

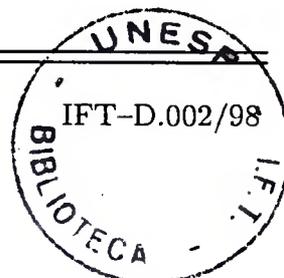




Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

140

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



OK

Uma Introdução à Dualidade e a Teoria
de Seiberg e Witten

Érica Emília Leite

Orientador

Prof. Dr. Luiz Agostinho Ferreira



Março 1998

Aos que crêm no (super) homem

Agradecimentos

Agradeço à

Agostinho. meu orientador. sempre cordial, paciente e disposto. com suas explicações enriquecedoras. cujo entusiasmo contagiante me incitou a buscar ânimo em todas horas.

Micefufe. meu Porquinho-da-índia mais do que querido...

Lina. esta coisinha que ilumina os céus ao redor...

Pati. Amiga querida com quem sempre aprendo a Ser.

Marcelo, vigilante do eu e suas máscaras.

Índia. que ensina o entusiasmo pelas coisinhas simples e boas.

Alex. Er, Kê. Gi, Bi. Marocas, Sil. amigos sempre presentes nas boas recordações, que me ajudaram a chegar aqui.

Lupi. Ana Lúcia. Vanessa, Cris, Ricardo e Gabi, pela companhia agradável e generosa.

Chico. Edsom, Marcelo e todos que me agüentaram no dia a dia nem tão fácil assim.

Ao CNPq, pelo apoio recebido, e ao IFT e todos que bem me receberam aqui.

Mens aeterna est quatenus res sub specia aeternitatis

Spinoza

(A mente é eterna na medida em que concebe as coisas do ponto de vista da eternidade.)

Resumo

Este trabalho tem por intuito estudar alguns aspectos não perturbativos em teorias quânticas de campos. presentes em um modelo específico cujo entendimento foi tomado como programa do estudo.

Seiberg e Witten encontraram a forma exata da ação efetiva à baixas energias para a teoria de Yang-Mills supersimétrica $N = 2$. Para tal, fizeram uso de propriedades mais gerais do que as contidas somente na teoria microscópica, entre elas uma simetria de dualidade.

Elucidar os procedimentos contidos nesta dedução é o que expomos neste trabalho. Para tal, apresentamos o panorama de idéias desenvolvidas no estudo de solitons que fornecem algumas propriedades utilizadas para encontrar a ação efetiva de Seiberg e Witten.

Abstract

In this work we analyze some non-perturbative aspects in quantum field theory, which are present in the so-called Seiberg-Witten model.

That model presents an exact expression for the effective action in the $N = 2$ supersymmetric Yang-Mills theory. The approach uses some properties which are more general than those contained in the microscopic theory, specially the duality symmetry.

The main issue of this work is to clarify the steps and details of this formulation. An important insight here comes from soliton theory, playing a fundamental role in the deduction of the Seiberg-Witten action.

Sumário

1	Introdução	ii
1	Solitons em Teorias de Yang Mills	2
2	Dualidade	3
2.1	Eletromagnetismo	7
2.1.1	O princípio de gauge	7
2.1.2	As Equações de Maxwell	8
2.1.3	A dualidade entre eletricidade e magnetismo	9
2.2	O monopolo de Dirac	10
2.2.1	Condição de quantização de Dirac-Schinger-Zwanziger-Saha . . .	13
2.3	O monopolo de Dirac à la Wu-Yang	14
3	Aspectos não-perturbativos em teorias de campos	17
3.1	Teorias de gauge não-Abelianas: Yang-Mills	17
3.2	Soluções clássicas	20
3.2.1	Sólitons	20
3.2.2	Instantons	27
3.3	Nosso paradigma: $G = SU(2)$	28
3.4	A topologia das soluções de $SU(2)$	31
3.5	O monopolo de 't Hooft Polyakov	33

4	A conjectura de Montonen e Olive	37
4.1	A solução de Bogomolny-Prasad-Sommerfeld	37
4.2	Coordenadas coletivas: espaço de moduli do monopolo .	40
4.3	O efeito Witten	45
4.4	A conjectura de Montonen e Olive	47
4.5	Dualidade Eletromagnética e o Grupo Modular	51

II A Teoria Quântica 56

5	Supersimetria	57
5.1	Monopolos e férmions	57
5.2	Teorias Supersimétricas	60
5.2.1	Teorias Supersimétricas $N=1$	60
5.2.2	Teorias Supersimétricas $N=2$	62
5.3	Geometria de Kähler Especial	64
5.4	O limite de Bogomol'nyi Revisitado	66
5.5	Simetria R	68
5.6	Fracionamento de Carga e Dualidade	69
5.7	A conjectura de Montonen e Olive em $N=4$	70
5.7.1	Mecânica Quântica Supersimétrica em \mathcal{M}_k	72
6	A Ação Efetiva	76
6.1	O Espaço de Moduli	77
6.1.1	O Moduli Quântico	79
6.2	Ação Efetiva	80
6.3	Coordenadas Duais	81
6.4	Contribuição Perturbativa	85
6.5	Contribuição Não Perturbativa	86
6.6	Singularidades no Espaço de Moduli	87
6.6.1	As Monodromias do Espaço de Moduli	89

7	A Solução Exata	94
7.1	Singularidades e Fases	94
7.2	O Ansatz de Seiberg e Witten	96
7.3	As Equações de Picard-Fuchs	98
7.3.1	Unicidade da Solução	102
7.4	A Abordagem Geométrica	103
7.5	Condensação de Monopolos e Confinamento	107

Capítulo 1

Introdução

As teorias quânticas de campos (TQC) estendem suas aplicações sobre uma vasta gama de fenômenos, desde a física estatística à teoria das interações fundamentais, passando pela física dos sólidos e a hidrodinâmica.

No estudo das interações fundamentais, é onipresente. Historicamente, isto deve-se ao fato desta teoria constituir o quadro conceitual mais simples no qual podemos construir teorias realistas compatíveis com os princípios da mecânica quântica e relatividade.

Uma questão que desempenha um importante papel no entendimento das interações fundamentais diz respeito à ordem de grandeza das energias e distâncias relevantes aos fenômenos em estudo. Tomemos um exemplo simples, a fim de compreendermos melhor este aspecto. Comparemos o domínio de validade de um dado modelo em teoria de campos ($\lambda\phi^4$ por exemplo), por um lado na teoria de supercondutividade, e por outro na teoria de partículas elementares. No caso da supercondutividade, uma descrição em termos de uma teoria de campos efetiva do tipo Landau-Ginzburg permite uma compreensão satisfatória do fenômeno. Aqui, a pesquisa de uma teoria de campos fundamental é demarcada muito naturalmente por uma escala microscópica característica, sendo neste caso a ordem da escala atômica ($\sim 10^{-10}m$), onde as medidas experimentais são possíveis. A situação muda no caso das partículas elementares. Neste domínio, as experiências mais ambiciosas permitem sondar a matéria à escalas muito menores (da ordem de $10^{-18}m$). É somente a tais escalas que uma teoria microscópica (no sentido da mecânica estatística) é obrigatória, e seus efeitos diretos serão provavelmente

negligíveis à escalas muito menores. como seria a escala da teoria de unificação. Porém não é o caso de dizer que o estudo de uma tal teoria microscópica seria de todo inútil. As lagrangianas efetivas das teorias de campos contém um número de parâmetros que só um modelo microscópico pode prever: por exemplo, o comprimento característico de penetração do campo magnético nos supercondutores (efeito Meissner), ou a massa dos bosons de gauge presentes no Modelo Padrão (mecanismo de Higgs).

Portanto a ordem de grandeza desempenha um papel profundo e sutil sobre o tipo de teoria quântica de campos que escolhemos para descrever o problema. Devemos privilegiar de certo modo aquelas características da teoria numa escala mais fundamental que permanecem influentes na escala em que estamos abordando o problema. Isto é possível através do estudo do grupo de renormalização.

Entre as teorias quânticas de campos que apresentam as propriedades de renormalizabilidade em quatro dimensões as mais importantes são as chamadas teorias de gauge, que incluem o eletromagnetismo e também as teorias não abelianas ou teorias de Yang-Mills.

Apesar de introduzidas na década de 50, as teorias de gauge não abelianas começaram a dominar a física de altas energias a partir do início da década de 70. A razão foi a introdução do mecanismo de Higgs, que fornece massa aos bosons vetoriais através da quebra espontânea da simetria de gauge, sem o surgimento dos chamados bosons de Goldstone. Além disso, foi demonstrado por 't Hooft [tH71] que tais teorias são renormalizáveis. Estes avanços abriram o caminho para o desenvolvimento de teorias realistas das interações fundamentais.

As similaridades entre as interações eletromagnéticas e fracas incentivaram a tentativa de combinar as duas teorias em uma teoria de gauge maior. Glashow, Salam e Weinberg [GG72, Wei67, Sal68] construíram um modelo baseado no grupo de gauge $SU(2) \times U(1)_Y$, onde a simetria de gauge era espontaneamente quebrada para $U(1)_{e.m.}$ através de um dubleto de bosons de Higgs. O modelo introduzia as correntes neutras na interação fraca, e obteve um enorme sucesso depois da confirmação experimental da existência de tais correntes. Atualmente este modelo está bastante estabelecido e em completo acordo com os dados experimentais existentes.

Um modelo de teorias de gauge não abelianas para descrição das interações fortes ganhou sua versão na década de 70, na chamada cromodinâmica quântica - QCD. Esta teoria envolve

quarks e os campos de gauge (gluons) de um grupo $SU(3)$ (Não há quebra de simetria via mecanismo de Higgs) e são os constituintes básicos dos hadrons. Os gluons (sem massa) e os quarks carregados nunca foram observados como partículas livres e portanto não deve haver permissão, por tal teoria, para que existam fora dos hadrons. O mecanismo desconhecido que mantém os quarks e gluons dentro dos hadrons é chamado confinamento.

O sucesso das teorias de Yang-Mills deveu-se em parte, aos resultados obtidos na descrição de regiões onde a constante de acoplamento é pequena, permitindo assim a utilização de métodos perturbativos. Porém há toda uma classe de fenômenos que resistem a investigações pelos métodos perturbativos tradicionais, estando essencialmente relacionados à setores da teoria onde a constante de acoplamento é grande. Fenômenos como a formação de estados ligados e confinamento, como acontece com os hadrons, são inerentes de uma descrição na região de acoplamento forte, e correspondem à física de baixas energias.

Estas importantes questões em aberto indicam a necessidade do desenvolvimento de outras técnicas (não perturbativas) para o estudo de tais fenômenos.

Na teoria de perturbação em teorias de campos, temos sempre como ponto de partida um modelo exatamente solúvel. Na expansão perturbativa usual através das técnicas dos gráficos de Feynman, tal modelo é a própria teoria livre. O espectro em consideração é portanto o espaço de Fock dos osciladores associados aos campos presentes na lagrangiana. Os estados assintóticos de n partículas correspondem na verdade às soluções exatas de ondas planas da teoria livre. Porém o espaço de Hilbert da teoria com interação abrange um espaço maior, com setores não alcançados via perturbação, onde estariam presentes estados que não podem ser obtidos a partir vácuo pela aplicação de um número finito de operadores de criação.

A busca de maiores informações sobre aspectos não perturbativos ampliou o estudo das soluções clássicas das teorias de gauge. Nesta abordagem aparece um objeto singular, chamado soliton, que em muitos aspectos comporta-se como uma partícula elementar. Estas soluções clássicas das equações de campo são passíveis de existir quando a teoria exhibe algum tipo de não linearidade e um certo grau de simetria. Sua energia concentra-se em uma pequena região espacial, e não há dissipação conforme o sistema evolui no tempo. A estabilidade dos solitons, em muitos casos, deve-se à conservação de uma carga topológica, que surge como consequência das condições de contorno sobre os campos. A questão que

se coloca é se existiriam, no espectro quântico da teoria, partículas correspondendo a tais soluções solitons.

't Hooft [tH74] e Polyakov [Pol74] obtiveram uma solução de soliton em uma teoria não abeliana, onde a carga topológica é identificada à carga magnética, na solução conhecida como monopolo de 't Hooft-Polyakov. Esta descoberta teve consequências para o problema do confinamento, pois o próprio 't Hooft chamou a atenção para o fato de onde a carga topológica é identificada à carga magnética, na solução conhecida como monopolo de 't Hooft-Polyakov. Esta descoberta teve consequências para o problema do confinamento, pois o próprio 't Hooft chamou a atenção para o fato de que se poderia obter um efeito Meissner dual, confinando cargas elétricas, a partir da condensação dos monopolos magnéticos.

Isto incentiva o estudo destas partículas na teoria quântica. Porém como fazê-lo, e como seria a sua dinâmica? Muitas das propriedades dos monopolos, como suas massas e constantes de acoplamento, dependem do inverso da constante de acoplamento de gauge da teoria, e portanto muitas vezes não podemos aplicar métodos perturbativos de quantização.

Um resultado surpreendente foi obtido por Skyrme [Sky61], encontrando uma equivalência entre estes dois tipos de partículas (excitações fundamentais dos campos e solitons). Ele e Coleman [Col75] mostraram que o soliton da teoria de sine-Gordon, descrevendo um campo escalar, pode ser considerado equivalente às flutuações quânticas de uma outra teoria, o modelo de Thirring massivo. De fato pode-se mostrar que as funções de Green das duas teorias são equivalentes para certos valores das constantes de acoplamento. Neste contexto, a quantização dos solitons forneceria dados sobre estados de partículas advindos de uma combinação altamente não linear dos campos, como mostrou Mandelstam [Man75]. Deste modo, introduzimos estados não perturbativos no espaço de Hilbert!

Mas uma outra notável relação entre solitons e propriedades da teoria quântica sugiriam do desenvolvimento de um tópico que até aqui pareceria estranho à discussão: a dualidade eletomagnética, reportando-nos às equações de Maxwell. Dirac [Dir31] introduz no eletromagnetismo o monopolo magnético, a fim de restaurar, na presença da matéria, as simetrias de trocas dos campos elétrico e magnético, presente nas equações de Maxwell no vácuo: bastaria então trocar a carga elétrica pelo monopolo magnético. Para a coerência da formulação na teoria quântica, é forçosa a obediência, por parte das cargas elétricas e magnéticas, de

uma relação de quantização. Pela primeira vez, obtinha-se a quantização da carga elétrica a partir de primeiros princípios.

A teoria dos monopolos magnéticos proposta e desenvolvida por Dirac nas décadas de 30 e 40 não recebeu muitos impulsos até o aparecimento do monopolo de 't Hooft-Polyakov na década de 70. A teoria onde este monopolo aparece tem quebra espontânea da simetria de gauge através do campo de Higgs. Na situação de baixas energias, onde funciona o mecanismo de Higgs, a teoria reproduz o eletromagnetismo usual, existindo porém soluções com cargas magnéticas. A carga magnética deste monopolo seria quantizada já na teoria clássica, devido às estruturas topológicas presentes na teoria. Além disto, uma classe particular de monopolos, denominados estados BPS e que pode ocorrer quando o campo de Higgs está na representação adjunta do grupo de gauge, possibilitariam a realização de uma simetria de dualidade dentro desta teoria. Os estados BPS possuem o menor valor de massa permitido pela teoria (dado pelo limite de Bogomol'nyi), e suas soluções clássicas podem ser obtidas exatamente. A massa dos estados BPS está expressa por uma relação curiosamente também obedecida pelos bosons de gauge e campos de Higgs da teoria. Esta fórmula universal entrelaça a massa às cargas das partículas:

$$M = v\sqrt{Q_e^2 + Q_m^2},$$

onde Q_e e Q_m são respectivamente as cargas elétricas e magnéticas do estado em questão, e v é o valor esperado no vácuo do campo de Higgs. Repare a igualdade de status atribuído às cargas. As propriedades desta teoria, e notadamente a simetria da fórmula universal de massa, levaram Montonen e Olive [MO77] a propôr uma espécie de modificação da dualidade eletromagnética, trocando os papéis das partículas fundamentais presentes na lagrangiana (cargas elétricas) com os solitons (cargas magnéticas)! Na conjectura de Montonen e Olive, os monopolos magnéticos seriam as partículas de gauge de uma teoria dual àquela onde aparecem os solitons; do mesmo modo, os bosons de gauge originais seriam mapeados em solitons da teoria dual. A constante de acoplamento da teoria dual é proporcional ao inverso da constante de acoplamento de gauge da teoria de partida.

Porém, para estabelecer a conjectura de Montonen e Olive a nível quântico, os monopolos devem comportar-se do mesmo modo que os bosons de gauge perante as transformações de Lorentz; ou seja, os monopolos devem ter spin 1. E além disso, para garantir a permanência

Esta fórmula de massa é simétrica sob a transformação $n_e \leftrightarrow n_m, \tau \leftrightarrow 1/\tau, v \leftrightarrow v/\tau$. A partir desta observação, Montonen e Olive [MO77] conjecturaram que esta seria uma simetria exata de uma teoria quântica apropriada. De acordo com esta conjectura, o limite de acoplamento forte da teoria é equivalente ao limite de acoplamento fraco, com as partículas ordinárias trocadas por solitons. A teoria $N = 2$ parece não apresentar a dualidade de Montonen e Olive, pois os eletrons e monopolos transformam-se sob representações distintas do grupo de Lorentz; porém uma versão modificada da conjectura realiza-se em $N = 2$. A dualidade é interpretada em relação ao comportamento da teoria como função do valor esperado no vácuo do campo de Higgs, v .

Agora comentamos brevemente algumas características da teoria de gauge supersimétrica $N = 2$. O potencial clássico da teoria de gauge $N = 2$ pura é

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \text{Tr} [\phi, \phi^\dagger]^2.$$

Para satisfazer a condição de vácuo, basta que ϕ e ϕ^\dagger comutem. A teoria clássica tem portanto uma família de estados de vácuo, parametrizados por $u = \frac{1}{2} a^2 = \text{Tr} \phi^2$. Estes estados formam uma variedade contínua de vácuos inequivalentes, o espaço de moduli clássico $\mathcal{M}(\mathcal{V})$. Correções quânticas não afetam esta degenerescência, de modo que a teoria quântica possui igualmente uma variedade de vácuos degenerados, o espaço de moduli quântico $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$. Sobre este espaço é construída a ação efetiva a baixas energias para os graus de liberdade não massivos da teoria. A métrica neste espaço de moduli quântico é uma métrica de Kähler, escrita localmente em termos de uma função holomórfica. Ela introduz uma simetria $SL(2, \mathbb{Z})$ neste espaço, da qual o grupo de simetrias exatas da teoria - o grupo de dualidade - aparece como subgrupo. Este, realizar-se-á como uma mudança das coordenadas locais que descrevem o espaço de moduli.

A estrutura local deste espaço é única, a menos de transformações do grupo de dualidade. Fisicamente estas transformações correspondem às transformações no conjunto de campos não massivos que descreve a teoria a baixas energias, de modo que a lagrangiana efetiva a baixas energias é mapeada em outra lagrangiana escrita em termos de campos duais.

A ação efetiva para os campos não massivos no espaço de moduli a baixas energia tem uma forma determinada pela supersimetria $N = 2$, que pode ser expressa em termos das

variáveis do superespaço $N = 1$ como

$$\frac{1}{4\pi} \text{Im} \left[\int d^4\theta \frac{\partial \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi} \bar{\Phi} + \int d^2\theta \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi^2} W^\alpha W_\alpha \right]$$

sendo Φ o multipleteo quirral $N = 1$ do multipleteo vetorial $N = 2$ Ψ cuja componente escalar é a . A teoria quântica tem um **espaço de moduli** não trivial, que de fato é uma variedade de Kähler com uma dimensão complexa. O potencial de Kähler pode ser escrito em termos da função \mathcal{F} como

$$K = \text{Im} \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi} \bar{\Phi} \right).$$

A métrica é então concretamente $(ds)^2 = \text{Im} \frac{\partial^2 \mathcal{F}(a)}{\partial a^2} da d\bar{a}$.

Os valores à baixas energias da constante de acoplamento de gauge podem ser lidos da lagrangiana. Denotando a constante de acoplamento efetiva no vácuo parametrizado por a de $\tau(a)$, então

$$\tau(a) = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a^2}.$$

Localmente, devido à supersimetria $N = 2$, a métrica no **espaço de moduli** tem a forma

$$(ds)^2 = \text{Im} \tau(a) da d\bar{a}.$$

O comportamento assintótico da função holomórfica $\tau(a)$ mostra que ela é uma função multivalente, cuja parte imaginária é univalente e positiva. Entretanto, caso $\text{Im} \tau(a)$ seja definida globalmente, não há como ser positiva definida, pois a função harmônica $\text{Im} \tau$ não pode ter um mínimo. Isto indica que a métrica deve valer apenas localmente.

Porém é possível mudar a variável a para algum outro parâmetro local, de modo a deixar a forma da métrica invariante, e assim estendê-la sobre todo **moduli**. Define-se $a_D = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a}$, e a métrica pode ser reescrita como

$$(ds)^2 = \text{Im} da_D d\bar{a} = -\frac{i}{2} (da_D d\bar{a} - da d\bar{a}_D).$$

Esta fórmula é completamente simétrica em a e a_D , de modo que se utilizarmos a_D como parâmetro local, a métrica permanecerá com a mesma forma, com uma função harmônica diferente substituindo $\text{Im} \tau$. Esta transformação corresponde à dualidade eletromagnética, e

há toda uma classe completa de parâmetros locais em termos dos quais a métrica pode ser escrita da mesma forma. Os elementos destas classes estão relacionados por uma transformação de $SL(2, \mathbb{Z})$.

Como age esta transformação de $SL(2, \mathbb{Z})$ sobre as partículas de gauge? Justamente trocando-as por dyons, como na conjectura de Montonen e Olive. Porém aqui nem todas as transformações realizam-se como simetrias exatas da teoria, já que os dyons constituem uma representação distinta da dos bosons com relação ao grupo de Lorentz. Aqui, a transformação de dualidade mapeia uma descrição da teoria em outra descrição da mesma teoria.

Muito da estrutura geométrica do espaço de moduli está contido em sua estrutura de singularidades. As monodromias em torno das singularidades geram um grupo, $\Gamma_M \in SL(2, \mathbb{Z})$, que é o grupo de simetrias exato da teoria. A ação de Γ_M sobre a função multivalente $\tau(a)$ expressa apenas uma mudança da folha de Riemann no espaço de moduli. Portanto, o verdadeiro espaço de moduli quântico, onde as funções $\tau(a)$ são positivamente definidas e univalentes, realiza-se tomando-se o espaço quociente pelo grupo das monodromias $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})/\Gamma_M$, ou seja, o espaço das órbitas de Γ_M .

Seiberg e Witten encontraram então uma forma fechada para a função τ - o que define exatamente a função \mathcal{F} - que preenche os requisitos de positividade e univalência. Determinando o espaço de moduli, uma função com os pre-requisitos exigidos está automaticamente definida, pois este problema é um conhecido problema matemático. A proposta de Seiberg e Witten foi utilizar conjuntamente simetrias da teoria microscópica de partida e simetrias da teoria efetiva - entre elas a dualidade - para determinar a estrutura do espaço de moduli, ou seja, determinar quem é Γ_M . De posse desta informação, basta ir à literatura matemática e escolher a maneira de resolução mais conveniente (utilizando curvas elípticas numa abordagem mais geométrica, ou utilizando funções automórficas que satisfazem certas equações diferenciais). Como veremos, o ansatz de Seiberg e Witten consistiu em propor que $\mathcal{F}(a)$ seja tal que $\mathcal{F}''(a)$ é o inverso de uma função elíptica [SW94b, SW94a, SW94c].

O que vamos apresentar aqui é uma seqüência didática dos elementos necessários para compreender o quadro acima delineado. A dissertação divide-se em duas partes. A primeira apresenta o cenário da física de solitons, que permitiu a formulação, por Montonen e Olive [MO77], da conjectura da dualidade. Na segunda parte está discutida a teoria de Seiberg e

Witten, com uma introdução às características gerais das teorias supersimétricas, e a solução do problema propriamente dito.

No primeiro capítulo, veremos o germen da conjectura de Montonen e Olive, na proposta de Dirac de introduzir-se um monopolo magnético a fim de preservar a simetria dual das equações de Maxwell no vácuo. Como resultado, Dirac fornece uma explicação para a quantização da carga elétrica.

Como nunca observou-se um monopolo, seguiram-se tentativas de obter um resultado similar ao de Dirac sem artifício do monopolo, num contexto de teorias não Abelianas. Porém modelos mais gerais que reproduzem o eletromagnetismo na situação de vácuo, onde ocorre a quebra espontânea da simetria de gauge, e garantem a quantização da carga elétrica, introduzem um novo elemento, o soliton, que, surpreendentemente, comporta-se como um monopolo magnético. No capítulo II apresentamos este novo objeto, o soliton.

Algumas das características peculiares dos solitons, que em muitos aspectos comportam-se como partículas, levaram Monotonem e Olive a "reformular" a dualidade eletromagnética de Dirac, que trocava partículas elétricas por partículas magnéticas, para uma teoria de campos onde os objetos permutados seriam as partículas elementares e os solitons. Estas idéias estão delineadas no capítulo III.

A segunda parte começa buscando uma teoria onde a conjectura de Montonen e Olive se realizaria. Vemos então no primeiro capítulo, as características básicas das teorias supersimétricas, terminando por mencionar como a teoria $N = 4$ preenche os requisitos da dualidade. Porém de maior interesse físico é a teoria $N = 2$, um meio termo entre a trivialidade da teoria $N = 4$, e a insolubilidade da teoria $N = 1$.

Então esboçamos no capítulo seguinte as características da teoria de gauge $SU(2)$ supersimétrica $N = 2$, que vão possibilitar a resolução exata da teoria, explicada no capítulo III.

Parte I

Solitons em Teorias de Yang Mills

Capítulo 2

Dualidade

Dizer que um sistema físico exibe dualidade significa que há duas perspectivas complementares da teoria. Podemos pensar em uma família de objetos de estudo, conectadas entre si por algum tipo de simetria. O espaço que parametriza estes objetos é usualmente chamado espaço de moduli.

Tomemos como ilustração um sistema de equações diferenciais. Suponha que temos uma equação diferencial, invariante sob ação de um grupo de transformações \mathcal{G} . Se tomarmos uma solução s , invariante sob ação de um subgrupo $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, podemos obter novas soluções através da ação de \mathcal{G}/\mathcal{H} sobre s . Neste caso, o espaço de moduli é o espaço da órbita de s sob ação do grupo quociente \mathcal{G}/\mathcal{H} ,

$$\mathcal{M} = \mathcal{O}_s = \mathcal{G}/\mathcal{H}.$$

É natural considerar uma família de teorias quânticas de campo: basta pensar em uma família de funções de partição. Podemos agora não só ter descrições diferentes da mesma teoria microscópica (todas com a mesma função de partição, como acontece na Renormalização); temos outras teorias na mesma família de funções de partição

$$Z \rightarrow Z(\lambda),$$

sendo λ a coordenada que parametriza o espaço de moduli.

O espaço de moduli apresenta uma estrutura geométrica definida, característica do tipo particular de teoria de campo que nos interessa. De fato, veremos como propriedades da teoria quântica de campos (TQC) traduz-se em propriedades do espaço de moduli.

O oscilador harmônico fornece um exemplo simples de sistema exibindo auto-dualidade, no sentido de que tem a mesma descrição no espaço das coordenadas ou momentos. Considere a Hamiltoniana do oscilador harmônico

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

com $[x, p] = i$. Podemos definir uma transformação de dualidade que troca a posição e o momento por

$$D : x \rightarrow p/m\omega \quad p \rightarrow -m\omega x.$$

Note que esta transformação é canônica e portanto preserva as relações de comutação .

Outro sistema que exibe um tipo diferente de dualidade é o modelo de Ising. Este é definido tomando-se um conjunto de spins σ_i , assumindo valores ± 1 e definidos sobre uma rede quadrada bi-dimensional, com interação entre os primeiros vizinhos de acoplamento J . A função de partição a temperatura T é

$$Z(K) = \sum_{\sigma} e^{K \sum_{(ij)} \sigma_i \sigma_j}$$

onde a soma em i, j corre sobre os primeiros vizinhos, a soma sobre σ sobre todas as configurações de spin, e $K = J/k_B T$. O modelo foi resolvido explicitamente por Onsager [Kog79], e exibe uma transição de fase de segunda ordem. Entretanto, antes da solução de Onsager , a temperatura crítica foi computada por Kramers e Wannier [KW41], utilizando dualidade. Eles mostraram que a função de partição pode ser representada de dois modos diferentes como soma sobre plaquetas da rede. Na primeira forma, a soma é sobre as plaquetas da rede original com acoplamento K . Na segunda forma, tem-se a soma sobre as plaquetas da rede dual - a rede quadrada cujos vértices são os centros das faces da rede original - com constante de acoplamento K^* onde

$$\sinh 2K^* = 1/(\sinh 2K).$$

Desde que a rede dual também é uma rede quadrada, as duas formulações são equivalentes, porém com diferentes valores de K . Note também que o regime de altas temperaturas ($K \ll 1$) ou acoplamento fraco é mapeado no regime de baixas temperaturas ($K^* \gg 1$) ou acoplamento forte na rede dual. Caso o sistema tenha uma única transição de fase, então ela deve ocorrer no ponto auto-dual com $K = K^*$ ou $\sinh 2J/k_B T_c = 1$.

Este modelo mostra como a dualidade fornece uma informação não trivial sobre o comportamento crítico, e relaciona a teoria no regime de acoplamento forte com o regime de acoplamento fraco.

Nas Teorias Quânticas de Campos (TQC), partículas aparecem como excitações quânticas dos campos que obedecem as equações de movimento. Porém há outro objeto, chamado sóliton, que pode ser visto como um novo tipo de partícula, embora em outro contexto: o sóliton aparece como solução clássica das equações de movimento. Como queremos explorar de modo mais abrangente as TQC, devemos explorar simetrias não só relativas ao espectro quântico, mas incluir características possivelmente mais gerais da teoria. Podemos nos perguntar o que ocorrem a estas soluções clássicas, os sólitons, ao quantizarmos totalmente a teoria? Montonen e Olive [MO77] propuseram uma simetria que troca o papel destas diferentes soluções, onde a teoria apresentaria uma dualidade entre o espectro quântico e as soluções clássicas. Uma simetria parecida ocorre com as teorias de sine-Gordon e Thirring, onde a corrente topológica em sine-Gordon pode ser identificada com a corrente de Noether de Thirring [Col75].

O modelo de sine-Gordon é definido pela ação

$$\mathcal{S}_{SG} = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{\alpha}{\beta^2} (\cos \beta \phi - 1) \right).$$

Esta teoria tem excitações de massa $M_e = \sqrt{\alpha}$ e sólitons com massa $M_s = 8\sqrt{\alpha}/\beta^2$. Expandindo o potencial até a quarta ordem, vemos que β^2 comporta-se como uma constante de acoplamento. Portanto a massa do sóliton é muito grande (comparada a massa M_e) no regime de acoplamento fraco.

Surpreendentemente, esta teoria equivale completamente a uma teoria de férmions, conhecida como o modelo de Thirring. A ação do modelo de Thirring é

$$\mathcal{S}_T = \int d^2x \left(\bar{\psi} i \gamma_\mu \partial^\mu \psi + m \bar{\psi} \psi - \frac{g}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \right).$$

A primeira vista estas duas teorias parecem completamente distintas, mas através da identificação

$$\frac{\beta^2}{4\pi} = \frac{1}{1 + g/\pi}$$

entre as constantes de acoplamento, e do mapeamento do sólton da teoria de SG no férmion fundamental da do modelo de Thirring, as teoria mostram-se completamente equivalentes.

Destes exemplos podemos observar certas características gerais da simetria de dualidade, embora nem todas estejam presentes em todos os exemplos. Primeiramente, a dualidade relaciona regimes de acoplamento fraco aos de acoplamento forte. Em segundo lugar, troca os papéis entre as excitações fundamentais de uma teoria e suas soluções clássicas, através da troca entre correntes de Noether e correntes topológicas. E finalmente envolvem uma dualidade geométrica, por exemplo relacionando uma rede com sua dual. Em teorias de gauge supersimétricas em quatro dimensões encontraremos generalizações das duas primeiras características. O aspecto geométrico também estará presente, mas torna-se claro apenas quando consideram-se grupos de gauge mais gerais do que utilizaremos (ficaremos restritos a $SU(2)$).

A busca pela dualidade em teorias de gauge parece motivada pela existência de dualidade em sistemas mais simples, pela dualidade eletromagnética e pelos resultados de Dirac [Dir31], 't Hooft [tH74] e Polyakov [Pol74], quanto a possibilidade da existência de monopolos, e pelo trabalho de 't Hooft e outros sugerindo que o confinamento em QCD pode surgir como uma forma dual de efeito Meissner [tH81].

Deste modo vemos como a dualidade se torna um instrumento poderoso para retirarmos informações sobre aspectos não-perturbativos de uma teoria, possibilitando-nos enxergar características que desaparecem na abordagem perturbativa.

Tentaremos adiante mostrar as hipóteses que sustentam a conjectura de Montonen e Olive, averiguando seus desdobramentos.

2.1 Eletromagnetismo

2.1.1 O princípio de gauge

O efeito do campo eletromagnético sobre uma partícula carregada é o de mudar a fase da função de onda em cada ponto do espaço-tempo. A mudança de fase em cada ponto não tem um valor definido: somente a diferença de fase entre pontos ligados por um determinado caminho é definida, e depende deste caminho. Para dois pontos distantes, a diferença de fase é definida somente com respeito a algum caminho, o que significa que a fase ganha através da interação eletromagnética é não integrável.

A mudança de fase para uma dada curva fechada deve ser a mesma para todas funções de onda de um mesmo sistema [Wey29]. Fixando o valor da fase em um certo ponto x_0 , a função de onda $\psi(x)$ de uma partícula com carga e , na presença de um campo eletromagnético descrito por um potencial vetor A_μ , relativa a função de onda $\psi_{liv}(x)$ da mesma partícula na ausência de interação, é dada por

$$\psi(x) = \psi_{liv}(x) e^{\frac{ie}{\hbar c} \int_C dx^\mu A_\mu}$$

onde C é algum contorno começando no ponto de referência x_0 e terminando em x .

A fase de $\psi_{liv}(x)$ é integrável, sendo sua mudança igual a zero ao longo de um caminho fechado. Portanto, a mudança na fase de $\psi(x)$ ao longo de um contorno fechado Γ é, usando o teorema de Stokes

$$\frac{e}{\hbar c} \int_\Gamma dx^\mu A_\mu = \frac{e}{\hbar c} \int_S ds^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

onde S é a superfície cuja borda é Γ , e $ds^{\mu\nu}$ é um elemento de superfície. Conseqüentemente, a mudança de fase ao longo de uma curva fechada é determinada pelo campo eletromagnético, e é a mesma para todas funções de onda do sistema.

Veremos que o fato do grupo de gauge $U(1)$ do eletromagnetismo ser compacto relaciona-se a quantização da carga. A transformação de gauge tem o efeito de adicionar uma fase à função de onda da partícula carregada

$$\psi_j \rightarrow \psi'_j = \psi_j e^{ie_j \alpha}$$

Caso as cargas e_j 's não sejam comensuráveis, não haverá dois valores reais do parametro α , digamos α_1 e α_2 , tais que a transformação seja a mesma para todos ψ 's. De fato, para que isto aconteça para quaisquer cargas e_j e e_k , precisamos que

$$ie_j \alpha_1 = ie_j \alpha_2 + 2\pi i n \quad ie_k \alpha_1 = ie_k \alpha_2 + 2\pi i m$$

e portanto

$$\frac{e_j}{e_k} = \frac{n}{m}.$$

Então para caso de cargas não comensuráveis o grupo com elementos $e^{i\alpha Q}$ é não compacto, já que seus elementos são diferentes para todos valores de α reais.

Porém se as cargas e_j 's forem múltiplos de uma carga fundamental e , então para dois valores de α diferindo por um múltiplo inteiro de $2\pi/e$, a transformação sobre os campos ψ_j 's é a mesma. Em outras palavras, duas transformações de gauge são indistingüíveis se seus α 's são os mesmos modulo $2\pi/e$. Então o grupo de gauge é compacto.

2.1.2 As Equações de Maxwell

A teoria de gauge abeliana, conhecida como QED, que descreve a física das interações eletromagnéticas, é o protótipo da teoria quântica de campos. As equações de Maxwell no vácuo

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

podem ser derivadas como as equações de movimento para o potencial de gauge A_μ , a partir da lagrangiana

$$\mathcal{L} = \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Toda informação está contida em

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad \partial_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0 \quad (2.4)$$

que são as equações de Maxwell escritas em forma covariante. A segunda expressão é a identidade de Bianchi.

Os campos elétrico e magnético são escritos em termos do tensor $F^{\mu\nu}$ como

$$E_i = F_{0i}, \quad B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^{jk}$$

2.1.3 A dualidade entre eletricidade e magnetismo

Chama a atenção a simetria do conjunto das equações de Maxwell no vácuo: fazendo a transformação

$$F^{\mu\nu} \rightarrow {}^*F^{\mu\nu} \quad {}^*F^{\mu\nu} \rightarrow -F^{\mu\nu} \quad (2.5)$$

que equivale à troca $\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{E}$, trocando eletricidade e magnetismo, temos o mesmo conjunto de equações. De maneira mais geral, a teoria é invariante sob ação do grupo de transformações $SO(2)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\rightarrow \cos \phi \mathbf{E} - \sin \phi \mathbf{B} \\ \mathbf{B} &\rightarrow \sin \phi \mathbf{E} + \cos \phi \mathbf{B} \end{aligned}$$

Esta dualidade é quebrada na presença de matéria, devido ao aparecimento das fontes elétricas, pois naturalmente não observou-se a existência de fontes magnéticas.

Classicamente, nada impede que possam existir fontes para \mathbf{B} . Porém introduzindo fontes magnéticas há uma inconsistência em derivar o campo magnético de um potencial vetor, já que

$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0 \quad \text{pois} \quad \nabla \cdot \nabla \times \vec{X} = 0 \quad \forall \vec{X}.$$

A princípio, cargas magnéticas são incompatíveis com a existência do potencial.

No caso quântico teremos efeitos físicos de responsabilidade do potencial de gauge, como o efeito Aharonov-Bohm; é imprescindível trabalhar-se com o potencial de gauge. As variáveis canônicas relevantes são as componentes do potencial vetor A^μ , e não as componentes de $F^{\mu\nu}$.

Em seu artigo original, Dirac [Dir31] apresenta uma relação de quantização para e , a menor carga elétrica conhecida experimentalmente, explorando a simetria entre eletricidade e magnetismo fora da perspectiva convencional: ele tenta estender a dualidade no caso quântico, introduzindo uma fonte magnética.

As equações de Maxwell então teriam a forma

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu \quad \partial_\mu {}^*F^{\mu\nu} = -k^\nu \quad (2.6)$$

que são simétricas sob a transformação de dualidade desde que

$$j^\mu \rightarrow k^\mu \quad k^\mu \rightarrow -j^\mu. \quad (2.7)$$

2.2 O monopolo de Dirac

Para restaurar a dualidade, Dirac mostrou que a teoria eletromagnética com simetria dual pode ser quantizada, contanto que para qualquer carga elétrica e e a carga magnética g da teoria, a condição

$$\frac{eg}{4\pi\hbar} = \frac{1}{2}n \quad n \text{ inteiro} \quad (2.8)$$

seja satisfeita. Esta é a condição de quantização de Dirac [Dir31]. Por considerações da não integrabilidade da fase da função de onda, Dirac mostrou que nos pontos onde a função de onda se anula, sua fase não está bem definida, e esta ambiguidade permite a existência de um potencial de gauge que é fonte de um campo magnético de um monopolo.

Ao percorrer um loop, as mudanças de fase que distintas funções de onda de um sistema sofrem podem diferir por múltiplos de 2π , e não necessariamente têm ser interpretada em termos do campo eletromagnético.

Se considerarmos um pequeno loop, esperamos que a mudança de fase devido ao potencial de gauge seja pequena, já que a função de onda deve ser contínua. Ora, uma mudança de 2π seria então muito grande, e portanto a mudança nas funções de onda não podem diferir por 2π , que seria já muito grande, a menos que a função de onda se anule em algum ponto do loop. Nos pontos onde ψ é nula, não faz sentido falar em fase. Desde que ψ é complexa, precisa satisfazer duas condições para que se anule. Em um espaço tri-dimensional, os pontos onde ψ se anula encontram-se ao longo de uma linha, que Dirac chamou linha nodal. Então, se considerarmos uma função de onda com a linha nodal passando através de um pequeno loop, sua mudança na fase ao redor do loop não tem de ser pequena. A mudança pode ter algum valor perto de $2\pi n$, com o inteiro n característico da linha nodal. A diferença entre a mudança de fase e a proximidade de $2\pi n$ é que deve ser considerada como o fluxo eletromagnético 2.1. Então, a mudança de fase em torno deste pequeno loop espacial é

$$2\pi n + \frac{e}{\hbar c} \int_{\text{loop}} ds^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

O caso de contornos maiores Γ pode ser tratado considerando-se a superfície S cuja fronteira é Γ , e dividindo-se S em pequenos loops. A mudança de fase total ao longo de Γ será a soma das mudanças de fase nos pequenos loops. Se Γ não tem componente na direção temporal, observamos de 2.1 que somente o fluxo magnético irá contribuir para a mudança de fase. Então, a mudança de fase total ao longo de Γ será

$$2\pi \sum n + \frac{e}{\hbar c} \int_S ds^i B_i.$$

onde $ds^i = \epsilon_{ijk} ds^{jk}$.

Contraindo-se Γ a um ponto, a mudança de fase deve se anular. Mas aí S é uma superfície fechada, e segue que uma linha nodal cruzando esta superfície deve satisfazer

$$2\pi \sum n = -\frac{e}{\hbar c} \int_S ds^i B_i.$$

Mas o lado direito da expressão (r.h.s) deve ser o mesmo para todas as funções de onda, pois depende somente do campo eletromagnético. Portanto, $2\pi \sum n$ deve ser também o mesmo para todas as funções de onda.

Para o caso de (r.h.s) ser zero, não temos problema: basta tomar uma função de onda sem linhas nodais, e caso tomemos uma com linha nodal, esta atravessa a superfície duas vezes, dando contribuições com sinais opostos.

Entretanto, caso $2\pi \sum n$ não se anule, alguma linha nodal deve terminar dentro da superfície. Desde que a soma deve ser a mesma para todas ψ 's, e desde que o resultado se aplica a qualquer superfície envolvendo o ponto final, concluímos que o ponto final da linha nodal deve ser o mesmo para todas ψ 's, independentemente do fato destas funções de onda terem zeros ou não. Então tais pontos seriam pontos de singularidade do campo eletromagnético.

Tomando uma pequena superfície fechada em torno de um ponto final da linha nodal, temos que o fluxo magnético total através dela seria $2\pi n\hbar c/e$. Então deve haver em tal ponto uma carga magnética g , com campo magnético $B = \frac{g}{4\pi r^2}$, e assim satisfazendo

$$eg = 2\pi n\hbar c.$$

A condição de Dirac pode ser derivada de considerações sobre o movimento de uma carga elétrica num campo gerado por um monopolo magnético. Através da conservação do momento angular - o momento que se conserva é o da carga mais o do campo do monopolo -, e do fato de que em mecânica quântica os autovalores do momento angular são múltiplos inteiros de $\frac{1}{2}\hbar$, chega-se à condição 2.8. Daí conclui-se que a existência de monopolos magnéticos implica na quantização da carga elétrica.

Para compatibilizar o monopolo com o potencial de gauge A^μ , este deve ter singularidades. O potencial não pode ser bem comportado em todo espaço se há cargas magnéticas, pois

$$g = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2.9)$$

e como queremos derivar o campo magnético de algum \vec{A} , esta deve satisfazer $\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} \neq 0$. Então \vec{A} não pode estar bem definido em todo S , mesmo que $\nabla \cdot \vec{B}$ seja não nulo somente na origem. O que se pode fazer é definir \vec{A} em todo espaço exceto sobre a linha que une a origem ao infinito, de tal modo que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Então representaríamos o potencial vetor por

$$\frac{g}{4\pi r^2} \hat{r} = \nabla \times \vec{A} - g \theta(-z) \delta(x) \delta(y) \hat{z} \quad (2.10)$$

A linha ocupada por $g \theta(-z) \delta(x) \delta(y)$ é chamada *Dirac string*. (Ver [GO78]).

2.2.1 Condição de quantização de Dirac-Schinger-Zwanziger-Saha

Podemos generalizar a condição de quantização de Dirac para o caso de lidarmos com funções de onda de partículas que possuem tanto carga elétrica quanto magnética: os *dyons* [Sch69], [Zwa68], [Sah49].

Considere o movimento de uma partícula não-relativística de massa m , e cargas elétrica e magnética e_1 e g_1 , respectivamente, sob influência de um campo eletromagnético produzido por uma fonte de cargas e_2, g_2 . As equações de movimento são

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e_1 \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) + g_1 \left(\vec{B} - \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{E} \right)$$

onde

$$\vec{E} = \frac{e_2}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad \vec{B} = \frac{g_2}{4\pi r^2} \hat{r}.$$

Substituindo na equação de movimento tem-se

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{(e_1 e_2 + g_1 g_2)}{4\pi} \frac{\hat{r}}{r^2} + \frac{(e_1 g_2 - g_1 e_2)}{4\pi} \frac{1}{c} \vec{v} \times \frac{\hat{r}}{r^2}.$$

Note que o momento angular desta partícula não é conservado

$$\frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \vec{v}) = m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{(e_1 g_2 - g_1 e_2)}{4\pi} \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right).$$

A quantidade

$$\vec{J} \equiv m\vec{r} \times \vec{v} - \frac{(e_1 g_2 - g_1 e_2)}{4\pi c} \hat{r} \quad (2.11)$$

é conservada

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = 0.$$

Podemos interpretar o segundo termo em (r.h.s) 2.11 como o momento angular do campo eletromagnético.

Ao quantizar-se a componente de \vec{J} ao longo de \vec{r} , isto é, $\hat{r} \cdot \vec{J}$, esta deve ser um múltiplo de $\hbar/2$. Portanto

$$e_1 g_2 - g_1 e_2 = 2\pi n \hbar c \quad (2.12)$$

Há basicamente dois modos de assegurar a quantização da carga elétrica:

- Dirac mostrou que a carga elétrica fica automaticamente quantizada na presença de monopolos magnéticos; a possibilidade de monopolos efetivamente modifica a estrutura global do grupo de gauge eletromagnético, de modo a ser um grupo $U(1)$ compacto.
- Sendo o operador de carga elétrica uma combinação linear (com coeficientes comensuráveis) dos geradores de um subgrupo Abeliano de um grupo de Lie maior (p.ex., $U(1) \subset SU(2)$), seus autovalores, que são proporcionais às possíveis cargas elétricas, seriam quantizados, propriedade das representações irredutíveis de dimensão finita. Através da quebra espontânea de simetria, obtemos o $U(1)$ eletromagnético como subgrupo de $SU(2)$, que assim seria necessariamente compacto.

2.3 O monopolo de Dirac à la Wu-Yang

A interação de uma partícula carregada se dá através do acoplamento com o potencial de gauge; mas este parece inconsistente na presença de um monopolo magnético. A solução envolve fazer uso da ambiguidade de gauge [WY75]. Podemos tentar usar diferentes potenciais vetores em diferentes regiões, contanto que difiram entre si por uma transformação de gauge na região de sobreposição. Então o tensor de campo mesurável fisicamente será contínuo e bem definido.

Divida a esfera S^2 com raio dado $r > r_0$ em um hemisfério norte N com $0 \leq \theta \leq \pi/2$, e num hemisfério sul S com $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$; a região de sobreposição corresponde ao equador E em $\theta = \pi/2$. Podemos definir o potencial vetor nas duas regiões como

$$\vec{A}_N = \frac{g}{4\pi r} \frac{(1 - \cos \theta)}{\sin \theta} \hat{e}_\phi$$

$$\vec{A}_S = -\frac{g}{4\pi r} \frac{(1 + \cos \theta)}{\sin \theta} \hat{e}_\phi.$$

Note que nas duas metades da esfera o campo magnético é dado por $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, que fornece

$$\vec{B} = \frac{g\hat{r}}{4\pi r^2}.$$

Note também que $A_{N,S}$ tem singularidades em (S, N) mas são bem definidos com respeito aos domínios.

Agora verificamos que a diferença entre A_N e A_S na região de sobreposição é uma transformação de gauge. Temos em $\theta = \pi/2$

$$\vec{A}_N - \vec{A}_S = -\vec{\nabla}\chi, \quad \chi = -\frac{g}{2\pi}\phi,$$

de modo que a diferença é uma transformação de gauge. Entretanto a função de gauge χ não é contínua. De fato,

$$g = \int_N \vec{B}_N \cdot d\vec{S} + \int_S \vec{B}_S \cdot d\vec{S} = \int_E (\vec{A}_N - \vec{A}_S) \cdot d\vec{l} = \chi(0) - \chi(2\pi).$$

Mas a física não requer que χ seja contínua. As quantidades físicas serão contínuas contanto que $e^{-ie\chi}$ seja contínua.

Suponha que estamos quantizando uma partícula de massa m e carga q no campo de um monopolo magnético. A equação de Schrödinger satisfeita pela função de onda é

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

onde $\vec{\nabla} = \vec{\partial} + ie\vec{A}$, para $e = q/\hbar$. A equação de Schrödinger é invariante sob a transformação de gauge

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\partial}\chi \quad \text{e} \quad \Psi \rightarrow e^{-ie\chi}\Psi.$$

Esta invariância de gauge garante que as soluções obtidas localmente com um particular \vec{A} sobrepor-se-hão de maneira correta, contanto que a função de onda seja univalente. Esta

condição significa que

$$e^{-ie\chi} = e^{ieg\phi/2\pi}$$

deve ser uma função univalente, que equivale a condição de quantização de Dirac.

Matematicamente, o que foi feito é construir um fibrado principal $U(1)$ não trivial. A variedade de base é um S^2 de raio fixo, que recobrimos com dois sistemas de coordenadas. As fibras são elementos de $U(1)$. Estas fibras são *coladas* na região de sobreposição por funções de transição que são transformações de gauge.

Capítulo 3

Aspectos não-perturbativos em teorias de campos

3.1 Teorias de gauge não-Abelianas: Yang-Mills

O princípio de gauge de Weyl [Wey29] (I.1.a) pode ser utilizado para descrever as interações forte e fraca, além da eletromagnética, através da generalização do grupo $U(1)$ para outros grupos de Lie compactos. A primeira extensão deste princípio foi feita por Yang e Mills [YM54], em 1954, utilizando o grupo $SU(2)$, e generalizada posteriormente por Gell-Mann e Glashow [GMG61] (1961).

O ponto de partida é uma lagrangiana de matéria, que assume-se seja invariante com respeito a um dado grupo simples, compacto e rígido \mathcal{G} ,

$$\mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)) = \mathcal{L}(D(g)\Phi(x), D(g)\partial_\mu \Phi(x)),$$

onde $g \in \mathcal{G}$ e $\Phi(x)$ denota um campo genérico numa dada representação do grupo de Poincaré. Quando o grupo rígido é calibrado, $g \rightarrow g(x)$, o termo cinético da lagrangiana não permanece invariante. Então, em analogia com o caso eletromagnético, introduzimos um conjunto de potenciais vetoriais $W_\mu^a(x)$, $a = 1, \dots, n$, um para cada gerador T^a de \mathcal{G} , e definimos a derivada covariante

$$\mathcal{D}_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + eD(W_\mu)\Phi, \quad \text{ou} \quad (\mathcal{D}_\mu \Phi)^a = \partial_\mu \Phi^a + eW_\mu^k D_{ab}(T_k)\Phi^b,$$

onde $e \neq 0$ é uma constante adimensional (constante de acoplamento), e então exige-se que

$W_\mu^a(x)$ transforme-se de modo a manter a derivada \mathcal{D}_μ covariante, isto é, exige-se que

$$D(g(x))\mathcal{D}_\mu\Phi(x) = \mathcal{D}_\mu D(g(x))\Phi(x). \quad (3.1)$$

Desde que $\Phi(x)$ está em uma representação arbitrária de \mathcal{G} , esta exigência equivale à condição

$$\mathcal{D}_\mu(W') = D(g(x))\mathcal{D}_\mu(W)D^{-1}(g(x)),$$

onde $W_\mu = eW_\mu^a D(T_a)$, e decompondo esta expressão vemos que ela equivale a lei de transformação

$$W'_\mu = D(g)W_\mu D^{-1}(g) + D\partial_\mu D^{-1}(g),$$

para o potencial vetor W_μ . Um potencial vetor que se transforma deste modo é chamado potencial de gauge. Além disto, um campo que transforma-se de acordo com a lei acima está na representação adjunta, cujo espaço de representação é a própria álgebra de Lie do grupo.

Graças à exigência 3.1, a lagrangiana permanece invariante quando $g \rightarrow g(x)$, isto é,

$$\mathcal{L}(\Phi(x), \mathcal{D}_\mu\Phi(x)) = \mathcal{L}(D(g(x))\Phi(x), D(g(x))\mathcal{D}_\mu\Phi(x))$$

e permanece invariante somente caso o termo cinético para os campos de gauge sejam construídos de modo similar ao eletromagnetismo, onde usamos $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Portanto definimos o tensor de campos não-abeliano $G_{\mu\nu}$ de acordo com

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{e} [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + e[W_\mu, W_\nu]; \quad (3.2)$$

$$G_{\mu\nu} \equiv eD(T^a)G_{\mu\nu}^a; \quad G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + ef^{abc}W_\mu^b W_\nu^c.$$

Este campo não é invariante de gauge como no caso abeliano, mas, como é contruído utilizando-se \mathcal{D}_μ , é covariante,

$$G_{\mu\nu}(W') = D(g)G_{\mu\nu}D^{-1}(g),$$

e isto é suficiente para a construção do termo cinético. De fato, o termo cinético é definido como sendo o traço de G^2 , sendo assim invariante de gauge.

A lagrangiana para uma teoria de gauge pura portanto tem a forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\text{Tr} G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}. \quad (3.3)$$

Se $G_{\mu\nu}$ se anula, então W_μ é simplesmente a transformação de gauge do zero, que chamamos puro gauge

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_\mu = g^{-1} \partial_\mu g.$$

Os geradores da álgebra de Lie T^a obedecem, em uma dada representação, à

$$[T^a, T^b] = f^{abc} T^c$$

onde os f 's são as constantes de estrutura de um grupo de Lie \mathcal{G} .

As equações de Euler-Lagrange, que são as equações de movimento de Yang-Mills para 3.3 são

$$\mathcal{D}^\mu G_{\mu\nu} = \partial^\mu G_{\mu\nu} + [W^\mu, G_{\mu\nu}] = 0 \quad (3.4)$$

ou em forma explícita

$$\partial^\mu G_{\mu\nu}^a + e f^{abc} W_b^\mu G_{c\mu\nu} = 0 \quad (3.5)$$

A estas equações devemos acrescentar ainda a identidade de Bianchi

$$[\mathcal{D}_\mu, [\mathcal{D}_\nu, \mathcal{D}_\lambda]] + [\mathcal{D}_\nu, [\mathcal{D}_\lambda, \mathcal{D}_\mu]] + [\mathcal{D}_\lambda, [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]] = 0,$$

que pode ser escrita como

$$\mathcal{D}_\mu^* F^{\mu\nu} = 0$$

já que $[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = F^{\mu\nu}$.

Nosso grande interesse estará concentrado na teoria descrita pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\mathcal{D}_\mu \phi)_i (\mathcal{D}^\mu \phi)^i - U(\phi), \quad (3.6)$$

onde ϕ é um multiplete de campos escalares e

$$U(\phi) = \frac{\lambda}{4} (v^2 - \phi^2)^2, \quad \phi^2 = \phi_i \phi_i. \quad (3.7)$$

A derivada covariante age no campo escalar por

$$(\mathcal{D}_\mu \phi)_i = \partial_\mu \phi_i + e W_\mu^b D(T_b)_{ij} \phi_j. \quad (3.8)$$

Os índices i são os índices da representação do grupo de gauge \mathcal{G} . Este sistema é conhecido como Higgs Yang-Mills.

3.2 Soluções clássicas

Fornecidas as condições de contorno, especificadas através de uma carga topológica que assume valores inteiros, instantons e monopolos aparecem como soluções de mínimo absoluto dos funcionais de ação e energia, respectivamente. Uma ótima introdução ao tema encontra-se [Raj82], e uma boa revisão é feita em [Pra80, Act79].

3.2.1 Sólitons

São soluções clássicas exatas, localizadas, de energia finita, de um sistema de equações diferenciais não lineares e dispersivas. Há um contrabalanço entre a não linearidade e o termo dispersivo, ambos combinando-se de modo a permitir a existência de tais soluções. Sua estabilidade deve-se a conservação de um número infinito de cargas, decorrentes de estruturas e simetrias especiais da teoria. Em grande parte das vezes estas estruturas apresentam-se por meio de uma carga topológica.

Estas soluções corresponderão, na teoria quântica, a novas partículas, não mais criadas pelos campos fundamentais da teoria, mas por uma combinação não local dos campos. Serão estas novas soluções que irão introduzir os ingredientes da dualidade que trataremos mais adiante. Aqui apenas expomos as características destes objetos que vamos explorar.

Para existirem cargas topológicas que garantam a estabilidade do sóliton, é necessário que a teoria possua um conjunto de vácuos degenerados. Para que a energia seja finita, é necessário que os campos tomem valores no conjunto de vácuos conforme nos aproximamos do infinito. Isto porque o funcional de energia clássica para campos de gauge estáticos, é dada por

$$E \equiv \frac{1}{4} \int d^3x \text{Tr} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$$

Assim temos um mapeamento da fronteira do espaço no conjunto de vácuos, o que define a carga topológica.

Para o caso das soluções estáticas em espaço-tempo $3 + 1$ de Minkowski, a fronteira espacial no infinito é uma esfera, que denotaremos S^2_∞ . Então a condição para termos uma configuração topologicamente não trivial é que o mapeamento

$$S^2_\infty \rightarrow \mathcal{M}$$

seja não trivial, sendo \mathcal{M} o conjunto dos vácuos. Para o caso deste conjunto ser contínuo, temos uma variedade, a informação topológica é descrita pelo grupo de homotopia $\pi_2(\mathcal{M})$. A condição de existência de solução solitônica lê-se

$$\pi_2(\mathcal{M}) \neq 0.$$

Os sólitons que nos interessam para o problema da dualidade são monopolos magnéticos. Podemos adiantar algumas de suas características.

Sendo solução de energia finita, o campo de gauge do monopolo está numa configuração estática

$$\partial_0 W_\mu(x) \equiv 0.$$

Escrevendo explicitamente os campos elétrico e magnético, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_k^a &\equiv G_{k0}^a = \partial_k W_0^a + e\epsilon^{abc} W_k^b W_0^c, \\ \mathcal{B}_k^a &\equiv \epsilon_{klm} G_{lm}^a = \epsilon_{klm} [\partial_l W_m^a - \partial_m W_l^a + e\epsilon^{abc} W_l^b W_m^c] \end{aligned} \quad (3.9)$$

e então o funcional de energia E toma a forma

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4} \int d^3x G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} = \frac{1}{2} \int d^3x [\mathcal{B}_k^a \mathcal{B}_k^a + \mathcal{E}_k^a \mathcal{E}_k^a] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x [(\mathcal{B}_k^a - \mathcal{E}_k^a) \cdot (\mathcal{B}_k^a - \mathcal{E}_k^a)] + \int d^3x \mathcal{B}_k^a \mathcal{E}_k^a \\ &\geq \int d^3x \mathcal{B}_k^a \mathcal{E}_k^a. \end{aligned}$$

Vale a igualdade quando $B_k^a = \mathcal{E}_k^a$, que é precisamente a equação de auto-dualidade $G_{\mu\nu} = *G_{\mu\nu}$ para campos de gauge estáticos. O integrando da desigualdade pode ser reduzido a

$$B_k^a \mathcal{E}_k^a \equiv \partial_k (B_k^a W_0^a) - W_0^a [\partial_k B_k^a + e \epsilon^{abc} W_k^a B_k^c] \equiv \partial_k (B_k^a W_0^a)$$

onde usamos a identidade de Bianchi $\mathcal{D}_\mu B^\mu = 0$. Esta última identidade obtida nos permite converter o integrando da desigualdade em uma integral de superfície, utilizando a lei de Gauss

$$\int d^3x B_k^a \mathcal{E}_k^a = \int_{S_\infty^2} d^2\sigma^k B_k^a W_0^a. \quad (3.10)$$

Ora, mas a condição de energia finita nos exige que os campos tomem valores na variedade do vácuo no infinito; para uma teoria de gauge pura, esta condição significa que os campos devem ser puro gauge no infinito:

$$r \rightarrow \infty : \begin{cases} G_{kl} = 0 \Rightarrow W_k = g^{-1} \partial_k g, \\ \partial_k W_0^a + e \epsilon^{abc} W_k^b W_0^c \\ W_0^a = -\frac{c}{e} \hat{\eta}^a, \quad \text{onde } \hat{\eta}^a \hat{\eta}^a = 1, c = \text{cte} \geq 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Para a última relação usamos a antisimetria de ϵ^{abc} para encontrar $\partial_k (W_0^a W_0^a = 0)$. Com ela podemos solucionar as equações para W_k^a e obter

$$r \rightarrow \infty : W_k^a = \frac{1}{e} \epsilon^{abc} \hat{\eta}^b \partial_k \hat{\eta}^c + \hat{\eta}^a W_k^b \hat{\eta}^b. \quad (3.12)$$

Substituindo 3.12 na expressão para o campo magnético 3.10 encontramos seu comportamento no infinito

$$B_k^a W_0^a = \frac{c}{2e^2} \epsilon^{abc} \epsilon_{klm} \hat{\eta}^a \partial_l \hat{\eta}^b \partial_m \hat{\eta}^c - \frac{c}{e} \epsilon_{klm} \partial_l W_0^a \hat{\eta}^a. \quad (3.13)$$

A esfera $\{S_r^2 : x_i x_i = r^2, i = 1, 2, 3\}$ pode ser descrita em termos de dois parâmetros $\xi_\alpha (\alpha = 1, 2) : x_i = x_i(\xi_\alpha)$. O elemento de superfície $d^2\sigma^k$ pode ser escrito como

$$d^2\sigma^k = \epsilon_{klm} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^n}{\partial \xi^\beta} \epsilon_{\alpha\beta} d^2\xi,$$

de modo que a equação 3.10 se torna

$$\int d^3x B_k^a \mathcal{E}_k^a = \frac{c}{2e^2} \int_{S_\infty^2} d^2\xi \epsilon^{abc} \epsilon_{\alpha\beta} \hat{\eta}^a \frac{\partial \hat{\eta}^b}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \hat{\eta}^c}{\partial \xi^\beta}. \quad (3.14)$$

onde usamos a lei de Gauss

$$\int_{S_\infty^2} d^2\sigma^k \epsilon_{klm} \partial_l W_m^b \hat{\eta}^c = \int d^3x \epsilon_{klm} \partial_k \partial_l W_m^b \hat{\eta}^c \equiv 0.$$

Pode-se verificar que o integrando de r.h.s. de 3.14 satisfaz a identidade

$$\left[\epsilon_{\alpha\beta} \hat{\eta}^a \frac{\partial \hat{\eta}^b}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \hat{\eta}^c}{\partial \xi^\beta} \right]^2 = 4 \det \left[\frac{\partial \hat{\eta}^a}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \hat{\eta}^a}{\partial \xi^\alpha} \right] = 4 \det |g_{ab}|$$

sendo $|g_{ab}|$ o determinante do tensor métrico da esfera $\hat{\eta}^a \hat{\eta}^a = (\hat{\eta}^1)^2 + (\hat{\eta}^2)^2 + (\hat{\eta}^3)^2 = 1$.

Temos então

$$\int d^3x B_k^a \mathcal{E}_k^a = \frac{c}{e^2} \int_{S_\infty^2} d^2\xi \sqrt{|g_{ab}|} = \frac{4\pi c}{e^2} Q \quad (3.15)$$

com m um inteiro caracterizando a carga topológica. Enquanto o ponto (ξ_1, ξ_2) varre a esfera S_∞^2 uma vez, o vetor $\hat{\eta}^a$ pode percorrer a esfera $(\hat{\eta}^a)^2 = 1$ qualquer número inteiro de vezes, cada uma destas vezes contribuindo com um ângulo sólido de $\int d^2\xi = 4\pi$.

Voltando então a desigualdade para a energia, após todo este desenvolvimento podemos expressá-la como

$$E \geq \frac{4\pi c}{e^2} Q \quad \text{com } Q \in \mathbb{Z} \quad \text{onde } \lim_{r \rightarrow \infty} W_0^a W_0^a = \frac{c^2}{e^2}.$$

Este limite inferior (a igualdade) é alcançado somente para configurações estáticas e auto-duais. A carga topológica Q , no contexto dos monopolos, é referida como sendo a carga magnética. Então vemos que para uma dada carga Q , os campos auto-duais são os mínimos absolutos do funcional de energia E .

Se este limite inferior será atingido ou não, é questão concernente à dinâmica, pois requer encontrar uma solução explícita não trivial da equação de auto-dualidade.

Quebra de simetria clássica

Note que para a solução de monopolo de uma teoria de gauge pura, a componente temporal W_0^a faz as vezes de um campo escalar, mimetizando o campo de Higgs. Em uma teoria com matéria, há possibilidade de minimizarmos o funcional de energia sem que estejamos necessariamente em uma configuração de puro gauge. A interação possibilita que o comportamento conjunto dos campos satisfaça as exigências, dando maior liberdade ao campo de gauge. Veremos que na presença de um potencial que quebra espontaneamente a simetria de gauge, o campo W_μ não tem que ser puro gauge no infinito para ser mínimo do funcional de energia.

Há um análogo clássico ao mecanismo de quebra espontânea de simetria, que possibilita o aparecimento destas soluções de monopolo. Vejamos num modelo ilustrativo como isto se dá. Tomaremos uma lagrangiana de Higgs Yang-Mills, com um potencial que possui um contínuo de vácuos.

Seja o potencial $U(\phi)$ invariante sob ação do grupo de gauge \mathcal{G}

$$U(\phi) = U(D(g)\phi) \quad g \in \mathcal{G}$$

mas com soluções de vácuo invariante por um subgrupo $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$,

$$U(\phi_0) = 0 = U(D(h)\phi_0) \quad h \in \mathcal{H}.$$

Esta teoria terá uma variedade \mathcal{M} de soluções de vácuo

$$\mathcal{M} = \{\phi_0 \mid U(\phi_0) = 0\}.$$

Dada uma solução ϕ_s , seu conjunto de simetrias - subgrupo que a deixa invariante - é chamado **little group**

$$\mathcal{H}_{\phi_s} = \{g \in \mathcal{G} \mid D(g)\phi_s = \phi_s\}.$$

Para as soluções de vácuo, $\mathcal{H}_{\phi_0} = \mathcal{H}$ e então a simetria \mathcal{G} é espontaneamente quebrada para \mathcal{H} . Note que os campos são aniquilados pelos geradores de seu little group, pois escrevendo

um elemento infinitesimal $h \in \mathcal{H}_{\phi_v}$ como $h = 1 + i\epsilon T$, segue que

$$D(h)\phi = \phi \quad \Rightarrow \quad D(T)\phi = 0.$$

Considere agora a órbita de um ponto em \mathcal{M} . Esta é construída pela ação de \mathcal{G} em um ponto $\phi_v \in \mathcal{M}$

$$\mathcal{O}_{\phi_v} = \{D(g)\phi_v \mid g \in \mathcal{G}\}.$$

Já que os elementos de \mathcal{H} deixam ϕ_v invariante, todos elementos da forma gh , com $g \in \mathcal{G}$ fixo e $h \in \mathcal{H}$ qualquer, levam ϕ_v ao mesmo ponto. Assumindo que \mathcal{G} age transitivamente em \mathcal{M} , isto é, dados dois campos em \mathcal{M} há um elemento em \mathcal{G} que relaciona-os ($\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow \exists g_{12}, \phi_1 = D(g_{12})\phi_2$, com D uma representação de \mathcal{G}), a estrutura do vácuo é determinada por \mathcal{G} e \mathcal{H} : o vácuo é o espaço coset. Portanto, \mathcal{O}_{ϕ_v} tem a estrutura do espaço coset

$$\mathcal{O}_{\phi_v} = \mathcal{G}/\mathcal{H}.$$

Temos então duas possibilidades: ou \mathcal{M} possui várias órbitas, ou há somente uma, e aí

$$\mathcal{M} \equiv \mathcal{G}/\mathcal{H}. \quad (3.16)$$

No segundo caso segue que todos little group de todos os vácuos são isomórficos. A razão é que neste caso o grupo de gauge age transitivamente no espaço de soluções de vácuo, isto é, quaisquer duas soluções de vácuo estão ligadas por uma transformação de gauge $\phi'_v = D(g)\phi_v$. Portanto, se $D(h)$ deixa ϕ_v invariante, então $D(g)D(h)D(g^{-1})$ deixa ϕ'_v invariante. Então, $\mathcal{H}_{\phi'_v} = g\mathcal{H}_{\phi_v}g^{-1}$. Conseqüentemente, se todos vácuos constituem somente uma órbita do grupo de gauge, todos os little groups são isomórficos. Caso tenhamos várias órbitas, o little group pode variar de órbita para órbita.

Os campos clássicos no infinito devem tomar valores em \mathcal{M} :

$$\phi_a \rightarrow \phi_a(\theta, \phi) \in \mathcal{M}, \quad r \rightarrow \infty,$$

para qualquer solução de energia finita. Esta condição de contorno define um mapeamento

$$\phi_a(\theta, \phi) : S^2_\infty \rightarrow \mathcal{M}. \quad (3.17)$$

Para que o mapeamento seja não trivial, a dimensão em que estamos trabalhando influi na escolha da representação. As possíveis direções que podemos tomar para chegarmos ao infinito são fornecidas pelos vetores unitários no espaço d -dimensional

$$S^{d-1} = \{ \hat{r}^2 = 1 \}.$$

Para termos cargas topológicas, o mapeamento $S_{\infty}^{d-1} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$ tem de ter grupo de homotopia não trivial, restringindo a escolha da representação para aquelas que fornecem uma variedade de vácuo tal que $\pi_1(\mathcal{M}) \neq 0$. Estamos trabalhando em quatro dimensões (1 temporal e 3 espaciais); porém analisamos sempre o caso estático e a condição 3.17 define então, um mapeamento da esfera S^2 no infinito, na variedade dos vácuos do Higgs, $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$:

$$\phi_a : S_{\infty}^2 \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{H}}$$

Este mapeamento (para o nosso caso particular) cobre a variedade \mathcal{G}/\mathcal{H} um número inteiro de vezes. Então, qualquer configuração dos campos de Higgs no infinito é caracterizada por um inteiro n , que conforme veremos, é a carga topológica. Mapas com mesmo n são topologicamente equivalentes, ou homotópicos. Mapas com diferentes n 's são inequivalentes. A existência desta relação de equivalência permite-nos separar todos os mapas em classes de equivalência. As próprias classes de equivalência são elementos de um grupo, chamado segundo grupo de homotopia, que neste caso é

$$\pi_2(\mathcal{G}/\mathcal{H}) = \mathbb{Z}$$

Cada mapeamento pertence a uma dada classe de homotopia. Estas classes são elementos do grupo de homotopia $\pi_2(\mathcal{M})$. Conhecendo $\pi_2(\mathcal{M})$, temos informações sobre a topologia das soluções.

Como não há modo de mudarmos continuamente de uma classe a outra, a carga topológica confere estabilidade à solução. A existência de cargas topológicas depende então, de que $\pi_2(\mathcal{G}/\mathcal{H})$ seja não trivial, e portanto, depende da escolha da representação do campo de Higgs.

A estrutura topológica do mapeamento é intimamente ligada à carga magnética da solução. Lembremos que justamente a carga magnética é a carga topológica. Temos aí um critério para a existência de solução de monopolo da teoria.

Para os casos onde vale 3.16, segue que

$$\pi_2(\mathcal{M}) = \pi_2(\mathcal{G}/\mathcal{H}).$$

Então, se pudermos calcular $\pi_2(\mathcal{G}/\mathcal{H})$, saberemos se é possível existirem sólitons. Ocorre que, para qualquer grupo conexo \mathcal{G} ,

$$\pi_2(\mathcal{G}/\mathcal{H}) = \pi_1(\mathcal{H}),$$

que pode ser facilmente encontrado.

Encontraremos uma solução de monopolo explicitamente ao estudarmos a solução de 't Hooft e Polyakov.

3.2.2 Instantons

Instantons são soluções que apresentam características análogas às da solução de sóliton, porém no espaço euclideano. A ação euclideana de uma teoria pode ser obtida a partir da continuação analítica da ação no espaço-tempo de Minkowski

$$S_{Eucl} = -iS_{Mink}.$$

Note que praticamente não há diferença entre soluções sólitons estáticos em um espaço de dimensão $d + 1$ e instantons em d dimensões. Suas propriedades gerais são :

- * São não singulares e localizadas (simetricamente) em todas as direções de \mathbb{E}^4 , inclusive do eixo temporal imaginário;
- * São autoduais, o que significa que são soluções de energia nula;
- * São caracterizadas por uma carga topológica.

Como estes objetos tem energia nula, estão relacionados a algum tipo de flutuação do vácuo localizada.

Instantons são soluções no espaço-tempo euclidiano, e isto significa que estarão associados a efeitos de tunelamento no espaço de Minkowski da teoria quântica. A solução de N -instantons é uma flutuação do vácuo com N unidades de carga topológica.

A carga topológica separa o espaço de Hilbert em setores distintos. Há então um número infinito de vácuos de Minkowski $|n\rangle$ com carga topológica n . Um instanton tunela de $|n\rangle$ para $|n+1\rangle$, N instantons tunelam para $|n+N\rangle$, anti-instantons para $|n-1\rangle$ e assim por diante.

Pensava-se que a teoria de Yang-Mills baseava-se inteiramente no vácuo correspondente a $n=0$. Porém o vácuo tem uma estrutura muito mais intrincada. Sabe-se que os setores topologicamente distintos interligam-se através dos instantons. O verdadeiro vácuo de Yang-Mills é uma superposição de todos estes vácuos. Isto conduz a uma física com novos efeitos qualitativos.

3.3 Nosso paradigma: G = SU(2)

Nossa menina dos olhos é a teoria de Higgs Yang-Mills 3.6 com grupo de gauge SU(2). Este sistema fornece o ambiente necessário para acomodar a simetria de dualidade eletromagnética; acomoda soluções do tipo monopolo, e o grupo SU(2) é o mais simples a preencher os requisitos [Fer97b, Oli95, Oli97].

Trabalharemos com o Higgs na representação adjunta, pois esta é decisiva para a dualidade.

A representação adjunta é definida pela ação do grupo em sua álgebra de Lie

$$gT_a g^{-1} = T_b d_a^b(g) \quad d(g)d(g') = d(gg').$$

Além disso, para elementos infinitesimalmente próximos da identidade $g \sim 1 + i\epsilon^a T_a$ chegamos à

$$d_b^c(T_a) = if_{ab}^c; \quad [T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c. \quad (3.18)$$

Vemos aí que o espaço de representação é a própria a álgebra. E assim, a derivada

covariante atua sobre os campos através do comutador. Então para a representação adjunta temos:

$$\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi - e [W_\mu, \phi] \quad (3.19)$$

Para álgebras de Lie compactas e semi-simples, sempre podemos escolher uma base especial onde as constantes de estrutura são totalmente antissimétricas, $f_{ab}^c = f_{abc}$, com $\text{Tr}(T_a T_b) = \delta_{ab}$. Para o caso do grupo de gauge SU(2), as constantes de estrutura podem ser escritas como

$$f^{abc} = \epsilon_{abc}$$

As equações de movimento de 3.6 em nosso contexto são então

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu G^{a\mu\nu} &= e \epsilon^{abc} \phi^b \mathcal{D}_\nu \phi^c \\ (\mathcal{D}^\mu \mathcal{D}_\mu \phi)^a &= -\lambda \phi^a (\phi^b \phi^b - v^2) \end{aligned} \quad (3.20)$$

mais a identidade de Bianchi

$$\mathcal{D}_\mu {}^* G^{\mu\nu} = 0.$$

O vácuo desta teoria é portanto a situação descrita por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \phi &= 0; \\ G^{a\mu\nu} &= 0; \quad U(\phi) = \frac{\lambda}{4} (v^2 - \phi^2)^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

As duas últimas equações descrevem o vácuo de Higgs, e admitem soluções onde os campos W_μ não sejam puro gauge. Para a solução de monopolo, basta tomarmos as condições do vácuo de Higgs. (Note entretanto que se desejamos configurações de vácuo constantes, então necessariamente $W_\mu = 0$, pois não há meio de termos $\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi + ieD(W_\mu)\phi = 0$ com $\partial_\mu \phi = 0$ e $D(W_\mu)\phi \neq 0$).

Escolhendo um vácuo, digamos ϕ_0 , tal que

$$U(\phi_0) = 0, \quad \phi_0^2 = \text{Tr} \phi_0^a \phi_0^a = v^2$$

estamos escolhendo uma direção na álgebra, pois na representação adjunta ϕ tem o mesmo número de componentes que a dimensão da álgebra. Portanto, o little group de ϕ_0 é definido pelo gerador ϕ_0 :

$$\begin{aligned} D(h)\phi_0 &= \phi_0 \quad \Rightarrow \quad D(T_h)\phi_0 = 0; \quad \phi_0 = \phi_0^a T_a \\ [T_h, \phi_0] &= [T_h, T_a] \phi_0^a = 0 \quad \Rightarrow \quad T_h \propto \phi_0^a T_a. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Assim, o little group tem necessariamente um fator $U(1)$, e podemos escrever seu gerador como

$$Q_h = \frac{e}{v} \phi_0^a T_a \equiv \frac{e}{v} \phi_0.$$

O mecanismo de quebra de simetria presente nesta teoria faz com que certas componentes do campo de gauge adquiram um termo de massa na lagrangiana. Como no vácuo de Higgs $\mathcal{D}_\mu \phi = 0$,

$$D(G_{\mu\nu})\phi = \frac{1}{ie} [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad G_{\mu\nu}^a D(T_a)\phi = 0.$$

Como nesta situação os geradores do little group aniquilam o vácuo, somente aquelas componentes de $G_{\mu\nu}$ que não tem de se anular no vácuo de Higgs estão associadas a \mathcal{H}_ϕ , sendo geradoras das simetrias.

As massas dos campo de gauge, adquiridas através do mecanismo de Higgs, é derivada do termo cinético por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \phi_0 &= e^2 \phi_0 D(W_\mu) D(W^\mu) \phi_0 \\ &= \frac{1}{2} M_{ab}^2 W_\mu^a W^{\mu b} \end{aligned}$$

onde, para o caso da representação adjunta,

$$\begin{aligned} M_{ab}^2 &= e^2 \phi d(\{T_a, T_b\}) \\ &= \frac{1}{2} e^2 ((d(T_a)\phi_0)(d(T_b)\phi_0) + (d(T_b)\phi_0)(d(T_a)\phi_0)) \\ &= e^2 d_{ac}(\phi_0) d_{cb}(\phi_0) \\ &\equiv v^2 Q_{ab}^2. \end{aligned}$$

e usamos 3.18 para obter $((d(T_a)\phi_0)_b = d_{ab}(\phi_0)$, introduzindo $Q_{ab}^2 \equiv (d_{ab}(\frac{e}{v}\phi_0))$.

Assim concluímos que as massas dos bosons de gauge são proporcionais aos autovalores (cargas) dos geradores do $U(1)$. De fato, temos para as massas dos bosons de gauge

$$M = v|Q_e|.$$

3.4 A topologia das soluções de SU(2)

Podemos definir uma variedade dos vácuos de Higgs, como sendo o conjunto de todas as configurações que minimizam o potencial, \mathcal{M}_H . Para o nosso caso este espaço é a esfera dada por $\sum_a \phi^a \phi^a = v^2$.

O campo de Higgs deve ter um valor **não-nulo** no infinito espacial, pois como já vimos, soluções de energia finita devem satisfazer $\phi \rightarrow \phi \in \mathcal{M}$. Então, qualquer solução física deve satisfazer a condição de

$$\phi^a \rightarrow \phi_0(\vec{r}), \quad \phi_0 \phi_0 = v^2, \quad r \rightarrow \infty \quad (3.23)$$

Se $\phi^a \neq 0$ no infinito, então há necessariamente uma direção selecionada no espaço interno, ϕ_0 . Esta escolha quebra a invariância SU(2), no sentido de que qualquer solução que satisfaça 3.23 não pode ser invariante sob o grupo de gauge todo. Esta solução será, entretanto, invariante sob a ação do little group $U(1) = \mathcal{H}_{\phi_0}$. O vetor ϕ_0 determina este subgrupo 3.22.

Como estamos com o campo de Higgs na representação ajunta, de 3.19 temos

$$\epsilon_{abc} W_\mu^b \phi^c$$

Pode-se verificar que as configurações

$$W_\mu^a = \frac{1}{v^2 e} \epsilon^{abc} \phi_0^b \partial_\mu \phi_0^c + \frac{1}{v} \phi_0^a C_\mu$$

onde C_μ é um vetor arbitrário, satisfazem as condições do vácuo de Higgs 3.21. Observe que o termo $\frac{1}{v} \phi_0^a C_\mu$ está na álgebra do little group $\mathcal{H}_{\phi_0} = U(1)$.

Então no vácuo temos

$$\begin{aligned}
 G_{\mu\nu} &= \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - e[W_\mu, W_\nu] = \frac{1}{v}\phi_0 F_{\mu\nu} \\
 F_{\mu\nu} &= \frac{1}{v^3 e}\phi_0 \cdot [\partial_\mu \phi_0, \partial_\nu \phi_0] + \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu.
 \end{aligned}
 \tag{3.24}$$

Das equações de movimento 3.20 temos

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0; \quad \partial_\mu {}^* F^{\mu\nu} = 0$$

e portanto as equações de Maxwell realizam-se no vácuo de Higgs, sendo o $U(1)$ eletromagnético justamente o little group do vácuo. Portanto a distâncias suficientemente grandes para estarmos no vácuo, somente as componentes projetadas na direção de \mathcal{H}_{ϕ_0} sobrevivem,

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{v}\phi_0^a G_{\mu\nu}^a.$$

Então podemos escrever os campos do eletromagnetismo como

$$\begin{aligned}
 E_i &= F_{0i} = \frac{1}{v}\phi_0^a G_{0i}^a = \frac{1}{v}\phi_0^a \mathcal{E}_i^a \\
 B_i &= -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk} F^{jk} = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\phi_0^a G^{ajk} = \phi_0^a \mathcal{B}^a
 \end{aligned}
 \tag{3.25}$$

Conforme as soluções satisfaçam a condição de contorno 3.23, podemos separar a variedade das soluções em classes com setores topológicos distintos.

Podemos escrever a carga topológica 3.15 de forma explícita como funcional do campo de Higgs. De fato temos uma corrente topológica

$$k_\mu = \frac{1}{8\pi}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abc}\partial^\nu\phi_0^a\partial^\rho\phi_0^b\partial^\sigma\phi_0^c$$

conservada devido à antissimetria de $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, $\partial^\mu k_\mu = 0$.

A carga correspondente é

$$\begin{aligned}
 Q_m &= \frac{1}{ev^3}\int d^3x = \frac{1}{2v^3e}\int d^3r \epsilon^{ijk}\epsilon_{abc}\partial_i\phi_0^a\partial_j\phi_0^b\partial_k\phi_0^c \\
 &= \frac{1}{2v^3e}\int d^3x \epsilon^{ijk}\epsilon_{abc}\partial_i\left(\phi_0^a\partial_j\phi_0^b\partial_k\phi_0^c\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2v^3 e} \int_{S_\infty^2} d^2 S^i \left(\epsilon^{ijk} \epsilon_{abc} \phi_0^a \partial_j \phi_0^b \partial_k \phi_0^c \right) \\
&= \frac{1}{2ev^3} Q
\end{aligned} \tag{3.26}$$

sendo $i, j, k = 1, 2, 3$ índices espaciais e Q a carga topológica. (Veja o caso onde tínhamos apenas os campos de gauge, 3.13.) Escrevendo então as cargas do eletromagnetismo obtido como little group do vácuo, temos

$$\begin{aligned}
Q_m &= \int_{S_\infty^2} \vec{B} \cdot d^2 \vec{S} = \frac{1}{v} \int_{S_\infty^2} d^2 S^i \phi_0^a \mathcal{B}_i^a; \\
Q_e &= \int_{S_\infty^2} \vec{E} \cdot d^2 \vec{S} = \frac{1}{v} \int_{S_\infty^2} d^2 S^i \phi_0^a \mathcal{E}_i^a
\end{aligned} \tag{3.27}$$

3.5 O monopolo de 't Hooft Polyakov

Examinemos mais de perto as soluções explícitas das equações de movimento 3.20 do sistema Yang-Mills Higgs. Procuramos uma solução de energia finita, que corresponde a tomar configurações tais que

$$\begin{aligned}
E &= \int d^3 x \Theta_{00} \leq \infty; \\
\Theta_{00} &= \frac{1}{2} \left(\vec{\mathcal{E}}^a \cdot \vec{\mathcal{E}}^a + \vec{\mathcal{B}}^a \cdot \vec{\mathcal{B}}^a + \Pi^a \cdot \Pi^a + \vec{\mathcal{D}}\phi^a \cdot \vec{\mathcal{D}}\phi^a \right) + U(\phi)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

onde Π^a é o momento conjugado à ϕ , $\Pi^a = \mathcal{D}_0 \phi^a$, e \mathcal{E}^a e \mathcal{B}^a são os campos elétrico e magnético não abelianos 3.10. É claro que $\Theta_{00} \geq 0$ com a igualdade se e somente se $G^{a\mu\nu} = \mathcal{D}^\mu \phi^a = U(\phi) = 0$.

O espectro perturbativo consiste em um foton sem massa, bosons de gauge massivos W^\pm com massa $M_W = ev$ e o campo de Higgs com massa dependente da segunda derivada do potencial $U(\phi)$. Para o potencial escolhido, $M_H = \sqrt{2\lambda}v$.

Note que conseguimos o eletromagnetismo usual 3.25 somente nas regiões onde ϕ_0 aponta para a mesma direção interna fixa. Sabemos que o espaço das soluções está separado em regiões desconexas, caracterizadas pelo índice topológico. Portanto configurações com $Q \neq 0$

não podem ser escritas em todo lugar na forma 3.25, e devem ter divergência do dual não nula em algumas regiões, consistente com a existência da carga magnética.

Estas considerações são ilustradas pela solução com $Q = 1$ obtida independentemente por 't Hooft e Polyakov [tH74]. Wu e Yang [WY75], 't Hooft e Polyakov chegaram à solução das equações de movimento.

Como já vimos, o little group \mathcal{H}_s de uma solução s é um subgrupo do grupo de simetria total \mathcal{G} das equações de movimento. A única solução em que $\mathcal{H}_s = \mathcal{G}$ é a solução trivial identicamente nula. Podemos inspecionar qual o conjunto mínimo de simetrias uma solução não trivial de energia finita deve apresentar.

Como estamos lidando com soluções estáticas (esperamos que as soluções de menor energia não tenham energia cinética), há um referencial privilegiado onde os campos estão em repouso. Neste referencial as equações de movimento têm uma simetria de rotação espacial $SO(3)$, e uma simetria translacional. Há também uma simetria $SO(3)$ interna associada com transformações de gauge espacialmente constantes. E finalmente certas simetrias discretas

$$\begin{aligned}
 P : \quad & \phi^a(r) \rightarrow \phi^a(-r) & W_i^a(r) \rightarrow -W_i^a(-r) & W_0^a(r) \rightarrow W_0^a(-r) & (3.29) \\
 Z : \quad & \phi^a(r) \rightarrow \phi^a(r) & W_\mu^a(r) \rightarrow W_\mu^a(r).
 \end{aligned}$$

que geram um $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Porém as soluções serão localizadas, e isto quebra a invariância translacional. Então ficamos com uma simetria contínua $SO(3) \times SO(3)$; mas este grupo é muito grande. Ele possui vários subgrupos invariantes por $SO(3)$: os que contêm rotações ou só no espaço real ou só no espaço interno. A invariância com respeito a rotações espaciais força ϕ a ser constante assintoticamente, satisfazendo a condição de contorno de modo topologicamente trivial. A invariância interna levaria ϕ a se anular em todo lugar, não satisfazendo a condição de contorno. Um ansatz geral, invariante com respeito ao grupo diagonal - que tem geradores $-r \times \nabla + T$ é

$$\begin{cases}
 \phi_a = \frac{r^a}{er^2} H(ver) \\
 W_a^0 = \frac{r^a}{er^2} J(ver) \\
 W_a^i = -\epsilon_{ain} \frac{r^n}{er^2} [1 - K(ver)] + \frac{r^2 \delta_{an} - r^i r^a}{er^3} B(ver) + \frac{r^i r^a}{er^3} C(ver)
 \end{cases} \quad (3.30)$$

Repare na sutil mistura entre os índices de gauge e de espaço-tempo. A invariância com

respeito a PZ força $B = C = 0$. A solução então tem um little group $\mathcal{H}_s \simeq SO(3) \times Z_2$, $SO(3)$ sendo o grupo diagonal e Z_2 o grupo gerado por PZ .

Para este ansätz (e tomando $J = 0$)

$$\begin{cases} \phi_a = \frac{r^a}{er^2} H(ver) \\ W_a^0 = 0 \\ W_a^i = -\epsilon_{ain} \frac{r^n}{er^2} [1 - K(ver)] \end{cases} \quad (3.31)$$

a energia toma a forma

$$E = \frac{4\pi a}{e} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2} \left[\xi^2 \left(\frac{dK}{d\xi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\xi \frac{dH}{d\xi} - H \right)^2 + \frac{1}{2} \left(K^2 - 1 \right)^2 + K^2 H^2 + \frac{\lambda}{4e^2} \left(H^2 - \xi^2 \right)^2 \right] \quad (3.32)$$

onde $\xi = ver$. As condições para a energia permanecer estacionária com respeito à variações de H e K são

$$\xi^2 \frac{d^2 K}{d\xi^2} = KH^2 + K(K^2 - 1) \quad (3.33)$$

$$\xi^2 \frac{d^2 H}{d\xi^2} = 2K^2 H + \frac{\lambda}{e^2} H(H^2 - \xi^2). \quad (3.34)$$

De fato, estas são as equações de movimento do ansätz 3.31.

As condições de contorno apropriadas para a a solução de energia finita são

$$\begin{array}{llll} K - 1 \leq O(\xi); & H \leq O(\xi) & \xi \rightarrow 0 & (3.35) \\ K \rightarrow 0 & H \sim \xi & \text{rapidamente com} & \xi \rightarrow \infty. \end{array}$$

O sistema descrito pelas equações 3.33-3.36 é solucionado através de cálculos numéricos.

Considerando o comportamento assintótico 3.36, as equações 3.33-3.34 tomam a forma

$$\frac{d^2 K}{d\xi^2} = K \quad \frac{d^2 h}{d\xi^2} - \frac{2\lambda}{e^2} h = 0$$

onde $H = h + \xi$. Conseqüentemente, deduz-se

$$K = O \left[\exp \left(-\frac{Mr}{\hbar} \right) \right] \quad H - \xi = O \left[\exp \left(-\frac{\mu r}{\hbar} \right) \right] \quad (3.36)$$

sendo $\mu = (e\lambda)^{1/2}v\hbar$ e $M = ve\hbar$. Temos então um comprimento de onda Compton das partículas massivas associadas aos campos em questão. Isto significa que podemos pensar no monopolo de 't Hooft-Polyakov como tendo um tamanho definido, determinado pelo comprimento de onda Compton, fora do qual os campos massivos se anulam rapidamente, deixando a configuração dos campos indistinguível daquela do monopolo de Dirac.

Esta solução possui então as propriedades

- 1 W_a^μ e ϕ_a são não singulares;
- 2 As componentes à longas distâncias na solução correspondem ao campo de um monopolo magnético estático;
- 3 A solução tem energia finita e é estável;
- 4 Dentro de uma classe de ansatz mais geral do que o apresentado 3.31, a solução é única.

Capítulo 4

A conjectura de Montonen e Olive

4.1 A solução de Bogomolny-Prasad-Sommerfeld

Há um limite específico das equações de movimento 3.20 onde uma solução explícita pode ser encontrada. Para entender a natureza deste limite, primeiramente discutimos um limite geral na configuração de massa com carga topológica conhecido como limite de Bogomol'nyi.

Tomemos as expressões para as cargas 3.27 que são fontes de $F_{\mu\nu} = \vec{\phi}_0 \cdot \vec{G}_{\mu\nu}/v$. Utilizando a identidade de Bianchi $(\mathcal{D}_\mu \cdot \mathcal{B}^\mu)_a = 0$ e o fato de $\mathcal{B}^a \phi_0^a$ estar na subálgebra abeliana, podemos reescrevê-las como

$$\begin{aligned} Q_m &= \frac{1}{v} \int d^3r \partial^k \text{Tr} (\phi_0^a \mathcal{B}_k^a) \\ &= \frac{1}{v} \int d^3r \left(\partial^k \text{Tr} (\phi_0^a \mathcal{B}_k^a) + e \text{Tr} [W^k, \phi_0^a \mathcal{B}_k^a] \right) \\ &= \frac{1}{v} \int d^3r \text{Tr} \mathcal{D}^k (\phi_0^a \mathcal{B}_k^a) \\ &= \frac{1}{v} \int d^3r \text{Tr} \left((\mathcal{D}^k \mathcal{B}_k^a) \phi_0^a + \mathcal{B}_k^a \mathcal{D}^k \phi_0^a \right) \\ &= \frac{1}{v} \int d^3r \text{Tr} \mathcal{B}_k^a \mathcal{D}^k \phi_0^a \end{aligned} \tag{4.1}$$

E por argumentos semelhantes, escrevemos

$$Q_e = \frac{1}{v} \int d^3r \text{Tr} \mathcal{E}_k^a \mathcal{D}^k \phi_0^a \tag{4.2}$$

A densidade de energia é a componente Θ_{00} do tensor de energia-momento associado à lagrangiana 3.6

$$\Theta_{00} = \frac{1}{2} \left(\vec{\mathcal{E}}^a \cdot \vec{\mathcal{E}}^a + \vec{\mathcal{B}}^a \cdot \vec{\mathcal{B}}^a + \Pi^a \cdot \Pi^a + \vec{\mathcal{D}}\phi^a \cdot \vec{\mathcal{D}}\phi^a \right) + U(\phi).$$

Note que a densidade de energia é sempre positiva ou nula; neste último caso, $\theta_{00} = 0$ se e somente se os campos estão na configuração de vácuo:

$$G^{\alpha\mu\nu} = \mathcal{D}^\mu \phi^a = U(\phi) = 0$$

No referencial de repouso do sóliton, $\Pi^a = 0$. Podemos encontrar um limite inferior para a massa clássica (energia) da solução

$$\begin{aligned} M = \int d^3x \Theta_{00} &\geq \int d^3r \frac{1}{2} \left\{ (\mathcal{E}_a^i)^2 + (\mathcal{B}_a^i)^2 + [(\mathcal{D}^i \phi)_a]^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ (\mathcal{E}_a^i - (\mathcal{D}^i \phi)_a \sin \theta)^2 + (\mathcal{B}_a^i - (\mathcal{D}^i \phi)_a \cos \theta)^2 \right\} \\ &\quad + \int d^3x (\mathcal{E}_a^i (\mathcal{D}^i \phi) \sin \theta + \mathcal{B}_a^i (\mathcal{D}^i \phi) \cos \theta) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ (\mathcal{E}_a^i - (\mathcal{D}^i \phi)_a \sin \theta)^2 + (\mathcal{B}_a^i - (\mathcal{D}^i \phi)_a \cos \theta)^2 \right\} \\ &\quad + v(Q_e \sin \theta + Q_m \cos \theta) \\ &\geq v(Q_e \sin \theta + Q_m \cos \theta) \end{aligned} \quad (4.3)$$

para qualquer ângulo θ real. Escolhendo θ de modo conveniente, obtemos

$$M \geq v (Q_e^2 + Q_m^2)^{1/2}. \quad (4.4)$$

Para o monopolo de 't Hooft-Polyakov:

$$M \geq v |Q_m|. \quad (4.5)$$

Estes limites foram obtidos por Bogomol'nyi [Bog76].

Devemos considerar a possibilidade de saturar este limite, numa situação onde valeria a igualdade $M = v |Q_m|$. Para tal, olhando para 4.4, vemos que esta solução deve satisfazer

$$\begin{aligned}
 \Pi^a &= (\mathcal{D}^0 \phi)^a = 0 & \mathcal{E}_a^i &= 0 \\
 \mathcal{B}_a^i &= \pm (\mathcal{D}^i \phi)_a & \left\{ \begin{array}{l} + : Q_m < 0; \\ - : Q_m > 0 \end{array} \right. \\
 U(\phi) &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

O potencial é nulo em todo espaço somente se a constante λ for nula. Podemos entender esta condição num limite em que $\lambda \rightarrow 0$ mas mantendo, como vestígio de U , as condições de contorno

$$|\phi| \rightarrow v \quad r \rightarrow \infty.$$

Isto garante que simetria de gauge seja espontâneamente quebrada, e assim as cargas permaneçam bem definidas e satisfaçam a condição de quantização. Este é o limite de Prasad-Sommerfield.

Pode-se mostrar que as equações 4.7, juntamente com a identidade de Bianchi $(\mathcal{D}^i \mathcal{B}^i)_a = 0$, implicam as equações de movimento com $\lambda = 0$

$$\mathcal{D}_\nu G^{\mu\nu} = e[\phi, \mathcal{D}^\mu \phi] \quad \mathcal{D}^\mu \mathcal{D}_\mu \phi = 0.$$

Então nesta situação, basta-nos resolver uma equação de primeira ordem, a equação de Bogomol'nyi

$$\mathcal{B}_a^i = \pm (\mathcal{D}^i \phi)_a$$

para satisfazermos as equações de movimento de segunda ordem. Substituindo o ansatz 3.31 nestas equações, temos

$$\xi \frac{dK}{d\xi} = -KH \quad \xi \frac{dH}{d\xi} = H - (K^2 - 1) \tag{4.7}$$

Usando as condições de contorno assintóticas 3.36, chega-se à solução

$$H = H_0(\xi) = \xi \coth \xi - 1 \quad K = K_0(\xi) = \frac{\xi}{\sinh \xi} \tag{4.8}$$

No limite de Prasad-Sommerfield, como $\lambda \rightarrow 0$, o campo de Higgs tem massa nula. Para saturar o limite de Bogomol'nyi no caso de dyons, uma solução geral deve satisfazer

$$\mathcal{D}_0\phi^a = 0, \quad \mathcal{E}_k^a = (\mathcal{D}_k\phi)^a \sin\theta, \quad \mathcal{B}_k^a = (\mathcal{D}_k\phi)^a \cos\theta, \quad (4.9)$$

onde $\tan\theta = Q_e/Q_m$. As soluções que obedecem este conjunto de equações são denominadas estados BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield) [Bog76], [PS75]. Para os estados BPS,

$$M = v (Q_e^2 + Q_m^2)^{1/2}. \quad (4.10)$$

Uma vez satisfeitas 4.9, cumprem-se imediatamente as equações não lineares de movimento 3.20 (para $U(\phi) = 0$).

4.2 Coordenadas coletivas: espaço de moduli do monopolo

Dada uma solução clássica em uma teoria de campos, geralmente esta faz parte de uma família multi-paramétrica de soluções com a mesma energia. Os parâmetros que nomeiam as diferentes soluções degeneradas são chamados coordenadas coletivas ou **moduli**, e o espaço de soluções de energia (e carga topológica) fixa é denominado **espaço de moduli** das soluções. Antes de discutirmos uma situação geral, será útil identificaremos este espaço para um monopolo BPS de carga 1 [Os82, Os79]. Neste caso, o **espaço de moduli** é o espaço das simetrias da equação de Bogomol'nyi para $Q_m = 1$.

Monopolos BPS são estáticos: qualquer movimento, por menor que seja, aumenta sua energia cinética e faz com que sua energia total seja estritamente maior do que a do limite de Bogomol'nyi. Entretanto, se permitirmos movimentos no espaço dos campos de pequenas velocidades, e estes movimentos iniciarem tangenciando o **espaço de moduli**, a conservação da energia previne que o movimento desloque a solução para muito longe deste espaço. Do mesmo modo que uma partícula movendo-se perto do mínimo de um poço de potencial, o movimento de monopolos BPS lentos pode ser aproximado pelo movimento no **espaço de moduli**. Suprimindo as oscilações nas direções transversas (que custariam muito energeticamente), o movimento fica restrito a estas direções planas - direções nas quais deslocamos as soluções e permanecemos no **espaço de moduli**. Manton [Man82] mostrou que este movimento ao longo das direções planas é geodésico relativo à métrica do **espaço de moduli**.

Expandindo o funcional da ação em torno da configuração de um monopolo BPS encontramos uma teoria efetiva em termos das coordenadas coletivas.

Construímos um monopolo em repouso na origem 4.8. Pela invariância translacional da lagrangiana, um monopolo situado em qualquer outro ponto em \mathbb{R}^3 também é solução com mesma energia. Se denotarmos por \vec{X} esta coordenada coletiva do centro de massa, então a solução geral

$$\phi_{cl}^a(\vec{r} + \vec{X}), \quad W_{i\,cl}^a(\vec{r} + \vec{X})$$

que para $\vec{X} = 0$ é o monopolo BPS. Podemos construir um monopolo movendo-se lentamente permitindo que X varie com o tempo, de modo que tenhamos os campos $W_{i\,cl}^a(\vec{r} + \vec{X}(t))$. Esta dependência temporal dará origem a um campo elétrico, e a energia do monopolo ultrapassará a do limite de Bogomol'nyi pela energia cinética. Isto é precisamente o que deveria ocorrer para os movimentos no espaço de moduli: os termos de potencial permanecem constantes e os termos cinéticos são proporcionais a velocidade do movimento ao longo do moduli.

O restante das coordenadas coletivas requer uma pequena digressão, a respeito de alguns pontos básicos sobre o espaço de configuração das teorias de gauge. Em teorias de gauge devemos fazer distinção entre transformações de gauge pequenas, que são aquelas que se aproximam da identidade no infinito espacial, e aquelas que têm comportamento diverso, as transformações de gauge grandes. Elas têm distintos papéis nas teorias de gauge. Em particular, dado o espaço $\mathcal{A} = (W_\mu, \phi)$ dos campos do sistema Yang-Mills Higgs no limite de Prasad-Sommerfield, temos que o espaço de configuração é dado por

$$\mathcal{C} = \mathcal{A}/\mathcal{G}'$$

onde \mathcal{G}' é o grupo das transformações de gauge pequenas. Então os estados físicos são invariantes sob \mathcal{G}' , que não age como simetria de \mathcal{C} . Pelo contrário, em \mathcal{G}' está contida uma redundância na descrição da teoria ao trabalharmos em \mathcal{A} . Transformações de gauge grandes por outro lado não identificam pontos em \mathcal{C} , atuando como verdadeiras simetrias que relacionam diferentes pontos em \mathcal{C} com as mesmas propriedades.

Visto isto, tentaremos identificar o restante das coordenadas coletivas associadas a transformação global $U(1)$.

É conveniente fixar-mos o gauge $W_0 = 0$, ou seja, trabalharemos no gauge temporal. Isto nos deixa a liberdade de efetuar transformações de gauge independentes do tempo, pois estas preservam o gauge temporal. O gauge temporal é preservado pela dinâmica se esta satisfaz as equações de movimento para W_0 neste gauge (lei de Gauss)

$$\mathcal{D}_i \dot{W}_i + [\phi, \dot{\phi}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}_i \delta \dot{W}_i + [\phi, \delta \dot{\phi}] = 0$$

Na configuração do monopolo BPS, os campos obedecem a equação de Bogomol'nyi $\mathcal{B}_i = \mathcal{D}_i \phi$. Uma deformação desta solução que obedece a equação de Bogomol'nyi linearizada

$$\epsilon_{ijk} \mathcal{D}_j \delta W_k = \mathcal{D}_i \delta \phi + [\delta W_i, \phi]$$

e respeita a lei de Gauss é dada univocamente por

$$\begin{aligned} \delta W_i &= \mathcal{D}_i (\chi(t) \phi) \\ \delta \phi &= 0 \\ \delta W_0 &= \mathcal{D}_0 (\chi(t) \phi) - \dot{\chi} \phi \end{aligned} \tag{4.11}$$

com χ uma função arbitrária do tempo. Note que W_0 é nulo, porém o incluímos apenas para tornar mais clara a relação com transformação de gauge. Exploreemos as propriedades de 4.11.

- * Quando $\dot{\chi} = 0$, a deformação é dada por uma transformação de gauge grande, com $g = e^{\chi \phi}$, sendo χ então um modo zero físico.
- * Para $\dot{\chi} \neq 0$, a equação de Bogomol'nyi linearizada continua satisfeita, não havendo mudança na energia potencial $(\vec{\mathcal{B}}^2 + (\vec{\mathcal{D}}\phi)^2)$; porém há um aumento na energia cinética $(\dot{\mathcal{E}}^2)$.
- * Desde que o grupo de gauge exato $U(1)$ é compacto, χ é uma coordenada periódica. Portanto o espaço de moduli é topologicamente $\mathcal{M}_1 = \mathbb{R}^3 \times S^1$.

Antes de prosseguirmos, podemos fazer uma conexão entre as equações de Bogomol'nyi em \mathbb{R}^3 e as equações de Yang-Mills autoduais em \mathbb{R}^4 . Introduzindo uma quarta componente espacial x_4 , e impondo que nada dependa desta nova coordenada $\partial_4 \equiv 0$, podemos interpretar o campo de Higgs ϕ como a quarta componente de W_μ , pois estando na representação adjunta, o Higgs tem mesmo número de componentes que a dimensão do grupo. Se escrevemos $\phi = W_4$, podemos reescrever a equação de Bogomol'nyi como

$$G_{ab} = {}^*G_{ab}$$

onde $a, b, = 1 \cdots 4$, $W_a = (W_i, W_4 = \phi)$, $G_{ab} = (G_{ij}, G_{i4} = \mathcal{D}_i \phi)$, e trabalhamos em \mathbb{R}^4 com coordenadas x_1, x_2, x_3, x_4 e métrica euclideana, de modo que $** = 1$. Nesta notação a lei de Gauss tem a forma

$$\mathcal{D}_a \dot{W}_a = 0$$

e as transformações de gauge tomam a forma

$$\delta W_a = \mathcal{D}_a \Lambda$$

onde sempre está subentendido que nada depende de x_4 .

O espaço de moduli \mathcal{M}_k de k monopolos é definido como o espaço de soluções da equação de Bogomol'nyi com carga topológica k . Vetores tangentes à \mathcal{M}_k , $\delta_\alpha W_a$, são deformações de uma dada solução de carga k , $W_a \rightarrow W_a + \delta_\alpha W_a$, que satisfazem as equações de Bogomol'nyi linearizadas

$$\mathcal{D}_a + \delta_\alpha W_b - \mathcal{D}_b + \delta_\alpha W_a = \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} (\mathcal{D}_c \delta_\alpha W_d - \mathcal{D}_d + \delta_\alpha W_c),$$

e são ortogonais à transformações de gauge pequenas

$$\mathcal{D}_a + \delta_\alpha W_a = 0 \tag{4.12}$$

de modo a não deixarem o espaço de configurações físico. Dados tais vetores tangentes, a métrica em \mathcal{M}_k é

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} = - \int d^3x \text{Tr} \delta_\alpha W_a \delta_\beta W_a.$$

Esta métrica é inerente à ação da teoria de gauge considerada. Imagine que temos uma solução de monopolo BPS de carga k . $W_a(\vec{x}, z^\alpha)$, dependendo das $4k$ coordenadas coletivas z^α . Pela definição energia potencial independe de z^α [Har96]. Podemos pensar que poderíamos construir vetores tangentes a \mathcal{M}_k simplesmente diferenciando com respeito a z^α . Isto não é correto, pois não há garantia de que a mudança resultante em W_a seja ortogonal às transformações de gauge; em outras palavras, a diferenciação com respeito a z^α pode conter uma transformação de gauge. Entretanto, podemos sempre resolver este problema desfazendo a parte da transformação de gauge desta variação, escrevendo o vetor tangente como

$$\delta_\alpha W_a = \frac{\partial W_a}{\partial z^\alpha} - \mathcal{D}_a \epsilon_\alpha,$$

onde $\epsilon(\vec{x}, z^\beta)$ é um parâmetro de gauge escolhido de modo a satisfazer 4.12.

Para construir a métrica, consideramos pequenas variações dependentes do tempo das coordenadas coletivas $z^\alpha(t)$. Se escrevemos

$$W_a(\vec{x}, z^\alpha(t)), \quad W_0 = \dot{z}^\alpha \epsilon_\alpha,$$

então $G_{0a} = \dot{z}^\alpha \delta_\alpha W_a$ e a ação é

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2} \int d^3x dt \text{Tr} G_{0a} G^{0a} = \frac{1}{2} \int dt \mathcal{G}_{\alpha\beta} \dot{z}^\alpha \dot{z}^\beta.$$

Nesta análise utilizamos o fato de que o campo de Higgs está na mesma representação - adjunta - que os campos de gauge. Normalmente as soluções destas equações descrevem instantons, mas aqui as soluções independem tanto de x_4 como do tempo, e temos uma característica diferente descrevendo o que chamamos monopolos BPS. Para justificar isto devemos determinar a natureza do espaço de moduli $\mathcal{M}(m)$ das soluções da equação de Bogomol'nyi com carga magnética m .

Suponha que procuramos por pequenos desvios da solução que continuam solucionando a equação. Estes desvios satisfazem a equação linearizada, como já vimos, tendo como fundo a solução original. Após desprezarmos as transformações de gauge grandes, esta equação linear pode ser vista como uma equação de Dirac para espiniores na representação adjunta em um background de Bogomol'nyi. Soluções formam um espaço vetorial cuja dimensão é

finita, e dada por uma versão do teorema de índice de Atiyah-Singer [Cal78] como sendo

$$\text{Dim } \mathcal{M}(m) = 4|m|. \quad (4.13)$$

E. Weinberg [Wei79] mostrou que $\mathcal{M}(m)$ é não compacta, o que tem consequências notáveis. Pode-se reespressar a afirmação 4.13 dizendo-se que uma solução com número quântico magnético m tem $4m$ modos zero bosonicos. Em outras palavras, há um espaço de dimensão $4m$ de alterações com significado físico, que podem ser feitos sem mudança na energia. Quando $m = 1$ três das quatro possibilidades correspondem a deslocar o monopolo. Então três das coordenadas do espaço de moduli $\mathcal{M}(1)$ são coordenadas espaciais do monopolo. A quarta coordenada tem um significado mais sutil: descreve uma coordenada conjugada à carga elétrica, do mesmo modo que a coordenada espacial é conjugada ao momento. O momento é excitado quando o espaço de coordenadas move-se no tempo. Similarmente, cargas elétricas podem ser excitadas quando sua coordenada conjugada move-se no tempo. Então quando consideramos movimento no espaço de moduli de soluções BPS podemos atribuir ao monopolo momento e carga elétrica (de modo que tornam-se dyons).

Como $\text{Dim } \mathcal{M}(m) = m \text{Dim } \mathcal{M}(1)$, conclui-se que $\mathcal{M}(m)$ descreve m monopolos magnéticos, cada um com três coordenadas espaciais e sua própria coordenada de carga. Portanto cada ponto de $\mathcal{M}(m)$ descreve uma configuração de m monopolos. Desde que a solução é independente do tempo, esta configuração é estacionária. Pela equação de Newton, segue que os monopolos, surpreendentemente, não exercem força entre si quando estão em repouso relativo. Em outras palavras, forças entre os monopolos anulam-se na situação de repouso relativo, e portanto devem depender da velocidade.

Outra observação é que não há modos zero correspondendo a orientação angular de nenhum monopolo. Isto significa que monopolos não adquirem momento angular intrínseco por seu movimento clássico.

4.3 O efeito Witten

Temos a liberdade de incluir mais um termo na lagrangiana do nosso modelo, sem alterar suas propriedades principais:

$$\mathcal{L}_\theta = -\frac{e^2\theta}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}G_{\mu\nu}^a G_{\alpha\beta}^a.$$

Este termo é localmente uma derivada total, e assim não contribui para as equações de movimento. Há uma dependência em θ nos efeitos de instantons, que envolvem comportamento não trivial dos campos a grandes distâncias. Witten [Wit79] mostrou que a presença de monopolos magnéticos também traz conseqüências não triviais devidas ao termo- θ (como é conhecido na literatura): ele muda os valores permitidos da carga elétrica para os dyons da teoria.

As coordenadas coletivas (graus de liberdade) do dyon permitem que ele carregue carga elétrica. As coordenadas coletivas de dyon surgem através de transformações de gauge $U(1)$ que são constantes no infinito (transformações de gauge pequenas). Consideremos estas transformações na presença do termo- θ . Estamos interessados em transformações de gauge, constantes no infinito, que sejam rotações no subgrupo $U(1)$ do $SU(2)$ escolhido pelo campo de gauge. Isto é, rotações em $SU(2)$ em torno do eixo $\phi^a/|\phi^a|$. A ação desta transformação de gauge infinitesimal nos campos é

$$\delta W_\mu^a = \frac{1}{ev}(\mathcal{D}_\mu\phi)^a.$$

Denotemos por \mathcal{N} o gerador desta transformação. Se fizermos uma rotação de 2π em torno do eixo $\phi^a/|\phi^a|$, devemos ter a transformação identidade. Isto é, os estados devem obedecer

$$e^{2\pi i\mathcal{N}} = 1. \quad (4.14)$$

Utilizando o método de Noether,

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \int d^3x \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0 W_\mu^a} \delta W_\mu^a \\ &= \frac{1}{ev} \int d^3x \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0 W_i^a} \cdot (\mathcal{D}_i\phi)^a. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Desde que o momento conjugado a W_i^a é \mathcal{E}_i^a , temos

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= \frac{1}{ev} \int d^3x \mathcal{E}_i^a \cdot (\mathcal{D}_i\phi)^a \\ &= \frac{Q_e}{e}\end{aligned}\quad (4.16)$$

A quantização de \mathcal{N} então implica que $Q_e = ne$ para algum inteiro n . Incluindo o termo- θ , a carga de Noether é modificada por

$$\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N} + \frac{1}{ev} \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}_\theta}{\partial \partial_0 W_i^a} \cdot (\mathcal{D}_i\phi)^a.$$

Computando chegamos a

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{N} &= \frac{e\theta}{8\pi^2 v} \int d^3x \epsilon^{0i\alpha\beta} G_{\alpha\beta}^a (\mathcal{D}_i\phi)^a \\ &= \frac{e\theta}{8\pi^2 v} \int d^3x \mathcal{B}_i^a (\mathcal{D}_i\phi)^a \\ &= \frac{e\theta}{8\pi^2 v} Q_m,\end{aligned}\quad (4.17)$$

com Q_m a carga magnética. em outras palavras

$$\mathcal{N} = \frac{Q_e}{e} + \frac{e\theta}{8\pi^2} Q_m$$

A condição 4.14 então implica que

$$Q_e = n_e - \frac{e\theta n_m}{2\pi}\quad (4.18)$$

4.4 A conjectura de Montonen e Olive

O quadro que se nos apresenta até o momento é o seguinte: partindo da proposta de Dirac de implementar quanticamente a simetria de dualidade, possível quando satisfaz-se a condição

$$Q_m Q_e = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

desenvolvemos uma teoria onde a quantização da carga elétrica pode ser deduzida naturalmente. Porém não conseguimos evitar a presença de monopolos magnéticos, que mesmo no

contexto onde o eletromagnetismo surge da quebra de uma simetria não -abeliana, aparecem como carga topológica das soluções de sóliton.

Neste desenvolvimento, deduzimos também uma elegante fórmula universal de massa,

$$M = v\sqrt{Q_m^2 + Q_e^2} \quad (4.19)$$

que respeita a simetria

$$Q_e \rightarrow Q_m; \quad Q_m \rightarrow -Q_e.$$

Em analogia com o caso entre o modelo de sine-Gordon e o de Thirring, onde se identifica a corrente topológica de um com a corrente de Noether do outro, podemos procurar em nossa teoria uma ação para outro conjunto de campos que descreva a mesma teoria. Skyrme [Sky61] mostrou que, em duas dimensões, o sóliton da teoria de sine-Gordon poderia ser considerado como sendo criado por um novo campo quântico obedecendo às equações de movimento do modelo de Thirring massivo. Portanto a mesma teoria quântica de campos pode ser descrita por duas ações distintas, uma utilizando os férmions do modelo de Thirring, e outra utilizando os sólitons de sine-Gordon. Skyrme relacionou estes dois tipo de partículas a princípio tão distintas mostrando que, na teoria quântica completa, é possível construir um novo campo quântico cuja flutuação é um sóliton. Este novo campo é obtido por uma expressão exponencial em termos do campo original ϕ

$$\psi(x) = e^{i\beta(\phi + \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{\partial \phi}{\partial t'})}.$$

Coleman e Mandula [CM69] verificaram posteriormente que ψ satisfaz as equações de movimento do modelo de Thirring massivo.

É então natural perguntar se algo similar pode ocorrer em quatro dimensões, com a teoria em questão, onde os sólitons carregam carga magnética, com o campo de Coulomb associado. Isto sugere que o operador quântico hipotético que criaria o sóliton deveria acoplar-se a um grupo de gauge magnético, com constante de acoplamento inversamente relacionada a constante elétrica original, por conta da condição de quantização de Dirac.

Pensando ao longo destas linhas, duas conjecturas mais específicas foram propostas em 1977. Primeiramente, considerando uma teoria mais geral, com grupo de simetria de gauge ex-

ata \mathcal{H} . Goddard, Nuyts e Olive [GNO77] estabeleceram uma versão não-abeliana da condição de Dirac e usaram-na para propor a conjectura de que o grupo magnético, ou dual \mathcal{H}^ν poderia ser construído seguindo os seguintes passos:

- A álgebra de Lie de \mathcal{H}^ν é especificada dizendo-se que suas raízes α^ν são as co-raízes de \mathcal{H} :

$$\alpha \rightarrow \alpha^\nu = \frac{2\alpha}{\alpha^2}$$

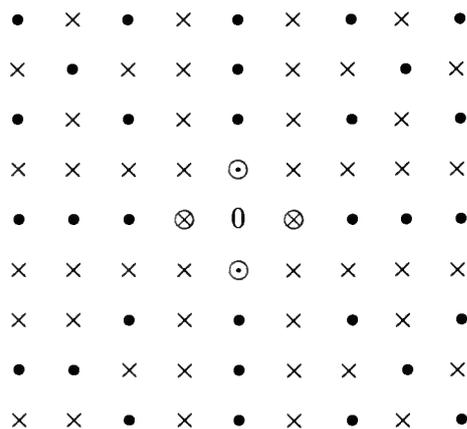
- A estrutura global do grupo \mathcal{H}^ν é especificada pela construção de seu centro $Z(\mathcal{H}^\nu)$, a partir do de \mathcal{H} , $Z(\mathcal{H})$:

$$Z(\mathcal{H}) \rightarrow Z(\mathcal{H}^\nu) = \frac{Z(\tilde{\mathcal{H}})}{Z(\mathcal{H})}$$

onde $\tilde{\mathcal{H}}$ é o grupo de recobrimento universal de \mathcal{H} , isto é, o único grupo de Lie conexo com mesma álgebra de Lie de \mathcal{H} .

Montonen e Olive consideraram uma proposta mais específica em um contexto mais simples, utilizando o modelo estudado até aqui.

Os estados quânticos possíveis carregam valores de Q_e e Q_m que formam uma rede de inteiros quando colocados no plano complexo $Q_e + iQ_m$ (com cordenada cartesianas (Q_e, Q_m))



Ignorando possíveis dyons, em número de seis, estados de uma partícula correspondem a cinco pontos nesta rede: $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$. O fóton e o Higgs correspondem à origem

$(0,0)$, e os bosons de gauge massivos W^\pm aos pontos $(\pm 1,0) \otimes$. Então as partículas criadas pelos campos fundamentais na ação elétrica original situam-se sobre o eixo real - eixo elétrico. Os monopolos (sólitons) $M^\pm \odot$ estão sobre o eixo imaginário, o eixo magnético, em $(0, \pm 1)$. Os dyons distribuem-se sobre o plano, porém não nos preocupamos com eles por ora. Organizando estes pontos de rede de acordo com sua massa e carga, obtemos

partícula	carga elétrica	carga magética	massa
fóton - γ	0	0	0
higgs - ϕ	0	0	0
W^\pm	$\pm Q_e$	0	vQ_e
M^\pm	0	$\pm Q_m$	vQ_m

Agora, se seguindo a transformação

$$Q_e \rightarrow Q_m = \frac{4\pi n}{Q_e} \quad (4.20)$$

por uma rotação por um ângulo reto no plano $Q_e + iQ_m$, os cinco pontos são rearranjados. Isto sugere que a formulação dual ou magnética da teoria com M^+ criados por campos presentes na ação será também uma teoria com quebra espontânea de simetria, mas com contante de acoplamento modificada. Nesta nova formulação seriam as partículas W^+ que apareceriam como sólitons.

Esta é a conjectura de Montonen-Olive da dualidade eletromagnética em sua forma original. Em princípio, ela poderia ser provada encontrando-se o operador de criação de sóliton, e mostrando que sua dinâmica é a de um boson de gauge.

Porém para que possamos trocar os papéis entre os estados, é necessário que os sólitons tenham spin 1, sendo os bosons de gauge da descrição dual. Mais ainda, temos que garantir que esta simetria permaneça ao quantizarmos totalmente a teoria, ou seja, que a fórmula de massa para os estados BPS 4.10, universal e invariante pela transformação, não sofra correções quânticas. E afinal, é preciso que os dyons participem da simetria.

Outro teste para a dualidade diz respeito ao fato de que, de acordo com a existência de soluções estáticas da equação de Bogomol'nyi com carga magnética $n_m = 2$, um par M^+M^+ não exerce força estática entre si [GM86]. Este resultado está de acordo com a

formulação elétrica da teoria, e deve ser confirmado também pela formulação magnética. Isto equivale a verificar que não deve haver força entre o par W^+W^+ na formulação elétrica. Na aproximação de Born, dois diagramas de Feynman contribuem, devido a trocas do foton e do Higgs. Utilizando as regras de Feynman, encontramos que a troca do foton leva a esperada repulsão de Coulomb, mas a segunda contribuição precisamente cancela a primeira. Isto ocorre devido ao fato do Higgs ter spin zero e massa nula no limite de Prasad-Sommerfield.

A validade da conjectura de dualidade então depende do modo como a teoria é quantizada. D'Adda, Di Vecchia e Horsley [DHV78] propuseram que o método de quantização deveria ser supersimétrico. Como veremos na Parte II, a supersimtria esclarece a questão do spin e garante a exatidão da fórmula de massa.

4.5 Dualidade Eletromagnética e o Grupo Modular

Até aqui deixamos os dyons fora da análise. Vejamos como afetam a conjectura de Montonen e Olive.

Dyons carregam carga magnética e elétrica, mas não em uma combinação qualquer. A condição de Dirac-Zwanziger-Schwinger

$$(Q_e)_1(Q_m)_2 - (Q_e)_2(Q_m)_1 = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.21)$$

respeita a simetria de dualidade, ao rodarmos os dois dyons. Podemos verificar para quais valores de cargas ela é satisfeita. Sendo um ponto na rede de cargas, (Q_e, Q_m) , podemos identificar um dyon com um vetor no plano complexo, $Q_e + iQ_m$. Temos estados puramente elétricos, e existindo uma carga magnética há um valor mínimo para Q_e , digamos q ; assim os valores permitidos para estados puramente elétrico formam uma rede unidimensional $Q_e = nq$, $n \in \mathbb{Z}$. Pela condição 4.21, a menor carga magnética positiva g satisfaz

$$g = \frac{2\pi n_0}{q},$$

onde n_0 é um inteiro dependendo de detalhes da teoria. Consideremos dois dyons (Q_{e1}, g) e (Q_{e2}, g) . Então por 4.21

$$Q_{e1} - Q_{e2} = \frac{2\pi n}{g} = \frac{nq}{n_0}.$$

Como existe um estado com carga puramente elétrica $Q_{e1} - Q_{e2} = Q_e$, n deve ser um múltiplo inteiro de n_0 para este estado. Como vimos, o efeito Witten permite uma mudança na carga elétrica para dyons, e temos

$$Q_e = q \left(n_e + \frac{\theta}{2\pi} \right)$$

sendo θ uma variável angular. Portanto

$$Q_e + iQ_m = q(n_e + \tau), \quad \tau = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{2\pi i n_0}{q^2}. \quad (4.22)$$

Repetindo o argumento para estados mais gerais com carga magnética mg

$$Q_e + iQ_m = q(n_m \tau + n_e) \quad n_m, n_e \in \mathbb{Z}.$$

Esta é a rede de cargas, que tem períodos q e $q\tau$, com raio τ . Note que τ , que define o eixo magnético, tem uma componente real, devido ao termo θ ; sua parte imaginária é positiva, sendo essencialmente o inverso da constante de estrutura fina.

Dada uma teoria específica, uma questão importante para a dualidade eletromagnética refere-se a identificação do subconjunto da rede de cargas a que correspondem estados de uma partícula. (Esta identificação será feita na Parte II, 5.7.1.)

Se os estados de uma partícula obedecem à fórmula universal de massa 4.19 e são estáveis com respeito ao decaimento em partículas mais leves, então devem corresponder a pontos na rede de carga denominados vetores primitivos; suas coordenadas com respeito aos períodos q e $q\tau$ devem ser inteiros primos entre si.

Há um número infinito de vetores primitivos na rede; suas massas podem ser indefinidamente grandes e estes pontos correspondem aos \times 's na figura da rede de cargas.

Então esperamos que o espectro dos dyons que são estados de uma partícula correspondam a vetores primitivos da rede (fora do eixo real).

Armado com a nova intuição de que o espectro de estados de uma partícula correspondem aos vetores primitivos da rede de carga, ao invés de somente os cinco pontos considerados previamente, podemos ver que a conjectura de Montonen-Olive original era muito modesta. Ao invés de possuir duas escolhas equivalentes de ação, a teoria aparentemente possuiria um número infinito delas, todas com estrutura isomórficas, porém com diferentes valores dos parâmetros.

A razão para tal, é que é a rede de carga que descreve a realidade física. Escolhas da ação correspondem a escolhas da base na rede, que é um par de vetores não colineares co-primos (ou, um par de períodos). Como a rede de cargas é bi-dimensional, estas escolhas estão relacionadas pela ação do grupo modular, um grupo discreto infinito contendo as transformações 4.20.

Escolhamos um vetor primitivo da rede, um número complexo z . Então podemos associar campos quânticos aos pontos $0, \pm z$. As partículas correspondentes à origem têm massa nula e são neutras, enquanto as ligadas a $\pm z$ têm carga complexa $\pm z$ e massa $v|z|$. Podemos escrever uma ação onde estas partículas são os campos fundamentais. O ângulo θ requer um segundo vetor primitivo não alinhado a z , $z\tau'$. Os estados restantes de uma partícula aparecem como sólitons ou estados ligados desses campos fundamentais.

Estes dois vetores não colineares formam uma base alternativa para a rede de cargas. Podemos expressá-los em termos da base original q e $q\tau$ como

$$\left. \begin{aligned} z\tau' &= aq\tau + bq \\ z &= cq\tau + dq \end{aligned} \right\} \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}. \quad (4.23)$$

Da mesma forma, os vetores da base original podem ser escritos em termos de combinações lineares inteiras de z e $z\tau'$. Isto impõe uma condição sobre os coeficientes da transformação

$$ad - bc = \pm 1.$$

(Mudando um sinal podemos tomar sempre $+1$.) As matrizes

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det A = 1 \quad (4.24)$$

formam um grupo, $SL(2, \mathbb{Z})$, cujo quociente por seu centro é o chamado **grupo modular**. Podemos dividir a primeira das equações 4.23 pela segunda, para obtermos

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}. \quad (4.25)$$

Estas transformações formam o **grupo modular** e preservam o sinal da parte imaginária de τ . Isto fornece uma relação entre duas escolhas de ação, correspondentes as duas escolhas de bases.

Costuma-se pensar no grupo modular como sendo gerado pelos elementos T e S

$$T : \tau \rightarrow \tau + 1 \quad S : \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}.$$

Então, de acordo com 4.22, T aumenta o ângulo θ por 2π . Se θ é zero, S é precisamente a transformação 4.20.

Consideremos o espectro de estados BPS. Identificaremos o dyon (Q_e, Q_m) por $\vec{n} = (n_e, n_m)$; $SL(2, \mathbb{Z})$ age sobre estes números quânticos de carga através de $A \cdot \vec{n}$. Assumimos que para todos os valores de τ há um estado com números quânticos $\vec{n} = (1, 0)$; então a conjectura de dualidade prevê a existência de estados com números quânticos na órbita $SL(2, \mathbb{Z})$

$$A \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}.$$

Como $\det A = 1$, a e c não são inteiros arbitrários: existem b e d tais que $ad - bc = 1$. Isto significa que a e c são coprimos, como já vimos, estando esta condição ligada a estabilidade de um estado de uma partícula.

Reescrevendo a fórmula para M^2 , em termos de τ

$$M^2 = 4\pi v^2 \vec{n}^t \cdot G(\tau) \cdot \vec{n}$$

onde

$$G(\tau) = \frac{1}{\text{Im } \tau} \begin{pmatrix} 1 & \text{Re } \tau \\ \text{Re } \tau & |\tau|^2 \end{pmatrix}.$$

Deste modo vemos que a fórmula de massa é invariante por $SL(2, \mathbb{Z})$, pois

$$\vec{n} \mapsto A \cdot \vec{n} \quad G(\tau) \mapsto G(A \cdot \tau) = (A^{-1})^t \cdot G(\tau) \cdot A^{-1}.$$

A ação de $PSL(2, \mathbb{Z})$ no plano complexo superior pode ser estudada a partir de um domínio fundamental D definido por

$$D = \left\{ \tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \tau \geq 0, \quad |\text{Re } \tau| \leq \frac{1}{2}, \quad |\tau| > 1 \right\},$$

que tem a propriedade de que sua órbita sob $PSL(2, \mathbb{Z})$ gera todo o plano complexo superior e que dois pontos quaisquer em seu interior

$$\text{Int } D = \left\{ \tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \tau > 0, \quad |\text{Re } \tau| < \frac{1}{2}, \quad |\tau| > 1 \right\},$$

não são relacionados pela ação de $PSL(2, \mathbb{Z})$. Pode-se mostrar que a matriz $G(\tau)$, definida sobre o plano complexo superior possui as propriedades

$$\det G(\tau) = 1 \quad \text{e} \quad G(\tau) \geq 0.$$

O fato de $G(\tau)$ ser positiva definida nos permitirá definir uma função distância, ou seja, uma métrica no espaço das cargas. Em outras palavras, se definimos $\|\vec{n}\|^2 \equiv M^2$, que é a massa do dyon considerado, temos

$$\|\vec{n} + \vec{m}\| \leq \|\vec{n}\| + \|\vec{m}\|.$$

Para que 4.25 seja uma simetria deve haver também uma reorganização dos estados. De 4.18 vemos que a transformação T desloca a carga magnética por $-n_m$ (pois $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$). Sabemos que S requer a troca dos números quânticos elétrico e magnético.

Quando a função β da teoria se anula, a conjectura de dualidade proposta por Montonen e Olive pode ser expressa diretamente como a invariância modular da função de partição. Pensando então em uma teoria com lagrangiana $\mathcal{L}(\Phi; e, \theta)$, a dualidade estabelece que a função de partição

$$\mathcal{Z}(e, \theta) = \int \mathcal{D}\Phi e^{-\int \mathcal{L}(\Phi; e, \theta)} \equiv \mathcal{Z}(\tau)$$

permanece invariante sob a ação do grupo de dualidade $SL(2, \mathbb{Z})$; portanto

$$\mathcal{Z}(\tau) = \mathcal{Z}(\tau + 1) \quad \mathcal{Z}(\tau) = \mathcal{Z}(-1/\tau).$$

Assim, a invariância sob $SL(2, \mathbb{Z})$ significa que a função de partição \mathcal{Z} deve ter uma forma modular.

Parte II

A Teoria Quântica

Capítulo 5

Supersimetria

5.1 Monopolos e férmions

Como vimos anteriormente, a dualidade é uma simetria intrinsecamente quântica, e relaciona os regimes de acoplamento forte e fraco. Como tal, não podemos esperar compreendê-la mais facilmente a não ser que estejamos trabalhando onde os efeitos quânticos estão sob perfeito controle, um cenário fornecido pelas teorias supersimétricas. Supersimetria envolve a adição de campos férmionicos com acoplamentos especiais. Entretanto muitas das características dos férmions em um background de monopolo são independentes da supersimetria. Começemos então por uma discussão geral destes efeitos dos férmions, e depois podemos generalizar os resultados para uma teoria supersimétrica.

Primeiramente consideremos férmions de Dirac acoplados aos campos aparecendo em nossa lagrangiana de Higgs Yang-Mills 3.6, determinada por

$$\mathcal{L}_\psi = i\bar{\psi}_n \gamma^\mu (\mathcal{D}_\mu \psi)_n - i\bar{\psi}_n T_{mn}^a \phi^a \psi_m$$

com T_{mn}^a os geradores de $SU(2)$ na representação r . Consideremos somente os casos das representações fundamental e adjunta, nas quais

$$\begin{aligned} T_{mn}^a &= -\frac{i}{2} \sigma_{nm}^a \quad n, m = 1, 2 && \text{fundamental} \\ T_{mn}^a &= \epsilon_{nm}^a \quad n, m = 1, 2, 3 && \text{adjunta.} \end{aligned}$$

Também será conveniente trabalharmos seguindo [JR76a, JR76b] e utilizarmos a seguinte representação das matrizes gama

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} -i\sigma^i & 0 \\ 0 & i\sigma^i \end{pmatrix}$$

obedecendo $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$. Escrevemos também $\alpha^i = \gamma^0\gamma^i$.

Na ausência de férmions, as equações de Euler-Lagrange para 3.6 tem a solução de monopolo 3.31

$$\begin{cases} \phi_a = \frac{r^a}{er^2} H(ver) \sim \hat{r}^a \phi(r) \\ W_a^0 = 0 \\ W_a^i = -\epsilon_{ain} \frac{r^n}{er^2} [1 - K(ver)] \sim \epsilon^{aij} \hat{r}_j A(\tilde{r}) \end{cases} \quad (5.1)$$

Tanto ϕ quanto A se anulam em $r = 0$; para $r \rightarrow \infty$, ϕ tende a configuração de vácuo, e A comporta-se como $-1/r$.

A equação de Dirac

$$(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - \phi)\psi = 0$$

no potencial externo 5.1, permite-nos procurar soluções estacionárias (já que $W_0 = 0$) da forma $\psi(\vec{x}, t) = e^{iEt}\psi(\vec{x})$,

$$\left[-i\alpha^i \partial_i \delta_{nm} + AT_{nm}^a \epsilon^{aij} \alpha_i \hat{r}_j + \phi T_{nm}^a \hat{r}_a \beta \right] \psi_m = E\psi_n$$

Quando ψ_n se decompõe em componentes $\psi_n = \begin{pmatrix} \chi_n^+ \\ \chi_n^- \end{pmatrix}$, temos

$$\left[-i\sigma^i \partial_i \delta_{nm} + AT_{nm}^a \epsilon^{aij} \sigma_i \hat{r}_j \pm \phi T_{nm}^a \hat{r}_a \beta \right] \chi_m^\pm = E\chi_n^\mp. \quad (5.2)$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\chi^- &\equiv (i\sigma^i \mathcal{D}_i + \phi)\chi^- = E\chi^+ \\ \mathcal{P}^\dagger\chi^+ &\equiv (i\sigma^i \mathcal{D}_i - \phi)\chi^+ = E\chi^- \end{aligned} \quad (5.3)$$

Teremos soluções de 5.3 com $|E| > 0$ e podemos ter soluções com $E = 0$. Podemos quantizar as flutuações fermiônicas em torno do monopolo expandindo ψ em termos das autofunções

do operador de Dirac 5.3, e então interpretar os coeficientes da expansão como operadores de criação e aniquilação com relações de anticomutação, vindas das relações de anticomutação canônicas de ψ . Modos com $|E| > 0$ fornecerão então configurações com energia maior que a energia mínima do monopolo. Por outro lado, caso 5.3 possua soluções com $E = 0$, então os estados criados pelos correspondentes operadores de criação serão degenerados em energia com a solução de monopolo original. Assim podemos ver as autofunções de zero energia dos operadores de Dirac como coordenadas coletivas fermiônicas, no sentido de descreverem deformações grassmanianas do monopolo que mantêm a energia fixa.

Para estudar a estrutura do monopolo de energia mínima - estado BPS -, devemos estudar as soluções de 5.3, que são soluções de $\mathcal{P}\chi^- = 0$ e $\mathcal{P}^\dagger\chi^+ = 0$, o que pode ser feito utilizando uma versão do teorema de índice Atiyah-Singer apropriado para um background de monopolo, como foi elucidado por Callias [Cal78] e E. Weinberg [Wei79], que fornece

$$\dim \ker \mathcal{P} - \dim \ker \mathcal{P}^\dagger = N(r)n_m \quad (\ker \mathcal{P}^\dagger = \{0\})$$

com n_m a carga do monopolo e $N(r)$ uma constante que depende da representação dos campos fermiônicos, que nos exemplos discutidos $N = 1$ para a representação fundamental e $N = 2$ para a representação adjunta.

A equação 5.2 é analisada no Apêndice de [JR76a], e interessa-nos a soluções de energia nula, $E = 0$. Neste artigo eles mostram que para a representação fundamental, a solução tem a forma

$$\chi_{\nu n}^+ = N \left\{ \exp - \int_0^r dr' \left[\frac{1}{2}\phi(r') - A(r') \right] \right\} \times \{s_\nu^+ s_n^- - s_\nu^- s_n^+\},$$

sendo que a componente inferior se anula, e onde ν refere-se ao índice de Dirac e toma valores 1, 2, e N é uma constante de renormalização.

Para o caso da representação adjunta, a componente inferior novamente é nula, e temos para a superior

$$\chi_n^+ = N \left[f_1(r)\hat{r}\sigma^i\hat{r}_i + f_2(r)(\sigma^n - \hat{r}^n\sigma^i\hat{r}_i) \right] \chi,$$

com χ um espinor arbitrário. Em outras palavras, obtemos duas soluções linearmente independentes, $\chi = s^+$ e $\chi = s^-$.

5.2 Teorias Supersimétricas

Não é nossa intenção fazer um estudo das teorias supersimétricas; discussões mais completas podem ser encontradas em vários textos [BW92], [Wes86]; textos com introdução à supersimetria voltados para teoria de Seiberg e Witten são [Lyk96], [AGH97], [Bil96]. Vamos apenas apresentar o material mínimo necessário para entendermos as características da teoria de Yang-Mills supersimétricas.

Para nosso caso, estaremos trabalhando no espaço de Minkowski quadri-dimensional. Um espinor de Dirac então tem quatro componentes complexas e se transforma então por uma representação redutível sob ação do grupo de recobrimento $SL(2, \mathcal{C})$ do grupo de Lorentz. É mais conveniente dividir o espinor de Dirac em dois espinores de duas componentes complexas (transformando-se irredutivelmente), χ^α e $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = (\chi^\alpha)^*$. Lidando com espinores de duas componentes, também encontramos as matrizes σ^μ e $\bar{\sigma}^\mu$: $(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}$ sendo a matriz identidade para $\mu = 0$ e as matrizes de Pauli σ^i para $\mu = i = 1, 2, 3$, enquanto para $\bar{\sigma}^\mu$ temos ao invés $-\sigma^i$.

5.2.1 Teorias Supersimétricas $N=1$

A supersimetria $N = 1$ pode ser representada utilizando uma variedade de multipletos de campos envolvendo bosons e férmions. Uma das representações mais simples envolve um campo escalar complexo ϕ e espinores de duas componentes ψ_α ($\alpha = 1, 2$), que formam o chamado multiplete escalar quiral, Φ . A fim de escrevermos as ações invariantes por transformações de supersimetria, é conveniente escrevermos ϕ e ψ em um supercampo

$$\Phi = \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta^2 F(y),$$

onde $y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$; F é um campo auxiliar. (Para maiores detalhes, ver [Lyk96].) Expandindo a dependência em y , temos

$$\Phi = \phi(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi(x) - \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\partial^2\phi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2(\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\bar{\theta}) + \theta^2 F(x)$$

(onde $\theta^2 = \theta\theta = \theta^\alpha\theta_\alpha$ e a contração de índices é feita utilizando o tensor antissimétrico $\epsilon^{\alpha\beta}$).

Uma ação invariante pela supersimetria é dada então pela integral

$$\frac{1}{4} \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi^\dagger \Phi. \quad (5.4)$$

As integrações sob θ são definidas de modo a somente os termos proporcionais a $\theta^2\bar{\theta}^2$ em $\Phi^\dagger\Phi$ forneçam um resultado não nulo. ($\int d^2\theta d^2\bar{\theta}\theta^2\bar{\theta}^2 = 4$.) Então a ação tem a forma

$$\int d^4x (\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi^\dagger - i\bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + F^\dagger F). \quad (5.5)$$

Vemos que o simples termo $\Phi^\dagger\Phi$ produziu o termo cinético usual para o campo escalar ϕ e para o espinor ψ . O campo auxiliar F poderá ser substituído através de suas equações de movimento. Interações invariantes pela supersimetria podem ser introduzidas por meio de um superpotencial $\mathcal{W}(\Phi)$, $\int d^4x [\int d^2\theta \mathcal{W}(\Phi) + c.c.]$, dependente somente de Φ (ou Φ^\dagger).

Outro multiplete supersimétrico é o multiplete vetorial, que contém um campo de gauge vetorial A_μ e seu companheiro supersimétrico, o gaugino λ_α . Eles combinam-se, juntamente com um outro campo auxiliar D , em um supercampo V (após fixar o gauge - Wess-Zumino) como

$$V = -i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu + i\theta^2(\bar{\theta}\bar{\lambda}) - i\bar{\theta}^2(\theta\lambda) + \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2 D.$$

Estaremos interessados no caso não Abelian onde A_μ , e portanto λ , $\bar{\lambda}$ e D estão na representação adjunta: $A_\mu = A_\mu^a T_a$. A partir do supercampo V define-se outro supercampo - espinorial - W_α como

$$W = (-i\lambda + \theta D - i\sigma^{\mu\nu}\theta F_{\mu\nu} + \theta^2\sigma^\mu\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda})(y),$$

sendo $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)$ e \mathcal{D}_μ a derivada covariante de gauge. A fórmula correspondente no superespaço é

$$W_\alpha = -\frac{1}{8}\bar{D}^2(e^{-2V}D_\alpha e^{2V}),$$

onde as derivadas D_α e $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ são as derivadas no superespaço $\partial/\partial\theta^\alpha + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu$ e $\partial/\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\theta^\alpha\partial_\mu$. A ação da Yang-Mills supersimétrica então é simplesmente ($\int d^2\theta\theta^2 = -2$)

$$-\frac{1}{4} \int d^4x d^2\theta \text{Tr} W^\alpha W_\alpha = \int d^4x \text{Tr} \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{i}{4} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} - i\lambda\sigma^\mu\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda} + \frac{1}{2} D^2 \right].$$

Além do termo usual $-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ temos também um termo $\frac{i}{4}F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$, que após integração fornece o número de instanton. Como este termo deveria aparecer na ação multiplicado

pelo ângulo θ_0 (não confundir com a variável do superspaço) e com um coeficiente real, introduz-se a constante de acoplamento complexificada

$$\tau = \frac{\theta_0}{2\pi} + \frac{4\pi i}{e^2},$$

e então obtém-se a ação real esperada

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi} \text{Im} \left[\tau \int d^4x d^2\theta \text{Tr} W^\alpha W_\alpha \right] &= \frac{1}{e^2} \int d^4x \text{Tr} \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - i\lambda\sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \bar{\lambda} + \frac{1}{2} D^2 \right] \\ &\quad + \frac{\theta_0}{32\pi^2} \int d^4x F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Os campos de matéria Φ podem acoplar-se minimamente ao campo de Yang-Mills, estando em alguma representação do grupo de gauge, digamos, a adjunta, através de

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \text{Tr} \Phi^\dagger e^{-2V} \Phi \\ &= \int d^4x \text{Tr} \left((\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \phi - i\bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \psi + F^\dagger F \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{2}i\phi^\dagger [D, \phi] - \sqrt{2}i\phi^\dagger \{\lambda, \psi\} + \sqrt{2}i\bar{\psi} [\bar{\lambda}, \phi] \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Além da aparição das derivadas covariantes \mathcal{D}_μ vemos também acoplamentos entre os campos ϕ , ψ e λ , D .

5.2.2 Teorias Supersimétricas $N=2$

A supersimetria $N = 2$ combina todos os campos Isto significa que todos os campos precisam estar na mesma representação do grupo de gauge, no caso a adjunta, já que o multipletto contém o potencial A_μ . Este multipletto contém dois campos espinoriais com mesmo status, o que sugere que a ação de Yang-Mills supersimétrica $N = 2$ é a combinação de 5.6 e 5.7. Não é óbvio que o resultado da combinação das duas ações tenha supersimetria $N = 2$, mas pode-se verificar que de fato tem. Então a ação de Yang-Mills $N = 2$ supersimétrica é

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int d^4x \left[\text{Im} \left(\frac{\tau}{16\pi} d^2\theta \text{Tr} W^\alpha W_\alpha \right) + \frac{1}{4} \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \text{Tr} \Phi^\dagger e^{-2V} \Phi \right] \\ &= \text{Im} \text{Tr} \int d^4x \frac{\tau}{16\pi} \left[\int d^2\theta W^\alpha W_\alpha + \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi^\dagger e^{-2V} \Phi \right] \end{aligned} \quad (5.8)$$

Note que o superpotencial $\mathcal{W}(\Phi)$ não é permitido pela supersimetria $N = 2$.

Um ponto importante diz respeito aos campos auxiliares em \mathcal{S}

$$\mathcal{S}_{aux} = \frac{1}{e^2} \int d^4x \text{Tr} \left[\frac{1}{2} D^2 - \phi^\dagger [D, \phi] + F^\dagger F \right].$$

Solucionando as equações de movimento para estes campos e substituindo novamente na ação tem-se

$$\mathcal{S}_{aux} = - \int d^4x \frac{1}{2} \text{Tr} ([\phi^\dagger, \phi])^2$$

que mostra que o potencial bosônico é $V(\phi) = \frac{1}{2} \text{Tr} ([\phi^\dagger, \phi])^2 \geq 0$. Uma configuração de vácuo ϕ_0 com $V(\phi) \geq 0$ quebra a supersimetria. Em outras palavras, para não quebrarmos a supersimetria precisamos de vácuo com $V(\phi) = 0$. Repare que isto não implica que $\phi_0 = 0$; uma condição necessária e suficiente é que ϕ e ϕ^\dagger comutem.

A ação 5.8 pode ser escrita de forma manifestamente supersimétrica utilizando a notação do superespaço $N = 2$, onde introduz-se um segundo conjunto de variáveis $\tilde{\theta}_\alpha, \bar{\tilde{\theta}}_{\dot{\alpha}}$. Introduzimos o supercampo quiral $N = 2$

$$\Psi = \Phi(\tilde{y}, \theta) + \sqrt{2} \tilde{\theta}^\alpha W_\alpha(\tilde{y}, \theta) + \tilde{\theta}^\alpha \bar{\tilde{\theta}}_{\dot{\alpha}} G_{\tilde{y}, \theta},$$

onde $\tilde{y}^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta} + i\tilde{\theta}\sigma^\mu\bar{\tilde{\theta}}$ e

$$G(\tilde{y}, \theta) = -\frac{1}{2} \int d^2\bar{\theta} [\Phi(\tilde{y} - i\theta\sigma\bar{\theta}, \theta, \bar{\theta})]^\dagger e^{-2V(\tilde{y} - i\theta\sigma\bar{\theta}, \theta, \bar{\theta})}, \quad (5.9)$$

com Φ, W sendo os supercampos $N = 1$. A integração em $d^2\bar{\theta}$ é efetuada mantendo-se \tilde{y} fixo. Ψ é o análogo em $N = 2$ do supercampo quiral, sujeito ao vínculo 5.9 necessário para eliminar certos graus de liberdades não físicos. A notação $N = 2$ implica que a seguinte ação é $N = 2$ invariante

$$\text{Im} \left[\frac{\tau}{16\pi} \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \frac{1}{2} \text{Tr} \Psi^2 \right]. \quad (5.10)$$

Efetuada a integração sobre $d^2\bar{\theta}$ temos precisamente a ação 5.8.

Repare que o integrando em 5.10 depende somente de Ψ , e não de Ψ^\dagger . De maneira geral pode-se mostrar que a supersimetria $N = 2$ restringe a forma da ação à

$$\frac{\tau}{16\pi} \text{Im} \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathcal{F}(\Psi) \quad (5.11)$$

onde a função holomórfica \mathcal{F} é o chamado prepotencial. Para o caso da ação de Yang-Mills $N = 2$ tem-se simplesmente

$$\mathcal{F}(\Psi) \equiv \mathcal{F}_{clas}(\Psi) = \frac{1}{2} \text{Tr } \tau \Psi^2.$$

Na linguagem do superespaço $N = 1$, podemos reescrever 5.11 como

$$\frac{1}{16\pi} \text{Im} \int d^4x \left[d^2\theta \mathcal{F}_{ab}(\Phi) W^{a\alpha} W_\alpha^b + \int d^2\theta d^2\bar{\theta} (\Phi^\dagger e^{-2V})^a \mathcal{F}_a(\Phi) \right]$$

onde $\mathcal{F}_a(\Phi) = \frac{\partial \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi^a}$, e

$$\mathcal{F}_{ab}(\Phi) = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi^a \partial \Phi^b} = \tau_{ab} \quad (5.12)$$

e os índices a, b são índices da álgebra de Lie.

5.3 Geometria de Kähler Especial

Devido ao fato do espaço de moduli (como veremos mais adiante, em 6.1) dos vácuos da teoria de Yang-Mills $N = 2$ ser um espaço com métrica de Kähler de um tipo particular, veremos que a conjectura de Montonen e Olive realiza-se na teoria efetiva, tendo como grupo de dualidade o grupo gerado pelas monodromias, Γ , que é um subgrupo de $Sp(2r, \mathbb{Z})$, sendo r o rank do grupo de Yang-Mills \mathcal{G} [CRTP96, CRTP97].

Em quatro dimensões, as transformações de dualidade são transformações entre os tensores de campo de spin 1. O termo cinético dos vetores é genericamente

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{4} (\text{Im } \tau_{ab}) F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} - \frac{i}{8} (\text{Re } \tau_{ab}) F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{b\mu\nu},$$

onde $a, b = 1, \dots, r$, e τ_{ab} depende dos campos escalares, e define uma métrica $(\text{Im } \tau_{ab})$ no espaço dos campos. A transformação de interesse preserva o conjunto de equações de movimento e as identidades de Bianchi, e formam um grupo $Sp(2r, \mathbb{Z})$, definido pelas matrizes

$$S = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \quad \text{onde } S^T \Omega S = \Omega \quad \text{e} \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sob a ação deste grupo, a matriz de acoplamento τ transforma-se como

$$\tau' = (r + s\tau)(p + q\tau)^{-1} \quad (5.13)$$

que requer uma relação entre a dualidade e o setor escalar, já que τ depende dos escalares.

Os multipletos vetoriais de $N = 2$ são supercampos quirais vinculados. A construção de uma ação começa pela introdução de uma função holomórfica $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ das componentes mais baixas dos multipletos \mathcal{A}^a , onde $a = 1, \dots, r$ rotula os diferentes multipletos. Os termos cinéticos dos escalares então definem uma variedade de Kähler, com potencial de Kähler

$$K(z, \bar{z}) = i \left(\mathcal{A}^a \frac{\partial}{\partial \bar{\mathcal{A}}^a} \bar{\mathcal{F}}(\bar{\mathcal{A}}) - \bar{\mathcal{A}}^a \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}^a} \mathcal{F}(\mathcal{A}) \right).$$

Os supercampos \mathcal{A}^α são funções de z^α para $\alpha = 1, \dots, n$, que são coordenadas arbitrárias da variedade escalar. A escolha $z^\alpha = \mathcal{A}^\alpha$ é chamada coordenadas especiais. O acoplamento dos r vetores com os escalares é descrito pelo tensor

$$\tau_{ab} = \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}^a} \frac{\partial}{\partial \bar{\mathcal{A}}^b} \mathcal{F}; \quad \text{Im } \tau_{ab} = \frac{\delta^2 K(z^a, \bar{z}^b)}{\delta z^a \delta \bar{z}^b}.$$

Podemos combinar \mathcal{A}^a e $\mathcal{A}_D^a = \partial \mathcal{F} / \partial \mathcal{A}^a$ em um vetor simplético, e também o potencial de Kähler acomoda uma forma simplética

$$K = i \langle V, \bar{V} \rangle \quad \text{onde } V = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^a \\ \mathcal{A}_D^a \end{pmatrix} \quad \text{e } \langle V, W \rangle \equiv V^T \Omega W.$$

A transformação simplética nem sempre leva à mesma ação. Entretanto, a variedade escalar permanece sempre a mesma (o potencial Kähler é invariante). Como o potencial de Kähler é real, a métrica é hermitiana. A fim de obter um sinal correto para o termo cinético para os campos, precisamos exigir que a métrica $\text{Im } \tau_{ab}$ seja positivo definida e não singular; isto impõe restrições na escolha do potencial de Kähler.

Uma variedade complexa Riemanniana possuindo uma métrica hermitina positivo definida e não singular que pode ser escrita localmente como uma derivada segunda de uma função escalar é chamada variedade de Kähler. Uma variedade especial rígida de Kähler é uma variedade de Kähler com, em cada carta: (i) funções holomórficas $\mathcal{A}^a(z)$ e (ii) funções holomórficas $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ de modo que o potencial de Kähler possa ser reescrito como acima $K(z, \bar{z})$. Onde as cartas i e j se superpõem, devem haver funções de transição:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{A}_D \end{pmatrix}_{(i)} = e^{ic_{ij}} M_{ij} \begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{A}_D \end{pmatrix}_{(j)} + b_{ij}$$

com $c_{ij} \in \mathbb{R}$; $M_{ij} \in Sp(2r, \mathbb{R})$ e $b_{ij} \in C^{2r}$.

As lagrangianas supersimétricas definem então modelos para os campos escalares cujo espaço alvo são variedades de Kähler. Esta é uma poderosa observação, pois implica que modelos com lagrangianas tremendamente complicadas possam ser caracterizados pela geometria algébrica do espaço alvo.

5.4 O limite de Bogomol'nyi Revisitado

A supersimetria fornece um novo ponto de vista para o limite de Bogomol'nyi. É mais fácil trabalhar aqui com duas componentes independentes de Majorana das cargas supersimétricas $Q_{\alpha i}$, com α sendo o índice espinorial e $i = 1, 2$ nomeando a supersimetria. A álgebra de supersimetria $N = 2$ toma então a forma

$$\{Q_{\alpha i}, \bar{Q}_{\beta j}\} = \delta_{ij} \gamma_{\alpha\beta}^{\mu} P_{\mu} + \delta_{\alpha\beta} U_{ij} + (\gamma_5)_{\alpha\beta} V_{ij} \quad (5.14)$$

onde $U_{ij} = -U_{ji}$ e $V_{ij} = -V_{ji}$ são os termos centrais da álgebra. Pode-se obtê-los em uma teoria específica através da construção das supercargas em termos dos campos da teoria em questão, e então utilizar as relações de comutação (anticomutação) canônicas para obter sua forma explícita. Este foi o trabalho realizado por Witten e Olive [WO78], que utilizando os termos de superfícies das correntes de Noether (que não se anulam para uma configuração topologicamente não trivial) obtiveram

$$\begin{cases} U_{ij} = \epsilon_{ij} v Q_e = \epsilon_{ij} \int d^3x \partial_k (\phi^a G_{0k}^a), \\ V_{ij} = \epsilon_{ij} v Q_m = \epsilon_{ij} \int d^3x \partial_k (\phi^a \epsilon_{klm} G_{lm}^a) \end{cases} \quad (5.15)$$

onde como podemos ver (Q_e, Q_m) são as cargas elétrica e magnética da teoria.

Então é possível mostrar que a álgebra 5.14 implica diretamente o limite de Bogomol'nyi $M \geq v \sqrt{Q_e^2 + Q_m^2}$. Por exemplo, tomemos o caso $Q_m = 0$. No referencial de repouso $P_{\mu} = (M, \vec{0})$, e a álgebra toma a forma

$$\{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} = \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} M + v \epsilon_{ij} \gamma_{\alpha\beta}^0 Q_e. \quad (5.16)$$

O lado esquerdo é positivo definido, enquanto que o segundo termo do lado direito tem autovalores $\pm vQ_e$. Conclui-se então que $M \geq v|Q_e|$.

Do argumento acima vemos que o limite é saturado precisamente quando um dos $Q_{\alpha i}$ é representado por zero, isto é, para estados aniquilados ao menos por um dos operadores de supersimetria. Isto nos fornece uma relação entre supersimetria e estados BPS saturados: pode-se derivar a equação de Bogomol'nyi $\mathcal{B} = \mathcal{D}\phi$ exigindo-se que metade das supersimetrias aniquilem a solução de monopolo.

Há também um estreita conexão entre estados BPS e representações curtas da álgebra de supersimetria $N = 2$. Façamos uma breve digressão .

Uma representação massiva da álgebra de supersimetria $N = 2$ é construída primeiramente deslocando-se para o referencial de repouso. A álgebra supersimétrica tem então a mesma forma de uma álgebra de Clifford e podemos ver combinações lineares das supercargas como operadores de criação e destruição. A menor representação desta álgebra tem então dimensão 2^{2N} que é 16 para $N = 2$. Por outro lado para representações não massivas não temos referencial de repouso, e encontramos que metade dos anticomutadores das cargas de supersimetria se anulam, sendo então representados trivialmente. Como resultado, as representações para estados não massivos têm dimensão $2^N = 4$. Agora o multiplete $N = 2$ da teoria de partida $(W_\mu, \psi, \phi, \lambda)$ possuem 8 estados de helicidade e consistem de duas representações não massivas de $N = 2$. Ao levarmos em conta o mecanismo de Higgs, alguns estados absorvem outros, adquirindo massa, mas o número total de estados não se altera. Devemos então ter 8 estados massivos. Mas isto entra em contradição com o número de estados da representação massiva. O problema é solucionado construindo uma representação massiva de modo que os anticomutadores das supercargas envolvam uma particular combinação da massa e das cargas centrais V, U . Para uma relação especial entre a massa e as cargas centrais esta combinação se anula e novamente precisamos representar somente metade das supercargas de modo não trivial. Esta relação especial é justamente o limite de Bogomol'nyi.

5.5 Simetria R

A álgebra de supersimetria estendida (N supersimetrias) é invariante sob uma rotação $U(N)$ global das N supercargas. Portanto, uma teoria supersimétrica também deve exibir esta simetria, usualmente referida como simetria R . A ação desta simetria global nas supercargas pode ser traduzida em uma transformação das variáveis do superespaço. Por exemplo, para $N = 1$, a simetria $R U(1)$ age nas supercargas como $Q \rightarrow e^{-i\alpha}Q$. Daí pode-se obter a ação nas coordenadas do superespaço como sendo $\theta \rightarrow e^{i\alpha}\theta$ e $\bar{\theta} \rightarrow e^{-i\alpha}\bar{\theta}$. De modo a manter a lagrangiana supersimétrica invariante sob estas transformações, temos que atribuir aos vários supercampos as transformações apropriadas.

O multiplete vetorial $N = 2$ contém um campo vetorial W_μ , dois espiniores de Weyl λ, ψ e um escalar ϕ , todos transformando-se de acordo com a representação adjunta do grupo de gauge \mathcal{G} . Estas componentes podem ser rearranjadas como

$$\begin{array}{ccc} & W_\mu & \\ \lambda & & \psi \\ & \phi & \end{array} .$$

A transformação $SU(2)_R$ age nas linhas do diagrama acima, e os férmions (λ, ψ) formam um dubleto, enquanto W_μ e ϕ são escalares. Na linguagem de $N = 1$, este multiplete se decompõe em um supercampo vetorial $V(W_\mu, \lambda)$, e um supercampo quiral $\Phi(\phi, \psi)$. Portanto, a única parte de $SU(2)_R$ que permanece manifesta na linguagem $N = 1$ é um subgrupo $U(1)_J$ que não mistura λ e ψ . Este subgrupo age como $(\lambda, \psi) \rightarrow (e^{i\alpha}\lambda, e^{-i\alpha}\psi)$. A ação de $U(1)_R$ (da supersimetria $N = 1$) nos supercampos é dada por

$$\begin{aligned} U(1)_R & : \Phi \rightarrow e^{2i\alpha}\Phi(e^{-i\alpha}\theta), \quad V \rightarrow V(e^{-i\alpha}\theta), \\ U(1)_J & : \Phi \rightarrow \Phi(e^{-i\alpha}\theta), \quad V \rightarrow V(e^{-i\alpha}\theta). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Classicamente, nossa teoria tem uma simetria global $SU(2)_R \times U(1)_R$. Entretanto, quanticamente $U(1)_R$ é quebrada para um subgrupo discreto devido à anomalias. Este subgrupo

pode ser determinado de considerações do cálculo de instantons. Para calcular a anomalia para o grupo de gauge $SU(N_c)$, pelo teorema de índice, na presença de instantons há um modo zero para cada férmion esquerdo na representação fundamental, e $2N_c$ modos zero para cada férmion esquerdo na representação adjunta - que no caso é a nossa. Uma função de correlação nesta teoria envolve integração sobre as coordenadas férmionicas correspondentes aos modos zeros. Para a correlação ser não nula, deve conter suficientes inserções de férmions para saturar os modos zero. Então, a primeira função de correlação não nula é

$$G = \langle \lambda(x_1) \cdots \lambda(x_{2N_c}) \psi(y_1) \cdots \psi(x_{2N_c}) \rangle.$$

Sob $U(1)_R$ G se transforma como

$$G \rightarrow e^{i\alpha 4N_c} G.$$

Então $U(1)_R$ é quebrada para o subgrupo discreto \mathbb{Z}_{4N_c} , e a simetria R quebrada $U(1)_R \rightarrow \mathbb{Z}_{4N_c}$ é representada por $e^{2\pi i\alpha}$, onde $\alpha = n/4N_c$, $n = 1, \dots, 4N_c$. Então o grupo de simetria global é $SU(2)_R \times \mathbb{Z}_{4N_c}$. Entretanto, o centro de $SU(2)_R$ age como $(\lambda, \phi) \rightarrow e^{i\pi}(\lambda, \phi)$, que também está contido em \mathbb{Z}_{4N_c} (corresponde a $n = 2N_c$). Então o verdadeiro grupo de simetrias é

$$(SU(2)_R \times \mathbb{Z}_{4N_c})/\mathbb{Z}_2.$$

Esta simetria R sobrevivente é quebrada novamente pelo vácuo do Higgs. O campo ϕ^2 tem carga 4 sob \mathbb{Z}_{4N_c} e se transforma por $e^{2\pi i n/N_c} \phi^2$, que é invariante somente para $n = N_c, 2N_c, 3N_c, 4N_c$. Portanto, se o vácuo é caracterizado por um valor não nulo de ϕ^2 , então \mathbb{Z}_{4N_c} é quebrado para \mathbb{Z}_4 . Esta é a situação para a teoria de gauge $SU(2)$ ($N_c = 2$). Neste caso, todo elemento que não mantém ϕ^2 invariante age como $\mathbb{Z}_2 : \phi^2 \rightarrow -\phi^2$. Portanto, o grupo de simetria R final para a teoria de gauge $SU(2)$ é

$$(SU(2)_R \times \mathbb{Z}_4)/\mathbb{Z}_2.$$

5.6 Fracionamento de Carga e Dualidade

Nas teorias de Yang-Mills supersimétricas puras, há apenas um tipo de campo férmionico, aquele presente no multiplete de gauge, e portanto transformando-se pela representação ad-

junta do grupo de gauge. Os efeitos sobre o spin dos seus modos zero é criar um hipermultiplo de estados de monopolos na teoria $N = 2$, e um multiplo de gauge na teoria $N = 4$. Portanto é somente na teoria $N = 4$ que os monopolos podem aparecer como partículas de gauge e então este é o único caso onde a conjectura de dualidade eletromagnética de Montonen e Olive pode ser válida. A idéia não é válida em $N = 2$, a menos que um outro tipo de fenômeno interessante possa ocorrer.

É possível introduzir hipermultipletos extras na teoria $N = 2$, transformando-se pela representação fundamental de $SU(2)$. Se há N_F destes hipermultipletos (por ora todos sem massa), temos então uma simetria $U(N_F)$ acidentalmente aumentada para $SO(2N_F)$. Este multiplo pode ser pensado como quarks. Seus modos zeros não afetam o spin do monopolo, mas contribuem com um número quântico de sabor $SO(2N_F)$ para estes mesmos monopolos. Este fenômeno é conhecido como fracionamento de carga. O resultado significa que na teoria $N = 2$ é possível realizar uma simetria de dualidade que troca monopolos com quarks, ao invés de com partículas de gauge como na teoria $N = 4$ [Fer97a],[FB96b], [FB96a].

5.7 A conjectura de Montonen e Olive em $N=4$

A esta altura nos perguntamos se existe alguma teoria que exiba a dualidade eletromagnética exata, do modo como foi proposta por Montonen e Olive. Já vimos que não será o caso da teoria $N = 2$, onde o monopolo não tem spin um e assim não pode ser o dual do boson. Por outro lado em teorias de Yang-Mills $N = 4$ há um supermultiplo que contém somente spin ≥ 1 , e pode-se mostrar que monopolos e bosons de gauge pertencem a este supermultiplo. Sem entrar nos detalhes da teoria $N = 4$, vamos mostrar alguns resultados conhecidos.

A conjectura de Montonen e Olive, como vimos, propõe que uma nova ação pode ser escolhida com monopolos sendo criados pelos campos fundamentais. Esta ação é definida pela escolha de um vetor primitivo na rede de cargas. Um segundo vetor primitivo é necessário a fim de definir o ângulo θ . Portanto a escolha da ação é definida por um par de vetores primitivos, isto é, de uma base para a rede. Com esta nova ação, os papéis desempenhados pelas excitações quânticas e sólitons são trocados, e esperamos encontrar um novo conjunto

de estados de uma partícula. Estes devem corresponder ainda aos vetores primitivos da rede, sendo o conceito de vetor primitivo independente da base. Isto levou Sen [Sen94] a formular a conjectura de que na teoria supersimétrica $N = 4$ há uma correspondência precisa entre todos os estados de uma partícula e todos vetores primitivos da rede.

O problema começa por tentar encontrar um modo não trivial de testar a dualidade, sem termos que efetuar os cálculos explícitos na teoria dual. Aqui é onde a extensão da dualidade para $SL(2, \mathbb{Z})$ tem um papel central, como demonstrou Sen [Sen94]. Partimos da hipótese de que estados com $(n_m, n_e) = (0, 1)$ (os bosons W^+) existem para todos os valores da constante de acoplamento τ com uma degenerescência de 16, correspondendo a 16 estados na representação curta da supersimetria $N = 4$. A dimensão da representação não pode mudar conforme variamos parâmetros da teoria, e sabemos que um tal estado existe a acoplamento fraco como um estado BPS saturado.

Dada a existência do estado $(0, 1)$, a dualidade $SL(2, \mathbb{Z})$ requer a existência de todas as imagens deste estado por $SL(2, \mathbb{Z})$. Desde que a transformação age nos estados por

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

a dualidade requer a existência de estados com $(n_m, n_e) = (b, d)$ com a mesma degenerescência 16. Mais ainda, como $ad - bc = 1$, segue que b e d são coprimos. Também, se iniciamos em um valor de τ que corresponde a um acoplamento forte e então fazemos a transformação de dualidade 5.18 estes estados devem existir no acoplamento fraco e portanto devem aparecer em uma análise semi-clássica do espectro.

Para $b = 1$ necessitamos de estados $(1, d)$ para um inteiro arbitrário d . Estas são as excitações dyônicas de um monopolo BPS de uma unidade de carga, e da análise anterior vemos que tais estados existem com a multiplicidade correta. Mais ainda, estes estados são estados BPS, como demonstrado em [Gau94, Gau93]. Para $b = 2$ requerimos estados $(2, d)$ com d ímpar, novamente com uma degenerescência 16. Anteriormente à análise de Sen não se sabia da existência destes estados.

A construção destes estados na teoria supersimétrica $N = 4$ seria muito difícil. Afortunadamente a questão pode ser reduzida à construção de estados ligados na aproximação do

espaço de moduli. Para vermos porque este é o caso, consideremos um estado ligado com carga elétrica um. Um estado BPS com $(n_m, n_e) = (1, 0)$ (monopolo) tem massa $M_{(1,0)} = vg$, enquanto um dyon com carga $(1, 1)$ tem massa $M_{(1,1)} = v\sqrt{e^2 + g^2}$. Um estado BPS ligado de carga $(2, 1)$ por outro lado tem massa $M_{(2,1)} = v\sqrt{e^2 + 4g^2}$. No regime de acoplamento fraco a energia de ligação é

$$M_{(2,1)} - M_{(1,1)} - M_{(1,0)} \sim ve(e/4g) \ll ve.$$

Desde que esta energia é muito menor que a massa de W , poderíamos estar aptos a estudar a existência deste estado ligado na aproximação do espaço de moduli. O mesmo argumento se aplica a estados de maiores cargas elétricas a acoplamento suficientemente fraco.

Então sabemos que estes estados $(2, n_e)$ não podem ser nem excitações quânticas dos campos originais, nem soluções soitonicas clássicas. Precisamos de um novo mecanismo. fornecido pela análise da mecânica quântica supersimétrica em $\mathcal{M}(2)$, para obtermos estes dyons como estados de uma partícula. Sen observou que um par de monopolos com $n_m = 1$ poderiam formar estados ligados em um sentido muito preciso.

5.7.1 Mecânica Quântica Supersimétrica em \mathcal{M}_k

Já argumentamos que podemos pensar nos modos zero fermiônicos como coordenadas coletivas grassmanianas para o espaço de moduli do monopolo. Na ausência de campos férmionicos a expansão em termos das coordenadas coletivas com campos de fundo $W^i((x^j, z^{\alpha(t)}))$, $\phi(x^j, z^{\alpha(t)})$ leva a uma ação efetiva a baixas energias através da sua substituição na ação quadri-dimensional e integração sobre \mathbb{R}^3

$$S_{ef} = \int dt \mathcal{G}_{\alpha\beta} \dot{z}^\alpha \dot{z}^\beta$$

com $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ sendo a métrica no espaço de moduli do monopolo. Em outras palavras, a energias muito baixas a teoria de campos sobre um fundo de monopolo pode excitar somente um número finito de graus de liberdade, aqueles correspondentes a movimentos ao longo do espaço de moduli, e portanto podemos reduzir a dinâmica à mecânica quântica.

Gostaríamos de adicionar modos zero fermiônicos a este contexto. Isto pode ser feito se expandimos os campos férmionicos como

$$\psi = \sum_n \lambda_\alpha(t) \psi_{0\alpha}(x, z),$$

onde os $\psi_{0\alpha}$ são os modos zero fermiônicos, tratados como números reais, e $\lambda_\alpha(t)$ são coordenadas coletivas férmionicas com valores grassmanianos. Podemos agora incluí-los na ação efetiva da mecânica quântica através do mesmo procedimento anterior. Os detalhes são apresentados em [Gau94]. Entretanto o resultado não é surpreendente. A ação quântica é estendida para a ação para uma mecânica quântica supersimétrica. No caso de $N = 2$ há quatro supersimetrias reais no espaço tempo que não são quebradas pelo fundo de monopolo. Como resultado espera-se uma ação com $N = 4$ supersimetrias na world-line. Esta ação é

$$S_{ef} = \frac{1}{2} \int dt \mathcal{G}_{\alpha\beta} (\dot{z}^\alpha \dot{z}^\beta + 4i \lambda^{\dagger\alpha} \mathcal{D}_t \lambda^\beta) + \text{constante},$$

onde

$$\mathcal{D}_t \lambda^\alpha = \frac{d\lambda^\alpha}{dt} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dz^\beta}{dt} \lambda^\gamma$$

é a derivada covariante agindo no espinor λ . (Uma nota quanto a nomenclatura para a supersimetria na mecânica quântica: Originalmente ações com espinores de duas componentes e uma supersimetria foram construídas, referindo-se a esta supersimetria com $N = 1$. Depois observou-se que pode-se também existir uma supersimetria com espinores de uma componente, denominada $N = 1/2$. Com esta nomenclatura a ação acima possui supersimetria $N = 4 \times 1/2$.) A presença de quatro supersimetrias impõe que o espaço de moduli seja uma variedade hiperkähler. Isto significa que \mathcal{M}_k tem três estruturas complexas \mathcal{I}^m que obedecem

$$\mathcal{I}_\beta^{m\alpha} \mathcal{I}_\alpha^{n\gamma} = \delta_\beta^\gamma \delta^{mn} + \epsilon^{mnp} \mathcal{I}_\beta^{p\gamma},$$

e a ação tem $N = 4 \times 1/2$ supersimetrias com transformações

$$\begin{aligned} \delta z^\alpha &= i\beta_4 \lambda^\alpha + i\beta_m \lambda^\beta \mathcal{I}_\beta^{m\alpha} \\ \delta \lambda^\alpha &= -\dot{z}^\alpha \beta_4 - \beta_m \dot{z}^\beta \mathcal{I}_\beta^{m\alpha}. \end{aligned}$$

Escolhendo uma estrutura complexa a fim de introduzir coordenadas complexas em \mathcal{M}_k , obtem-se as relações de anticomutação canônicas

$$\{\lambda^\alpha, \lambda^{\bar{\beta}}\} = \delta^{\alpha\bar{\beta}}.$$

Os $\lambda^{\bar{\alpha}}$ atuam então como operadores de criação e temos um espectro de estados da forma

$$f_{\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_p} \lambda^{\bar{\alpha}_1} \dots \lambda^{\bar{\alpha}_p} |\Omega\rangle.$$

Estes estados estão em correspondência um a um com formas holomórficas $(0, p)$ em \mathcal{M}_k

$$|f\rangle = f_{\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_p} \lambda^{\bar{\alpha}_1} \dots \lambda^{\bar{\alpha}_p} |\Omega\rangle f_{\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_p} dz^{\bar{\alpha}_1} \wedge \dots \wedge dz^{\bar{\alpha}_p}.$$

Como resultado da redução da teoria de Yang-Mills supersimétrica $N = 4$, obtem-se uma lagrangiana com supersimetria $N = 4 \times 1$ (o dobro do caso da teoria $N = 2$) dada por

$$S_{ef} = \frac{1}{2} \int dt \mathcal{G}_{\alpha\beta} (\dot{z}^\alpha \dot{z}^\beta + i \bar{\psi}^\alpha \gamma^0 \mathcal{D}_t \psi^\beta) + \frac{1}{6} R_{\alpha\beta\gamma\delta} (\bar{\psi}^\alpha \psi^\beta) (\bar{\psi}^\gamma \psi^\delta),$$

onde agora ψ^α são espiniores de duas componentes. Como resultado desta duplicação encontramos que o espaço de Hilbert de estados é o mesmo que o estado de todas as formas diferenciais em \mathcal{M}_k , e o Hamiltoniano é o Laplaciano agindo nas formas [Gau93], [Wit82].

Voltemos a nos concentrar no problema de Sen. Consideremos a variedade de moduli $\mathcal{M}(2)$ de soluções da equação de Bogomol'nyi com $n_m = 2$. As coordenadas nesta variedade são os modos zero bosônicos interpretados como coordenadas coletivas do sistema de dois monopolos. Atiyah e Hitchin [AH85] encontraram uma expressão analítica fechada para a métrica de $\mathcal{M}(2)$. Como vimos, quando incluímos os modos zero fermiônicos a ação efetiva para pequenos deslocamentos destes monopolos descreve uma mecânica supersimétrica em \mathcal{M} .

Sen observou que quando o sistema é quantizado de modo que a função de onda da teoria satisfaz uma equação de Schrödinger envolvendo o Laplaciano para $\mathcal{M}(2)$, então os autovalores de energia nula (soluções da equação de Laplace) fornecem estados ligados satisfazendo a fórmula de massa. A dualidade exige que estes estados ligados sejam únicos para d ímpar e ausentes para d par. Isto significa que a função de onda seria uma 2-forma. Então Sen chegou

ao resultado de que estados ligados quânticos de dois monopolos ocorrem se e somente se d é ímpar. Além disto, estão na representação curta de dimensão 16 do múltiplo de gauge de $N = 4$.

Isto leva à questão de estabelecer um resultado similar para os vetores primitivos da rede com valores superiores de n_m . O argumento de Sen não pode ser repetido sem a forma explícita da métrica, mas há argumentos indiretos encorajando progressos afirmativos.

Capítulo 6

A Ação Efetiva

Há dois tipos de ação efetiva. Uma é definida pelo usual funcional gerador $\Gamma[\varphi]$ das funções de vértice *1PI*. É obtida a partir do funcional gerador das funções de correlação conexas $W[\varphi]$ por uma transformação de Legendre. AS integrações sobre os momentos nos diagramas de loop vão de zero à um cutoff ultra-violeta, que é levado a infinito no final do procedimento. $\Gamma[\varphi] \equiv \Gamma[\mu, \varphi]$ também depende da escala de renormalização μ utilizada para definir as funções de vértice renormalizadas.

Um objeto distinto vema ser a ação efetiva de Wilson $S_W[\mu, \varphi]$. Esta é definida como $\Gamma[\mu, \varphi]$, exceto pelo fato dos momentos nos loops serem integrados tendo μ como um limite inferior, funcionando como um cutoff infra-vermelho. Em teorias com todas as partículas massivas, não há grandes diferenças entre $\Gamma[\mu, \varphi]$ e $S_W[\mu, \varphi]$ (caso μ seja menor que a menor das massa). Quando partículas sem massa estão presentes, a situação é diferente. Nas teorias supersimétricas, $S_W[\mu, \varphi]$ terá uma dependência holomórfica em μ , o que não será o caso de $\Gamma[\mu, \varphi]$.

Como vimos, para $a > 0$, o setor carregado adquire massa. Formalmente podemos integrar sobre os modos de energias altas (que denotaremos por Ψ_{duros})

$$e^{-S_{ef}(a, \Psi_{suaves})} = \sum_{\substack{\Psi_{duros} \\ E > a}} e^{S_{micro}(\Psi_{suaves}, \Psi_{duros})}.$$

O resultado pode ser expandido em termos dos campos Ψ_{suaves} , que têm pequenas flutuações,

e suas derivadas

$$S_{ef}(a, \Psi_{suaves}) = \int d^4x [m(a, \Psi_{suaves}) + f(a, \Psi_{suaves})(\partial\Psi_{suaves})^2 + g(a, \Psi_{suaves})(\partial\Psi_{suaves})^4 \dots].$$

A ação efetiva de Seiberg e Witten difere da definição usual pelo fato de integrar-se somente sobre os modos carregados de energias altas.

Na prática, é extremamente difícil efetuar a integração acima. Entretanto a estrutura da supersimetria $N = 2$ nos fornece condições de integrabilidade, conhecidas como estrutura de Kähler rígida especial, que permite expressar os termos (a menos das derivadas) da ação efetiva à baixas energias por meio do prepotencial holomórfico $\mathcal{F}_{ef}(\mathcal{A})$

$$\mathcal{L}_{ef} = \frac{1}{16\pi} \text{Im} \left[\int d^4\theta \frac{\partial \mathcal{F}_{ef}(\mathcal{A})}{\partial \mathcal{A}} \mathcal{A}^\dagger + \int d^2\theta \frac{\partial^2 \mathcal{F}_{ef}(\mathcal{A})}{\partial \mathcal{A}^2} W^\alpha W_\alpha \right]$$

onde daqui em diante \mathcal{A} denota o multipletto abeliano que contém o foton, após a quebra da simetria de gauge, $\mathcal{A} \equiv \Phi^3 \sigma_3$; W_α é o tensor de campo abeliano e

$$K(\mathcal{A}^{(0)}, \mathcal{A}^{(0)\dagger}) = \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \bar{\mathcal{F}}}{\partial \mathcal{A}^\dagger} \mathcal{A} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{A}} \mathcal{A}^\dagger \right)$$

é o potencial de Kähler que fornece a métrica no espaço dos campos, que é portanto uma variedade de Kähler.

6.1 O Espaço de Moduli

As teorias supersimétricas caracterizam-se por possuírem direções planas, nas quais podemos nos deslocar sem deixarmos o mínimo do potencial. E o melhor modo de descrever as propriedades destas teorias possuindo direções planas é através do espaço de moduli. Já nos deparamos com este conceito anteriormente, ao estudarmos o espaço de soluções da equação de Bogomol'nyi. Aqui, definiremos espaço de moduli $\mathcal{M}(\mathcal{V})$ como o espaço de classes de equivalência dos vácuos da teoria. Portanto, para definir uma boa coordenada que parametrize $\mathcal{M}(\mathcal{V})$, precisamos de quantidades invariantes pela simetria de gauge.

Introduzimos a variedade dos vácuos \mathcal{V} , como o conjunto de todas as configurações de vácuo. Pontos diferentes em \mathcal{V} podem ser parametrizados pelos correspondentes v.e.v. dos campos escalares presentes no potencial. Diferentes pontos $P, P' \in \mathcal{V}$ descreverão a mesma

física se podemos conecta-los pela ação de algum elemento do grupo de simetria \mathcal{G} , isto é, caso estejam na mesma órbita $\rightarrow P' \in \mathcal{G}/\mathcal{H}_P$, \mathcal{H}_P sendo o little group; em outras palavras, P e P' descrevem a mesma física se estão relacionados por algum boson de Goldstone.

Agora definimos o espaço de moduli $\mathcal{M}(\mathcal{V})$ como o espaço de classes de equivalência de vácuos, onde dois vácuos estão na mesma classe de equivalência se descrevem a mesma física. Caso a teoria de partida possua direções planas do potencial, então o moduli $\mathcal{M}(\mathcal{V})$ será uma variedade conexa com dimensão maior ou igual a um.

Uma visão mais geométrica pode ser descrita como segue. Dado um ponto genérico $P \in \mathcal{V}$, podemos decompor o espaço tangente T_P como

$$T_P = T_P^{\mathcal{G}} \otimes T_P^{\mathcal{M}}$$

onde os geradores de $T_P^{\mathcal{G}}$ são os bosons de Goldstone e os geradores de $T_P^{\mathcal{M}}$ são as direções tangentes ao moduli propriamente ditas. A dimensão de $T_P^{\mathcal{G}}$ é dada pela dimensão do espaço homogêneo $\mathcal{G}/\mathcal{H}_P$.

Singularidades em $\mathcal{M}(\mathcal{V})$ aparecerão como pontos P onde há uma mudança na dimensão de $T_P^{\mathcal{M}}$. O significado destas singularidades, do ponto de vista físico, é que correspondem a pontos em \mathcal{V} onde o little group \mathcal{H}_P muda.

Vemos da definição de $\mathcal{M}(\mathcal{V})$ que para definir um bom conjunto de coordenadas, devemos utilizar quantidades invariantes de gauge. Para o nosso caso, $SU(2)$ e $N = 2$, o potencial escalar é dado classicamente por

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left([\phi, \phi^\dagger] \right)^2.$$

Estamos interessados em determinar os vácuos inequivalentes por transformações de gauge. Um ϕ geral é da forma $\phi(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 (a_j(x) + ib_j(x)) \sigma_j$, com campos $a_j(x)$ e $b_j(x)$ reais. Por uma transformação de gauge $SU(2)$ podemos sempre colocar $a_1(x) = a_2(x) = 0$. Então $[\phi, \phi^\dagger] = 0$ implica que $b_1(x) = b_2(x) = 0$ e portanto, com $a = a_3 + ib_3$, temos que $\phi = \frac{1}{2} a \sigma_3$. Obviamente, no vácuo a deve ser constante. Transformações de gauge do grupo de Weyl (isto é, rotações de π em torno do eixo 1 ou 2 de $SU(2)$) podem ainda levar $a \rightarrow -a$, de modo que a e $-a$ são equivalentes de gauge. A quantidade invariante de gauge descrevendo vácuos inequivalentes é $\frac{1}{2} a^2$, ou $\text{Tr} \phi^2$, que são as mesmas, semiclassicamente; quando as flutuações quânticas são importantes temos uma modificação. Utilizaremos as seguintes definições

$$u = \langle \text{Tr } \phi^2 \rangle, \quad \langle \phi \rangle = \frac{1}{2} a^2 \sigma_3.$$

O parâmetro complexo u nomeia vacuos inequivalentes de gauge. Portanto u é uma coordenada em $\mathcal{M}(\mathcal{V})$, e $\mathcal{M}(\mathcal{V})$ é essencialmente o plano complexo superior.

Para $u = 0$ temos uma singularidade em $\mathcal{M}(\mathcal{V})$. De fato, neste ponto a simetria do vácuo é restaurada para $\mathcal{H}_P(u = 0) = SU(2)$, enquanto para todos os outros pontos com $u \neq 0$ temos $\mathcal{H}_P(u \neq 0) = U(1)$. Neste caso, sendo u qualquer complexo, o moduli $\mathcal{M}(\mathcal{V})$ é simplesmente o plano complexo sem a origem, $\mathcal{C}^+ - \{0\}$, que pode ser compactificado para uma esfera de Riemann adicionando-se os pontos 0 e ∞ .

De agora em diante, vamos nos referir a um ponto P no moduli pela sua parametrização $u : u \equiv P$.

6.1.1 O Moduli Quântico

Espera-se que as direções planas desapareçam após as correções quânticas. Porém utilizando as propriedades da supersimetria pode-se mostrar que correções quânticas, perturbativas e não perturbativas, não removem a degenerescência de $\mathcal{M}(\mathcal{V})$, e as direções planas continuam a existir quanticamente. Observe que o único modo de gerar um superpotencial para o supercampo quiral $N = 1$ \mathcal{A} é quebrando $N = 2$. Como a teoria com invariância $N = 2$ mais geral está restrita à forma

$$\mathcal{L}_{\text{ef}} = \text{Im} \left[\int d^2\theta d^2\bar{\theta} K(\mathcal{A}^a, \mathcal{A}^{a\dagger}, V^a) + \int d^2\theta \tau_{ab}(\mathcal{A}) W^{\alpha a} W_{\alpha}^b \right],$$

onde $\tau_{ab}(\mathcal{A}) = \mathcal{F}_{ab}$ é uma função holomórfica, e K é o potencial de Kähler, as correções restringem-se àquelas que preservam esta forma, especificando então somente a forma de K e τ_{ab} . (Utiliza-se também o fato de não haver quebra dinâmica da supersimetria).

Assim podemos definir o espaço de moduli quântico $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$. As diferenças entre $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$ e $\mathcal{M}(\mathcal{V})$ estarão no número e localização das singularidades. Como estas estão associadas a saltos na dimensão do little group, elas aparecem quando uma partícula carregada do espectro torna-se não massiva, originando mais uma dimensão para $T_P^{\mathcal{G}}$.

Note que pontos diferentes em $\mathcal{M}(\mathcal{V})$ correspondem a teorias inequivalentes; para teorias

com $\mathcal{M}(\mathcal{V})$ não trivial. as massas dos bosons de gauge serão diferentes para diferentes pontos em $\mathcal{M}(\mathcal{V})$.

6.2 Ação Efetiva

Para nossa teoria $N = 2$ $SU(2)$, temos um $\mathcal{M}(\mathcal{V})$ não trivial. Para cada ponto $u \in \mathcal{M}_q(\mathcal{V})$, devemos distinguir o correspondente espectro massivo, que denotamos $\Psi_{pesado}(u)$, pois a ação efetiva será construída em termos somente dos graus de liberdade dos campos não massivos $\Psi_{leves}(u)$. A energias suficientemente baixas, os modos massivos não aparecem como estados físicos. Algumas partículas adquirem massa através do mecanismo de Higgs, esta dependendo do v.e.v. que parametriza o ponto do **moduli** u através da fórmula de massa

$$M \geq |a(u) e Z|, \quad Z = (n_e + \tau n_m). \quad (6.1)$$

que podemos escrever de maneira mais conveniente definindo

$$a \equiv a \cdot e, \quad a_D \equiv \tau a, \quad \Rightarrow \quad M = |a n_e + a_D n_m|. \quad (6.2)$$

Então para definirmos uma teoria efetiva em um ponto u , devemos

- ▷ Separar o espectro entre modos massivos e não massivo;
- ▷ Integrar sobre os modos massivos.

Então nossa teoria efetiva será descrita, em um ponto regular u , por um conjunto de multipletos $N = 2$ $\Psi_{leves}^i(i)$, que descreve as partículas sem massa. Mais precisamente, o potencial de Kähler e a função holomórfica $\tau(\mathcal{A})$ serão determinados pela integração sobre os modos massivos. Aqui surge a dependência da constante de acoplamento efetiva com a escala de renormalização μ , que será fornecida por uma escala característica da teoria: o v.e.v. do Higgs

$$\tau_{ef}(\mu) \rightarrow \tau_{ef}(a).$$

A escalas acima do v.e.v. a , a massa dos bosons de gauge não abelianos W^\pm é negligível e, do comportamento ordinário da constante de acoplamento usual, observaremos um comportamento com liberdade assintótica. A escalas abaixo de a , os modos W^\pm se congelam, e resta uma teoria efetiva abeliana com função β nula.

Podemos aí definir as coordenadas efetivas da teoria no ponto $u \in \mathcal{M}_q(\mathcal{V})$ através do valor da componente escalar do supermultiplete $N = 2$ descrevendo os modos sem massa. Porém uma importante questão a responder diz respeito ao domínio de validade das coordenadas efetivas. pois se em algum ponto houver uma mudança do little group $\mathcal{H}'_u \neq \mathcal{H}_u$, o espectro de massa se altera. A descrição da teoria efetiva em torno de um ponto u irá falhar sempre que nos aproximamos de um ponto em $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$ onde uma partícula massiva torna-se sem massa. De fato, precisaremos de diferentes coordenadas efetivas para descrever todo o moduli. A métrica neste espaço fornece as condições para efetuarmos as mudanças de coordenadas: neste ponto o conceito de dualidade terá importante papel. E a estrutura de singularidades (singularidades estão associadas a alguma partícula massiva tornando-se não massiva) nos dirá quantas coordenadas efetivas locais serão necessárias para descrever todo $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$.

6.3 Coordenadas Duais

Voltemos ao espaço de moduli quântico. Como vimos, parametrizamos os pontos em $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$ pelo v.e.v. da componente escalar do hipermultiplete $\Psi_{leves}(u)$, que descreve os modos sem massa no ponto $u \in \mathcal{M}_q(\mathcal{V})$. E vimos ainda que a ação efetiva será dada por $\mathcal{F}_{ef}(\Psi_{leves})$, após integração sobre os modos massivos.

Baseada na relação 5.12, e levando em conta que utilizamos as componentes escalar do multiplete quiral \mathcal{A} como coordenada em $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$, podemos usar a função holomórfica $\tau_{ab}(\mathcal{A})$ para definir a métrica de Kähler em $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$. O significado físico desta métrica pode ser lido no termo cinético de gauge da lagrangiana (é a constante de acoplamento).

Daqui para adiante trabalharemos sempre com nosso caso específico $SU(2)$, onde o espaço de moduli tem uma dimensão complexa. Denotando por a o v.e.v. do campo escalar, o prepotencial antes das correções perturbativas e não perturbativas para as componentes escalar é dado por

$$\mathcal{F}^{(0)}(a) = \frac{1}{2}\tau^{(0)}a^2,$$

com $\tau^{(0)} = \frac{i4\pi}{g^{(0)2}} + \frac{\theta^{(0)}}{2\pi}$; podemos tomar $\theta^{(0)} = 0$. Utilizando a mesma notação que em 6.1,

introduzimos a variável dual a_D como

$$a_D \equiv \tau^{(0)} a = \frac{\partial \mathcal{F}^{(0)}}{\partial a}.$$

A generalização para a teoria efetiva definida por \mathcal{F}_{ef} é somente

$$a_D \equiv \frac{\partial \mathcal{F}_{ef}}{\partial a}.$$

Um modo de verificar se a definição da variável dual faz sentido fisicamente, seria calcular a massa dos estados BPS da teoria efetiva ou, em outras palavras, encontrar as extensões centrais da álgebra da teoria efetiva definida por \mathcal{F} . De fato a fórmula de massa para os estados BPS da teoria efetiva é dada por

$$M^2(n_e, n_m) = |an_e + \frac{\partial \mathcal{F}_{ef}}{\partial a} n_m|^2.$$

Então apresentamos em cada ponto $u \in \mathcal{M}_q(\mathcal{V})$ as seguintes estruturas geométricas:

- ★ Uma coordenada efetiva $a(u)$, definida pela v.e.v. do Higgs;
- ★ O prepotencial efetivo $\mathcal{F}_{ef}(a(u))$;
- ★ Uma coordenada dual a_D , em termos da qual reproduzimos a fórmula de massa.
- ★ Uma métrica. $\tau(u) = \frac{\partial^2 \mathcal{F}_{ef}(a(u))}{\partial a^2}$.

Em termos da coordenada dual $a_D(u)$, a métrica pode ser escrita como

$$ds^2 = \text{Im} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_{ef}}{\partial a \partial \bar{a}} da d\bar{a} = \text{Im} d\bar{a} da_D,$$

que é manifestamente invariante sob a transformação de dualidade

$$S : \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a_D \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Para fazer a descrição mais precisa, notemos que nosso moduli é uma variedade de uma dimensão complexa, e tomamos u como uma coordenada holomórfica nesta variedade ($u = \langle \text{Tr } \phi^2 \rangle$). Sejam a e a_D as coordenadas de um espaço $X \cong \mathcal{C}^2$ onde podemos escolher uma

forma simplética $\omega = \text{Im } da_D \wedge d\bar{a}$. As funções $(a_D(u), a(u))$ fornecem um mapeamento f de $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$ em X . Em outras palavras, elas determinam uma seção de X pensado como um fibrado $SL(2, \mathbb{Z})$ sobre $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$. Em termos da coordenada u , a métrica no moduli toma a forma

$$ds^2 = \text{Im} \frac{da_D}{du} \frac{d\bar{a}}{d\bar{u}} du d\bar{u}.$$

Este é o pull-back da métrica de Kähler associada a forma simplética ω e é, portanto, manifestamente invariante por $SL(2, \mathbb{Z})$. Escolhendo $u = a$, voltamos à fórmula original. Note que para $(a_D(u), a(u))$ arbitrários, a métrica não é positiva definida. Entretanto, obteremos soluções onde estas funções são tais que a métrica será sempre positiva.

O significado físico da coordenada dual pode ser entendido como um recíproco magnético do v.e.v. do Higgs: $a(u)$, que utilizamos para parametrizar certas regiões de $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$ é o v.e.v. do Higgs no hipermultiplete Ψ_{leve} na fase de Coulomb, onde a descrição não apresenta problemas. Ao efetuarmos a transformação S acima, trocamos as cargas elétricas das partículas do espectro por cargas magnética; portanto o campo de gauge presente no hipermultiplete transformado Ψ_{leve}^D se acopla a cargas magnéticas, sendo o dual do foton. A coordenada dual a_D representa então o v.e.v. da componente escalar do hipermultiplete $N = 2 \Psi_{leve}^D$.

A transformação 6.3, 5.13, implica que se a teoria efetiva para $\Psi(u)$ esta no regime de interação fraca, então a teoria efetiva para $\Psi^D(u)$ estará em regime de acoplamento forte, e vice versa. Utilizando o fato das transformações de $SL(2, \mathbb{Z})$ serem isometrias da métrica de Kähler, pode-se tentar utilizar a dualidade para estender o domínio de validade de um conjunto de coordenadas efetivas para além do regime de acoplamento fraco.

A dualidade também pode ser justificada considerando a forma da ação efetiva,

$$\frac{1}{16\pi} \text{Im} \int d^4x \left[\int d^2\theta \tau_{ef}(a) W^\alpha W_\alpha + \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathcal{A}^\dagger \mathcal{F}'_{ef}(\mathcal{A}) \right].$$

Definindo um campo dual \mathcal{A} por $\mathcal{A}^D = \mathcal{F}'_{ef}(\mathcal{A})$, e uma função $\mathcal{F}_{ef}^D(\mathcal{A}^D)$ dual à $\mathcal{F}_{ef}(\mathcal{A})$ por

$$\mathcal{F}_{ef}^{D'}(\mathcal{A}^D) = -\mathcal{A}$$

onde $\mathcal{F}_{ef}^{D'}(\mathcal{A}^D)$ significa $d\mathcal{F}_{ef}^D(\mathcal{A}^D)/d\mathcal{A}^D$. Esta transformação de dualidade constitui uma transformação de Legendre $\mathcal{F}_{ef}^D(\mathcal{A}^D) = \mathcal{F}_{ef}(\mathcal{A}) - \mathcal{A}\mathcal{A}^D$. Utilizando estas relações, o segundo termo da ação pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \text{Im} \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathcal{A}^\dagger \mathcal{F}'(\mathcal{A}) &= \text{Im} \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} (-\mathcal{F}_{ef}^{D'}(\mathcal{A}^D))^\dagger \mathcal{A}^D \\ &= \text{Im} \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathcal{A}^{D\dagger} \mathcal{F}_{ef}^{D'}(\mathcal{A}^D). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Vemos que este segundo termo da ação efetiva é invariante sob a transformação de dualidade.

Agora consideremos o termo cinético de gauge. Enquanto a dualidade é uma transformação local com respeito a \mathcal{A} , este não será o caso com W_α , pois temos um vínculo nos campos de gauge, que é traduzido na identidade de Bianchi $dF = 0$. O vínculo correspondente no superspaço é $\text{Im}(D_\alpha W^\alpha) = 0$, sendo D_α a derivada no superspaço. Na integração funcional temos a opção de integrarmos somente sobre o supercampo vetorial V , ou sobre o supercampo espinorial W^α impondo o vínculo através de um supercampo multiplicador de Lagrange que chamaremos V^D :

$$\begin{aligned} &\int \mathcal{D}V \exp \left[\frac{i}{16\pi} \text{Im} \int d^4x d^2\theta \mathcal{F}_{ef}''(\mathcal{A}) W^\alpha W_\alpha \right] \\ \simeq &\int \mathcal{D}W \mathcal{D}V^D \exp \left[\frac{i}{16\pi} \text{Im} \int d^4x \left(\int d^2\theta \mathcal{F}_{ef}''(\mathcal{A}) W^\alpha W_\alpha + \frac{1}{2} \int d^2\theta d^2\bar{\theta} V^D D_\alpha W^\alpha \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Note que

$$\begin{aligned} \int d^2\theta d^2\bar{\theta} V^D D_\alpha W^\alpha &= - \int d^2\theta d^2\bar{\theta} D_\alpha V^D W^\alpha = + \int d^2\theta \bar{D}^2 (D_\alpha V^D W^\alpha) \\ &= + \int d^2\theta (\bar{D}^2 D_\alpha V^D) W^\alpha = -4 \int d^2\theta (W^D)_\alpha W^\alpha \end{aligned} \quad (6.6)$$

onde usamos $\bar{D}_\beta W^\alpha = 0$ e onde o dual W^D é definido de V^D em analogia com a versão abeliana como $(W^D)_\alpha = -\frac{1}{4} \bar{D}^2 D_\alpha V^D$. Então podemos efetuar a integração funcional sobre W e obter

$$\int \mathcal{D}V^D \exp \left[\frac{i}{16\pi} \text{Im} \int d^4x d^2\theta \left(-\frac{1}{\mathcal{F}''(\mathcal{A})} W^{D\alpha} W_\alpha^D \right) \right],$$

que reexpressa a ação em termos das variáveis duais, com constante de acoplamento $\tau_{ef}(a) = \mathcal{F}_{ef}''(a)$ substituída por $-\frac{1}{\tau_{ef}(a)}$. O supercampo W^D descreve o dual de $F_{\mu\nu}$, $*F_{\mu\nu}$. Expressando $-\frac{1}{\mathcal{F}_{ef}''(\mathcal{A})}$ em termos de \mathcal{A}^D , vemos que $\mathcal{F}_{ef}^{D''}(\mathcal{A}^D) = -\frac{d\mathcal{A}}{d\mathcal{A}^D} = -\frac{1}{\mathcal{F}_{ef}''(\mathcal{A})}$, de modo que

$$-\frac{1}{\tau_{ef}(a)} = \tau^D(a_D).$$

A ação toda pode ser reescrita como

$$\frac{1}{16\pi} \text{Im} \int d^4x \left[\int d^2\theta \mathcal{F}_{ef}^{D''}(\mathcal{A}^D) W^{D\alpha} W_\alpha^D + \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathcal{A}^{D\dagger} \mathcal{F}_{ef}^{D'}(\mathcal{A}^D) \right].$$

Para observar o efeito de todo grupo $SL(2, \mathbb{Z})$ sobre a ação, é mais conveniente reescrevê-la como

$$\frac{1}{16\pi} \text{Im} \int d^4x \int d^2\theta \frac{d\mathcal{A}^D}{d\mathcal{A}} W^{D\alpha} W_\alpha^D + \frac{1}{32i\pi} \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A}^D - \mathcal{A}^{D\dagger} \mathcal{A},$$

onde vemos que as transformações geradas por S e T são simetrias da ação :

$$\begin{aligned} S &: \left\{ \begin{pmatrix} \mathcal{A}^D \\ \mathcal{A} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A}^D \\ \mathcal{A} \end{pmatrix} \right. \\ T &: \left\{ \begin{pmatrix} \mathcal{A}^D \\ \mathcal{A} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A}^D \\ \mathcal{A} \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{Z}. \right. \end{aligned} \quad (6.7)$$

6.4 Contribuição Perturbativa

Aqui utilizamos a holomorphicidade de $\mathcal{F}_{ef}(\mathcal{A})$ [AGH97, Sei95, Sei94]. Utilizando a função β , simetrias da teoria microscópica e o teorema de não renormalização, obtemos o comportamento completo da parte perturbativa do prepotencial.

Para calcular a contribuição à um loop, somos endereçados à lagrangiana da teoria microscópica, que apresenta uma simetria $U(1)_R$. Esta teoria é assintoticamente livre, e portanto comporta cálculos perturbativos à altas energias. A simetria $U(1)_R$ é quebrada por uma anomalia quiral. À um loop, por uma transformação $U(1)_R$ a lagrangiana efetiva muda por

$$\delta \mathcal{L}_{ef}^{(0)} = -\frac{\alpha}{8\pi^2} F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu}.$$

Desde que $(32\pi^2)^{-1} \int F^* F$ é um inteiro, a anomalia quebra $U(1)_R$ para \mathbb{Z}_4 . A forma a um loop de \mathcal{L}_{ef} pode ser determinada requerindo-se que sob uma transformação $U(1)_R$ a lagrangiana

mude de acordo com a variação acima. Esta variação modifica o termo cinético de gauge $W^\alpha W_\alpha$ do seguinte modo

$$\frac{1}{16\pi} \text{Im} \left[\mathcal{F}''(e^{2i\alpha} \mathcal{A})(-FF + iF^*F) \right] = \frac{1}{16\pi} \text{Im} \left[\mathcal{F}''(\mathcal{A})(-FF + iF^*F) \right] - \frac{\alpha}{8\pi^2} F^*F.$$

Então a forma do prepotencial fica restrita à

$$\mathcal{F}_{ef}''(e^{2i\alpha} \mathcal{A}) = \mathcal{F}_{ef}''(\mathcal{A}) - \frac{2\alpha}{\pi}$$

ou, para α infinitesimal,

$$\frac{\partial^3 \mathcal{F}_{ef}}{\partial \mathcal{A}^3} = \frac{i}{\pi \mathcal{A}}.$$

Esta expressão pode ser facilmente integrada, a fim de encontrarmos o prepotencial a um loop:

$$\mathcal{F}_{ef}^{1-loop}(\mathcal{A}) = \frac{i}{2\pi} \mathcal{A}^2 \ln \frac{\mathcal{A}^2}{\Lambda^2}.$$

Devido a supersimetria $N = 2$, não há contribuições de ordem maior, descartadas pelo teorema de não renormalização.

6.5 Contribuição Não Perturbativa

O prepotencial recebe correções não perturbativas advindas de efeitos de instantons [DKM96], [DKM⁺97]. Uma correção $\mathcal{F}_{ef}^{(0)}$ devida a uma configuração de número de instanton k deve ser proporcional ao fator de k -instanton $\exp(-8\pi^2 k/g^2)$. Sendo uma função holomórfica, o prepotencial não deve receber correções de configurações de anti-instantons. Utilizando a função β a um loop da teoria, $\beta(g) = -g^3/4\pi^2$, o fator de k -instanton pode ser escrito como

$$e^{-8\pi^2 k/g^2} = \left(\frac{\Lambda}{a} \right)^{4k}.$$

Notamos que a simetria $U(1)_R$ é restaurada caso impusermos uma carga 2 a Λ . Com esta modificação o prepotencial deve-se transformar sob $U(1)_R$ como um campo de carga 4, sem um termo não homogêneo. Isto implica que a correção de k -instanton deve ser proporcional

a \mathcal{A}^2 . Juntando estes fatos, podemos escrever o prepotencial que inclui uma contribuição não perturbativa genérica como

$$\mathcal{F}_{ef} = \frac{i}{2\pi} \mathcal{A}^2 \ln \frac{\mathcal{A}^2}{\Lambda^2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left(\frac{\Lambda}{\mathcal{A}} \right)^{4k} \mathcal{A}^2, \quad (6.8)$$

onde os coeficientes C_k não dependem dos campos. A determinação da forma exata de \mathcal{F}_k é todo o trabalho de Seiberg e Witten.

6.6 Singularidades no Espaço de Moduli

A variável $a_D(u)$ está, sob nosso ponto de vista até aqui, no mesmo pé de igualdade que $a(u)$: somente com a diferença que pertence a um multipletto de gauge dual, que se acopla localmente aos estados carregados magneticamente. A princípio não importaria qual variável usamos para descrever a teoria, e a variável usada de fato depende da região em $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$ para qual estamos olhando. Mais especificamente, a região elétrica, próxima a $u \rightarrow \infty$, será melhor descrita em termos de a , com a lagrangiana apropriada sendo 6.8. A série de instantons converge bem para grandes valores de $a \sim \sqrt{u/2}$.

Entretanto, se tentamos estender $\mathcal{F}(a)$ para uma região suficientemente longe de $u \rightarrow \infty$, deixamos o domínio de convergência da série de instanton, onde então a expressão para \mathcal{F} não faria mais muito sentido. Isto é, tentando estender globalmente a lagrangiana efetiva para fora da região de coordenadas semi-clássicas, enfrentamos o problema de continuar analiticamente \mathcal{F} . O ponto é que mesmo pensando que não podemos ter uma escolha de \mathcal{F} válida em todo $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$ (temos o problema da positividade da métrica), podemos resomar a série de instantons em \mathcal{F} em termos de outras variáveis, para obter outra forma de lagrangiana que converge bem em outra região de $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$. Devemos nos contentar com lagrangianas efetivas que descrevem somente regiões do espaço de moduli. Nas regiões de sobreposição entre regiões distintas, as diferentes lagrangianas descreverão os mesmos modos não massivos, mas incluem modos massivos diferentes.

Percebemos então que 6.8 não pode descrever a teoria em todo $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$. A métrica $\text{Im } \tau_{ef}(a)$ não tem limite inferior, por ser derivada do prepotencial holomórfico \mathcal{F}_{ef} : pelas

equações de Cauchy-Riemann para a função holomórfica $\tau(a)$, o Hessiano

$$\det \left(\partial_{a_i} \partial_{a_j} \text{Im } \tau_{ef}(a) \right) \quad (a = a_1 + ia_2)$$

é menor ou igual a zero. Desde que $\mathcal{F}(a)$ é holomórfica, $\text{Im } \tau(a)$ é uma função harmônica e como tal não pode ter um mínimo. Na teoria microscópica isto teria o efeito de não termos uma energia positiva definida; aqui, significa que entramos em uma região de $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$ onde os graus de liberdade da ação efetiva não são mais os relevantes.

Ou seja, como $\text{Im } \tau$ não é positivo definido em todo moduli, não temos uma coordenada global para descrever $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$. Este fato está associado a presença de singularidades, que como já vimos, nos diz que os modos massivos mudaram no ponto singular.

Já podemos prever que os novos graus de liberdade, relevantes para a descrição da teoria efetiva perto de uma singularidade, serão relacionados ao espectro inicial por uma transformação de dualidade.

A questão fisicamente mais relevante passa a ser: quais os estados BPS relevantes na ação efetiva nas regiões onde 6.8 para de ser a descrição correta a baixas energias, e quantas fases a teoria possui?

Vamos resumir a simetria realizada nos campos de gauge abelianos $V = \begin{pmatrix} a_D(u) \\ a(u) \end{pmatrix}$.

Como discutimos, esta simetria deve ser uma invariância da fórmula de massa BPS e da métrica dos campos de gauge abelianos

$$\begin{cases} M = |n_e a + n_m a_D| \\ ds^2 = \text{Im } da_D d\bar{a} \end{cases}$$

Então podemos esperar que esta simetria deva ser $M \in SL(2, \mathbb{Z})$, agindo nos campos e números quânticos $Q = (n_m, n_e)$ como

$$V \rightarrow MV \quad Q \rightarrow QM^{-1}.$$

Quais subgrupos são finalmente realizados na teoria depende, tecnicamente falando, das monodromias de V induzidas pela física local.

6.6.1 As Monodromias do Espaço de Moduli

Determinar a ação efetiva equivale a determinar as funções $a_D(u)$ e $a(u)$. Informações particularmente úteis serão obtidas do comportamento destas funções ao tomarmos contornos fechados sobre o moduli. Caso o contorno não envolva singularidades, $a(u)$ e $a_D(u)$ irão retornar ao seu valor inicial uma vez percorrido o contorno. Entretanto, se envolvermos uma singularidade, estas funções não retornam a seus valores iniciais, mas sim a combinações lineares dos mesmos: temos uma monodromia não trivial para as seções multivalentes $a(u)$ e $a_D(u)$. O problema físico torna-se então um problema matemático, sendo o de simplesmente encontrar as funções multivalentes $a(u)$, $a_D(u)$ que apresentem as monodromias $M_{u_i, \infty}$ em torno das singularidades, e forneçam a constante de acoplamento $\tau = \partial_a a_D$, com $\text{Im } \tau \geq 0$. Este é um problema clássico da matemática, conhecido como problema de Riemann-Hilbert: tomando nosso $\mathcal{M}_g(\mathcal{V})$ como variedade de base para um fibrado $SL(2, \mathbb{Z})$, as seções V estão univocamente determinadas pelas monodromias de $V(u)$ em torno das singularidades e pelos valores da seções nestas singularidades.

O problema de Riemann-Hilbert pode ser solucionado por dois pontos de vista complementares: ou considerando-se a , a_D como soluções de uma equação diferencial parcial com pontos singulares regulares, ou considerando a , a_D como certas integrais de períodos sobre superfícies auxiliares. Esta última abordagem permite uma fácil interplementação geométrica das propriedades das monodromias, enquanto que a abordagem via equações diferenciais é mais útil para obterem-se as expressões explícitas para $a(u)$ e $a_D(u)$.

Começemos por discutir a monodromia de V em $u \rightarrow \infty$. Para grandes valores de $|a|$, a teoria é assintoticamente livre e $u = \frac{1}{2}a^2$. Com boa aproximação o prepotencial é dado pela fórmula a um loop, $\mathcal{F}(a) = (i/2\pi)a^2 \ln(a^2/\Lambda^2)$, para o qual obtemos

$$a_D = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a} = \frac{2ia}{\pi} \ln\left(\frac{a}{\Lambda}\right) + \frac{ia}{\pi}, \quad u \rightarrow \infty.$$

Tomemos agora um contorno fechado no plano u de raio muito grande, geralmente escrito como $u \rightarrow e^{2\pi i}u$. Isto equivale a envolvermos o ponto no infinito na esfera de Riemann. Em qualquer caso, desde que estamos numa região onde vale $u = \frac{1}{2}a^2$ temos $\ln u \rightarrow \ln u + 2\pi i$ e $\ln a \rightarrow \ln a + i\pi$, e então,

$$\begin{aligned} a_D &\rightarrow -a_D + 2a \\ a &\rightarrow -a. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Vemos então que a parte relevante para a monodromia é a_D e a

$$V(u) = \begin{pmatrix} a_D(u) \\ a(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{2u}}{4\pi} \ln(u/\Lambda^2) \\ \sqrt{2u} \end{pmatrix},$$

nos levando à matriz de monodromia

$$M^\infty = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que transforma $V \rightarrow M^\infty V$, se tomamos u envolvente a singularidade em $u_0 = \infty$. $u = \infty$ é um ponto de ramificação de $a_D(u) \sim \frac{i}{\pi} \sqrt{2u} (\ln \frac{u}{\Lambda^2} + 1)$; por isto referimo-nos a este ponto como singularidade, apesar de não haver mudança no espectro massivo aí.

A monodromia em $u \rightarrow \infty$ implica a existência de outras monodromias em algum outro lugar no plano u . Como um ponto de ramificação deve começar e terminar em algum lugar, deve haver no mínimo mais uma singularidade. Se estas monodromias comutam com M^∞ , significa que a é uma boa coordenada global. Se há somente duas singularidades, em $u = \infty$ e $u = 0$, então deformando-se o contorno podemos ver que a monodromia em torno de 0 é a mesma que a monodromia envolvendo ∞ : $M^0 = M^\infty$. Mas então a^2 não seria afetado por nenhuma monodromia, e seria assim uma boa coordenada global, de modo que poderíamos tomar $u = \frac{1}{2}a^2$ em todo $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$. Entretanto este não pode ser o caso, pois assim a positividade do termo cinético de gauge seria violada. A fim de conseguirmos um grupo de monodromia não abeliana, precisamos de ao menos mais duas singularidades em pontos u finitos, com uma monodromia não trivial. Estas singularidades estarão relacionadas pela simetria discreta $u \rightarrow -u$. Devido a esta simetria discreta global, as singularidades aparecem em pares. Os únicos pontos fixos de $u \rightarrow -u$ são $u = \infty$ e $u = 0$. Já vimos que $u = \infty$ é um ponto singular em $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$. Portanto, caso houvessem somente duas singularidades, a outra necessariamente seria o ponto fixo $u = 0$.

Para u próximo a Λ , a escala gerada dinamicamente, encontramos o regime de acoplamento forte, e portanto em torno deste ponto em $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$ devemos procurar um novo conjunto de modos não massivos que interagem fracamente. Podemos esperar que monopolos magnéticos sejam bons candidatos para definir estes modos, que descreverão a teoria efetiva nas regiões de acoplamento forte.

Investigamos a possibilidade sugerida pela dualidade de que um campo $U(1)$ magnético acoplado localmente a um monopolo (ou genericamente, a um dyon $(n_m^{(i)}, n_e^{(i)})$), torne-se não massivo num ponto $a_D = 0$ em $u = u_i$. Novamente a teoria desenvolve uma diferença no espectro de massa para $a_D \geq 0$, e utilizamos a_D como parâmetro de escala da teoria efetiva. A determinação da constante de acoplamento efetiva perturbativa $\tau_D(a_D)$ segue do mesmo procedimento para encontrar o prepotencial a um loop em II.5: $\tau_D(a_D) = \frac{\partial^2 \mathcal{F}_D}{\partial a_D^2}$. A diferença é que, devido ao sinal oposto na função β , a teoria se torna agora fracamente acoplada para $a_D = 0$, enquanto que efeitos perturbativos e não perturbativos tornam-se relevantes para grandes $\text{Im } a_D$. Próximo a $u = u_i$ a função $a_D(u)$ é analítica, significando que é válida a aproximação $a_D \propto c(u - u_i)$. Do mesmo modo que nas proximidades do infinito, podemos ver facilmente que as correções perturbativas fornecem uma contribuição analítica do tipo $(\frac{a_D}{\Lambda})^n$. Teremos

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}_D}{\partial a_D^2} = \tau_D(a_D) \propto -\frac{i}{\pi} \ln(a_D).$$

De $a(u) = -\frac{\partial \mathcal{F}_D}{\partial a_D}$, aprendemos que a peça relevante para a monodromia perto de $u \rightarrow u_i = \Lambda^2$ é

$$V \propto \begin{pmatrix} c_0(u - u_i) \\ \frac{i}{\pi} c_0(u - u_i) \ln u - u_i + a_v \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

que leva a matriz de monodromia

$$M^{u-i=\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

A constante não nula a_v não é relevante para a monodromia, mas sua presença é importante pois, de outro modo teríamos $a_D(u_i) = a(u_i) = 0$, que implicaria que estados carregados elétrica e magneticamente poderiam tornar-se simultaneamente não massivos.

Considere agora um dyon de carga (n_m, n_e) , que se torna não massivo em um ponto \tilde{u} no espaço de moduli, isto é, $\tilde{a}_D(\tilde{u}) = n_m a_D(\tilde{u}) + n_e a(\tilde{u}) = 0$ e seja $\tilde{a}(\tilde{u}) = k a_D(\tilde{u}) + l a(\tilde{u})$ o foton que se acopla q este dyon. A invariância da métrica implica que

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_D \\ \tilde{a} \end{pmatrix} = CV \quad C \in SL(2, \mathbb{Z}).$$

Pela análise a um loop, a monodromia relevante em termos de \tilde{V} próximo à u_i parece-se exatamente como em 6.10

$$\tilde{V} \propto \begin{pmatrix} c_0(\tilde{u} - u_i) \\ \frac{i}{\pi} c_0(\tilde{u} - u_i) \ln \tilde{u} - u_i + a_v \end{pmatrix},$$

e a continuação analítica em torno de \tilde{u} nos levará a uma monodromia \tilde{M} sobre \tilde{V} . Transformando \tilde{M} de volta para a antiga base V , temos a monodromia geral do dyon $M_{(n_m, n_e)} = C^{-1} \tilde{M} C$

$$M_{(n_m, n_e)} = \begin{pmatrix} 1 + 2n_m n_e & 2n_e^2 \\ -2n - m^2 & 1 - 2n_m n_e \end{pmatrix}.$$

Com isto vemos que a partícula que se torna não masivva em $u_i = \Lambda$ em 6.11 é o monopolo, $(1, 0)$. O número de singularidades u_i , $i = 1, \dots, r$ nos informa quantas matrizes de monodromia teremos no moduli, correspondendo a $2r$ monopolos (ou dyons) que tornam-se não massivos (o fato de serem $2r$ deve-se à simetria R que foi quebrada para a simetria discreta $u \rightarrow -u$).

Há um requisito de consistência na escolha dos $2r$ monopolos. Escolhendo um ponto de base u_b e traçando um loop iniciando e terminando em u_b envolvendo cada ponto singular onde um monopolo se torna não massivo - nomearemos u_i $i = 1, \dots, 2r$ para ordenar os loops. A combinação de todos estes caminhos pode ser deformada em um grande loop que envolve todas as singularidades u_i e, desde que estamos trabalhando no espaço compactificado \mathbb{P} que é uma esfera, este loop pode ser deformado de modo a tornar-se um loop envolvendo somente a singularidade em $u = \infty$; portanto a condição de compatibilidade para estas monodromias lê-se

$$M_\infty = M_{u_{2r}} \dots M_{u_1}.$$

Podemos considerar outro teste de consistência. Em geral, sob a ação da monodromia, os números quânticos dos dyons mudarão. Entretanto esperamos que o dyon particular que tornou-se não massivo e é fonte da singularidade deve permanecer invariante sob a monodromia (como propriedade deste dyon que determina a matriz de monodromia). Podemos ver qua a equação de autovalores

$$(q_m, q_e) \begin{pmatrix} 1 + 2n_m n_e & 2n_e^2 \\ -2n_m^2 & 1 - 2n_e n_m \end{pmatrix} = (q_m, q_e),$$

leva a $n_e q_m - n_m q_e$, caso n_e e n_m nao sejam nulos simultaneamente. Então uma solução desta equação é $q_e = n_e$, $q_m = n_m$. Retringindo-nos aos dyons estáveis, esta é a única solução. Portanto, sabendo a monodromia, podemos encontrar o dyon que a originou.

Suponha que saibamos que $2r$ dyons se tornam não massivos em pontos u_i em \mathcal{IP} . Esta informação nos fornece os dados suficientes para reconstruirmos $V(u)$. Sendo u um rótulo para o vácuo, a física não pode depender da maneira pela qual encontramos o particular ponto no plano u . O grupo de simetria físico Γ deve conter um subgrupo do grupo modular $\Gamma_M \subset SL(2, \mathbb{Z})$, gerado pelas monodromias M^∞ e $M_{(n_m^i, n_e^i)}^{u_i}$.

Capítulo 7

A Solução Exata

7.1 Singularidades e Fases

Agora, de posse da forma genérica do prepotencial, é possível encontrar as matrizes de monodromia do espaço de moduli, que geram o grupo de simetria exata da teoria quântica; esta dualidade permitirá encontrarmos a forma exata do prepotencial.

Podemos compactificar o espaço de moduli $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$ adicionando o ponto no infinito - ∞ aparece então como uma singularidade em $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$.

Em uma região próxima a ∞ , a parametrização

$$a(u) = \sqrt{2u}$$

fornece uma boa coordenada local. Geralmente denominamos de fase de Higgs a região no espaço de moduli $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$ onde a parametrização pelo v.e.v. do Higgs $a(u) \sim \sqrt{2u}$ é correta.

As matrizes de monodromia, $M_{u_i}^{Higgs}$, vindas de

$$\begin{pmatrix} a_D(u) \\ a(u) \end{pmatrix} \rightarrow M_{u_i}^{Higgs} \begin{pmatrix} a_D(u) \\ a(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_D(ue^{2\pi i}) \\ a(ue^{2\pi i}) = -a \end{pmatrix}$$

serão da forma

$$M_{u_i}^{Higgs} = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$$

para valores inteiros de p e q dependentes da correção quântica do prepotencial efetivo.

Qualquer monodromia em torno de uma singularidade de $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$ define uma simetria exata da teoria quântica.

Na fase de Higgs $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$, para Yang-Mills $N = 2$ $SU(2)$, o grupo gerado pelas monodromias em torno das singularidades é Abelian. Porém o moduli quântico não pode ser descrito globalmente em termos das variáveis da caso temos problemas com o termo cinético de gauge, devido à não positividade da métrica.

Para u próximo à Λ , encontramos o regime de acoplamento forte, e portanto nas vizinhanças deste ponto em $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$ devemos procurar um novo conjunto de modos não massivos com acoplamento fraco. Monopólos magnéticos são bons candidatos para definir os modos não massivos relevantes, em termos dos quais será descrita a teoria efetiva nas regiões de acoplamento forte de $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$, pois devido a dualidade, interagem fracamente nesta região.

Podemos adivinhar a forma do prepotencial efetivo $\mathcal{F}_{ef}^D(a_D)$, descrevendo as regiões de $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$ em torno de Λ , em termos da coordenada dual:

$$\mathcal{F}_{ef}^D(a_D) \sim a_D^2 \ln a_D$$

com $a_D(u)|_{u=\Lambda} = 0$. Na vizinhança de Λ escrevemos $a_D(u) \sim (u - \Lambda)$. Podemos definir a coordenada dual a por

$$a = \frac{\partial \mathcal{F}_{ef}^D}{\partial a_D} = a_D(u) \ln a_D(u) + a_D(u)$$

Esta singularidade magnética descreve uma fase dual à fase de Higgs: a fase de Higgs dual.

Do mesmo modo, nas proximidades de uma singularidade u_i , onde um dyon $(n_e^{(i)}, n_m^{(i)})$ se torna não massivo, teremos uma descrição em termos da variável

Podemos tentar verificar a conjectura de Montonen-Olive em termos das matrizes de monodromia:

$$M_W = M_m \prod_i M_{R_i(m)}$$

onde $M_{R_i(m)}$ são as matrizes de monodromia correspondentes a singularidades associadas à $R_i(m)$ partículas não massivas, sendo que $R_i(m)$ denota o estado BPS obtido do monopolo através da ação do conjunto restante da simetria R da teoria.

7.2 O Ansatz de Seiberg e Witten

O problema é encontrar $\tau(u)$ de modo a satisfazer as condições sobre a métrica. De fato, $\tau(u)$ não é uma função univalente sobre o espaço de moduli, e as ambiguidades na sua definição podem ser removidas pelas monodromias.

Podemos introduzir um conjunto de regras [GH95] que podem ser usadas a fim de derivar a geometria exata do espaço de moduli quântico.

Regra 1 Condição de Monodromia:

$$\prod M_{u_i} = 1$$

Regra 2 Positividade da constante de acoplamento.

Regra 3 Simetria R global são quebradas genericamente para algum subgrupo discreto. Requerimos que as singularidades do moduli sejam mapeadas em singularidades pela ação destas simetrias globais.

Regra 4 Estabilidade da partícula BPS sem massa. Para cada ponto singular u_i associamos uma partícula carregada sem massa caracterizada pelo vetor de cargas $(n_m^{(i)}, n_e^{(i)})$. Este vetor deve satisfazer

$$(n_m^{(i)}, n_e^{(i)}) M_{u_i} = (n_m^{(i)}, n_e^{(i)}),$$

e deve corresponder a um estado BPS estável.

Na fase de Higgs, podemos utilizar a forma assintótica do prepotencial $\mathcal{F}_{eff}(a)$ para calcular a monodromia M_∞ . Então, utilizando a Regra 2, aprendemos que deve haver uma descrição dual, nas vizinhanças do ponto u_i onde um estado BPS se torna não massivo: e sabemos como calcular a monodromia M_{u_i} , utilizando $\mathcal{F}_{eff}^D(a_D)$.

Agora, Regra 3 nos diz que há outras matrizes de monodromia, advindas da simetria R residual agindo em u_i : como R foi quebrada para uma simetria \mathbb{Z}_2 , teremos M_{-u_i} .

O espaço de moduli é o plano u com singularidades em u_i , $-u_i$ e ∞ , e uma simetria \mathbb{Z}_2 agindo como $u \rightarrow -u$. Sobre este plano há um fibrado vetorial $SL(2, \mathbb{Z})$, que tem como seção (a, a_D) . Este fibrado tem monodromias

$$M_{u_i}, \quad M_{-u_i}, \quad M_\infty.$$

O que é essencial que se compreenda é que o parâmetro modular $\tau(u)$ é definido intrinsecamente em termos de funções da variável u modulo o grupo de monodromia Γ_M , gerados pelas matrizes $M_{u_i}, M_{-u_i}, M_\infty$.

Chegando a este ponto, para solucionar formalmente o problema resta-nos saber quantas são as singularidades no moduli, e assim definir o grupo de monodromias Γ_M . Seiberg e Witten argumentaram que há apenas duas singularidade no moduli. Vamos esboçar alguns fatos que sustentam este argumento.

Já vimos a impossibilidade de termos apenas duas singularidade em $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$, localizadas em $\infty, 0$: as monodromias formariam um grupo abeliano e a seria uma boa coordenada global (ver seções 5.7.1 e 7.2).

A próxima escolha seria tentar três singularidades, sitas em ∞, u_0 e $-u_0$ para $u_0 \neq 0$. Em particular, $U = 0$ não é mais uma singularidade do moduli; para sê-la, teríamos de ter ao menos quatro singularidades, em $\infty, u_0, -u_0, 0$, o que veremos ser impossível.

Portanto não temos $u = 0$ como ponto singular do espaço de moduli quântico, ou seja, não há pontos em $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$ onde a simetria $SU(2)$ seja restaurada, como no caso clássico. O ponto $a = 0$ não pertence mais ao moduli quântico, ao menos não a componente conexa a $u = \infty$ que consideramos aqui.

Suponha que tenhamos p singularidades em u_1, u_2, \dots, u_p além da singularidade em $u = \infty$. Temos a condição sobre as monodromias

$$M_\infty = M_{u_1} M_{u_2} \dots M_{u_p} \quad (7.1)$$

com $M_{u_i} = M(n_m^{(i)}, n_e^{(i)})$, e é um problema de teoria dos números verificar se, para dado p , existe soluções da condição 7.1 com $n_m^{(i)}, n_e^{(i)}$ inteiros. Para vários valores de $p > 2$ foi verificado que não há solução, parecendo que o mesmo é verdade para qualquer $p > 2$.

Para garantir que a energia cinética seja positiva, $Im(\tau)$ deve ser positivo definido. As monodromias geram um subgrupo Γ_M de $SL(2, \mathbb{Z})$ e, de fato, o plano u com suas singularidades é o quociente do plano complexo superior \mathbb{H}^+ por Γ_M , \mathbb{H}^+/Γ_2 .

O espaço \mathbb{H}^+/Γ_2 também parametriza a família de curvas elípticas Σ_u , e τ pode ser relacionada a estruturas diferenciais sobre superfícies de Riemann.

Em resumo: As qualidades de solubilidade da teoria $N = 2$ $SU(2)$ SYM esta contida na estrutura do espaço de moduli. O problema é reduzido ao de encontrar a função definida sobre $\mathcal{M}_g(\mathcal{V})$ multivalente $\tau(u)$. O problema da monodromia resolve as ambiguidades de $\tau(u)$, e há ao menos duas abordagens complementares para estudar o problema:

- ★ **Abordagem Geometrica** $\tau(u)$ pode ser relacionada a estruturas diferenciais sobre superfícies de Riemann.
- ★ **Abordagem via Equações Diferenciais** $\tau(u)$ aparece como um mapeamento Fuchsiano.

7.3 As Equações de Picard-Fuchs

Fixar a monodromia também significa fixar o comportamento local de ramificação de $\tau(u)$, que é multivalente. Do comportamento perturbativo sabemos que $\tau(u) \sim \frac{i}{\pi} \log(u)$ no infinito, e a monodromia em torno do infinito identifica então $\tau \sim \tau + 2n$. Isto é fisicamente razoável, pois corresponde somente a deslocar o ângulo teta por um inteiro. Cabe saber se podemos reconstruir $\tau(u)$ com $\text{Im } \tau > 0$ a partir de seus dados locais de ramificação, sabendo que τ é $SL(2, \mathbb{Z})$ multivalente e holomórfico longe dos pontos de ramificação [Leh66].

Os mapeamentos Fuchsianos $\tau(u)$ são mapeamentos do plano complexo superior \mathbb{H}^+ em $F = \mathbb{H}^+/\Gamma$, com Γ um subgrupo de $SL(2, \mathbb{Z})$. Então eles mapeiam \mathbb{H}^+ em domínios fundamentais $F \in \mathbb{H}^+$ cujas cópias equivalentes por Γ preenchem todo \mathbb{H}^+ . Os domínios F são polígonos circulares (aqueles cujos lados podem ser retas ou círculos) e em nosso caso será esticado até infinito. Os polígonos não necessariamente têm genus zero, pois seus lados podem ser identificados de uma maneira não trivial. Os vértices do polígono correspondem a pontos no eixo real da variável u , e caso o genus do polígono seja zero u pode ser estendido de modo a cobrir todo plano complexo, que pode ser compactificado, tornando-se uma esfera de Riemann. Caso contrário, a compactificação do espaço dos u 's fornece uma superfície de Riemann de genus superior. O ponto essencial é que estes mapeamentos garantem que $\text{Im}(\tau(u)) \geq 0$.

A teoria clássica resolve também duas questões físicas essenciais: quais as combinações ad-

missíveis de dyons sem massa. e qual o domínio de validade da constante de acoplamento nas teorias fisicamente inequivalentes. Esta última questão é respondida através da construção de uma região fundamental F para Γ_M atuando em τ no plano complexo superior \mathbb{H} , isto é, $F = \mathbb{H}/\Gamma_M$.

Especificar a região fundamental F equivale a especificar Γ_M , e $\tau(u)$ é dado pelo mapeamento Fuchsiano $\tau : \mathbb{H} \rightarrow F$. Das propriedades locais do mapeamento, definidas através de F pode-se mostrar [Kle97] que o mapeamento deve satisfazer a chamada equação diferencial Schwarziana.

$$\{\tau, u\} = S(\tau) \tag{7.2}$$

onde a derivada Schwarziana invariante sob ação de $SL(2, \mathbb{Z})$ é definida por

$$\{\tau, u\} \equiv \frac{\tau'''}{\tau'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\tau''}{\tau'} \right)^2,$$

com $' = d/du$. Para o caso das funções Fuchsianas, temos a vantagem adicional de $S(\tau(u))$ ser uma função meromórfica da forma

$$S(\tau(u)) \equiv \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} \frac{1 - \alpha_i^2}{(u - u_i)^2} + \frac{\beta_i}{u - u_i} + \gamma \right\},$$

sendo portanto muito mais fácil trabalhar com $S(\tau(u))$. Os reais α_i são os ângulos internos da região fundamental F de Γ_M , e os reais β_i são também fixos por F ou pelo comportamento assintótico de τ em u_i e ∞ . O número de singularidades n aparece como sendo o número de vértices de vértices no polígono F (excluindo o ponto no infinito), os parâmetros u_i (localização das singularidades) e α_i são respectivamente a localização dos vértices e ângulos internos do polígono. A menos de uma transformação de $SL(2, \mathbb{Z})$, F é especificado por $3n$ parâmetros, a saber os raios e a posição do centro dos arcos [Kle97]. Após remover a invariância $SL(2, \mathbb{Z})$, ficamos com $3n - 6$ parâmetros reais. Em 7.2 contamos $(3n + 1)$ parâmetros reais (u_i, α_i, β_i) e γ . Mas três parâmetros podem ser removidos por uma transformação $SL(2, \mathbb{R})$ que permite colocar três pontos α_i em uma posição fixa do eixo real.

Note também que $\{\tau(u), u\} \sim 1/u^4$ para $u \rightarrow \infty$ se τ é regular em $u = \infty$, isto é, caso $\tau = \sum_{i=0}^{\infty} c_i u^{-i}$. Comparando com a série de Laurent de 7.2, fixamos outro parâmetro. De

modo similar, caso τ não seja regular em ∞ , então ou $\tau \sim u^{-\alpha_i} \times \text{reg}$ caso $\alpha_i > 0$, ou $\tau \sim \log u$ caso $\alpha_i = 0$. Em ambos os casos $\{\tau, u\} \sim \frac{1}{2}(1 - \alpha_i^2)u^{-2}$ o que remove igualmente 4 parâmetros.

Então sabemos que 7.2 tem uma invariância $SL(2, \mathbb{Z})$, graças às propriedades da derivada Schwarziana, e podemos verificar que τ tem as propriedades locais corretas, tais como $\tau \sim \log(u)$ é uma boa solução local perto de u_i com $\alpha_i = 0$, e analogamente $\tau \sim u^{p/n_i}$ é uma solução local próxima a u_i para ângulos finitos $\alpha_i = 2\pi/n_i$. Utilizando a propriedade $\{\tau, u\} = -\{u, \tau\} / \left(\frac{d^2u}{d^2\tau}\right)$ podemos escrever a equação diferencial para um problema inverso mais difícil de determinar $u(\tau)$

$$\{\tau, u\} = -S \left(\frac{d^2u}{d^2\tau} \right).$$

Pode-se verificar o fato essencial de que a equação não linear 7.2 é resolvida pela razão de soluções $\tau = \frac{\varpi_1}{\varpi_2}$ da seguinte equação diferencial linear

$$\varpi'' + S\varpi = 0. \tag{7.3}$$

Esta equação nada mais é do que a equação de Schrödinger com potencial periódico

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = 0, \quad V(x + 2\pi) = V(x) \tag{7.4}$$

desde que façamos as identificações

$$S \rightarrow V; \quad u \rightarrow x; \quad \varpi(u) \rightarrow \psi(x).$$

Façamos um breve parêntese. Há duas soluções independentes para a equação 7.4 (ou 7.3), $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$, e queremos compará-las nos pontos x e $x + 2\pi$. Devido a periodicidade do potencial a equação diferencial não muda, e tem portanto em $x + 2\pi$ as mesmas soluções. Em outras palavras, $\psi_1(x + 2\pi)$ e $\psi_2(x + 2\pi)$ devem ser combinações lineares de $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} (x + 2\pi) = M \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} (x)$$

sendo M a matriz de monodromia. A mesma situação ocorre para equações diferenciais no plano complexo com coeficientes meromórficos,

$$\left[-\frac{d^2}{dz^2} + V(z) \right] \psi(z) = 0,$$

como função meromórfica $V(z)$ tendo polos em z_1, \dots, z_p e, em geral, também em ∞ . A periodicidade do exemplo acima é aqui substituída pela univalência de $V(z)$ conforme z contorna qualquer polo de V . Portanto, conforme z contorna uma vez z_i , a equação diferencial não muda. E pelo mesmo argumento, as soluções $\psi_1(z)$ e $\psi_2(z)$, ao serem continuadas ao longo de um caminho envolvendo $z - i$, devem novamente ser combinações lineares de $\psi_1(z)$ e $\psi_2(z)$.

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} (z + e^{2\pi i}(z - z_i)) = M_i \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} (z),$$

com uma matriz de monodromia para cada polo de V . Fechamos o parêntese e voltamos a resolução do problema.

Caso estejamos interessados somente em $\tau(u)$, há uma ambiguidade na associação da equação diferencial linear 7.3, pois podemos multiplicar ϖ_1, ϖ_2 por uma função inteira $g(u)$. Esta ambiguidade deve ser utilizada para obtermos as funções $a_D(u), a(u)$ de $\tau = \frac{\varpi_1}{\varpi_2}$ por meio de

$$\tau(u) = \frac{\left(\frac{da_D}{du}\right)}{\left(\frac{da}{du}\right)},$$

com o comportamneto correto 6.10, conforme

$$\frac{d}{du}V(u) = g(u) \begin{pmatrix} \varpi_D(u) \\ \varpi(u) \end{pmatrix} = \bar{\varpi}(u).$$

Agora se $n = 3$, os únicos parâmetros livres em 7.2 são os ângulos, e o problema é solucionado por funções traingulares de Schwatz, que são razões de funções hypergeométricas. Este caso foi completamente estudado no século passado para subgrupos discretos gerais de $SL(2, \mathbb{R})$. Especialmente se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ como para os nossos três elementos necessariamente parabólicos, o subgrupo Γ é unicamente determinado, caso as condições de contorno sejam obedecidas. Para nossa teoria $SU(2)$, termos o grupo de congruência $\Gamma(2)$, definido por

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \left| \begin{array}{l} B, C = 0 \pmod{N} \\ A, D = 1 \pmod{N} \end{array} \right. \right\};$$

então vemos que $\Gamma(2)$ é constituído por matrizes da forma

$$\mathbb{1} + 2 \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad A, B, C, D \in \mathbb{Z}.$$

O grupo Γ_2 determina um único mapeamento Fuchsiano (modulo as posições das singularidades, que podemos normalizar de modo a $u_i \pm 1$), e verifica-se que este mapeamento tem $\alpha_i = 0$ e $\beta_i = \pm 1/4$. Portanto a equação 7.3 se torna

$$\tau(u) = \frac{\varpi_1}{\varpi_2} \quad \varpi'' + \frac{1}{4} \left[\frac{3 + u^2}{(u^2 - 1)^2} \right] \varpi = 0.$$

Há de fato uma simplificação neste caso, fazendo a mudança de variável $\vartheta' = \varpi$ pois então temos

$$\tau = \frac{\vartheta'_1}{\vartheta'_2} \quad \vartheta'' + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{u^2 - 1} \right) \vartheta = 0,$$

que é somente uma equação hipergeométrica. Finalmente $\tau(u)$ é simplesmente a razão entre as derivadas de duas funções hipergeométricas simples. De fato a função $\tau^{-1}(u)$ é um bem conhecida função automórfica chamada função elíptica modular. Assim vemos que o ansatz de Seiberg e Witten foi propor que $\mathcal{F}_{ef}(a)$ seja tal que $\mathcal{F}''_{ef}(a)$ é a inversa de uma função elíptica modular.

7.3.1 Unicidade da Solução

O ansatz de Seiberg e Witten certamente não é o único ansatz compatível com as condições básicas

$$\text{Im}(\tau(u)) \geq 0 \quad \tau(u) \rightarrow \frac{i}{2\pi} \log(u).$$

Na verdade, mesmo para duas singularidades (cujas posições normalizamos de modo a termos $u_i \pm 1$), a Schwarziana poderia ser

$$S(\tau(u)) = \frac{(1 - \alpha^2)}{2(u - 1)^2} + \frac{(1 - \gamma^2)}{(u + 1)^2} - \frac{1}{2} \frac{(2 - \alpha^2 - \gamma^2)}{(1 - u^2)}$$

onde $\alpha, \gamma = 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$, com grupos de monodromia chamados respectivamente Γ_2 , G_2 e G_θ . A solução com G_θ deve ser descartada pois não tem invariância sob a simetria R , mas continuamos tendo uma alternativa com G_2 .

O que distingue a solução de Seiberg e Witten é o fato dela carregar a simetria dual que foi utilizada para construí-la [FOS96, ROS96]. O ponto é que Γ_2 é um subgrupo invariante de $SL(2, \mathbb{Z})$ e

$$SL(2, \mathbb{Z})/\Gamma_2 = \mathbb{P}_3$$

onde \mathbb{P}_3 é o grupo das permutações de ordem 3. Matematicamente o grupo das permutações \mathbb{P}_3 o ponto no infinito e as duas singularidades, e fisicamente permuta campos de gauge, monopolos e dyons. A dualidade original de entrada emerge então como uma simetria entre os campo de gauge no infinito e o monopolo em uma das singularidades.

7.4 A Abordagem Geométrica

Vimos que o espaço de moduli \mathcal{M} é o plano u com singularidades em $1, -1, \infty$, e uma simetria \mathbb{Z}_2 agindo como $u \rightarrow -u$. Sobre este plano com singularidades há um fibrado $SL(2, \mathbb{Z})$, que tem (a_D, a) como seção. O grupo das monodromia em torno das singularidades $\Gamma(2)$ é o grupo das matrizes congruentes à identidade mod (2) . Este grupo define a simetria quântica exata da teoria, que em particular implica que podemos reduzir o plano complexo superior para o domínio fundamental $\mathcal{C}/\Gamma(2)$. Este domínio fundamental tem uma interessante interpretação em geometria

A curva elíptica Σ_u é definida como o lugar geométrico dos zeros do polinômi cúbico modulus elíptico. Singularidades desta curva aparecem em valores de u para os quais

$$W = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial z} = 0. \quad (7.5)$$

Denotaremos por Γ_M o grupo de monodromias do mapeamento $\tau(u)$ nestes pontos singulares. Por construção, $\tau(u)$ e $\Gamma_M \tau(u)$ devem corresponder à mesma curva elíptica, e portanto $\Gamma_M \in SL(2, \mathbb{Z})$, o grupo modular de uma curva elíptica. O grupo quociente $SL(2, \mathbb{Z})/\Gamma_M$ mapeiam uns nos outros os pontos que são soluções singulares da equação 7.5. De fato, todos deveriam corresponder à fronteira do espaço de moduli de estruturas complexas da curva elípticas. Podemos caracterizar o espaço quociente $SL(2, \mathbb{Z})/\Gamma_M$ como o conjunto de transformações $x \rightarrow x', y \rightarrow y', z \rightarrow z'$ tais que

$$W(x', y', z'; u) = f(u)W(x, y, z; u), \quad (7.6)$$

isto é, como mudanças de coordenadas locais que podem ser compensadas por uma mudança no moduli u .

Para reproduzir os resultados de Seiberg e Witten, devemos encontrar um polinômio cúbico $W(x, y, z; u)$ com soluções para $W = 0$ nos pontos $u = \infty, \pm u_\Lambda$, e com grupo de monodromia $\Gamma_M = \Gamma(2)$. Pode-se verificar que

$$W(x, y, z; u) = -zy^2 + x(x^2 - u_\Lambda^4 z^2) - uz(x^2 - u_\Lambda^4 z^2) = 0;$$

como estamos tomando $u_\Lambda = 1$ (veja seção anterior), esta equação define a curva elíptica

$$\Sigma_u : y^2 = (x - 1)(x + 1)(x - u),$$

que possui singularidades precisamente nos pontos $u = \infty, \pm 1$, e que o grupo de transformações 7.6 é isomorfo à $SL(2, \mathbb{Z})$, que indiretamente significa que o grupo de monodromia do mapeamento correspondente $\tau(u)$ é $\Gamma(2)$.

O espaço $\mathcal{C}/\Gamma(2)$, também parametriza a família de curvas Σ_u descritas pela equação

$$y^2 = (x - 1)(x + 1)(x - u), \tag{7.7}$$

onde x é uma variável complexa. Primeiro, note que esta equação é invariante sob as transformações $w : \{u \rightarrow -u, x \rightarrow -x, y \rightarrow \pm iy\}$, que geram uma simetria \mathbb{Z}_4 , da qual somente um subgrupo \mathbb{Z}_2 age em u . Esta é a mesma estrutura de simetrias de \mathcal{M} .

Para termos uma idéia do que é o espaço de moduli desta perspectiva, podemos retornar ao exemplo original do espaço de moduli das curvas elípticas (ou tori). Suponha que nos perguntemos qual o conjunto de todas as estruturas conformes em um torus bi-dimensional?. Pensamos então na imagem de um torus de revolução.

Entretanto, aplicando qualquer difeomorfismo no torus, temos outra estrutura complexa. Esta observação nos leva a modificar a questão anterior para qual o conjunto de classes de equivalências de estruturas conformes sobre a noção de equivalencia por difeomorfismo?, ou alternativamente quais são as órbitas do grupo de difeomorfismos agindo no espaço de estruturas conformes?.

A resposta é que o espaço de órbitas é idêntico ao das órbitas de $SL(2, \mathbb{Z})$ agindo sobre o plano complexo superior [Nak90]. Um ponto $\tau = x + iy$ no plano complexo superior correspondendo a uma estrutura complexa é o modulus da curva elíptica.

As características básicas encontradas aqui consistem de um espaço infinito-dimensional de estruturas geométricas (aqui as estruturas conformes do torus) e um grupo infinito-dimensional agindo sobre este espaço (aqui o grupo de difeomorfismos do torus), mas para os quais o espaço quociente é finito-dimensional. Este espaço quociente tem uma topologia global interessante (aqui gerada por $SL(2, \mathbb{Z})$ e seus subgrupos) e também estrutura métrica (a métrica hipérbolica no plano complexo superior é invariante por $SL(2, \mathbb{Z})$).

Vejam os que curva a equação 7.5 representa. A curva é basicamente o espaço x com a topologia determinada pela exigência de que y seja uma função univalente. Desde que a equação é quadrática em y , se nos movemos ao longo de um loop fechado envolvendo qualquer um dos zeros de y , então temos $y \rightarrow -y$. O mesmo também ocorre para um loop que contenha todos os zeros, ou equivalentemente, um loop em torno de $x = \infty$ (isto porque temos um número ímpar de zeros). Portanto, se y tem de ser necessariamente univalente, então o espaço x tem de ser um duplo recobrimento do plano complexo \mathcal{C} com a adição do ponto no infinito (como o plano complexo com a adição do ponto no infinito é equivalente a esfera de Riemman, o espaço x deve ser um duplo recobrimento da esfera). Além disto, este espaço deve ter quatro pontos de ramificação em $x = -1, 1, u, \infty$, conectados por dois cortes de ramificação. Para fixar atenção, consideremos um corte de -1 até 1 , e outro de u a ∞ . As duas folhas estão ligadas ao longo destes cortes, de modo que ao cruzarmos um dos cortes, movemo-nos de uma folha para outra. Neste espaço y é univalente. O espaço x assim obtido nada mais é do que uma superfície de Riemman de genus um.

Disto, pode-se mostrar que os loops no plano x que atravessam os cortes correspondem a ciclos dos torus. Quando dois dos pontos de ramificação coincidem, um ciclo em Σ_u é encolhido até se anular, de modo que a curva Σ_u torna-se singular. Portanto as singularidades no plano u estão em pontos onde uma curva na família Σ_u apresenta um ciclo nulo.

Para identificar a e a_D na superfície de Riemman de genus um Σ_u , tomam-se dois unciclos independentes γ_1 e γ_2 , normalizados de modo que seu número de intersecções seja $1 \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2 = 1$. Estes ciclos, que variam continuamente com u , formam uma base local para o primeiro grupo de homologia $V_u = H^1(\Sigma_u, \mathcal{C})$ de Σ_u . Um ciclo pode emparceirar-se a

elementos λ do primeiro grupo de cohomologia

$$\gamma \rightarrow \oint_{\gamma} \lambda.$$

λ pode ser pensado como uma $(1,0)$ -forma meromórfica em Σ_u com resíduo nulo, modulo formas exatas. O fato do resíduo ser nulo garante que o empareiramento é invariante sob deformações contínuas de γ mesmo através de polos de λ . Em virtude deste empareiramento, podemos atribuir a λ o status de elemento de V_u . Para um-formas em Σ_u , podemos escolher uma base

$$\lambda_1 = \frac{dx'}{y} \quad \lambda_2 = \frac{x dx}{y}.$$

A menos de uma multiplicação por um escalar, λ_1 é a única diferencial holomórfica em Σ_u , e se definimos

$$b_i = \oint_{\gamma_i} \lambda_1, \quad \text{para } i = 1, 2,$$

então o torus é caracterizado por um parâmetro

$$\tau_u = \frac{b_1}{b_2}, \quad \text{com } \text{Im}(\tau_u) > 0.$$

Consideremos uma seção arbitrária

$$\lambda = a_1(u)\lambda_1 + a_2(u)\lambda_2,$$

de V_u e façamos por ora a identificação

$$a_D = \oint_{\gamma_1} \lambda, \quad a = \oint_{\gamma_2} \lambda.$$

Se λ é uma forma com resíduo nulo então, ao envolver a singularidade, a e a_D transformam-se da maneira correta, simplesmente do mesmo modo com que γ_1 e γ_2 se transformam, por um subgrupo de $SL(2, \mathbb{Z})$ (mais detalhes na seção 4.6 de [AGH97]). Por outro lado, caso λ possua um polo de resíduo não nulo, é então impossível que a integração sobre o caminho possa mover-se passando por este polo, e, como resultado, a e a_D não mais se transformariam por $SL(2, \mathbb{Z})$. A segunda possibilidade claramente não é consistente com a simetria da fórmula BPS de massa 6.1, 6.2. Portanto λ não pode ter um polo com resíduo não nulo. A identificação acima implica que

$$\frac{da_D}{du} = \oint_{\gamma_1} \frac{d\lambda}{du}, \quad \frac{da}{du} = \oint_{\gamma_2} \frac{d\lambda}{du}.$$

Para fixar a arbitrariedade em λ , utiliza-se a condição $\text{Im } \tau > 0$ sobre a métrica em $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$.

Primeiro, suponhamos que

$$\frac{d\lambda}{du} = f(u)\lambda_1 = f(u)\frac{dx}{y}.$$

Então ,

$$\frac{da_D}{du} = f(u)b_1, \quad \frac{da}{du} = f(u)b_2,$$

de modo que

$$\tau = \frac{da_D/du}{da/du} = \frac{b_1}{b_2} = \tau_u.$$

Desde que $\text{Im } \tau_u > 0$, temos que $\text{Im } \tau > 0$. Como argumentaram Seiberg e Witten, o inverso também é verdadeiro, de modo que $d\lambda/du$ não depende de λ_2 . A função $f(u)$ é fixada pelo comportamento assintótico da teoria nas proximidades das singularidades no plano u , e é dada por $f(u) = -\sqrt{2}/4\pi$. Com isto, podemos obter λ como

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{dx \sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{dx y}{x^2-1} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{dx}{y} (x-u)$$

Para calcular a e a_D , deve-se escolher um um-ciclo específico em Σ_u . Identificamos γ_2 com a curva cujo loop envolve os pontos -1 e 1 no plano x . Podemos deformar esta curva de modo que ela permaneça inteiramente ao longo do corte entre -1 e 1 . Portanto, $a(u)$ é dado por

$$a(u) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{dx \sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Para γ_1 , escolhemos a curva que envolve os pontos 1 e u , e temos

$$a(u)_D = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_1^u \frac{dx \sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Pode-se verificar que com esta escolha dos um-ciclos, a e a_D apresentam o comportamento desejado nas proximidades das singularidades.

7.5 Condensação de Monopolos e Confinamento

O confinamento em teorias de gauge $N = 1$ pode ser entendido em termos da teoria macrocópica $N = 2$. O supercampo vetorial de $N = 2$ \mathcal{A} como vimos, pode ser decomposto, no formalismo $N = 1$, no supercampo quiral Φ e no supercampo vetorial W_α . A fim de quebrar

a simetria $N = 2$ para $N = 1$, podemos adicionar um superpotencial $\mathcal{W} = m\text{Tr } \Phi^2$ à ação , que funciona como um termo de massa para o multipleteo Φ .

Na teoria $N = 2$, o espectro não massivo no limite semi-clássico consiste somente no multipleteo vetorial abeliano \mathcal{A} . Na teoria efetiva a baixas energias, podemos representar $\text{Tr } \Phi^2$ através de um supercampo quiral U . Sua componente escalar é $u = \langle \text{Tr } \phi^2 \rangle$, que é uma função holomórfica no espaço de molduli. Para m pequeno, podemos simplesmente adicionar $\mathcal{W}_{ef} = mU$ a lagrangiana efetiva, o que remove a degenerescência do vácuo e fornece uma massa ao multipleteo escalar. Para que a teoria de gauge abeliana seja também massiva, precisamos (i) ou de campos de gauge não massivos extras, originando uma teoria não abeliana com acoplamento forte, (ii) ou campos carregados sem massa, que acionam um mecanismo de Higgs. Em ambos os casos, em algum lugar em $\mathcal{M}_q(\mathcal{V})$ devem aparecer estados não massivo extra.

Não podemos ter campos de gauge sem massa extras (não há pontos no moduli com simetria de gauge restaurada). Portanto consideramos o segundo caso, onde os campos extra não massivos podem ser dyons ou monopolos.

Próximo do ponto onde temos monopolos sem massa, temos a descrição dual da teoria, e utilizamos o supercampo quiral $N = 1$ M para descrever o hipermultipleteo do monopolo. Nesta descrição dual, o superpotencial total $N = 1$ torna-se

$$\mathcal{W}(M) = m\text{Tr } \phi^2 + a_D M \tilde{M}$$

com $a_D M \tilde{M}$ descrevendo o acoplamento do monopolo ao foton dual. No moduli quântico podemos reescrever $\mathcal{W}(M)$ usando o fato de que $a_D = a_D(u)$ como

$$\mathcal{W}(M) = mu(a_D) + a_D M \tilde{M}.$$

O vácuo corresponde a soluções de $d\mathcal{W} = 0$, satisfazendo $|M| = |\tilde{M}|$. Para $m = 0$, $M = \tilde{M} = 0$ e portanto a_D é arbitrário, e recuperamos o espaço de moduli de $N = 2$. Se $m \neq 0$,

$$M \tilde{M} + \frac{\partial u}{\partial a_D} = 0, \quad a_D M = a_D \tilde{M} = 0.$$

Assumindo que $\frac{\partial u}{\partial a_D} \neq 0$, temos que $M, \tilde{M} \neq 0$, de modo que $a_D = 0$ e $M = \tilde{M} = (-mu'(0))^{1/2}$. Desde que M é carregado, seu v.e.v. gera uma massa para o campo de

gauge através do mecanismo de Higgs, e reproduz-se então o intervalo de massa da teoria microscópica. Para entender o confinamento de cargas, note que como o hipermultipleteo $M\tilde{M}$ decreve monopolos, temos um mecanismo de Higgs dual. Portanto $M \neq 0$ significa que um monopolo não massivo condensa no vácuo. Isto fornece um confinamento da carga elétrica pelo efeito Meissner dual.

Referências Bibliográficas

- [Act79] Alfred Actor, *Classical solutions of $su(2)$ yang-mills theories*, Rev. Mod. Phys. **51** (1979), 461.
- [AGH97] Luiz Alvarez-Gaumé and S.F. Hassan, *Introduction to s -duality in $n=2$ supersymmetric gauge theories*, 1997, hep-th 9701069.
- [AH85] M. F. Atiyah and Nigel J. Hitchin, *Low energy scattering of non-abelian monopoles*, Phys. Lett. **107A** (1985), 21.
- [Bil96] Adel Bilal, *Duality in $n=2$ susy yang-mills theory: A pedagogical introduction to the work of seiberg and witten*, 1996, hep-th 9601007.
- [Bog76] E. B. Bogomol'nyi, *The stability of classical solutions*, Sov. J. Nucl. Phys. **24** (1976), 449.
- [BW92] Jonathan Bagger and Julius Wess, *Supersymmetry and supergravity*, Princeton University Press, 1992.
- [Cal78] C. Callias, *Axial anomalies and index theorem on open spaces*, Commun. Math. Phys. **62** (1978), 213.
- [CM69] Sidney Coleman and J. Mandula, Phys. Rev. **159** (1969), 1251.
- [Col75] Sidney Coleman, *Quantum sine-gordon equations as the massive thirring model*, Phys. Rev. **D11** (1975), 2088.

- [CRTP96] B. Craps, F. Roose, W. Troost, and A. Van Proeyen, *The definition of special geometry*, 1996, hep-th 9606073.
- [CRTP97] B. Craps, F. Roose, W. Troost, and A. Van Proeyen, *What is special kähler geometry?*, Nucl.Phys. **B503** (1997), 565, hep-th 9703082.
- [DHV78] A. D’Adda, R. Horsley, and P. Di Vecchia, *Supersymmetric monopoles and dyons*, Phys. Lett. **76B** (1978), 298.
- [Dir31] Paul Adrien Maurice Dirac, *Quantised singularities in the electromagnetic field*, Proc. Roy. Soc. **A133** (1931), 60.
- [DKM96] Nicholas Dorey, Valentin V. Khoze, and Michael P. Mattis, *Multi-instanton calculus in $n = 2$ supersymmetric gauge theory*, Phys.Rev. **D54** (1996), 2921, hep-th 9603136.
- [DKM⁺97] N. Dorey, V. V. Khoze, M. P. Mattis, M. J. Slater, and W. A. Weir, *Instantons, higher-derivative terms, and nonrenormalization theorems in supersymmetric gauge theories*, Phys.Lett. **D54** (1997), 213, hep-th 9706007.
- [FB96a] Frank Ferrari and Adel Bilal, *Curves of marginal stability, and weak and strong bps spectra in $n=2$ supersymmetric qcd*, Nucl.Phys. **B480** (1996), 589, hep-th 965101.
- [FB96b] Frank Ferrari and Adel Bilal, *The strong-coupling spectrum of the seiberg-witten theory*, Nucl.Phys. **B469** (1996), 387, hep-th 9602082.
- [Fer97a] Frank Ferrari, *Dualite couplage fort/ couplage faible dans les theories de jauge non-abeliennes*, Ph.D. thesis, Universite Pierre et Marie Curie, 1997, hep-th 9705071.
- [Fer97b] Luiz Agostinho Ferreira, *Exact electromagnetic duality i*, Tech. report, Escola de Verão Jorge André Swieca, 1997.
- [FOS96] R. Flume, L.O. O’Raifeartaigh, and I. Sachs, *Brief resume of seiberg-witten theory*, 1996, hep-th 9611118.

- [Gau93] J. P. Gauntlett, Nucl. Phys. **B400** (1993), 103.
- [Gau94] J. P. Gauntlett, *Low energy dynamics of $n=2$ supersymmetric monopoles*, Nucl. Phys. **B411** (1994), 433, hep-th 9305068.
- [GG72] H. Georgi and S. L. Glashow, Phys. Rev. Lett. **D28** (1972), 1494.
- [GH95] César Gómez and Rafael Hernández, *Electric-magnetic duality and effective field theories*, 1995, hep-th 9510023.
- [GM86] G. Gibbons and N. Manton, *Classical and quantum dynamics of monopoles*, Nucl. Phys. **B274** (1986), 183.
- [GMG61] M. Gell-Mann and M. Glashow, Ann. Phys. **15** (1961), 437.
- [GNO77] Peter Goddard, J. Nuyts, and David I. Olive, *Gauge theories and magnetic charge*, Nucl. Phys. **B125** (1977), 1.
- [GO78] Peter Goddard and David I. Olive, *Magnetic monopoles in gauge field theories*, Rep. Prog. Phys **41** (1978), 1358 – 1437.
- [Har96] Jeffrey A. Harvey, *Magnetic monopole, duality and supersymmetry*, 1996, hep-th 9603086.
- [JR76a] Roman Jackiw and Claudio Rebbi, *Solitons with fermion number $1/2$* , Phys. Rev. **D13** (1976), 3398.
- [JR76b] Roman Jackiw and Claudio Rebbi, *Vacuum periodicity in a yang-mills quantum theory*, Phys. Rev. Lett. **37** (1976), 172.
- [Kle97] Albrecht Klemm, *On the geometry behind $n=2$ supersymmetric effective actions in four dimensions*, 1997, hep-th 9705131.
- [Kog79] J. B. Kogut, Rev. Mod. Phys. **51** (1979), 659, Artigo de revisão .
- [KW41] H. Kramers and G. Wannier, Phys. Rev. **60** (1941).

- [Leh66] Joseph Lehner, *A short course in automorphic functions*, Holt, Rinehard and Winston, 1966.
- [Lyk96] Joseph Lykken, *Introduction to supersymmetry*, 1996, hep-th 9612114.
- [Man75] S. Mandelstam, *Soliton operator for the quantized sine-gordon equation*, Phys. Rev. **D11** (1975), 3026.
- [Man82] Nicholas M. Manton, *A remark on the scattering of bps monopoles*, Phys. Lett. **110B** (1982), 54.
- [MO77] C. Montonen and David I. Olive, *Magnetic monopoles as gauge particles?*, Phys. Lett. **72B** (1977), 117.
- [Nak90] Mikio Nakahara, *Geometry, topology and physics*, Institute of Physics Publishing, 1990.
- [Oli95] David I. Olive, *Exact electromagnetic duality*, 1995, hep-th 9508089.
- [Oli97] David I. Olive, *Exact electromagnetic duality i*, Tech. report, Escola de Verão Jorge André Swieca, 1997.
- [Osb79] Hugh Osborn, *Topological charges for $n=4$ supersymmetric gauge theories and monopoles of spin 1*, 321.
- [Osb82] Hugh Osborn, *Semiclassical methods for quantising monopole field configurations*, Monopoles in Quantum Field Theory (P. Goddard N. S. Craig and W. Nahm, eds.), World Scientific, 1982.
- [Pol74] Alexander M. Polyakov, *Particle spectrum in quantum field theory*, JETP Lett. **20** (1974), 194.
- [Pra80] M. Prasad, *Instanton and monopoles in yang-mills gauge field theories*, Physica **1D** (1980), 167.
- [PS75] M. K. Prasad and C. H. Sommerfield, *Exact classical solution for the 't hooft monopole and julia-zee dyon*, Phys. Rev. Lett. **35** (1975), 760.

- [Raj82] R. Rajaraman, *Solitons and instantons*, North-Holland, 1982.
- [ROS96] R.Flume, L.O. O’Raifeartaigh, and I. Sachs, *Uniqueness of the seiberg-witten effective lagrangian*, Nucl.Phys. **B494** (1996), 331, hep-th 9611123.
- [Sah49] M. N. Saha, Phys. Rev. **75** (1949), 1968.
- [Sal68] Abdus Salam, *Elementary particle theory: Relativistic group and analyticity*, 1968, p. 367.
- [Sch69] J. Schwinger, *A magnetic model of matter*, Science **165** (1969), 757.
- [Sei94] Nathan Seiberg, *The power of holomorphy*, 1994, hep-th 9408013.
- [Sei95] Nathan Seiberg, *The power of duality - exact results in 4d susy field theory*, 1995, hep-th 9506077.
- [Sen94] Ashok Sen, *Dyon monopole bound states, self dual harmonic forms on multi-monopole moduli space, and $sl(2,z)$ invariance in string theory*, Phys. Lett. **329B** (1994), 217, hep-th 9402032.
- [Sky61] T. H. R. Skyrme, *Particle states of a quantized meson field*, Proc. Roy. Soc. **A2662** (1961), 237.
- [SW94a] Nathan Seiberg and Edward Witten, Nucl. Phys. **B430** (1994), 485, ERRATUM.
- [SW94b] Nathan Seiberg and Edward Witten, *Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $n=2$ supersymmetric yang-mills theory*, Nucl. Phys. **B426** (1994), 19, hep-th 9407087.
- [SW94c] Nathan Seiberg and Edward Witten, *Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in $n=2$ supersymmetric qcd*, Nucl. Phys. **B431** (1994), 484. hep-th 9408099.
- [tH71] Gerard ’t Hooft, Nucl. Phys. **B35** (1971), 167.
- [tH74] Gerard ’t Hooft, *Magnetic monopoles in unified gauge theories*, Nucl. Phys. **B79** (1974), 276.

