

unesp  **UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JULIO DE MESQUITA FILHO"**

**CAMPUS DE GUARATINGUETA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE GUARATINGUETA**

WILLY ROGER DE PAULA MENDONÇA

**OTIMIZAÇÃO DINÂMICA DE ROTORES COM EIXOS EM
COMPÓSITO**

Guaratinguetá

2014

WILLY ROGER DE PAULA MENDONÇA

OTIMIZAÇÃO DINÂMICA DE ROTORES COM EIXOS EM
COMPÓSITO

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica na área de Projetos.

Orientador: Prof. Dr. Mauro Hugo Mathias

Guaratinguetá

2014

M539o Mendonça, Willy Roger de Paula
Otimização dinâmica de rotores com eixos em compósito / Willy Roger de Paula Mendonça - Guaratinguetá, 2014
166 f. : il.
Bibliografia: f. 118-123

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2014.
Orientador: Prof. Dr. Mauro Hugo Mathias

1. Rotores – Dinâmica 2. Método dos elementos finitos 3. Algoritmos genéticos I. Título

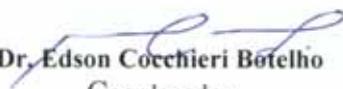
CDU 621.67(043)

WILLY ROGER DE PAULA MENDONÇA

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA”

PROGRAMA: ENGENHARIA MECÂNICA
ÁREA: PROJETOS

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Edson Cocchieri Bótelho
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. MAURO HUGO MATHIAS
Orientador / UNESP-FEG


Prof. Dr. JOSÉ ELIAS TOMAZINI
UNESP-FEG


Prof. Dr. MARCELO SAMPAIO MARTINS
UNESP-FEG


Prof. Dr. JOSÉ RUI CAMARGO
UNITAU


Prof. Dr. EVERALDO DE BARROS
DCTA/IAE

Setembro de 2014

DADOS CURRICULARES

WILLY ROGER DE PAULA MENDONÇA

NASCIMENTO	25.05.1979 – SÃO JOSÉ DOS CAMPOS / SP
FILIAÇÃO	Mário Lisboa Mendonça Beatriz Paula Pinto
1998/2002	Curso de Graduação Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista.
2004/2007	Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, nível de Mestrado, na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista.
2010/2014	Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, nível de Doutorado, na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista.

Dedico está conquista primeiramente a minha esposa Cristiane, por me motivar no desenvolvimento deste doutorado até o último minuto de sua conclusão. Também aos meus pais Beatriz e Mário, por me darem a vida, por partilharem as minhas conquistas e por me conduzirem na trilha do saber nestes longos anos.

AGRADECIMENTOS

Ao meu professor e amigo Mauro Hugo Mathias, pela dedicação em me ensinar e me orientar nestes últimos 15 anos.

Aos professores, técnicos e funcionários do departamento de mecânica por me concederem os recursos necessários ao desenvolvimento deste trabalho.

Ao professor Marcelo Sampaio Martins, pela ajuda na execução de ensaios experimentais.

Aos técnicos Everton e Rodrigo que se dedicaram no desenvolvimento da bancada experimental.

Ao Edgar pela preparação das amostras para caracterização da seção dos tubos de carbono.

“Existem apenas duas maneiras de ver a vida. Uma é pensar que não existem milagres e a outra é que tudo é um milagre.”

Albert Einstein

MENDONÇA, W. R. P. **Otimização dinâmica de rotores com eixos em compósitos**. 2014. 168 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2014.

RESUMO

Esta tese apresenta o desenvolvimento de uma metodologia de otimização dinâmica e estrutural para rotores com eixos em material compósito. A dinâmica destes rotores difere das análises convencionais devido à existência de amortecimento interno no eixo. As equações de movimento destes rotores apresentam a influencia do amortecimento interno sobre o comportamento dinâmico dos rotores. Materiais compósitos podem ser manufacturados em diferentes sequências de laminação. Para obter as melhores propriedades mecânicas, que possibilitem aos rotores operarem, em condições de estabilidade dinâmica e de esforços estruturais, foi necessário o desenvolvimento de uma metodologia de otimização para obter o melhor projeto. Para a aplicação desta metodologia foi desenvolvido um algoritmo de otimização. Para fundamentar este desenvolvimento foram revisados conceitos da teoria clássica de laminação, dos modelos de amortecimento estrutural, da dinâmica de rotores com amortecimento interno, de elementos finitos e dos métodos de otimização. O método de otimização escolhido foi o genético. Dentro do algoritmo de otimização foram inseridos módulos de análise para calcular as propriedades equivalentes, de avaliação estrutural por critérios de falha e de análise dinâmica de rotores. Diferentes simulações demonstraram a importância da sequência de laminação sobre a dinâmica dos rotores. Dentre os resultados finais estão simulações de otimizações e uma análise dos principais parâmetros que influenciam a obtenção de soluções ótimas pela otimização.

PALAVRAS-CHAVE: Dinâmica de rotor. Velocidade crítica. Compósito. Diagrama de Campbell. Elementos finitos. Fator de perda. Algoritmos genéticos.

MENDONÇA, W. R. P. **Dynamic optimization of rotors mounted on composite shafts.** 2014. 168 f. Thesis (Doctorate in Mechanical Engineering) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2014.

ABSTRACT

This thesis presents a development on dynamic and structural optimization method (multi-objective) for rotors mount on composite shafts. The dynamic analysis of these rotors differs from conventional analysis due to the existence of internal damping in the shaft. The equations of motion for these rotors represent the influence of internal damping on the dynamic behavior of the rotor system. Composite materials can be manufactured using different layups. To obtain the best mechanical properties, which allow rotors to operate in stability dynamic and allowable efforts structural conditions, it was necessary to develop a methodology for design optimizing. For the application of this methodology an optimization algorithm was developed. To support this development were reviewed: the classical lamination theory, models of structural damping, rotor dynamics with internal damping, finite elements and optimization methods. The optimization method chosen was algorithm genetic. Within the optimization algorithm were inserted analysis modules responsible for: calculate the equivalent properties, evaluate structurally by failure criteria and analyze the dynamics of the rotors. Several simulations have demonstrated the importance of the layup for rotor dynamics. Among the final results from optimization simulations, there are discussions about the influence of the each optimization parameters that influence the achievement of optimal solutions.

KEYWORDS: Rotor dynamic. Critical speed. Composite. Campbell diagram. Finite element. Loss factor. Genetic algorithm.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Eixo de transmissão em compósito	27
Figura 2 – Aplicação de eixo de transmissão em compósito em carros	28
Figura 3 – Seção de deformação de um laminado	31
Figura 4 – Plano de referência	32
Figura 5 – Tensão atuante no laminado	33
Figura 6 – Esforços atuantes no laminado	33
Figura 7 – Cálculo por camada	34
Figura 8 – Sistema de coordenadas para eixos	36
Figura 9 – Relação entre modos de vibrar e rigidez dos mancais.....	44
Figura 10 – Primeiros modos de vibrar.....	45
Figura 11 – Resposta ao desbalanceamento.....	45
Figura 12 – Diagrama de Campbell.....	46
Figura 13 – Diagrama de Campbell final.....	47
Figura 14 – Órbitas	48
Figura 15 – Sistema Instável.....	49
Figura 16 – Modelo de elementos finitos de um rotor.....	52
Figura 17 – Elemento DISK.....	53
Figura 18 – Elemento CBEAM.....	54
Figura 19 – Elemento BEARING	57
Figura 20 – Fluxograma do algoritmo genético.....	65
Figura 21 – Influência da posição da lamina	68
Figura 22 – Influência da direção da lamina.....	69
Figura 23 – Influência da direção da lâmina nos módulos de elasticidade.....	70
Figura 24 – Influência da direção da lâmina no amortecimento específico.....	71
Figura 25 – Influência da direção da lâmina nos módulos de elasticidade.....	72
Figura 26 – Influência da direção da lâmina no amortecimento específico.....	72
Figura 27 – Influência da direção da lâmina <i>Off-axis</i>	73
Figura 28 – Influência da direção da lâmina nos módulos de elasticidade.....	74
Figura 29 – Influência da direção da lâmina no amortecimento específico.....	75
Figura 30 – Influência da direção da lâmina nos módulos de elasticidade.....	76
Figura 31 – Influência da direção da lâmina no amortecimento específico.....	76
Figura 32 – Fluxograma do AG desenvolvido.....	78

Figura 33 - Cromossomo.....	79
Figura 34 – Todas as lâminas com o mesmo material	80
Figura 35 – Cada lâmina com um material diferente.....	80
Figura 36 – Fluxograma do módulo de análises 1	82
Figura 37 – Fluxograma do módulo de análises 2	83
Figura 38 – Fluxograma do módulo de análises 3	84
Figura 39 – Roleta de seleção	86
Figura 40 – Crossover	86
Figura 41 – Análise dinâmica do rotor para sequência [90,45,0,0,0,0,45,90]	87
Figura 42 – Rotor de referência para análise	89
Figura 43 – Diagrama de Campbell para a sequência [0s]	90
Figura 44 – Diagrama de Campbell para a sequência [15s]	91
Figura 45 – Diagrama de Campbell para a sequência [30s]	91
Figura 46 – Diagrama de Campbell para a sequência [45,0,45,0,90,0,90,0]	92
Figura 47 – Diagrama de Campbell para a sequência [90,45,0 ₂]s.....	92
Figura 48 – Diagrama de Campbell para a sequência [90,0,90,45,90,45,0,90]	93
Figura 49 – Diagrama de Campbell para a sequência [90 ₂ ,45,0]s.....	93
Figura 50 – Gráfico da variação do limite de instabilidade	95
Figura 51 – MEF do rotor	97
Figura 52 – FRFs entre os pontos (5x, 9x).....	98
Figura 53 – FRFs entre os pontos (5x, 6z).....	98
Figura 54 – FRF entre os pontos 5 e 9 no desbalanceamento.....	100
Figura 55 – Diagrama de Campbell para rotor com amortecimento viscoelástico	101
Figura 56 – Diagrama de Campbell para rotor com amortecimento hysterético	101
Figura 57 – FRFs para excitação harmônica.....	103
Figura 58 – Resultados de otimização para o modelo de referência.....	105
Figura 59 – Resultados de otimização com restrição de sementeira.....	106
Figura 60 – Resultados de otimização com aumento de mutação	107
Figura 61 – Resultados de otimização sem Pareto.....	108
Figura 62 – Resultados de otimização com restrição de sementeira.....	109
Figura 63 – Dominância sem controle	110
Figura 64 – Dominância controlada.....	111
Figura 65 – Problema não convergente.....	112
Figura 66 – Análise com 10 camadas	112

Figura 67 – Classificação dos materiais compósitos	132
Figura 68 – Sistema de coordenadas ortotrópico	133
Figura 69 – Sistema de coordenadas global.....	133
Figura 70 - Pirâmide desenvolvimento	134
Figura 71- Elemento anisotrópico.....	135
Figura 72 - Estado plano de tensões.....	137
Figura 73 – Comportamento dos materiais	142
Figura 74 – Modelo de Maxwell.....	143
Figura 75 – Modelo de Kelvin-Voigt.....	144
Figura 76 – Modelo linear padrão.....	144
Figura 77 – Modelo linear padrão.....	145
Figura 78 – Ciclo de histerese no material viscoelástico	146
Figura 79 – Ciclo de histerese no material viscoelástico no tempo	147
Figura 80 – Módulo complexo.....	147
Figura 81 – Comparação entre materiais	148
Figura 82 – Dependência do módulo e fator de perda com relação à temperatura.....	149
Figura 83 – Dependência do módulo e fator de perda com relação à frequência	150
Figura 84 – Diagrama de fase tensão-deformação.....	151
Figura 85 – Modelo padrão.....	152
Figura 86 - Elementos básicos de um rotor.....	153
Figura 87 – Modos de cisalhamento de uma trinca	155
Figura 88 – Gráfico de Campbell para o caso D.....	158
Figura 89 – Gráfico de Campbell para o caso E	158
Figura 90 – Gráfico de Campbell para o caso F.....	159
Figura 91 – Gráfico de Campbell para o caso G.....	159
Figura 92 – Gráfico de Campbell para o caso H.....	160
Figura 93 – Gráfico de Campbell para o caso I	160
Figura 94 – Gráfico de Campbell para o caso J	161
Figura 95 – Gráfico de Campbell para o caso L	161
Figura 96 – Gráfico de Campbell para o caso M	162
Figura 97 – Eixos adquiridos	163
Figura 98 – Experimento.....	164
Figura 99 – Curva ajustada	164
Figura 100 – Bancada experimental.....	166

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Materiais para simulação numérica.....	67
Tabela 2 – Resultados para a influência da lâmina dentro da sequência de laminação ..	68
Tabela 3 – Resultados para as simulações dos laminados <i>Angle-ply</i>	70
Tabela 4 – Resultados para a simulação de laminados <i>Angle-ply</i>	71
Tabela 5 – Resultados para a simulação de laminados <i>Off-axis</i>	74
Tabela 6 – Resultados para a simulação de laminados <i>Off-axis</i>	75
Tabela 7 – Sequências de laminação para análise.....	90
Tabela 8 – Frequências críticas e limite de instabilidade.....	94
Tabela 9 – Influência do fator de correção nas velocidades naturais.....	96
Tabela 10 – Influência do fator de correção no limite de estabilidade	97
Tabela 11 – Materiais utilizados no eixo para as simulações	99
Tabela 12 – Propriedades da fibra de carbono utilizada	104
Tabela 13 – Parâmetros das análises realizadas.....	111
Tabela 14 – Medidas do eixo 5	165
Tabela 15 – Módulos equivalentes.....	165

LISTA DE ABREVIATURAS

AGs	Algoritmos Genéticos
BW	Backward
EMBT	Equivalent Modules Beam Theory
FRF	Função de Resposta em Frequência
FW	Forward
LBT	Layerwise Beam Theory
MEF	Método dos Elementos Finitos
NLGRD	Nonlinear Geared Rotor Dynamics
PLS	Programação linear sequencial
PQS	Programação quadrática sequencial
SDC	Specific Damping Capacity
TCL	Teoria clássica dos laminados
UD	Unidirecional
VLI	Velocidade Limite de Instabilidade

LISTA DE SÍMBOLOS

Sigla	Descrição
Aij	Coefficiente da matriz do laminado
Bij	Coefficiente da matriz do laminado
C	Matriz de amortecimento
Cij	Coefficiente da matriz de rigidez
Cxx	Amortecimento do mancal na direção x
Czz	Amortecimento do mancal na direção z
Dij	Coefficiente da matriz do laminado
E	Módulo de elasticidade
F	Força
G	Módulo de cisalhamento
Idx	Momento de inércia do disco na direção x
Idy	Momento de inércia do disco na direção y
Idz	Momento de inércia do disco na direção z
K	Matriz de rigidez
Kxx	Rigidez do mancal na direção x
Kzz	Rigidez do mancal na direção y
L	Comprimento do elemento de eixo
m	Massa
Md	Massa do disco
Mx	Momento de flexão na direção x
My	Momento de flexão na direção y
Mz	Momento torção de cisalhamento
N	Número de graus de liberdade
Nx	Força normal por unidade de comprimento na direção x
Ny	Força normal por unidade de comprimento na direção y
Ns	Força de cisalhamento por unidade de comprimento na direção x
Qij	Coefficiente da matriz de rigidez no estado plano de tensão
R	Energia dissipada

R	Raio
S	Área da seção do eixo
S_{ij}	Coefficiente da matriz de flexibilidade
T	Energia cinética
U	Energia de deformação
a	Parte real do autovalor
b	Parte imaginária do autovalor
d	Distância da massa desbalanceada
h	Espessura do laminado
ρ	Relativo a uma camada do laminado
ρ	Operador de mudança de coordenada
q	Coordenadas independentes generalizadas
r	Autovalor
u	Coordenada na direção x
s	Coefficiente de Laplace
μ	Massa desbalanceada
w	Coordenada na direção z
v	Coordenada na direção y
t	Tempo
δW	Trabalho Virtual
Ω	Velocidade de rotação do eixo
$j\Omega$	Transformada de Fourier
σ	Tensão normal
τ	Tensão de cisalhamento
ε	Deformação devido a esforço normal
γ	Deformação devido a esforço de cisalhamento
ν	Poisson
κ	Específico de uma camada
λ	Autovalor
θ	Ângulo de rotação em torno de u
ψ	Ângulo de rotação em torno de w

ϕ	Ângulo de rotação em torno de v
ϕ	Autovetor à direita
ψ	Autovetor à esquerda
$[\Phi]$	Matriz de autovetores à direita
$[\Psi]$	Matriz de autovetores à esquerda
ρ	Densidade
α	Ângulo de fase da massa desbalanceada
$[\eta]$	Matriz de amortecimento do laminado
$[\xi]$	Amortecimento específico
ω	Frequência natural
δ	Deslocamento
λ	Inverso do autovalor
$[M]$	Matriz de massa
$[C_n]$	Matriz de amortecimento não-girante
$[C_r]$	Matriz de dissipação de amortecimento girante
$[G(\Omega_r)]$	Matriz giroscópica
$[K]$	Matriz de rigidez
$[H(\Omega_e)]$	Matriz circulatoria
$\ddot{x}(t)$	Vetor de acelerações
$\dot{x}(t)$	Vetor de velocidades
$x(t)$	Vetor de deslocamentos
$f(t)$	Vetor de forças
$\dot{q}(t)$	Vetor de velocidades
$q(t)$	Vetor de deslocamentos
$[A]$	Matriz no espaço de estado para velocidade
$[B]$	Matriz no espaço de estado para deslocamento
$F(t)$	Vetor de força no espaço de estado
$[I]$	Matriz identidade
$[\Lambda]$	Matriz diagonal

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	20
1.1	MOTIVAÇÃO.....	20
1.2	OBJETIVOS.....	22
1.3	CONTRIBUIÇÕES.....	22
1.4	ESTRUTURA DA TESE.....	23
2	REVISÃO BIBLIOGRAFICA	24
2.1	TRABALHOS DESENVOLVIDOS EM DINÂMICA DE ROTORES.....	24
2.1.1	Primeiros estudos em dinâmica de rotores	24
2.1.2	Métodos empregados na simulação dinâmica de rotores	25
2.1.3	Estudo de rotores com eixos compósitos	26
2.2	TEORIA CLÁSSICA DE LAMINADOS APLICADA A EIXOS.....	30
2.2.1	Comportamento elástico de laminados multi-direcionais ortotrópicos	30
2.2.2	Módulos de elasticidade equivalente para eixos laminados	36
2.3	AMORTECIMENTOS.....	37
2.3.1	Amortecimento nos materiais compósitos	38
2.3.2	Fator de perda para eixos laminados	39
2.4	ANÁLISE DINÂMICA DE ROTORES.....	40
2.4.1	Equação do movimento para rotores com amortecimento interno	40
2.4.2	Análise de vibração livre	41
2.4.2.1	Problema de autovalores.....	41
2.4.2.2	Ortogonalidade.....	42
2.4.2.3	Frequências naturais, velocidades críticas e modos de vibrar.....	43
2.4.2.4	Órbitas.....	47
2.4.2.5	Instabilidade.....	48
2.4.3	Resposta forçada no domínio da frequência devido ao desbalanceamento	50
2.5	MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA ROTORES.....	51
2.5.1	Elemento DISK	52
2.5.2	Elemento CBEAM	53
2.5.3	Elemento BEARING	56
2.5.4	Elemento MASS	57
2.6	OTIMIZAÇÃO.....	58
2.6.1	Formulações	60
2.6.2	Definições	60
2.6.3	Otimização Multi-Objetivos	61
2.6.4	Algoritmos Genéticos	62
2.6.4.1	Definições.....	63
2.6.4.2	Estrutura dos algoritmos genéticos.....	63
2.6.5	Algoritmos genéticos aplicados na otimização de laminados	65

3	PROPRIEDADES MECÂNICAS DE LAMINADOS.....	67
3.1	PROPRIEDADES DAS LAMINAS DE CARBONO.....	67
3.2	AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIA DA POSIÇÃO DE UMA LÂMINA.....	67
3.3	PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS LAMINADOS <i>ANGLE-PLY</i>	69
3.4	PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS LAMINADOS <i>OFF-AXIS</i>	73
4	ALGORITMO PARA OTIMIZAÇÃO DINÂMICA E ESTRUTURAL.....	77
4.1	ALGORITMO DESENVOLVIDO.....	77
4.1.1	Dados de entrada.....	78
4.1.2	Geração da população inicial.....	79
4.1.3	Módulos de análise.....	81
4.1.4	Avaliação da aptidão e classificação da população.....	84
4.1.5	Seleção dos indivíduos.....	85
4.1.6	Geração dos filhos e inserção de mutação.....	86
4.1.7	Convergência.....	87
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	88
5.1	RESULTADOS DE ANÁLISES DINÂMICAS.....	88
5.1.1	Influência do amortecimento interno do eixo.....	89
5.1.2	Avaliação da influência geométrica.....	95
5.1.3	Influência do fator de correção para o cisalhamento.....	96
5.1.4	Influência da sequência de laminação na FRF.....	97
5.1.5	Influência do material do eixo sobre rotor.....	99
5.1.6	Avaliação dos diagramas Campbell com diferentes amortecimentos.....	100
5.1.7	FRF para diferentes velocidades de rotação.....	102
5.2	RESULTADOS PARA OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVOS.....	103
5.2.1	Resultados para otimização de referência.....	105
5.2.2	Resultados para controle de diversidade.....	106
5.2.3	Resultados para otimização multi-objetivo.....	107
5.2.4	Resultados para dominância.....	109
5.2.5	Resultados para limite estrutural.....	111
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	113
6.1	CONCLUSÕES.....	113
6.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	117
	REFERÊNCIAS.....	124
	APÊNDICE A – Estudos desenvolvidos em dinâmica de rotores.....	126
	APÊNDICE B – Introdução sobre materiais laminados.....	131
	APÊNDICE C – Modelos de amortecimento estrutural.....	142
	APÊNDICE D – Fundamentos para análise dinâmica de rotores.....	153
	APÊNDICE E – Resultados de análises dinâmicas.....	158
	APÊNDICE F – Caracterização dos eixos em compósito.....	163
	APÊNDICE G – Bancada experimental.....	166

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

Máquinas rotativas acompanham o desenvolvimento da humanidade desde o surgimento da roda. Estas máquinas passaram por intenso desenvolvimento tecnológico ao longo dos anos, passando de aplicações simples nos primórdios da humanidade como rodas com eixos numa carroça, à complexas bombas de combustível que giravam a 60.000 rotações por minuto para injetar o propelente nos motores do foguete Saturno V, que levou o homem a lua. Estão presentes em diversas aplicações cotidianas como: ventiladores, máquinas de lavar, furadeiras e carros, e são encontradas em sistemas industriais na forma de bombas hidráulicas, compressores, eixos de transmissão, redutores de velocidade, etc. Também são encontradas nas usinas geradoras de energia elétrica, sendo o componente principal: hidrogeradores em hidrelétricas, turbo-geradores em usinas de energia a gás, turbinas eólicas e turbinas a vapor em usinas nucleares. Estão presentes em todos os meios de transporte desenvolvidos: virabrequins em motores, caixas de câmbio em carros, eixos de transmissão em navios e turbo-propulsores em aviões.

As máquinas rotativas possuem diversos componentes mecânicos, dentre os quais o principal é o rotor. O rotor é constituído basicamente de um eixo suportado por mancais, ao eixo podem ser acoplados diferentes componentes como: hélices, engrenagens, polias, rodas, acoplamentos, etc. Adicionalmente, os mancais podem ser de diferentes tipos: hidrodinâmicos, hidrostáticos, rolamentos, buchas, magnéticos, etc. A análise dinâmica do rotor é de extrema importância dentro do desenvolvimento do projeto destes equipamentos.

A importância e complexidade de fenômenos que abrangem e interagem no funcionamento das máquinas rotativas, justificam uma série de estudos focados na melhoria do projeto das mesmas. Dentre os diversos estudos que procuram torná-las mais eficientes, seguras e otimizadas, estão os estudos referentes à análise dinâmica dos rotores. Estes estudos visam principalmente de forma preditiva evitar vibrações, fadiga e desgastes dos componentes. Os estudos também buscam sanar falhas existentes oriundas das causas já mencionadas, além de desbalanceamentos e desalinhamentos.

Paralelamente, ao desenvolvimento destas máquinas, os materiais utilizados na indústria evoluem sensivelmente, buscando a melhoria de propriedades mecânicas. Um grande destaque é atribuído aos materiais compósitos, os quais surgem em aplicações espaciais em

meados da década de 60, com baixo volume de matéria prima aplicada e com valores por quilo muito elevados, o que justifica a limitada área de aplicação neste período de tempo, onde somente em projetos aeroespaciais a aplicação destes materiais a elevados custos se justificava. Nos dias de hoje este panorama alterou-se drasticamente. De modo geral o quadro se inverteu, o volume de material compósito utilizado cresce a grandes taxas, atrelado a queda do preço por quilo e as diferentes áreas de aplicação que surgem.

Uma crescente aplicação de materiais compósitos em projetos de engenharia é observada. Dentre elas os compósitos de fibra de carbono vêm se destacando nos setores naval, militar e aeroespacial, devido as suas excelentes propriedades mecânicas: elevada razão entre resistência e peso, alta rigidez, longa vida em fadiga, baixa densidade, resistência a corrosão e baixos coeficientes de dilatação. Algumas destas propriedades são de grande interesse no desenvolvimento de máquinas rotativas, principalmente para os eixos de rotores, os quais são solicitados a grandes esforços e fadiga. A crescente necessidade do aumento da eficiência desses equipamentos motiva o desenvolvimento de estudos com o objetivo de aprimorar a aplicação desta classe de materiais.

Com a busca de melhoria nos projetos, surge a necessidade de otimizar o projeto. Assim surge a oportunidade de aplicar eixos fabricados em fibra de carbono, os quais possibilitam a otimização de suas propriedades mecânicas através da seleção de uma sequência de laminação adequada. Os ajustes destas propriedades influenciam no comportamento dinâmico do rotor através da alteração de suas frequências naturais e conseqüentemente de suas velocidades críticas e também a resistência estrutural do conjunto.

Os compósitos de fibra de carbono possuem alto amortecimento interno quando comparado a materiais metálicos. Nos rotores a existência de amortecimento oriundo de uma fonte externa, como os induzidos por mancais são benéficos do ponto de vista dinâmico, pois promovem a estabilidade do sistema. Uma situação oposta ocorre quando este amortecimento encontra-se no eixo do rotor, embora promova menores amplitudes em velocidades subcríticas e em velocidades supercríticas gera instabilidade no rotor com mais facilidade. Como diversas máquinas rotativas operam em velocidades supercríticas, surge à necessidade da correta caracterização dinâmica de rotores com eixos compósitos para tornar possível sua aplicação. Diferentes metodologias demonstram que é possível através de arranjos da sequência de laminação posicionar uma frequência crítica e também ampliar a faixa de operação em condições estáveis.

Diante da possibilidade da aplicação deste material em eixos de rotores mais complexos do que eixos de transmissão, o problema a ser resolvido é desenvolver uma metodologia que

possibilite obter a melhor laminação para o eixo compósito que atenda as restrições dinâmicas e de resistência imposta pelo projeto simultaneamente.

A crescente aplicação de compósitos em diferentes áreas tecnológicas associadas a grande gama de aplicações de rotores, motivou o estudo que resultou nesta tese. Na qual foi desenvolvido um algoritmo que utiliza metodologias para estimação de propriedades mecânicas de laminados, método dos elementos finitos para análise dinâmica de rotores e algoritmos genéticos para otimização de configurações de laminados que atendam restrições de projeto, como velocidades críticas, estabilidade e de resistência a esforços estáticos.

1.2 OBJETIVOS

O presente trabalho tem como objetivo desenvolver um algoritmo que realize simultaneamente a otimização para resistência estrutural e dinâmica de rotores com eixos compósitos. Buscando com esta otimização obter projetos viáveis para rotores, garantindo que os efeitos dinâmicos indesejáveis gerados pelo amortecimento interno de eixos em compósito não perturbem a estabilidade do rotor na faixa de operação especificada e garanta a resistência estrutural do eixo para os esforços de operação.

1.3 CONTRIBUIÇÕES

O método desenvolvido se diferencia em dois aspectos em relação a outros métodos aplicados para otimização dinâmica de rotores e desta forma o qualificando como um trabalho original.

A primeira diferença é sobre o tipo de rotor que o método se aplica, nas referências encontradas sobre otimização, os rotores são constituídos somente por eixos e mancais, não existindo discos acoplados, ao contrario do método desenvolvido que amplia a diversidade de projetos de rotores que podem ser avaliados, possibilitando o emprego de diversos discos e mancais que podem ser posicionados longitudinalmente ao eixo.

A segunda diferença refere-se à análise empregada para se obter as frequências naturais do rotor e limites de estabilidade. As configurações de rotores aplicadas nas pesquisas desenvolvidas utilizam equações analíticas e/ou empíricas para análise das frequências naturais, estas equações inviabilizam o estudo de configurações mais complexas de rotores

como a proporcionada pelo método desenvolvido. A metodologia desenvolvida utiliza o método dos elementos finitos para a análise dinâmica do rotor. As principais metodologias encontradas na pesquisa bibliográfica foram: (MONTAGNIER; HOCHARD, 2012), (KUMAR, 2007) e (RANGASWAMY; VIJAYARANGIAN, 2005).

1.4 ESTRUTURA DA TESE

Neste primeiro capítulo são apresentadas as principais motivações que impulsionaram o desenvolvimento desta tese.

No Capítulo (2) são apresentadas uma revisão bibliográfica sobre os estudos desenvolvidos com rotores em compósitos, uma revisão da Teoria Clássica de Laminação (TCL) aplicada na obtenção das propriedades mecânicas equivalentes de eixos laminados, uma revisão sobre o amortecimento estrutural de eixos laminados e a metodologia para a estimação dos mesmos, uma revisão sobre análise dinâmica de rotores com amortecimento interno, abordando a formulação aplicada a estes rotores, uma revisão do Método dos Elementos Finitos (MEF), aplicado na avaliação dinâmica de rotores, com o detalhamento das novas matrizes utilizadas na formulação do elemento que representa o eixo de forma a acrescentar os efeitos oriundos do amortecimento e por último uma revisão do método de otimização genética utilizado no algoritmo desenvolvido.

No Capítulo (3) são apresentadas as propriedades mecânicas estimadas para diversas sequências de laminação, as quais foram utilizadas nas simulações dinâmicas.

No Capítulo (4) é apresentado o método desenvolvido aplicado a otimização dinâmica e estrutural de rotores com eixos. Neste capítulo são detalhados cada processo aplicado neste método.

No Capítulo (5) são apresentados os resultados obtidos para o método desenvolvido e discussões sobre os resultados são apresentadas.

No último capítulo são apresentadas as conclusões deste trabalho e formulado propostas para futuros estudos.

2 REVISÃO BIBLIOGRAFICA

A revisão bibliográfica almejou analisar a evolução dos métodos numéricos aplicados na análise dinâmica de rotores, com o propósito de selecionar os mais indicados a serem aplicados no algoritmo desenvolvido. Outro objetivo perseguido foi identificar as propostas apresentadas para a solução dos problemas mais corriqueiros encontrados em máquinas rotativas, com a intenção de prover os recursos necessários ao algoritmo para modelar estes problemas. Por último, mas não menos importante a pesquisa procurou descobrir as linhas de pesquisa em desenvolvimento na atualidade, buscando direcionar o desenvolvimento do algoritmo de forma a permitir a futura inserção de novos elementos finitos que atendam a modelagem destes campos de pesquisa.

2.1 TRABALHOS DESENVOLVIDOS EM DINÂMICA DE ROTORES

Nesta seção serão apresentados uma revisão sobre os primeiros estudos desenvolvidos em dinâmica de rotores, sobre os principais métodos numéricos aplicados na avaliação dinâmica de rotores e por fim os estudos desenvolvidos em rotores com eixos em compósitos. Uma revisão sobre outras áreas de estudos relacionados à dinâmica de rotores como, por exemplo, desbalanceamentos, acoplamentos, trincas, etc., são apresentadas no APÊNDICE A.

2.1.1 Primeiros estudos em dinâmica de rotores

Os primeiros estudos em dinâmica dos rotores são atribuídos a Rankine (1869), o qual elaborou um modelo de dois graus de liberdade constituído por uma massa rígida girando em uma órbita, com uma mola elástica agindo na direção radial. Rankine previu que além de certa velocidade de giro o eixo é considerado curvo e orbita ao redor dessa forma curva. Rankine chamou esta velocidade de *whirling speed*, hoje conhecida como velocidade crítica.

Laval em 1889 desenvolveu uma turbina a gás que operou na velocidade supercrítica, aproximadamente 40.000 rpm (KRAMER,1993). Dunkerley em 1894 reportou a possibilidade de operar um rotor acima da velocidade crítica proposta por Rankine (BORU; FIKRE; ENDASHAW, 2010). Kerr (1916) publicou um artigo no qual afirmou ter evidências experimentais que existia uma segunda velocidade crítica (BORU; FIKRE; ENDASHAW,

2010). Jeffcott (1919) publicou um artigo confirmando a existência de velocidades estáveis após a velocidade crítica.

2.1.2 Métodos empregados na simulação dinâmica de rotores

O artigo apresentado por Lee (1991) foi pioneiro em simular o comportamento de rotores através de números complexos, ele idealizou um modo natural complexo. A necessidade dessa nova abordagem se deu para melhor representar os movimentos simultâneos que ocorrem no rotor *spinning* e *whirling*.

Segundo Lalanne e Ferraris (1997) a escolha do método numérico a ser aplicado depende da complexidade da simulação analisada, a recomendação foi para utilização do método de Rayleigh-Ritz para modelos com poucos graus de liberdade e a aplicação do MEF para sistemas com muitos graus de liberdade. Nos dias de hoje com o aumento progressivo da velocidade de processamento computacional, acessível a todos e a custos relativamente baixos, a adoção de modelos com muitos graus de liberdade se torna a única opção razoável, visto que tal discretização possibilita uma alta acuracidade dos resultados obtidos.

A tese de Kessler (1999) teve como objetivo facilitar o entendimento da análise modal complexa desenvolvida por Lee (1991). O trabalho reformulou a notação existente.

O trabalho apresentado por Silva (2009) se destacou, pois evidenciou as ferramentas disponíveis atualmente para o desenvolvimento de especialistas neste vasto campo de estudos, que é a análise dinâmica de máquinas rotativas. O autor utilizou três recursos diferentes em seus estudos, construiu um modelo com o software comercial ANSYS[®], que não é um aplicativo dedicado para a análise apresentada e por este motivo tem custo elevado. Outra ferramenta utilizada foi o MATLAB[®], que embora seja uma ferramenta amplamente difundida nos meios acadêmicos, necessita da criação via programação de modelos de análise. Outra ferramenta utilizada pelo autor é um software desenvolvido pelo Prof. Dr. Milton Dias Jr., que cumpre o objetivo de análise, mas não é indicado para o estudo, pois a geração dos modelos é executada através de um cartão script.

No livro de Friswell et al. (2012) foi abordado a importância da escolha dos elementos finitos utilizados no modelo numérico a ser solucionado pelo MEF. De fato a escolha dos elementos finitos aplicados na simulação (*Beam, Shell, Tetraédrico, etc.*) buscam representar de forma satisfatória a dinâmica do rotor. O melhor modelo é aquele que representa dinamicamente o comportamento do rotor utilizando o elemento mais simples possível. A

simplificação do modelo além de agilizar o processo de análise de resultados permite, executar rotinas computacionais de otimização com mais facilidade.

No artigo apresentado por Han, Guo e Gao (2013) é proposto um método alternativo ao MEF. O método apresentado é baseado no *Kriging* substituto e algoritmos evolutivos. Os autores realizam uma série de simulações numéricas a fim de mostrar que o método obtém os mesmos resultados alcançados pelo MEF e por fim fazem a correlação deste método com um experimento.

2.1.3 Estudo de rotores com eixos compósitos

Devido à alta resistência, grande rigidez e baixa densidade, os materiais compósitos vêm sendo aplicados em diversos projetos de rotores, tais como eixos de transmissão para helicópteros, carros (ver Figura 1 e Figura 2), lanchas e motores a jato, ou em separadores centrífugos como tubos cilíndricos. O interesse nas aplicações de compósitos em dinâmica de rotores tem sido demonstrado numericamente e experimentalmente. Acompanhando o desenvolvimento de novos materiais compósitos, diversos modelos matemáticos de rotores laminados vêm sendo desenvolvidos.

Os primeiros estudos desenvolvidos buscaram consolidar a aplicação da teoria clássica de laminados já existentes na análise dinâmica de rotores. Estes estudos formulados aperfeiçoaram os modelos matemáticos para prever as velocidades críticas e a instabilidade destes rotores.

Diferentemente da análise dinâmica de rotores isotrópicos essa nova classe de materiais trouxe novos desafios, visto que o amortecimento interno presente no rotor laminado sujeita o mesmo a instabilidade com mais facilidade.

O amortecimento não rotativo aplicado ao rotor por um mecanismo como mancais, tem um efeito benéfico, pois promove a estabilidade do rotor. Já o amortecimento rotativo ou interno abrevia a faixa de operação dos rotores, pois induz a instabilidade.

Assim para a aplicação desta tecnologia e de todos os seus benefícios é necessário o pleno conhecimento da dinâmica destes sistemas através do correto modelamento matemático dos fenômenos físicos que ocorrem no laminado.

Figura 1 - Eixo de transmissão em compósito



Fonte: <http://www.jreperformanceparts.com>

Zinberg e Symonds (1970) investigaram as velocidades críticas em rotores anisotrópicos e seus experimentos confirmam as vantagens que os rotores de compósito apresentam em relação aos de alumínio. Reis et al.(1987) aplicaram o MEF de Donell da teoria de placas finas, para avaliar as velocidades críticas de rotores compósitos em laminados de paredes finas. Eles concluíram que o empilhamento e as direções das fibras do compósito têm forte influência no comportamento dinâmico do rotor.

Zorzi e Nelson (1977) propõe um modelo de elementos finitos que considera amortecimento viscoso e histerético. Ambos produzem termos circulatorios na equação geral de movimento, estes amortecimentos induzem a instabilidade e são demonstrados através de resultados experimentais. Diversos estudos desenvolvidos se basearam nos resultados apresentados neste artigo.

Greenhill Bickford e Nelson (1985) demonstram a inclusão de diversos efeitos necessários para usar um elemento de viga cônico em análise de dinâmica de rotores. Dentre os efeitos incorporados estão: a inércia de rotação, momentos giroscópios, esforços axiais, amortecimento interno e deformação de cisalhamento.

Zabaras e Pervez (1990) demonstram no artigo a aplicação de uma aproximação por amortecimento viscoso para placas laminadas anisotrópicas utilizando o método dos elementos finitos. Diversos experimentos com vigas de material compósito unidirecional foram testados para definir um fator de perda médio associado a cada modo de vibrar da placa de laminado.

Adams e Maheri (1994) apresentam uma formulação derivada da teoria clássica de laminados para se obter o amortecimento interno a flexão de vigas laminadas e o módulo

equivalente. No artigo apresentam diversas correlações entre os modelos apresentados e dados experimentais que evidenciam bons resultados.

Figura 2 – Aplicação de eixo de transmissão em compósito em carros



Fonte: <http://www.gforcedesignconcepts.com>

Bert (1993) e Kim e Bert (1995a) investigam as velocidades críticas de rotores compósitos utilizando a teoria de viga de Bernoulli-Euler e modelo de viga de Bresse-Timoshenko respectivamente. Convencionando o uso do modelo de viga cujos parâmetros são os equivalentes aos calculados no laminado, esta aplicação ficou conhecida como *Equivalent Modules Beam Theory* (EMBT). Em outro estudo Bert e Kim (1995a, 1995b) analisaram a dinâmica da instabilidade de eixos de transmissão em compósito sujeitos a flutuação de torque e/ou velocidade de rotação através de várias teorias de placas. Os efeitos giroscópios foram incluídos e regiões de instabilidade dinâmica para longos vãos, simplesmente apoiados foram apresentados.

Singh e Gupta (1994a, 1994b, 1996a, 1996b, 1997) divulgaram diversos trabalhos teóricos e experimentais. A formulação baseada no módulo equivalente, teoria de vigas para dinâmica de rotores, foi desenvolvida para rotores com um número de massas concentradas e suportadas por mancais. O método *Layerwise Beam Theory* (LBT) foi derivado a partir da teoria de placas e foi aplicado para resolver problemas de dinâmica de rotores compósitos. Os parâmetros convencionais de dinâmica de rotores bem como as velocidades críticas, frequências naturais, fatores de amortecimento, resposta ao desbalanceamento e limite de estabilidade foram analisados e detalhados. Os resultados oriundos das duas teorias EMBT e

LBT foram comparados. Os estudos experimentais foram conduzidos em duas frentes, rotores de carbono/epoxy com ângulos constantes ($\pm 45^\circ$ e $\pm 60^\circ$). Foi necessário utilizar um sistema de balanceamento ativo para permitir que o rotor atravessasse a primeira velocidade crítica. Através de diferentes configurações de rotores, os autores demonstraram que o acoplamento entre flexão-tração e cisalhamento-tração mudam em função do laminado utilizado e que alteram os valores das frequências.

No artigo de Nakra (2001) são explicitados as diferenças existentes entre os tipos de modelos de amortecimento existentes: viscoso, histerético, Coulomb e viscoelástico. São abordadas as técnicas para a determinação dos amortecimentos e as influências exercidas pelos parâmetros, frequência, temperatura e deformação. Outro tópico avaliado é a influência do amortecimento no comportamento de máquinas e estruturas.

Chang et al. (2004) publicou um artigo que trata do comportamento dinâmico de rotores compósitos. No modelo a deformação transversal de cisalhamento, inércia rotacional e efeitos giroscópios, bem como o efeito de acoplamento devido ao tipo de laminação foram incorporados.

Shin (2008) publica um artigo no qual estuda a dinâmica da estabilidade para velocidade supercrítica de rotores compósitos suportados por vigas flexíveis. O objetivo primário foi investigar os efeitos de dois parâmetros na estabilidade da precessão direta: um foi a rigidez flexional da viga suporte e o outro é a amortecimento interno rotacional do rotor compósito.

Sino et al. (2008) apresentam o estudo da influência do amortecimento interno de rotores compósitos em sua estabilidade dinâmica. Os estudos exploraram a influência dos seguintes parâmetros: sequência de empilhamento, orientação das fibras, cisalhamento transversal. Os resultados obtidos por três teorias diferentes (EMBT, EMBT modificado e LBT) foram comparados.

Para Gupta e Sekhar (2009) o estudo teve como objetivo estimar o amortecimento no sistema do rotor. O estudo foi desenvolvido para analisar o comportamento dinâmico a diferentes velocidades e para diferentes materiais tais como *glass/epoxy* e *carbon/epoxy*.

Genta e Amati (2010) publicaram um artigo no qual evidenciam a não aplicabilidade de modelos com amortecimento histerético quando a análise é desenvolvida no domínio do tempo. O autor propõe um novo modelo não viscoso que possibilita trabalhar neste domínio. Devido às diversas limitações citadas de se trabalhar com o amortecimento histerético, ambos os modelos foram comparados com uma série de restrições impostas, como por exemplo, baixo amortecimento histerético, movimento harmônico, altas frequências, etc.

Ghoneam, Hamada e EL-Elamy (2011) desenvolvem um trabalho no qual analisam pelo MEF diferentes configurações de laminados aplicados em compósitos. O principal objetivo do trabalho foi avaliar a influência que os parâmetros do laminado têm sobre as frequências naturais. Os parâmetros avaliados foram: sequência de empilhamento, orientação das fibras, condições de contorno e fração de volume de fibras.

Dharmadhikari et al. (2013) apresentam um artigo em que projetam e analisam um eixo de transmissão automotivo utilizando softwares comercial e algoritmos genéticos para a otimização.

Montagnier e Hochard (2014) descrevem que devido ao fato do amortecimento na fibra de carbono ser maior do que normalmente é encontrado em metais em velocidades supercríticas, o amortecimento pode trilhar à instabilidade, a qual tem efeitos catastróficos. Para os estudos foi especificado um rotor montado sobre suportes viscoelásticos.

2.2 TEORIA CLÁSSICA DE LAMINADOS APLICADA A EIXOS

Nesta seção é apresentada uma revisão sobre a aplicação da TCL em eixos laminados, demonstrando o desenvolvimento numérico para a obtenção das propriedades mecânicas equivalentes de eixos laminados. Uma revisão introdutória sobre definições, classificações, tipos e nomenclaturas aplicadas a materiais compósitos são apresentadas no APÊNDICE B. Neste apêndice também são apresentados conceitos sobre critérios de falha para compósito, sendo detalhado o critério de Tsai-Hill e Tsai-Wu.

2.2.1 Comportamento elástico de laminados multi-direcionais ortotrópicos

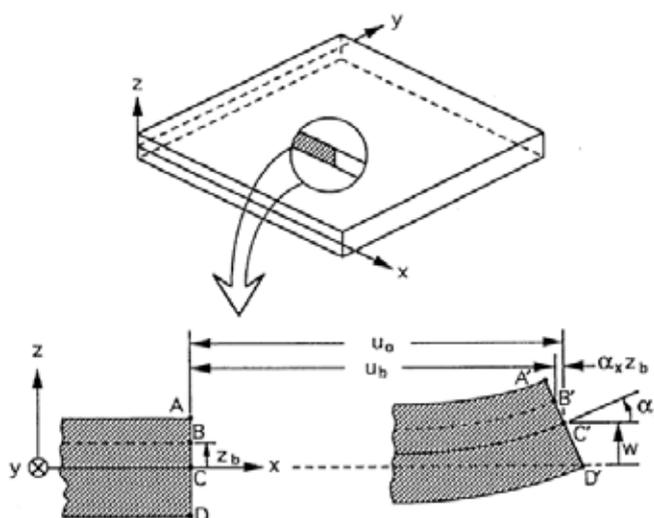
É aparente que todo o comportamento de laminados multi-direcionais é função das propriedades e sequência de empilhamento das camadas individuais, porém para que a teoria clássica dos laminados funcione são necessárias algumas premissas que são:

- Cada camada do laminado é quase-homogênea e ortotrópica;
- A espessura do laminado é muito menor que as outras dimensões;
- Todos os deslocamentos são pequenos comparados a espessura do laminado ($|u|, |v|, |w| \ll h$);
- Os deslocamentos são contínuos no laminado;

- Dentro do plano os deslocamentos decrescem linearmente através da espessura do laminado, ou seja, deslocamentos u e v na direção x e y são funções lineares de z ;
- Cisalhamentos transversais γ_{xz} e γ_{yz} são negligenciados;
- As relações deformação-deslocamento e tensão-deformação são lineares;
- Distâncias normais em relação à superfície central permanecem constantes, ou seja, ε_z é negligenciável (comparado com as deformações dentro do plano ε_x e ε_y).

A Figura 3 ilustra a seção de um laminado normal ao eixo y antes e depois da deformação. O plano xy é equidistante entre a superfície do topo e da base, sendo conhecido com plano de referência.

Figura 3 – Seção de deformação de um laminado



Fonte: Daniel e Ishaia (1994)

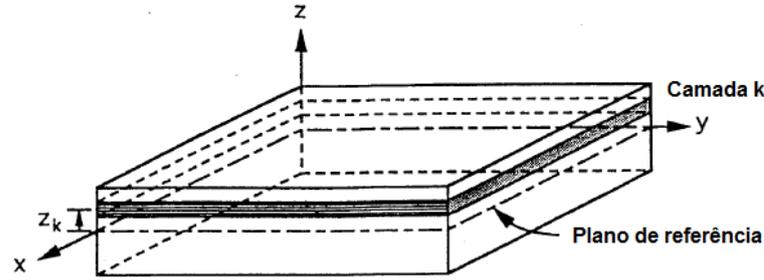
Os deslocamentos do plano de referência u_0 e v_0 na direção x e y e fora do plano o deslocamento w na direção z são funções de x e y somente.

Relacionando a deformação de um ponto dentro do laminado com relação ao plano de referência de deformações e a curvatura do laminado como:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{bmatrix} \quad (1)$$

Considerando uma camada individual k dentro de um multidirecional laminado, cujo plano médio é distante z_k a partir do plano de referência, Figura 4. A relação tensão-deformação para esta camada com referência a orientação do material é apresentado na equação (2).

Figura 4 – Plano de referência



Fonte: Traduzido de Daniel e Ishaia (1994)

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{66} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}_k \quad (2)$$

Considerando $m=\cos(\theta)$ e $n=\sin(\theta)$ é realizada a mudança de coordenadas locais da lâmina para o sistema global do laminado. Os coeficientes da nova matriz de rigidez, equação (9) são expressos a partir das equações (3) à (8)

$$Q_{xx} = m^4 Q_{11} + n^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66} \quad (3)$$

$$Q_{yy} = n^4 Q_{11} + m^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66} \quad (4)$$

$$Q_{xy} = m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} + (m^4 + n^4) Q_{12} - 4m^2 n^2 Q_{66} \quad (5)$$

$$Q_{xs} = m^3 n Q_{11} - m n^3 Q_{22} + (m n^3 - m^3 n) Q_{12} + 2(m n^3 - m^3 n) Q_{66} \quad (6)$$

$$Q_{ys} = m n^3 Q_{11} - m^3 n Q_{22} + (m^3 n - m n^3) Q_{12} + 2(m^3 n - m n^3) Q_{66} \quad (7)$$

$$Q_{ss} = m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} - 2m^2 n^2 Q_{12} + (m^2 - n^2)^2 Q_{66} \quad (8)$$

E após transformar para as coordenadas globais:

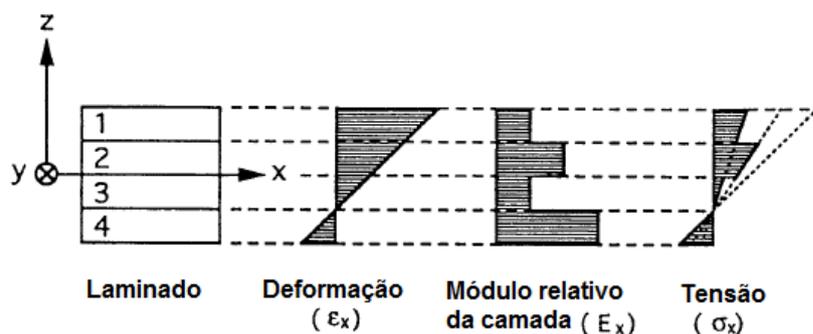
$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{bmatrix}_k \quad (9)$$

Com as deformações da equação (1) em (9) temos:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{bmatrix} \quad (10)$$

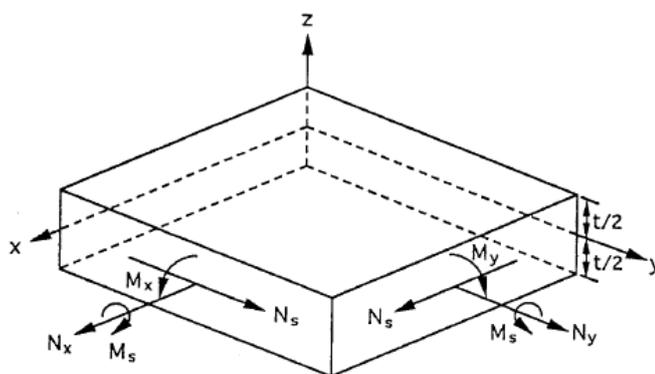
Devido a descontínua variação de tensão de uma camada para outra é conveniente trabalhar com o efeito integrado destas tensões no laminado. Assim serão apresentadas expressões para força e momentos para a deformação do laminado. A tensão atuando na camada k do laminado, ilustrado na Figura 5 e apresentado na equação (10). Os esforços atuantes no laminado pode ser representado por forças e momentos resultantes como ilustrado na Figura 6.

Figura 5 – Tensão atuante no laminado



Fonte: Traduzido de Daniel e Ishaia (1994)

Figura 6 – Esforços atuantes no laminado



Fonte: Daniel e Ishaia (1994)

Onde:

z = coordenada variável do ponto dentro da seção

t = espessura da camada

N_x^k, N_y^k = forças normais por unidade de comprimento

N_s^k = força de cisalhamento por unidade de comprimento

M_x^k, M_y^k = momento fletor por unidade de comprimento

M_s^k = momento torçor por unidade de comprimento

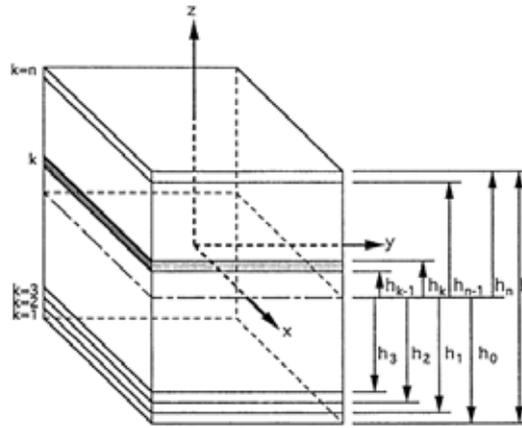
No caso de um laminado multi-direcional as forças e momentos resultantes são obtidos pelo somatório de efeitos de todas as camadas. Assim para n -camadas do laminado ilustrado na Figura 7, as forças e momentos resultantes são obtidos por:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{bmatrix} k \, dz \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{bmatrix} k \, z \, dz \quad (12)$$

Onde h_k e h_{k-1} são as coordenadas z da superfície superior e inferior da camada k .

Figura 7 – Cálculo por camada



Fonte: Daniel e Ishaia (1994)

Substituindo a equação (10) para tensão na camada, na equação (11) e (12) obtemos:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix} k \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz + \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix} k \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_s^0 \end{bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \, dz \right\} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix} k \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \, dz + \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix} k \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_s^0 \end{bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 \, dz \right\} \quad (14)$$

Na expressão anterior as rigidezes $[Q]_{x,y}^k$ e as deformações do plano de referência $[\varepsilon^0]_{x,y}$ e as curvaturas $[\kappa]_{x,y}$ foram retirados da integração pois não são função da coordenada z . As rigidezes são únicas para cada camada k , já as deformações e curvaturas se referem ao laminado todo e desta forma são as mesmas para todas as camadas, assim as quantidades $[\varepsilon^0]_{x,y}$ e $[\kappa]_{x,y}$ podem ser retiradas do somatório, assim pode-se rerepresentar as equações (13) e (14) da seguinte forma:

$$[N]_{x,y} = \left[\sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] [\varepsilon^0]_{x,y} + \left[\sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \, dz \right] [\kappa]_{x,y} \quad (15)$$

$$[N]_{x,y} = \left[\sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (h_k - h_{k-1}) \right] [\varepsilon^0]_{x,y} + \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \right] [\kappa]_{x,y} \quad (16)$$

$$[N]_{x,y} = [A]_{x,y} [\varepsilon^0]_{x,y} + [B]_{x,y} [\kappa]_{x,y} \quad (17)$$

e

$$[M]_{x,y} = \left[\sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] [\varepsilon^0]_{x,y} + \left[\sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right] [\kappa]_{x,y} \quad (18)$$

$$[M]_{x,y} = \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \right] [\varepsilon^0]_{x,y} + \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \right] [\kappa]_{x,y} \quad (19)$$

$$[M]_{x,y} = [B]_{x,y} [\varepsilon^0]_{x,y} + [D]_{x,y} [\kappa]_{x,y} \quad (20)$$

Assim podemos calcular cada componente como:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k (h_k - h_{k-1}) \quad (21)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (22)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (23)$$

Com i,j = x,y,s

Podemos reescrever as relações força-deformação na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{ys} \\ A_{sx} & A_{sy} & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} \\ B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{bmatrix} \quad (24)$$

E para relação momento deformação:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} \\ B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{ys} \\ D_{sx} & D_{sy} & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{bmatrix} \quad (25)$$

As expressões (24) e (25) podem ser combinadas numa expressão geral relacionando forças e momentos com as deformações do plano de referência:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \\ M_x \\ M_y \\ M_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} & B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{ys} & B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} \\ A_{sx} & A_{sy} & A_{ss} & B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} \\ B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} & D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} & D_{yx} & D_{yy} & D_{ys} \\ B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} & D_{sx} & D_{sy} & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_s^0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Ou na forma reduzida

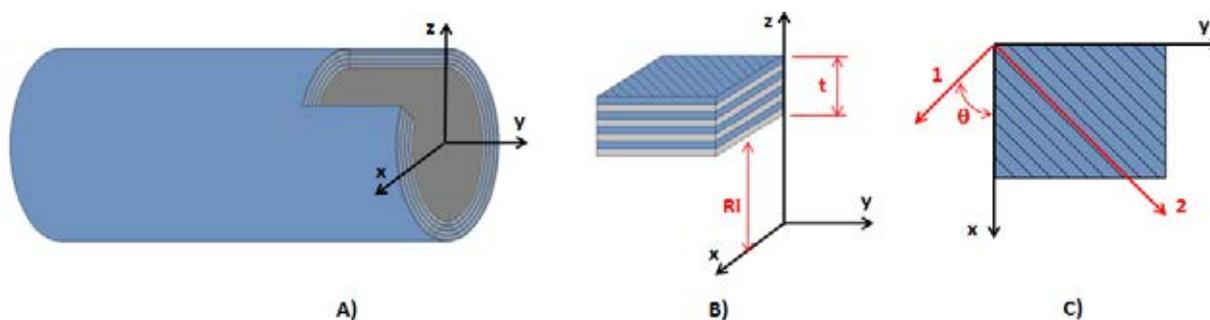
$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (27)$$

2.2.2 Módulos de elasticidade equivalente para eixos laminados

Eixos compósitos podem ser produzidos de muitas maneiras, através do empilhamento de camadas formadas por fibras de carbono embebidas em resina. Normalmente, estas camadas são enroladas em um mandril que as impõe a geometria cilíndrica. Através dos módulos de elasticidade direcional de cada camada associada a sua direção e posição na sequência de laminação, é possível estimar analiticamente os módulos de elasticidade como também o amortecimento global do eixo.

Da teoria clássica da laminação são conhecidas as relações para obter os módulos equivalentes para laminados de parede finas como demonstrado por Daniel e Ishai (1994). A Figura 8(a) ilustra um tubo laminado e o sistema de coordenadas globais adotado, a Figura 8(b) detalha o laminado para o qual as propriedades serão estimadas. A espessura total do laminado (t) é obtida pela diferença entre o raio externo (R_e) e interno (R_i) do tubo. A Figura 8(c) ilustra o sistema de coordenada local da fibra e global, a mudança de coordenadas é efetuada em função do ângulo (θ) existente entre eles.

Figura 8 – Sistema de coordenadas para eixos



Fonte: Autor

A inversão da relação força-deformação equação (26) fornece a matriz de flexibilidade $[abd]$ contida na equação (28). Através dos coeficientes da matriz de flexibilidade são obtidos os módulos de elasticidade e Poisson do laminado equivalente. Ao se trabalhar com o sistema da equação (28) é garantido que todos os efeitos de acoplamento entre esforços flexores e normais atuantes no laminado estejam contemplados.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_s^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xs} & b_{xx} & b_{xy} & b_{xs} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{ys} & b_{yx} & b_{yy} & b_{ys} \\ a_{sx} & a_{sy} & a_{ss} & b_{sx} & b_{sy} & b_{ss} \\ b_{xx} & b_{xy} & b_{xs} & d_{xx} & d_{xy} & d_{xs} \\ b_{yx} & b_{yy} & b_{ys} & d_{yx} & d_{yy} & d_{ys} \\ b_{sx} & b_{sy} & b_{ss} & d_{sx} & d_{sy} & d_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \\ M_x \\ M_y \\ M_s \end{bmatrix} \quad (28)$$

Para a inversão da matriz [ABD] é aplicado as seguintes relações:

$$[a] = [A^{-1}] - \{[B^*][D^{*-1}]\}[C^*] \quad (29)$$

$$[b] = [B^*][D^{*-1}] \quad (30)$$

$$[c] = [D^{*-1}][C^*] \quad (31)$$

$$[d] = [D^{*-1}] \quad (32)$$

Onde

$$[A^{-1}] = \text{matriz inversa de } [A] \quad (33)$$

$$[B^*] = -[A^{-1}][B] \quad (34)$$

$$[C^*] = [B][A^{-1}] \quad (35)$$

$$[D^*] = [D] - \{[B][A^{-1}]\}[B] \quad (36)$$

Na equação (37) estão as relações para a obtenção dos módulos de elasticidade equivalentes do laminado ou neste estudo do eixo.

$$E_x = \frac{1}{ta_{xx}}, \quad E_y = \frac{1}{ta_{yy}}, \quad G_{xy} = \frac{1}{ta_{ss}}, \quad \nu_{xy} = -\frac{a_{yx}}{a_{xx}}, \quad \nu_{yx} = -\frac{a_{xy}}{a_{yy}} \quad (37)$$

2.3 AMORTECIMENTOS

Amortecimentos estão presentes em diferentes sistemas, assim existem diversos mecanismos de amortecimento e muitas teorias e modelos matemáticos para interpretá-los. Os três principais modelos usados para descrever o amortecimento na mecânica da vibração são: Coulomb, viscoso e histerético. Cada um deles descreve um fenômeno que produz a dissipação de energia na vibração. O amortecimento de Coulomb é causado pelo atrito entre duas superfícies secas. Amortecimento viscoso é um tipo de amortecimento de fluido no qual a força de amortecimento é proporcional a velocidade. Amortecimento histerético é causado pela fricção interna ou histerese quando o sólido é deformado.

O amortecimento viscoso é o mais comum dos três mecanismos, ele de fato descreve o amortecimento produzido por um escoamento laminar, mas é frequentemente usado para

descrever outros tipos de dissipação de energia sem incorrer em grandes erros, quando as forças de dissipação são pequenas.

Para o caso específico de atrito interno, a teoria de histerese elástica é o mais aceito. Este modelo é baseado no fato que a relação entre tensão e deformação é não linear e diferente para carregamento e descarregamento. Além disso, poucas teorias têm sido desenvolvidas para sustentar outras explicações para estes fenômenos de vibração amortecida. Destes poucos modelos o mais relevante é o da viscoelasticidade, baseado na relação tensão e deformação.

No Apêndice C são apresentados os modelos matemáticos de amortecimento viscoelástico e histerético.

2.3.1 Amortecimento nos materiais compósitos

Convencionalmente materiais metálicos exibem valores de amortecimento muito baixos. É corriqueiro assumir que a maior parte de energia dissipada em estruturas metálicas ocorre em juntas ou devido à adição de algum outro componente amortecedor. Compósitos por outro lado exibem altos valores de amortecimento. Na maioria dos casos o amortecimento pode ser considerado benéfico, pois grandes oscilações em determinadas estruturas podem ser prejudiciais. No entanto, existem aplicações onde um valor alto de amortecimento pode causar sérios problemas e assim uma correta caracterização do comportamento dinâmico do sistema se faz necessária na otimização de projetos. O amortecimento nos materiais compósitos é atribuído a uma serie de fatores (LEPOITTEVIN, 2012), tais como:

- O efeito viscoelástico natural da matriz que compõe o compósito;
- Amortecimento termoplástico devido ao fluxo de calor. É considerado que o calor flui entre áreas com diferentes estados de tensão e conseqüentemente a diferentes temperaturas;
- Atrito de Coulomb gerado pelo deslizamento entre as interfaces de matriz e fibras nas regiões descoladas;
- Energia de dissipação nas trincas e delaminações, também relacionadas ao amortecimento de Coulomb produzido nas regiões danificadas;
- Amortecimento viscoplástico, amortecimento não linear em grandes amplitudes de vibração, devido ao elevado nível de tensão e deformação. Adams e Maheri

(1994) determinaram que a não linearidade no amortecimento pode ser atribuído às deformações plásticas em certos níveis críticos de tensão.

- Hwang concluiu que o efeito do cisalhamento transversal sobre o amortecimento de vigas de laminados em vibrações flexionais e das tensões interlaminares no amortecimento das laminas em vibrações longitudinais são mais importantes em laminados espessos.

Os dados disponíveis para amortecimento em materiais compósitos são muito conflitantes. Os tipos de material da matriz e das fibras, os comprimentos das fibras, a temperatura de cura e as configurações, são alguns dos fatores que podem afetar fortemente a energia dissipada do material. Valores de amortecimento são frequentemente achados na literatura com poucas referências sobre o método usado para medir as condições ambientais e as características dos materiais utilizados. Estes fatores complicam a tarefa de comparar e validar resultados experimentais (MOREIRA, 2007).

2.3.2 Fator de perda para eixos laminados

Para o cálculo do amortecimento interno específico aplica-se a formulação desenvolvida por Ni e Adams (1984), a qual faz uso da teoria clássica de laminação para obter o amortecimento equivalente do laminado, outras referências para este método são Adams e Maheri (1994) e Billups e Cavalli (2008). O amortecimento total equação (38) é a soma das componentes direcionais calculadas nas equações (39), (40) e (41).

$$\psi_{laminado} = \psi_x + \psi_y + \psi_{xy} \quad (38)$$

$$\psi_x = \frac{2\psi_1}{3d_{11}} \sum_{k=1}^p (Q_{xx}^k d_{xx} + Q_{xy}^k d_{xy} + Q_{ss}^k d_{ss}) (m_k^2 d_{xx} + m_k n_k d_{ss}) (h_k^3 - h_{k-1}^3) m_k^2 \quad (39)$$

$$\psi_y = \frac{2\psi_2}{3d_{11}} \sum_{k=1}^p (Q_{xx}^k d_{xx} + Q_{xy}^k d_{xy} + Q_{ss}^k d_{ss}) (n_k^2 d_{xx} - m_k n_k d_{ss}) (h_k^3 - h_{k-1}^3) n_k^2 \quad (40)$$

$$\psi_{xy} = \frac{2\psi_{12}}{3d_{11}} \sum_{k=1}^p (Q_{xx}^k d_{xx} + Q_{xy}^k d_{xy} + Q_{ss}^k d_{ss}) (2m_k n_k d_{xx} - m_k^2 n_k^2 d_{ss}) (h_k^3 - h_{k-1}^3) m_k n_k \quad (41)$$

A relação entre o amortecimento específico (ψ), fator de perda (η) e razão de amortecimento (ξ) é $\Psi = 4\pi\xi = 2\pi\eta$.

2.4 ANÁLISE DINÂMICA DE ROTORES

2.4.1 Equação do movimento para rotores com amortecimento interno

Os eixos em compósito dos rotores apresentam amortecimento interno devido ao material do qual são constituídos. O amortecimento deste tipo de eixo foi descrito no item 2.3.1. e advém principalmente dos constituintes: fibra de carbono e resina epóxi. Sendo o primeiro responsável pelo comportamento elástico e o segundo pelo viscoso. O amortecimento global do eixo é uma composição destes amortecimentos e de outros fenômenos.

O entendimento da influência do amortecimento interno dos eixos sobre o comportamento dinâmico dos rotores é a base para um correto dimensionamento e aplicação dos materiais compósitos em eixos, os quais podem trazer benefícios já enumerados.

Ao girar, um rotor efetua um movimento de giro chamado precessão, ocasionado por desbalanceamento ou por alguma outra força externa. Este movimento submete o eixo a um carregamento alternado de tensão-deformação. Como o eixo não é perfeitamente elástico, trabalho é gerado no sistema a cada giro, sendo esta energia gerada durante a precessão do rotor consequência do amortecimento interno do eixo. Com o aumento da velocidade este trabalho aumenta, assim como a amplitude da precessão.

Com baixas velocidades de giro, os mancais do sistema são capazes de dissipar esta energia transmitindo-a para as estruturas adjacentes. No entanto com o aumento da velocidade esse mecanismo perde a eficiência e o rotor torna-se instável.

Segundo Genta (2010) a equação do movimento apresentada na equação (42) é válida quando são assumidos desbalanceamento e deslocamentos pequenos, o que permite a linearização da equação do movimento, sendo assim consistente com o que é feito normalmente em dinâmica de estruturas. Para esta equação do movimento é considerado que o rotor é simétrico axialmente no seu eixo de giro e que gira em velocidade constante Ω_r .

$$[M]\ddot{x}(t) + [C_n + \eta C_r - iG(\Omega_r)]\dot{x}(t) + [K + i\eta H(\Omega_e)]x(t) = f(t) \quad (42)$$

A equação (42) é aplicada em rotores cujo eixo apresenta amortecimento interno, onde $\{x(t)\}$ é um vetor de coordenadas generalizadas, $[M]$ é a matriz de massa simétrica, $[C_n]$ é a matriz de amortecimento simétrica associado às estruturas não girantes como os mancais, $[C_r]$ é a matriz de dissipação associado aos elementos girantes como o eixo, $[G(\Omega_r)]$ é a matriz giroscópica, antisimétrica, dependente da velocidade de rotação do rotor, $[K]$ é a matriz de

rigidez simétrica, $[H(\Omega_e)]$ é a matriz circulatoria, anti-simétrica, dependente da frequência de excitação, $\{f(t)\}$ é um vetor no qual todas as forças atuantes no sistema são listadas, este vetor é dependente do tempo e η é o fator de perda associado ao amortecimento interno do eixo. As matrizes ilustradas são amplamente listadas nas referencias indicadas, com exceção da matriz $[C_r]$ e $[H(\Omega_e)]$, as quais guardam relação com a matriz $[K]$, sendo a primeira idêntica e a segunda é uma versão antissimétrica. A equação (42) também pode ser expressa na forma real como formulado na equação (43).

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \cdot \ddot{x}(t) + \left(\begin{bmatrix} \eta C_r + C_n & 0 \\ 0 & \eta C_r + C_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & G(\Omega_r) \\ -G(\Omega_r) & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \dot{x}(t) + \\ & \left(\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \eta H(\Omega_e) \\ -\eta H(\Omega_e) & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot x(t) = f(t) \end{aligned} \quad (43)$$

2.4.2 Análise de vibração livre

2.4.2.1 Problema de autovalores

Diferente de um sistema estacionário no qual as matrizes de massa e rigidez são simétricas e são fixas no tempo. De forma geral nos modelos matemáticos de máquinas rotativas algumas matrizes são função da rotação, apresentando configurações antisimétricas, devido aos efeitos giroscópios e dos mancais quando os mesmos possuem em sua constituição materiais viscoelásticos. No desenvolvimento deste trabalho as matrizes representativas dos mancais são simétricas, não sendo dependes da velocidade de rotação.

A equação (43) pode ser representada na forma de espaço de estado, como ilustrado na equação (44), para isso é necessário adotar um novo vetor de coordenadas ilustrado na equação (46):

$$[A]\{\dot{q}(t)\} + [B]\{q(t)\} = \{f(t)\} \quad (44)$$

onde:

$$[A] = \begin{bmatrix} [C] + [G(\Omega_r)] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} [K] + [H(\Omega_e)] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\{F(t)\} = \begin{Bmatrix} \{f(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad \{q(t)\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{x}(t)\} \\ \{x(t)\} \end{Bmatrix} \quad (46)$$

Assumindo uma solução do tipo ilustrada na equação (47):

$$q(t) = \Phi \cdot e^{st} \quad (47)$$

Para a vibração livre temos $\{F(t)\} = 0$ e observando que:

$$q(t) = \begin{Bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{Bmatrix} \Rightarrow \Phi = \begin{Bmatrix} s\phi \\ \phi \end{Bmatrix} \quad (48)$$

A equação (44) pode ser reescrita na forma:

$$[sA + B]\Phi = \{0\} \quad (49)$$

As seguintes relações podem ser expressas:

$$\lambda = -s = -j\Omega \quad (50)$$

λ é o autovalor

s é o coeficiente de Laplace

$j\Omega$ é a Transformada de Fourier

A existência das matrizes antisimétricas $[G(\Omega_r)]$ e $[H(\Omega_e)]$ resultam em autovetores diferentes para o autoproblema adjunto à esquerda se comparado ao auto-problema adjunto à direita. Resultando assim em dois autoproblemas representados nas equações (51) e (52):

$$[B] \cdot \Phi_i = \lambda_i \cdot [A] \cdot \Phi_i \quad (51)$$

$$[B]^T \cdot \Psi_i = \lambda_i [A]^T \cdot \Psi_i \quad (52)$$

onde λ_i é um autovalor

$$\Phi_i = \begin{Bmatrix} \lambda_i \{\phi\}_i \\ \{\phi\}_i \end{Bmatrix}, \text{ é o autovetor à direita} \quad (53)$$

$$\Psi_i = \begin{Bmatrix} \lambda_i \{\psi\}_i \\ \{\psi\}_i \end{Bmatrix}, \text{ é o autovetor à esquerda} \quad (54)$$

Análogo aos sistemas estacionários, os autovetores e autovalores são complexos e surgiram em pares de complexos conjugados.

Organizando os autovetores em colunas de uma matriz é construída a matriz modal. Ressaltando que para sistemas girantes existiram duas matrizes modais, uma à direita $[\Phi]$ e outra à esquerda $[\Psi]$.

$$[\Phi] = [\Phi_1; \Phi_2; \dots; \Phi_N] \quad (55)$$

$$[\Psi] = [\Psi_1; \Psi_2; \dots; \Psi_N] \quad (56)$$

2.4.2.2 Ortogonalidade

Os autovetores podem ser ortonormalizados através das relações expressas na equação (120) (ESPÍNDOLA, 1990). Para a ortonormalização é utilizada a matriz diagonal $[a] = [\Psi]^T [A] [\Phi]$.

$$\frac{\Phi_i}{\sqrt{a_i}} \text{ e } \frac{\Psi_i}{\sqrt{a_i}} \quad (57)$$

Com esta transformação é possível verificar as propriedades expressas nas equações (58) e (59).

$$[\Psi]^T[A][\Phi] = [I] \quad (58)$$

$$[\Psi]^T[B][\Phi] = [\Lambda] \quad (59)$$

Onde $[I]$ é uma matriz identidade e $[\Lambda]$ é uma matriz diagonal formada pelos autovalores, os quais se localizam na diagonal principal.

2.4.2.3 Frequências naturais, velocidades críticas e modos de vibrar

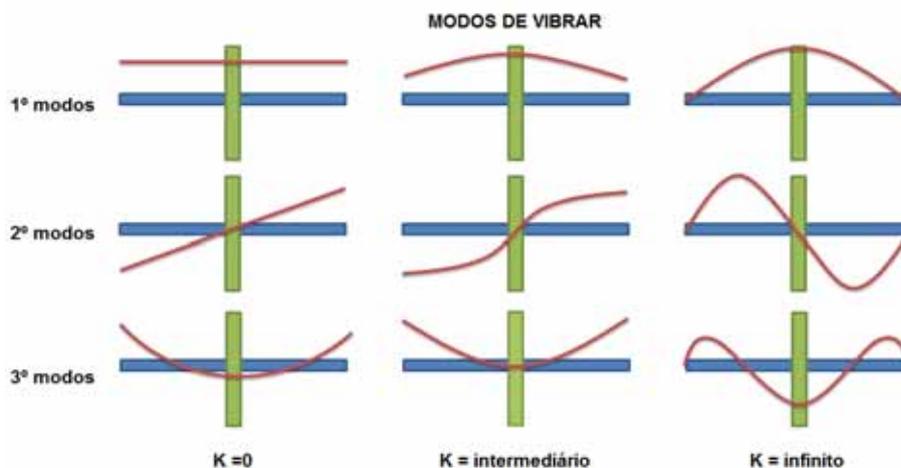
Segundo Vance (1988), todo sistema rotor-mancal tem um número discreto de frequências naturais de vibração transversal. Associado a cada frequência natural existe um modo de vibrar o qual pode ser verificado pela deformação do sistema ao alcançar a frequência natural.

Quando a frequência de excitação de uma força coincide com uma frequência natural do rotor a velocidade em que o rotor está girando neste instante é chamada de velocidade crítica. Neste instante o rotor se deforma no modo de vibrar associado a esta frequência natural e orbita com relação à linha central estabelecida entre os mancais. Um exemplo desta ocorrência pode ser observada quando um rotor é excitado por um desbalanceamento, neste caso específico a força de excitação tem a mesma frequência de giro do rotor.

Em termos matemáticos, as frequências naturais estão associadas aos autovalores e os modos de vibrar aos autovetores. Teoricamente a distribuição de massa e elasticidade do sistema permite infinitos números de autovalores e autovetores associados, porém na prática apenas os primeiros modos, três a quatro frequências críticas e seus modos associados são excitados na operação de máquinas rotativas, dentro do campo de operação típico.

Os modos de vibrar são determinados pela distribuição de massa e rigidez ao longo do rotor e também pela rigidez dos mancais. Os três primeiros modos de vibrar associados as três primeiras velocidades críticas de um rotor com eixo uniforme mudam com o aumento da rigidez dos mancais, a Figura 9 ilustra este comportamento.

Figura 9 – Relação entre modos de vibrar e rigidez dos mancais



Fonte: Autor

Para identificar as frequências naturais e os modos de vibrar são necessários o cálculo dos autovalores e autovetores associados.

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_N \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$[\Phi] = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \dots \quad \Phi_N] \quad [\Psi] = [\Psi_1 \quad \Psi_2 \quad \dots \quad \Psi_N] \quad (61)$$

Onde N é a ordem das matrizes. Como mencionado anteriormente os autovetores e autovalores são números complexos e serão encontrados aos pares. Considerando o i-ésimo autovalor em conjunto com seu conjugado:

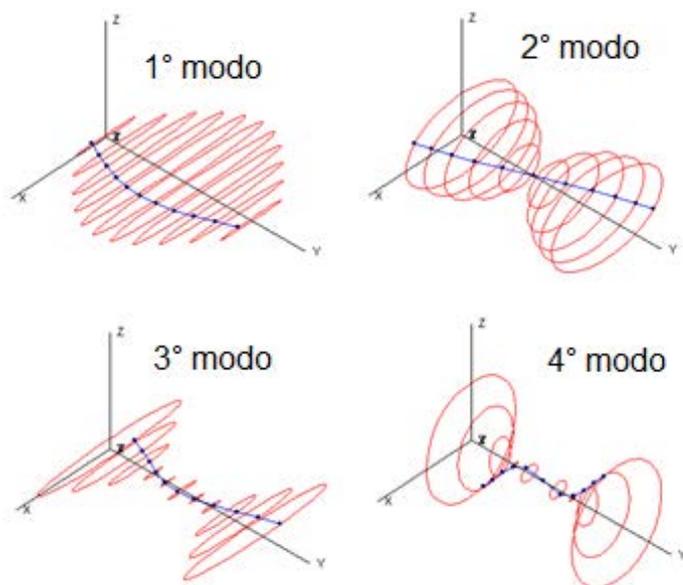
$$\lambda_i = \alpha_i \pm j\omega_i \quad (62)$$

$$\varphi_i = R_i \pm jI_i \quad (63)$$

Na equação (62) a frequência natural do i-ésimo autovalor é ω_i , que corresponde a parte imaginária de λ_i . Assim para cada velocidade de giro do rotor é possível determinar as frequências naturais.

O modo de vibrar é obtido através dos autovetores. No autovetor está a proporção de deslocamento de cada grau de liberdade considerado. Assim através destas proporções o deslocamento de grau de liberdade pode ser efetuado. Um exemplo da aplicação deste procedimento é representado pelos quatro primeiros modos simulados de vibrar de um rotor na Figura 10.

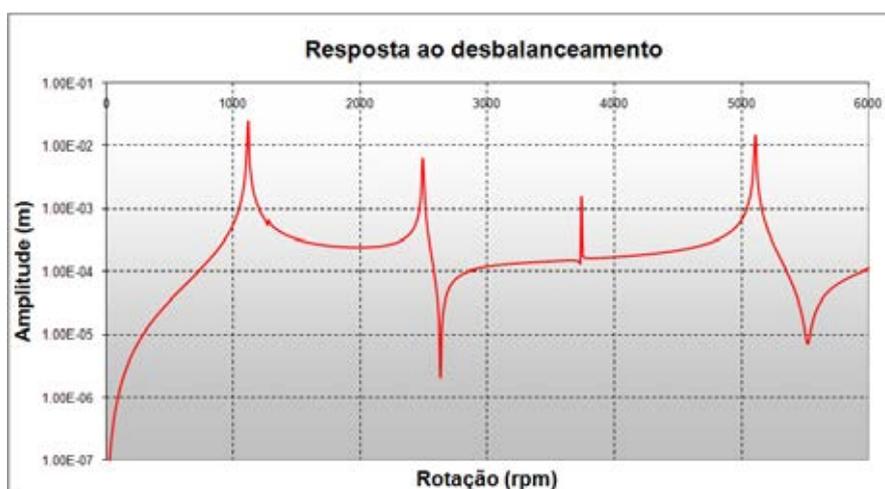
Figura 10 – Primeiros modos de vibrar



Fonte: Autor

Uma forma de identificar as velocidades críticas de um rotor com massa desbalanceada graficamente é obter a FRF entre dois pontos obtendo um gráfico das amplitudes de deslocamento em função da velocidade de giro do rotor para a estação escolhida. As velocidades críticas serão identificadas pelos picos observados no gráfico, a Figura 11 ilustra um gráfico simulado com essas características.

Figura 11 – Resposta ao desbalanceamento

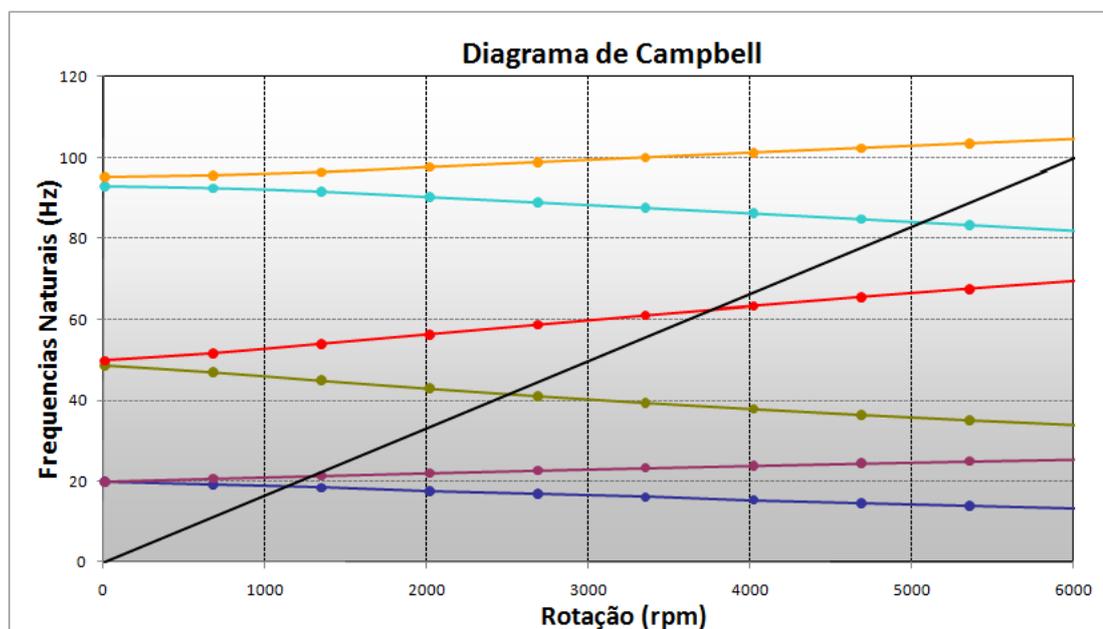


Fonte: Autor

Outra forma é através do diagrama de Campbell como o ilustrado na Figura 12, gerado a partir de uma simulação. Este gráfico é gerado ao traçar as frequências naturais do rotor em função da velocidade de giro do rotor e gerar uma linha que corresponde a frequência igual a

(RPM/60), o encontro desta linha com as linhas de frequências naturais identificam as velocidades críticas, esta linha representa a excitação gerada por uma massa desbalanceada, pois a mesma gira na mesma velocidade do rotor.

Figura 12 – Diagrama de Campbell



Fonte: Autor

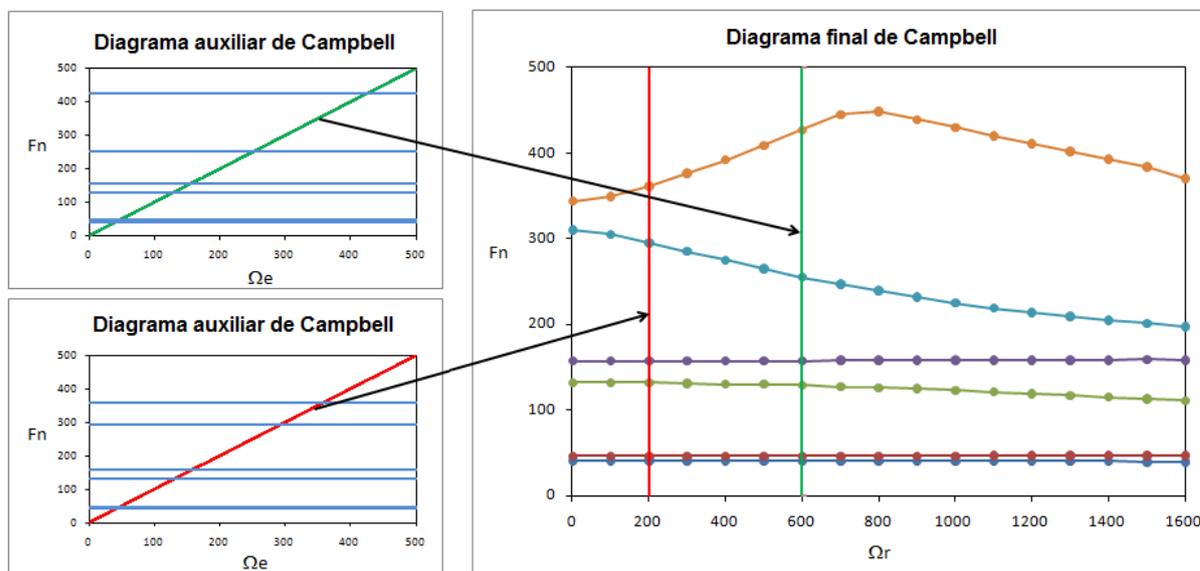
A elaboração do diagrama de Campbell pode ser efetuada de duas formas, as quais diferem em função do tipo de excitação aplicado ao rotor, estas metodologias foram exploradas no estudo de Espíndola e Floody (1999). A equação (42) mostra que a equação do movimento do rotor é dependente de sua frequência de giro (Ω_r) e da frequência de excitação (Ω_e).

Na primeira situação $\Omega_r \neq \Omega_e$, um diagrama de Campbell Auxiliar ($F_n \times \Omega_e$) é criado para cada frequência de rotação do rotor. Através de uma reta obtida por $F_n = \Omega_e$ são obtidas as frequências naturais que serão utilizadas para gerar o diagrama de Campbell final ($F_n \times \Omega_r$). Na Figura 13 é ilustrada a construção do diagrama de Campbell final, onde dois gráficos auxiliares são também apresentados, um calculado para a rotação de 200 [rev/min] e o outro a 600 [rev/min], o gráfico apresentado foi obtido por simulações.

Na segunda situação $\Omega_r = \Omega_e$, para este caso o diagrama de Campbell Simplificado é desenvolvido, como demonstrado por Espíndola e Bavastri, (1997). Neste sistema a excitação é devido ao um desbalanceamento, sendo assim a frequência de excitação é igual á de rotação. Neste caso especial a equação (42) se torna dependente de uma única frequência, assim o

diagrama de Campbell é obtido em um único passo, semelhante ao executado para se obter o diagrama de Campbell Auxiliar.

Figura 13 – Diagrama de Campbell final



Fonte: Autor

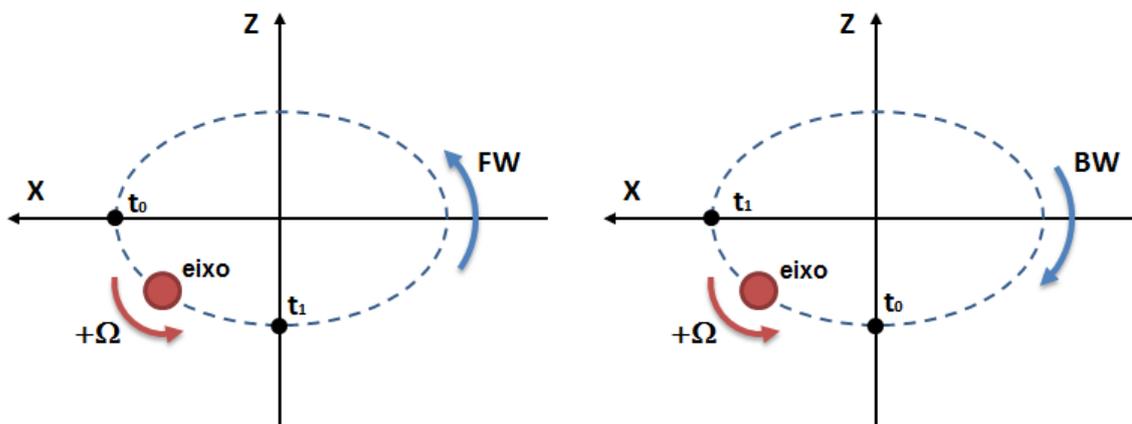
2.4.2.4 Órbitas

Sobre o comportamento dinâmico dos rotores outro importante tópico diz respeito à órbita descrita por uma estação do rotor. As órbitas podem ser circulares quando as rigidezes dos mancais forem simétricas ou elípticas, situação mais comum quando as rigidezes são assimétricas. Além da geometria da órbita podemos ainda avaliá-la quanto ao sentido, podendo ser horária (*Forward-Whirl-FW*) ou anti-horária (*Backward-Whirl-BW*).

Para melhor entender o sentido de giro das órbitas, observar a ilustração da Figura 14. No sentido horário a órbita gira no mesmo sentido do giro do rotor, no outro caso ocorre o oposto, a órbita é contrária ao giro do rotor.

A determinação do tipo de giro de cada nó do rotor é obtida através do produto vetorial entre os vetores de posição “u” e “w” para os tempos t e $t+\Delta t$, onde o sinal do produto indica se o movimento do rotor é FW ou BW.

Figura 14 – Órbitas



Fonte: Autor

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_i(t) & 0 & w_i(t) \\ u_i(t + \Delta t) & 0 & w_i(t + \Delta t) \end{pmatrix} = (u_i(t + \Delta t)w_i(t) - u_i(t)w_i(t + \Delta t))\hat{j} \quad (64)$$

Se o produto $> 0 \rightarrow$ FW

Se o produto $< 0 \rightarrow$ BW

2.4.2.5 Instabilidade

Segundo Lalane e Ferraris (1997) o movimento de vibração de vibração livre pode crescer indefinidamente sob certas condições iniciais. O sistema neste caso é dito ser instável. A Figura 15 ilustra a simulação da amplitude de movimento nesta condição.

Para se determinar a instabilidade é necessário estudar o sistema em movimento livre. Quando as frequências naturais são solicitadas, uma série de frequências e modos são obtidos como apresentado anteriormente. Os autovalores resultantes possuem a seguinte forma:

$$r_i = -a_i \pm j b_i \quad (65)$$

Onde,

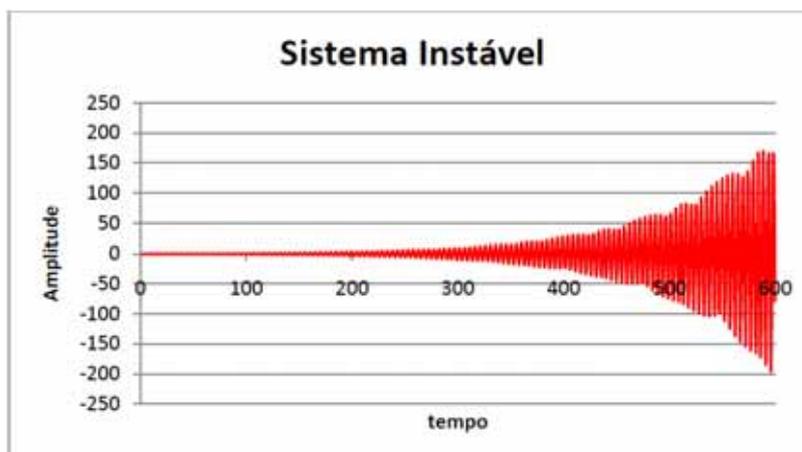
$$r_i = -\frac{\alpha_i \omega_i}{\sqrt{1-\alpha_i^2}} \pm j \omega_i \quad (66)$$

Assim

$$\omega_i = b_i \quad (67)$$

$$\alpha_i = \frac{a_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} \quad (68)$$

Figura 15 – Sistema Instável



Fonte: Autor

Se ω_i é a i -ésima frequência e α_i corresponde ao fator de amortecimento. Se o primeiro termo do lado direito “- a_i ” da equação (66) é positivo, a solução obtida no movimento livre cresce indefinidamente com o tempo e o sistema é instável.

A estabilidade também pode ser determinada a partir dos critérios de Routh-Hurwitz, na qual é muito útil para sistemas modelados com um reduzido número de graus de liberdade, porém não indica qual frequência do sistema é instável. As frequências do sistema são as raízes da equação característica, que pode ser escrita como:

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0 \quad (69)$$

A matriz H é montada para solucionar a equação:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots \\ \vdots & \dots \\ \vdots & \dots \\ \vdots & \dots \end{bmatrix} \quad (70)$$

onde “ n ” coeficientes H_1, \dots, H_n podem ser obtidos. As expressões para o cálculo são:

$$H_1 = \det[H_1] = a_1 \quad (71)$$

$$H_2 = \det[H_2] = \det \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} \quad (72)$$

$$H_n = \det[H_n] \quad (73)$$

O critério de Routh-Hurwitz demonstra que se todas as quantidades H_i forem positivas o sistema é estável.

2.4.3 Resposta forçada no domínio da frequência devido ao desbalanceamento

Dentre as possíveis formas de excitação existentes, o desbalanceamento foi o selecionado para demonstrar como obter a resposta do sistema. Pois este esforço existe em todos os rotores, sendo assim o tipo de excitação mais estudado em trabalhos teóricos e experimentais. Neste caso a frequência de excitação Ω_e é igual a de giro Ω_r . Assim temos $\Omega = \Omega_r = \Omega_e$.

Assumindo uma mudança de coordenadas de $q(t)$, o vetor de estado dentro da equação (44) é dado como uma combinação linear do autovetor à direita ϕ_i multiplicado pela coordenada modal $p_i(t)$, como apresentado na equação (74).

$$q(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i \cdot p_i(t) = [\Phi] \cdot p(t) \quad (74)$$

Substituindo essa relação na equação (44) e pré-multiplicando pelo transposto do autovetor à esquerda, obtém:

$$[\Psi]^T \cdot [A] \cdot [\Phi] \cdot \dot{p}(t) + [\Psi]^T \cdot [B] \cdot [\Phi] \cdot p(t) = [\Psi]^T \cdot f(t) \quad (75)$$

Utilizando as propriedades da ortonormalização deduzidas nas equações (58) e (59), resulta na equação (76).

$$[I] \cdot \dot{p}(t) + [\Lambda] \cdot p(t) = n(t) \quad (76)$$

Onde $n(t) = [\Psi]^T \cdot f(t)$, representa o vetor modal de excitação.

A equação (76) representa um grupo de equações modais independentes e pode ser representada como na equação (77), para um modo específico:

$$\dot{p}_i(t) + \lambda_i p_i(t) = n_i(t) \quad (77)$$

Através da Transformada de Fourier a equação (77) passa para o domínio da frequência, assumindo a forma apresentada na equação (78).

$$(j\Omega[I] + [\Lambda]) \cdot P(\Omega) = [\Psi]^T F(\Omega) \quad (78)$$

Rearranjando a expressão, resulta:

$$P(\Omega) = \frac{[\Psi]^T F(\Omega)}{j\Omega[I] + [\Lambda]} \quad (79)$$

Convertendo para o espaço de estado através da relação da equação (74), a expressão toma a forma:

$$Q(\Omega) = \frac{[\Phi][\Psi]^T \cdot F(\Omega)}{j\Omega[I] + [\Lambda]} \quad (80)$$

A qual pode ser representada na forma compacta:

$$Q(\Omega) = [\alpha(\Omega)] \cdot F(\Omega) \quad (81)$$

A matriz $[\alpha(\Omega)]$ é denominada matriz de receptância, também conhecida como matriz característica do sistema. Esta matriz possui os coeficientes complexos, sendo esta dependente da frequência. Esta forma pode ser aplicada a sistemas com excitação por massa desbalanceada.

Ao isolar um termo da matriz receptância é obtido uma relação entre o ponto de medição designado pela letra “s” e o ponto de excitação representado pela letra “k”.

$$\alpha_{kS}(\Omega) = \sum_{i=1}^{2N} \frac{\phi_{ki} \psi_{Si}^T}{j\Omega + \lambda_i} \quad (82)$$

2.5 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA ROTORES

O desenvolvimento do algoritmo foi focado na solução de problemas de engenharia, desta forma foi investigado o comportamento dinâmico de máquinas rotativas em aplicações industriais, observando os problemas relacionados na aplicação de rotores, o principal componente destas máquinas. Para obter resultados satisfatórios nas simulações e análises, são necessários modelos com muitos graus de liberdade, isso justifica a escolha do MEF, o qual é amplamente utilizado nas diversas áreas da engenharia. Dentre os métodos utilizados constam: o método QZ o qual é destinado a encontrar soluções não triviais para sistemas, o método LU que executa a fatoração de uma matriz não singular como o produto de uma matriz triangular inferior e uma matriz triangular superior e o Método CR que transforma os sistemas lineares complexos originados nos cálculos de resposta forçada de uma simulação em um sistema linear real.

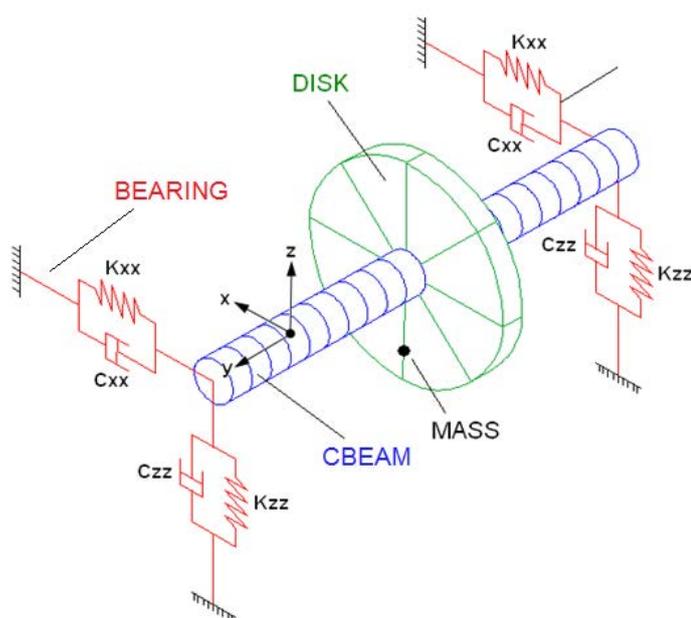
Este método numérico consiste em criar um modelo matemático, através da discretização em elementos finitos dos componentes do objeto a ser analisado. Diversos elementos foram desenvolvidos desde o surgimento deste método, para representar diferentes comportamentos físicos dos objetos.

Para as análises da dinâmica de rotores laminados, serão utilizados quatro tipos de elementos finitos, um elemento definido como elemento DISK será utilizado para representar

um disco do rotor, o segundo chamado elemento CBEAM será utilizado no modelo para representar uma parte do eixo, este elemento pertence à mesma classe dos elementos BEAM. A diferença entre eles consiste no fato que o mesmo é destinado a eixos laminados, ou seja, utiliza matrizes que representem o módulo complexo do material já descritos, um terceiro elemento denominado BEARING será utilizado para representar mancais, o último elemento chamado *MASS* será aplicado para representar um desbalanceamento no rotor.

A Figura 16 ilustra um modelo de elementos finitos desenvolvido para representar o rotor. Nesta figura são ilustrados os quatro tipos de elementos finitos aplicados nas análises deste estudo.

Figura 16 – Modelo de elementos finitos de um rotor



Fonte: Autor

2.5.1 Elemento DISK

Este elemento tem a finalidade representar um disco do rotor o qual possui a energia cinética calculada pela expressão:

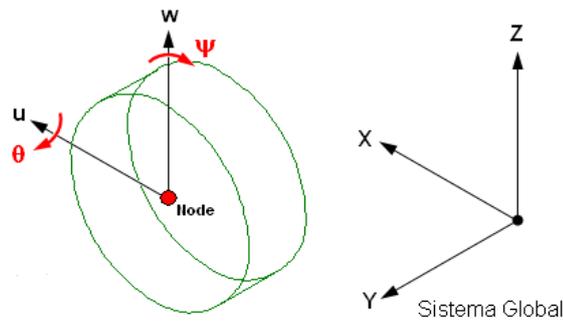
$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{Dx} \cdot \omega_x^2 + I_{Dy} \cdot \omega_y^2 + I_{Dz} \cdot \omega_z^2) \quad (83)$$

A qual podemos simplificar considerando o disco simétrico ($I_{Dx} = I_{Dz}$), os ângulos ψ e θ são pequenos e a velocidade angular é constante, assim $\dot{\phi} = \Omega$

$$T_D = \frac{1}{2}M_D(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2}I_{Dx}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2}I_{Dy}(\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \quad (84)$$

O último termo da equação representa o efeito giroscópico (Coriolis).

Figura 17 – Elemento DISK



Fonte: Autor

Para o nó deste elemento temos quatro graus de liberdade, sendo duas translações u e w , e duas rotações θ e Ψ ao redor dos eixos X e Z respectivamente, assim para o nó do elemento que representa o disco temos o vetor de deslocamentos $\delta = [u \ w \ \theta \ \Psi]$, através da aplicação das equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (85)$$

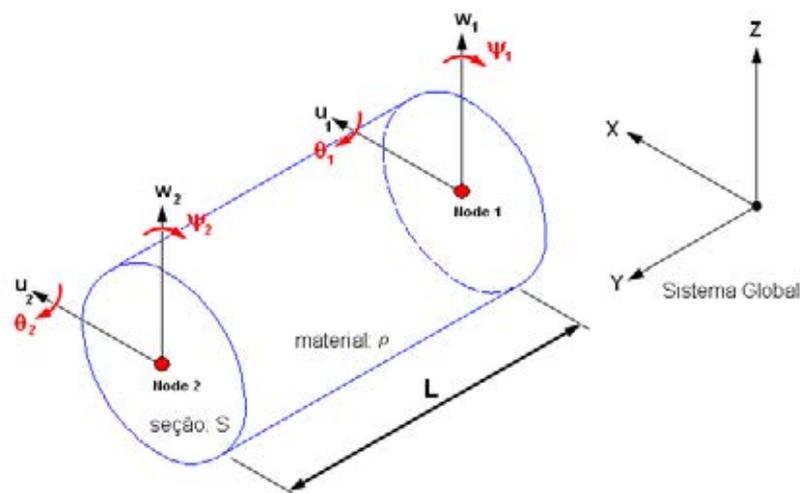
Onde a primeira matriz é uma matriz de massa clássica e a segunda é uma matriz giroscópica (Coriolis).

2.5.2 Elemento CBEAM

Os eixos são modelados como vigas com seção circular constantes. O elemento utilizado possui dois nós, assim as matrizes são de grau oito, incluindo quatro deslocamentos e quatro rotações. Assim temos para um elemento de viga o seguinte vetor para representar o seu deslocamento $\delta = [u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ \Psi_1, u_2 \ w_2 \ \theta_2 \ \Psi_2]$. Através de algumas operações algébricas temos a seguinte energia cinética para o elemento de viga.

$$T = \frac{1}{2} \delta \dot{u}^T M_1 \delta \dot{u} + \frac{1}{2} \delta \dot{w}^T M_2 \delta \dot{w} + \frac{1}{2} \delta \dot{u}^T M_3 \delta \dot{u} + \frac{1}{2} \delta \dot{w}^T M_4 \delta \dot{w} + \Omega \delta \dot{u}^T M_5 \delta \dot{w} + \rho I L \Omega^2 \quad (86)$$

Figura 18 – Elemento CBEAM



Fonte: Autor

Onde as matrizes M_1 e M_2 são matrizes de massa clássicas, M_3 e M_4 incluem a influência secundária do efeito da inércia de rotação e M_5 atribui o efeito giroscópico. Como mencionado anteriormente, o último termo é constante e não será considerado mais. Aplicando a equação de Lagrange, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = (M + M_s) \ddot{\delta} + C \dot{\delta}, \quad (87)$$

onde $M = M_1 + M_2$, $M_s = M_3 + M_4$ e $G = M_5$

$$M = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (88)$$

$$M_s = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & -4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (89)$$

$$G = \frac{\rho I \Omega_R}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (90)$$

$$C_r = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \quad (91)$$

Após algumas operações algébricas, a energia de deformação do eixo é obtida pela equação (92):

$$U = \frac{1}{2} \delta u^T K_1 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^T K_2 \delta w + \frac{1}{2} \delta u^T K_3 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^T K_4 \delta w \quad (92)$$

Onde K_1 e K_2 são as matrizes clássicas de rigidez e K_3 e K_4 são matrizes devido às forças axiais. Também se deve frequentemente levar em conta os efeitos devido ao cisalhamento, o qual é caracterizado pelo parâmetro “a”, cuja formulação é:

$$a = \frac{12EI}{GSL^2} \quad (93)$$

Os efeitos devido ao cisalhamento são atribuídos pela matriz K_s que não será demonstrada aqui, mas sua influência está incluída na formulação da matriz clássica de

rigidez. Assim temos a matriz clássica dada por K_c obtida de K_1 , K_2 e K_s , e a matriz K_f devido aos esforços axiais formulada a partir das matrizes K_3 e K_4 . Aplicando as equações de Lagrange temos:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = K\delta, \text{ com } K = K_c + K_f \quad (94)$$

As expressões das matrizes são dadas por:

$$K_c = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \quad (95)$$

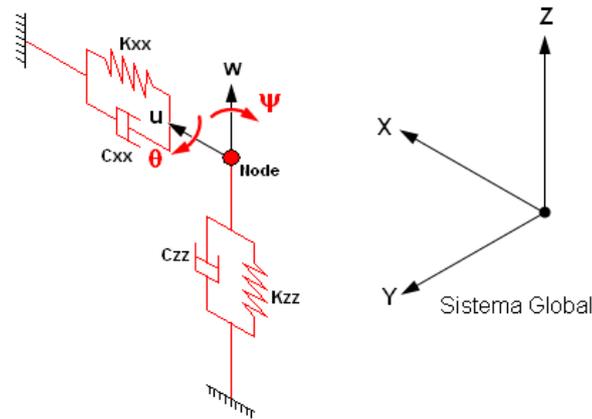
$$K_f = \frac{F}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & -4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (96)$$

$$H = \frac{\Omega_E EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 6L & 0 & 0 & -(4+a)L^2 & -6L & 0 & 0 & -(2-a)L^2 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 6L & 0 & 0 & -(2-a)L^2 & -6L & 0 & 0 & -(4+a)L^2 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (97)$$

2.5.3 Elemento BEARING

Para este elemento os coeficientes de rigidez e amortecimento são dados de entrada, neste modelo os efeitos oriundos de flexão são desprezados. O trabalho virtual das forças reativas que o mancal aplica no eixo poderá ser equacionado diretamente como:

Figura 19 – Elemento BEARING



Fonte: Autor

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta w \quad (98)$$

Considerando as reações devido às rotações como zero, temos:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_\theta \\ F_w \\ F_\psi \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zx} & 0 & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \theta \\ w \\ \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & c_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & 0 & c_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (99)$$

2.5.4 Elemento MASS

Este elemento tem a finalidade de representar uma massa desbalanceada no rotor. Através da caracterização do desbalanceamento mediante a indicação de sua massa, distância em relação ao centro do eixo e fase em relação ao sistema de coordenadas é possível calcular através do algoritmo as componentes da força resultante aplicada sobre a posição do elemento no modelo do rotor. As equações indicam a relação diretamente proporcional que a intensidade da força tem com a velocidade de giro do rotor. Desta forma a utilização deste elemento automaticamente cria uma carga aplicada no modelo. A energia cinética da massa é:

$$T_u = \frac{m_u}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 \cdot d^2 + 2 \cdot \Omega \cdot d \cdot \dot{u} \cdot \cos(\Omega \cdot t) - 2 \cdot \Omega \cdot \dot{w} \cdot d \cdot \sin(\Omega \cdot t)) \quad (100)$$

O termo $(m_u \cdot \Omega^2 \cdot d^2 / 2)$ é uma constante e não tem influência na equação. A massa m_u é muito pequena em relação a massa do rotor, assim a equação para energia cinética pode ser reescrita como:

$$T_u \cong m_u \cdot \Omega \cdot d \cdot \dot{u} \cdot (\cos(\Omega \cdot t) - \dot{w} \cdot \text{sen}(\Omega \cdot t)) \quad (101)$$

Aplicando a equação de Lagrange temos um vetor de força centrífuga.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} - \frac{\partial T}{\partial \delta} = -m_u d \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{bmatrix}, \quad \text{com } \delta = [u, w]^T \quad (102)$$

Para uma massa desbalanceada situada em $t=0$ com uma posição angular α com respeito ao eixo z, as forças serão:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = m_u d \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin(\Omega t + \alpha) \\ \cos(\Omega t + \alpha) \end{bmatrix} \quad (103)$$

2.6 OTIMIZAÇÃO

O conceito de otimização está presente em muitas tarefas cotidianas, na engenharia isso se traduz quando se almeja produzir algo com a maior qualidade e durabilidade com os recursos disponíveis. Assim no projeto de novos produtos, se faz uso de ferramentas as quais provêm os resultados esperados dentro de um tempo factível.

No estudo de otimização de projeto, é importante fazer a distinção entre análise e projeto. Análise é o processo de determinar a resposta de um sistema específico para sua condição de operação, por exemplo, calcular a tensão de uma estrutura devido aos esforços aplicados. Projeto por outro lado, é o processo para definir o sistema, por exemplo, o projeto de estruturas implica em determinar o tamanho, localizações e materiais dos componentes da estrutura para que a mesma suporte os esforços especificados. Assim se torna evidente que a análise é um subproblema do processo de projetar, pois é a forma que se avalia a adequação do projeto.

Muitas das atividades dos projetos de engenharia são quantificáveis e assim possíveis de serem analisadas computacionalmente de forma rápida. A proposta da otimização numérica é desenvolver de uma forma mais racional a procura pelo projeto ótimo desejado. O projeto pode ser definido como o processo de obter o máximo ou o mínimo de algum parâmetro, o qual pode se chamado de função objetivo. Para o projeto ser aceitável ele deve também satisfazer certo grupo de requisitos específicos, denominados restrições (VANDERPLAATS, 1999).

Algumas vantagens e limitações para o uso dos métodos de otimização numérica são listadas a seguir:

Vantagens:

- A maior vantagem é a redução do tempo de projeto, isso é mais real quando o mesmo algoritmo pode ser aplicado para diferentes problemas de engenharia;
- A otimização provê uma lógica sistemática de projeto;
- Pode-se trabalhar com uma grande variedade de variáveis e restrições as quais são difíceis de visualizar de forma gráfica;
- A otimização sempre resulta em alguma melhoria de projeto;
- O processo requer pouca intervenção do engenheiro.

Limitações:

- Operar com grande número de variáveis: esforço computacional (exponencial) e mal condicionados;
- Operar com funções descontínuas;
- Analisar com acentuadas não linearidades;
- Obter ótimos globais: esforço computacional pode ser excessivo;
- Programas comerciais de análise estrutural são em geral pouco acessíveis para serem utilizados como módulo de análise em algoritmos independentes de otimização.

Os algoritmos numéricos para solução de problemas de otimização são essencialmente classificados em dois grupos, os métodos de programação matemática e métodos probabilísticos. Os métodos de programação matemática são classificados em métodos de programação linear, programação não-linear e métodos baseados em teoria de aproximações como programação linear sequencial (PLS ou “SLP” em inglês) e programação quadrática sequencial (PQS ou “SQP” em inglês). Por sua vez, os métodos de programação não-linear são classificados em métodos para solução de problemas de otimização sem restrição e com restrição.

Entre os métodos probabilísticos temos os algoritmos genéticos (AGs ou “GA” em inglês) e o Recozimento Simulado (*Simulated Annealing* em inglês). A diferença essencial dos métodos de programação matemática para os métodos probabilísticos é que os últimos procuram encontrar o mínimo global do problema de otimização, evitando os mínimos locais. Já os métodos de programação matemática fornecem um mínimo local. Os métodos probabilísticos, como o próprio nome sugere, se utilizam de um processo de busca randômica

guiados por decisões probabilísticas para obter o mínimo global. Além disso, os métodos probabilísticos são também ferramentas poderosas para problemas com variáveis discretas.

Devido à natureza do problema a ser otimizado neste estudo, o algoritmo genético foi selecionado. Este algoritmo tem melhor desempenho para otimizar problemas com variáveis discretas, nos laminados estas variáveis são atribuídas aos parâmetros que definem a sequência de laminação do eixo em carbono.

2.6.1 Formulações

Alguns conceitos e definições dos problemas de otimização são amplamente utilizados na literatura e de conhecimento imprescindível, assim estas definições são apresentadas a seguir.

Problema clássico de otimização:

Max. Ou Min.	$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$	← Função Objetivo
Sujeito a		
	$g_j(x) \geq 0$	$j = 1, 2, 3, \dots, J$ ← Restrição de comportamento
	$h_k(x) = 0$	$k = 1, 2, 3, \dots, K$ ← Restrição de comportamento
	$x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)}$	$i = 1, 2, 3, \dots, N$ ← Restrição laterais nas variáveis de projeto x_i

2.6.2 Definições

Variáveis de projeto: são as variáveis que se modificam durante o processo de otimização. Podem ser contínuas (reais), inteiras ou discretas (com valores compreendidos dentro de um universo definido e fixo). Tomando-se como referência uma estrutura, as variáveis de projeto podem representar as seguintes características: propriedades mecânicas do material ou a topologia da estrutura. A configuração ou forma geométrica da estrutura, dimensões de seção transversal ou comprimentos dos elementos.

Restrições: são representadas por funções de igualdade ou desigualdade, as quais descrevem situações limites ou indesejáveis no projeto. São divididas em dois grupos:

restrições laterais as quais agem diretamente sobre as variáveis do projeto, limitando os seus valores ou restrições de comportamento as quais referenciam as condições desejáveis como limites de tensão, deslocamentos, frequências naturais, velocidades críticas.

Espaço de busca ou região viável: é o universo que contém as soluções viáveis do projeto, ele é delimitado pelas funções de restrição.

Função objetivo ou de avaliação: é a função que se deseja otimizar. Ela pode ser de uma ou mais variáveis, sendo classificadas respectivamente como unidimensionais ou multidimensionais.

Ponto ótimo: é o ponto caracterizado pelo vetor $x^* = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$, constituído pelas variáveis de projeto que otimizam a função objetivo, satisfazendo todas as restrições.

Valor ótimo: é o valor da função objetivo $f(x^*)$ no ponto ótimo.

Solução ótima: é o conjunto formado pelo ponto ótimo e valor ótimo $\{x^*, f(x^*)\}$, e pode ser classificada como:

- a) local: quando o valor ótimo é localizado (vizinhança);
- b) global: quando o valor ótimo é global na região viável;
- c) restrita: quando atende todas as restrições;
- d) não-restrita: quando não atende a alguma das restrições.

2.6.3 Otimização Multi-Objetivos

Diversos problemas no mundo real possuem um grupo de objetivos que devem ser maximizados ou minimizados para se obter a otimização do projeto, porém na maioria das vezes estes objetivos são conflitantes entre eles, ou seja, a melhoria de um objetivo causa imediatamente a deterioração de outro.

Problemas com esta natureza não possuem uma solução ótima única e sim um conjunto de soluções. Tais soluções são ótimas, pois não existem outras soluções viáveis no espaço de busca melhores que elas quando todos os objetivos são simultaneamente considerados, desta forma as mesmas são conhecidas como soluções ótimas de Pareto.

Outro exemplo comum de problema multi-objetivo é a tarefa de comprar um computador. A aquisição ótima é aquela que fornece o custo mínimo enquanto maximiza o desempenho do equipamento. Estes objetivos são conflitantes entre si, uma vez que existirão desde computadores com elevado custo e desempenho até aqueles com baixo custo e

desempenho. Um computador com o mais alto desempenho pelo menor custo, embora ideal, não existe no mundo real.

Assim, nenhuma solução que tenha menor custo e desempenho pode ser considerada como superior a outra com maior custo e desempenho. Contudo, dentre todas as configurações de equipamentos existem algumas que são superiores a outras, isto é, apresentam desempenho maior ou equivalente por um custo menor ou igual. Estas configurações (soluções) que superam outras são as já citadas soluções não-dominadas, enquanto que as configurações que são superadas por pelo menos outra, são as soluções dominadas (CASTRO, 2001).

Assim é de interesse uma ferramenta computacional que encontre um conjunto de soluções não-dominantes, das quais uma será escolhida pelo projetista por atender melhor as condições do projeto, esta função é executada por métodos de otimização multi-objetivos.

Um problema de otimização multi-objetivos pode ser descrito por um vetor y de n funções objetivos f que dependem de um vetor x de m variáveis independentes x :

$$\text{Max. ou Min. } y = f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_N(x))$$

$$\text{Sujeito a } x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) \in X$$

$$y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_m) \in Y$$

onde:

y – vetor objetivo;

f_i – funções objetivos;

x – vetor de decisão;

x_i – variáveis de decisão;

2.6.4 Algoritmos Genéticos

Os algoritmos genéticos (AGs) foram desenvolvidos por Holland em 1975 na Universidade de Michigan. Esta metodologia imita a seleção natural formulada por Darwin, onde em um ambiente com escassez de recursos, os indivíduos mais preparados têm maior chance de sobreviver e reproduzir, transmitindo as suas qualidades aos filhos por herança genética. AGs são métodos robustos de pesquisa heurística, pois podem abranger todo o espaço de projeto e não são dependentes de um único ponto inicial de projeto.

2.6.4.1 Definições

As principais definições relacionadas com os AGs são:

Cromossomos: uma sequência de caracteres representando alguma informação relativa as variáveis do problema. Cada cromossomo representa deste modo uma solução do problema;

Gene: é a unidade básica do cromossomo. Cada cromossomo tem certo um número de genes, cada um descrevendo certa variável do problema.

População: é o conjunto de cromossomos.

Geração: cada iteração que o algoritmo executa é uma geração.

Operações genéticas: intervenções que o algoritmo genético executa sobre o cromossomo.

Espaço de busca ou região viável: é a região delimitada pelas funções de restrição que definem as soluções viáveis do problema a ser resolvido.

Função objetivo: é a função que se quer otimizar. Ela é responsável pela avaliação da aptidão de cada cromossomo na população. Nela esta contida as informações pertinentes para que os AGs realizem o seu objetivo.

2.6.4.2 Estrutura dos algoritmos genéticos

O algoritmo genético é sistemático podendo ser representado pelo fluxograma ilustrado na Figura 20.

Na sequência são detalhados cada etapa deste fluxograma.

Dados de entrada: a primeira etapa consiste em fornecer os dados do problema, nesta etapa o projetista detalha as restrições do problema, os objetivos que devem ser alcançados, como o indivíduo será codificado e define parâmetros que controlaram a evolução dos indivíduos;

Geração da população inicial: nesta etapa, a população original será criada com a quantidade de indivíduos que foi definida na etapa anterior. O processo de criação é feito através de um processo randômico o qual gera o cromossomo que representa o indivíduo;

Avaliar a aptidão da população: toda a população será avaliada e pontuada conforme a sua performance quanto aos requisitos especificados. Existem diversos critérios para

formular a pontuação, quando existem múltiplos objetivos a serem alcançados uma avaliação cuidadosa dos critérios de pontuação deve ser efetuado, pois quando os objetivos são concorrentes as funções que possuem maior gradiente irão dominar a otimização;

Classificação da população: nesta etapa, baseado na pontuação obtida na avaliação os indivíduos serão classificados em ordem do melhor para o pior indivíduo;

Seleção dos melhores indivíduos: neste processo a partir dos dados de entrada são escolhidos uma porcentagem dos melhores indivíduos da população, estes indivíduos irão transmitir os seus genes para os filhos que serão gerados;

Geração dos filhos: neste procedimento é calculada a probabilidade dos indivíduos serem escolhidos para serem pais e por meio de uma função randômica são selecionados pares os quais geraram filhos. Os filhos possuem parte do cromossomo dos dois indivíduos, esta seleção também ocorre de forma randômica;

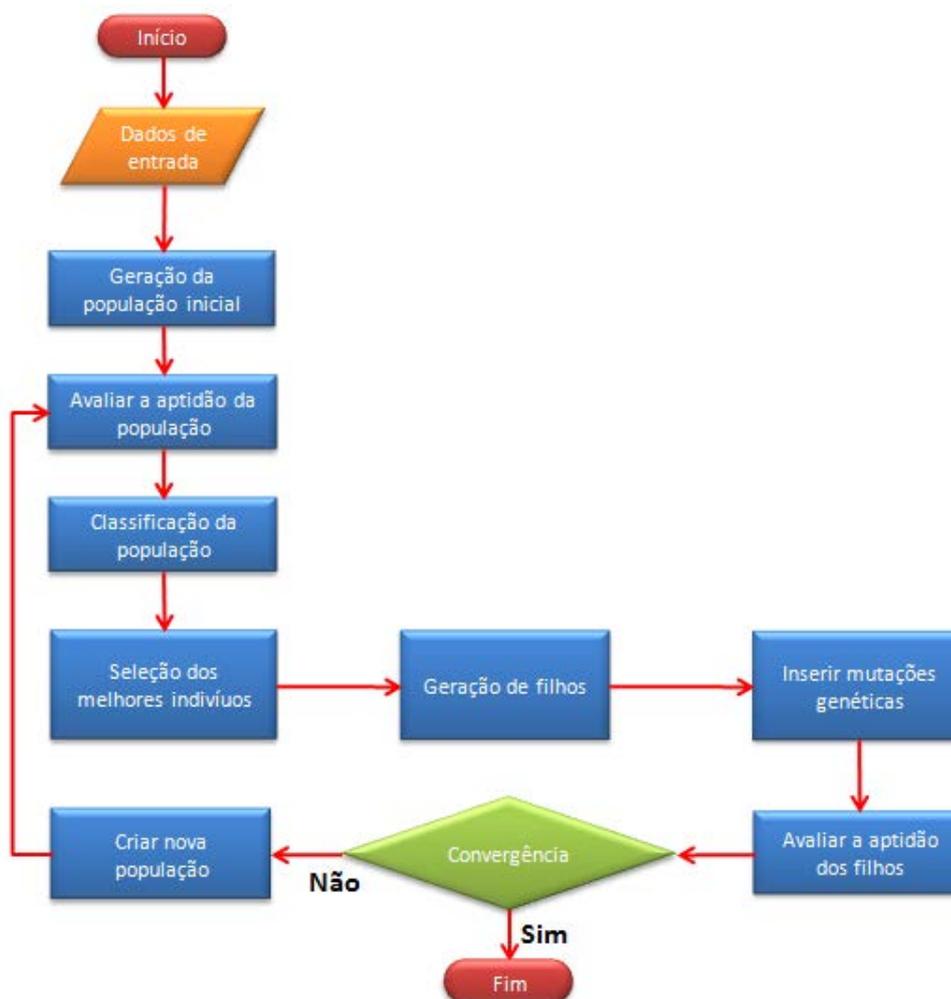
Inserir mutações genéticas: Uma porcentagem pré-definida dos filhos sofrerá mutações genéticas, as quais ocorrem de forma aleatória pela substituição de alguns genes do seu cromossomo;

Avaliar a aptidão dos filhos: nesta etapa todos os filhos gerados são avaliados segundo os critérios estabelecidos, com o mesmo procedimento e critérios adotados para a população original;

Convergência: neste processo é verificado se algum dos filhos gerados é solução para o problema gerado. No caso positivo o processo pode ser encerrado, no caso negativo é passado para a próxima etapa que dará início a um novo ciclo de procura;

Criar nova população: Na situação em que a convergência foi negativa uma nova população deverá ser formada e reiniciada a procura pela solução. A nova população é formada pela população antiga onde são excluídos os piores indivíduos e acrescido o mesmo número de filhos gerados. Assim é esperado que as melhores características tenham sido preservadas na população.

Figura 20 – Fluxograma do algoritmo genético



Fonte: Autor

2.6.5 Algoritmos genéticos aplicados na otimização de laminados

Nas últimas décadas as aplicações estruturais de laminados de fibra de carbono vêm crescendo, principalmente no setor aeroespacial, exigindo grande esforço no desenvolvimento de metodologias de análise, que garanta os requisitos para se projetar estas estruturas. A grande vantagem desta classe de material em relação aos metais tradicionais como já mencionado é a de permitir a fabricação de estruturas se beneficiando dentre outras coisas do correto direcionamento das camadas, com o intuito de usufruir da máxima resistência do material. Ao mesmo tempo esta vantagem está associada a um grande número de parâmetros e complexos comportamentos mecânicos, que implicam em projetos estruturais mais trabalhosos e por vezes experimentais. Estas características motivam o uso de métodos de

otimização, os quais tornam a tarefa de projetar mais sistemática e menos dependente da experiência acumulada do engenheiro (ALMEIDA; AWRUCH, 2009).

Problemas reais de estruturas manufaturadas com material compósito dependem de uma análise estrutural confiável. No caso de laminados em compósito, a determinação do comportamento mecânico é difícil mesmo em geometrias simples. Isso acontece por ser inerente desta classe de material alguns mecanismos complexos, tais como acoplamentos entre tração-flexão e deformações de torção dependentes da sequência de laminação. Em análises dinâmicas também se verifica uma importante relação entre o amortecimento do compósito com a sequência de laminação. Esta relação influencia diretamente o comportamento dinâmico global da estrutura. As uniões destes efeitos inibem a aplicação de análises estruturais tradicionais. Um reflexo destes complexos mecanismos são as diversas teorias de falha existentes, que ainda hoje demandam testes experimentais e uma criteriosa análise com o objetivo de mitigar problemas de conservadorismo associados ao critério escolhido.

Uma tarefa árdua seria a definição do laminado ideal para o projeto com tantas variáveis existentes, se não fosse pelo advento do uso de algoritmos de otimização. Ainda assim a aplicação dos mesmos requer um grande esforço em seu desenvolvimento, pois não existem métodos prontos para todos os tipos de aplicação.

As características dos sistemas onde existem tantas variáveis discretas, como o número de camadas, ângulo de orientação da camada, material, etc, justificam a aplicação de um método de otimização probabilístico. Um dos métodos mais utilizados na otimização de estruturas compósitas são AGs. Devido ao escopo de desenvolvimento deste trabalho, focado em otimização multi-objetivos de um eixo em compósito o AGs foi o selecionado para o desenvolvimento do método.

3 PROPRIEDADES MECÂNICAS DE LAMINADOS

Nesta seção são apresentadas propriedades mecânicas de laminados simulados. As propriedades simuladas tiveram como objetivo avaliar as influências dos parâmetros de laminação sobre o módulo de elasticidade e fator de perda dos laminados. As propriedades mecânicas apresentadas serão aplicadas nas simulações cujos resultados serão demonstrados no próximo capítulo.

3.1 PROPRIEDADES DA LAMINAS DE CARBONO

Os materiais listados na Tabela 1 foram coletados de referências bibliográficas (ADAMS; MAHERI, 1993) e (SINO, 2008). Estas propriedades foram utilizadas nas simulações apresentadas neste trabalho.

Tabela 1 – Materiais para simulação numérica

Material	E1 (GPa)	E2 (GPa)	G12 (GPa)	ν_{12}	Ψ_1 (%)	Ψ_2 (%)	Ψ_{12} (%)
HMS carbon-epoxy(DX-210)	172.7	7.2	3.76	0.3	0.45	4.22	7.05
Fibredux 913C	112.5	8.4	4.8	0.3	0.74	7.3	6.6

3.2 AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIA DA POSIÇÃO DE UMA LÂMINA

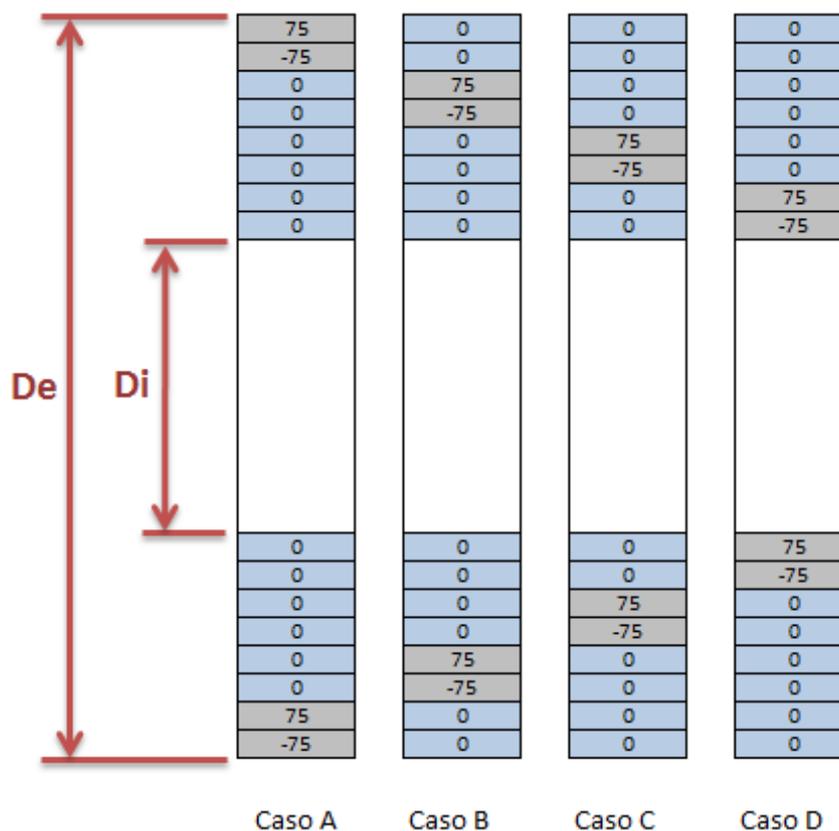
Para avaliar a influência sobre o módulo de elasticidade e fator de perda pela posição no empilhamento em que se encontra uma camada, foi desenvolvida uma análise onde um par de lâminas transita dentro da sequência de laminação. Assim foi proposta a análise de quatro diferentes sequências de laminações como ilustrado na Figura 21.

Dentre os materiais listados na Tabela 1 foi selecionado o material *HMS carbon Epoxy (DX-210)*. Os tubos simulados possuem 8 camadas de mesma espessura (t), diâmetro interno (D_i) e diâmetro externo (D_e). Todos os laminados são balanceados, 6 camadas orientadas à 0° e duas que serviram como marcadores a $\pm 75^\circ$.

Observando os resultados apresentados nas Tabela 2, os quais foram simulados através do módulo de análise desenvolvido para o algoritmo, conclui-se que a posição em que se encontra o par de lâminas dentro da sequência de laminação não interfere nos valores dos

módulos de elasticidade, no entanto apresentam influência no amortecimento do eixo. Assim conclui-se que ao se realizar uma otimização é possível através da alocação de camadas em diferentes posições dentro da sequência de laminação, realizar pequenos ajustes no amortecimento interno do eixo sem alterar a sua rigidez.

Figura 21 – Influência da posição da lamina



Fonte: Autor

Tabela 2 – Resultados para a influência da lâmina dentro da sequência de laminação

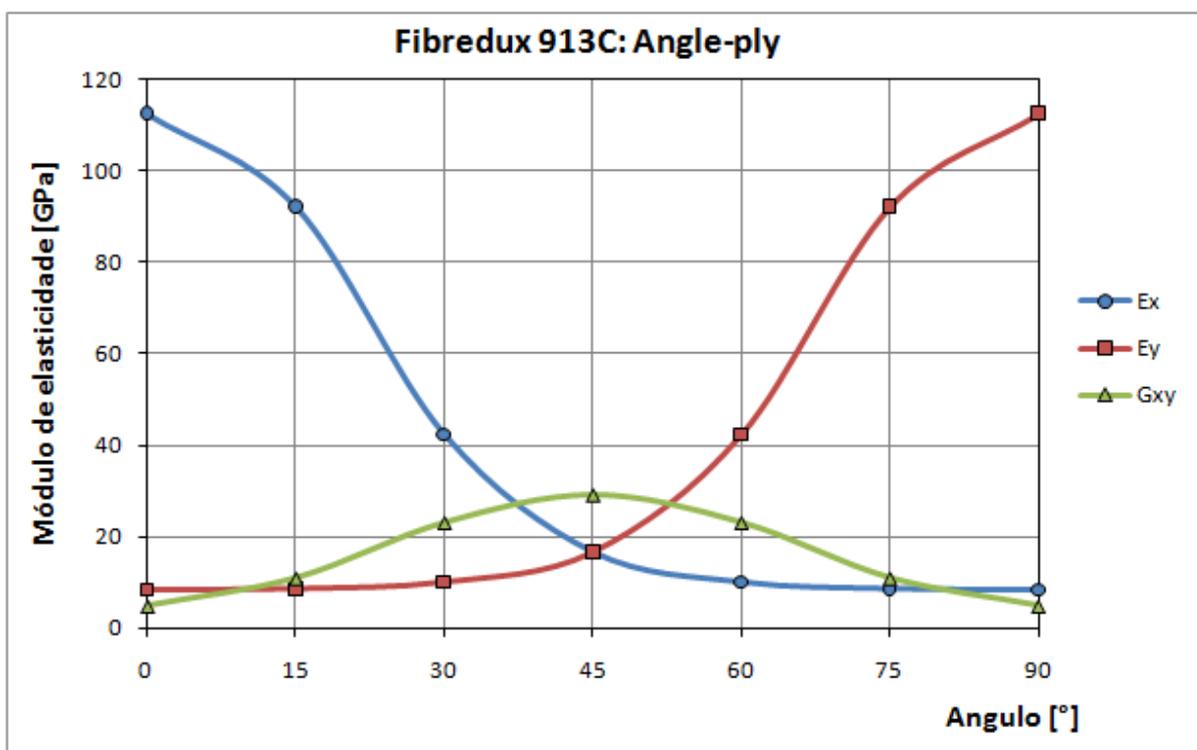
Casos	HMS carbon-epoxy(DX-210)								
	E_x (GPa)	E_y (GPa)	G_{xy} (GPa)	ν_{xy}	ν_{yx}	Ψ_x (%)	Ψ_y (%)	Ψ_{xy} (%)	Ψ_t (%)
A	131.6	43.3	6.3	0.11	0.04	0.44	0.06	0.01	0.52
B	131.6	43.3	6.3	0.11	0.04	0.44	0.05	0.01	0.51
C	131.6	43.3	6.3	0.11	0.04	0.44	0.05	0.01	0.50
D	131.6	43.3	6.3	0.11	0.04	0.45	0.04	0.01	0.49

Tabela 3 – Resultados para as simulações dos laminados *Angle-ply*

Fibredux 913C: Angle-ply									
Casos	Ex (GPa)	Ey (GPa)	Gxy (GPa)	ν_{xy}	ν_{yx}	Ψ_x (%)	Ψ_y (%)	Ψ_{xy} (%)	Ψ_t (%)
A	112.5	8.4	4.8	0.300	0.022	0.740	0.000	0.000	0.740
B	92.2	8.6	10.9	0.919	0.086	0.644	0.033	0.825	1.502
C	42.4	10.1	23.1	1.270	0.302	0.416	0.456	2.475	3.347
D	16.7	16.7	29.2	0.737	0.737	0.185	1.825	3.300	5.310
E	10.1	42.4	23.1	0.302	1.270	0.046	4.106	2.475	6.627
F	8.6	92.2	10.9	0.086	0.919	0.003	6.355	0.825	7.183
G	8.4	112.5	4.8	0.022	0.300	0.000	7.300	0.000	7.300

A Figura 23 ilustra a variação dos módulos de elasticidade. Quando todas as fibras estão orientadas à $\pm 0^\circ$ é obtido o maior módulo transversal para este material, a condição oposta é verificada quando todas as fibras são orientadas à $\pm 90^\circ$.

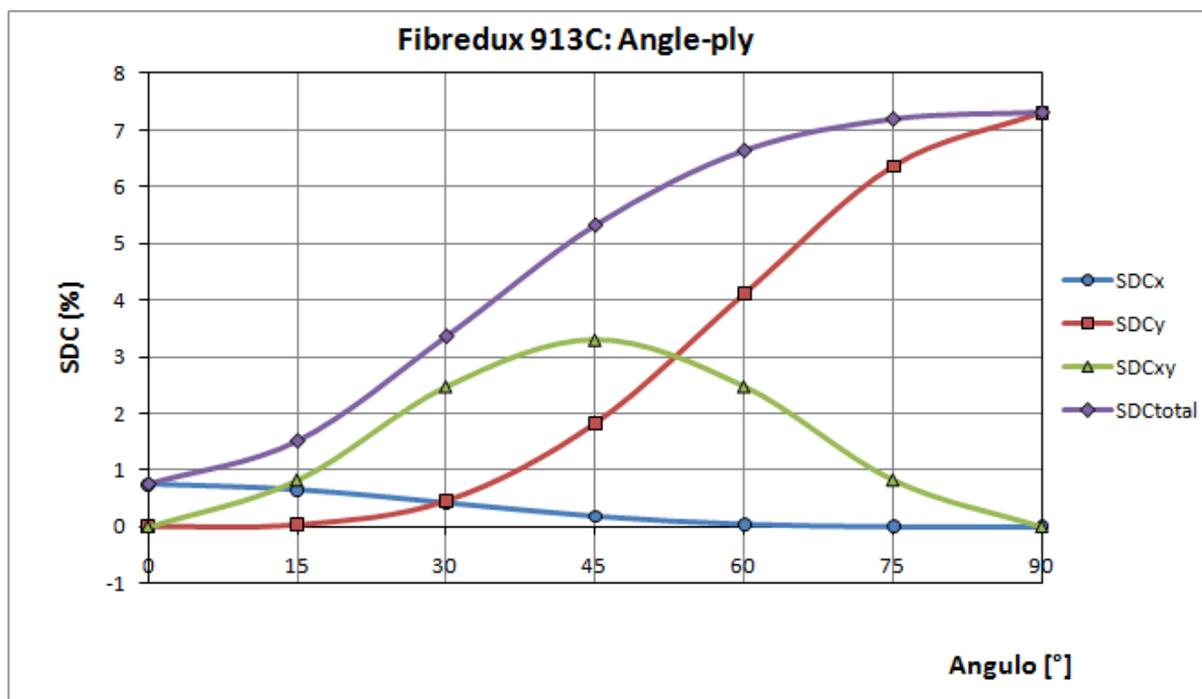
Figura 23 – Influência da direção da lâmina nos módulos de elasticidade



A Figura 24 ilustra a variação do amortecimento específico *Specific Damping Capacity* (SDC), são apresentados suas componentes na direção x, y, xy e o total, o qual representa a soma das componentes. Para este material um laminado do tipo *Angle-ply* tem o maior amortecimento quando as camadas são orientadas à $\pm 90^\circ$ e o mínimo quando estão orientadas $\pm 0^\circ$. É importante ressaltar que isso não é uma regra e que o máximo amortecimento pode

ocorrer com outros ângulos, quando são utilizados materiais em que Ψ_{12} possui o maior valor entre as componentes, como é o caso do material *HMS carbon epoxy (DX-210)*.

Figura 24 – Influência da direção da lâmina no amortecimento específico



O mesmo processo apresentado foi executado utilizando o material *HMS carbon epoxy (DX-210)* com a configuração *Angle-ply*. Na Tabela 4 foram agrupados os resultados obtidos para as diferentes configurações simuladas. A Figura 25 ilustra os resultados obtidos para os módulos de elasticidade. A Figura 26 ilustra os resultados obtidos para o amortecimento. Observa-se que as curvas geradas para os módulos de ambos os materiais seguem a mesma proporção de magnitude entre as componentes E_x , E_y e G_{xy} . Na comparação das curvas de amortecimento obtidas para os dois materiais observa-se que o máximo ocorre como ângulos diferentes.

Tabela 4 – Resultados para a simulação de laminados *Angle-ply*

Casos	HMS carbon Epoxy (DX-210): Angle-ply								
	E_x (GPa)	E_y (GPa)	G_{xy} (GPa)	ν_{xy}	ν_{yx}	Ψ_x (%)	Ψ_y (%)	Ψ_{xy} (%)	Ψ_t (%)
A	172.7	7.2	3.8	0.300	0.013	0.450	0.000	0.000	0.450
B	134.0	7.3	13.8	1.479	0.080	0.392	0.019	0.881	1.292
C	45.0	8.2	34.0	1.748	0.319	0.253	0.264	2.644	3.161
D	13.9	13.9	44.1	0.850	0.850	0.112	1.055	3.525	4.693
E	8.2	45.0	34.0	0.319	1.748	0.028	2.374	2.644	5.046
F	7.3	134.0	13.8	0.080	1.479	0.002	3.674	0.881	4.557
G	7.2	172.7	3.8	0.013	0.300	0.000	4.220	0.000	4.220

Figura 25 – Influência da direção da lâmina nos módulos de elasticidade

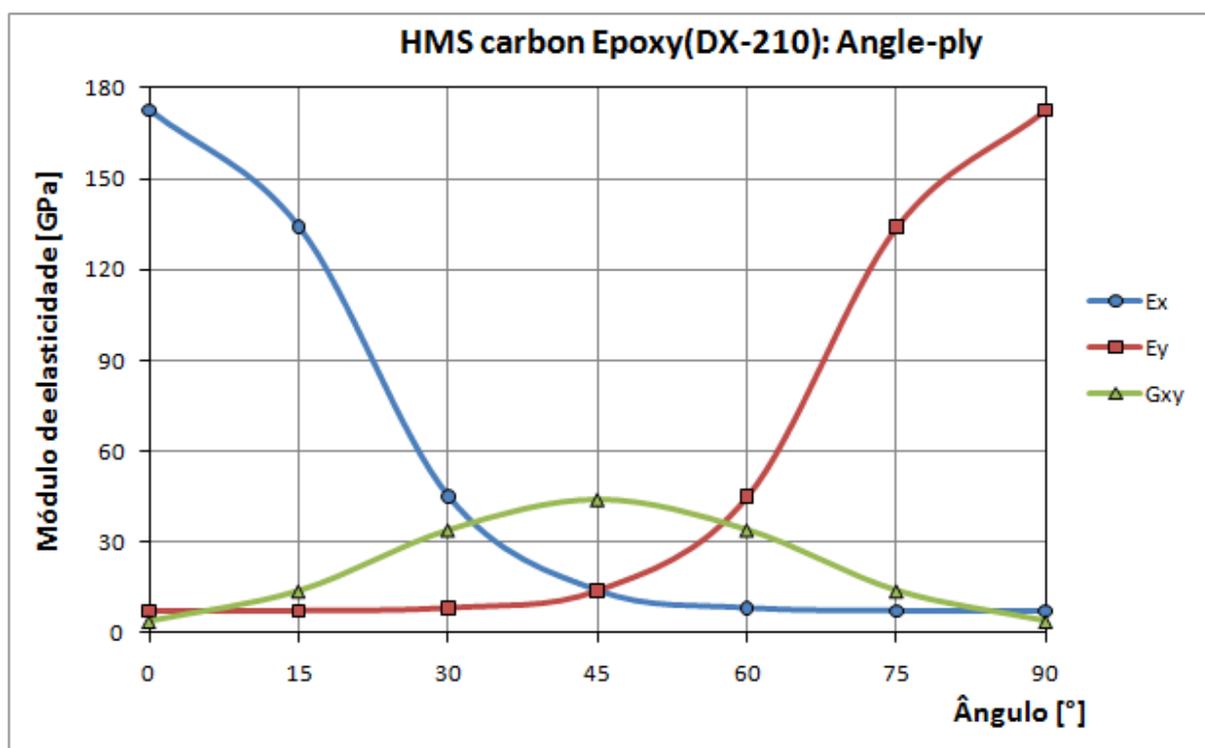


Figura 26 – Influência da direção da lâmina no amortecimento específico

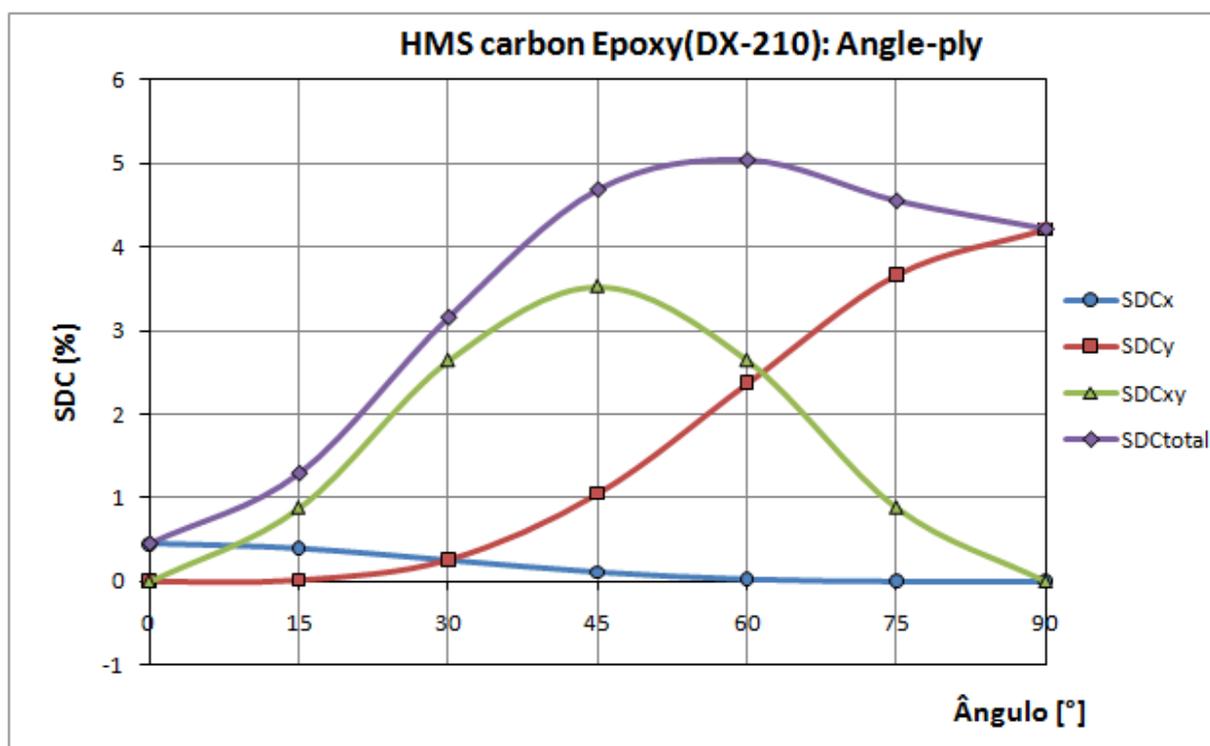
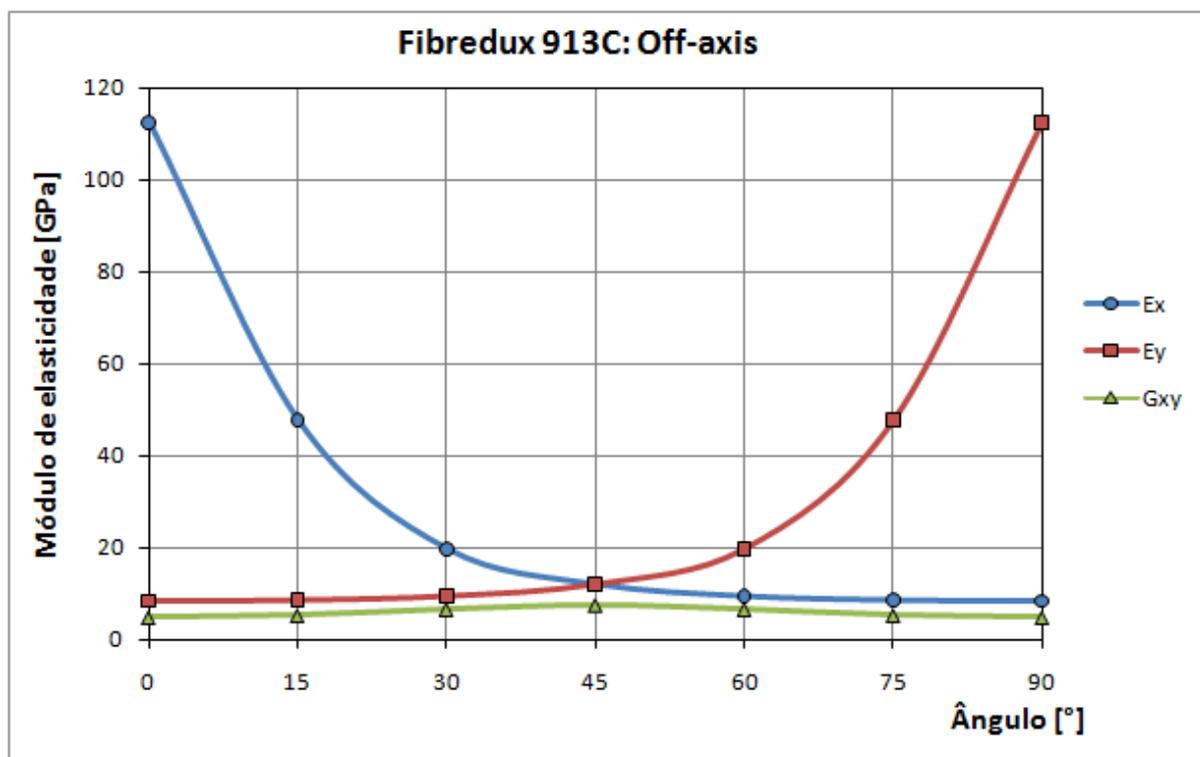


Tabela 5 – Resultados para a simulação de laminados *Off-axis*

Casos	Fibredux 913C: Off-axis								
	Ex (GPa)	Ey (GPa)	Gxy (GPa)	ν_{xy}	ν_{yx}	Ψ_x (%)	Ψ_y (%)	Ψ_{xy} (%)	Ψ_t (%)
A	112.5	8.4	4.8	0.300	0.022	0.740	0.000	0.000	0.740
B	47.7	8.6	5.3	0.351	0.063	0.284	0.288	3.811	4.382
C	19.8	9.5	6.6	0.331	0.159	0.112	1.457	4.284	5.853
D	12.1	12.1	7.5	0.259	0.259	0.062	3.040	3.300	6.402
E	9.5	19.8	6.6	0.159	0.331	0.022	4.812	2.049	6.884
F	8.6	47.7	5.3	0.063	0.351	0.002	6.520	0.686	7.208
G	8.4	112.5	4.8	0.022	0.300	0.000	7.300	0.000	7.300

A Figura 28 ilustra os módulos de elasticidade calculados, o mesmo material na configuração *Angle-ply* apresentou resultados muito diferentes. Podendo se destacar o valor máximo obtido para o módulo de cisalhamento G_{xy} , o qual com a configuração *Angle-ply* à 45° tem valor 29.2 [GPa] e 7.5 [GPa] com a configuração *Off-axis* para o mesmo ângulo.

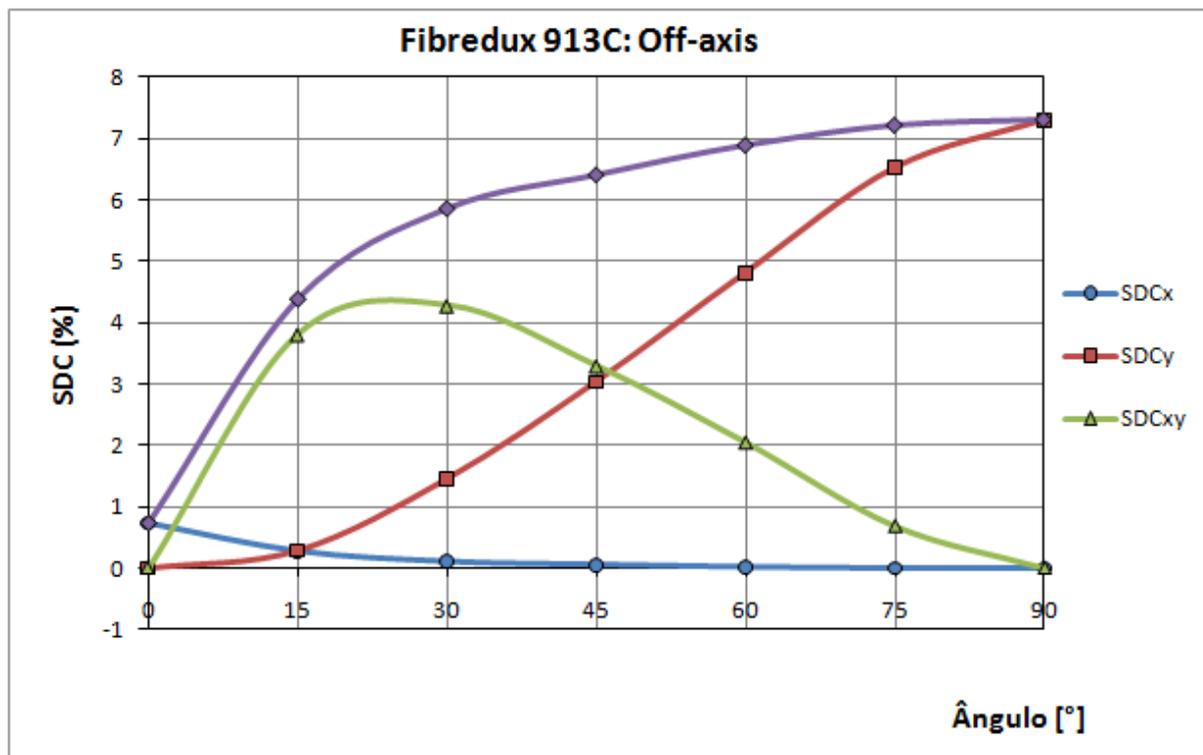
Figura 28 – Influência da direção da lâmina nos módulos de elasticidade



Na Figura 29 são ilustrados os resultados obtidos para o amortecimento específico, os quais podem ser comparados com os resultados da Figura 24. O contraste obtido com a

configuração de laminação adotado pode ser avaliado observando-se o ponto de máximo valor para o amortecimento.

Figura 29 – Influência da direção da lâmina no amortecimento específico



A Tabela 6 agrupa os valores obtidos com o material (DX-210), os resultados são ilustrados na Figura 30 e Figura 31, as quais possibilitam as mesmas comparações com a configuração *Angle-ply*.

Tabela 6 – Resultados para a simulação de laminados *Off-axis*

HMS carbon Epoxy (DX-210): Off-axis									
Casos	Ex (GPa)	Ey (GPa)	Gxy (GPa)	ν_{xy}	ν_{yx}	Ψ_x (%)	Ψ_y (%)	Ψ_{xy} (%)	Ψ_t (%)
A	172.7	7.2	3.8	0.300	0.013	0.450	0.000	0.000	0.450
B	45.3	7.3	4.2	0.412	0.066	0.112	0.207	4.947	5.266
C	16.4	7.8	5.6	0.390	0.187	0.054	0.885	4.719	5.658
D	9.8	9.8	6.7	0.306	0.306	0.039	1.745	3.525	5.309
E	7.8	16.4	5.6	0.187	0.390	0.016	2.719	2.260	4.994
F	7.3	45.3	4.2	0.066	0.412	0.002	3.729	0.795	4.526
G	7.2	172.7	3.8	0.013	0.300	0.000	4.220	0.000	4.220

Figura 30 – Influência da direção da lâmina nos módulos de elasticidade

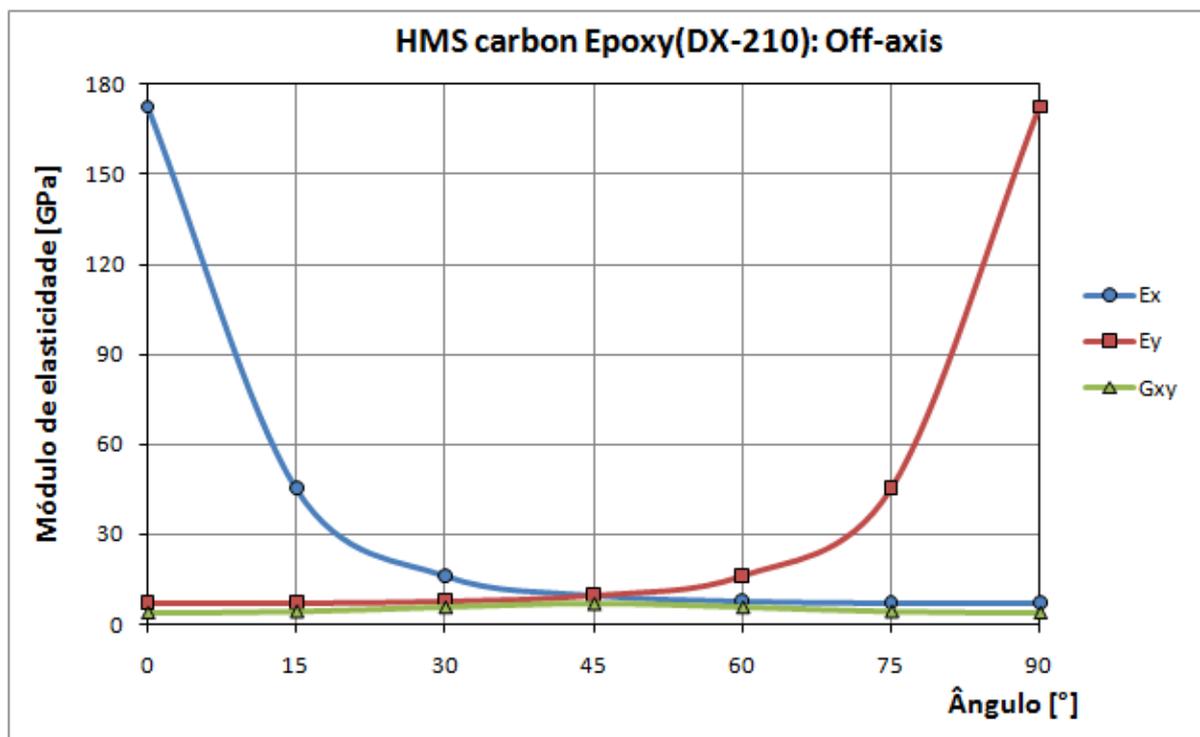
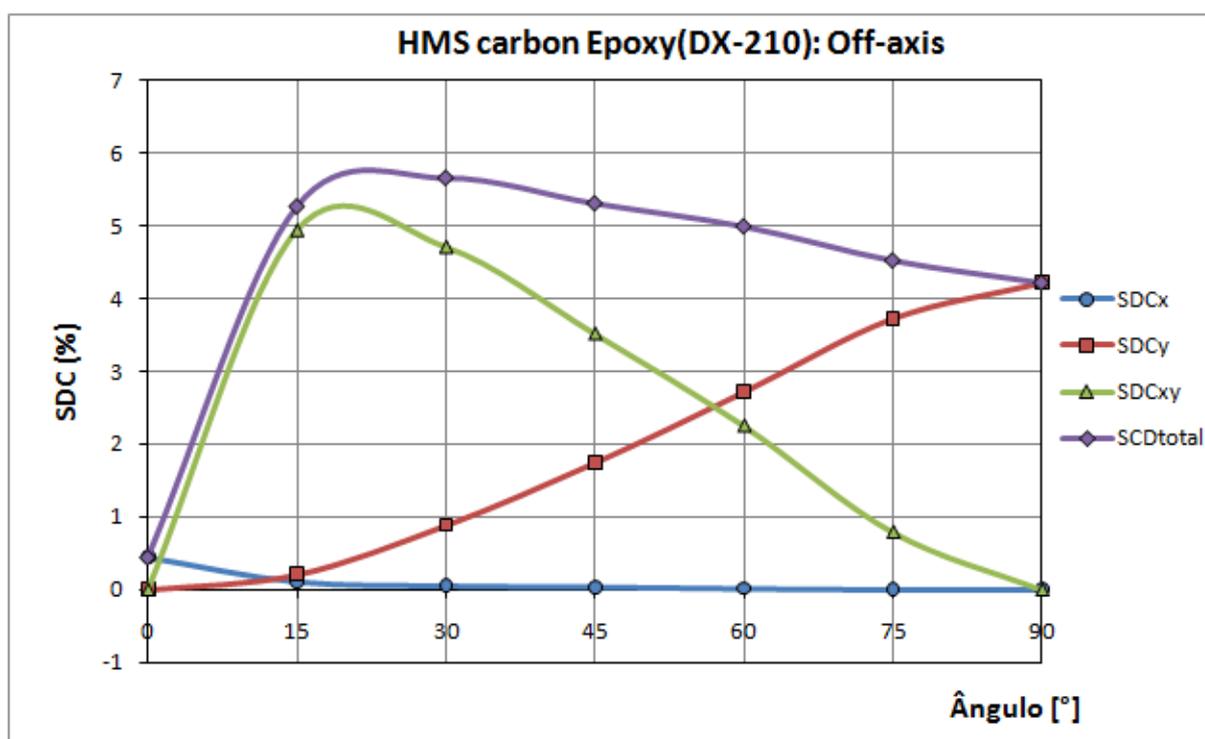


Figura 31 – Influência da direção da lâmina no amortecimento específico



4 ALGORITMO PARA OTIMIZAÇÃO DINÂMICA E ESTRUTURAL

Neste item é demonstrada a metodologia desenvolvida para realizar simultaneamente a otimização dinâmica e estrutural de rotores, cujos eixos são constituídos de material compósito de fibra de carbono. Serão apresentados resultados de diversas simulações que tem por finalidade demonstrar a viabilidade do método, bem como as técnicas implementadas.

4.1 ALGORITMO DESENVOLVIDO

A metodologia desenvolvida buscou aprimorar os métodos de otimização dinâmica e estrutural existentes para rotores com eixos em compósito. O algoritmo desenvolvido utiliza uma metodologia original que possibilita a otimização de rotores mais complexos, se comparado aos rotores possíveis de serem otimizados pelas metodologias atuais.

A metodologia de otimização desenvolvida se diferencia em dois aspectos em relação às metodologias existentes. O primeiro aspecto se refere à complexidade mecânica dos rotores que podem ser otimizados. Os algoritmos atuais realizam otimização de rotores simples, constituídos pelo eixo em compósito e mancais nas extremidades. O algoritmo desenvolvido possibilita múltiplos mancais e “discos” (engrenagens, polias, hélices, etc.) acoplados ao eixo.

Outro diferencial deste algoritmo é observado pela análise aplicada para se obter as frequências naturais e limites de instabilidade do rotor. A complexidade mecânica requer que a análise dinâmica seja efetuada pelo MEF. As metodologias atuais fazem uso de fórmulas empíricas e/ou analíticas para a realização desta análise. Estes desenvolvimentos foram possíveis devido às restrições de configurações dos rotores. As metodologias encontradas na pesquisa bibliográfica foram: (MONTAGNIER; HOCHARD, 2013), (KUMAR, 2007) e (RANGASWAMY; VIJAYARANGIAN, 2005).

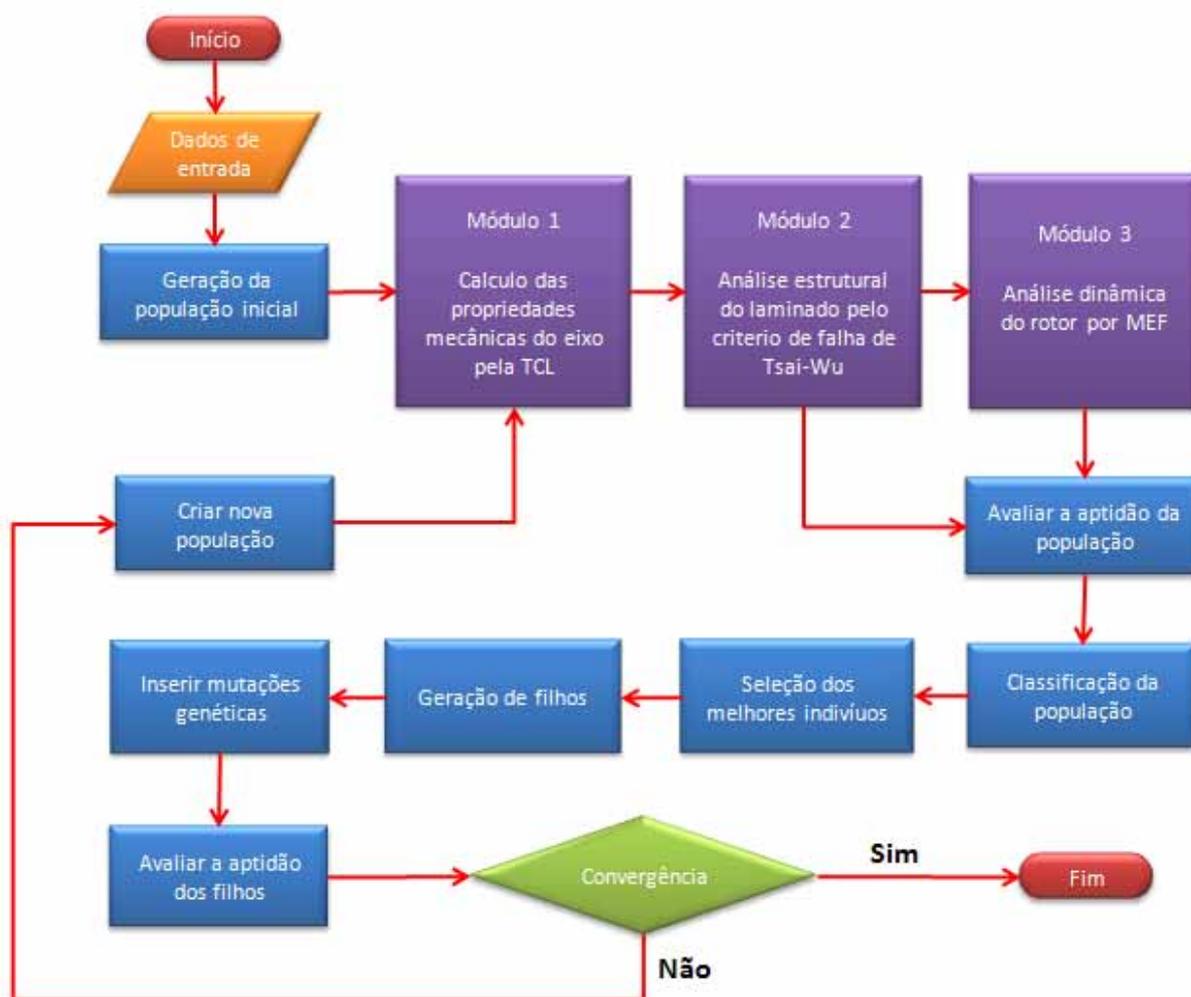
Em linhas gerais o algoritmo desenvolvido se destina a solução de problemas que requerem o dimensionamento de um eixo laminado otimizado, que suporte esforços estruturais, como torção, forças axiais e transversais, e que deva operar em regime de estabilidade até certa velocidade de rotação especificada.

A otimização é realizada através de um AG desenvolvido para esta aplicação, o qual faz uso de três módulos de análise desenvolvidos. Um módulo é responsável em estimar as propriedades mecânicas de um laminado, obtendo os módulos de elasticidade equivalentes e os amortecimentos específicos. O segundo módulo tem a função de avaliar estruturalmente

através de critérios de falha se o laminado proposto suporta os esforços que o rotor será submetido. O terceiro módulo através do MEF realiza a análise dinâmica do rotor com o eixo laminado proposto.

A seguir serão detalhados os processos do algoritmo desenvolvido, o qual foi representado pelo fluxograma ilustrado na Figura 32. Todo o algoritmo foi desenvolvido no ambiente Matlab[®].

Figura 32 – Fluxograma do AG desenvolvido



Fonte: Autor

4.1.1 Dados de entrada

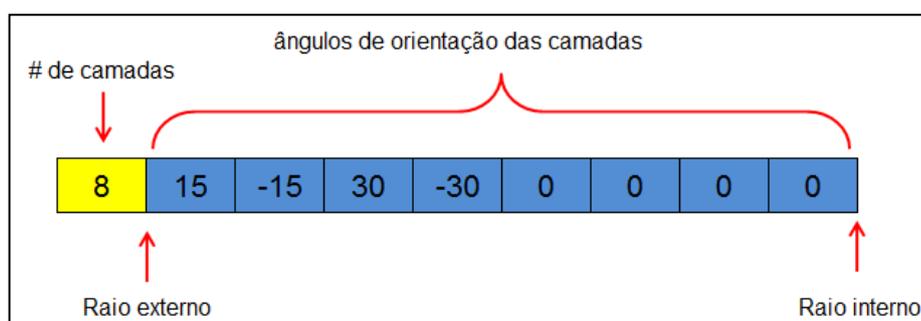
A primeira etapa que o projetista deve executar é inserir os dados do projeto. Será necessário informar:

- Lâmina de carbono: espessura, módulos de elasticidade, coeficiente de Poisson, amortecimentos específicos, limites de falha da lâmina;
- Eixo: raio externo máximo;
- Discos: diâmetro externo, espessura, densidade;
- Mancais: rigidez e amortecimentos se houver;
- MEF: quantidade e posição dos elementos, posição dos mancais e dos discos;
- Faixa de análise dinâmica: o número de frequências naturais para avaliar, informar a rotação inicial, final e o incremento de frequência;
- Condição de operação do rotor: massa desbalanceada, momentos, forças normais e velocidade de rotação máxima;
- Fatores de segurança: fator dinâmico e estrutural;
- Parâmetros para otimização: incremento de ângulo possível entre 0 e 90°, tamanho da população, porcentagem da população para seleção, porcentagem dos selecionados que gerará filhos, número máximo de gerações e porcentagem dos filhos que sofrerão mutação;

4.1.2 Geração da população inicial

A primeira população utiliza simultaneamente a geração aleatória de cromossomos e a sementeira dos laminados tipo off-axis e angle-ply. A sementeira das configurações já estudadas no capítulo 3, visa acelerar a convergência dos resultados, pelo potencial que as configurações simétricas e balanceadas tem na manufatura e desacoplamento dos esforços. Cada cromossomo da população é formado pelos seguintes genes ilustrados na Figura 33:

Figura 33 - Cromossomo

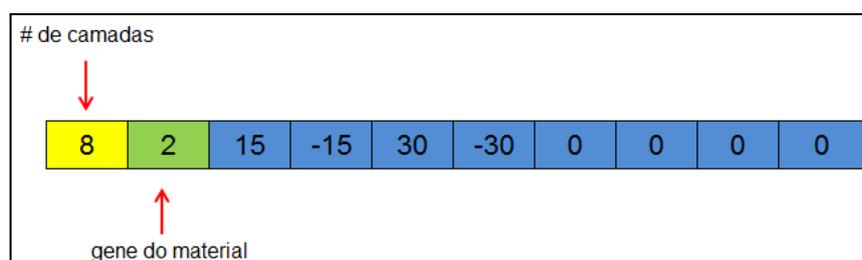


Fonte: Autor

Na prática de concepção de estruturas em compósito não se aplica normalmente diferentes materiais na laminação, pois este processo torna a manufatura complexa. Cada material tem um comportamento diferente durante o ciclo de cura. Normalmente o que se encontra são lâminas unidirecionais, tecidos e colméias estruturais, que são empregadas com objetivo de aumentar a inércia. Diversos fatores implicam em não existirem muitas alternativas simultaneamente a disposição do projetista para uma otimização, tais como, acordos comerciais entre empresas, disponibilidade em estoque visto que estes materiais possuem validade e são armazenados em ambiente resfriado em condições controladas, sendo necessário antes da fabricação intenso trabalho de qualificação do material para ser utilizado.

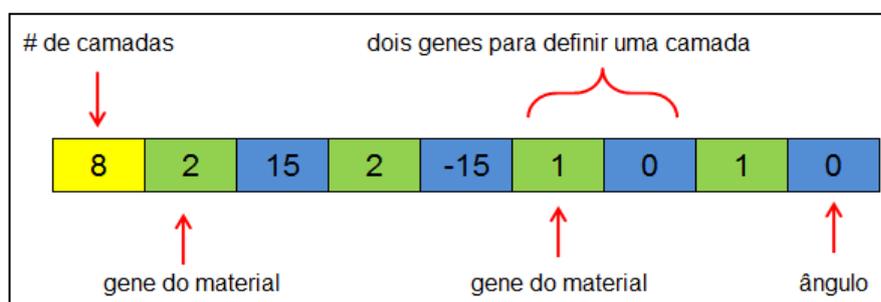
Baseado nestes conhecimentos, as simulações realizadas foram realizadas considerando a disponibilidade de um único tipo de material. Caso exista a necessidade de trabalhar com mais de um material, seria necessário acrescentar um gene no cromossomo se todo o eixo for do mesmo material (ver Figura 34), ou um gene extra para cada camada como ilustrado na Figura 35.

Figura 34 – Todas as lâminas com o mesmo material



Fonte: Autor

Figura 35 – Cada lâmina com um material diferente



Fonte: Autor

Outro ponto a salientar é que as análises despenderiam um tempo extra com o acréscimo do gene de variação de material. Como o intuito do desenvolvimento é demonstrar a viabilidade de otimizar simultaneamente a dinâmica e a resistência estrutural dos eixos, este objetivo seria alcançado mesmo com a utilização de apenas um tipo de material, assim o acréscimo deste gene de avaliação de material não traria benefícios neste estudo.

4.1.3 Módulos de análise

Foram desenvolvidos três módulos de análise, baseados nas metodologias apresentadas nas revisões técnicas. Nesta seção serão detalhados os processos internos que compõem cada módulo de análise.

O primeiro módulo necessita como dados de entrada, as propriedades mecânicas da lamina de carbono utilizada, as sequências de laminação de todos os cromossomos e a configuração geométrica do eixo. Com esses dados, através da teoria clássica dos laminados estimam-se as propriedades mecânicas equivalentes do eixo de carbono, módulos de elasticidades e amortecimentos. Este módulo gera ao final da análise um vetor com as propriedades equivalentes calculadas para cada cromossomo, estas informações serão utilizadas pelos outros módulos de análise. A Figura 36 ilustra o fluxograma deste módulo de análise.

O segundo módulo requer os seguintes dados de entrada: as propriedades equivalentes calculadas para cada cromossomo pelo módulo 1 e informações sobre os esforços atuantes no rotor. Com estas informações é realizada para cada cromossomo a análise de falha de suas lâminas, através do critério de falha escolhido. Ao final da análise um vetor é gerado com a avaliação pelo critério de falha de todas as lâminas dos cromossomos. Estas informações serão utilizadas na avaliação da aptidão de cada cromossomo dentro do algoritmo de otimização. A Figura 37 ilustra o fluxograma deste módulo.

O terceiro módulo necessita como dados de entrada: as propriedades mecânicas equivalentes dos cromossomos, propriedades mecânicas dos discos e dos mancais. Para a modelagem de elementos finitos é necessário a configuração geométrica do rotor e informações do modelo, como quantidade de elementos e posição. Para executar a otimização de forma mais objetiva é recomendado restringir a faixa de velocidade de rotação em que o rotor irá operar. Ao fim da análise, são obtidos diversos resultados, como: velocidades críticas, os limites de instabilidade e frequências naturais para a construção do diagrama de Campbell. O fluxograma deste módulo foi representado na Figura 38.

Figura 36 – Fluxograma do módulo de análises 1

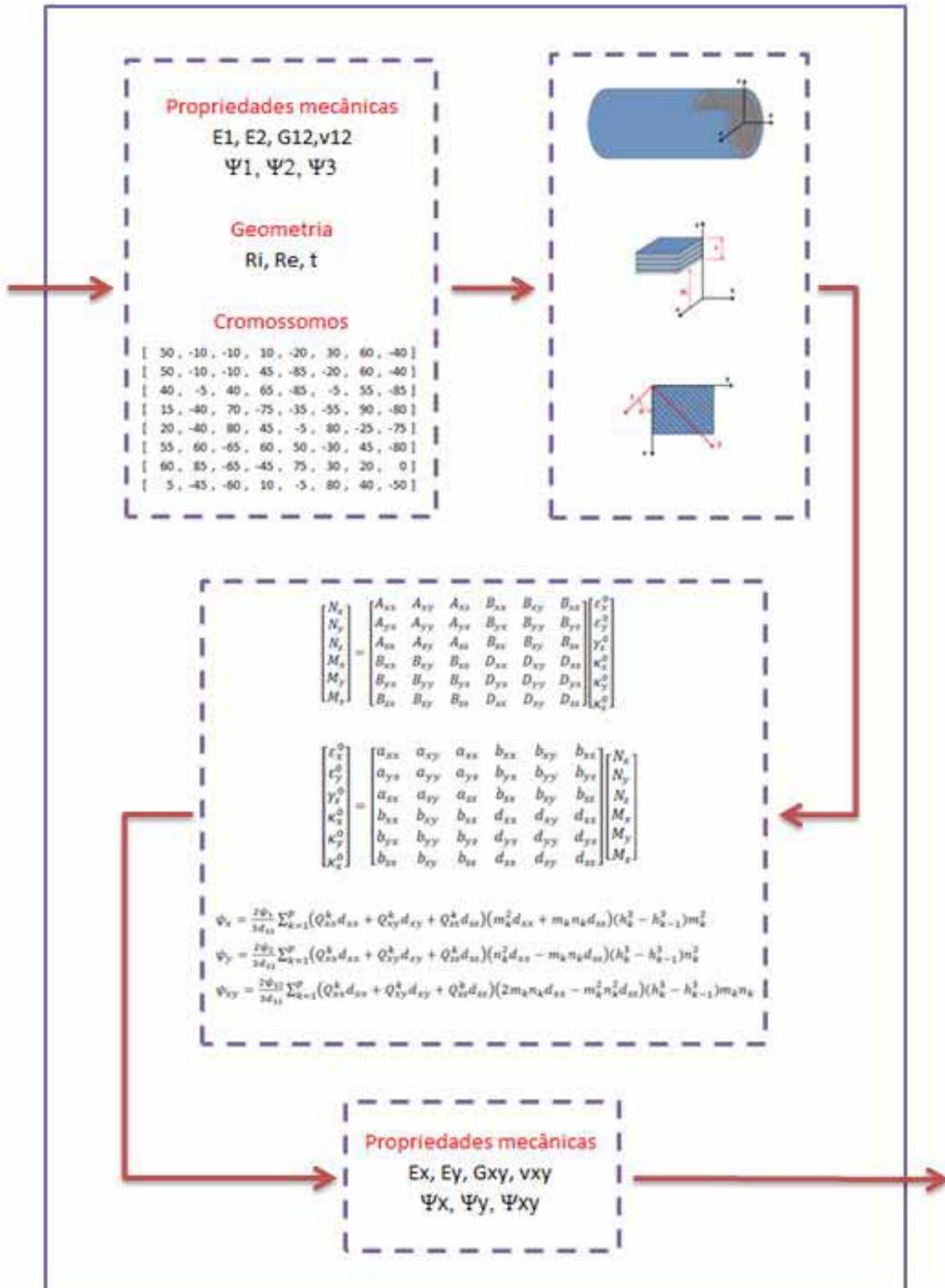


Figura 37 – Fluxograma do módulo de análises 2

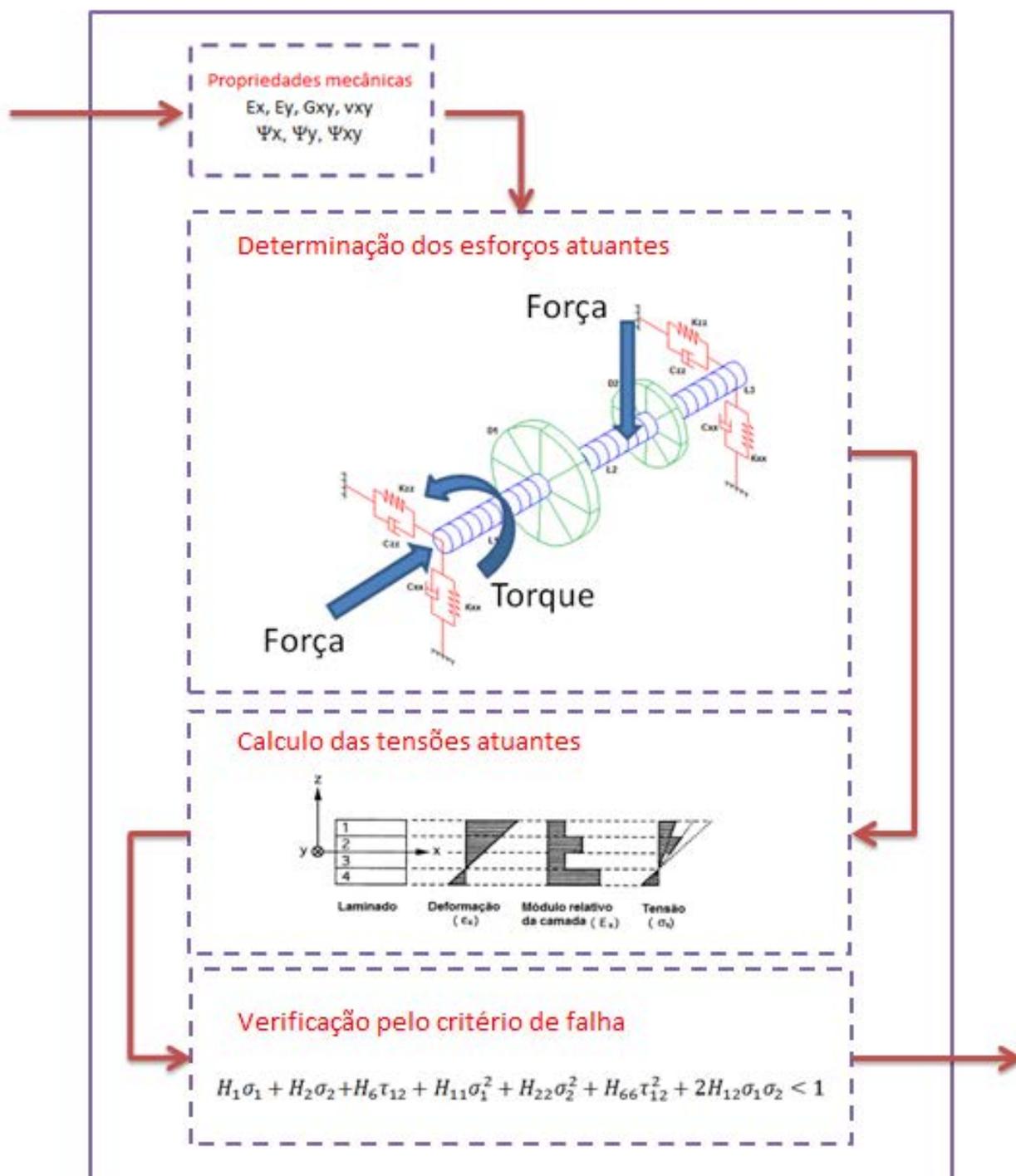
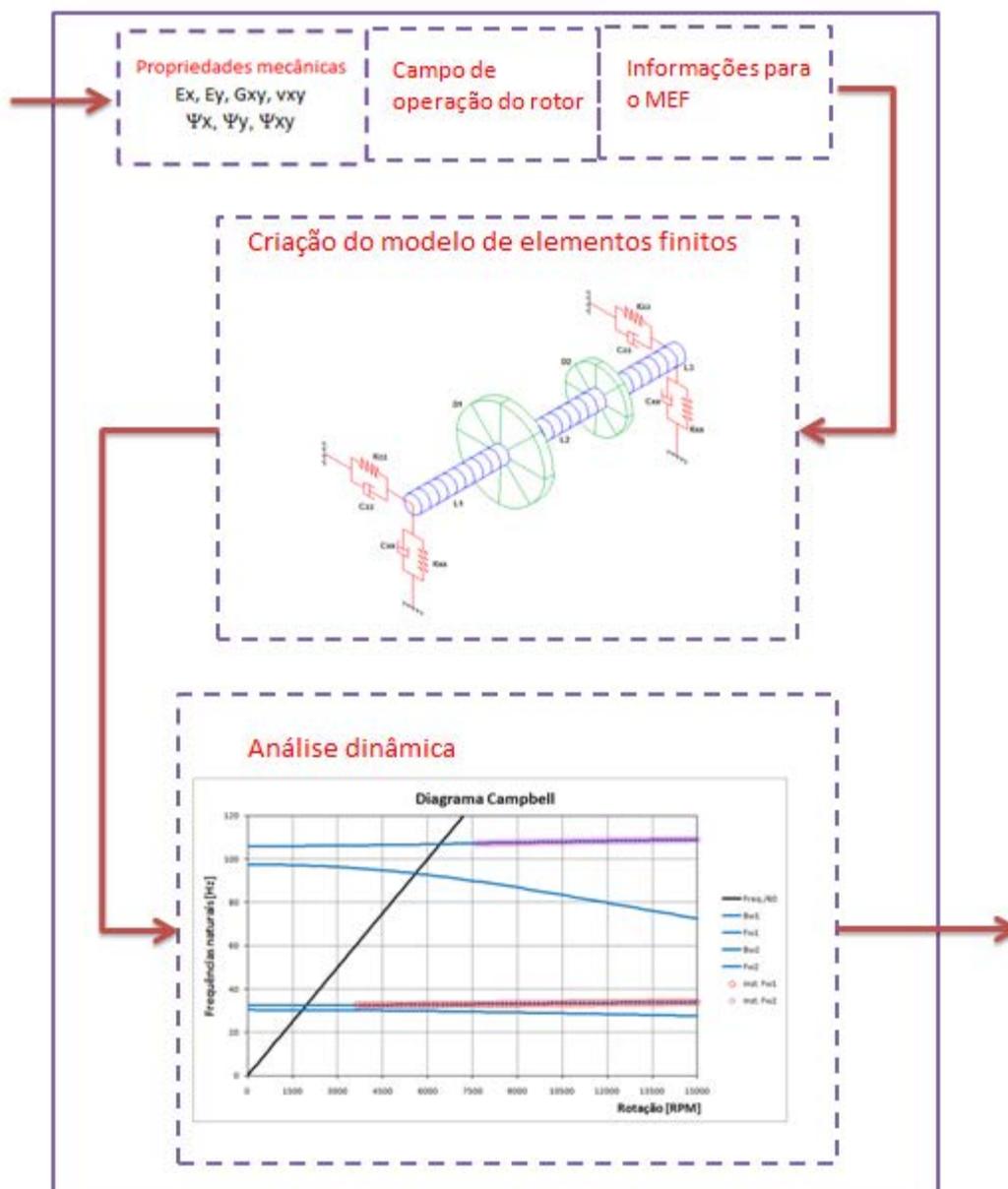


Figura 38 – Fluxograma do módulo de análises 3



4.1.4 Avaliação da aptidão e classificação da população

Nesta etapa é avaliado o quão próximo os resultados de cada cromossomo está da solução desejada. Neste estudo foram consideradas apenas duas restrições, que são: estabilidade acima da velocidade de operação informada e integridade de todas as camadas do laminado pelo critério de Tsai-Wu. Outras restrições poderiam ser avaliadas e implementadas com facilidade, seriam elas: deslocamento máximo e massa mínima.

Após encontrar a aptidão do cromossomo para o limite de instabilidade e para o índice de falha, todos os cromossomos são submetidos a duas normalizações, uma para cada aptidão.

As duas restrições concorrem entre si configurando uma otimização multi-objetivos. Para elevar a velocidade limite para instabilidade a função tende a orientar as camadas a zero grau, aumentando a rigidez e diminuindo o amortecimento interno. Já a função que orienta as camadas a buscar um ângulo que reduza o índice de falha, tende a orientar as camadas para um ângulo de 45° quando o eixo está sobre efeito de torção. Através de simulações foi observado que a função que rege o limite de instabilidade possui um gradiente maior e tende a dominar as soluções, podendo levar a soluções não viáveis onde as camadas não passam pelo critério de falha.

A solução empregada foi atribuir pesos para se chegar ao valor de aptidão resultante das avaliações. Assim o valor da aptidão é alcançado pela seguinte expressão:

$$A_f = A_d \times P_d + A_e \times P_e$$

onde:

A_f – aptidão final

A_d – aptidão dinâmica

A_e – aptidão estrutural

P_d – peso para aptidão dinâmica

P_e – peso para aptidão estrutural

Os valores dos pesos podem variar com relação ao sistema avaliado, os casos simulados neste estudo, foram avaliados com diferentes pesos, a proporção que gerou melhores resultados utilizaram os seguintes valores $P_d=0,4$ e $P_e=0,6$, a soma dos pesos deve ser 1, (VANDERPLAATS, 2008)(HAFTKA; GURDAL, 1991)

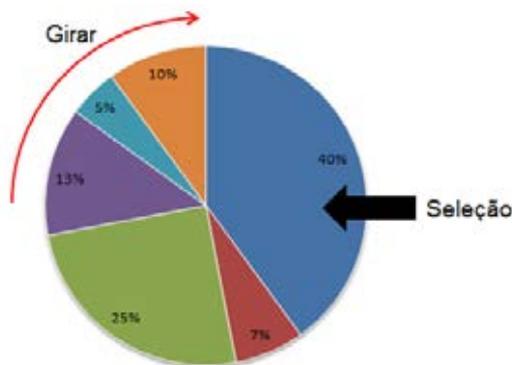
Após executar este procedimento a população passa pela classificação, que é executada colocando todos os cromossomos em ordem sequencial em função do valor da aptidão que varia de 0 a 1.

4.1.5 Seleção dos indivíduos

Para a seleção foi especificado uma porcentagem da população que deve gerar filhos. A seleção é randômica, porém para garantir que os indivíduos mais aptos tenham maior chance

de serem escolhidos é avaliada a probabilidade de cada cromossomo ser sorteado. Este tipo de seleção é conhecido como “roleta”, ao girar a roleta o cromossomo é selecionado. Assim são gerados pares de pais que darão origem a um filho. A Figura 39 ilustra uma roleta com a probabilidade de cada cromossomo.

Figura 39 – Roleta de seleção

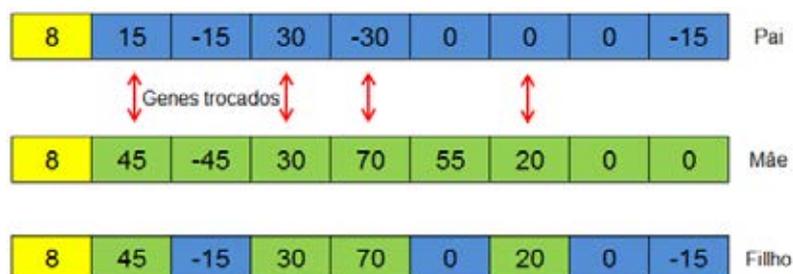


Fonte: Autor

4.1.6 Geração dos filhos e inserção de mutação

Com a seleção dos pais é executado a criação do filho através do processo *crossover*. A criação se efetua como na natureza através da mistura dos cromossomos. Novamente através de um processo randômico são selecionados os genes que serão trocados entre os cromossomos pais, dando origem a um filho. O critério adotado foi da troca de 4 genes, este método possui algumas variâncias.

Figura 40 – Crossover



Fonte: Autor

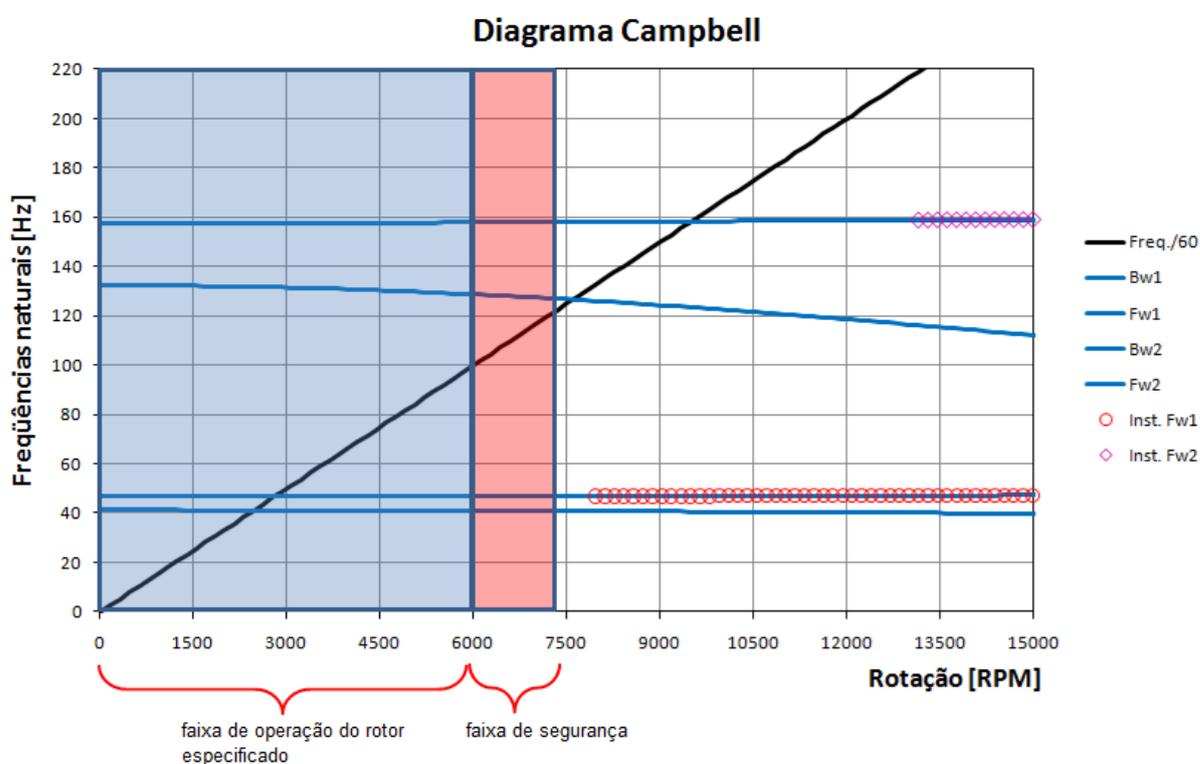
Para a inserção de mutações é selecionado uma porcentagem dos filhos de forma randômica e também de forma randômica o gene que sofrerá mutação. Este processo tem a finalidade de gerar alguma diversidade nos cromossomos.

4.1.7 Convergência

A convergência pode ocorrer de duas formas, a primeira só se encerra após a execução do método por um número determinado de vezes, este número é designado por gerações. A segunda forma é obtida quando um ou mais cromossomos atendem os critérios especificados.

A Figura 41 ilustra um resultado obtido da análise dinâmica de um cromossomo que atende ao critério dinâmico. O resultado desejado deve se assemelhar a esta figura, onde as instabilidades em todas as frequências ocorrem após a faixa de segurança especificada pelo projetista.

Figura 41 – Análise dinâmica do rotor para sequência [90,45,0,0,0,0,45,90]



Fonte: Autor

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção são apresentados os principais resultados desta pesquisa, os quais foram divididos em dois tópicos: análises dinâmicas e otimização multi-objetivo.

O primeiro tópico apresenta diversos resultados de simulações dinâmicas de rotores, obtidos pelo módulo de análise pelo MEF desenvolvido para o AG. Os resultados evidenciam as possibilidades de aplicação e a sensibilidade do algoritmo em analisar e representar os principais parâmetros dinâmicos: frequências naturais, velocidades críticas, FRF e limite de instabilidade. Ressaltando que estes parâmetros são fortemente influenciados pela sequência de laminação considerada.

O segundo tópico apresenta os resultados obtidos para diferentes otimizações, demonstrando diferentes aspectos que interferem na convergência da otimização.

5.1 RESULTADOS DE ANÁLISES DINÂMICAS

Para as análises desta seção foi proposto um modelo de referência, constituído por um eixo laminado com oito laminas empilhadas de fibra de carbono, dois discos geometricamente diferentes em aço e dois mancais idênticos com coeficientes de rigidez diferentes em cada direção de translação. Os mancais não possuem amortecimento, assim é garantido que os efeitos de instabilidade no rotor sejam exclusivamente afetados pelo amortecimento interno do eixo. A única força atuante sobre o rotor é oriunda de um desbalanceamento.

Com exceção de uma análise comparativa entre os modelos de amortecimento viscoelástico e histerético, as demais simulações utilizaram o modelo de amortecimento histerético para os eixos laminados. A aplicação do modelo histerético de amortecimento foi desenvolvida através do modelo equivalente viscoso como de mostrado por Genta (2010).

No item 5.1.1 são apresentados resultados que demonstram a influência do amortecimento interno sobre a dinâmica do rotor. A avaliação destes resultados foi efetuada através da análise dos diagramas de Campbell.

No item 5.1.2 as simulações demonstram a influência geométrica do eixo sobre o limite de instabilidade do rotor. Esta influência foi analisada a partir da variação da relação entre diâmetro e comprimento do eixo. O item 5.1.3 avalia a influência do fator de correção para o cisalhamento, aplicado ao modelo de elementos finitos.

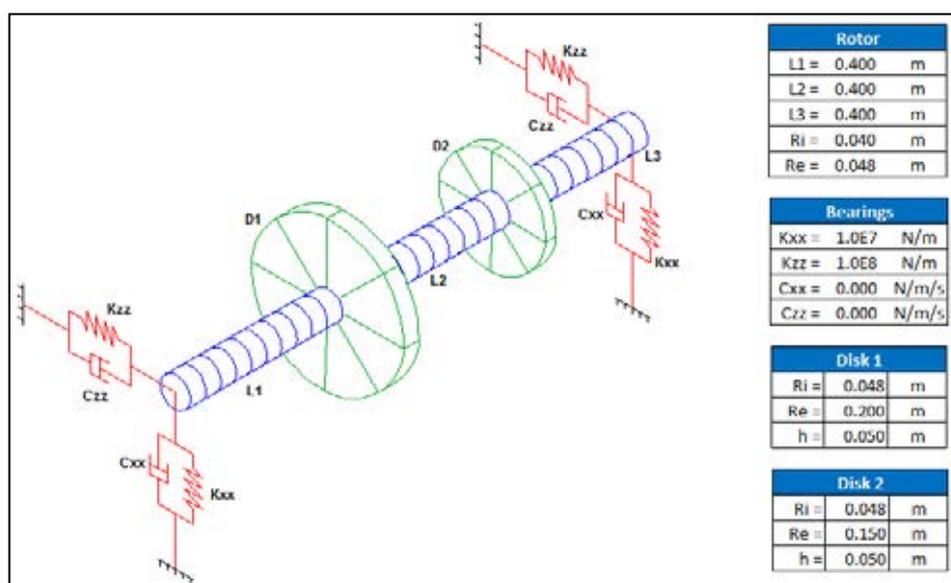
O item 5.1.4 avalia a FRF do rotor para diferentes sequências de laminação. Os resultados desta análise demonstram as possibilidades de manipulação da resposta do rotor através da escolha de uma sequência de laminação. No item 5.1.5 foram desenvolvidas FRFs para o rotor considerando diferentes materiais para o eixo.

No item 5.1.6 é demonstrado um importante resultado referente aos modelos de amortecimento utilizados, ressaltando a importância de uma correta caracterização.

No item 5.1.7 uma análise elaborada demonstra a variação que uma FRF selecionada sofre, quando ocorre a variação da frequência de excitação. Este resultado se diferencia dos anteriores nos quais a excitação é devida ao desbalanceamento.

A Figura 42 ilustra um modelo de elementos finitos do rotor de referência, nesta figura são apresentadas tabelas nas quais os principais parâmetros mecânicos deste modelo, necessários para a análise estão presentes.

Figura 42 – Rotor de referência para análise



Fonte: Autor

5.1.1 Influência do amortecimento interno do eixo

Para esta avaliação foram desenvolvidas algumas configurações de laminado, a escolha destas sequências de laminação teve como objetivo avaliar as configurações *off-axis*, *angle-ply* e outras, que avaliassem a concentração de fibras numa determinada direção. As sequências foram representadas na terceira coluna à partir da esquerda da Tabela 7. As propriedades equivalentes foram estimadas com a metodologia já apresentada e inseridas na

mesma tabela. Os diagramas de Campbell desenvolvidos utilizaram o modelo de referência com amortecimento equivalente viscoso, pelos motivos já mencionados.

A partir da Figura 43 até a Figura 50 foram ilustrados alguns dos resultados obtidos, os demais resultados foram apresentados no APÊNDICE E.

Tabela 7 – Sequências de laminação para análise

Tipo	Caso	Sequência de laminação	HMS carbon Epoxy (DX-210)						
			Ex (GPa)	Ey (GPa)	Gxy (GPa)	Ψ_x (%)	Ψ_y (%)	Ψ_{xy} (%)	Ψ_t (%)
off-axis	A	[0 ₈]	172.7	7.2	3.8	0.450	0.000	0.000	0.450
	B	[15 ₈]	45.3	7.3	4.2	0.112	0.207	4.947	5.266
	C	[30 ₈]	16.4	7.8	5.6	0.054	0.885	4.719	5.658
	D	[45 ₈]	9.8	9.8	6.7	0.039	1.745	3.525	5.309
	E	[60 ₈]	7.8	16.4	5.6	0.016	2.719	2.260	4.994
	F	[75 ₈]	7.3	45.3	4.2	0.002	3.729	0.795	4.526
	G	[90 ₈]	7.2	172.7	3.8	0.000	4.220	0.000	4.220
angle-ply	H	[±15] _{2s}	134.0	7.3	13.8	0.392	0.019	0.881	1.292
	I	[±30] _{2s}	45.0	8.2	34.0	0.253	0.264	2.644	3.161
	J	[±45] _{2s}	13.9	13.9	44.1	0.112	1.055	3.525	4.693
	L	[±60] _{2s}	8.2	45.0	34.0	0.028	2.374	2.644	5.046
	M	[±75] _{2s}	7.3	134.0	13.8	0.002	3.674	0.881	4.557
outros	N	[45,0,45,0,90,0,90,0]	92.8	51.4	11.3	0.420	0.169	0.183	0.773
	O	[90,45,0 ₂] _s	92.8	51.4	11.3	0.421	0.166	0.170	0.757
	P	[90,0,90,45,90,45,0,90]	51.4	92.8	11.3	0.382	0.454	0.309	1.145
	Q	[90 ₂ ,45,0] _s	51.4	92.8	11.3	0.382	0.454	0.314	1.149

Figura 43 – Diagrama de Campbell para a sequência [0₈]

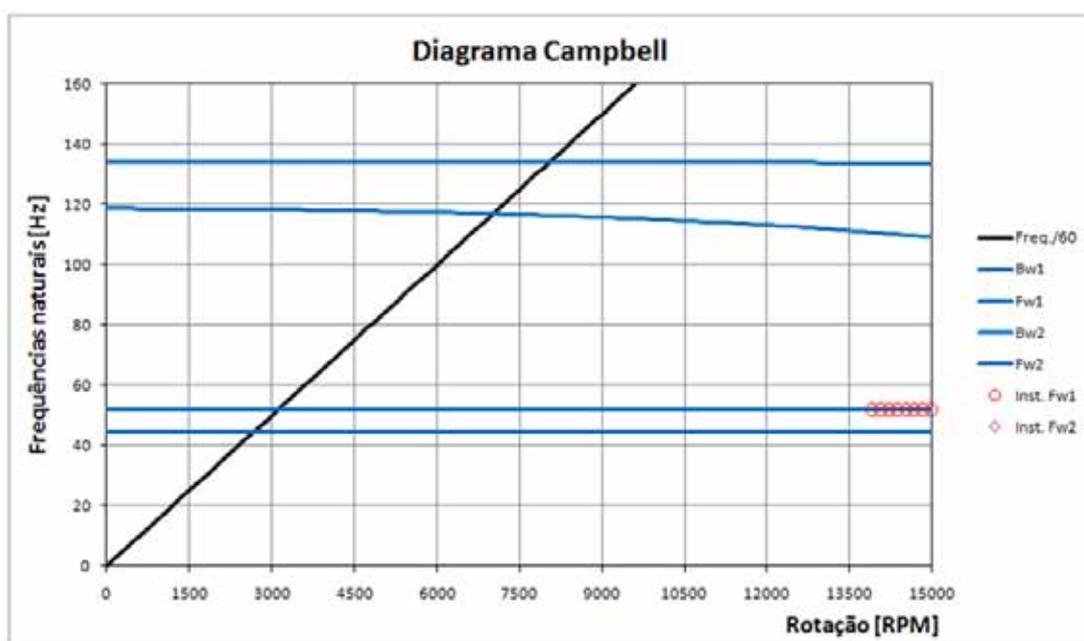


Figura 44 – Diagrama de Campbell para a sequência [15s]

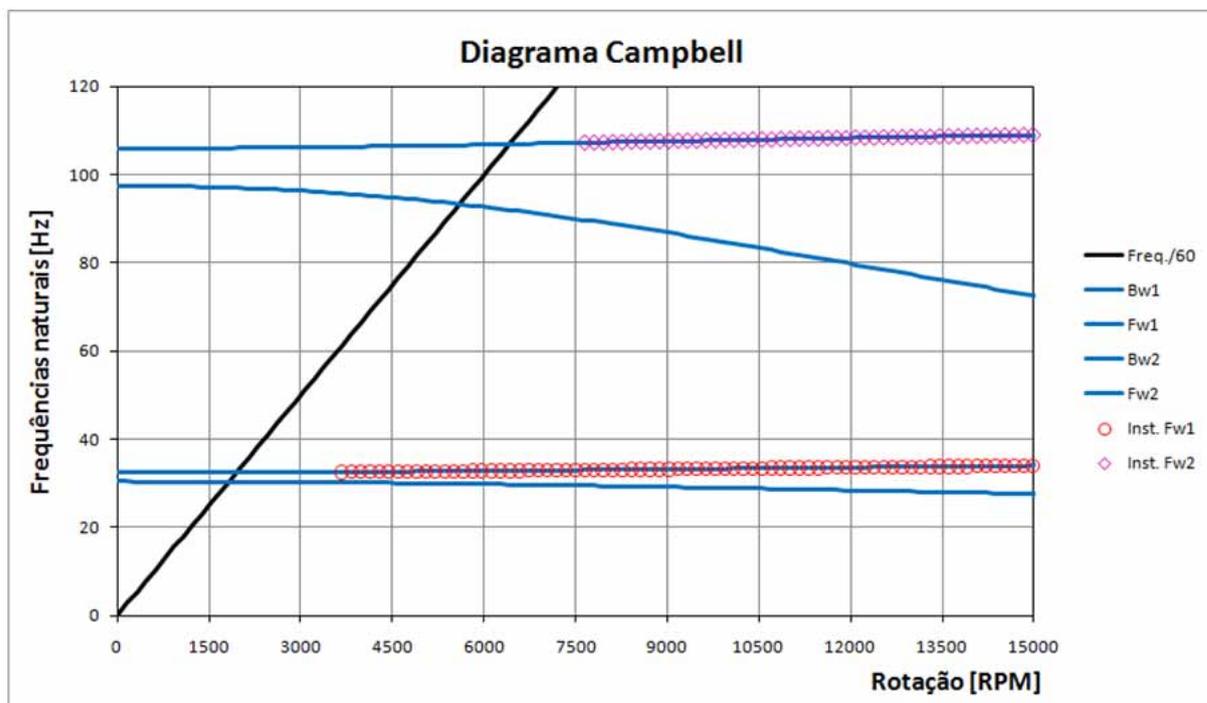


Figura 45 – Diagrama de Campbell para a sequência [30s]

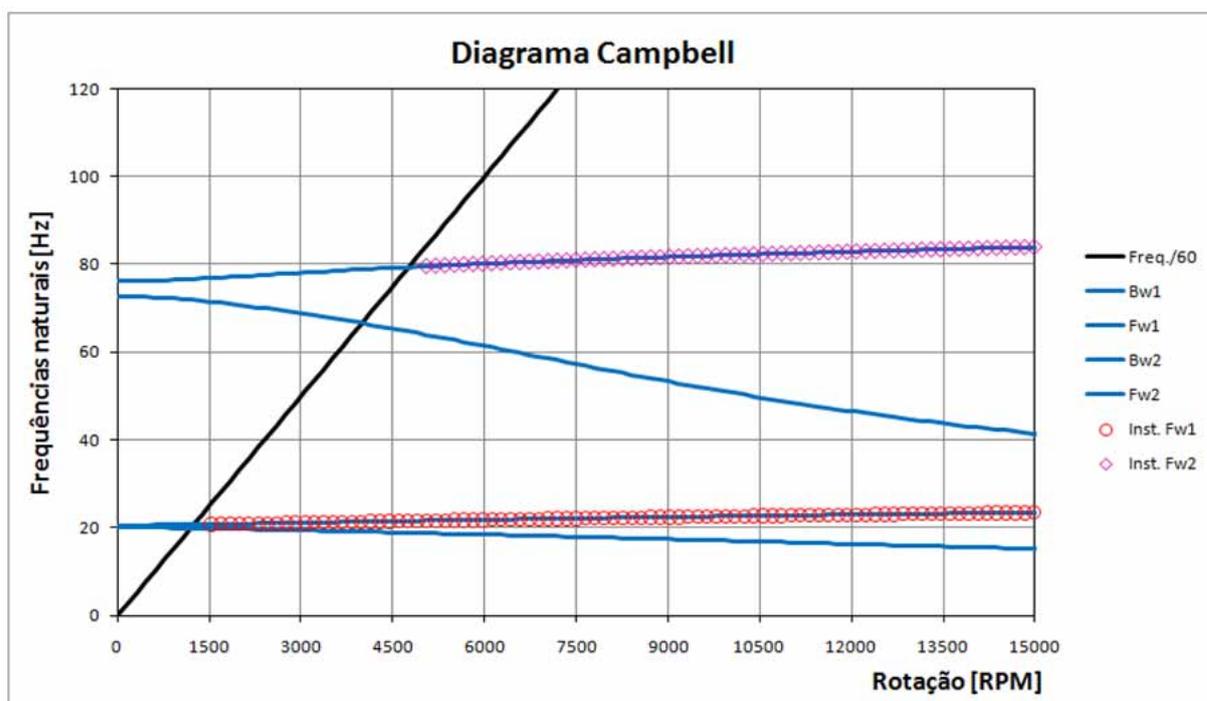


Figura 46 – Diagrama de Campbell para a sequência [45,0,45,0,90,0,90,0]

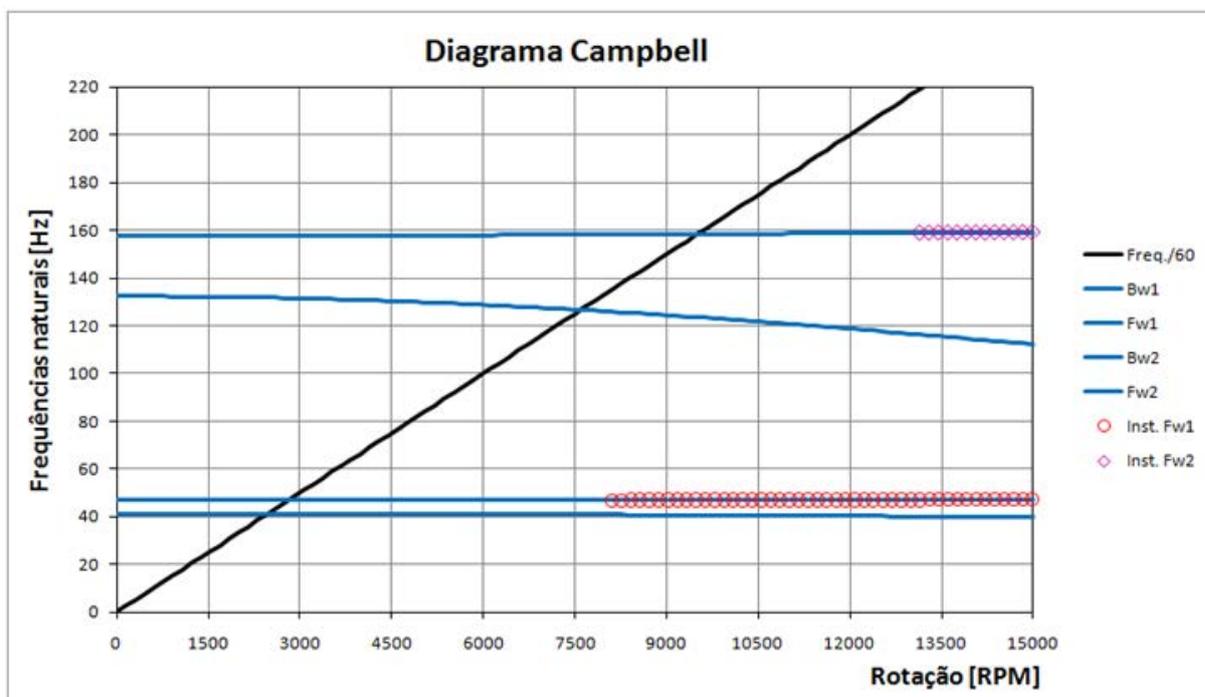


Figura 47 – Diagrama de Campbell para a sequência [90,45,0₂]_s

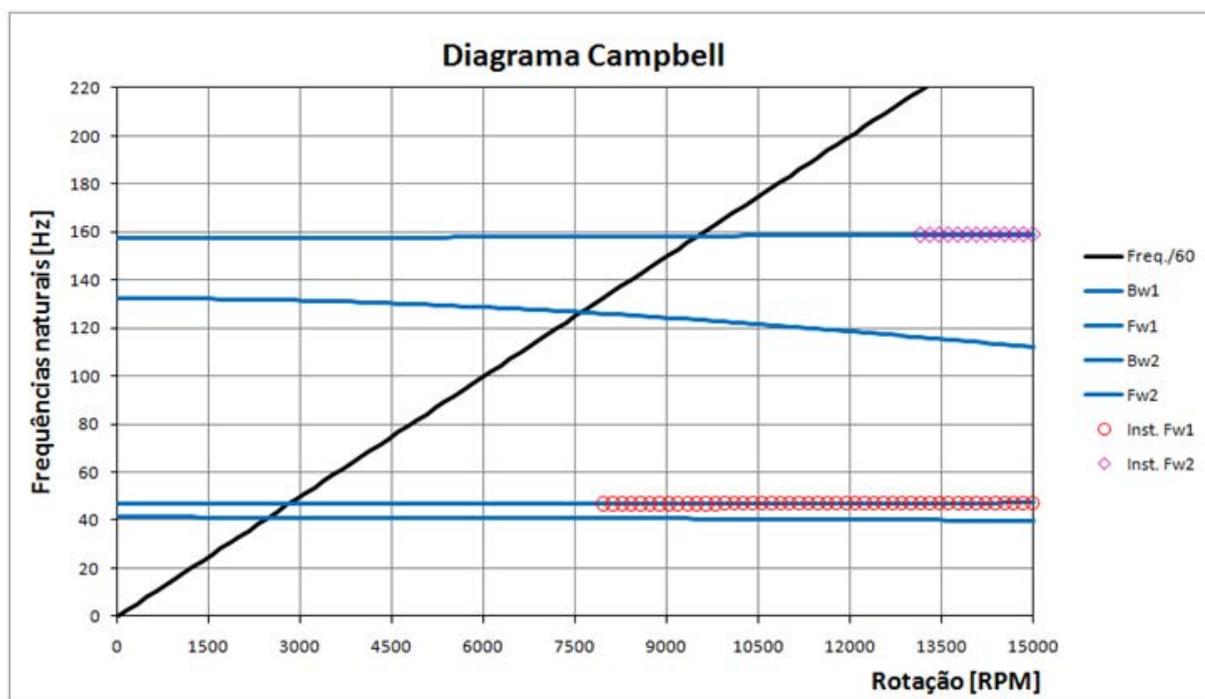
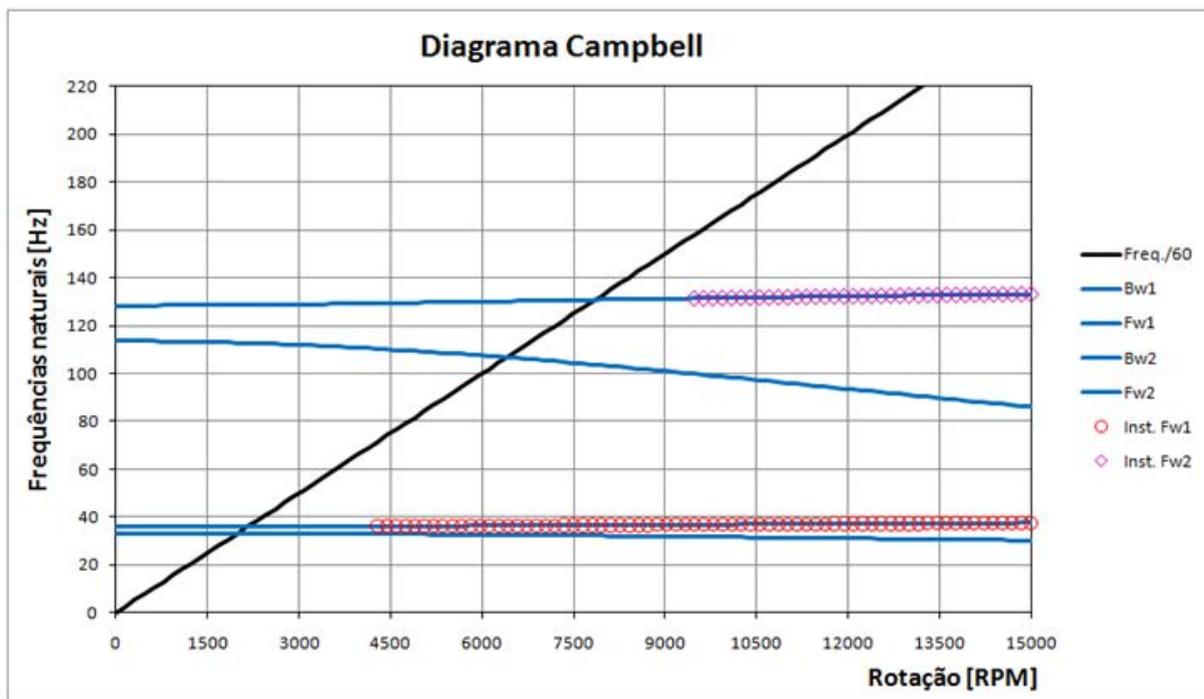
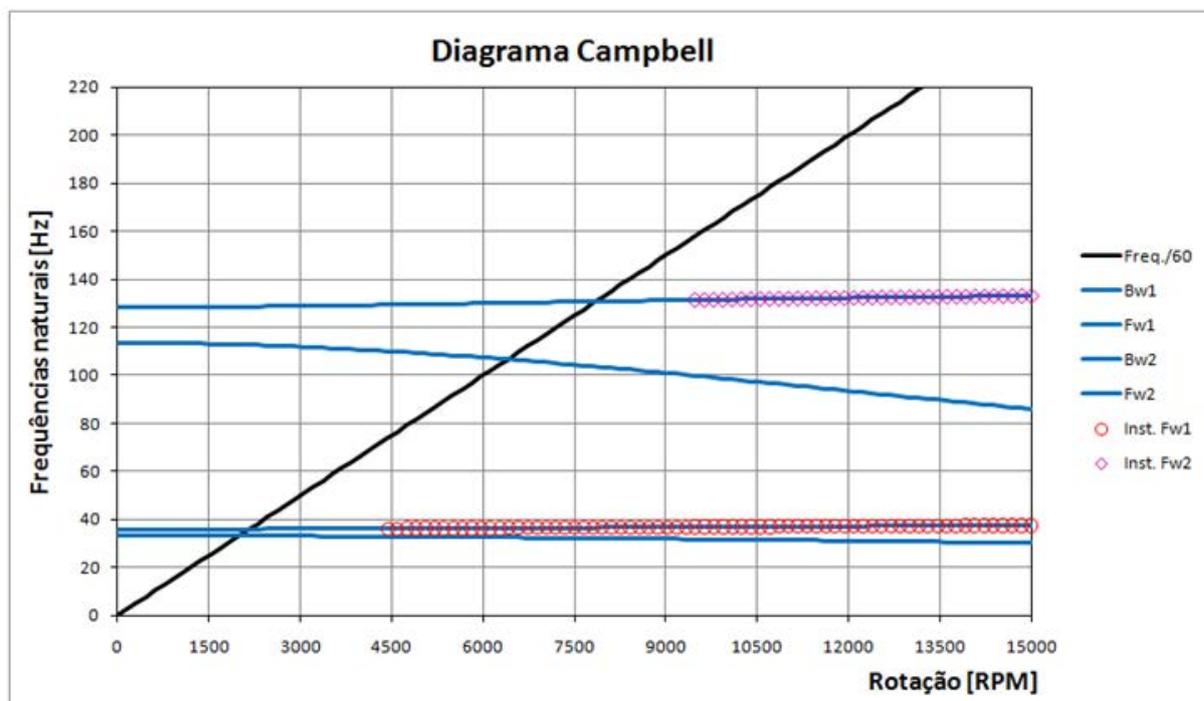


Figura 48 – Diagrama de Campbell para a sequência [90,0,90,45,90,45,0,90]

Figura 49 – Diagrama de Campbell para a sequência [90,2,45,0]_s

Os resultados obtidos a partir das análises dinâmicas, referentes à primeira velocidade crítica (V_{c1}), segunda velocidade crítica (V_{c2}), limite de instabilidade para a primeira

frequência natural (Inst. Fw1) e para a segunda frequência natural (Inst. Fw2), foram agrupados na Tabela 8.

Tabela 8 – Frequências críticas e limite de instabilidade

HMS carbon Epoxy (DX-210)						
Tipo	Caso	Sequência de laminação	Inst. Fw1 (rpm)	Inst. Fw2 (rpm)	Vc1 (rpm)	Vc2 (rpm)
off-axis	A	[0 _s]	13913	> 15000	3065	7955
	B	[15 _s]	3676	7649	1996	6427
	C	[30 _s]	1537	5052	1232	4746
	D	[45 _s]	1079	3982	926	3829
	E	[60 _s]	1079	3676	926	3524
	F	[75 _s]	926	3371	926	3371
	G	[90 _s]	926	3371	926	3371
angle-ply	H	[±15] _{2s}	12538	> 15000	3218	11010
	I	[±30] _{2s}	3676	9635	1996	8107
	J	[±45] _{2s}	1385	5052	1232	4822
	L	[±60] _{2s}	1079	3829	926	3676
	M	[±75] _{2s}	926	3524	926	3524
outros	N	[45,0,45,0,90,0,90,0]	8170	13149	2760	9482
	O	[90,45,0] _{2s}	7955	13149	2760	9482
	P	[90,0,90,45,90,45,0,90]	4288	9482	2149	7802
	Q	[90 ₂ ,45,0] _s	4440	9482	2149	7802

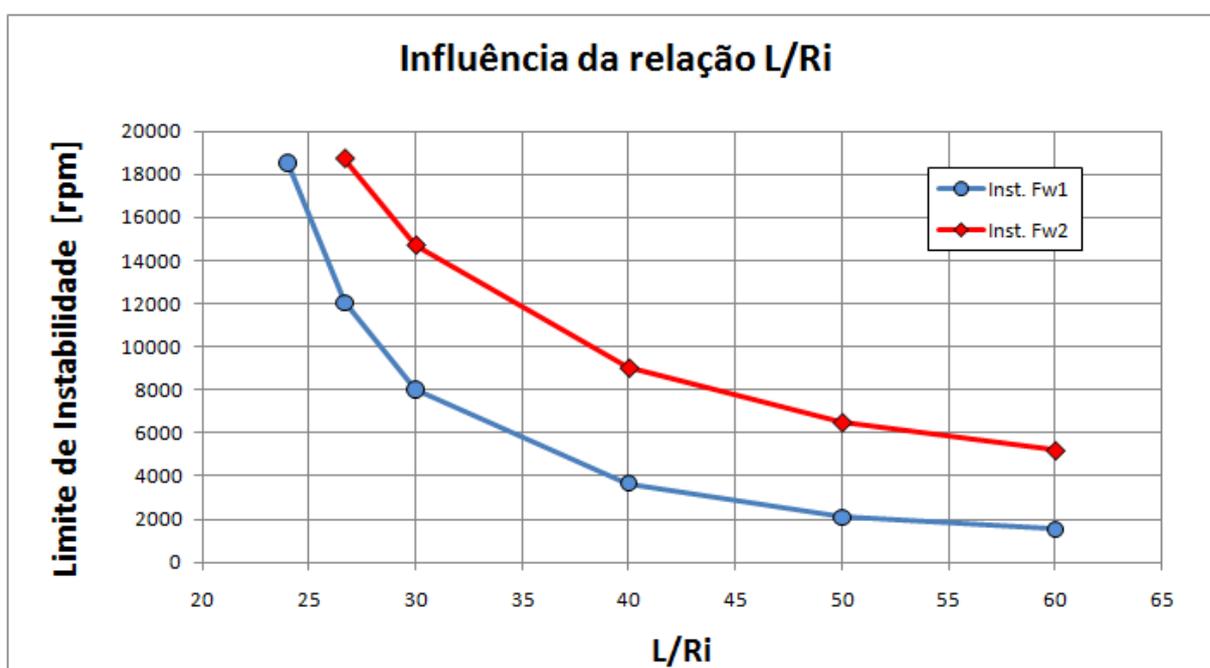
Observando os diagramas de Campbell e os resultados apresentados na Tabela 8, observa-se a grande variedade de resultados possíveis. A primeira velocidade crítica pode ocorrer com uma baixa rotação (946 rpm) como no caso “D” ou com uma velocidade muito maior (3218 rpm) como no caso “H”. Este resultado é importante ao demonstrar, que com a mesma quantidade de lâminas é possível antecipar ou retardar as velocidades críticas e os limites de instabilidade de um rotor. O que permite através de um processo de análise optar por uma sequência de laminação que melhor atenda as velocidades de operação do rotor.

5.1.2 Avaliação da influência geométrica

Para esta avaliação foram propostas algumas simulações baseadas no modelo “O”, o qual foi selecionado aleatoriamente dentre os casos apresentados no item anterior. As análises efetuadas variaram um único parâmetro, o raio interno do tubo. Assim conservando a mesma laminação para todos os modelos.

Com esta variação foi possível avaliar a influência da relação L/R_i na instabilidade deste rotor. Onde L é o comprimento do tubo e R_i o seu raio interno. A Figura 50 ilustra a influência desta relação para o modelo selecionado. O gráfico ilustrado apresenta a variação dos limites de instabilidade dos rotores para a primeira (Fw1) e segunda (Fw2) frequência natural.

Figura 50 – Gráfico da variação do limite de instabilidade



A principal conclusão obtida nesta análise foi verificar, que quanto menor é a relação L/R_i mais estável é o rotor. Por exemplo, com a relação $L/R_i = \sim 25$ observa-se o limite de instabilidade próximo a 18000 (rpm). Este tipo de análise pode ser útil para se determinar a distância máxima entre mancais, com o objetivo de evitar a instabilidade do rotor.

5.1.3 Influência do fator de correção para o cisalhamento

Outro importante parâmetro analisado foi o fator “k” aplicado para correção do módulo de cisalhamento. Para isso foram executadas algumas simulações com laminados do tipo *angle-ply* para avaliar a influência deste parâmetro sobre as frequências naturais e instabilidades calculadas. O modelo de rotor utilizado foi o mesmo utilizado no item anterior. As frequências expressas na Tabela 9 foram obtidas para uma velocidade de rotação aleatória selecionada igual a 5357 [RPM].

A Tabela 9 apresenta a diferença percentual encontrada entre as frequências obtidas, utilizando o cálculo com e sem o fator de correção do módulo de cisalhamento. As maiores diferenças ocorreram nos modelos com menor amortecimento. Na tabela Fw1 e Fw2 não utilizaram o fator de correção, Fw1c e Fw2c utilizaram. O índice 1 e 2 indicam a primeira e a segunda frequência natural respectivamente. O índice “w” indica que a frequência analisada é *forward*.

Tabela 9 – Influência do fator de correção nas velocidades naturais

Tipo	Seqüência de laminação	HMS carbon Epoxy (DX-210)					
		Fw1 (Hz)	Fw1c (Hz)	dif. (%)	Fw2 (Hz)	Fw2c (Hz)	dif. (%)
angle-ply	[0 _s]	57.9	52.0	-10.2	168.2	134.2	-20.2
	[±15] _{2s}	57.0	55.3	-3.0	201.1	182.3	-9.3
	[±30] _{2s}	35.0	34.8	-0.5	135.4	132.8	-1.9
	[±45] _{2s}	20.6	20.6	-0.1	81.1	80.6	-0.6
	[±60] _{2s}	16.3	16.2	-0.1	63.8	63.5	-0.5
	[±75] _{2s}	15.4	15.4	-0.3	60.1	59.5	-1.0
	[90 _s]	15.2	15.1	-0.9	58.2	56.3	-3.4

A Tabela 10 apresenta a mesma tendência demonstrada nas frequências naturais, na qual apenas é observado diferenças significativas no limite de estabilidade nos modelos com baixo amortecimento. Nesta tabela (Inst. Fw1) refere-se ao limite de instabilidade observado para a primeira frequência natural, (Inst. Fw2) é o limite de instabilidade obtido para a segunda frequência natural.

O valor do coeficiente “k” que deve ser aplicado ao modelo de elementos finitos necessita de uma avaliação experimental de alguns rotores, principalmente se o eixo dimensionado para uma determinada aplicação possui baixo amortecimento interno.

Tabela 10 – Influência do fator de correção no limite de estabilidade

HMS carbon Epoxy (DX-210)				
Tipo	Seqüência de laminação	Inst. Fw1 (rpm)	Inst. Fw1c (rpm)	dif. (%)
angle-ply	[0 ₈]	57.9	52.0	-10.2
	[±15] _{2s}	57.0	55.3	-3.0
	[±30] _{2s}	35.0	34.8	-0.5
	[±45] _{2s}	20.6	20.6	-0.1
	[±60] _{2s}	16.3	16.2	-0.1
	[±75] _{2s}	15.4	15.4	-0.3
	[90 ₈]	15.2	15.1	-0.9

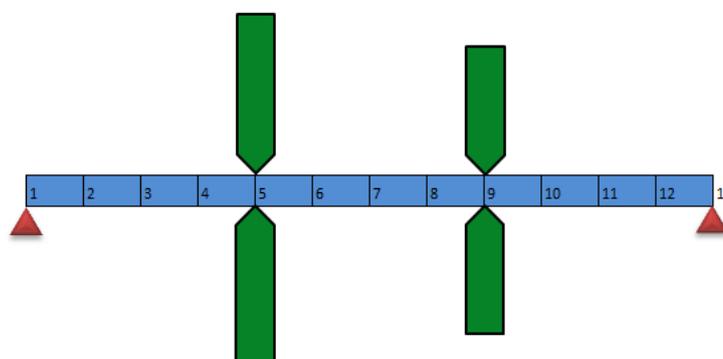
5.1.4 Influência da seqüência de laminação na FRF

Neste item são apresentados os resultados que demonstram os efeitos da seqüência de laminação do eixo sobre as FRFs do rotor. Assim foram realizadas algumas simulações considerando o modelo apresentado no item 5.1.1. Para cada simulação foi estabelecido o nó e direção de entrada e saída da FRF, também foi estabelecido uma velocidade de rotação que se encontra o rotor.

A Figura 51 ilustra o MEF utilizado para esta análise, os números indicados sobre o rotor correspondem aos números de identificação dos nós do modelo. Desta forma o disco D1 está localizado sobre o nó 5 e o disco D2 sobre o nó 9.

O modelo foi criado através de doze elementos CBEAM, dois elementos BEARING e dois elementos DISK.

Figura 51 – MEF do rotor



Observando a laminação indicada na legenda da Figura 52 e Figura 53 é possível analisar dentre os resultados anteriormente apresentados, qual foi o amortecimento e módulos de elasticidade utilizados nas simulações.

Figura 52 – FRFs entre os pontos (5x, 9x)

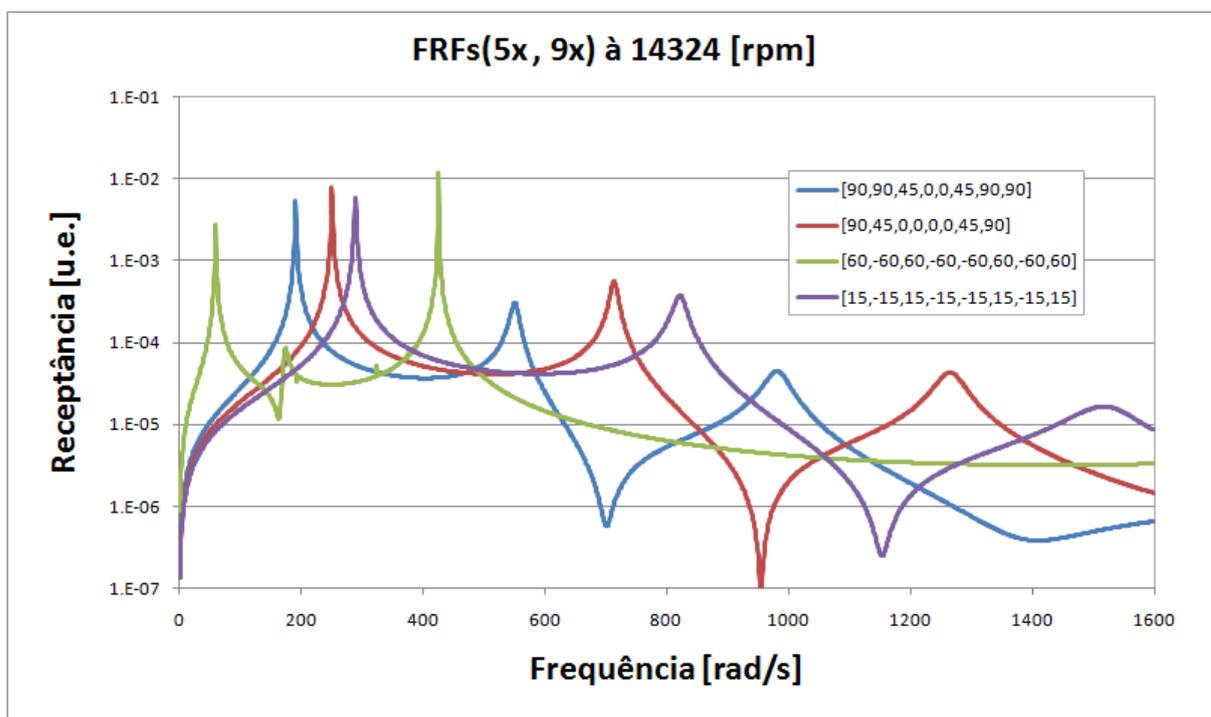
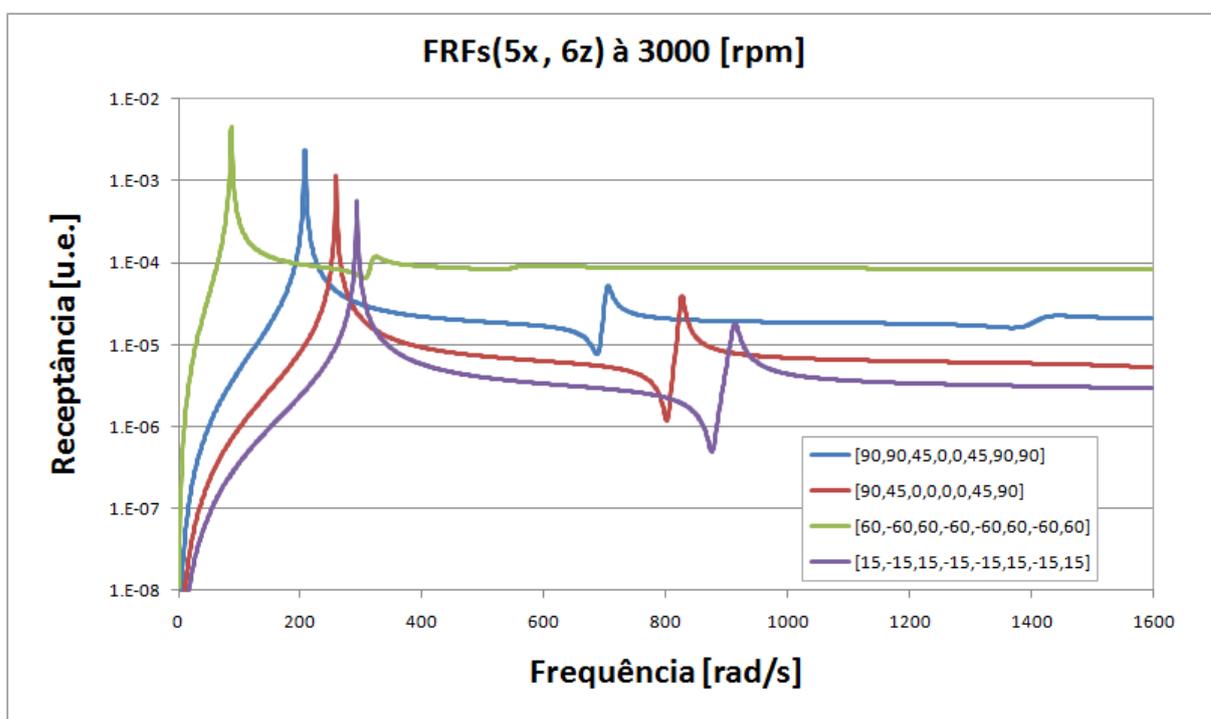


Figura 53 – FRFs entre os pontos (5x, 6z)



Ao avaliar os resultados apresentados nestes dois gráficos destaca-se, que a sequência $[\pm 15]_{2s}$ possui a maior rigidez transversal entre as quatro laminações simuladas como apresentado na Tabela 7 e por este motivo tem a primeira frequência natural mais elevada em comparação as outras configurações, aproximadamente 310 (rad/s).

Outra constatação é referente a laminação $[\pm 60]_{2s}$, esta possui o maior amortecimento dentre as laminações analisadas, a FRF desta laminação possui um grande amortecimento observado pela baixa amplitude da segunda ressonância e pela inexistência de outras ressonâncias após a terceira.

5.1.5 Influência do material do eixo sobre rotor

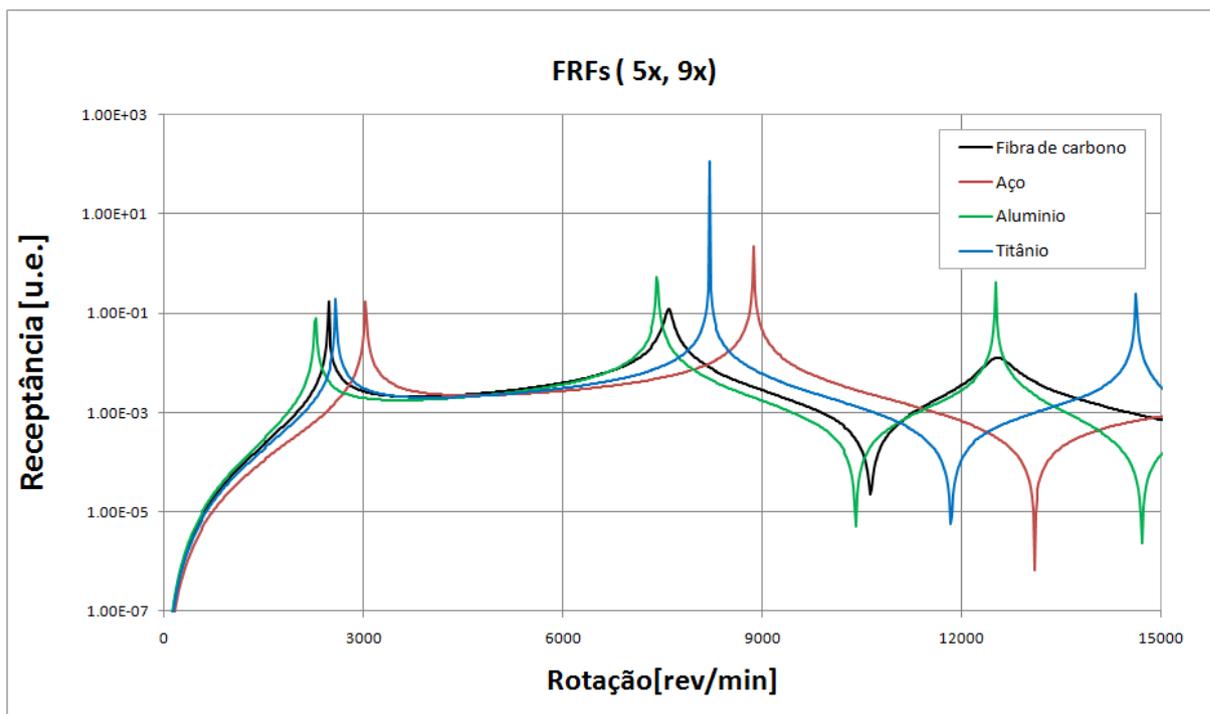
Foram simulados quatro rotores, cuja única diferença foi o material que constitui os eixos. Utilizando o modelo do rotor ilustrado na Figura 51, foram avaliadas as FRFs entre os pontos 5 e 9. Os materiais simulados foram: titânio, alumínio, aço e compósito de fibra de carbono, as propriedades estão na Tabela 11. Para estas simulações foi considerado que a excitação é idêntica a velocidade de giro do rotor. A Figura 54 ilustra as FRFs calculadas para os rotores com eixos em diferentes materiais.

Tabela 11 – Materiais utilizados no eixo para as simulações

Material	E1 (GPa)	G12 (GPa)	Ψ_t (%)	ρ (kg/m ³)
Titânio	107	39.9	---	4507
Aço	210	80.8	---	7800
Alumínio	71	26.5	---	2700
HMS Carbon Epoxy (DX-210) $[90,45,0]_s$	92.8	11.3	0.757	1446

Além da variação das frequências naturais, resultante da aplicação de diferentes materiais, foi possível observar a variação da amplitude das receptâncias, como era de se esperar, o rotor com eixos de compósito de fibra de carbono, obteve as menores amplitudes, consequência do maior amortecimento associado ao material. Ressalta-se a diferença em mais de cinco vezes entre a densidade do aço, o material mais aplicado em rotores, e o compósito de fibra de carbono.

Figura 54 – FRF entre os pontos 5 e 9 no desbalanceamento



5.1.6 Avaliação dos diagramas Campbell com diferentes amortecimentos

Foram realizadas simulações com o rotor de referência, utilizando para o eixo o modelo de amortecimento histerético e amortecimento viscoelástico. Para comparar os resultados foi utilizada uma excitação harmônica. Se a avaliação fosse realizada com desbalanceamento no modelo com amortecimento viscoelástico não se observaria a não linearidade deste tipo de amortecimento.

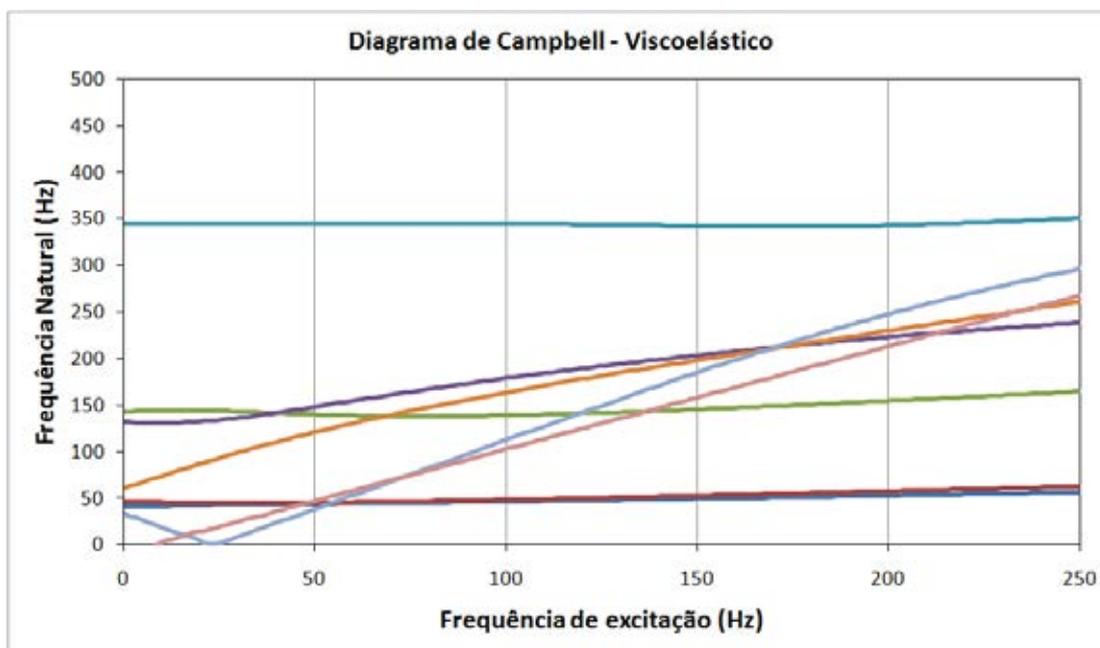
A citação a seguir explica este caso.

Amortecimento viscoso rotativo não entra na equação do movimento do rotor: Desbalanceamentos produzem excitações síncronas diretas, assim uma excitação que gira no plano perpendicular ao plano longitudinal do eixo na mesma rotação Ω igual a do rotor, deflete o rotor, porém não causa deformações que variem com o tempo (GENTA, 2010, p. 62, tradução nossa)

Assim a proposta desta simulação foi verificar o efeito da não linearidade provocada pelo amortecimento viscoelástico. Para a simulação foi adotado que o rotor girava a uma velocidade constante de 500 (rpm). Os diagramas de Campbell ilustrados na Figura 55 e Figura 56 ilustram bem a diferença entre os modelos. O amortecimento viscoelástico torna o

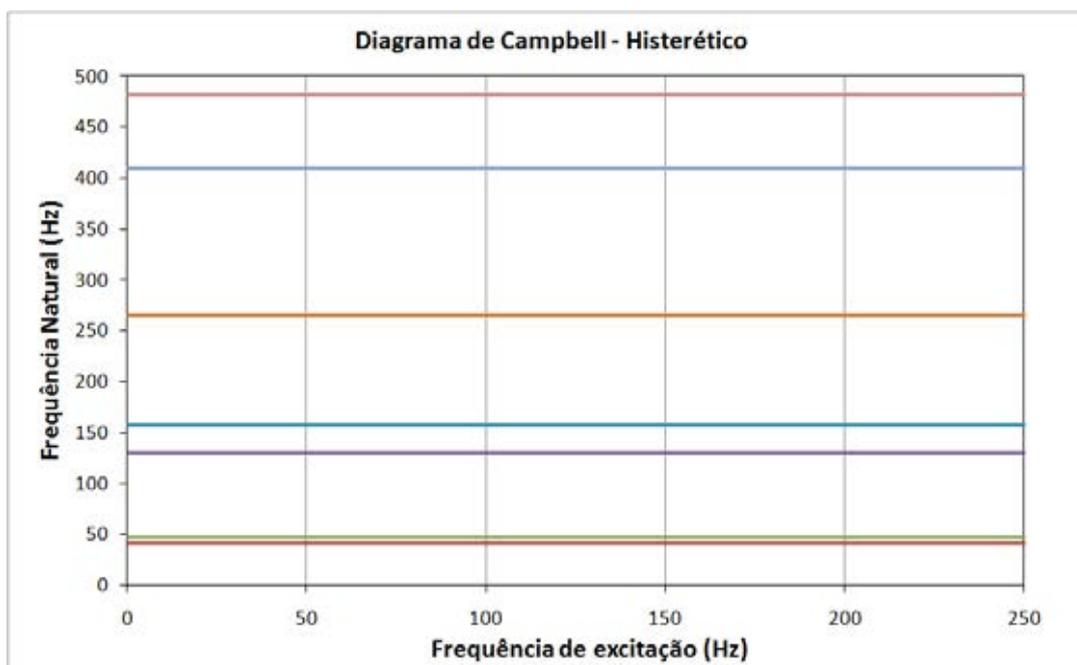
sistema não linear, devido à dependência existente com relação à frequência de excitação. Cada linha representada no diagrama de Campbell ilustra uma frequência natural.

Figura 55 – Diagrama de Campbell para rotor com amortecimento viscoelástico



Observando os resultados do modelo com amortecimento histerético é evidente que o mesmo não sofre influência da frequência de excitação, este fato é evidenciado pela linearidade das curvas de frequências naturais.

Figura 56 – Diagrama de Campbell para rotor com amortecimento histerético



Para o desenvolvimento do algoritmo genético foi necessário um módulo de análise que identifique através da dinâmica do rotor, quando a instabilidade ocorre. A avaliação do tipo de amortecimento a ser considerado é um fator importante. Alguns pontos foram avaliados para a escolha:

A não linearidade tornar mais complexa a tarefa de identificar de forma automática as frequências críticas e limites de instabilidade;

A falta de resultados experimentais que caracterizem adequadamente o tipo de amortecimento existente nos eixos em compósito;

Trabalhos desenvolvidos por Genta (2010) e Montagnier e Hochard (2014), onde propuseram o uso do amortecimento histerético através da aplicação do amortecimento viscoso equivalente.

Baseado nestes resultados optou-se em desenvolver para o AG que foi apresentado no capítulo 4 um modelo de elementos finitos para análises dinâmicas, no qual foi utilizado o modelo histerético de amortecimento.

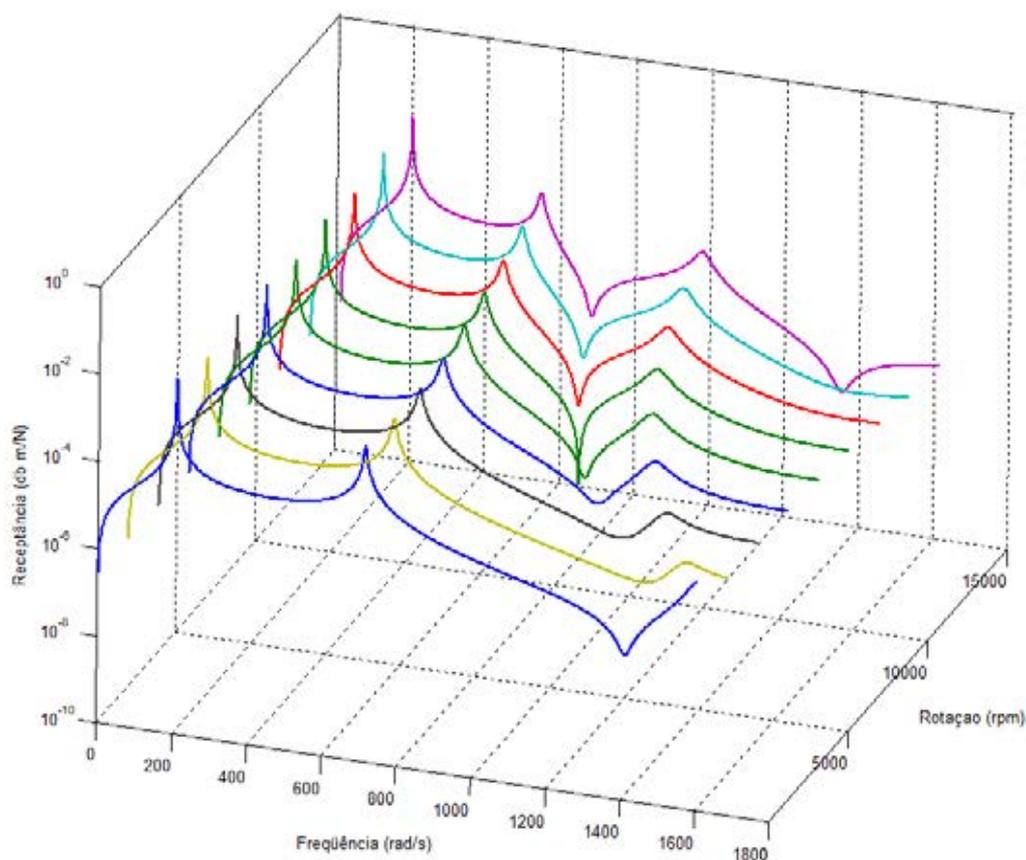
5.1.7 FRF para diferentes velocidades de rotação

O algoritmo desenvolvido permite avaliar rotores sobre excitações harmônicas. Para estes casos é necessário utilizar uma metodologia mais complexa para se obter os gráficos de Campbell, como demonstrado na seção 2.4.2.3 , pois existe a dependência do sistema em função da frequência de excitação e da rotação simultaneamente.

Os resultados ilustrados foram obtidos para um modelo no qual foi considerado uma formulação para modelos viscoelásticos, porém com uma intensidade do valor do amortecimento interno reduzida, pois com níveis maiores de amortecimento o sistema torna-se muito não linear, dificultando a visualização da variação da FRF através das frequências no diagrama 3D de Campbell.

A Figura 57 ilustra as FRFs obtidas para um modelo de rotor simulado. A velocidade de rotação do rotor avaliada compreende o intervalo entre 0 e 15000 (rpm). A frequência de excitação compreende a faixa de frequência entre 0 e a 1800 (rad/s). Nesta figura é possível visualizar nove FRFs. Enquanto que para rotações mais baixas é possível visualizar duas ressonâncias e para as rotações mais altas verificam-se três.

Figura 57 – FRFs para excitação harmônica



O principal ponto a se observar nesta análise é sobre a importância da utilização de um correto modelo de amortecimento interno para os eixos em compósito, pois nesta simulação com amortecimento viscoso foram obtidas diferentes FRFs para cada rotação do rotor, o mesmo não ocorreria com o amortecimento histerético. Com o modelo histerético, todas as FRFs seriam iguais, visto que neste modelo o material não sofre influência da frequência de excitação.

5.2 RESULTADOS PARA OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVOS

Diversas otimizações foram realizadas com o intuito de comprovar a eficiência do método em encontrar uma sequência de laminação que atenda as restrições especificadas, ou seja, um ponto ótimo.

Algumas simplificações foram estabelecidas para que o tempo de análise não fosse longo, as quais foram:

- Utilizar um mesmo modelo de referência para todas as análises;
- Quantidade fixa de camadas;
- Material único;
- Espessura e volume de fibras constantes;
- Temperatura constante;
- Amortecimento viscoso equivalente;
- Um único esforço por direção;
- Convergência após N gerações.

A principal justificativa para fixar a quantidade de camadas, foi para melhor observar a dominância entre as funções, pois com a possibilidade de diferente numero de camadas por cromossomo implicaria numa terceira restrição referente a peso mínimo. Com este recurso se tornou mais fácil a avaliação de dominância entre as funções

A Tabela 12 a seguir ilustra os dados do material utilizado para as análises.

Tabela 12 – Propriedades da fibra de carbono utilizada

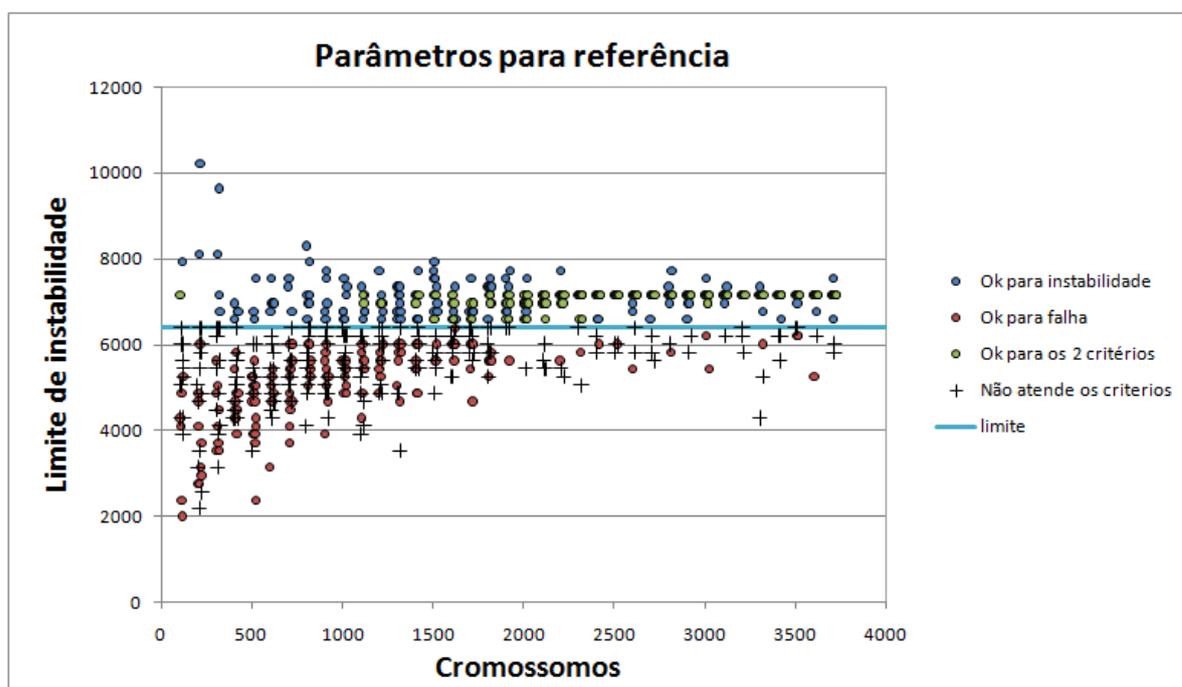
Propriedade	Valor	unidade
E1	125.5	(GPa)
E2	9.5	(GPa)
G12	4.7	(GPa)
v12	0.32	---
Ψ 1	0.74	(%)
Ψ 2	7.3	(%)
Ψ 12	6.6	(%)
F1t	1815	(MPa)
F1c	1241	(MPa)
F2t	31	(MPa)
F2c	167	(MPa)
F12	107	(MPa)
F13	97	(MPa)
t	0.001	(m)

5.2.1 Resultados para otimização de referência

O resultado apresentado na Figura 58, foi obtido pela otimização de um modelo de referência idêntico ao apresentado na Figura 42. O modelo de referencia esta submetido a um esforço de torção. Este resultado foi a referência de otimização, a partir da qual foram derivadas outras otimizações, com a alteração de algum parâmetro de análise. As alterações efetuadas tiveram como objetivo demonstrar a influência destes parâmetros na otimização.

A legenda da figura indica através das cores grupos de cromossomos, que possuem uma mesma característica. A partir do topo da legenda, o primeiro item representa o grupo de cromossomos que atendem a restrição de instabilidade, mas não atendem ao critério de falha. O segundo grupo de cromossomos atende o requisito de falha, mas não o de instabilidade. O terceiro grupo de resultados atende os dois critérios estabelecidos, sendo consideradas soluções ótimas para o problema. O quarto grupo de cromossomos não atende os dois critérios simultaneamente. A linha horizontal indicada na legenda delimita o limite de instabilidade do problema. Para atender a esta restrição o ponto que representa o cromossomo deverá estar acima deste limite.

Figura 58 – Resultados de otimização para o modelo de referência



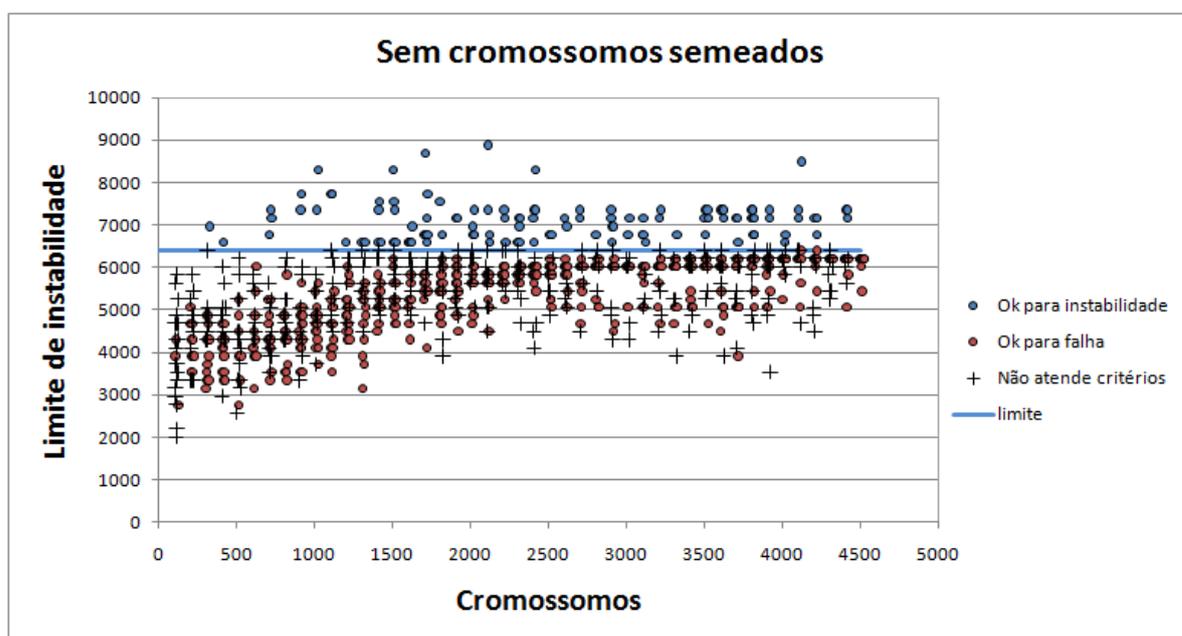
A evolução deste gráfico demonstra que inicialmente havia diversos cromossomos aptos em uma ou outra restrição e praticamente não existia uma solução ótima. Com o passar das gerações os cromossomos que atendiam os dois critérios surgiram com a respectiva redução

de indivíduos com aptidão em apenas uma restrição. Também ocorreu a redução de cromossomos que não possuíam aptidão para ambas as restrições. Este processo demonstra a perpetuação dos cromossomos mais aptos.

5.2.2 Resultados para controle de diversidade

Um artifício que pode ser utilizado em otimizações de laminados é semear na população inicial, cromossomos notadamente aptos, principalmente por serem simétricos e/ou balanceados. Exemplos destas configurações são os tipos *off-axis* e *angle-ply*. O resultado da otimização ilustrado na Figura 59, foram obtidos para os mesmos parâmetros da otimização de referência com uma única mudança, foi retirado o procedimento que introduz na população inicial cromossomos definidos.

Figura 59 – Resultados de otimização com restrição de sementeira

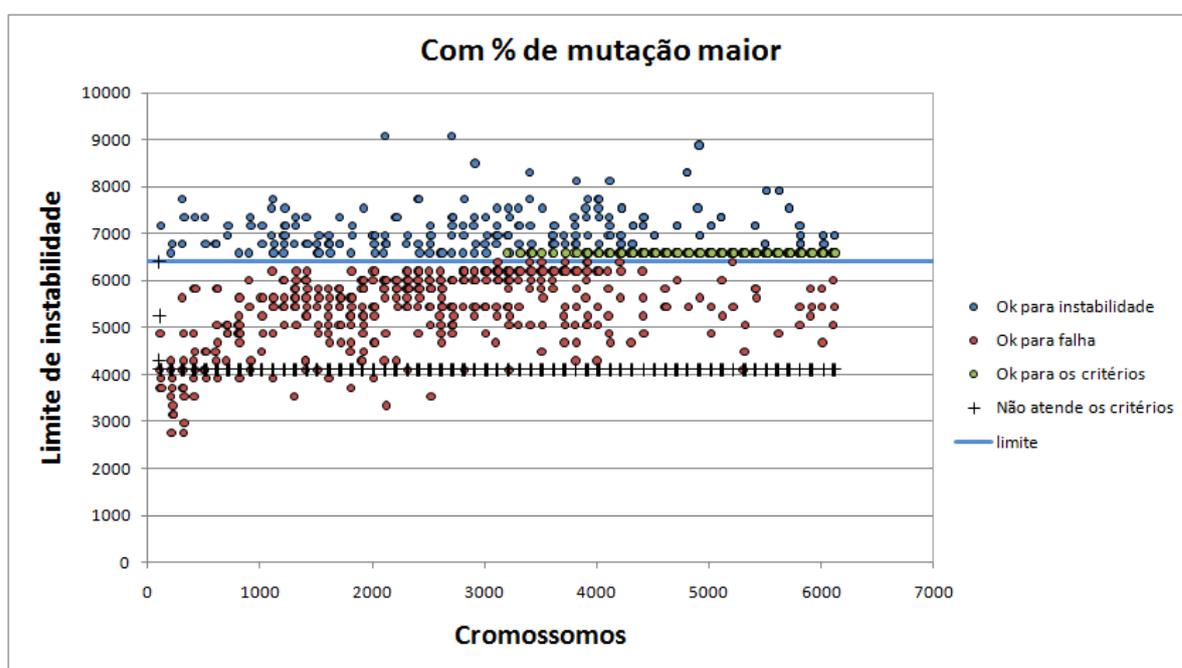


Os cromossomos foram agrupados segundo a mesma regra apresentada na otimização de referência. Observam-se a ausência nas primeiras gerações de cromossomos que atendam a restrição de instabilidade. Para atender esta restrição é necessário ter uma boa quantidade de fibras direcionadas a 0° , o que confere baixo amortecimento ao eixo. Pelo processo aleatório de formação da população inicial, isso não ocorre com facilidade. Com o passar de algumas gerações o processo de seleção natural criou indivíduos com estas características.

A simulação sem sementeira embora muito semelhante a otimização de referência não obteve uma única solução ótima na quantidade de gerações simuladas. Estas soluções muito provavelmente apareceriam com mais gerações. No entanto o objetivo desta análise foi alcançado ao demonstrar a importância de inserir cromossomos, com o intuito de agilizar o processo de convergência.

O resultado apresentado na Figura 60, demonstra que o problema de otimização anterior, pode seguir um novo rumo alcançado à convergência, através do parâmetro que quantifica a quantidade de mutação nos cromossomos (filhos). Taxas de mutação mais elevadas produziram cromossomos, que atendem o critério de instabilidade mais rapidamente e assim conduziram a otimização a soluções ótimas.

Figura 60 – Resultados de otimização com aumento de mutação



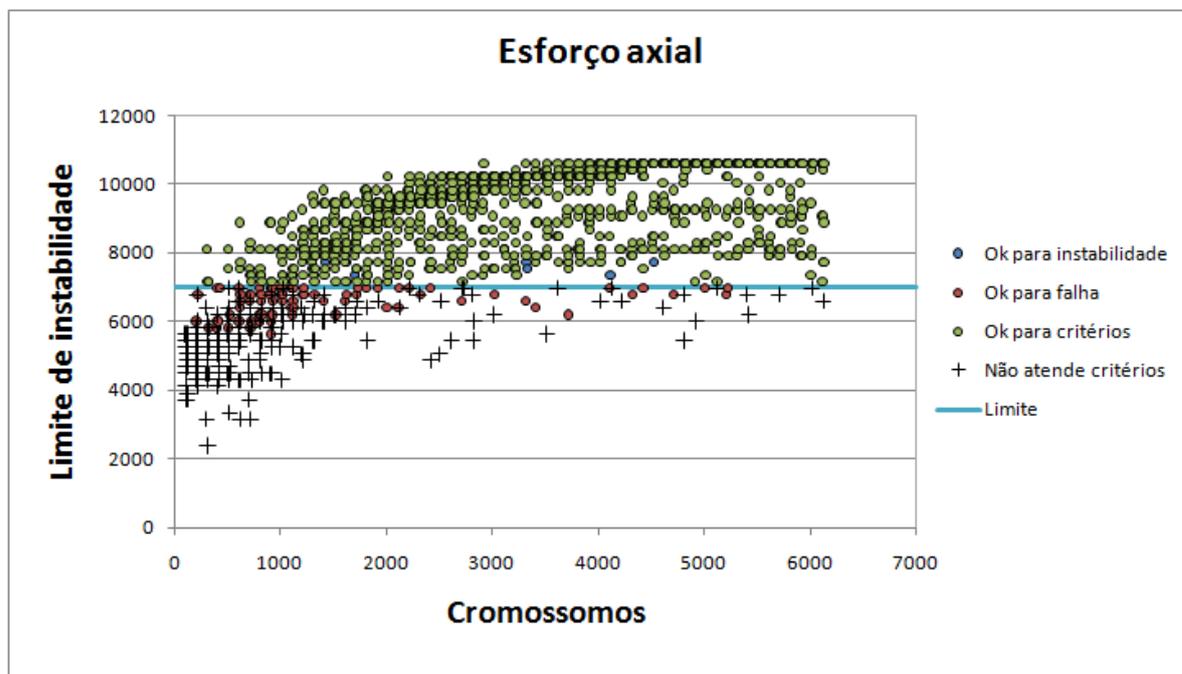
5.2.3 Resultados para otimização multi-objetivo

O próximo resultado apresentado na Figura 61 ilustra uma análise na qual não existe problema multi-objetivo. Neste modelo foi considerado os mesmos parâmetros do modelo de referência, no entanto o esforço de tração foi substituído por um esforço de tração.

A melhor direção para atender o critério de falha neste problema é quando as mesmas estão alinhadas com a longitudinal do eixo, ou seja, próximo de 0° para o sistema de referência adotado. Com esta orientação também se obtém o menor módulo de Young

transversal e os menores amortecimentos. Estas duas características conduzem o eixo a ter elevado limite de instabilidade.

Figura 61 – Resultados de otimização sem Pareto

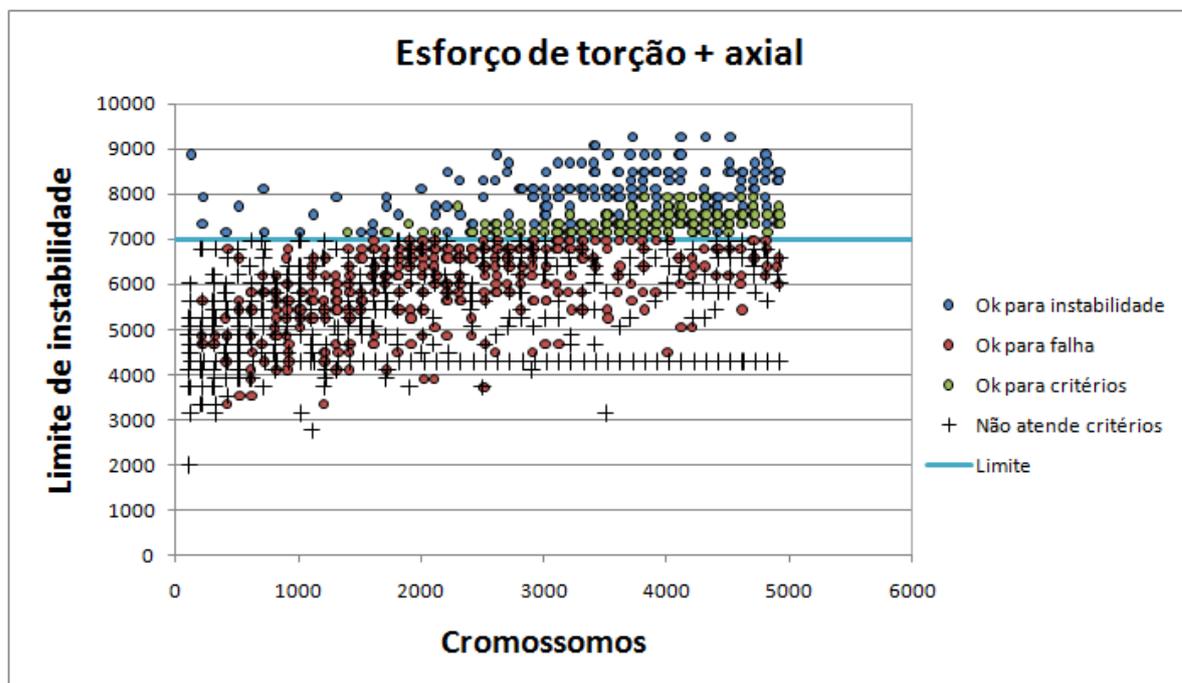


O problema com estas características não possui restrições concorrentes, que possam conduzir a um Pareto, pois ambas requerem fibras na mesma direção, ou seja, 0° . Os resultados demonstram que geração após geração, mais soluções ótimas surgem. Assim a população evolui obtendo ao fim da simulação uma população com a grande maioria de cromossomos aptos.

O resultado apresentado na Figura 62 se assemelha ao anterior, porém foi inserido além do esforço axial um esforço de torção. A complexidade deste carregamento dificulta a obtenção de um laminado que atenda os critérios de falha, pois são necessários fibras a 45° para suportar o esforço de torção e fibras a 0° para suportar o esforço axial e ainda garantir um volume de fibras a 0° que eleve o limite de instabilidade para atender a restrição de estabilidade.

O AG foi eficiente em obter soluções ótimas para o problema de múltiplos carregamentos. Observa-se que dentre as primeiras gerações existiam muitos cromossomos que não atendiam os critérios, porém com a evolução da população estes indivíduos foram eliminados e surgiram diversos cromossomos que atendiam um ou outro critério. Com mais algumas gerações surgiram cromossomos que atendiam a ambos os critérios.

Figura 62 – Resultados de otimização com restrição de sementeira



5.2.4 Resultados para dominância

Existem quatro parâmetros que com um correto ajuste podem facilitar e agilizar a otimização genética de laminados como os ilustrados, são eles: tamanho da população, taxa de mutação, sementeira de cromossomos e controle de dominância.

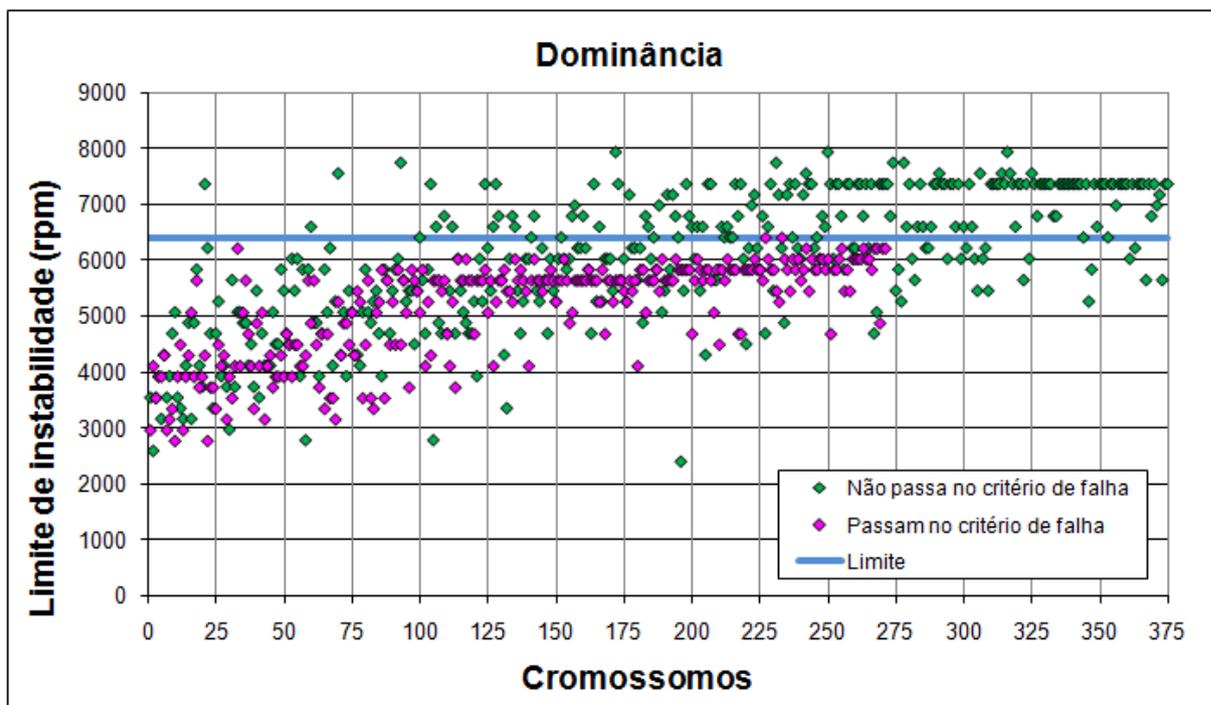
O primeiro e o segundo parâmetro têm o objetivo de controlar a diversidade do problema, quanto maior a diversidade mais eficiente o AG será em obter uma solução ótima. O terceiro parâmetro foi explicitado em exemplo ilustrado na Figura 59.

O último parâmetro se torna essencial em problemas de otimização multi-objetivos, cujas restrições são concorrentes. Este tópico foi discutido no item 4.1.4. Para melhor exemplificar a importância do ajuste do “peso” que pondera a proporção entre as aptidões dinâmicas e estruturais dessa classe de problemas, foi desenvolvida duas análises. A primeira considerou os pesos na proporção $P_d = P_e = 0,5$. Os resultados obtidos foram sintetizados na Figura 63.

Os resultados ilustram um caso de otimização no qual não houve uma boa ponderação dos fatores que quantificam a aptidão dinâmica e estrutural dos cromossomos. Neste caso quase ocorreu a convergência na 9ª geração. Nesta simulação cada geração tem 25

cromossomos. A Velocidade Limite de Instabilidade (VLI) atingida na 9ª geração foi de 6398 (rpm).

Figura 63 – Dominância sem controle

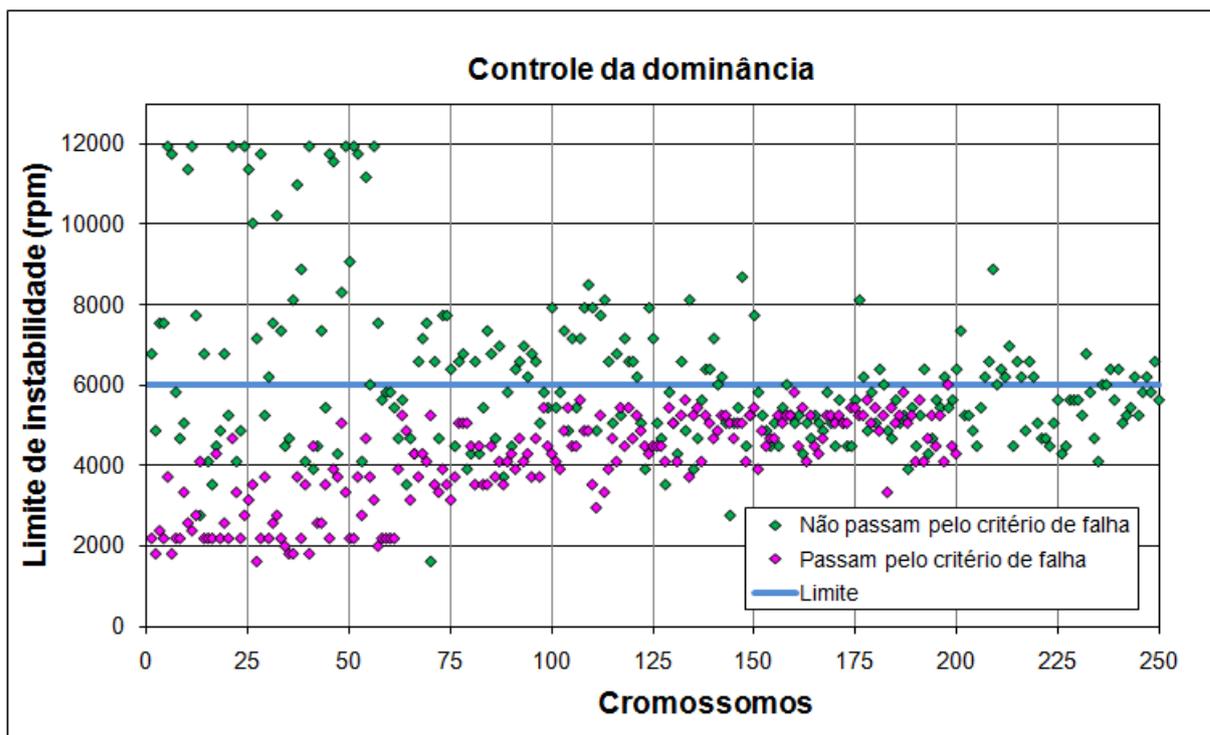


Os cromossomos que se aproximaram de se tornar uma solução ótima não conseguiram se perpetuar e a cada nova geração os cromossomos que conduziam a uma VLI cada vez maior dominaram a evolução, eliminando os cromossomos que atendiam ao critério de falha. Esta afirmação é confirmada ao se verificar o aumento de cromossomos acima da linha limite que não passam no critério de falha.

A segunda simulação cujos resultados foram apresentados na Figura 64, demonstram uma situação em que a dominância exercida pela restrição dinâmica foi controlada pelo uso correto dos parâmetros de ponderação, que nesta simulação foram $P_e=0,6$ e $P_d=0,4$.

Neste resultado observa-se uma convergência de cromossomos próximo da linha limite. A convergência ocorre ao longo da evolução acima e abaixo da linha limite. Este convergência favoreceu a geração de filhos que possuíssem os genes que atendam aos dois critérios. Um cromossomo ótimo foi obtido na 8ª geração.

Figura 64 – Dominância controlada



5.2.5 Resultados para limite estrutural

Os resultados apresentados nesta seção demonstram que o AG evolui os cromossomos para aptidão máxima possível, no entanto não atinge uma solução ótima. Embora na maioria das vezes o problema tenha origem numa baixa diversidade da população ou poucas gerações para evoluir, em alguns casos a falha na otimização é devido à limitação dinâmica ou estrutural do modelo, ou restrições selecionados.

Duas simulações demonstram o caso apresentado. Na primeira simulação a otimização utilizou oito camadas na sequência de empilhamento. Na Figura 65 a otimização não conseguiu convergir em uma solução ótima decorrido 61 gerações. O mesmo rotor foi otimizado, acrescentando duas camadas (diâmetro externo idêntico). A Figura 66 ilustra os resultados obtidos, com apenas 13 gerações foi identificado um cromossomo viável. Ressalta-se que estas figuras representam apenas os cromossomos que atendem ao critério de falha. Os principais parâmetros destas otimizações são apresentados na Tabela 13

Tabela 13 – Parâmetros das análises realizadas

Análise #	Vel. Op. (rpm)	Torque (N.m)	Camadas #	ângulo °	pop #	Pop. Sel. %	Cri. Fil. %	Mut. %	Ger. #	VLI (rpm)	Tempo horas
4	8000	200	8	5	100	50	50	20	61	7353.18	9.98
5	8000	250	10	5	100	50	50	20	13	8117.14	2.2

Onde:

Vel. Op. – velocidade de operação;

Pop – população criada;

Pop. Sel – porcentagem dos melhores da população;

Cri. Fil – porcentagem dos selecionados que criaram filhos;

Mut. – porcentagem dos filhos que sofrerão mutação;

Ger – gerações para alcançar uma solução viável;

VLI – velocidade limite de instabilidade da solução encontrada.

Figura 65 – Problema não convergente

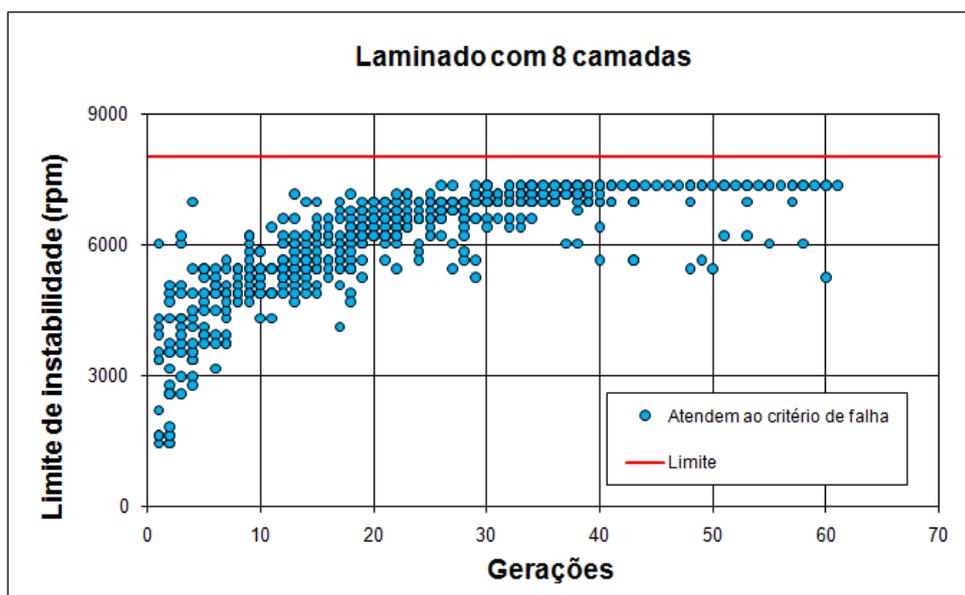
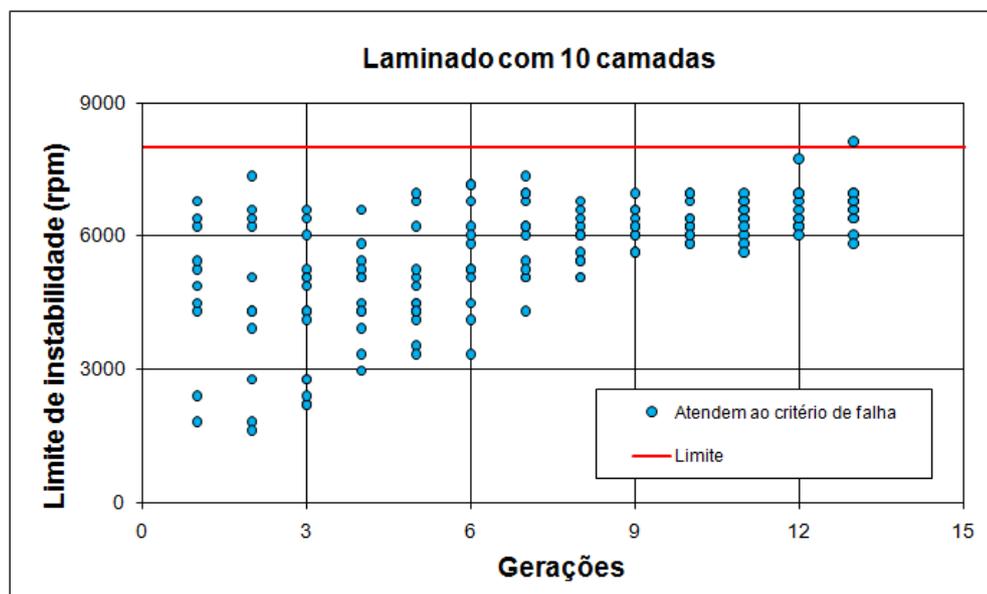


Figura 66 – Análise com 10 camadas



6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

6.1 CONCLUSÕES

O presente trabalho demonstra o desenvolvimento de um algoritmo, que utiliza uma nova metodologia para otimização multi-objetivos de eixos laminados. O algoritmo de otimização deste estudo avaliou simultaneamente, o comportamento dinâmico e a resistência estrutural de eixos laminados em compósito.

O amortecimento interno característico de eixos em compósito influencia a estabilidade dinâmica dos rotores e por este motivo devem ser corretamente avaliados por uma metodologia que ajuste o limite de instabilidade para a operação do rotor e garanta a resistência estrutural do eixo submetido aos esforços de operação do rotor.

Para o desenvolvimento da metodologia foi realizada uma revisão bibliográfica sobre os temas fundamentais no Capítulo 2, os quais foram: teoria clássica dos laminados, modelos de amortecimento, dinâmica de máquinas com amortecimento interno, método dos elementos finitos e métodos de otimização.

A revisão sobre a teoria clássica dos laminados teve como objetivo compreender a metodologia para obter propriedades equivalentes para eixos laminados. As principais propriedades necessárias foram os modos de elasticidade e o fator de perda (amortecimento interno). As formulações foram utilizadas na criação de um módulo de análise aplicado no algoritmo genético.

A revisão da TCL também abrangeu a avaliação dos critérios de falha para laminados. Foram avaliados os diversos critérios existentes: Tsai-Hill, Tsai-Wu, Hoffman, Puck, Hashin-Rotem, etc. A necessidade de um critério de falha neste estudo, teve como objetivo avaliar a resistência estrutural do eixo compósito submetido aos esforços de operação. Para o desenvolvimento da metodologia foi selecionado o critério de Tsai-Wu o qual evidenciou melhores resultados experimentais para eixos laminados (KAW, 2006). A partir deste critério de falha foi desenvolvido um segundo módulo de análise para o AG.

Uma avaliação sobre modelos matemáticos de amortecimento para compósitos foi realizada. Devido à importância deste parâmetro sobre o comportamento dinâmico do rotor, diversos estudos sobre este tema foram desenvolvidos. No entanto não existe um consenso da comunidade científica sobre qual o melhor modelo para representá-lo. As divergências de opinião se devem a complexidade dos efeitos que ocorrem simultaneamente dentro do

laminado, alguns de natureza viscoelástica, outros por fricção de Coulomb, etc. Para este estudo foi aplicado um modelo de amortecimento viscoso equivalente, o qual vem sendo aplicado em problemas semelhantes por outros autores (GENTA, 2010) (MONTAGNIER; HOCHARD, 2014).

A revisão sobre dinâmica de rotores com amortecimento interno detalhou a formulação que caracteriza o movimento destes rotores. Diferente das análises tradicionais de rotores, esta formulação contempla os efeitos do amortecimento interno, através da inserção da matriz de dissipação e circulatoria, ambas são multiplicadas pelo fator de perda. A matriz circulatoria é assimétrica e por este motivo eleva o nível de complexidade da solução livre do sistema. O problema de autovalor nestes sistemas deve ser resolvido considerando a influência de duas frequências, a de rotação e a de excitação.

Uma revisão sobre o método dos elementos finitos avaliou os elementos tradicionalmente utilizados em análise dinâmica de rotores e observou as melhores práticas na construção destes modelos. Um novo elemento chamado CBEAM foi incorporado ao modelo de elementos finitos para a análise dinâmica de rotores laminados. Este elemento considera o modelo matemático de amortecimento em sua formulação.

Um módulo de análise foi desenvolvido para realizar a análise dinâmica de rotores por elementos finitos. A incorporação deste módulo foi o que possibilitou a criação desta nova metodologia de otimização, pois ampliou as configurações de rotores que poderiam ser otimizados. As metodologias existentes somente possibilitam a otimização de rotores simples e utilizavam para a análise dinâmica formulações analíticas e empíricas, para obter os limites de instabilidade dos rotores (MONTAGNIER; HOCHARD, 2013).

A última revisão necessária para o desenvolvimento deste estudo foi sobre métodos de otimização. Os métodos existentes podem ser agrupados em dois grupos: os de programação matemática e os probabilísticos. A otimização de laminados é mais compatível com os métodos probabilísticos. O método selecionado foi o algoritmo genético, o qual tem se mostrado mais eficiente em analisar problemas com muitas variáveis discretas e por mostrar ótimos resultados em trabalhos científicos publicados (ALMEIDA; AWRUCH, 2009).

Após as revisões no Capítulo 3 foram realizados estudos sobre as propriedades equivalentes dos laminados. As avaliações foram realizadas através da obtenção das propriedades de diversas sequências de laminação. Dentre as sequências propostas dois grupos muito utilizados na indústria (*angle-ply* e *off-axis*) foram mais explorados. As análises focaram em avaliar como as sequências de laminação influenciam as propriedades

equivalentes de rigidez e amortecimento, as quais têm maior interferência no comportamento dinâmico dos rotores.

O Capítulo 4 apresentou com detalhes a metodologia e o algoritmo desenvolvido para a otimização. Através de fluxogramas cada processo executado no algoritmo foi descrito, demonstrando a sequência de análise e os processos que garantem as características probabilísticas do método.

O Capítulo 5 apresenta os principais resultados obtidos neste estudo, os quais foram divididos em resultados de análises dinâmicas (seção 5.2) e resultados para otimização multi-objetivos (seção 5.3).

Para as análises dinâmicas foi proposto um rotor de referencia, a partir da qual as simulações foram derivadas.

Os primeiros resultados apresentados na seção 5.1.1 demonstrou a influência do amortecimento no comportamento dinâmico do rotor. Através de diferentes sequências de laminação e conseqüentemente diferentes propriedades equivalentes, foi avaliado as mudanças sobre o limite de instabilidade do rotor. Como pode se observar para algumas sequências o limite de instabilidade ocorria simultaneamente com a velocidade critica, outras sequências com baixo valor de amortecimento afastavam a instabilidade da velocidade critica.

Na seção 5.1.2 foi apresentado resultados que demonstram a influência geométrica sobre o limite de instabilidade. A relação L/R_i tem alta influência nos resultados apresentados.

O fator de correção para o cisalhamento é aplicado na formulação de laminados compósitos. Na seção 5.1.3 os resultados da influência deste fator sobre as velocidades naturais e limites de instabilidade é demonstrados. Os resultados evidenciam uma maior influência deste fator em sequências de laminação com baixo amortecimento, foi identificado variação de aproximadamente 20% no valor da primeira frequência natural e de 10% no limite de instabilidade. O valor a ser adotado para este fator deve ser devidamente apurado através de experimentos.

A influência da sequência de laminação sobre a FRF foi avaliada na seção 5.1.4. Os gráficos apresentados a diferença de amplitude das ressonâncias e assim demonstrando os efeitos do amortecimento oriundo dos eixos.

Uma comparação entre materiais tradicionalmente aplicados na indústria e um laminado de fibra de carbono é apresentado na seção 5.1.5. A comparação é demonstrada através das FRFs. Os resultados evidenciam o maior amortecimento do eixo em carbono através da amplitude das ressonâncias.

Um importante resultado é apresentado na seção 5.1.6, os resultados de diagramas de Campbell demonstram as diferenças existentes entre um rotor com amortecimento viscoelástico e outro com amortecimento histerético. As curvas oriundas do modelo com amortecimento viscoelástico são muito não-lineares o que dificulta a aplicação do método desenvolvido, por não permitir com a mesma facilidade a identificação dos limites de instabilidade e velocidades crítica. Os resultados são coerentes com o modelo de material viscoelástico, pois evidenciam a dependência com relação a frequência de excitação.

O resultado apresentado na seção 5.1.7 demonstra a resposta de um rotor que possui dependência da velocidade de rotação e frequência de excitação, como ocorre quando aplicado o modelo de amortecimento viscoelástico.

Os resultados apresentados na seção 5.2 utilizaram o mesmo rotor de referência utilizado na seção 5.1. Estas análises são os resultados finais obtidos pelo algoritmo desenvolvido, o qual utiliza todos os módulos de análise desenvolvidos dentro do AG. Na seção 5.2.1 é apresentado os resultados de uma otimização realizada sobre o rotor de referencia. Os parâmetros utilizados nesta otimização foram a base utilizada para avaliar a influencia dos principais parâmetros nos resultados de otimização.

Na seção 5.2.2 foi demonstrado a importância do controle de diversidade da população para se obter uma solução ótima. Através da variação em parâmetros que controlam a sementeira e mutação de cromossomos, foram exemplificadas as dificuldades em obter a convergência da análise.

Na seção 5.2.3 foi apresentado as características do problema que qualificam a análise para uma otimização multi-objetivos. Em resumo para que haja multi-objetivos as restrições de análise devem ser conflitantes para a otimização. O exemplo exposto demonstra que um esforço de torção no rotor provoca um problema multi-objetivos, mas um esforço axial isolado não. No caso da torção a mesma tende a preservar cromossomos na evolução das gerações que tenham fibras a 45° enquanto que a análise dinâmica tende a preservar os cromossomos com orientação das fibras a 0° .

Os resultados apresentados na seção 5.2.4 ilustram uma situação corriqueira em problemas de otimização multi-objetivo, na qual uma restrição com derivada maior tende a dominar a outra restrição. Em problemas com esta característica, sem a adoção de medidas preventivas os problemas não obtém uma solução ótima. Diferentes métodos foram criados para solucionar a dominância. O mais usual e que foi utilizado neste estudo atribui pesos aos valores de aptidão de cada restrição. Os valores de peso mudam em função do problema analisado e por este motivo necessitam de uma avaliação previa.

Na seção 5.2.5 foi demonstrado que para alguns problemas não é suficiente ajustar os parâmetros que controlam a diversidade ou dominância para obter uma solução ótima. Pois o problema pode estar subdimensionado, como no exemplo apresentado estruturalmente. O recomendado para estes casos é avaliar os limites superiores e inferiores da restrição antes de executar o algoritmo de otimização. Para o exemplo apresentado oito camadas a 45° (limite superior) não suportariam o esforço de torção. A solução era possível com 10 camadas.

Os resultados obtidos e apresentados demonstraram a eficiência da metodologia e do algoritmo desenvolvido em avaliar os problemas propostos. O objetivo proposto foi alcançado, o algoritmo foi capaz de realizar a otimização de um eixo com amortecimento interno observando as restrições de resistência estrutural e dinâmicas dos problemas propostos.

6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Diversos estudos podem ser desenvolvidos de modo a complementar o estudo apresentado ou aprofundar os conhecimentos sobre rotores com amortecimento interno e principalmente com eixos laminados em compósito, assim uma lista de temas é apresentada.

Desenvolver a caracterização mecânica do módulo e fator de perda de eixos em compósito;

Avaliar a dinâmica de diferentes configurações de rotores;

Testar os limites de falha dos eixos;

Fabricar tubos em compósito com diferentes direções de laminação para testes dinâmicos;

Avaliar delaminações em eixos compósitos;

Avaliar a influência de mancais viscoelásticos sobre a dinâmica de rotores;

Desenvolver interface gráfica para o algoritmo desenvolvido;

Realizar a otimização através do método de Recozimento Simulado;

Testar a otimização de eixos com duas ou mais seções diferentes;

Propor outras otimizações multi-objetivos;

Desenvolver experimentos com variação de temperatura e frequência de excitação;

Investigar o melhor modelo para representar o amortecimento interno.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, F., AWRUCK, A. Design optimization of composite laminated structures using genetic algorithms and finite element analysis. **Composite Structures**, 88(3) p.443-454, 2009.
- ADAMS, R.D.; MAHERI, M.R. Dynamic flexural properties of anisotropic fibrous composite beams. **Composites Science and Technology**, v. 50, p. 496-514, 1994.
- ASHBY, M.F.; CEBON, D. Materials selection for precision instruments. **Meas. Science and Technology**. v.5, p.296-306, 1994.
- BERT, C.W. The effect of bending-twisting coupling on the critical speed of driveshaft. **Proceedings 6th Japan-US Conference on Composite Materials**, Orlando, FL, Technomic, Lancaster, PA, p. 29-36, 1993.
- BERT, C.W.; KIM, C.D. Whirling of composite-material driveshafts including bending-twisting coupling and transverse shear deformation. **Journal of Vibration and Acoustics**. v.117, n. 1, p. 17-21, 1995a.
- BERT, C.W.; KIM, C.D. Dynamic Instability of composite-material drive shaft subjected to fluctuating torque and/or rotational speed. **Dynamics and Stability of Systems**. v.10, n. 2, p. 125-147, 1995b.
- BERT, C.W.; KIM, C.D. Analysis of buckling of hollow laminate composites drive shafts. **Composite Science and Technology**. v. 53, n. 3, p. 343-351, 1995c.
- BILLUPS, E.K.; CAVALLI, M.N. 2D damping predictions of fiber composite plates: Layup effects, **Composites Science and Technology**, v.68, p.727-733, 2008.
- BORU, F. E., Numerical and experimental response and stability investigations of anisotropic rotor-bearing systems, **Kassel University Press**, p. 197, 2010.
- BOUAZIZ, S.; et al. Dynamic behaviour of hydrodynamic journal bearings in presence of rotor spatial angular misalignment. **Mechanism and Machine Theory**, v. 44, p. 1548-1559, 2009.
- BURBANO, C. E. R. **Diagnóstico de falhas em máquinas rotativas**. 2005. 103 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2005.
- CASTRO, R. E. Otimização de estruturas com multi-objetivos via algoritmos genéticos de Pareto, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, 202 f., Rio de Janeiro, 2001.
- CAVALCANTE, P. F. **Método de solução para o estudo da influencia da estrutura de suporte no comportamento dinâmico de máquinas rotativas**. 2001. 131 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Unicamp, Campinas, 2001.

CHAMPNEYS, A.R.; RODRIGUES, D.J.; FRISWELL, M.I.; WILSON, R.E. Experimental investigation of a single-plane automatic balancing mechanism for a rigid rotor. **Journal of Sound and Vibration**, v. 330, p. 385-403, 2011.

CHANG, M.Y.; CHEN, J.K., CHANG, C.Y. A simple spinning laminated composite shaft model. *International Journal of Solids and Structures*, v. 41, p. 637-662, 2004.

CHEN, W. J. Rotordynamics and bearing design of turbochargers. **Mechanical System and Signal Processing**, v. 29, p. 77-89, 2012

DANIEL, I.M.; ISHAI, O. **Engineering Mechanics of Composite Materials**. Oxford University Press, Oxford, New York, 1994. 395 p.

DHARMADHIKARI, S.R., et al. Design and analysis of composite drive shaft using ANSYS and genetic algorithm: a critical review. **International Journal of Modern Engineering Research**, v. 3, issue 1, p. 490-496, jan-fev, 2013.

DRACA, S. **Finite element model of a double-stage helical gear reduction**. 2006. 101 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - University of Windsor, Windsor, 2006.

EMERY, A. M. **The effects of torsional-lateral coupling on the dynamic of a gear coupled rotor**. 2005. 86 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Texas A&M University, 2005.

ESPÍNDOLA, J.J. **“Apostila de fundamentos de vibração”**. Curso de Pós-Graduação em Eng. Mecânica da UFSC, 1990.

ESPÍNDOLA, J.J.; FLOODY, S. E.; On the modeling of metal – elastomer composite structures: A finite element method approach, **Applied Mechanics in the Americas**, PACAM IV, v.8, p.1355-1342, 1999.

ESPÍNDOLA, J.J.; BAVASTRI, C. A.; **An efficient concept of transmissibility for a general equipment isolation system**. DETC’97/VIB-4120, Sacramento, California, ASME Design Engineering Technical Conferences, v. CD ROM. P. CD-CD.

FENZA, A. Experimental and numerical estimation of damping in composite plates with embedded viscoelastic. 2011. 113 f. Tese de doutorado (Tese de doutorado) – University of Naples Federico II .

FRISWELL, M.I.; PENNY, J.E.T; GARVEY, S.D.; LEES, A.W. **Dynamic of rotating machines**. Cambridge Aerospace Series, Cambridge, 2012. 526 p.

FRISWELL, M.I.; LEES, A.W.; TIWARI, R. Identification of dynamic bearing parameters: a review. **The Shock and Vibration Digest**, v. 36, n. 2, p. 99-124, Março, 2004.

GENTA, G. **Dynamics of rotating systems**, Mechanical engineering series, Springer, 2010. 674 p.

GENTA, G.; AMATI, N. Hysteretic damping in rotordynamics: An equivalent formulation. **Journal of Sound and Vibration**, v.329, p. 4772-4784, 2010.

G-FORCE design concepts. Loja virtual. Disponível em :< www.gforcedesignconcepts.com >. Acesso em: 28 ago. 2014.

GHONEAM, S.M.; HAMADA, A.A.; EL-ELAMY, M.I. **Dynamic analysis of a rotating composite shaft**. Department of Production Engineering and Mechanical Design, faculty of Engineering, Menoufiya University, Shebin El-Kom, Egito.

GREENHILL, L. M.; CORNEJO, G. A. Critical speed resulting from unbalance excitation of backward whirl modes. **Design Engineering Technical Conference ASME**, v. 3, 1995.

GREENHILL, L.M.; BICKFORD, W.B.; NELSON, H.D. A conical beam finite element for rotor dynamics analysis. **Journal of Vibration, Stress, and Reliability in Design**, v. 107, p. 421-431, 1985.

GUPTA, A.; SEKHAR, A. S. Damping estimation and dynamic analysis of a composite shaft-rotor system. **16th International Congress on Sound and Vibration**, Kraków, 2009.

GURKAN, N. E. **Non-linear mathematical modeling of gear rotor bearing systems including bearing clearance**. 2005. 130 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - The Middle East technical University, 2005.

HAFTKA, R. T.; GÜRDAL, Z., **Elements of Structural Optimization**, 3rd ed. revised and expanded edition, London: Kluwer Academic Publishers, 1991. 481 p.

HAN, F.; GUO, X.; GAO, H.. Bearing parameter identification of rotor-bearing system based on Kriging surrogate model and evolutionary algorithm. **Journal of Sound and Vibration**, v. 332, p. 2659-2671, 2013.

JANNETTY racing performance parts. Loja virtual. Disponível em: < www.jannettyracing.com >. Acesso em: 28 ago. 2014.

JEFFCOTT, H. H. The lateral vibration of loaded shafts in the neighborhood of a whirling speed – the effect of want of balance. **Philosophical Magazine**, Series 6, v. 37, p. 304, 1919.

KAW, A.K. Mechanics of composite materials – second edition, CRC Press, 457 f., 2006.

KESSLER, C.L. **Complex modal analysis of rotating machinery**. 1999. 106 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Department of Mechanical, Industrial, and Nuclear Engineering of the College of Engineering, University of Cincinnati, Cincinnati, 1999.

KRÄMER, E. Dynamics of Rotors and Foundations. **Springer Verlag**, 1993.

KUMAR, G.S.A.J. **Optimum design and analysis of a composite drive shaft for an automobile**. 2007. 76 f. Dissertação – Blekinge Institute of Technology, Karlskrona, Sweden, 2007.

LALANNE, M.; FERRARIS, G.; **Rotordynamics prediction in engineering**, Second Edition, Wiley, 1997. 674 p.

LEE, C.W. A complex modal testing theory for rotating machinery. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 5, n. 2, p. 119-137, 1991.

LEE, C.; KIM, K.. Dynamic analysis of asymmetric bladed-rotors supported by anisotropic stator. **Journal of Sound and Vibration**, v. 331, p. 5224-5246, 2012.

LEPOITTEVIN, G.; **Composite laminates with integrated vibration damping treatments**. 2012. 195 f. Tese – ETH Zurich, Zurich, 2012.

MENDES, R.U. **Desenvolvimento de um sistema de atuação magnética para excitação de sistemas rotativos**. 2011. 119 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Unicamp, Campinas, 2011.

MESQUITA, A. L. A. **Identificação de modos operacionais e naturais de vibração em máquinas rotativas utilizando coordenadas complexas**. 2004, 133 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Unicamp, Campinas, 2004.

MONTAGNIER, O.; HOCHARD, C. Optimisation of hybrid high-modulus/high-strength fiber reinforced plastic composite drive. **Materials and Design**, v.46, p.88-100, 2013.

MONTAGNIER, O.; HOCHARD, C. Dynamics of a supercritical composite shaft mounted on viscoelastic supports. **Journal of Sound and Vibration**, v. 333, p. 470-484, 2014.

MONTIEL, M. A.; NAVARRO, G. S. Active unbalance control in a two disk rotor system using lateral force actuators. **7th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control**, Tuxtla Gutiérrez, México, p. 440-445, 2010.

MOREIRA, A. Characterization and dynamic analysis of damping effects in composite materials for high-speed flywheel applications, Dissertation, Auburn University, Alabama, 113 f., 2007.

NAKRA, B.C. Vibration Damping, **PINSA**, v. 67, p.461-478, July and September, 2011.

NELSON, H.D.; CRANDALL, S.H. **Analytic prediction of rotordynamic response**. Handbook of rotordynamics, USA, McGraw-Hill, 1992.

NOURI, T.; GAY, D. Shear stress in orthotropic composite beams. **Int. J. Engng Sci.**, v.32, n.10, p. 1647-1667, 1994.

OKABE, E. P. **Interação rotor-estrutura: modelo teórico-experimental**. 2007. 154 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Unicamp, 2007.

PENG, T. **Couple multi-body dynamic and vibration analysis of hypoid and bevel geared rotor system**. 2010. 261 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - College of Engineering and Applied Science, University of Cincinnati, Cincinnati, 2010.

PENNACHI, P.; VANIA, A.; CHATTERTON, S. Nonlinear effects caused by coupling misalignment in rotor equipped with journal bearings. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 30, p. 306-322, 2012.

RANGASWAMY, T., VIJAYARANGAN, S. Optimal sizing and staking sequence of composite drive shafts, **Materials Science**, v.11 n.2 p. 1392-1320, 2005.

RANKINE, W.J.M. On the centrifugal forces of rotating shaft. *Engineer*, Abril. 1869

REIS, H.L.; et al. Thin walled laminated composite cylindrical tubes: Part III Critical speed analysis, **Journal of Composite Technology and Research**, v.9, p. 58-62, 1987.

SANTANA, P. M. **Resposta complexa de um sistema rotor-mancais-fundação**. 2009. 94 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Unicamp, Campinas, 2009.

SEKHAR, A.S.; SUDHAKAR, G.N.D.S. Identification of unbalance in a rotor bearing system. **Journal of Sound and Vibration**, v. 330, p. 2299-2313, 2011.

SHIM, E. S. Stability of a supercritical composite shaft supported by non-rigid beam. **International Congress on Sound and Vibration (ICSV15)**, p. 1323-1329, 2008.

SILVA, J. A. B. **Análise de sistemas de controle de vibração em máquinas rotativas utilizando atuadores formados por ligas com memória de forma**. 2009. 151 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Instituto de Tecnologia, Universidade Federal do Pará, Belém, 2009.

SINO, R.; BARANGER, T.N.; CHATELET, E.; JACQUET, G. Dynamic analysis of a rotating composite shaft. **Composites Science and Technology**. v. 68, p. 337-345, 2008.

SINGH, S.P.; GUPTA, K. Free damped flexural vibration analysis of composite cylindrical tubes using beam and shell theories. **Journal of Sound and Vibration**, v. 172, n. 2, p. 171-190, 1994a.

SINGH, S.P.; GUPTA, K. Damped free vibrations of layered composite cylindrical shells. **Journal of Sound and Vibration**, v. 172, n. 2, p. 191-209, 1994b.

SINGH, S.P.; GUPTA, K. Composite shaft rotordynamic analysis using a layerwise theory. **Journal of Sound and Vibration**, v. 191, n. 5, p. 739-756, 1996a.

SINGH, S.P.; GUPTA, K. Dynamic analysis of composite rotors. **International Journal of Rotating Machinery**, v. 2, n. 3, p. 179-186, 1996b.

SINGH, S.P.; GUPTA, K. Developments in dynamics of composite material shafts. **International Journal of Rotating Machinery**, v. 3, n. 3, p. 189-198, 1997.

SINHA, S.K. Rotordynamic analysis of asymmetric turbofan rotor due to fan blade-loss event with contact-impact rub loads. **Journal of Sound and Vibration**, v. 332, p. 2253-2283, 2013.

SINHA, J. K.; LEES, A. W.; FRISWELL, M.I. Estimating unbalance and misalignment of a flexible rotating machine from a single run-down. **Journal of Sound and Vibration**, v. 272, p. 967-989, 2004.

SHIN, E. S. Stability of a supercritical composite shaft support by non-rigid beam. **15th International Congress on Sound and Vibration**, p. 1323-1329, Daejeon, Korea, 2008.

TADEO, A. T. **Modelagem dos acoplamentos mecânicos nos sistemas horizontais rotor-acoplamento-mancal**. 2003. 250 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Unicamp, Campinas, 2003.

TIAN, L.; WANG, W.J.; PENG, Z.J. Effects of bearing outer clearance on the dynamic behaviours of the full floating ring bearing supported turbocharger rotor. **Mechanical System and Signal Processing**, v. 31, p. 155-175, 2012.

VANCE, J. **Rotordynamics of Turbomachinery**. John Wiley & Sons, 1988. 388 p.

VANCE, J.; ZEIDAN, F.; MURPHY, B. **Machinery vibration and rotordynamics**. Wiley, 2010. 402 p.

VANDERPLAATS, G.N. Numerical optimization techniques for engineering desing, Colorado Springs, 1999. 441 p.

WROBLEWSKI, A. C. **Health monitoring of cracked rotor systems using external excitation techniques**. 2008. 107 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Cleveland State University, Cleveland, 2008.

ZABARAS, N.; PERVEZ, T. Viscous damping approximation of laminated anisotropic composite plates using the finite element method. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v.81, p.291-316, 1990.

ZAPOMEL, J.; FERFECKI, P. A computational investigation on the reducing lateral vibration of rotors with rolling-element bearings passing through critical speeds by means of tuning the stiffness of the system supports. **Mechanism and Machine Theory**, v. 46, p. 707-724, 2011.

ZINBERG, H. SYMMONDS, M.F. The development of on advanced composite tail rotor driveshaft, **Proceeding of the 26th Annual National Forum of American Helicopter Society**, Washington, 1970.

ZORZI, E.S.; NELSON, H.D. Finite element simulation of rotor-bearing systems with internal damping. **Journal of Engineering for Power**, p.71-76, 1977.

APÊNDICE A – Estudos desenvolvidos em dinâmica de rotores

A1 - Estudos sobre mancais

No artigo de Friswell, Lees e Tiwari, (2004) a uma ótima revisão sobre experimentos para identificação de parâmetros dinâmicos de mancais em máquinas rotativas. Uma maior ênfase é atribuída a métodos de identificação baseadas em vibração. A revisão engloba a descrição das técnicas de medição experimental, modelos matemáticos, algoritmos de extração de parâmetros e incertezas aplicadas nos vários tipos de mancais. Os algoritmos de estimação de parâmetros incluem uma descrição das equações que governam o sistema rotor-mancais e identificam os métodos em ambos os domínios, tempo e frequência. As técnicas de identificação foram agrupadas conforme a forma com que o sistema é excitado. Este artigo se destacou por expor a abrangência de técnicas que podem ser aplicadas experimentalmente.

No livro de Vance, Zeidan e Murphy (2010) foi apresentado um capítulo sobre a influência dos mancais no comportamento dinâmico do rotor. O trabalho ressalta a influência que o mancal exerce sobre a performance, vida e confiança da máquina, sendo desta forma um componente que não pode ser ignorado. Neste capítulo é apresentada uma variedade de mancais empregados atualmente. Após demonstrar e descrever o comportamento dinâmico destes mancais foi realizado uma série de simulações por MEF para avaliar a influência dos parâmetros do rotor na resposta do sistema. Foram avaliados nestas simulações a geometria dos mancais, a rigidez dos mancais, a distribuição de massa no rotor, folgas, efeitos giroscópios, filmes de óleo e pré-carregamentos. Este capítulo evidencia a importância do uso destes modelos para avaliar a sensibilidade que mudanças de parâmetros exercem sobre a resposta do sistema.

No livro de Friswell et al. (2012) são detalhados os principais tipos de mancais existentes: hidrodinâmicos, hidrostáticos, rolamento, magnéticos e rígidos. Uma abordagem sobre as principais diferenças no equacionamento da rigidez e amortecimento é apresentada.

O artigo apresentado por Chen (2012) demonstra o dimensionamento dos mancais que suportam um turbo compressor para aplicação em locomotivas e navios. O interessante deste artigo é observar a análise dos parâmetros que constituem um mancal hidrodinâmico bem como a influência destes nas velocidades críticas do sistema.

O trabalho desenvolvido por Tian, Wang e Peng (2012) demonstra uma aplicação diferente de mancais, na qual existe um anel flutuante. Este tipo de mancal é normalmente

aplicado em sistemas com altas velocidades de rotação. O trabalho demonstra os efeitos da alta não linearidade neste turbo compressor que opera acima de 3000 Hz. O rotor analisado foi discretizado em elementos finitos e suportado por forças nos mancais calculadas analiticamente. Uma análise linear foi realizada primeiramente como forma de prever os dois primeiros saltos de não linearidade que ocorrem nas frequências críticas do sistema, no entanto esta análise linear não é adequada para estudar o comportamento dinâmico dos rotores em altas velocidades. Já as simulações não lineares demonstram interessantes resultados para o fenômeno gerado em função da folga externa existente no anel flutuante.

A2 - Estudos sobre fundações

Na tese apresentada por Cavalcante (2001) é abordada a influência da estrutura suporte no comportamento dinâmico de máquinas rotativas. A proposta do trabalho foi desenvolver uma metodologia de cálculo dos parâmetros da fundação. O procedimento consistiu em representar a fundação através de parâmetros modais, determinados utilizando técnicas de análise modal clássica e em seguida através do Método das Coordenadas Mistas e representá-lo no sistema completo. Os resultados simulados foram correlacionados com testes experimentais. A correlação comprovou que foi possível simular a interação entre os componentes rotor-fundação apesar de apenas baixos espectros de frequências terem sido identificadas. Para obter melhores resultados seria necessário melhorar o modelo de elementos finitos empregado, utilizando outros elementos mais representativos.

Na tese de Okabe (2007) o estudo buscou compreender os efeitos da fundação e dos mancais hidrodinâmicos no comportamento dinâmico de uma máquina rotativa. A análise modal complexa do sistema rotor-mancais-fundação foi utilizada para determinar a função resposta em frequência direcional. Com esta abordagem foi possível analisar o efeito dos parâmetros induzidos nos modos retrógrados do rotor. Para a modelagem dos mancais hidrodinâmicos foram utilizados o MEF e uma solução analítica desenvolvida para mancais curtos. Dentre as conclusões foi verificado que os mancais hidrodinâmicos minimizam a influência da fundação no rotor.

A3 - Estudos de rotores com engrenagens

A dissertação apresentada por Gurkan (2005) traz uma completa revisão bibliográfica demonstrando a evolução dos trabalhos em dinâmica de rotores com engrenagens acopladas. A dissertação demonstra a implementação de novo modelo teórico no software Nonlinear Geared Rotor Dynamics (NLGRD). O modelo considera os efeitos da não-linearidade devido às folgas nos mancais.

A dissertação apresentada por Emery (2005) foca nas interações torcionais-laterais existentes em engrenagens acopladas nos rotores. O principal interesse são os casos em que os parâmetros de rigidez torcional afetam as velocidades críticas laterais e onde a rigidez lateral e o parâmetro de amortecimento afetam a velocidade crítica torcional e amplitude. O procedimento comum para o cálculo das velocidades críticas tem sido solucionar o sistema lateral e torcional separadamente. Este processo é executado através da análise dos autovalores e foi demonstrado neste estudo. Porém o que se verifica na realidade é que um sistema interfere no outro, desta forma afetando a velocidade crítica. As simulações realizadas com os sistemas desacoplados demonstraram que o negligenciamento do acoplamento torcional-lateral podem resultar em soluções precisas, quando não existe uma forte conexão entre os modos, porém numa simulação em que o desbalanceamento impôs uma forte conexão entre os modos de torção e lateral evidenciou que ao utilizar o desacoplamento a solução só foi capaz de prever corretamente somente a primeira das seis frequências analisadas.

Na dissertação apresentada por Draca (2006) verifica-se a aplicação de dois diferentes modelos de elementos finitos para a solução de um sistema de redução através de engrenagens. Um modelo foi desenvolvido em MATLAB[®] e o outro numa versão estudantil do ANSYS[®]. O principal objetivo do trabalho foi desenvolver um modelo analítico numérico em MATLAB[®] para obter o comportamento dinâmico de um sistema de engrenagens de redução de dois estágios através de engrenagens helicoidais. No ANSYS[®] foi desenvolvido o modelo 3D para avaliar o contato existente entre dois dentes engrenados, com isso foi possível obter o erro na estimação da carga estática de transmissão e a rigidez torcional do sistema.

Na tese apresentada por Peng (2010) os principais objetivos foram estabelecer um modelo matemático mais eficiente para entender o comportamento dinâmico de engrenagens cônicas amplamente utilizadas na indústria automotiva.

A4 - Estudos sobre rotores com hélices

No artigo apresentado por Lee e Kim (2012) é proposta uma reformulação de como são tratados os ventiladores dentro da dinâmica de rotores, pois normalmente são simplificados como discos. Porém os autores ressaltam que a dinâmica existente no sistema hélice-rotor é bem diferente, pois as simplificações impostas normalmente nas análises não calculam correlatamente os fenômenos envolvidos. Desta forma no artigo eles desenvolvem a formulação necessária para englobar este novo grupo de componente constituído pelas hélices sem perder a generalidade. Complexas soluções modais são investigadas para o sistema hélice-rotor, as quais requerem mudanças de coordenadas para definir Funções de Resposta em Frequência (FRF) que caracterizam a natureza assimétrica presente na rotação do conjunto de hélices. Os autores demonstram numericamente estes efeitos.

Um interessante trabalho foi apresentado no artigo Sinha (2013) e tem um importante apelo para a indústria aeronáutica por realizar a análise de turbofans quanto perdem uma hélice devido a impacto de pássaro. Após este evento é introduzido uma assimetria no sistema e um forte desbalanceamento ocorre. Para sistemas assimétricos diversos parâmetros são dependentes do tempo. Neste artigo todas as equações dinâmicas incluem os efeitos de inércia rotacional, momentos giroscópios, flexibilidade do eixo e a flexibilidade das hélices fora do plano do disco. As equações também contemplam o amortecimento interno do material do eixo e o amortecimento externo do sistema de mancais. Adicionalmente devido ao desbalanceamento o eixo foi submetido a torques e forças axiais. Neste trabalho podemos observar a montagem das matrizes para solucionar o problema incluindo todos os efeitos mencionados, destacando a introdução do desbalanceamento e o cálculo das frequências naturais das hélices.

A5 - Estudos sobre desbalanceamento em rotores

Greenhill e Cornejo (1995) publicam um artigo que enfatizam que os engenheiros focam sua atenção em evitar as velocidades críticas na precessão direta, porém as novas análises em grandes geradores suportados por mancais hidrostáticos demonstram que as velocidades críticas podem ser induzidas por desbalanceamento e aparecer na precessão indireta. Tal fato ocorre principalmente quando existe assimetria na rigidez dos mancais.

Montiel e Navarro (2010) apresentam um artigo no qual desenvolveram um sistema ativo para controle de desbalanceamento em um rotor. A referência para o controle é um modelo desenvolvido em elementos finitos que contempla os efeitos giroscópios. O modelo é utilizado para obter o diagrama de Campbell, as velocidades críticas e as formas modais. O controle de amplitude do sistema desbalanceado é efetuado por atuadores ativos conectados em um dos mancais do sistema.

No artigo de Sekhar e Sudhakar (2011) eles correlacionaram resultados experimentais e simulados para validar o método que utiliza desbalanceamentos virtuais em um modelo de elementos finitos para identificar a localização e magnitude de defeitos reais em rotores.

Champney et al. (2011) publicaram um artigo no qual investigam o balanceamento automático. Foi desenvolvida uma bancada de testes na qual duas esferas estão livres para se transladar em uma pista circular no disco do rotor, as esferas servem para autocompensar o desbalanceamento introduzido no sistema. O modelo matemático desenvolvido foi simulado e correlacionado com experimentos. Em velocidades supercríticas as esferas executam o balanceamento e os resultados são bem correlacionados com as simulações. No entanto, quando o sistema vibra num modo de corpo rígido o balanceamento se torna altamente não linear, podendo se comparar apenas qualitativamente os resultados.

No artigo de Zapomel e Ferfecki (2011) a proposta é investigar o fenômeno que consiste na diminuição da rigidez dos mancais quando o rotor está em uma de suas velocidades críticas e o aumento da rigidez quando a mesma é ultrapassada.

A6 - Estudo sobre acoplamentos e desalinhamento em rotores

Na tese de Tadeo (2003) foram avaliados os modelos de elementos finitos propostos para representar acoplamentos. A principal constatação é que os modelos avaliados divergem nos resultados calculados para frequências naturais e também nas amplitudes. Os modelos avaliados foram de Nelson e Crandall (1992) e Krämer E. (1993). Através do ajuste dos mínimos quadrados foi obtido o modelo que mais adere aos resultados esperados. O estudo foi efetuado sobre dois tipos de acoplamentos comerciais, a corroboração destes modelos ainda precisam ser avaliados para outros tipos de acoplamento.

Sinha, Lees e Friswell (2004) publicaram um artigo no qual propõem um método que pode estimar o desbalanceamento e o desalinhamento através da redução de velocidade

(*run-down*) do sistema rotor-mancal-fundação. Para testar a robustez do método foi inserido na simulação erros nos parâmetros do rotor e dos mancais hidrodinâmicos.

Bouaziz et al. (2009) publicaram um artigo sobre dinâmica de um rotor desalinhado. O rotor é montado sobre dois mancais hidrodinâmicos. A equação de Reynolds é obtida para considerar a transferência de carga através do filme de óleo do mancal. Foi elaborado um modelo de elementos finitos. A elasticidade do filme de óleo foi modelado em matrizes de rigidez e amortecimento. A partir dos resultados conclui-se que quanto maior a excentricidade maior é o coeficiente dinâmico nos mancais. Uma comparação foi efetuada com mancais de rolamento e a conclusão foi que os mancais hidrodinâmicos permitem a atenuação da vibração oriunda do desalinhamento.

O artigo apresentado por Pennacchi, Vania e Chatterton (2012) evidência que existem poucos trabalhos que estudam o desalinhamento e que os resultados dos trabalhos algumas vezes são conflitantes, para este fenômeno frequentemente encontrado em aplicações industriais. O autor objetivou realizar uma modelagem acurada deste fenômeno. O método é aplicado a qualquer linha de eixos suportada por mancais. Um modelo de elementos finitos foi utilizado para a linha de eixos hiperestática, na qual as características dos mancais foram calculadas pela integração da equação de Reynolds, como função das cargas agindo sobre os mancais, causadas pelo desalinhamento. Os resultados obtidos foram demonstrados por simulações. Os efeitos não lineares são altos e a componente espectral da resposta do sistema foi analisada, com o objetivo de obter a assinatura deste tipo de defeito. O artigo demonstra a relevância do estudo do desalinhamento que é o segundo tipo de defeito mais frequente em aplicações após o desbalanceamento. O objetivo proposto pelo artigo foi amplamente alcançado através dos modelos de simulação.

A7 - Estudo sobre trincas em rotores

O estudo desenvolvido por Burbano (2005) avaliou o comportamento de um rotor com trincas e outro semelhante sem a trinca. O modelo teórico dos rotores foi desenvolvido através do MEF. Para a trinca foi construída uma matriz de flexibilidade como um elemento que represente a falha. O foco deste trabalho foi avaliar o comportamento dinâmico destes rotores na partida e na parada. A validação dos resultados teóricos foi efetuada através da correlação com resultados experimentais.

A criação de métodos de inspeção para identificação de trincas em rotores é um campo de grande interesse. O trabalho desenvolvido por Wroblewski (2006) apresenta uma solução que utiliza um mancal magnético ativo para gerar diferentes solicitações transversais no rotor, os quais geram um comportamento dinâmico que é avaliado por métodos teóricos com o objetivo de identificar a existência e localização de trincas. O trabalho também faz uma boa descrição da resposta típica esperada de um rotor submetido a diferentes defeitos, como por exemplo, desbalanceamento, desalinhamento, perdas mecânicas, instabilidade no fluido dos mancais hidrodinâmicos, etc. A importância deste trabalho se revela em sua contribuição em demonstrar o uso de mancais magnéticos em bancadas experimentais, o que pode ser bem explorado para alcançar o objetivo deste estudo.

A8 - Desenvolvimento de bancadas experimentais

Dentre as linhas de pesquisa que se destacam, uma de vital importância é o desenvolvimento de bancadas experimentais para o desenvolvimento das metodologias de análise. Um trabalho interessante que demonstra este tipo de desenvolvimento pode ser observado em Mendes (2011). Neste trabalho o autor busca o desenvolvimento de mancais magnéticos para que possa executar análises modais de rotores aplicando cargas sem contato, fato que é de grande utilidade, pois elimina interferências indesejadas no desenvolvimento.

APÊNDICE B – Introdução sobre materiais laminados

B1 - Definição de material compósito

Um material compósito é um material constituído de duas ou mais fases em escala macroscópica, cuja performance mecânica e propriedades são projetadas para ser superior aos materiais que o constituem quando atuam separadamente. Uma das fases normalmente descontínua, rígida e forte é chamada de reforçador, a outra fase é menos rígida e fraca, é contínua e é chamada de matriz. As propriedades do material compósito dependem das propriedades de seus constituintes, geometria e distribuição das fases. Um dos mais importantes parâmetros é fração volumétrica do reforçador, ou razão de volume de fibra. A distribuição do reforçador determina a homogeneidade ou uniformidade do material. Quanto mais desuniforme a distribuição do reforçador mais heterogêneo é o material e maior a possibilidade de falhas em áreas fracas. A orientação e geometria do reforçador afeta a anisotropia do sistema (DANIEL, ISHAI,1994).

B2 - Tipos e classificação dos materiais compósitos

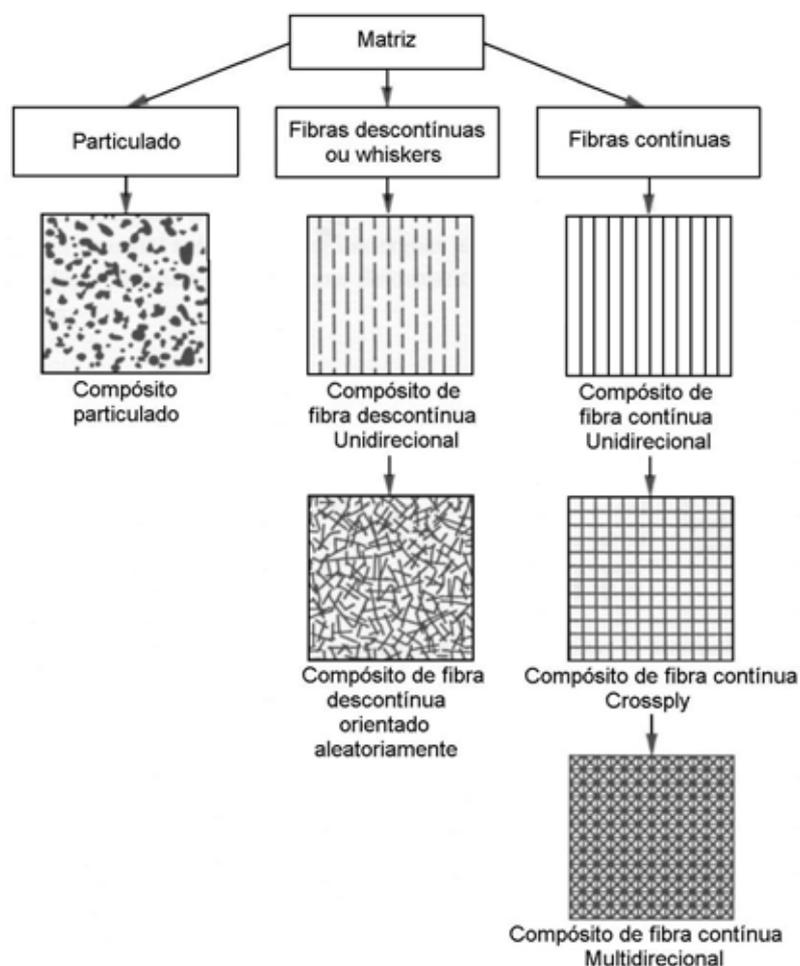
Os materiais compósitos constituídos de duas fases são categorizados em três ramos, os quais dependem do tipo, geometria e orientação da fase do reforço. A Figura 67 ilustra essa classificação. A classificação é distribuída em compósitos particulados, fibras descontínuas e fibras contínuas.

Compósitos de particulados consistem de partículas de vários tamanhos e formas randomicamente dispersas dentro da matriz. Devido a randomização das partículas distribuídas, estes compósitos podem ser considerados quasi-homogêneos numa escala maior que o tamanho das partículas e espaçamento entre elas, também pode ser considerado quasi-isotrópico.

Compósitos de fibras descontínuas contêm fibras curtas como reforço. Estas fibras curtas, as quais podem ser freqüentemente longas quando comparadas com seu diâmetro, podem também ser orientadas ao longo de uma direção ou em randômica direção. Em princípio estes materiais compósitos tendem a ser marcadamente anisotrópicos ou mais especificamente ortotrópicos, no entanto podem ser consideradas quasi-isotrópicas.

Compósitos de fibras contínuas são reforçados por longas e contínuas fibras e são os mais eficientes do ponto de vista de resistência e rigidez. As fibras contínuas podem ser todas paralelas (unidirecionais), podem ser orientadas em ângulos em relação a outras (trançadas ou tecidos), ou podem ainda ser orientadas em muitas direções. No último caso para certo número de direção de fibras e distribuição, o compósito pode ser caracterizado como a um material quasi-isotrópico.

Figura 67 – Classificação dos materiais compósitos



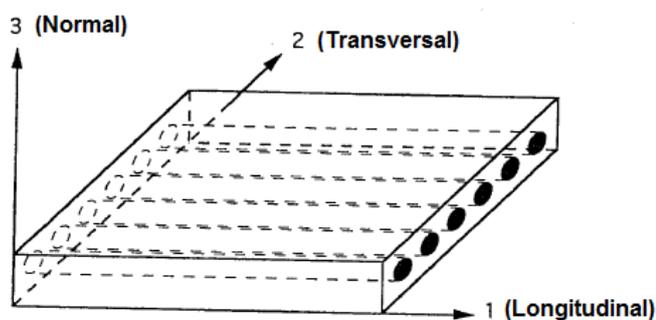
Fonte: Traduzido de Daniel e Ishaia (1994)

B3 - Laminados

A lâmina ou fibra é uma plana (ou curva) camada dentro de uma matriz. No caso de fibras unidirecionais são definidas como Unidirecionais (UD). A lâmina é um material ortotrópico com o eixo principal do material na direção das fibras (longitudinal),

perpendicular as fibras (transversal) e normal ao plano da lâmina. Esses eixos principais são designados como 1, 2 e 3, respectivamente, a Figura 68 ilustra estas direções.

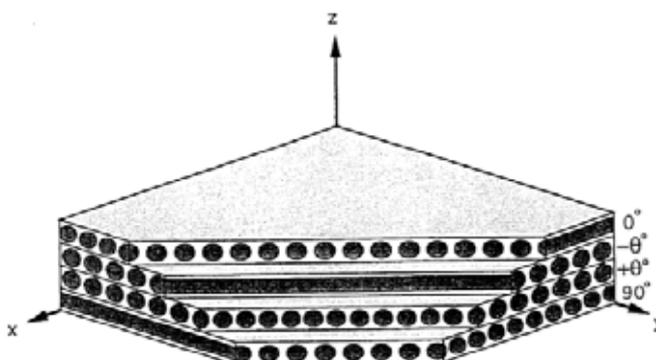
Figura 68 – Sistema de coordenadas ortotrópico



Fonte: Traduzido de Daniel e Ishaia (1994)

Um laminado é feito de duas ou mais lâminas unidirecionais empilhadas juntas em várias direções. A lâmina pode ser de diferentes espessuras e consistir de diferentes materiais. Como o eixo principal difere de camada para camada é conveniente analisar o laminado usando um sistema de coordenadas fixo de referência (x, y, z) como ilustrado na Figura 69. A orientação da camada é obtida a partir do ângulo formado entre o eixo de referência (x) e o eixo longitudinal da lamina (1) (orientação da fibra), medida no sentido anti-horário sobre o plano (xy).

Figura 69 – Sistema de coordenadas global



Fonte: Daniel e Ishaia (1994)

Comumente os laminados são designados de forma a indicar o número, tipo, orientação e seqüência empilhamento das fibras. A indicação da configuração, de fibras composição e exata localização ou seqüência de várias camadas é chamada de seqüência de empilhamento. A seguir alguns exemplos de designação de laminados:

Unidirecional 6-ply:	$[0/0/0/0/0/0] = [0_6]$
Crossply symmetric:	$[0/90/90/0] = [0/90]_s$
Angle-ply symmetric:	$[+45/-45/-45/+45] = [\pm 45]_s$
	$[30/-30/30/-30/-30/30/-30/30] = [\pm 30]_{2s}$
Angle-ply asymmetric:	$[30/-30/30/-30/30/-30/30/-30] = [\pm 30]_{4s}$
Multi direcional:	$[0/45/-45/-45/45/0] = [0/\pm 45]_s$
	$[0/0/45/-45/0/0/0/0/-45/45/0/0] = [0_2/\pm 45/0_2]_s$
	$[0/15/-15/15/-15/0] = [0/\pm 15/\pm 15/0]_t = [0/(\pm 15)_2/0]_t$
Hybrid:	$[0^K/0^K/45^C/-45^C/90^G/-45^C/45^C/0^K/0^K]_t = [0_2^K/\pm 45^C/90^G]_s$

onde os subscritos e símbolos significam o seguinte:

número subscrito = múltiplo de camadas ou grupos de camadas

s = sequênciasimétrica

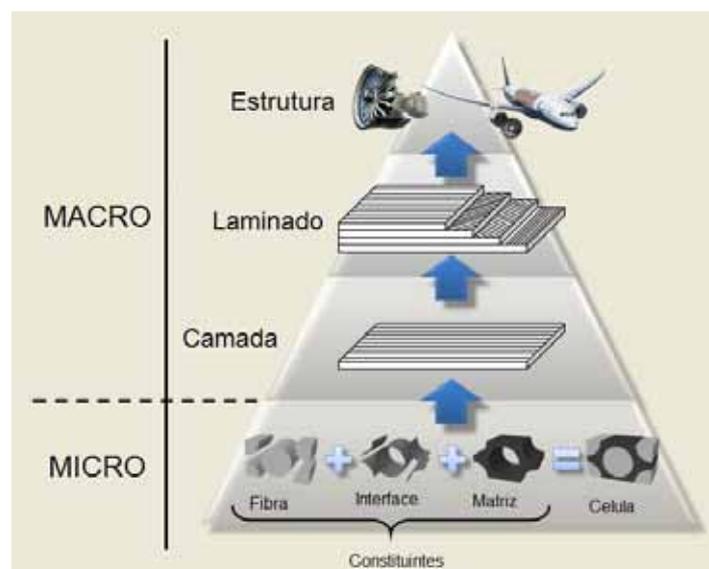
t = número total de camadas

- = significa que o laminado é simétrico com relação a camada do meio.

No caso do laminado ser híbrido, os sobrescritos K, C e G denotam Kevlar, Carbono e fibra de vidro, respectivamente.

A Figura 70 ilustra uma pirâmide que ilustra a aplicação de laminados na indústria, Desde a sua de construção a partir dos seus constituintes.

Figura 70 - Pirâmide desenvolvimento

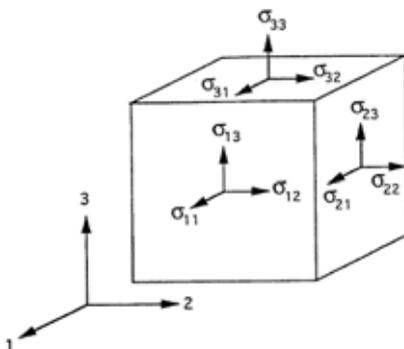


Fonte: Autor

B4 - Comportamento elástico de laminados unidirecionais ortotrópicos

O estado de tensão de um ponto de um material anisotrópico ilustrado na Figura 71 pode ser equacionado como ilustrado na equação (B1), através de nove componentes σ_{ij} (onde $i,j = 1,2,3$) agindo nas laterais do elemento cúbico com lados paralelos aos eixos 1,2,3 do sistema de coordenadas ilustrado. Similarmente o estado de deformações é representado por nove componentes ε_{ij} . Tensão e deformação estão relacionadas pela lei de Hooke.

Figura 71- Elemento anisotrópico



Fonte: Daniel e Ishaia (1994)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & \cdots & C_{1113} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & \cdots & C_{2213} & C_{2221} \\ C_{3311} & \vdots & \cdots & \vdots & C_{3321} \\ C_{2311} & \vdots & \cdots & \vdots & C_{2321} \\ C_{3111} & \vdots & \cdots & \vdots & C_{3121} \\ C_{1211} & \vdots & \cdots & \vdots & C_{1221} \\ C_{3211} & \vdots & \cdots & \vdots & C_{3221} \\ C_{1311} & C_{1322} & \cdots & C_{1313} & C_{1321} \\ C_{2111} & C_{2122} & \cdots & C_{2113} & C_{2121} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \end{bmatrix} \quad (\text{B104})$$

Embora sejam necessárias 81 constantes para representar o material em sua totalidade, podemos obter a simplificação de muitos termos devido à simetria existente nas tensões e deformações, outro recurso adotado é simplificar a notação. Cabe ressaltar que a matriz de flexibilidade $[S_{ij}]$ é a inversa da matriz de rigidez $[C_{ij}]$. Observando a simetria $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ e $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ temos os seguintes sistemas simplificados.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{B105})$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{B106})$$

Para o caso de materiais ortotrópicos (o qual tem três planos simétricos mutuamente perpendiculares) as relações tensão-deformação em geral tem a mesma forma das equações (B4) e (B5). No entanto, o número de constantes elásticas independentes é reduzido a nove, tanto na rigidez quanto na flexão, assim os novos sistemas de equação tornam-se:

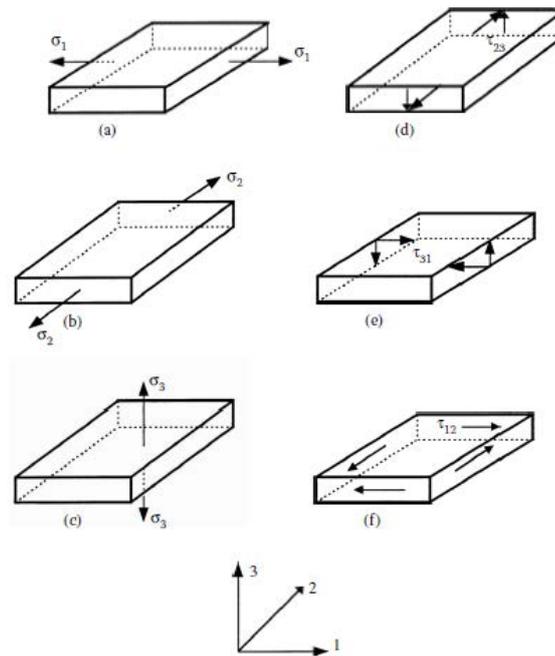
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{B107})$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{B108})$$

Em muitas aplicações estruturais os materiais compósitos são usados na forma de lâminas finas, solicitadas no plano do laminado, a Figura 72 ilustra as tensões atuantes em uma lamina. Assim estes laminados são considerados em um estado plano de tensões, com todas as tensões atuantes fora do plano (direção 3) sendo zero, ou seja;

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= 0 \\ \tau_{23} &= 0 \\ \tau_{13} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B109})$$

Figura 72 - Estado plano de tensões



Fonte: Daniel e Ishaia (1994)

A relação ortotrópica tensão-deformação se reduz:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{B110})$$

O qual é expandido na forma:

$$\sigma_1 = C_{11} \cdot \varepsilon_1 + C_{12} \cdot \varepsilon_2 + C_{13} \cdot \varepsilon_3 \quad (\text{B111})$$

$$\sigma_2 = C_{12} \cdot \varepsilon_1 + C_{22} \cdot \varepsilon_2 + C_{23} \cdot \varepsilon_3 \quad (\text{B112})$$

$$0 = C_{13} \cdot \varepsilon_1 + C_{23} \cdot \varepsilon_2 + C_{33} \cdot \varepsilon_3 \quad (\text{B113})$$

$$\tau_{13} = \gamma_{13} = 0 \quad (\text{B114})$$

$$\tau_{12} = C_{66} \cdot \gamma_{12} \quad (\text{B115})$$

Eliminando a deformação ε_3 da equação (B9), tem-se:

$$\sigma_1 = \left(C_{11} - \frac{C_{13} \cdot C_{13}}{C_{33}} \right) \varepsilon_1 + \left(C_{12} - \frac{C_{13} \cdot C_{23}}{C_{33}} \right) \varepsilon_2 = Q_{11} \cdot \varepsilon_1 + Q_{12} \cdot \varepsilon_2 \quad (\text{B116})$$

$$\sigma_2 = \left(C_{12} - \frac{C_{23} \cdot C_{13}}{C_{33}} \right) \varepsilon_1 + \left(C_{22} - \frac{C_{23} \cdot C_{23}}{C_{33}} \right) \varepsilon_2 = Q_{12} \cdot \varepsilon_1 + Q_{22} \cdot \varepsilon_2 \quad (\text{B117})$$

$$\tau_{12} = C_{66} \cdot \gamma_{12} = Q_{66} \cdot \gamma_{12} \quad (\text{B118})$$

ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{B119})$$

ou na relação inversa

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{B120})$$

A equação (B18) pode ser escrita em termos de constantes de engenharia na sua forma geral da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{B121})$$

Onde:

$E_1, E_2, E_3, G_{23}, G_{13}, G_{12}$ – são os módulos de elasticidade

$\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{21}, \nu_{23}, \nu_{31}, \nu_{32}$ – são os coeficientes de Poisson

A seguir algumas relações que são importantes para se realizar a transformação entre as matrizes:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}^2}{S} \\ C_{22} &= \frac{S_{33}S_{11} - S_{13}^2}{S} \\ C_{33} &= \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{S} \\ C_{12} &= \frac{S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33}}{S} \\ C_{23} &= \frac{S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}}{S} \\ C_{13} &= \frac{S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}}{S} \\ C_{44} &= \frac{1}{S_{44}} \quad C_{55} = \frac{1}{S_{55}} \quad C_{66} = \frac{1}{S_{66}} \end{aligned} \quad (\text{B122})$$

Onde:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{B123})$$

Através das relações apresentadas, substituindo as constantes por constantes de engenharia, obtemos:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} \\ C_{22} &= \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \\ C_{33} &= \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{12} &= \frac{\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}}{E_1 E_3 \Delta} \\ C_{23} &= \frac{\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{13} &= \frac{\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} = \frac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} \\ C_{44} &= G_{23} \quad C_{55} = G_{13} \quad C_{66} = G_{12} \end{aligned} \quad (\text{B124})$$

Onde

$$\Delta = \frac{1}{E_1 E_2 E_3} \begin{bmatrix} 1 & -\nu_{21} & -\nu_{31} \\ -\nu_{12} & 1 & -\nu_{32} \\ -\nu_{13} & -\nu_{23} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B125})$$

O símbolo Δ é utilizado para expressar a equação de transformação (B22).

B5 - Teorias de falha para laminados

Os materiais compósitos não são isotrópicos, assim as teorias de falhas convencionais desenvolvidas para materiais isotrópicos não são aplicáveis aos compósitos. Diversos pesquisadores vêm desenvolvendo pesquisas focadas em critérios de falha para laminados de fibra de carbono nas últimas décadas. Este assunto é ainda hoje um importante tópico para pesquisadores. Diferentes metodologias têm sido propostas com o intuito de demonstrar um critério de falha para o compósito de fibra de carbono. Mesmo que importantes avanços tenham ocorrido, mesmo nos dias de hoje não existe ainda um critério de falha universal aceito pelos engenheiros que avalie os diversos tipos de esforços existentes. Os critérios de falha existentes para materiais compósitos podem ser classificados como: não interativos (ex.

tensão máxima ou deformação máxima), teorias interativas (ex. Tsai-Hill, Tsai-Wu ou Hoffman) e parcialmente interativos (ex. Puck ou Hashin-Rotem). Nenhum destes critérios mencionados é bom o suficiente para ser usado isoladamente para análise de projeto. Na indústria aeroespacial por exemplo o projeto de uma estrutura em compósito além de utilizar algumas das teorias citadas também são embasadas fortemente por testes experimentais, os quais verificam as performances dos laminados considerando outros fatores que podem modificar o índice de falha da estrutura, por exemplo: manufatura, temperatura, fornecedor, etc. As falhas em uma camada unidirecional se inicia em um nível microscópico, a quais podem ser classificadas pelo local que ocorrem: falha da fibra, falha da matriz e falha interlaminar.

Neste estudo serão apresentadas de forma simplificada duas teorias: Tsai-Hill e Tsai-Wu. Para o desenvolvimento da otimização de resistência estrutural será aplicada o critério de falha de Tsai-Wu. A escolha foi baseada em resultados apresentados em trabalhos que demonstraram um bom ajuste de resultados experimentais e teóricos (KAW, 2006).

B5.1 - Teoria de falha de Tsai-Hill

A teoria de falha de Tsai-Hill é derivada do critério limite de deformação de von Mises aplicada a materiais isotrópicos. Após algumas modificações esta teoria pode ser aplicada a materiais anisotrópicos como os compósitos. Nesta teoria a falha acontece quando um limite de energia de distorção é alcançado ou superado. A vantagem desta teoria é que existe interação entre as componentes de tensão (σ_1 , σ_2 e τ_{12}). Os principais pontos negativos desta teoria são: não existe distinção entre tensões de tração e compressão e não é possível distinguir onde ocorreu a falha, se foi na fibra, na matriz ou interlaminar. A equação (B23) demonstra a relação para verificar a ocorrência de falha.

$$\frac{\sigma_1^2}{(\sigma_1^F)^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{(\sigma_1^F)^2} + \frac{\sigma_2^2}{(\sigma_2^F)^2} + \frac{\tau_{12}^2}{(\tau_{12}^F)^2} < 1 \quad (\text{B126})$$

σ_1, σ_2 – máxima tensão normal;

τ_{12} – máxima tensão de cisalhamento na lâmina;

σ_1^F – tensão de ruptura na direção longitudinal da lâmina;

σ_2^F – tensão de ruptura na direção transversal da lâmina;

τ_{12}^F – tensão de ruptura por cisalhamento no plano da lâmina;

B5.2 – Teoria de Tsai-Wu

Esta teoria de falha é baseada na teoria de falha da energia total de deformação de Beltrami. Tsai-Wu aplicou a teoria de falha para laminas no estado plano de tensões. A lamina é considerada falhada se a relação da equação (B24) for violada. Esta teoria de falha é mais geral que a teoria de falha de Tsai-Hill, porque esta avalia a tração e compressão separadamente na lamina.

$$H_1\sigma_1 + H_2\sigma_2 + H_6\tau_{12} + H_{11}\sigma_1^2 + H_{22}\sigma_2^2 + H_{66}\tau_{12}^2 + 2H_{12}\sigma_1\sigma_2 < 1 \quad (\text{B127})$$

Os coeficientes H_1 , H_2 , H_6 , H_{11} , H_{22} e H_{66} da teoria de falhas são obtidas através de manipulações algébricas dos cinco parâmetros da lamina unidirecional. Em resumo através de condições de contorno onde se zera as tensões em algumas direções e considerando tração ou compressão em outra são obtidas as constantes.

$$H_1 = \frac{1}{(\sigma_1^T)_{rup}} - \frac{1}{(\sigma_1^C)_{rup}} \quad (\text{B128})$$

$$H_{11} = \frac{1}{(\sigma_1^T)_{rup}(\sigma_1^C)_{rup}} \quad (\text{B129})$$

$$H_2 = \frac{1}{(\sigma_2^T)_{rup}} - \frac{1}{(\sigma_2^C)_{rup}} \quad (\text{B130})$$

$$H_{22} = \frac{1}{(\sigma_2^T)_{rup}(\sigma_2^C)_{rup}} \quad (\text{B131})$$

$$H_6 = 0 \quad (\text{B132})$$

$$H_{66} = \frac{1}{(\tau_{12})_{rup}^2} \quad (\text{B133})$$

O único coeficiente que não pode ser obtido diretamente pelo processo mencionado é o H_{12} o qual é obtido experimentalmente através de ensaios com esforços biaxiais. Conhecendo as tensões atuantes no momento da falha (σ_1 , σ_2 e τ_{12}) deve-se preencher os valores na equação (B24) obtendo-se assim o coeficiente H_{12} . O teste pode ser realizado com diferentes combinações de esforços. Algumas formulações empíricas também são encontradas para estimar este coeficiente, as quais foram formuladas a partir de experimentos. Para as simulações que serão apresentadas foram utilizados formulação empírica de Mises-Hencky.

$$H_{12} = \frac{1}{2(\sigma_1^T)_{rup}^2}, \text{ pela teoria de falhas de Tsai-Hill} \quad (\text{B134})$$

$$H_{12} = \frac{1}{2(\sigma_1^T)_{rup}(\sigma_1^C)_{rup}}, \text{ pelo critério de Hoffman} \quad (\text{B135})$$

$$H_{12} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{(\sigma_1^T)_{rup}(\sigma_1^C)_{rup}(\sigma_2^T)_{rup}(\sigma_2^C)_{rup}}}, \text{ pelo critério de Mises-Hencky} \quad (\text{B136})$$

APÊNDICE C – Modelos de amortecimento estrutural

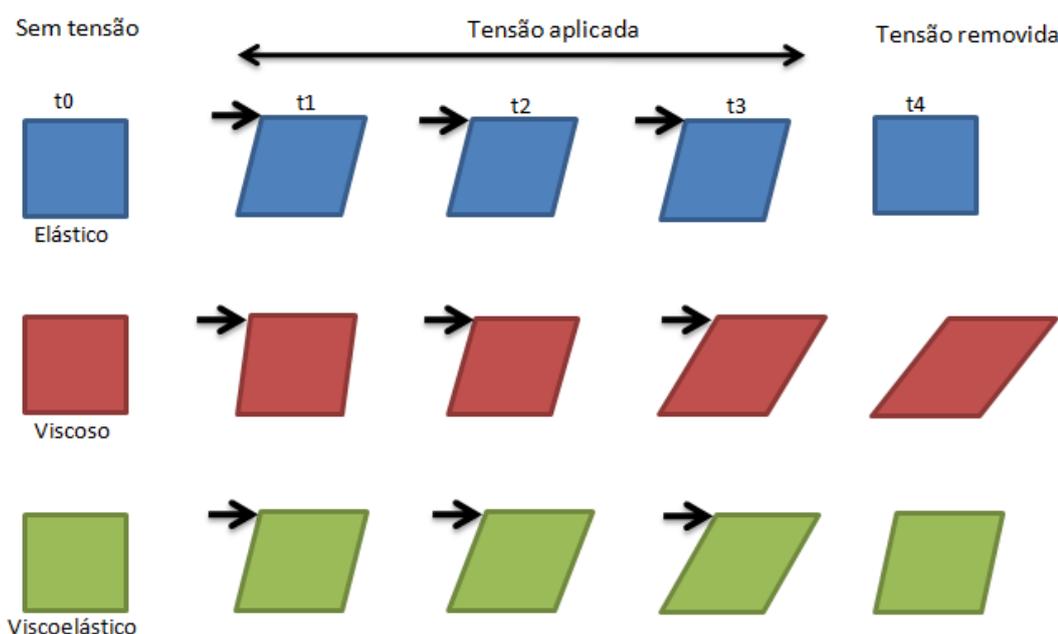
C 1 - Amortecimento viscoelástico

O comportamento viscoelástico é atribuído a um material quando o mesmo apresenta uma resposta dinâmica que soma os efeitos característicos de sólidos elásticos com fluido viscoso. Uma forma de ilustrar o comportamento destes materiais é apresentada Figura 73 na qual são ilustrados os comportamentos dos três materiais quando submetidos a uma tensão e sua resposta quando o carregamento é retirado.

Materiais viscoelásticos podem ser deformados pela aplicação de um esforço e nem sempre recuperam a forma quando o esforço é removido. Isso ocorre pois a deformação de cisalhamento é fortemente dependente do tempo de aplicação do esforço. Assim o material viscoelástico pode assumir um comportamento de material elástico se submetido a um esforço por um curto período de tempo, já na situação oposta ele pode assumir um comportamento de material viscoso se submetido a um esforço por um tempo prolongado.

O conceito de viscoelasticidade introduz certa ambiguidade na classificação do estado dos materiais. A distinção entre o estado sólido e líquido, não se apresenta tão claramente se o mesmo material pode manifestar predominantemente características sólidas ou líquidas em função do estado de sollicitação ao qual é submetido (FENZA, 2011).

Figura 73 – Comportamento dos materiais



C 1.1 - Modelos matemáticos de materiais viscoelásticos

Existem quatro modelos básicos para representar um material viscoelástico os quais são construídos a partir de molas lineares com coeficiente de rigidez k e amortecedores com coeficiente de viscosidade c . Assim temos o modelo de Maxwell, o modelo de Kelvin-Voigt, o modelo linear padrão e o modelo generalizado de Maxwell.

C 1.1.1 - Modelo de Maxwell

Este modelo é representado por um amortecedor puramente viscoso em série com uma mola puramente elástica, como ilustrado na Figura 74.

A deformação total é obtida através:

$$\varepsilon_{total} = \varepsilon_{mola} + \varepsilon_{amortecedor} \quad (C137)$$

$$\sigma_{mola} = k \cdot \varepsilon_{mola} \quad (C138)$$

$$\sigma_{amortecedor} = c \cdot \frac{d\varepsilon_{amortecedor}}{dt} \quad (C139)$$

O modelo de Maxwell pode ser representado pela seguinte equação:

$$\frac{d\varepsilon_{total}}{dt} = \frac{d\varepsilon_{mola}}{dt} + \frac{d\varepsilon_{amortecedor}}{dt} \quad (C140)$$

Se o material é submetido a deformação constante, a tensão decresce gradualmente. Se o material é submetido a tensão constante, a deformação tem dois componentes: um componente elástico correspondente a tensão aplicada e um componente viscoso o qual cresce com o tempo, enquanto a tensão é aplicada. Uma limitação deste modelo é que ele não prediz a fluência (“creep” em inglês) precisamente.

Figura 74 – Modelo de Maxwell



Fonte: Lepoittevin (2012)

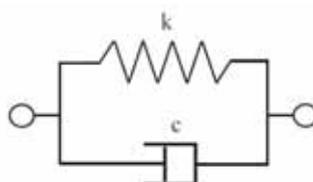
C 1.1.2 - Modelo de Kelvin-Voigt

Este modelo também conhecido por modelo de Voigt é representado por uma mola e um amortecedor atuando em paralelo, como ilustrado Figura 75. Este modelo é utilizado para apresentar o comportamento de fluência do polímero. A relação constitutiva é uma equação diferencial linear de primeira ordem.

$$\sigma(t) = k \cdot \varepsilon(t) + c \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (\text{C141})$$

Se uma tensão constante é aplicada, o material deforma a uma razão decrescente, assintoticamente aproximando o estado-estacionário de deformação. Quando a tensão é retirada, o material relaxa gradualmente para seu estado não-deformado. Este modelo é muito bom para modelar fluência em materiais mas é menos acurado para modelar o relaxamento (LEPOITTEVIN, 2012).

Figura 75 – Modelo de Kelvin-Voigt



Fonte: Lepoittevin (2012)

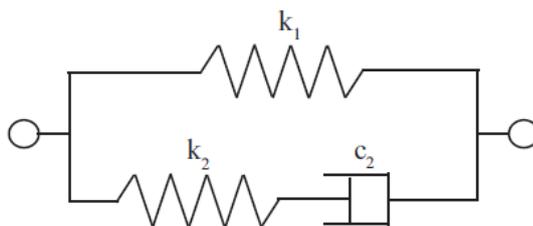
C 1.1.3 - Modelo linear padrão

O modelo linear padrão é representado Figura 76. Este modelo é a combinação do modelo de Maxwell e uma mola linear em paralelo. A equação constitutiva deste modelo é:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{k_2}{c_2 \cdot (k_1 + k_2)} \cdot \left(\frac{c_2}{k_2} \cdot \frac{d\sigma}{dt} + \sigma - k_1 + \varepsilon \right) \quad (\text{C142})$$

Submetido a tensão, o material modelado irá instantaneamente deformar, a qual é a porção elástica da deformação e depois irá continuar a se deformar e assintoticamente aproximar do estado-estacionário de deformação. Esta última parte é a componente viscosa da deformação.

Figura 76 – Modelo linear padrão

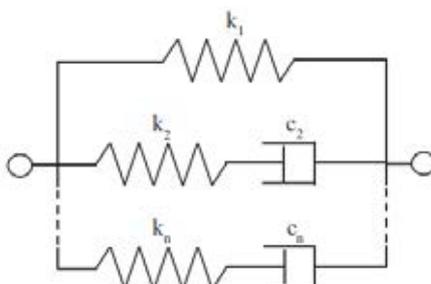


Fonte: Lepoittevin (2012)

C 1.1.4 - Modelo generalizado de Maxwell

O modelo generalizado de Maxwell ilustrado na Figura 77, também chamado de modelo de Maxwell-Weichert, é a mais geral forma dentre os modelos apresentados. Este considera que a relaxamento não ocorre de uma única vez, mas sim distribuído ao longo do tempo. Isto é realizado através de muitos elementos de Maxwell, tantos quanto forem necessários para representar a distribuição.

Figura 77 – Modelo linear padrão



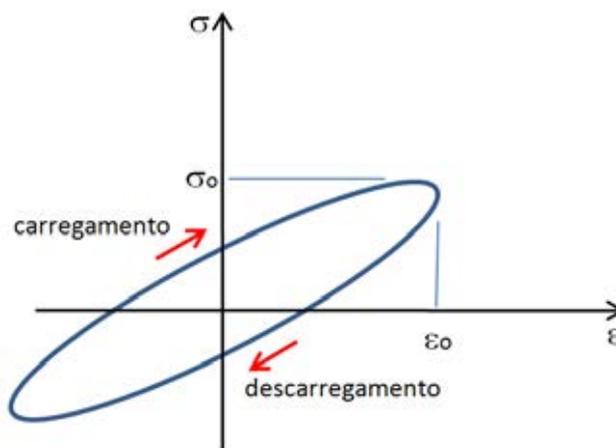
Fonte: Lepoittevin (2012)

C 1.2 - Comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos

A resposta de um material para um carregamento cíclico é chamado de comportamento dinâmico. Para materiais viscoelásticos, o comportamento dinâmico é de grande interesse, pois estes materiais são aplicados em projetos onde é necessário o amortecimento de vibrações ou para a absorção de ruídos. Um material viscoelástico quando submetido a um carregamento cíclico, devido aos efeitos de amortecimento, dissipa parte da energia de deformação e assim surge uma defasagem entre a tensão e a deformação. O ângulo de fase ou fator de perda η é assim definido. Baseado nas definições de trabalho e energia, através do gráfico de histerese ilustrado na Figura 78, o qual é obtido por um ciclo de carregamento e

descarregamento do material, é possível calcular a energia dissipada, através da área interna da elipse (FENZA, 2011).

Figura 78 – Ciclo de histerese no material viscoelástico



Fonte: Autor

Uma análise dinâmica pode ser efetuada ao submeter o material a uma carregamento cíclico a deformação γ é obtida por uma pequena amplitude γ_0 com uma frequência fixa ω (rad/s):

$$\gamma = \gamma_0 \cdot \text{sen}(\omega t) \quad (\text{C143})$$

A velocidade de deformação ou do cisalhamento é obtida pela derivada com relação ao tempo:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma} = \omega \cdot \gamma_0 \cdot \cos(\omega t) \quad (\text{C144})$$

Para um material *Hookiano* a tensão é diretamente relacionada com a deformação $\tau = G\gamma$, mas no caso de carregamento senoidal a deformação torna-se:

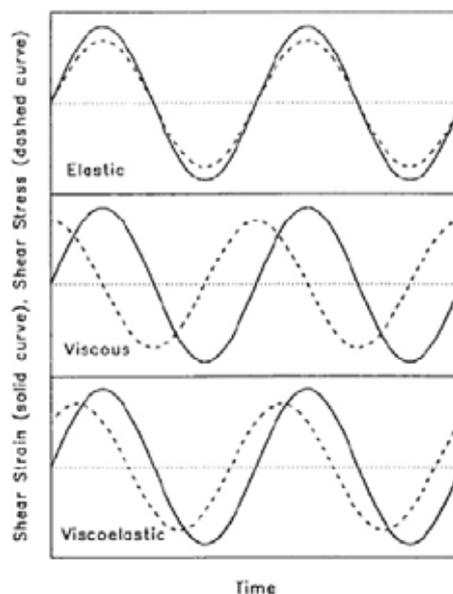
$$\tau = G \cdot \gamma_0 \cdot \text{sen}(\omega t) \quad (\text{C145})$$

Para um material *Newtoniano*, a relação para tensão é $\tau = \mu\dot{\gamma}$ e para o caso de carregamento senoidal a deformação torna-se:

$$\tau = \mu \cdot \omega \cdot \gamma_0 \cdot \cos(\omega t) \quad (\text{C146})$$

Representando este comportamento graficamente, como ilustrado na Figura 79, observa-se que o material sólido apresenta a curva de tensão em fase com a curva de deformação, enquanto o fluido tem as curvas tensão-deformação defasadas em 90° . Para o material viscoelástico a defasagem está entre 0 e 90° , refletindo assim o comportamento que engloba as características de ambos os estados.

Figura 79 – Ciclo de histerese no material viscoelástico no tempo

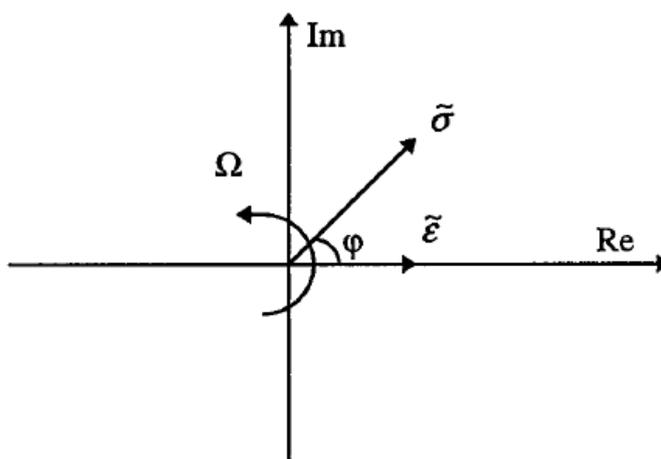


Fonte: Lepoittevin (2012)

C 1.3 - Módulo Complexo e Fator de Perda

Duas grandezas fundamentais para caracterizar os materiais viscoelásticos são o módulo complexo e fator de perda. Estas grandezas podem ser obtidas numericamente a partir do comportamento ilustrado na Figura 78. Uma outra representação para o estado de tensão destes materiais é ilustrado na Figura 80, no qual observa-se uma representação complexa.

Figura 80 – Módulo complexo



Fonte: Lepoittevin (2012)

O comportamento ilustrado pode ser expressado por:

$$\sigma^* = E^* \cdot \varepsilon^* \quad (\text{C147})$$

Onde E^* representa o módulo complexo na forma:

$$E^* = E' + iE'' \quad (\text{C148})$$

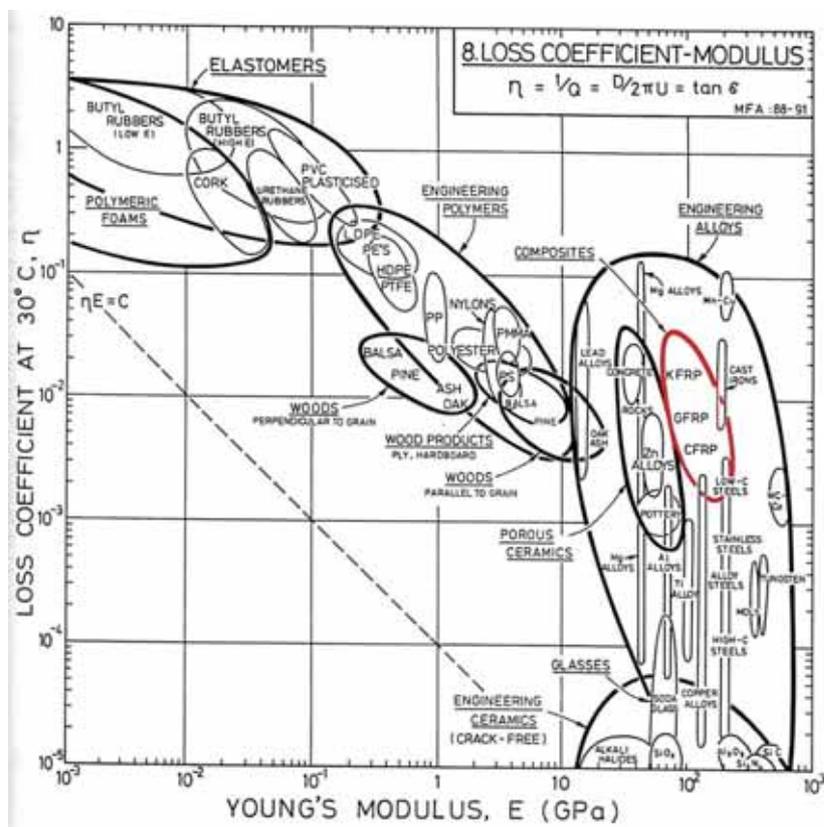
O material viscoelástico armazena a energia durante a deformação (expressado pelo módulo de armazenamento E') e libera parte da energia durante a retirada da força aplicada (expresso pelo módulo de dissipação E''). O ângulo de fase entre a tensão e deformação é expressa por uma tangente.

$$\tan(\delta) = \frac{E''}{E'} = \eta \quad (\text{C149})$$

A grandeza η é conhecida como fator de perda ou fator de dissipação, este parâmetro quantifica a energia liberada, pois é a razão entre a energia dissipada pela armazenada num ciclo de deformação.

Todos os materiais dissipam energia durante um ciclo de carregamento através do atrito interno (histerese). A Figura 81 representa no gráfico o coeficiente de perda η em função do módulo de elasticidade para diversos materiais.

Figura 81 – Comparação entre materiais



Fonte: Ashby (1994)

Em geral η decresce com o crescimento de E . Materiais cerâmicos apresentam tipicamente baixo amortecimento, em oposição existem os polímeros com alto amortecimento. Os materiais compósitos apresentam altos módulos de elasticidade associados a relativos altos coeficientes de perda.

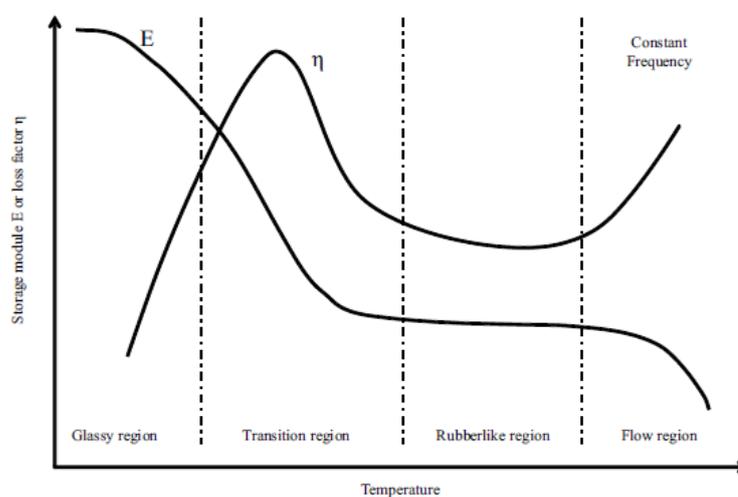
C 1.4 - Fatores que afetam os materiais viscoelásticos

A performance dos materiais viscoelásticos são afetadas pela temperatura, frequência de vibração, amplitude de deformação, dentre outras. Esta seção irá apresentar o efeito destes fatores sobre o módulo de armazenamento e fator de perda, os quais são as propriedades mais importantes para as aplicações dinâmicas.

C.1.4.1 Efeitos da temperatura

Este efeito é considerado o mais influente fator ambiental o qual afeta as propriedades de amortecimento destes materiais. Uma representação da variação do módulo de armazenamento (E') e fator de perda (η) em função da temperatura é ilustrada na Figura 82. A temperatura afeta o estado do material, o qual pode ser dividido em 4 regiões: região vítrea, região de transição, região similar a borracha e fluida.

Figura 82 – Dependência do módulo e fator de perda com relação à temperatura



Fonte: Lepoittevin (2012)

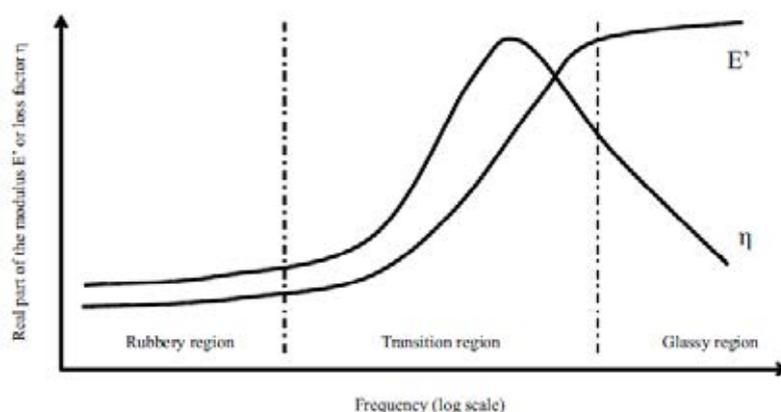
Na região vítrea o módulo de armazenamento decresce lentamente, enquanto o fator de perda aumenta rapidamente. Na segunda região o módulo de armazenamento decresce rapidamente e o fator de perda alcança o seu valor máximo. Na terceira região ambos os valores E' e η permanecem praticamente constantes. Na última região o material se liquefaz com o aumento da temperatura.

C.1.4.2 Efeitos da frequência

O efeito da frequência sobre o módulo de armazenamento e fator de perda pode ser dividido em três regiões: região vítrea, região de transição e região similar à borracha. A Figura 83 ilustra o módulo de armazenamento e fator de perda em função da frequência, é possível visualizar a transição de fases do material. Na região onde o material se assemelha a borracha e na região vítrea o módulo de armazenamento aumenta a uma pequena taxa, já uma alta taxa é observada na região de transição. A respeito do fator de perda, este aumenta a uma pequena taxa na primeira região, na região de transição a taxa aumenta e o parâmetro atinge seu maior valor e volta a cair na região vítrea.

É importante observar que uma escala logarítmica é necessária para representar a dependência em relação a frequência. Isso significa que as mesmas mudanças de E' e η são refletidas por uma série de ordens de magnitude de frequência mas sobre poucos graus de temperatura. Por outro lado o efeito da frequência sobre E' e η é muito menor se comparado a temperatura.

Figura 83 – Dependência do módulo e fator de perda com relação à frequência



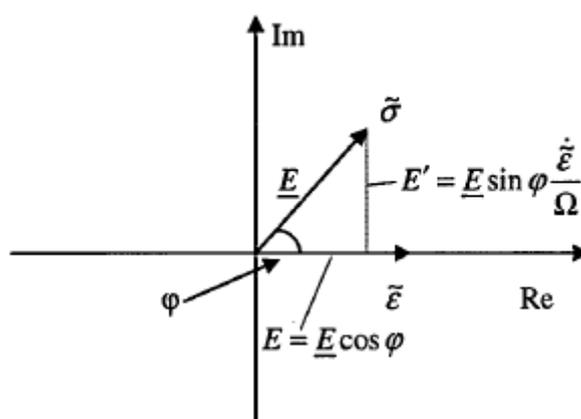
Fonte: Lepoittevin (2012)

C 2 - Amortecimento histerético

C 2.1 - Módulo Complexo e Fator de Perda

Para encontrar o fator de perda a análise pode ser feita a partir do diagrama de fase de tensão deformação na Figura 84 – .

Figura 84 – Diagrama de fase tensão-deformação



Fonte: Lepoittevin (2012)

A análise se inicia com a relação básica de seno.

$$\text{sen}(\varphi) = \frac{E'}{\sqrt{E^2 + E'^2}} \quad (\text{C150})$$

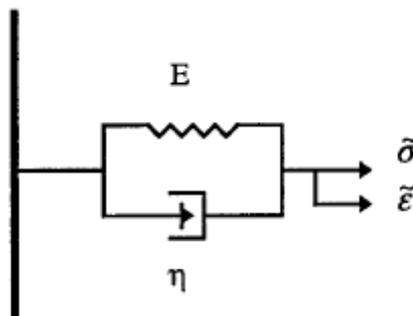
Através da manipulação algébrica obtemos uma nova relação

$$\text{sen}(\varphi) = \frac{E'}{E \sqrt{1^2 + \left(\frac{E'}{E}\right)^2}} = \frac{\frac{E'}{E}}{\sqrt{1 + \left(\frac{E'}{E}\right)^2}} = \frac{\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}} \quad (\text{C151})$$

O ângulo φ pode ser medido experimentalmente e η solucionando a equação (C14). Reforçando que para materiais com esta propriedade E e η são essencialmente constantes. Em contraste com os modelos viscoelásticos, o fator de perda é constante, podendo ser calculado pela elipse da Figura 78. A elipse não muda de tamanho com a mudança da frequência, porém cabe ressaltar que ela pode ser alterada em função de mudanças geométricas e carregamento na estrutura.

Para calcular a tensão e deformação do modelo apresentado na Figura 85, é utilizado a representação complexa do módulo E .

Figura 85 – Modelo padrão



Fonte: Lepoittevin (2012)

As componentes real e imaginária ao longo do eixo real e imaginário da Figura 84 são obtidos pelas relações:

$$Re[\hat{\sigma}] = \bar{E} \cdot \cos(\varphi \hat{\varepsilon}) \quad (C152)$$

$$Im[\hat{\sigma}] = \bar{E} \cdot \text{sen}\left(\varphi \frac{\hat{\varepsilon}}{\Omega}\right) \quad (C153)$$

Unindo as expressões obtém:

$$\hat{\sigma} = \bar{E} \left(\hat{\varepsilon} \cdot \cos\varphi + \frac{\hat{\varepsilon}}{\Omega} \text{sen}\varphi \right) \quad (C154)$$

Recalculando a equação (C15) e aplicando a expressão

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \quad (C155)$$

É obtida a relação constitutiva

$$\hat{\sigma} = \bar{E} \left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\sqrt{1+\eta^2}} + \frac{\hat{\varepsilon}\eta}{\Omega\sqrt{1+\eta^2}} \right) \quad (C156)$$

Reescrevendo a equação (C20) em notação complexa, tem-se:

$$\hat{\sigma} = \bar{E} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} + i \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} \right) \bar{\varepsilon} \quad (C157)$$

Através da relação da equação (C22) e algumas operações algébricas, obtém a equação (C23)

$$\bar{E} = \sqrt{E^2 + E'^2} \quad (C158)$$

$$\bar{\sigma} = E(1 + i\eta)\bar{\varepsilon} \quad (C159)$$

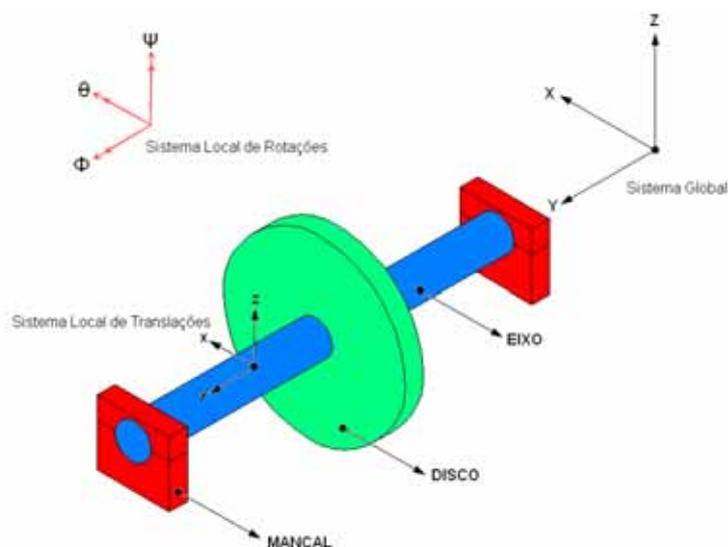
Observa-se que na equação (C23) não existe dependência em relação à frequência.

APÊNDICE D – Fundamentos para análise dinâmica de rotores

D1 – Introdução

Segundo Lalanne e Ferraris (1997) os elementos básicos de um rotor são: discos, eixos e mancais, como ilustrado na Figura 86. A massa desbalanceada a qual não pode ser completamente evitada deve também ser considerada parte fundamental de um rotor. Expressões da energia cinética são necessárias para caracterização do disco, eixo e desbalanceamento. A energia de deformação é necessária para caracterizar o eixo. As forças resultantes nos mancais são usadas para o cálculo do trabalho virtual e desta forma se obtém as forças atuando no rotor.

Figura 86 - Elementos básicos de um rotor



Fonte: Autor

A equação geral para um rotor é desenvolvida a partir das seguintes etapas: calcular a energia cinética T , calcular a energia de deformação U , calcular a energia dissipada R e calcular o trabalho virtual δW das forças externas para os elementos do sistema. Um método numérico deve ser escolhido para a solução do problema dinâmico, segundo alguns critérios: o método Rayleigh-Ritz para sistemas com poucos graus de liberdade, e o MEF para aplicações de engenharia em geral.

A Equação de Lagrange é aplicada na seguinte forma,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{q}_i} \right) - \frac{\delta T}{\delta q_i} + \frac{\delta U}{\delta q_i} + \frac{\delta R}{\delta q_i} = F_{q_i} \quad (\text{D160})$$

onde $N(1 < i < N)$ é o número de graus de liberdade, q_i são coordenadas independentes generalizadas, F_{q_i} são forças generalizadas, e " \cdot " denota diferenciação em relação ao tempo t .

Os rotores por se tratarem de estruturas elásticas têm a propriedade de vibrarem, estas vibrações podem ocorrer de três maneiras distintas: axialmente na direção longitudinal do eixo do rotor, torcionalmente no eixo de rotação do rotor e transversalmente no plano perpendicular a longitudinal do eixo do rotor.

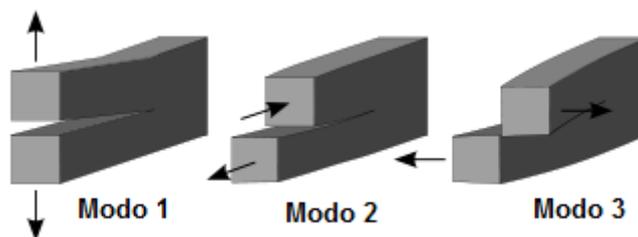
D2 - Vibrações axiais

Este tipo de vibração é mais rara de acontecer, pois depende de uma carga axial ao rotor para excitar uma frequência natural do sistema. Um exemplo de equipamento no qual este tipo de vibração pode ocorrer é em turbina eólica que devido à flutuação do carregamento gerado pelo vento pode promover a excitação. O acoplamento entre um modo de vibração axial e transversal pode ser encontrado no engrenamento entre engrenagens cônicas e helicoidais. Diferentemente do observado em vibrações transversais as tensões são uniformes na seção do rotor sob vibração axial.

D3 - Vibrações torcionais

O segundo tipo de vibração ocorre no eixo de rotação do rotor e é relativamente linear, pois os mancais e outras estruturas suportes têm pouco ou nenhuma influência nas frequências naturais. Na prática vibrações transversais e axiais são facilmente monitoradas e desta forma podem ser minimizadas com melhorias de projeto, em contraste as vibrações torcionais não podem ser monitoradas facilmente, principalmente devido à baixa amplitude do deslocamento. Embora sejam de baixa amplitude, podem causar sérios danos à estrutura do rotor, como por exemplo, na propagação de trincas em fadiga devido ao modo III. A Figura 87 ilustra os três modos de cisalhamento existentes.

Figura 87 – Modos de cisalhamento de uma trinca



Fonte: Autor

D4 - Vibrações transversais

Segundo Friswell et al. (2012), as vibrações transversais são as que apresentam a maior amplitude de deslocamento na maioria das máquinas rotativas e por este motivo existe a preocupação de entendê-las e controlá-las. Em muitos casos esta vibração pode ocasionar o contato entre as partes rotativas e estacionárias das máquinas podendo ocasionar falhas catastróficas.

As vibrações transversais são geradas por forças laterais, as mais comuns são oriundas de desbalanceamentos, os quais podem ser minimizados através de balanceamentos. Os desbalanceamentos, no entanto, nunca são eliminados por completo nas máquinas reais.

As frequências naturais transversais são determinadas pela rigidez lateral e pela distribuição de massa do sistema constituído de rotor-mancais-fundação. A massa desbalanceada e por consequência a força lateral, possui a frequência natural diretamente proporcional a velocidade de rotação do rotor e quando esta coincide com uma das frequências naturais transversais do rotor, a amplitude da vibração torna-se alta, neste instante o rotor está em uma velocidade crítica.

Entre a partida e a velocidade de operação de uma máquina rotativa, como por exemplo um Turbofan de avião, é comum que o rotor atravessasse algumas de suas velocidades críticas. Para a maioria das classes de máquinas é recomendado que as mesmas não operem em rotações próximas as velocidades críticas ou mesmo permaneçam por muito tempo nestas velocidades, por correrem o risco de serem danificadas.

As vibrações transversais podem ocorrer em duas direções sobre o plano simultaneamente e por este motivo ao observarmos a órbita de um ponto qualquer do rotor,

iremos observar que o mesmo descreve uma elipse, porém se as rigidezes e amortecimentos dos mancais em ambas as direções forem iguais, iremos observar um círculo, conseqüentemente a tensão de flexão no rotor será constante. Na prática dificilmente esta condição será atendida, sendo freqüente a anisotropia na direção vertical e horizontal, considerando um rotor operando na horizontal, assim as tensões no rotor serão variáveis ao longo da órbita descrita.

D5 - Forças de excitação

Existem diversos fatores que podem gerar uma resposta dinâmica do rotor, estes fatores têm diversas origens internas ou externas ao sistema e podem ser agrupadas em quatro categorias principais: desbalanceamento, força constante, força assíncrona e força harmônica.

D5.1 - Massa Desbalanceamento

A definição de massa desbalanceada é definida como sendo uma massa m_u situada a uma distancia d em relação ao centro geométrico do eixo. A massa permanece em um plano perpendicular ao eixo longitudinal do rotor em uma posição fixa sobre este eixo de coordenada. As forças atuantes devido ao desbalanceamento são expressas pelas seguintes equações:

$$F_u = m_u \cdot \Omega^2 \cdot d \cdot \text{sen}(\Omega \cdot t) \quad (\text{D161})$$

$$F_w = m_u \cdot \Omega^2 \cdot d \cdot \text{cos}(\Omega \cdot t) \quad (\text{D162})$$

D5.2 - Força assíncrona

Uma força assíncrona é uma excitação que pode atuar em rotores em certas condições de operação. A relação entre a freqüência da força assíncrona e a freqüência de rotação do eixo pode ser representada como um fator escalar s . As forças atuantes são expressas pelas seguintes equações.

$$F_u = F_a \cdot \text{sen}(s \cdot \Omega \cdot t) \quad (\text{D163})$$

$$F_w = F_a \cdot \text{cos}(s \cdot \Omega \cdot t) \quad (\text{D164})$$

Um exemplo típico deste tipo de força é encontrado na excitação gerada pelos mancais com películas grossas, os quais possuem frequência igual a metade da frequência de rotação $s = 0,5$.

D5.3 - Força harmônica

Neste caso considera-se que o rotor gire a uma velocidade constante. A força atuante é externa e possui frequência ω e amplitude F_0 . As componentes desta excitação são expressas por:

$$F_u = F_{ox} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \quad (\text{D165})$$

$$F_w = F_{ox} \cdot \text{cos}(\omega \cdot t) \quad (\text{D166})$$

APÊNDICE E – Resultados de análises dinâmicas

Figura 88 – Gráfico de Campbell para o caso D

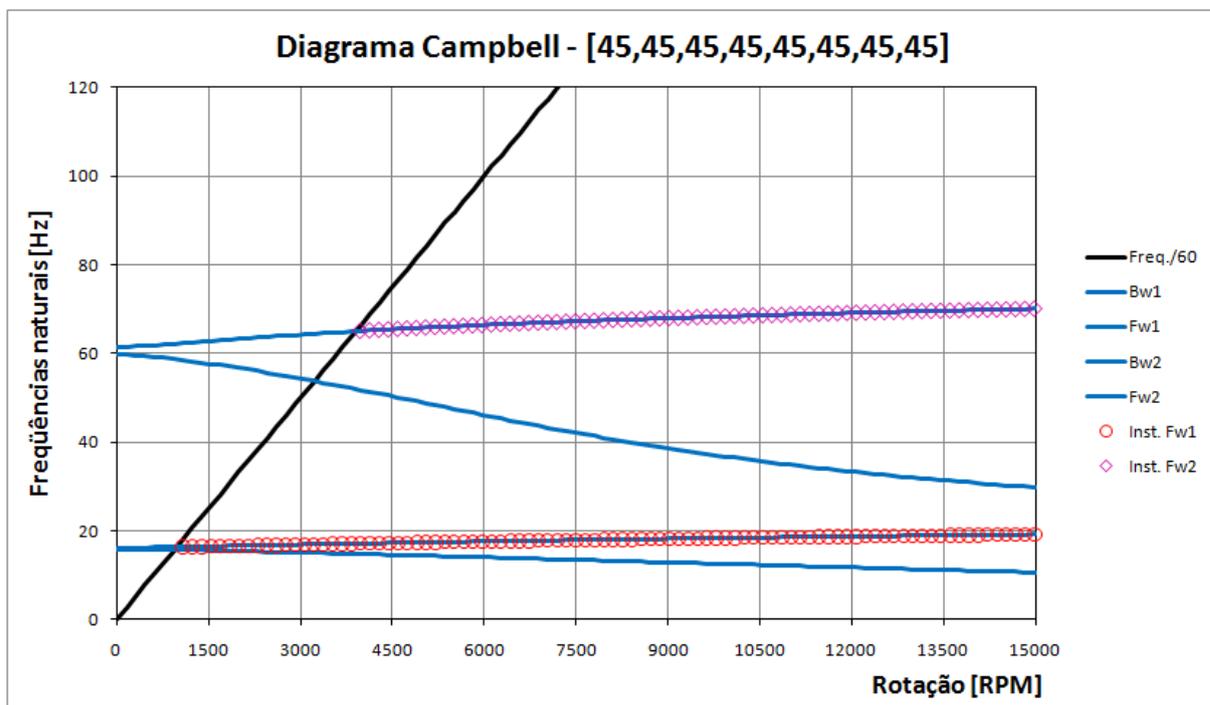


Figura 89 – Gráfico de Campbell para o caso E

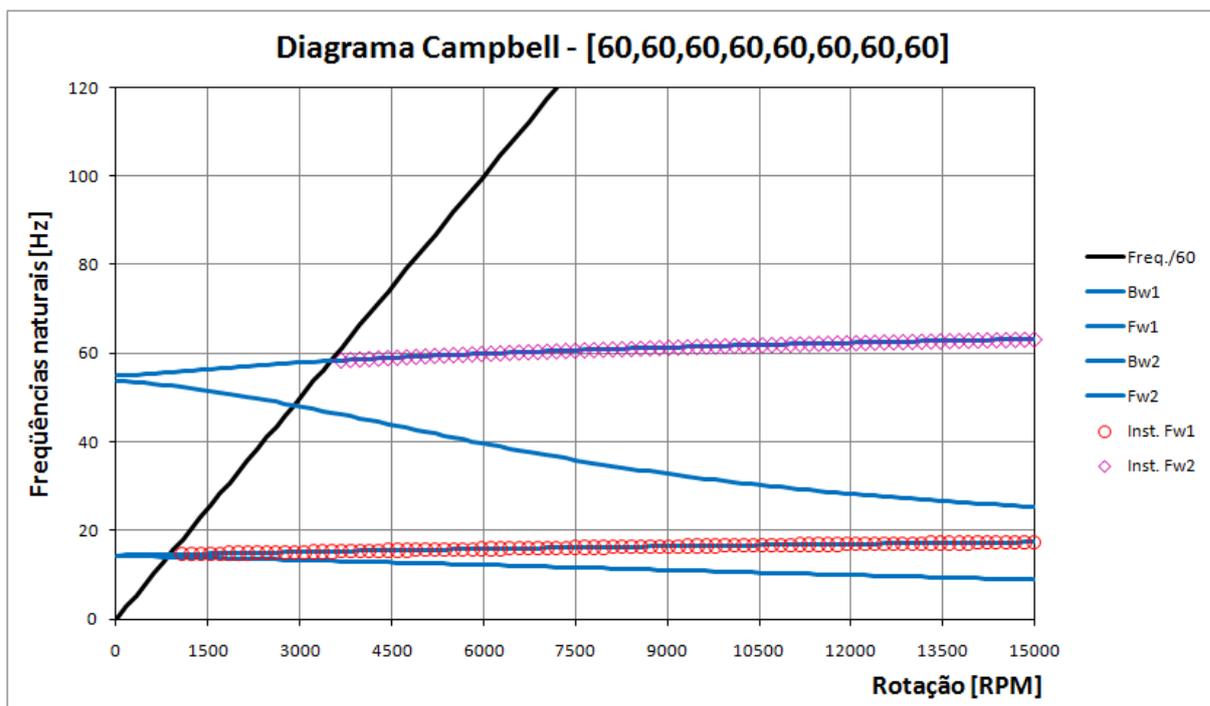


Figura 90 – Gráfico de Campbell para o caso F

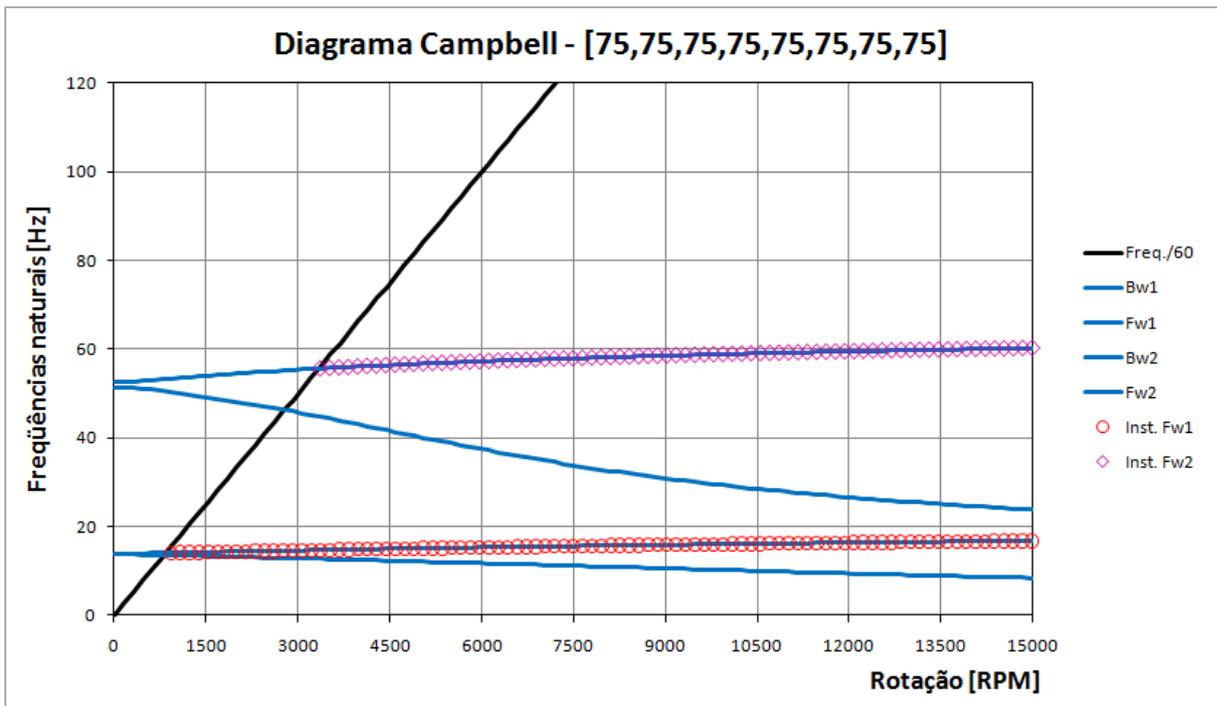


Figura 91 – Gráfico de Campbell para o caso G

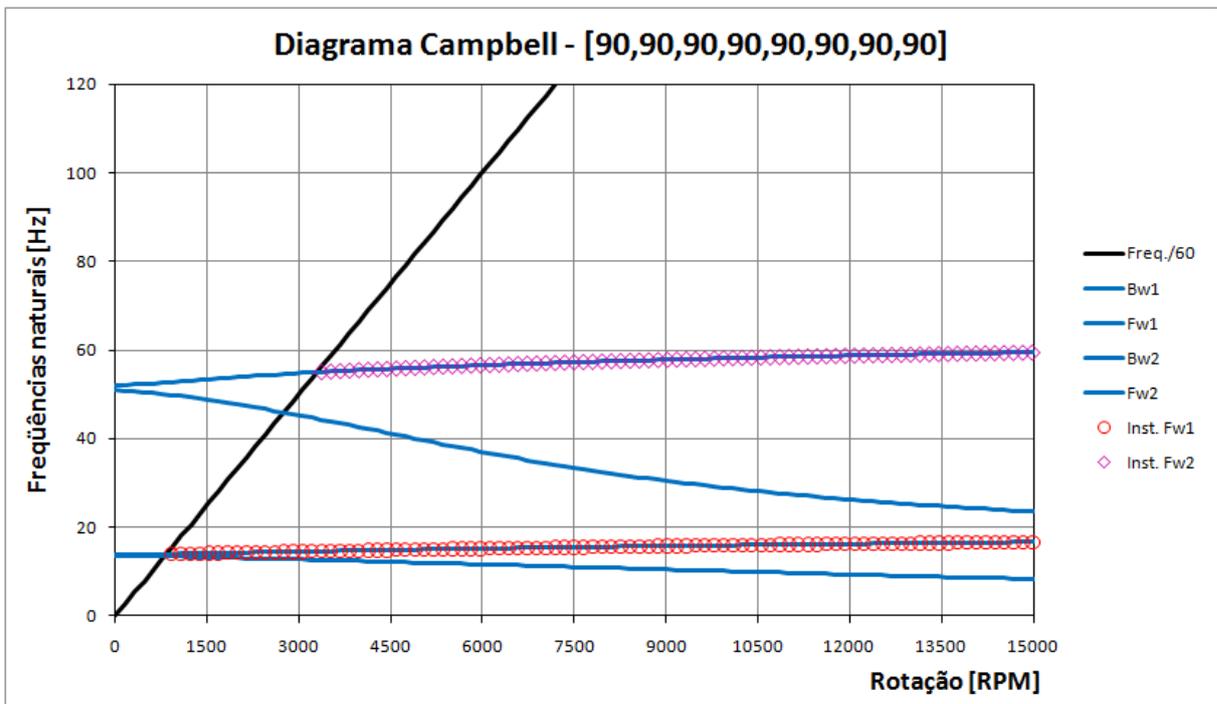


Figura 92 – Gráfico de Campbell para o caso H

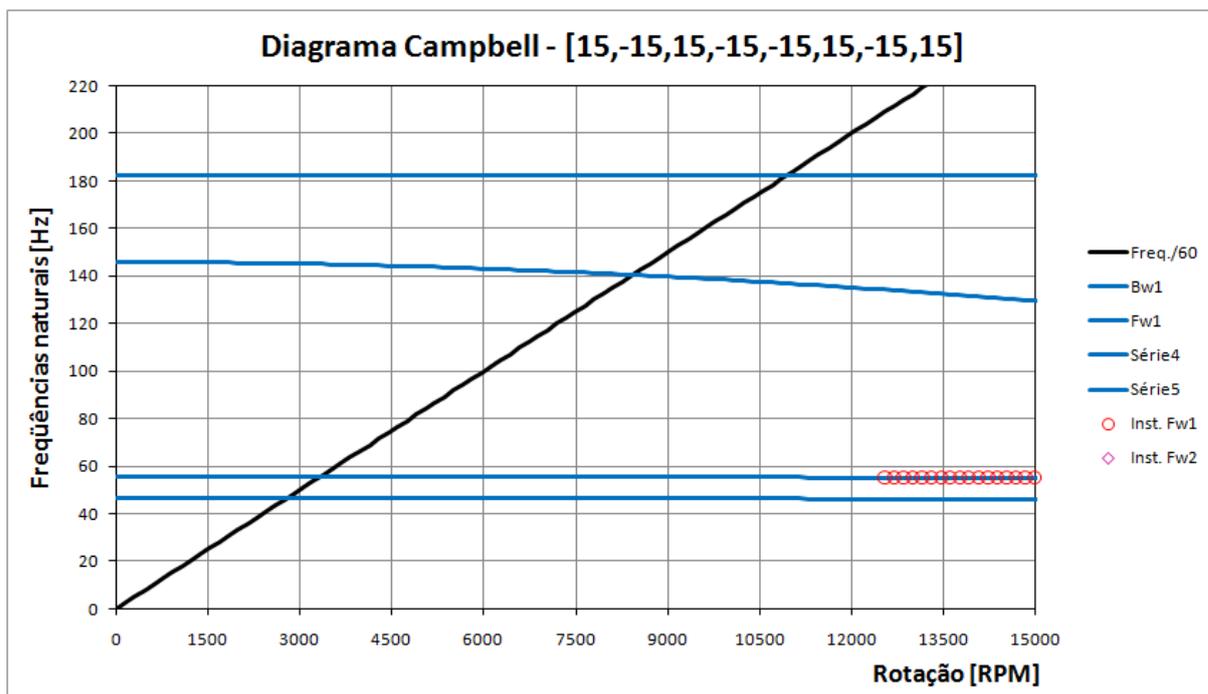


Figura 93 – Gráfico de Campbell para o caso I

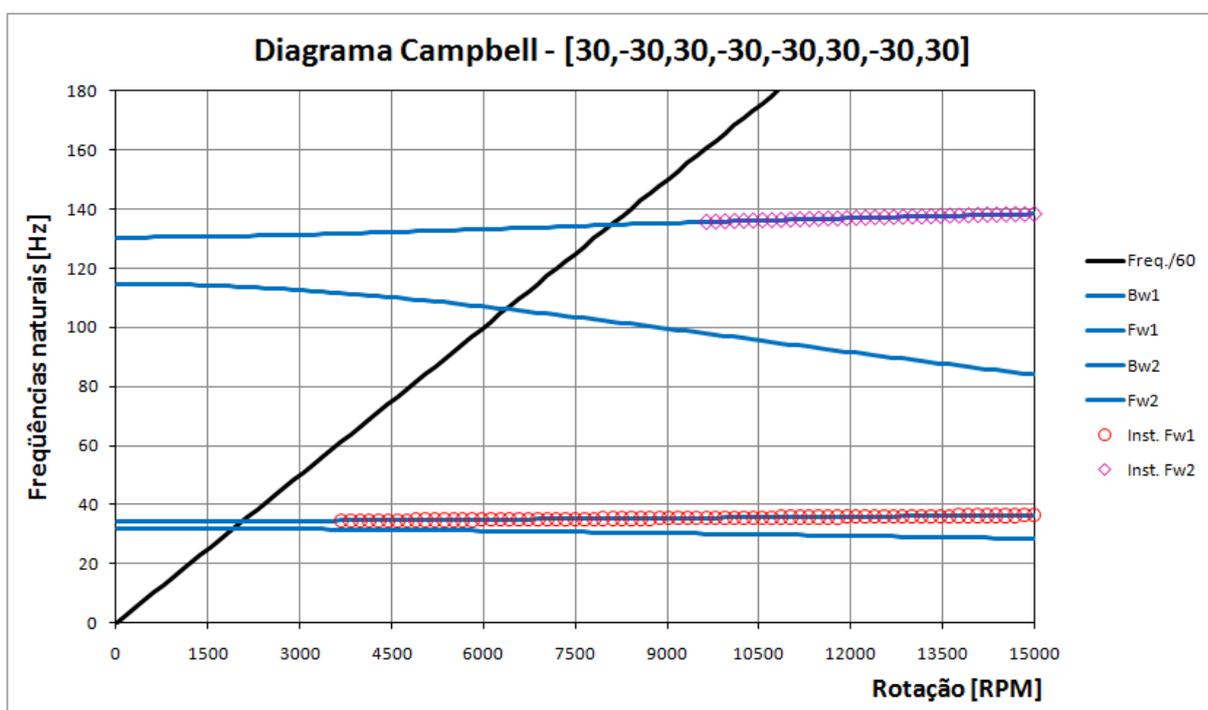
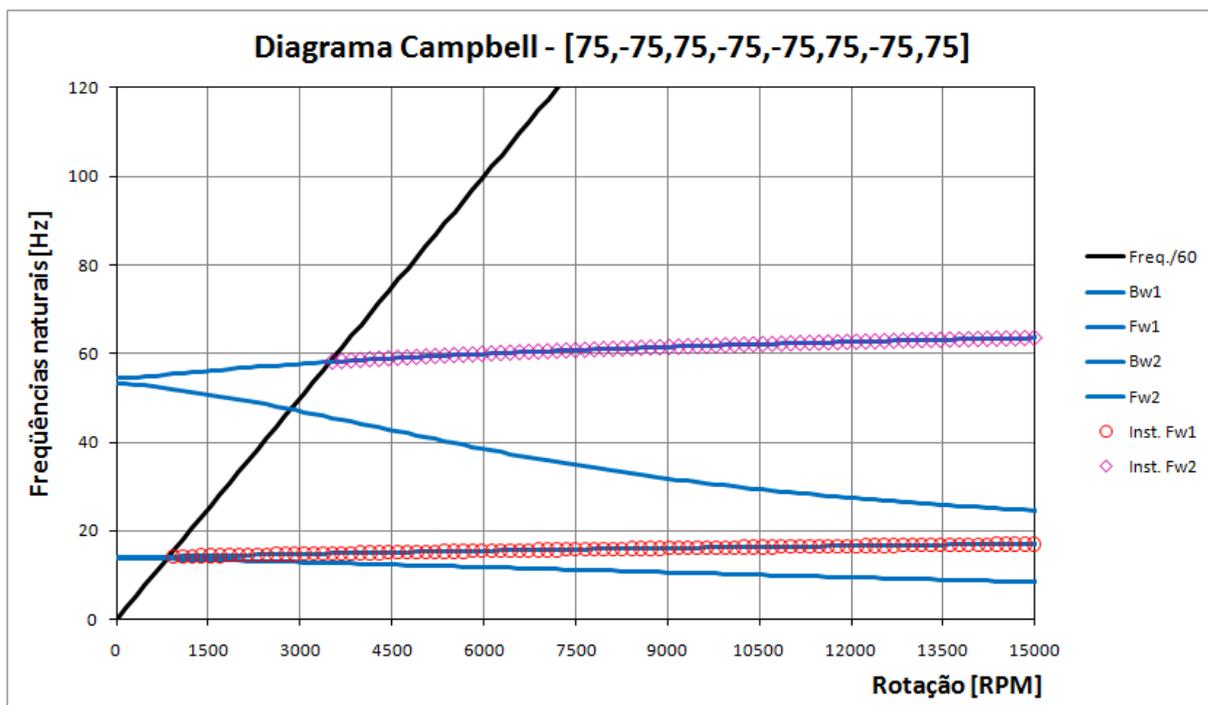


Figura 96 – Gráfico de Campbell para o caso M



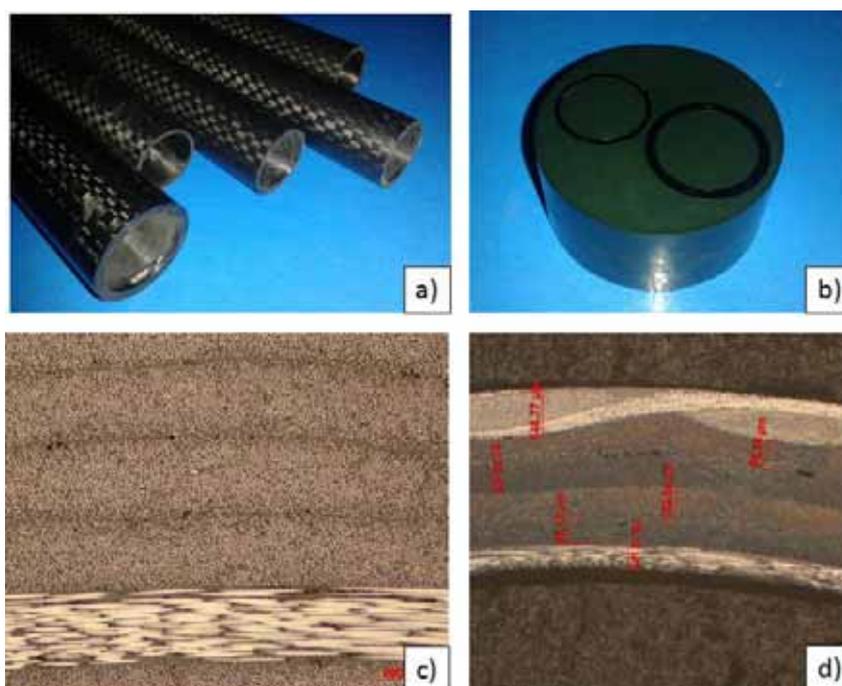
APÊNDICE F – Caracterização dos eixos em compósito

F1 – Pré caracterização

Alguns eixos em compósitos foram adquiridos para o desenvolvimento de uma bancada experimental. A Figura 97 ilustra em a) os eixos comprados, b) embutimento realizado para avaliação metalográfica, c) uma seção avaliada onde se observa a direção das fibras e em d) algumas das medidas realizadas para verificar a espessura da lamina utilizada.

O fornecedor dos eixos não enviou dados sobre qual fibra de carbono foi utilizada NE informações sobre direção e quantidades de laminas. Assim a importância de realizar uma caracterização mais abrangente destes eixos.

Figura 97 – Eixos adquiridos



F2 – Avaliação do módulo de elasticidade

Para avaliar o módulo de elasticidade foi realizado um experimento em que os eixos foram bi-apoiado e cargas foram aplicadas no comprimento médio. Através da flecha adquirida e das propriedades geométricas do eixo, o módulo equivalente era obtido pela equação (F1), a Figura 98 ilustra os experimentos realizados.

$$E = \frac{P.L^3}{48.I.x}$$

(F1)

Figura 98 – Experimento



Através dos experimentos foram gerados dados como a do eixo nomeado de 5 apresentado na Tabela 14. Os dados desta tabelas foram ajustados por curvas como ilustrado na Figura 99, a partir das quais eram obtidos valores médios de carga e deslocamento. Estes valores através da equação (F1) calculou os módulos equivalentes de cada eixo apresentadas na Tabela 15.

Figura 99 – Curva ajustada

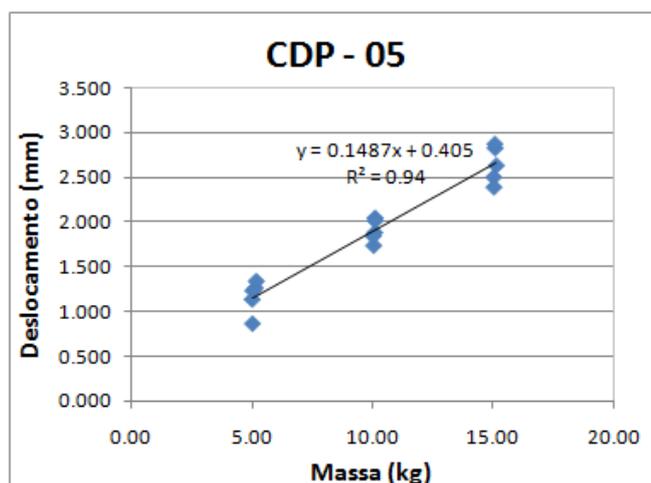


Tabela 14 – Medidas do eixo 5

CDP Nº	Posição	P (kg)	y (mm)
5	0°	5.01	0.857
		10.04	1.733
		15.02	2.501
5	90°	5.00	1.129
		10.08	1.879
		15.03	2.389
5	180°	5.02	1.226
		10.02	1.840
		15.13	2.632
5	Desl. Esq	5.13	1.256
		10.10	2.044
		15.08	2.828
5	Desl. Dir	5.17	1.333
		10.10	2.013
		15.07	2.874

Tabela 15 – Módulos equivalentes

Tubo	E	E médio
#	GPa	GPa
1	121.04	122.62
2	124.20	
3	93.52	95.38
4	94.05	
5	100.87	
6	93.09	

APÊNDICE G – Bancada experimental

G1 – Bancada experimental

Uma bancada experimental foi desenvolvida para acomodar os eixos em carbono adquiridos, a Figura 100 apresenta a pré-montagem da bancada. Os primeiros testes só ocorreram após a execução da caracterização dos eixos.

Figura 100 – Bancada experimental

