria das obras do Escher. Essa foi uma das tentativas iniciais e com a frequência da utilização foram obtidos melhores resultados mais interessantes e agradáveis visualmente.

Além da ferramenta *illustrator*, podemos aplicar a técnica tesselação utilizando outros programas ou apenas os materiais: lápis, folha e tesoura, pois isso fica a critério do artista e de sua imaginação.

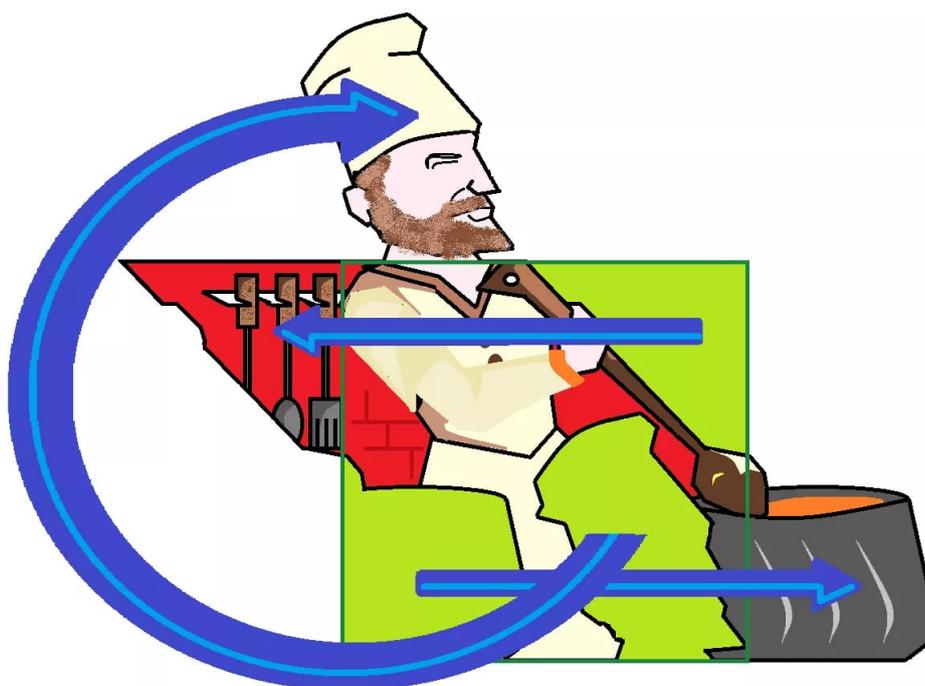
A fim de mostrar uma outra ferramenta abordando a técnica de tesselação mostraremos algumas etapas para a produção de uma obra utilizando como ferramenta o *Paint*.

Figura 4.63: Esboço inicial



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 4.64: Recortes destacando o motivo quadrado



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 4.65: Motivo



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 4.66: Ladrilhamento



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 4.67: Obra final



Fonte: Elaborado pela autora.

Para ver uma animação da realização dessa obra acesse o site <<https://apbme1o13.wixsite.com/animacaotesselação>>.

4.2.3 Obras

Como vimos Escher foi um artista gráfico, na qual se destacou com suas obras fantásticas, incomuns e com várias perspectivas. Escher viveu no anonimato durante muitos anos e passou a ser conhecido em 1954. Além do trabalho como artista gráfico, ele desenvolveu livros ilustrados, tapeçarias, selos postais e murais.

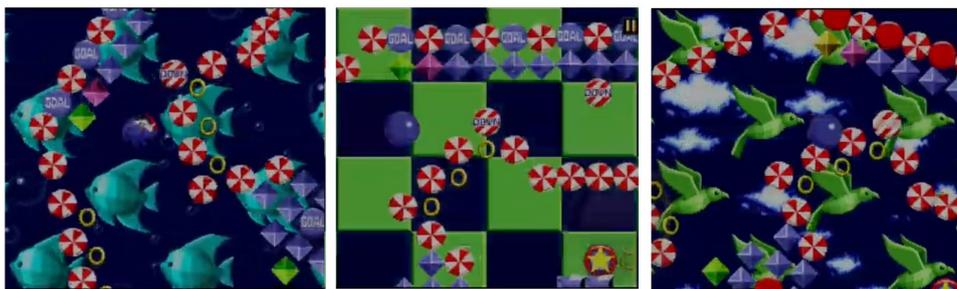
Figura 4.68: Selo postal com a obra de M. C. Escher



Fonte: Imagem retirada da referência [35].

No jogo *Sonic the Hedgehog 1* (Imagem 4.70) o primeiro *Special Stage* contém uma animação em sua fase bônus, do Sega Mega Drive, baseada na obra “Sky and Water” contendo uma animação de pássaros se transformando em peixes.

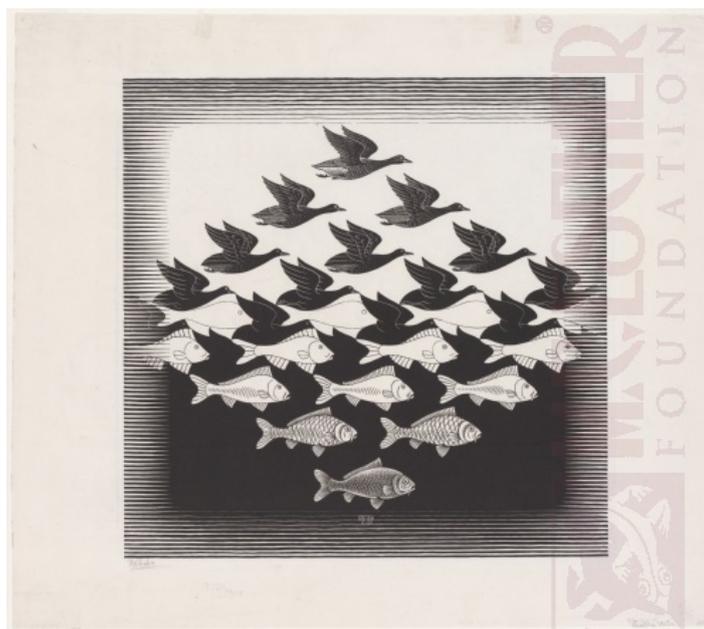
Figura 4.69: Fase bônus - Sonic [22]



Fonte: Elaborado pela autora a partir da referência [22]⁹.

⁹Montagem a partir de imagens capturadas do vídeo “Design your own special stage in Sonic 1 Mobile...” do YouTube.

Figura 4.70: Obra: Sky and Water, 1938 - xilogravura



Fonte: Escher [20].

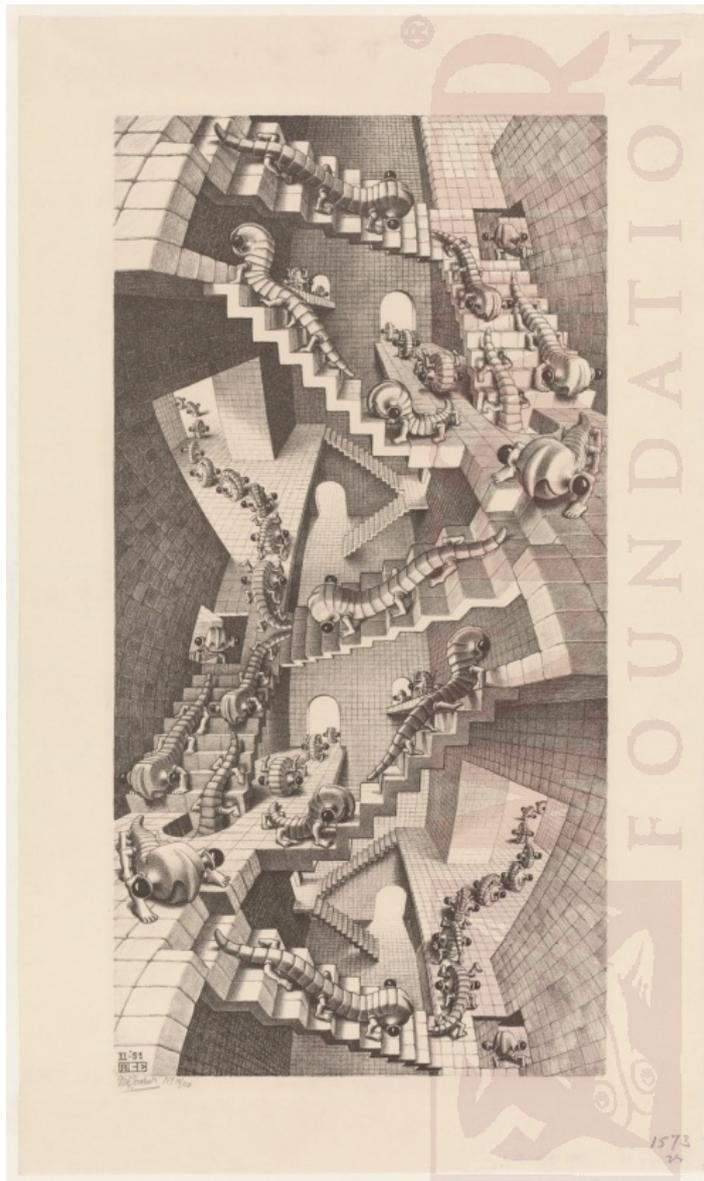
O filme “A origem” lançado em 2010 tomou como referência a obra “House of Stairs” para a capa do filme e utilizou bastante dos jogos ilusórios utilizados por Escher na produção de efeitos especiais.

Figura 4.71: Filme: “A origem”



Fonte: Imagem retirada da referência [24].

Figura 4.72: Obra: House of Stairs



Fonte: Imagem retirada da referência [20].

A obra "Eye, 1946" (Imagem 4.74) de Escher aparece no filme *Donnie Darko*, na parede do quarto do protagonista.

Figura 4.73: Filme: Donnie Darko



Fonte: Imagem retirada do filme Donnie Darko.

Figura 4.74: Obra: Eye, 1946 - mezzotinta



Fonte: Tjabbes, p. 82 (2011) [37].

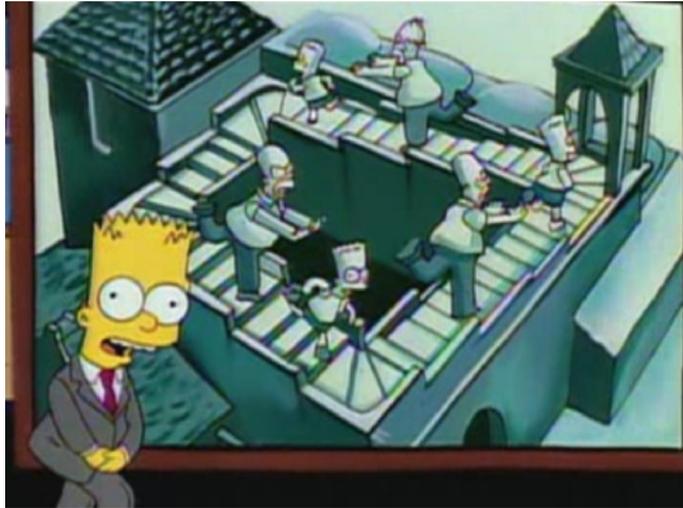
Matt Groening, criador de séries de televisão, como *Os Simpsons*, utilizou uma referência à Escher em suas série. Veja nas imagens a seguir:

Figura 4.75: A fila sem fim (Os Simpsons, T2:E18).



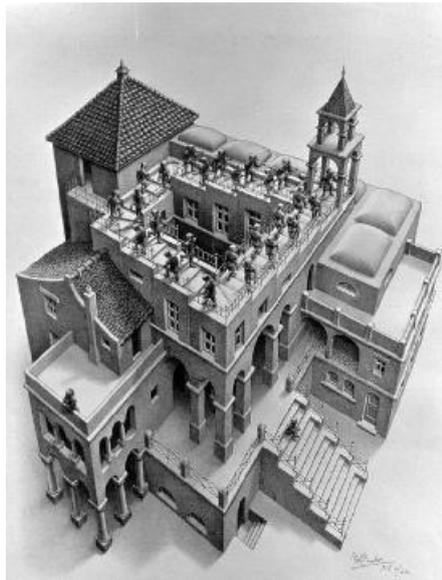
Fonte: Imagem retirada da referência [8].

Figura 4.76: Corra corra te peguei (Os Simpsons, T5:E5).



Fonte: Imagem retirada da referência [8].

Figura 4.77: Obra: Subindo e descendo, 1960



Fonte: Tjabbes, p. 31 (2011) [37].

Figura 4.78: Acima ou abaixo? (Os Simpsons, T6:E12).



Fonte: Imagem retirada da referência [8].

Figura 4.79: Obra: Relatividade, 1953.



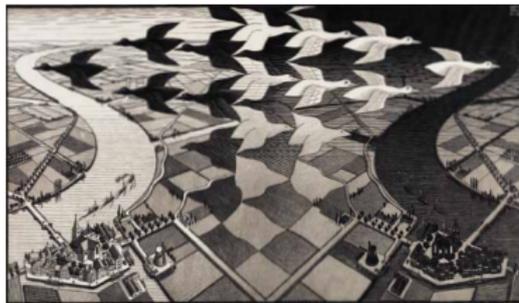
Fonte: Tjabbes, p. 31 (2011) [37].

Figura 4.80: Dia e noite(Os Simpsons, T21:E12).



Fonte: Imagem retirada da referência [8].

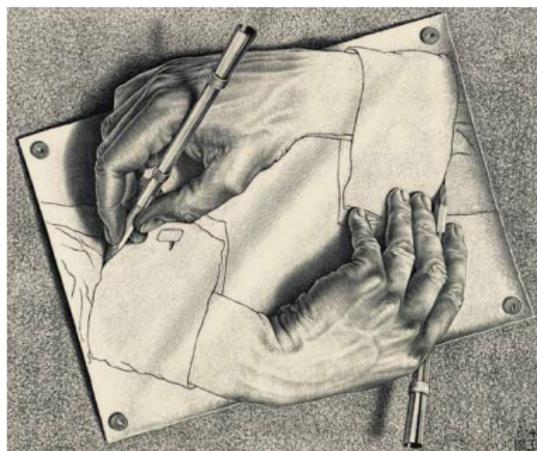
Figura 4.81: Obra: Dia e noite, 1938.



Fonte: Tjabbes, p. 99 (2011) [37].

Além dessa animação, as obras de Escher também aparecem em um episódio de Os Padrinhos Mágicos o qual mostra em seu título um design similar à obra *Drawing Hands* (Imagem 4.82), em um episódio de Family Guy (Imagem 4.83) e Futurama (Imagem 4.84).

Figura 4.82: Obra: Drawing hands, 1948.



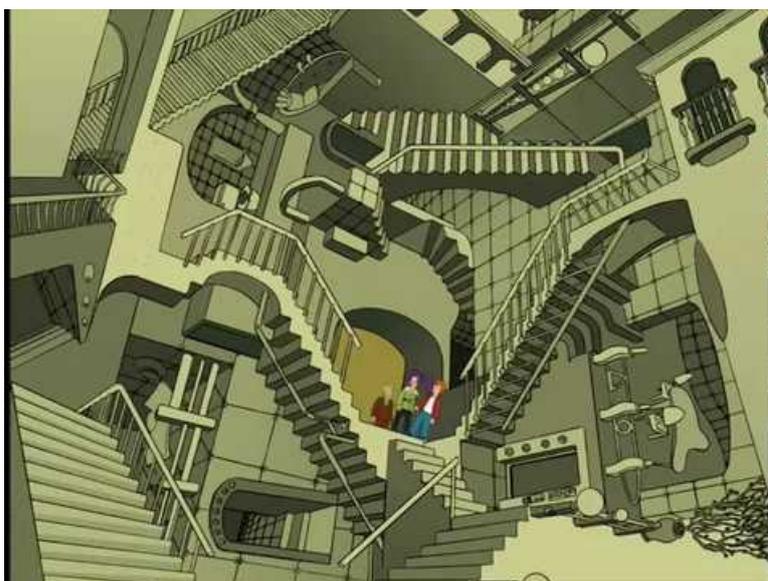
Fonte: Tjabbes, p. 73 (2011) [37].

Figura 4.83: Family Guy.



Fonte: Imagem retirada da referência [12].

Figura 4.84: Futurama.



Fonte: Imagem retirada da referência [14].

Finalizando as curiosidades encontradas sobre as obras do artista holandês, temos o videoclipe *Around the World*, do grupo Daft Punk, o qual foi inspirado na obra “Encounter”. Veja o clip no link ¹⁰

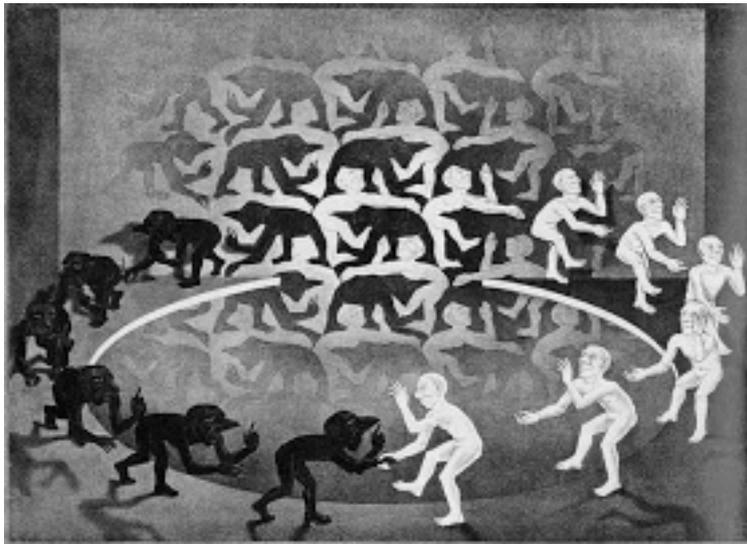
¹⁰Disponível em: <<https://g.co/kgs/foZXRK>>. Acesso em: 26 out. 2020.

Figura 4.85: Around the world



Fonte: Videoclipe Daft Punk, Around the world.

Figura 4.86: Obra: Encounter



Fonte: Escher [7].

Além disso, as obras de Maurits Cornelis Escher esteve ao meu redor como: Na sala e na camisa do PET ¹¹, o qual foi de grande surpresa e alegria.

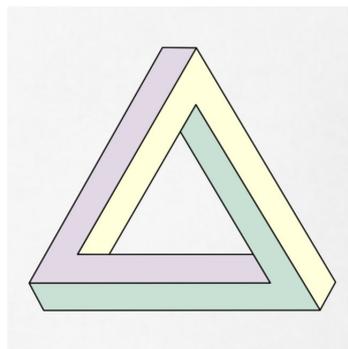
Figura 4.87: Quadro da sala do PET: Fish, 1941 - xilogravura



Fonte: Escher, 1941.

O logo (Imagem 4.89) a seguir foi elaborado pelo petiano Gilberto Murilo Lopes da Silva no ano de 2019 em comemoração dos 25 anos do PET - Matemática/UNESP-RC, tendo como base o *Triângulo de Penrose*. Porém, ele utilizou três triângulos de Penrose entrelaçados para representar a tríade do programa, ou seja, ensino, pesquisa e extensão.

Figura 4.88: Triângulo de Penrose



Fonte: Imagem retirada da referência [29].

¹¹Programa de educação Tutorial

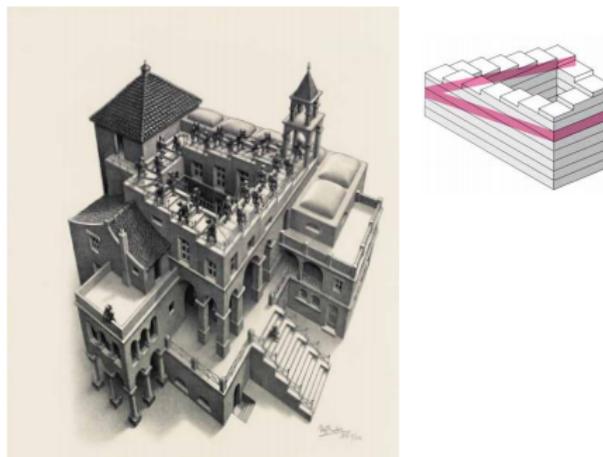
Figura 4.89: Camisa de 25 anos do PET Matemática (2019)



Fonte: Gilberto Murilo.

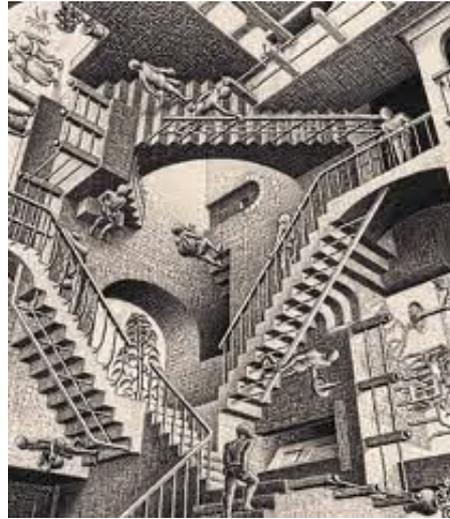
Escher também utilizou o Triângulo de Penrose nas sua obras, a fim de transmitir uma ilusão de ótica, veja a seguir:

Figura 4.90: Obra: Ascending and descending, 1960 - lithograph



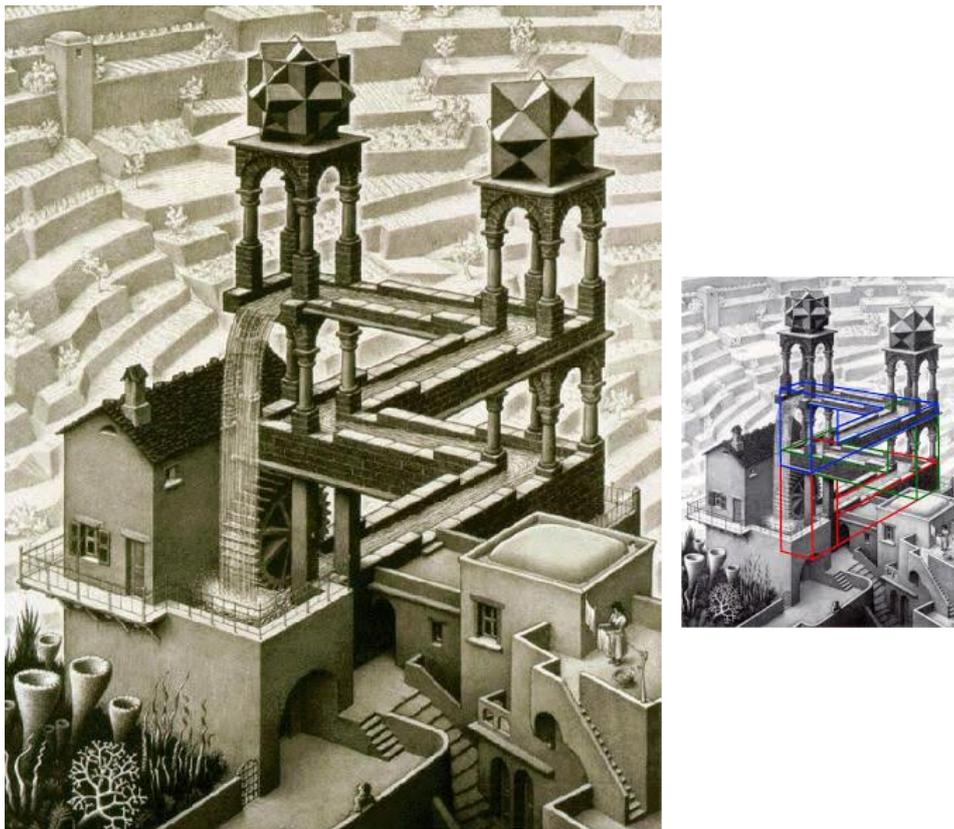
Fonte: Tjabbes, p. 31 (2011)[37].

Figura 4.91: Obra: Relativity, 1953 - lithograph



Fonte: Tjabbes, p. 31 (2011)[37].

Figura 4.92: Obra: Waterfall, 1961 - lithograph



Fonte: Montagem elaborada pela autora a partir da p. 27 da referência [37].

Além disso, o logo do Google Drive nos faz lembrar o *Triângulo de Penrose*, veja a seguir:

Figura 4.93: Logo: Google Drive



Fonte: Imagem retirada da referência [19].

Como podemos ver a Matemática e a Arte estão ao nosso redor, nos proporcionando um mundo mais belo.

5 Conclusão

Neste trabalho proporcionamos um contexto mais lúdico para o estudo de Ações de Grupo sobre Conjuntos e o Teorema de Burnside através de uma abordagem mais geométrica. Com isso, o objetivo do trabalho foi mostrar aplicações para o Teorema de Burnside e para isso apresentamos definições e exemplos de grupos, subgrupos, homomorfismo de grupos, isomorfismo de grupo, entre outros. Pois, abrange os conceitos de uma forma clara.

Mostramos que o Teorema de Burnside é de grande utilidade para encontrar a quantidade de órbitas, porém se tiver a intenção de exibi-las é necessário realizar o processo de forma manual.

Além disso, exploramos as obras do artista gráfico Maurits Cornelis Escher, que nos proporciona uma aplicação prática e atual do Teorema de Burnside, que por meio da análise dos padrões encontrados em suas obras nos proporciona encontrar o número de órbitas distintas a menos de simetrias. Através do estudo de órbitas nas obras de Escher podemos contemplar um misto de beleza, pois ao aplicar simetrias nas mesmas geram obras que aos nossos olhos parecem distintas.

Este estudo teve uma contribuição significativa para minha formação e me propiciou uma visão mais ampla sobre a inter e multidisciplinaridade que este promove entre as áreas, Álgebra e Geometria, além de fazer uma ponte envolvendo duas áreas maravilhosas Matemática e Artes o qual foi uma descoberta fantástica.

A priori, Escher seria utilizado apenas como uma simples aplicação, mas seu mundo cheio de arte e padrões fizeram nossos olhos brilharem o qual mostrou um mundo encantado onde a Matemática e a Artes se conversam, além do mais a biografia de William Burnside e Maurits Cornelis Escher nos mostraram que independente da trajetória que escolhermos seguir vamos encontrar obstáculos, que apesar das dificuldades e das coisas não acontecerem no tempo em que desejamos elas podem evoluir se tornando mais do que almejamos um dia. Dentro dessa perspectiva, uma analogia que gosto de fazer é a trajetória da nossa vida com as fases da borboleta, pois cada fase de nossa vida tem um tempo determinado e cada transformação é necessária para ser transformada de lagarta a uma linda borboleta.

Logo, Escher e seus padrões me surpreenderam, pois como vimos no Capítulo “Curiosidades sobre Escher” (4.2) na Subseção “Obras” (4.2.3) as mesmas estão envoltas ao meu e ao redor da maioria o qual foi de uma grande felicidade para o encaminhar dessa dissertação e o qual me despertou uma paixão imensa pelo estudo da álgebra com grupos de simetrias, pois proporciona uma visão para um campo tão abstrato da Matemática.

Referências

- [1] **Alhambra**. 1 fot., color. In Britannica Escola. Web, 2020. Imagem. Disponível em: <<https://escola.britannica.com.br/artigo/Alhambra/606897/recursos/226662>>. Acesso em: 26 out. 2020.
- [2] ARMSTRONG, Mark A., **Groups and symmetry**. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [3] BOLDRINI, J. L. **Álgebra Linear**. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1980.
- [4] BURNSIDE, William. **The Theory of Groups of Finite Order, 1897**. Imagem. Disponível em:<<https://images.app.goo.gl/HB7WfbpgxdFRgfG6A>>. Acesso: 3 jun. 2020.
- [5] DOMINGUES, Hygino H., e Gelson Iezzi.**Álgebra moderna**. 4.ed. São Paulo: Atual Editora, 2003.
- [6] ERNST, Bruno. **The Magic Mirror of M.C. Escher**. Canada: Ballantine Books, 1976.
- [7] ESCHER, Maurits Cornelis. **Encounter**. 1944. Lithograph, 464mm x 342mm. Disponível em: <<http://fsicanova.blogspot.com/2011/04/escher-geometria-imita-arte.html?m=1>>. Acesso em: 26 out. de 2020.
- [8] **Eu sou Escher: Escher e os Simpsons**. [S. l.], 21 abr. 2013. Disponível em: <<https://escherdisenoindustrial.wordpress.com/2013/04/21/escher-y-los-simpsons/>>. Acesso em: 4 nov. 2020.
- [9] ESCHER, Maurits Cornelis. **Lagartos**. Expressão Digital - Fundação Liberto 1942. Imagem, 681 x 724. Disponível em: <http://gaia.liberato.com.br/expressao_digital/?attachment_id=11839>. Acesso em: 25 out. 2020.
- [10] ESCHER, Maurits Cornelis. **Swan**. 1955. Imagem. Disponível em:<<https://visualdiplomacyusa.blogspot.com/2018/07/artist-of-day-july-16-mc-escher-dutch.htmlp>>. Acesso em: 25 out. 2020.
- [11] ESCHER, Maurits Cornelis. **Two Birds**. 1938. Imagem. Disponível em: <<https://www.wikiart.org/en/m-c-escher/two-birds>>. Acesso em: 25 out. 2020.
- [12] **Family Guy - M. C. Escher Floor Plan**. [S. l.: s. n.], 2020. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=YfbvHp12Hmo&app=desktop>>. Acesso em: 3 nov. 2020.

-
- [13] FRALEIGH, John B., **A first course in Abstract Algebra**. 7.ed. New York: Person Education, 2003.
- [14] **Futurama - MC Escher Apartment**. [S. l.: s. n.], 2019. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=VyZf20mK8jo>>. Acesso em: 3 nov. 2020.
- [15] GARCIA, Arnaldo, and Yves Lequain. **Elementos de álgebra**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2005.
- [16] GONÇALVES, Adilson. **Introdução à álgebra**. IMPA, 2011.
- [17] **Interior do Palácio de Alhambra**. Imagem. Disponível em: <<https://granadaapie.com/miradores-de-la-alhambra-el-mirador-de-lindaraja/>>. Acesso em: 6 nov. 2020.
- [18] JOSEPH A. Gallia. **Contemporary Abstract Algebra**, Brooks/Cole, Boston, 8th edition, 2012.
- [19] **Logo: Google Drive**. Imagem. Disponível em: <<https://images.app.goo.gl/RQQNLZ98ykKdC5jB7>>. Acesso em: 7 nov. 2020.
- [20] **M.C. Escher Collection**. [S. l.], 2020. Disponível em: <<https://mcescher.com/>>. Acesso em: 13 nov. 2020.
- [21] MARTIN, George E. **Transformation Geometry**. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [22] MASTER, Retro. **Design your own special stage in Sonic 1 Mobile...** 28 ago. 2019. Vídeo. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=Rj0whaF1Dz8>>. Acesso em: 26 out. 2020.
- [23] MATTOS, Walter. **Desvendando a técnica de M.C. Escher**. [S. l.], 14 dez. 2015. Disponível em: <<https://waltermattos.com/tutoriais/desvendando-a-tecnica-de-escher/>>. Acesso em: 2 ago. 2020.
- [24] NOLAN, Christopher Edward. **A origem**. 2010. Filme. Disponível em: <<https://images.app.goo.gl/2bsF2q9EYLzgx3E36>>. Acesso em: 26 out. 2020.
- [25] O'CONNOR, JJ; ROBERTSON, EF. **William Burnside**. [S. l.], 2005. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Burnside/>>. Acesso em: 2 jul. 2020.
- [26] **Oxford And Cambridge University Boat Race Finish**. 1892. Imagem. Disponível em:<<https://images.app.goo.gl/bfd5TZsAAhxbEkKr7>>. Acesso: 3 jun. 2020.
- [27] **Pembroke College - Cambridge**. Imagem. Disponível em:<<https://images.app.goo.gl/f58ha93eJbKkuAdSA>>. Acesso: 2 jun. 2020.
- [28] RAYKER, K. **Favo de mel**. 6 jun. 2014. Imagem, 2292 x 1788 pixels. Disponível em: <http://www.crn1.org.br/972191_16739182/>. Acesso em: 26 out. 2020.

- [29] REUTERSVÄRD, Oscar. **Triângulo de Penrose**. 1934. Imagem. Disponível em: <<https://images.app.goo.gl/6rnX9WShVPhSTai19>>. Acesso em: 27 out. 2020.
- [30] SADA, Manuel. **Teselaciones de M.C. Escher: División regular del plano nº 25**. 27 nov. 2016. GeoGebra. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/vsyrtwmd>>. Acesso em: 25 out. 2020.
- [31] SANTOS, Wellington Ribeiro dos. **Um estudo de simetrias de sólidos regulares**. 2012. 75 f. Dissertação - (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2012. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/94365>>.
- [32] SCHATTSCHEIDER, Doris. **Escher's Combinatorial Patterns**. The Electronic Journal of Combinatorics , [s. l.], v. 04, n. R17, 1997. DOI <https://doi.org/10.37236/1332>. Disponível em: <<https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v4i2r17>>. Acesso em: 5 jul. 2020.
- [33] SCHATTSCHEIDER, Doris; HOFSTADTER, Douglas R. M. **C. Escher: Visions of Symmetry**. United Kingdom: Thames & Hudson Ltd, 2004.
- [34] SIEBRECHT, Justus et al. **On Using Tessellation Properties for the Development of Classifying Criteria for Foldable Mechanisms**. Oxford, Reino Unido, 2018. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/328137631_On_Using_Tessellation_Properties_for_the_Development_of_Classifying_Criteria_for_Foldable_Mechanisms>. Acesso em: 23 out. 2020.
- [35] SOARES. **Ilusão de Ótica em Selos Postais**. 21 dez. 2019. Imagem. Disponível em: <<https://www.google.com/amp/s/www.filatelista-tematico-blog.net/ilusao-de-otica-em-selos-postais/%3famp>>. Acesso em: 13 nov. 2020.
- [36] **St. John's College - Cambridge**. Imagem. Disponível em: <<https://www.joh.cam.ac.uk/>>. Acesso: 2 jun. 2020.
- [37] TJABBES, Pieter. **O Mundo Mágico de Escher**. [S. l.], 2011. Disponível em: <<https://www.bb.com.br/docs/pub/inst/img/EscherCatalogo.pdf>>. Acesso em: 26 out. 2020.
- [38] **William Burnside**. 23 nov. 2020. Image/jpeg, 277 x 326 píxeles. Disponível em: <https://www.ecured.cu/William_Burnside>. Acesso em: 2 jun. 2020.
- [39] **William Burnside**. Imagem. Disponível em:<<https://images.app.goo.gl/p2pB2UicfiNgBSqh6>>. Acesso em: 2 jun. 2020.