

EVERALDO DE BARROS

**INTERAÇÕES MODAIS NÃO RESSONANTES
EM VIGAS CANTILEVER FLEXÍVEIS**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica na área de Projetos e Materiais.

Orientador: Prof. Dr. Fernando de Azevedo Silva

Co-orientador: Prof. Dr. Mauro Hugo Mathias

Guaratinguetá

2004

UNESP  UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá

**INTERAÇÕES MODAIS NÃO RESSONANTES
EM VIGAS CANTILEVER FLEXÍVEIS**

EVERALDO DE BARROS

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“**DOCTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA**”

ESPECIALIDADE: ENGENHARIA MECÂNICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: PROJETOS E MATERIAIS

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Prof. Dr. João Andrade de Carvalho Júnior
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. FERNANDO DE AZEVEDO SILVA
Orientador/UNESP-FEG

Prof. Dr. OTHON CABO WINTER
UNESP-FEG

Prof. Dr. VICTOR ORLANDO GAMARRA ROSADO
UNESP-FEG

Prof. Dr. JOSÉ JULIANO DE LIMA JÚNIOR
IEM/UNIFEI

Prof. Dr. OLIVÉRIO MOREIRA DE MACEDO SILVA
CTA

Setembro de 2004

DADOS CURRICULARES

EVERALDO DE BARROS

NASCIMENTO	02.01.1963 – Taubaté-SP
FILIAÇÃO	Geraldo de Barros Vera Pereira de Barros
1982 – 1988	Graduação em Engenharia Elétrica Universidade de Taubaté – UNITAU Taubaté – SP
1998 – 1999	Mestrado de Especialização em Técnicas Aeronáuticas e Espaciais École Nationale Supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace – ENSAE Toulouse – França
2000 – 2001	Mestrado em Ciências em Engenharia Aeronáutica e Mecânica Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA São José dos Campos – SP
2001 – 2004	Doutorado em Engenharia Mecânica Faculdade de Engenharia da Universidade Estadual Paulista – UNESP-FEG Guaratinguetá – SP

À Vera, minha mãe.
À memória de meu pai, Geraldo.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Mauro Hugo Mathias pela co-orientação deste trabalho ao longo do programa, pelos ensinamentos em dinâmica não linear, por transmitir seus valiosos conhecimentos em simulações laboratoriais, pelas sugestões e referências indicadas e enfim, pela sua inestimável assistência direta na condução de todo o trabalho, que ultrapassou os limites da co-orientação e sem a qual não teria sido possível a elaboração desta tese.

À Divisão de Integração e Ensaaios do Instituto de Aeronáutica e Espaço do Centro Técnico Aeroespacial (CTA-IAE-AIE), na pessoa da Tecnologista Elisabeth de Melo Silva, chefe da AIE, pelo incentivo e interesse demonstrados ao longo deste programa e por disponibilizar o Laboratório de Vibrações da AIE para a realização dos experimentos conduzidos, viabilizando a realização deste trabalho. E na pessoa do Tenente-Coronel Engenheiro Henrique Hiroshi Kanematsu, chefe da AIE no período de 1998 à 2001, pelo interesse na minha formação profissional, pela sua valiosa assistência no início deste trabalho e pelos incentivos dedicados até a conclusão deste programa de doutoramento.

Agradecimentos especiais aos colegas de trabalho do Laboratório de Vibrações da AIE, pelas suas indispensáveis contribuições para a realização dos experimentos conduzidos.

À todas as outras pessoas aqui não citadas que de maneira direta ou indireta, contribuíram para a realização deste programa.

À Deus, por guiar o meu caminho e me dar perseverança para cumprir mais esta etapa de minha vida.

O estudo profundo da natureza é a fonte mais fértil das descobertas matemáticas.

Jean Baptiste Joseph Fourier
(1768-1830)

SUMÁRIO

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

RESUMO

ABSTRACT

1. INTRODUÇÃO	18
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	18
1.2 OBJETIVOS.....	20
1.3 CONTRIBUIÇÕES.....	21
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	22
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	24
2.1 TIPOS DE NÃO LINEARIDADES.....	24
2.2 FENÔMENOS DINÂMICOS NÃO LINEARES.....	24
2.3 TIPOS DE INTERAÇÕES MODAIS.....	26
2.4 HISTÓRICO.....	27
3. MATERIAIS E MÉTODOS	31
3.1 DINÂMICA NÃO LINEAR DE VIGAS INEXTENSÍVEIS.....	31
3.1.1 Definição do sistema dinâmico	31
3.1.1.1 Condição de inextensibilidade.....	33
3.1.1.2 Transformação de coordenadas.....	35
3.1.2 Equações do movimento e condições de contorno	40
3.1.2.1 Lagrangiano do movimento.....	40
3.1.2.2 Princípio de Hamilton estendido.....	43
3.2 APARATO EXPERIMENTAL.....	49

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES	60
4.1 RESPOSTA PLANAR DE VIGAS CANTILEVER FLEXÍVEIS SOB EXCITAÇÃO TRANSVERSAL.....	60
4.1.1 Equações do movimento planar não linear	60
4.1.2 Freqüências naturais lineares	62
4.1.3 Transferência de energia para o 1º modo	65
4.1.4 Transferência de energia em uma viga amortecida	72
4.1.5 Transferência de energia para o 4º e 1º modos	81
4.2 RESPOSTA PLANAR DE VIGAS CANTILEVER FLEXÍVEIS SOB EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA.....	87
4.2.1 Equações do movimento planar não linear	87
4.2.2 Transferência de energia para o 1º modo	89
4.2.3 Transferência de energia para o 2º modo	93
4.2.3.1 Resposta da viga sob excitação aleatória.....	94
4.2.3.2 Resposta da viga sob excitação combinada.....	96
4.2.3.3 Resposta da viga sob excitação harmônica.....	98
4.2.4 Ressonância paramétrica principal do 3º modo	102
5. CONCLUSÕES	106
5.1 VIGA CANTILEVER FLEXÍVEL SOB EXCITAÇÃO TRANSVERSAL....	106
5.2 VIGA CANTILEVER FLEXÍVEL SOB EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA....	107
5.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	108
5.4 RECOMENDAÇÕES PARA FUTUROS TRABALHOS.....	108
 REFERÊNCIAS.....	 110
BIBLIOGRAFIA CONSULTADA.....	115

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	– Telescópio espacial Hubble.....	19
Figura 3.1	– Viga fixada na posição vertical sob movimentos de flexão-flexão-torção.....	33
Figura 3.2	– Deformação de um elemento de viga sobre o eixo neutral.....	34
Figura 3.3	– Rotações do ângulo de Euler.....	35
Figura 3.4	– Rotação do ângulo ψ em torno do eixo z.....	36
Figura 3.5	– Sistema de controle.....	53
Figura 3.6	– Sistema de medidas.....	53
Figura 3.7	– Esquema do aparato experimental.....	54
Figura 3.8	– Viga fixada no vibrador sob excitação transversal na direção y.....	57
Figura 3.9	– Detalhe do dispositivo de engaste e localização dos acelerômetros e do extensômetro.....	58
Figura 3.10	– Viga fixada no vibrador sob excitação longitudinal na direção x.....	58
Figura 4.1	– Viga cantilever sob excitação harmônica transversal na base.....	61
Figura 4.2	– FRF para a faixa de 0 Hz à 200 Hz.....	64
Figura 4.3	– Excitação de entrada: $\Omega = 28 \text{ Hz} - 32 \text{ Hz}$, $a_b = 1,2 \text{ g} \pm 0,5 \text{ dB}$	66
Figura 4.4	– Curva de Resposta-Freqüência para $\Omega = 28 \text{ Hz} - 32 \text{ Hz}$, $a_b = 1,2 \text{ g}$. Resposta do 3º modo.....	66
Figura 4.5	– Curva de Resposta-Freqüência para $\Omega = 28 \text{ Hz} - 32 \text{ Hz}$, $a_b = 1,2 \text{ g}$. Resposta do 1º modo.....	67
Figura 4.6	– Espectros para $\Omega = 29,9 \text{ Hz}$, $a_b = 1,2 \text{ g}$	68
Figura 4.7	– Histórico temporal para $\Omega = 29,9 \text{ Hz}$, $a_b = 1,2 \text{ g}$	70
Figura 4.8	– Espaço de fase para $\Omega = 29,9 \text{ Hz}$, $a_b = 1,2 \text{ g}$	71
Figura 4.9	– Mapa de Poincaré para $\Omega = 29,9 \text{ Hz}$, $a_b = 1,2 \text{ g}$	72
Figura 4.10	– FRF da viga amortecida para a faixa de 0 Hz à 200 Hz.....	74
Figura 4.11	– Espectro da resposta da viga amortecida para $\Omega = 19,5 \text{ Hz}$, $a_b = 0,77 \text{ g}$	75

Figura 4.12 – Observação da resposta da viga amortecida para $\Omega = 18 \text{ Hz} - 20 \text{ Hz}$, $a_b = 0,77 \text{ g}$	77
Figura 4.13 – Histórico temporal da resposta da viga amortecida para $\Omega = 18 \text{ Hz} - 20 \text{ Hz}$, $a_b = 0,77 \text{ g}$	79
Figura 4.14 – Mapa de Poincaré da resposta da viga amortecida para $\Omega = 19,5 \text{ Hz}$, $a_b = 0,77 \text{ g}$	81
Figura 4.15 – Excitação de entrada: $\Omega = 153 \text{ Hz} - 156 \text{ Hz}$, $a_b = 20 \text{ g} \pm 0,5 \text{ dB}$	82
Figura 4.16 – Curva de Resposta-Freqüência para $\Omega = 153 \text{ Hz} - 156 \text{ Hz}$, $a_b = 20 \text{ g}$. Resposta da excitação.....	82
Figura 4.17 – Curva de Resposta-Freqüência para $\Omega = 153 \text{ Hz} - 156 \text{ Hz}$, $a_b = 20 \text{ g}$. Resposta do 1º modo.....	83
Figura 4.18 – Curva de Resposta-Freqüência para $\Omega = 153 \text{ Hz} - 156 \text{ Hz}$, $a_b = 20 \text{ g}$. Resposta do 4º modo.....	83
Figura 4.19 – Espectros para $\Omega = 155 \text{ Hz}$, $a_b = 20 \text{ g}$	85
Figura 4.20 – Histórico temporal da resposta para $\Omega = 155 \text{ Hz}$, $a_b = 20 \text{ g}$	86
Figura 4.21 – Mapa de Poincaré para $\Omega = 155 \text{ Hz}$, $a_b = 20 \text{ g}$	86
Figura 4.22 – Viga cantilever sob excitação paramétrica na base.....	88
Figura 4.23 – Excitação de entrada: $\Omega = 105 \text{ Hz} - 108 \text{ Hz}$, $a_b = 20 \text{ g} \pm 0,5 \text{ dB}$	90
Figura 4.24 – Curva de Resposta-Freqüência para $\Omega = 105 \text{ Hz} - 108 \text{ Hz}$, $a_b = 20 \text{ g}$. Resposta da excitação.....	91
Figura 4.25 – Curva de Resposta-Freqüência para $\Omega = 105 \text{ Hz} - 108 \text{ Hz}$, $a_b = 20 \text{ g}$. Resposta do 1º modo.....	91
Figura 4.26 – Espectros para $\Omega = 106,3 \text{ Hz}$, $a_b = 20 \text{ g}$	92
Figura 4.27 – Histórico temporal da resposta para $\Omega = 106,3 \text{ Hz}$, $a_b = 20 \text{ g}$	93
Figura 4.28 – DEP da entrada aleatória.....	95
Figura 4.29 – Espectro da resposta à excitação aleatória.....	96
Figura 4.30 – DEP da entrada combinada.....	97
Figura 4.31 – Espectro da resposta à excitação combinada.....	97
Figura 4.32 – Excitação de entrada: $\Omega = 326 \text{ Hz} - 329 \text{ Hz}$, $a_b = 20 \text{ g} \pm 0,5 \text{ dB}$	98

Figura 4.33 – Curva de Resposta-Freqüência para $\Omega = 326 \text{ Hz} - 329 \text{ Hz}$, $a_b = 20 \text{ g}$. Resposta da excitação.....	100
Figura 4.34 – Curva de Resposta-Freqüência para $\Omega = 326 \text{ Hz} - 329 \text{ Hz}$, $a_b = 20 \text{ g}$. Resposta do 2º modo.....	100
Figura 4.35 – Espectros para $\Omega = 328 \text{ Hz}$, $a_b = 20 \text{ g}$	101
Figura 4.36 – Curva de Resposta-Freqüência para $\Omega = 61 \text{ Hz} - 64 \text{ Hz}$, $a_b = 4 \text{ g}$. Resposta do 4º modo.....	103
Figura 4.37 – Curva de Resposta-Freqüência para $\Omega = 61 \text{ Hz} - 64 \text{ Hz}$, $a_b = 4 \text{ g}$. Resposta do 3º modo.....	103
Figura 4.38 – Espectro da resposta para $\Omega = 61,9 \text{ Hz}$, $a_b = 4 \text{ g}$	104
Figura 4.39 – Mapa de Poincaré para $\Omega = 61,9 \text{ Hz}$, $a_b = 4 \text{ g}$	105
Figura 4.40 – Movimento da resposta com período de duas vezes o período da excitação para $\Omega = 61,9 \text{ Hz}$, $a_b = 4 \text{ g}$	105

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1	– Propriedades das vigas de alumínio.....	55
Tabela 3.2	– Equipamentos e softwares utilizados.....	55
Tabela 3.3	– Parâmetros utilizados no processamento dos sinais de medida.....	59
Tabela 4.1	– Parâmetros utilizados no processamento dos sinais de FRFs.....	63
Tabela 4.2	– Parâmetros modais teóricos e experimentais da viga de alumínio 2024-T3.....	65
Tabela 4.3	– Parâmetros modais experimentais da viga de alumínio 7075-T6 amortecida.....	74
Tabela 4.4	– Níveis de energia definidos pelo padrão ISO 5344.....	95

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- ISO – International Organization for Standardization
- DEP – Densidade Espectral de Potência
- FRF – Função de Resposta em Frequência
- NASA – National Aeronautics and Space Administration

LISTA DE SÍMBOLOS

a_b	– Aceleração na base
c_u, c_v, c_w, c_ϕ	– Coeficientes de amortecimento
D_ξ	– Rigidez torcional
D_η	– Rigidez flexional ao longo do eixo z
D_ζ	– Rigidez flexional ao longo do eixo y
e_x, e_y, e_z	– Vetores unitários ortogonais do sistema inercial
e_ξ, e_η, e_ζ	– Vetores unitários ortogonais do sistema principal
E	– Módulo de elasticidade transversal
G	– Módulo de elasticidade longitudinal
J_ξ	– Momento principal de inércia torcional
J_η	– Momento principal de inércia flexional ao longo do eixo z
J_ζ	– Momento principal de inércia flexional ao longo do eixo y
l	– Comprimento
ℓ	– Densidade Lagrangiana
L	– Lagrangiano
m	– Massa por unidade de comprimento
$Q_u(t)$	– Excitação harmônica no eixo x
$Q_v(t)$	– Excitação harmônica no eixo y
$Q_w(t)$	– Excitação harmônica no eixo z
$Q_\phi(t)$	– Excitação harmônica torcional
s	– Comprimento do arco descrito pelo eixo elástico na posição deformada
t	– Tempo
$u(s,t)$	– Deslocamento longitudinal no eixo x
$v(s,t)$	– Deslocamento transversal no eixo z
x,y,z	– Sistema de coordenadas inercial
$w(s,t)$	– Deslocamento transversal no eixo y

W	– Frequência natural
Ω	– Frequência de excitação
$\lambda(s,t)$	– Multiplicador de Lagrange
$\phi(s,t)$	– Ângulo de torção
$\rho(s,t)$	– Vetor curvatura
$\omega(s,t)$	– Velocidade angular do sistema de coordenadas principal
ξ,η,ζ	– Sistema de coordenadas principal

BARROS, E. de. **Interações Modais Não Ressonantes em Vigas Cantilever Flexíveis**. 2004. 117f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2004.

RESUMO

Na presença de não linearidades, a resposta forçada de estruturas exhibe diversos fenômenos físicos que não podem ser descritos através de modelos lineares. Estes fenômenos incluem ressonâncias sub-harmônicas, ressonâncias super-harmônicas, “jumps”, movimentos quasi-periódicos, movimentos de período múltiplo, caos e interações modais. Recentes estudos experimentais indicam que um novo tipo de interação modal pode ocorrer através de mecanismos não ressonantes, decorrente da transferência de energia de modos de alta frequência e baixa amplitude para modos de baixa frequência e alta amplitude. Neste trabalho, interações modais não ressonantes são investigadas na resposta planar não linear de vigas cantilever flexíveis sujeitas a excitações externas e paramétricas. As equações diferenciais e as condições de contorno associadas que governam o movimento flexional-flexional não linear de uma viga assumida inextensível, metálica e isotrópica, são apresentadas. O estudo experimental conduzido revelou que a transferência de energia entre modos de alta frequência para modos de baixa frequência ocorre via modulação, sendo função do valor da amplitude de excitação e da proximidade entre os valores da frequência de modulação e da frequência dos modos ativados. O estudo revelou também que a ativação de modos de baixa frequência pode ocorrer sob uma variedade de condições de entrada. Em adição, outros fenômenos dinâmicos não lineares classificados como rotas para o movimento caótico são também observados. Em determinadas condições, movimentos quasi-periódicos com amplitudes moduladas caoticamente e moduladas periodicamente são exibidos. Um movimento de resposta de período dois é também observado.

PALAVRAS-CHAVE: Interações modais, Dinâmica não linear, Vibrações, Viga.

BARROS, E. de. **Nonresonant Modal Interactions in Flexible Cantilever Beams**. 2004. 117f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2004.

ABSTRACT

Interesting physical phenomena occur in the forced response of structures in the presence of nonlinearities, which cannot be explained by linear models. These phenomena include subharmonic resonances, superharmonic resonances, jumps, period-multiplying motions, quasiperiodic motions, chaos and modal interactions. Recent studies suggest that another type of modal interaction may occur through nonresonant mechanisms, due to the energy transfer from the low-amplitude high-frequency modes to high-amplitude low-frequency modes. In this work, nonresonant modal interactions in the nonlinear planar motions of flexible cantilever beams subjected to transverse and parametric harmonic excitations are investigated. The governing equations of the nonlinear bending-bending motions and the associated boundary conditions for an isotropic metallic inextensional beam are presented. An experimental study revealed that the transfer of energy from high-frequency to low-frequency modes occurs via modulation and is found to be function of the excitation amplitude and the closeness of the modulation frequency to the frequencies of the low modes activated. The experimental study also revealed that the energy transfer from high-frequency modes to low-frequency modes occurs for a variety of conditions. In addition, others nonlinear dynamic phenomenas routes to the chaotic motions, are also observed. Under certain conditions, quasiperiodic motion with periodically and chaotically modulated amplitudes are exhibited. Period-doubling motion is also observed.

KEYWORDS: Modal interactions, Nonlinear dynamic, Vibrations, Beam.

CAPÍTULO 1

1. INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Veículos espaciais, aviões, pontes e automóveis são alguns exemplos de estruturas de engenharia com características dinâmicas complexas e compreender o comportamento dinâmico destas estruturas sob uma variedade de excitações externas é essencial para o projeto e análise. A complexidade destas características dinâmicas advém do fato que estas características são influenciadas por não linearidades, mesmo em movimentos de baixa amplitude. Na presença de não linearidades, as respostas livre ou forçada de estruturas exibem diversos fenômenos físicos que não podem ser descritos por modelos lineares. Decorrente disto, a grande maioria dos sistemas dinâmicos é modelada somente através de equações de evolução não lineares.

Um sistema é considerado linear se as características de sua resposta obedecem ao princípio da superposição. Sistemas que não obedecem à este princípio são caracterizados como sistemas não lineares. Em algumas aplicações onde o grau de não linearidade é pequeno, os sistemas podem ser vistos como lineares. No entanto, na grande maioria dos casos práticos, os efeitos adversos das não linearidades são significativos na faixa de resposta de interesse do sistema e geralmente uma análise dinâmica linear torna-se insuficiente para descrever adequadamente o comportamento dinâmico da grande maioria dos sistemas físicos. Na verdade, todas as estruturas de engenharia apresentam um certo grau de não linearidade devido a presença de características dinâmicas não lineares nas juntas estruturais, nas condições de contorno e nas propriedades do material.

Na presença de não linearidades, a resposta de um sistema dinâmico pode exibir vários fenômenos não lineares, incluindo ressonâncias sub-harmônicas, ressonâncias super-harmônicas, “jumps”, movimentos quasi-periódicos, movimentos de período múltiplo e caos. Interação modal é um outro fenômeno não linear exibido, caracterizado pela interação entre os diferentes modos do sistema e pela troca de

energia entre eles, resultando em oscilações indesejáveis de alta amplitude. Em muitos casos, os modos de baixa frequência são ativados através de mecanismos ressonantes internos ou externos, originados de uma combinação ou subcombinação de ressonâncias. Entretanto, um novo tipo de interação modal foi reportado por Smith, Balachandran e Nayfeh (1992), decorrente de uma análise focada em interações não lineares dos dados transmitidos pelo telescópio espacial Hubble. Esta interação modal foi caracterizada pela transferência de energia de modos de alta frequência e baixa amplitude, excitados diretamente, para modos de baixa frequência e alta amplitude.

O telescópio espacial Hubble ilustrado na figura 1.1, é parte integrante do programa denominado origens, concebido pela Agencia Espacial Americana (NASA). Hubble foi levado ao espaço pela nave espacial Space Shuttle Discovery em 24 abr. 1990 e desde então sua missão astronômica tem disponibilizado informações vitais para a compreensão do universo. Hubble, assim como estações espaciais e outras estruturas espaciais flexíveis, possuem tipicamente modos estruturais de baixa frequência e entradas de energia com frequências muito maiores que as frequências naturais do sistema.



Figura 1.1 – Telescópio espacial Hubble.

Após dois anos em operação, uma análise comparativa das respostas do telescópio e da resposta de uma estrutura com vigas foram conduzidas em laboratório para investigar níveis de distúrbios indesejáveis detectados nas missões de observação do Hubble. Estas análises concluíram que os níveis de distúrbios eram o resultado da transferência de energia de modos de alta frequência, excitados diretamente pelas transições do dia para a noite e da noite para o dia, para modos de baixa frequência dos painéis solares do telescópio, da ordem de 0,1 Hz.

Este novo tipo de interação modal, que não é decorrente de uma combinação de ressonâncias interna nem de uma combinação de ressonâncias externa, foi denominado interação modal não ressonante. Para uma estrutura sob excitação harmônica simples, os efeitos adversos deste mecanismo não ressonante podem levar a uma resposta multimodos, oscilações caóticas ou até mesmo a uma resposta catastrófica devido a excitação energética de modos de baixa frequência. Este novo tipo de interação não linear é o foco principal desta tese.

1.2 OBJETIVOS

Interações modais tem sido objeto de grande interesse nas pesquisas em dinâmica não linear nos últimos anos. Vigas cantilever flexíveis, elementos fundamentais em estruturas de engenharia, têm sido extensivamente investigadas como uma estrutura conveniente em experimentos laboratoriais para exibir fenômenos não lineares, incluindo interações modais.

Motivado pelas recentes pesquisas em interações modais e outros fenômenos não lineares, no caso geral, e em interações modais não ressonantes, no caso particular, esta tese apresenta um estudo experimental de interações modais não ressonantes exibidas no movimento planar não linear de vigas cantilever flexíveis sob excitações externas e paramétricas. O termo movimento planar é associado aos movimentos restritos ao plano de excitação e o termo excitação paramétrica é descritivo de casos onde a excitação externa aparece como uma modificação variante no tempo de um ou mais parâmetros do sistema.

1.3 CONTRIBUIÇÕES

Um problema extensivamente estudado em recentes pesquisas em dinâmica não linear é a investigação experimental da resposta não linear de vigas cantilever sob excitações harmônicas externas e paramétricas. Simulações laboratoriais são realizadas através da variação de um ou mais parâmetros de controle do sistema, como a frequência ou a amplitude da força de excitação, e da observação do padrão de periodicidade da resposta decorrente, que pode ser analisado através do auxílio de curvas de resposta-frequência e curvas de força-frequência. Curvas de resposta-frequência são obtidas mantendo-se a amplitude fixa e variando-se a frequência da excitação de entrada, enquanto que curvas de força-frequência são obtidas variando-se a amplitude da excitação e mantendo-se a frequência fixa.

A consistência das curvas experimentais de resposta-frequência e de força-frequência é relacionada a um conjunto de fatores que inclui o mecanismo de excitação, o número e a localização de medidas, o sistema de aquisição de dados associado e o processamento digital dos sinais. Nos experimentos com vigas conduzidos por Moon e Shaw (1983); Shaw (1985); Smith, Balachandran e Nayfeh (1992); Anderson, Balachandran e Nayfeh (1992;1994); Nayfeh e Nayfeh (1994); Brandon e Mathias (1995); Cusumano e Moon (1995); Anderson, Nayfeh e Balachandran (1996); Tabaddor e Nayfeh (1997); Oh e Nayfeh (1998); Oueini (1999); Arafat (1999) e Malatkar (2003), o mecanismo de excitação empregado para investigar movimentos não lineares e caóticos foi restrito a um gerador de sinais externo conectado na entrada do amplificador de potência do vibrador utilizado. Através deste sistema de excitação em malha aberta, entradas harmônicas do tipo varredura seno foram obtidas através de pequenos incrementos de frequência e amplitude, ajustados no gerador externo. Nesta configuração de teste, torna-se extremamente difícil manter constante a amplitude da excitação de entrada, que é variante com a frequência, sobretudo na vizinhança das frequências de ressonância. Estes distúrbios na amplitude da excitação podem poluir o sinal de entrada e como consequência causar a degradação das curvas experimentais de resposta-frequência e de força-frequência.

Em contraste aos estudos experimentais reportados na literatura, no aparato experimental utilizado nesta tese são empregados dois sistemas. O primeiro sistema é constituído de um sistema de controle de vibrações em malha fechada, utilizado para manter constante a amplitude do sinal de excitação e suprimir as oscilações indesejáveis. O segundo sistema é constituído de um sistema de aquisição de dados em malha aberta, utilizado para monitorar a resposta da viga excitada pelo sistema em malha fechada. Não é do conhecimento do autor o emprego desta configuração de ensaio no estudo experimental da resposta não linear de vigas cantilever.

Os experimentos conduzidos nesta tese permitiram a observação de interessantes interações modais não ressonantes, caracterizadas pelas transferências de energia de modos de alta frequência e baixa amplitude para modos de baixa frequência e alta amplitude sob diferentes condições de entrada, que incluíram além de entradas harmônicas, uma entrada aleatória e uma entrada combinada de uma excitação aleatória sobreposta por uma excitação seno de frequência fixa. Em adição, sob excitação externa, movimentos modulados caoticamente e periodicamente também foram observados. Sob excitação paramétrica, foi observada ainda a presença de uma ressonância paramétrica principal devido a excitação de uma ressonância externa primária.

Finalmente, o conjunto de observações experimental reportado nesta tese poderá ser explorado como uma ampla referência para o desenvolvimento de modelos teóricos representativos da dinâmica não linear de vigas cantilever.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Esta tese apresenta um estudo experimental sobre interações modais não ressonantes exibidas na resposta planar de vigas cantilever flexíveis sujeitas a excitações externas e paramétricas.

No Capítulo 2, é apresentada a revisão bibliográfica realizada para o trabalho, incluindo uma abordagem sobre diferentes tipos de não linearidades, os principais fenômenos não lineares exibidos na resposta de um sistema dinâmico na presença de não linearidades e os tipos de interações modais existentes.

No Capítulo 3, são derivadas as equações diferenciais e as condições de contorno associadas que governam o movimento flexional-flexional não linear uma viga de Euler-Bernoulli inextensível metálica isotrópica, através de uma combinação de rotações do ângulo de Euler, multiplicador de Lagrange e princípio de Hamilton estendido. O aparato proposto para as investigações experimentais é apresentado.

No Capítulo 4, são apresentados os resultados e discussões sobre os experimentos conduzidos para investigar interações modais não ressonantes e outros fenômenos não lineares exibidos na resposta planar de vigas cantilever flexíveis sujeitas à deslocamentos transversais e paramétricos. Para entradas senoidais, é observada experimentalmente que a transferência de energia de modos de alta frequência para modos de baixa frequência ocorre via modulação. A ativação de modos de baixa frequência através de mecanismos não lineares é caracterizada também para outras duas diferentes entradas transversais, uma gaussiana e outra gaussiana sobreposta por uma entrada senoidal.

No Capítulo 5 são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 TIPOS DE NÃO LINEARIDADES

Em termos gerais, a presença de não linearidades em mecânica estrutural ocorre através de diferentes formas, destacando-se (Moon, 1987):

- a) A não linearidade *amortecimento*, que é essencialmente um fenômeno não linear, uma vez que o amortecimento viscoso linear é idealizado.
- b) As não linearidades *geométricas*, que ocorre em sistemas sob grandes deformações ou deflexões, resultando em relações não lineares de deformação e deslocamento. Este tipo de não linearidade é exibido através da energia potencial do sistema.
- c) A não linearidade *inércia*, resultante de massas concentradas ou distribuídas, e derivada a partir dos termos não lineares das equações de movimento que contém velocidades e acelerações. A energia cinética do sistema é a fonte geradora desta não linearidade.
- d) As não linearidades *materiais*, caracterizada em sistemas que exibem relações não lineares entre tensão e deformação do material.

Outros tipos de não linearidades incluem ainda sistemas com fluido, sistemas com impacto e condições de contorno não lineares.

2.2 FENÔMENOS DINÂMICOS NÃO LINEARES

Um sistema dinâmico é considerado linear se suas características de resposta obedecem às propriedades aditiva e homogênea, expressas respectivamente por:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad (2.1)$$

$$f(cx) = cf(x) \quad (2.2)$$

onde $f(x)$ é a resposta a uma dada entrada e c é uma constante. Sistemas que não obedecem estas propriedades são caracterizados como sistemas não lineares.

Na presença de não linearidades, a resposta de um sistema dinâmico pode exibir diversos fenômenos não lineares interessantes. Em sistemas de um grau de liberdade, o oscilador de Duffing, descoberto pelo matemático Duffing em 1918, é um exemplo típico deste gênero de sistemas e o mais básico sistema que exibe fenômenos não lineares interessantes. Utilizado no contexto de modelos de pêndulos, molas não lineares e vigas, sua dinâmica é governada pela seguinte equação (Moon, 1987):

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x + \alpha x^3 = F \cos(\Omega t) \quad (2.3)$$

onde γ é o coeficiente de amortecimento, ω é a frequência natural, α é coeficiente de não linearidade, F e Ω são a amplitude e a frequência respectivamente da força externa. Uma análise de perturbação do sistema revelou que, em adição a ressonância linear que ocorre quando $\Omega = \omega$, existem outras duas ressonâncias que levam a movimentos de alta amplitude quando $3\Omega = \omega$ ou $\Omega = 3\omega$, discriminadas como ressonâncias *super-harmônicas* e *sub-harmônicas* respectivamente. Se não linearidades quadráticas são incluídas no modelo, ressonâncias podem ocorrer quando $2\Omega = \omega$ ou $\Omega = 2\omega$. Ainda, quando $\Omega = \omega$ e $\alpha < 0$, a curva de resposta-frequência do sistema exibe uma inclinação para a esquerda, indicando que a não linearidade dominante possui uma influência do tipo “*softening*”. Quando $\alpha > 0$, a curva apresenta uma inclinação para a direita, exibindo uma influência do tipo “*hardening*”. Em adição, “*jumps*”, movimentos *quasi-periódicos*, *movimentos de período múltiplo* e *caos* são outros fenômenos exibidos pela resposta de sistemas forçados na presença de não linearidades. Nayfeh e Mook (1979), Moon (1983) e Rand (2003), apresentam uma abordagem detalhada sobre estes fenômenos não lineares. Em sistemas de múltiplos graus de liberdade e sistemas contínuos, *interação modal* é um outro fenômeno exibido, resultando em uma interação não linear entre os diferentes modos do sistema e pela troca de energia entre eles.

2.3 TIPOS DE INTERAÇÕES MODAIS

Interações modais podem ocorrer através de ressonâncias internas, combinação de ressonâncias externa ou interações modais não ressonantes (Nayfeh, 2000).

Ressonâncias internas podem ocorrer em sistemas onde as frequências naturais lineares ω_i são comensuráveis ou aproximadamente comensuráveis, isto é, existe números inteiros $k_i \neq 0$ tal que $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \dots + k_n\omega_n \approx 0$. O grau de uma ressonância interna é N onde $N \approx |k_1| + |k_2| + \dots + |k_n|$. Assim, o tipo e o grau de uma ressonância interna depende da não linearidade da estrutura. Sistemas com não linearidades quadráticas podem possuir as seguintes ressonâncias internas: $\omega_i \approx 2\omega_j$ (ressonância interna dois para um) e $\omega_i \approx \omega_j \pm \omega_k$ (combinação de ressonâncias). Sistemas com não linearidades cúbicas dominantes podem possuir as seguintes ressonâncias internas: $\omega_i \approx \omega_j$ (ressonância interna um para um); $\omega_i \approx 3\omega_j$ (ressonância interna três para um); $\omega_l \approx \omega_i + \omega_j + \omega_k$ e $\omega_k \approx 2\omega_l \pm \omega_i$ (combinação de ressonâncias interna); $\omega_j \approx \frac{1}{2}(\omega_i \pm \omega_k)$ (subcombinação de ressonâncias interna). Subcombinação de ressonâncias é uma forma alternativa da combinação de ressonâncias.

Combinação de ressonâncias externa pode ocorrer se a frequência de excitação Ω é comensurável ou aproximadamente comensurável com duas ou mais frequências naturais. Sistemas com não linearidades quadráticas podem possuir uma combinação de ressonâncias do tipo $\Omega \approx \omega_i \pm \omega_j$. Sistemas com não linearidades cúbicas podem possuir combinação de ressonâncias externa $\Omega \approx \omega_k \pm \omega_i \pm \omega_j$ e $\Omega \approx \omega_k \pm 2\omega_i$, ou subcombinação de ressonâncias $\Omega \approx \frac{1}{2}(\omega_j \pm \omega_k)$.

Um novo tipo de interação decorrente da transferência de energia entre modos de alta frequência e modos de baixa frequência tem sido observado em recentes estudos experimentais. Nestes experimentos, uma excitação externa ou paramétrica direta de um modo de alta frequência, apresentou uma resposta contendo uma grande contribuição do primeiro modo. A presença do primeiro modo foi associada a uma modulação da amplitude e fase do modo de alta frequência, com a frequência de modulação aproximadamente igual a frequência do primeiro modo. Estes resultados

indicaram que o mecanismo de excitação do primeiro modo não foi decorrente de ressonâncias internas e nem de uma combinação de ressonâncias externa. A presença de modos estruturais bem espaçados, isto é, $\omega_i \gg \omega_j$, foi o único requisito para ativação deste mecanismo não ressonante. Este novo tipo de interação, onde a energia é transferida de um modo de alta frequência para um modo de baixa frequência via modulação, foi denominada *interação modal não ressonante*, também referenciada como *ressonância zero para um* ou ainda *ressonância de Nayfeh*.

2.4 HISTÓRICO

O mecanismo não ressonante responsável pela transferência de energia de modos de alta frequência para modos de baixa frequência foi descoberto experimentalmente por Anderson, Balachandran e Nayfeh (1992), na condução de um experimento com uma viga cantilever flexível de aço com as quatro primeiras frequências naturais lineares de 0,65 Hz; 5,65 Hz; 16,19 Hz e 31,91 Hz, sujeita a uma excitação paramétrica na base. Inicialmente, quando a frequência de excitação atingiu 33,5 Hz, o espectro da resposta planar exibiu um pico máximo no mesmo valor de frequência, decorrente da ressonância primária do quarto modo. Diminuindo gradualmente a frequência de excitação até 32,31 Hz, foi observada a ativação do terceiro modo, excitado pela ressonância paramétrica principal. Quando a excitação atingiu o valor de 32,298 Hz, a resposta bimodal apresentou uma instabilidade e um movimento modulado onde a amplitude e a fase variaram com o tempo. A característica da resposta foi a presença de bandas laterais, separadas por aproximadamente 0,65 Hz (frequência do primeiro modo), na vizinhança da linha espectral correspondente ao terceiro modo. Uma inspeção visual confirmou que a resposta planar da viga foi dominada pelo primeiro modo. Foi reportado de forma conclusiva um novo tipo de interação não linear onde o primeiro modo da estrutura interagiu com modulações associadas a modos de alta frequência. Em um segundo experimento conduzido por Anderson, Balachandran e Nayfeh (1994), a viga foi submetida a uma excitação paramétrica na frequência de excitação de 138 Hz e foi observada uma grande contribuição do segundo modo na resposta planar da viga. O espectro da resposta

apresentou bandas laterais separadas por aproximadamente 5,6 Hz (frequência do segundo modo) em torno da frequência de excitação, além de um pico na frequência de 5,6 Hz. Uma inspeção visual indicou que a resposta da viga foi dominada pelo segundo modo. Foi observado ainda no espectro da aceleração de entrada a presença de bandas laterais em torno da frequência de excitação, indicando que a aceleração da base também foi modulada e que a transferência de energia de modos de alta frequência do sistema para modos de baixa frequência incluiu também o movimento da base do vibrador.

Nayfeh e Nayfeh (1993) apresentaram resultados teóricos demonstrando que interações podem ocorrer entre dois modos com frequências naturais distantes em um sistema com não linearidades cúbicas.

Para investigar a influência de ressonâncias internas na transferência de energia de modos de alta frequência para baixa frequência, Nayfeh e Nayfeh (1994) conduziram um experimento com uma viga cantilever de aço de seção circular. As primeiras cinco frequências naturais lineares da viga estimadas foram de 1,303 Hz; 9,049 Hz; 25,564 Hz; 50,213 Hz e 83,105 Hz. Uma excitação externa foi aplicada na base da viga e o movimento da extremidade livre da viga foi monitorado através de duas cameras, uma orientada para medir o movimento planar e outra para medir o movimento no plano perpendicular ao plano de excitação. Os resultados obtidos para a frequência de excitação próxima a frequência do quinto modo indicaram uma resposta planar e periódica. Ao incrementar a frequência de excitação para valores acima do quinto modo, um “jump”, de um movimento planar e periódico para um movimento fortemente modulado não planar, foi observado. Uma inspeção visual detectou uma modulação da resposta do quinto modo e a presença de componentes de baixa frequência no movimento de resposta. Incrementando um pouco mais a frequência de excitação, um outro “jump” para um movimento de torção não planar fracamente modulado foi observado. Devido a simetria axial da viga, ressonâncias na relação de um para um ocorreram e o modo no plano de excitação interagiu com o modo de mesma frequência do plano perpendicular ao plano da excitação, resultando em movimento de torção não planar. Novamente, uma inspeção visual do movimento de

resposta da viga revelou a presença de uma forte componente de baixa frequência. Neste caso entretanto, não foi identificado a modulação do quinto modo.

Tabaddor e Nayfeh (1997) investigaram experimentalmente a resposta planar de uma viga cantilever de aço sob excitação transversal na base, cujas frequências dos primeiros modos flexionais são 0,68 Hz; 5,81 Hz; 16,65 Hz e 32,35 Hz. Ao excitar a viga na vizinhança do quarto modo, uma resposta bimodal, constituída do primeiro e quarto modos, foi observada. O espectro da resposta exibido apresentou dois picos máximos correspondentes ao quarto e primeiro modos, além de bandas laterais assimétricas em torno da linha espectral do quarto modo, igualmente espaçadas por aproximadamente o valor da frequência do primeiro modo. A assimetria das bandas laterais indicou que a amplitude e fase do quarto foram moduladas e que a energia foi transferida de um modo de alta frequência para um modo de baixa frequência, através do mesmo mecanismo de transferência observado anteriormente nos experimentos com uma viga sob excitação paramétrica.

Arafat (1999) investigou em detalhes a transferência de energia de modos de alta frequência para modos de baixa frequência devido a interações não lineares de flexão-torção. Excitando transversalmente uma viga cantilever flexível de seção retangular na posição horizontal, na vizinhança do primeiro modo de torção, foi observada a ativação do primeiro modo de flexão através do mesmo mecanismo não ressonante.

Malatkar (2003) estudou a transferência de energia entre modos via modulação em vigas cantilever flexíveis. O estudo foi dividido em duas partes, uma que analisou o movimento planar e a parte que analisou o movimento não planar. Na primeira parte é apresentado um estudo teórico e experimental dos efeitos da amplitude da excitação em interações modais não ressonantes. Experimentalmente foi observada a transferência de energia do terceiro modo excitado diretamente para o primeiro modo de flexão, acompanhado de uma modulação da amplitude e fase do terceiro modo. Um modelo analítico de ordem reduzida foi desenvolvido para estudar a transferência de energia entre os modos. Na segunda parte, foi realizada uma extensão do modelo planar de ordem reduzida para incluir modos do plano perpendicular ao plano de excitação e permitir o estudo da transferência de energia não planar entre modos de uma viga cantilever de aço de seção circular sujeita a uma excitação transversal. Foi

realizada também uma comparação entre os resultados experimentais obtidos por Nayfeh e Nayfeh (1994).

Popovic, Nayfeh, Oh e Nayfeh (1995) conduziram um experimento com uma estrutura flexível definida por três vigas e duas massas pontuais. A estrutura foi constituída de duas vigas verticais de aço interligadas pelas suas extremidades superiores através de uma terceira viga horizontal. Nos pontos de junção das vigas verticais com a viga horizontal foram inseridas massas de alumínio. A excitação foi aplicada na base da estrutura, definida pelas extremidades livres das vigas verticais. Os autores documentaram experimentalmente a ativação do primeiro modo de flexão da estrutura em dois casos distintos, através da transferência de energia do sexto modo e também do sétimo modo.

Para verificar se a transferência de energia entre modos de alta frequência e modos de baixa frequência é um fenômeno universal ou limitado a estruturas flexíveis, Oh e Nayfeh (1998) conduziram um experimento com uma placa cantilever de compósito grafite-epoxy de alta rigidez. Ao aplicar uma excitação transversal na vizinhança do sétimo modo (terceiro modo de torção) na base da placa, foi observada a ativação do primeiro modo de flexão acompanhado de modulações da amplitude e fase do sétimo modo. A transferência de energia entre modos de alta frequência e baixa frequência observada na configuração de placas foi similar as transferências observadas nas configurações de vigas flexíveis reportadas anteriormente.

Por fim, Nayfeh (2000) apresenta uma revisão detalhada de recentes investigações teóricas e experimentais de mecanismos responsáveis pela transferência de energia de modos de alta frequência para modos de baixa frequência.

Em todos os experimentos citados, conduzidos em diferentes estruturas como vigas cantilever flexíveis com não linearidades cúbicas dominantes, estruturas com vigas e massas com não linearidades quadráticas dominantes e placas de compósito com alta rigidez, foi evidenciado que a transferência de energia de uma excitação de alta frequência e baixa amplitude para uma resposta de baixa frequência e alta amplitude pode ocorrer em uma estrutura independentemente de sua rigidez, configuração e não linearidades inerentes, desde que esta estrutura possua frequências naturais bem menores que as frequências dos modos diretamente excitados.

CAPÍTULO 3

3. MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 DINÂMICA NÃO LINEAR DE VIGAS INEXTENSÍVEIS

Crespo da Silva e Glynn (1978a,b) utilizaram o princípio de Hamilton estendido e a formulação variacional para derivar as equações que governam as vibrações não planares não lineares de vigas metálicas, sendo assumido o movimento de flexão em dois eixos principais e torção. As equações foram desenvolvidas considerando contribuições não lineares dos termos relacionados à curvatura e à inércia da viga. Pai (1990) utilizou a formulação Newtoniana para derivar as equações não lineares de movimento que descrevem vibrações flexionais-flexionais-torcionais de vigas metálicas e vigas de compósitos. Arafat (1999) utilizou ambos os resultados obtidos por Crespo da Silva e Glynn (1978a,b) e Pai (1990) para derivar as equações diferenciais não planares não lineares do movimento de vigas metálicas e vigas de compósitos. Malatkar (2003) derivou as equações diferenciais de movimento não planar não linear de vigas metálicas utilizando a formulação de Crespo da Silva e Glynn (1978a,b).

Nesta seção são utilizados os resultados obtidos pelos autores citados para derivar o Lagrangiano e as equações diferenciais que governam o movimento flexional-flexional não linear de uma viga de Euler-Bernoulli inextensível metálica e isotrópica. Foi utilizada uma combinação de rotações do ângulo de Euler, multiplicador de Lagrange e princípio de Hamilton estendido.

3.1.1 Definição do sistema dinâmico

Para o modelo da viga investigada, é considerada a teoria de uma viga de Euler-Bernoulli (Craig,1981), que assume que o plano da seção transversal da viga, normal ao eixo neutral antes da deformação, permanece plano e normal ao eixo neutral e não sofre nenhuma deformação. Nestas condições um elemento diferencial de viga pode

ser considerado como um corpo rígido, cujo movimento é totalmente descrito através de três deslocamentos translacionais e três rotacionais. Conhecendo-se a deformação do eixo neutro no espaço, podemos portanto determinar a deformação de qualquer outro ponto da viga.

A viga investigada é ilustrada na figura 3.1. Quando a seção da viga é submetida a um deslocamento elástico e a uma rotação de seu centróide C , a dinâmica do sistema pode ser descrita pelo deslocamento longitudinal $u(s,t)$, pelos deslocamentos transversais $v(s,t)$ e $w(s,t)$, e pelo ângulo de torção $\phi(s,t)$. O sistema (x,y,z) é definido como sistema de coordenadas inerciais com os vetores unitários ortogonais (e_x, e_y, e_z) , enquanto o sistema (ξ, η, ζ) é definido como sistema de coordenadas principais da seção da viga para o comprimento de arco s na posição deformada, com os vetores unitários ortogonais (e_ξ, e_η, e_ζ) . No desenvolvimento desta tese foi utilizada a seguinte notação: t é o tempo; s é o comprimento de arco ao longo do eixo elástico; $u(s,t)$, $v(s,t)$ e $w(s,t)$ são as deflexões ao longo dos eixos x , y e z respectivamente; $\phi(s,t)$ é um ângulo de rotação que indica a torção ao longo do eixo da viga; D_ζ e D_η são a rigidez flexional ao longo dos eixos y e z respectivamente; D_ξ é a rigidez torcional; J_ζ e J_η são o momento principal de inércia flexional ao longo dos eixos y e z respectivamente; J_ξ é o momento principal de inércia torcional; l é o comprimento; m é a massa por unidade de comprimento; c_u , c_v , c_w , e c_ϕ são os coeficientes de amortecimento; $Q_u(t)$, $Q_v(t)$ e $Q_w(t)$ são as excitações harmônicas atuando nos eixos x , y e z respectivamente; e $Q_\phi(t)$ é a excitação harmônica torcional.

Assumindo que a viga possui seção retangular e propriedades de material uniformes, os centróides de massa e de área são idênticos e os eixos principais da seção da viga para qualquer comprimento de arco s na posição deformada coincidem com o sistema (ξ, η, ζ) . É assumido que o equilíbrio estático da viga corresponde a situação onde os eixos ξ e x são coincidentes e onde os outros eixos principais η e ζ são paralelos à y e z respectivamente. Os eixos x e ξ representam os eixos neutrais da viga antes e após a deformação, respectivamente.

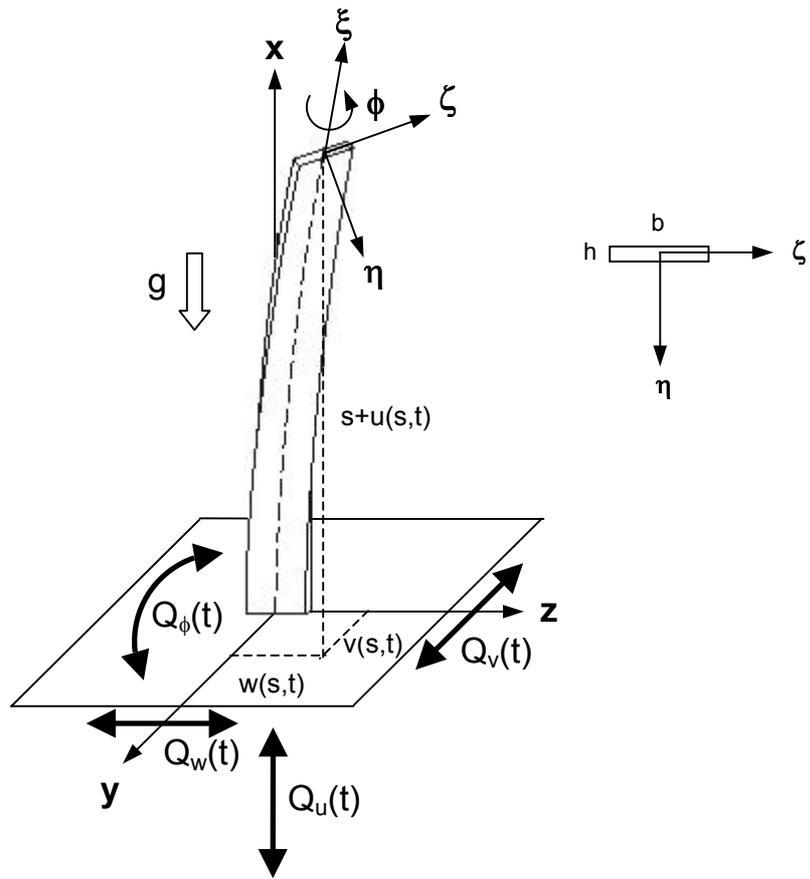


Figura 3.1 – Viga fixada na posição vertical sob movimentos de flexão-flexão-torção (Nayfeh, 2000).

3.1.1.1 Condição de inextensibilidade

A figura 3.2 ilustra a posição de um ponto sobre o eixo neutral da viga antes da deformação, expresso por $r_0 = se_x$. Após a deformação, sua posição é dada por:

$$r = (s+u)e_\xi + ve_\eta + we_\zeta \quad (3.1)$$

A deformação e ao longo do eixo neutral de um elemento ds é definida por:

$$e = \left(\frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial r_0}{\partial s} \frac{\partial r_0}{\partial s} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(1+u')^2 + v'^2 + w'^2} - 1 \quad (3.2)$$

Se a viga é assumida inextensível, então o alongamento eds é assumido nulo. Esta consideração pode ser feita quando as condições de contorno são geométricas em apenas uma das extremidades da viga, como é o caso de vigas cantilever ou vigas apoiada-livre. Esta condição de inextensibilidade implica em:

$$(1 + u')^2 + v'^2 + w'^2 = 1 \quad (3.3)$$

Expandindo u' em série de Taylor, obtemos a seguinte condição de inextensibilidade:

$$u' = \sqrt{1 - v'^2 - w'^2} - 1 \approx -\frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) + \dots \quad (3.4)$$

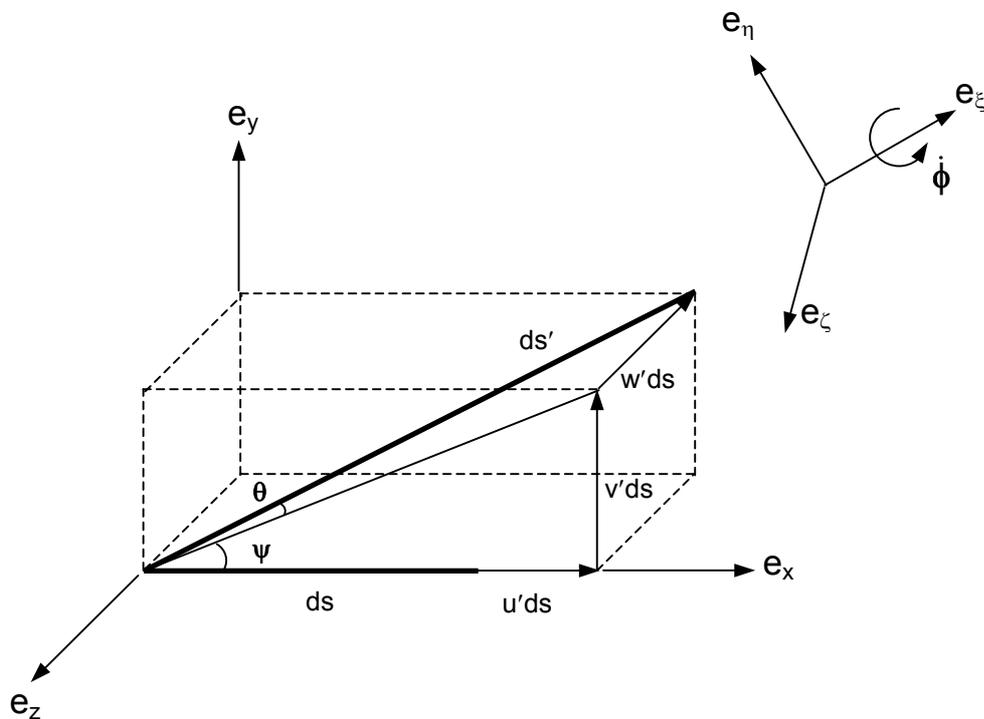


Figura 3.2 – Deformação de um elemento de viga sobre o eixo neutro (Arafat, 1999).

3.1.1.2 Transformação de coordenadas

A seção retangular da viga considerada na figura 3.1 está sujeita a um deslocamento elástico e a uma rotação de seu centróide C . As componentes do deslocamento do centróide C , definidas pelo comprimento s do arco elástico descrito pela viga na posição deformada e pelo tempo t , são denotadas no sistema de coordenadas inercial por $u(s,t)$, $v(s,t)$ e $w(s,t)$. Para descrever a rotação do centróide C da posição não deformada para a posição deformada, são utilizadas três rotações consecutivas do ângulo de Euler (Meirovitch, 1970) no sentido anti-horário, denotadas em ordem de rotação por $\psi(s,t)$, $\theta(s,t)$ e $\phi(s,t)$, conforme indicado na figura 3.3.

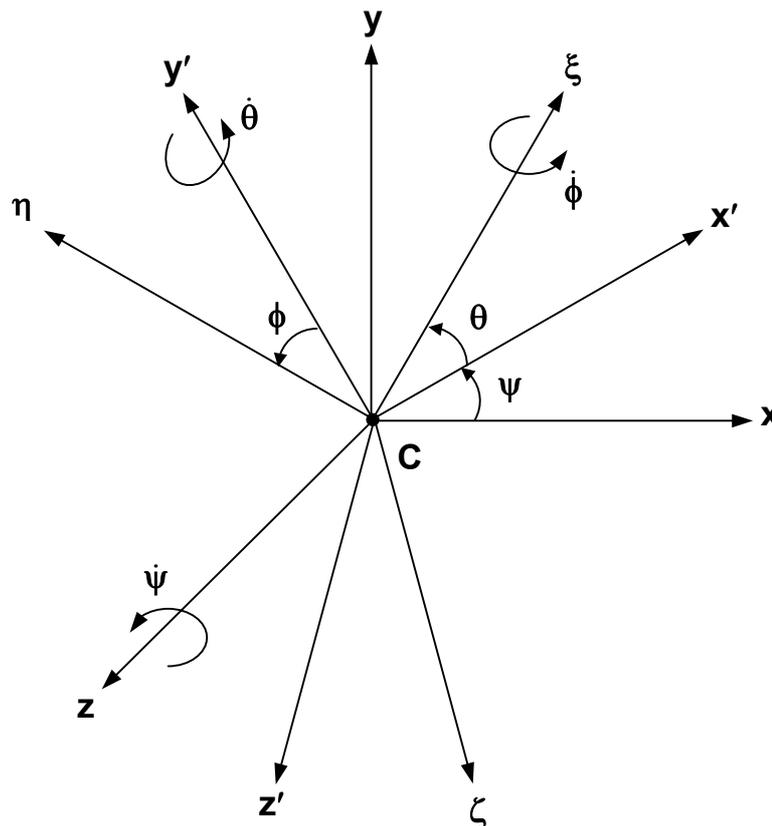


Figura 3.3 – Rotações do ângulo de Euler

Na primeira rotação de ψ em torno de e_z , a orientação (e_x, e_y, e_z) é rotacionada para $(e_{x'}, e_{y'}, e_{z'} = e_z)$, conforme ilustrado na figura 3.4.

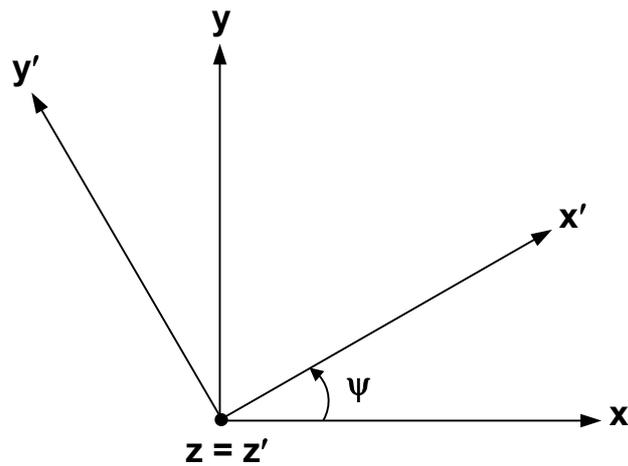


Figura 3.4 – Rotação do ângulo ψ em torno do eixo z .

Nestas condições temos que:

$$\begin{Bmatrix} e_{x'} \\ e_{y'} \\ e_{z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \text{sen}\psi & 0 \\ -\text{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{Bmatrix} = [T_\psi] \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Na rotação seguinte de θ em torno de $e_{y'}$, $(e_{x'}, e_{y'}, e_{z'})$ é rotacionada para a orientação $(e_{x''}, e_{y''} = e_{y'}, e_{z''})$. Assim, temos que:

$$\begin{Bmatrix} e_{x''} \\ e_{y''} \\ e_{z''} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{x'} \\ e_{y'} \\ e_{z'} \end{Bmatrix} = [T_\theta] \begin{Bmatrix} e_{x'} \\ e_{y'} \\ e_{z'} \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

Na terceira e última rotação de ϕ em torno de $e_{x''}$, $(e_{x''}, e_{y''}, e_{z''})$ é rotacionada para a orientação final $(e_\xi = e_{x''}, e_\eta, e_\zeta)$. Nestes termos temos que:

$$\begin{Bmatrix} e_\xi \\ e_\eta \\ e_\zeta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \text{sen}\phi \\ 0 & -\text{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{x''} \\ e_{y''} \\ e_{z''} \end{Bmatrix} = [T_\phi] \begin{Bmatrix} e_{x''} \\ e_{y''} \\ e_{z''} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

As matrizes de transformação obtidas $[T_\psi]$, $[T_\theta]$, $[T_\phi]$ são ortogonais e unitárias e portanto, possuem a propriedade $[Q]^{-1}=[Q]^T$. Estas matrizes relacionam o sistema de coordenadas principais da seção da viga (ξ,η,ζ) e o sistema de coordenadas inerciais (x,y,z) da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} e_\xi \\ e_\eta \\ e_\zeta \end{Bmatrix} = [T_\phi] \begin{Bmatrix} e_{x''} \\ e_{y''} \\ e_{z''} \end{Bmatrix} = [T_\phi][T_\theta] \begin{Bmatrix} e_{x'} \\ e_{y'} \\ e_{z'} \end{Bmatrix} = [T_\phi][T_\theta][T_\psi] \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

onde $[T] = [T_\psi][T_\theta][T_\phi]$, ortogonal e unitária, é expressa por:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ -\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\cos\psi & \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi & \sin\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi & -\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

A partir das equações (3.8) e (3.9), a velocidade angular $\omega(s,t)$ do sistema de coordenadas principal (ξ,η,ζ) em relação ao sistema de referência inercial (x,y,z) pode ser obtida através da seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \omega(s,t) &= \dot{\psi}e_z + \dot{\theta}e_{y'} + \dot{\phi}e_{x''} \\ &= (\dot{\phi} - \dot{\psi}\sin\theta)e_\xi + (\dot{\psi}\cos\theta\sin\phi + \dot{\theta}\cos\phi)e_\eta + (\dot{\psi}\cos\theta\cos\phi - \dot{\theta}\sin\phi)e_\zeta \\ \omega(s,t) &= \omega_\xi e_\xi + \omega_\eta e_\eta + \omega_\zeta e_\zeta \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde $(\dot{\cdot})$ denota $\partial/\partial t$.

Em virtude da analogia cinética de Kirchhoff citada por Crespo da Silva e Glynn (1978a,b), a expressão para os componentes do vetor curvatura $\rho(s,t)$ pode ser obtida simplesmente substituindo as derivadas temporais pelas derivadas espaciais na expressão da velocidade angular. Assim, temos que:

$$\rho(s,t) = (\phi' - \psi'\sin\theta)e_\xi + (\psi'\cos\theta\sin\phi + \theta'\cos\phi)e_\eta + (\psi'\cos\theta\cos\phi - \theta'\sin\phi)e_\zeta$$

$$\rho(s,t) = \rho_\xi e_\xi + \rho_\eta e_\eta + \rho_\zeta e_\zeta \quad (3.11)$$

onde (') denota $\partial/\partial s$.

Analisando ainda a figura 3.2, temos que os ângulos $\psi(s,t)$ e $\theta(s,t)$ são relacionados com as derivadas espaciais de $u(s,t)$, $v(s,t)$ e $w(s,t)$ pelas seguintes expressões:

$$\text{sen } \psi = \frac{v'}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}}, \quad \text{cos } \psi = \frac{(1+u')}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}}, \quad \text{tan } \psi = \frac{v'}{(1+u')} \quad (3.12)$$

$$\text{sen } \theta = \frac{-w'}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2 + w'^2}}, \quad \text{cos } \theta = \frac{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2 + w'^2}}, \quad \text{tan } \theta = \frac{-w'}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}}$$

Utilizando as definições da equação (3.12), as expressões para $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \psi'$ e θ' são expressas por:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{\dot{v}'(1+u') - v'\dot{u}'}{(1+u')^2 + v'^2} \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{(1+u')^2 + v'^2 + w'^2} \left\{ \frac{w'[(1+u')\dot{u}' + v'\dot{v}']}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} - \dot{w}'\sqrt{(1+u')^2 + v'^2} \right\} \\ \psi' &= \frac{v''(1+u') - v'u''}{(1+u')^2 + v'^2} \\ \theta' &= \frac{1}{(1+u')^2 + v'^2 + w'^2} \left\{ \frac{w'[(1+u')u'' + v'v'']}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} - w''\sqrt{(1+u')^2 + v'^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Crespo da Silva e Glynn (1978a,b) demonstraram que as equações de movimento são particularmente adequadas para análises de perturbação do movimento (Nayfeh,1981) quando os termos não lineares envolvidos são expandidos em polinômios de ordem três. Arafat (1999) assumiu v , w e ϕ e suas derivadas de ordem

$O(\varepsilon)$ e $u = O(\varepsilon^2)$. Para analisar as propriedades não lineares do movimento com não linearidades polinomiais de ordem três, as equações (3.12) e (3.13) foram substituídas nas equações (3.10) e (3.11) e os resultados expandidos em séries de Taylor. As expansões obtidas, até $O(\varepsilon^3)$, para a velocidade angular e a curvatura foram:

$$\omega_\xi = \dot{\phi} + w'\dot{v}' + \dots \quad (3.14)$$

$$\omega_\eta = -\dot{w}' + \phi\dot{v}' + w'u' + v'w'\dot{v}' + \frac{1}{2}\phi^2\dot{w}' + u'\dot{w}' + \frac{1}{2}v'^2\dot{w}' + w'^2\dot{w}' + \dots \quad (3.15)$$

$$\omega_\zeta = \dot{v}' + \phi\dot{w}' - v'u' - \frac{1}{2}\phi^2\dot{v}' - u'\dot{v}' - v'^2\dot{v}' - \frac{1}{2}w'^2\dot{v}' + \dots \quad (3.16)$$

$$\rho_\xi = \phi' + w'v'' + \dots \quad (3.17)$$

$$\rho_\eta = -w'' + \phi v'' + w'u'' + v'w'v'' + \frac{1}{2}\phi^2 w'' + u'w'' + \frac{1}{2}v'^2 w'' + w'^2 w'' + \dots \quad (3.18)$$

$$\rho_\zeta = v'' + \phi w'' - v'u'' - \frac{1}{2}\phi^2 v'' - u'v'' - v'^2 v'' - \frac{1}{2}w'^2 v'' + \dots \quad (3.19)$$

O símbolo introduzido $O(\)$ juntamente com $o(\)$, definidos como símbolos de Landau (Nayfeh, 2000), representam a ordem da magnitude da quantidade ou a ordem assintótica da quantidade. Sendo $f(\varepsilon)$ e $g(\varepsilon)$ funções escalares ($\varepsilon \ll 1$), ao invés de afirmar que $f(\varepsilon) \rightarrow 0$ na mesma taxa que $\varepsilon \rightarrow 0$, Nayfeh (1981) definiu que $f(\varepsilon)$ é de ordem ε com $\varepsilon \rightarrow 0$, isto é, $f(\varepsilon)$ é $O(\varepsilon)$ com $\varepsilon \rightarrow 0$, ou seja:

$$f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon)) \quad \text{com } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.20)$$

se

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = A, \quad 0 < |A| < \infty \quad (3.21)$$

Neste caso, dizemos que a função $f(\varepsilon)$ foi ordenada através da função de medida $g(\varepsilon)$. Temos ainda que:

$$f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon)) \quad \text{com } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.22)$$

se

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 0 \quad (3.23)$$

O parâmetro ε e potências de ε são geralmente utilizados como função de medida. Isto posto, a ordem assintótica da quantidade é definida por $O(\varepsilon^n)$ ou $o(\varepsilon^n)$, onde n é um número inteiro. Equações de movimento expandidas e obtidas para $\varepsilon = 0$ formam o problema não perturbado, que é linear e integrável. Para análise de perturbação do movimento, Nayfeh (1981) apresenta diferentes métodos utilizados para obtenção de soluções aproximadas das equações.

3.1.2 Equações do movimento e condições de contorno

Nesta seção, são desenvolvidas as equações diferenciais não lineares que descrevem o movimento de flexão-flexão de uma viga inextensível, envolvendo os deslocamentos elásticos transversais $v(s,t)$, $w(s,t)$ e o ângulo $\phi(s,t)$. O princípio de Hamilton estendido é utilizado para derivar as equações, considerando a condição de inextensibilidade no Lagrangiano do movimento através do emprego do multiplicador de Lagrange $\lambda(s,t)$.

3.1.2.1 Lagrangiano do movimento

O Lagrangiano do movimento L é definido como:

$$L \equiv T - V \quad (3.24)$$

onde T é a energia cinética e V é a energia potencial da viga.

Malatkar (2003) derivou as expressões para a energia cinética e energia potencial de uma viga de Euler-Bernoulli. A energia cinética da viga é constituída pela soma da componente do movimento de deslocamento e da componente do movimento de rotação. A energia cinética decorrente do deslocamento é expressa por:

$$T_1 = \frac{1}{2} m \int_0^l (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) ds \quad (3.25)$$

e a energia cinética rotacional por:

$$T_2 = \frac{1}{2} m \int_0^l \{\omega\} [J] \{\omega\}^T ds \quad (3.26)$$

onde $[J]$ é a matriz de momentos de inércia distribuídos. Para vigas com seções simétricas, $J_{ij} = 0$, para $i \neq j$. Para uma viga com seção retangular, a matriz $[J]$ é expressa por:

$$[J] = \begin{bmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{bmatrix} = \frac{1}{12} m \begin{bmatrix} (b^2 + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & h^2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Assim, a energia cinética total é expressa como:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \left[m(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + J_\xi \omega_\xi^2 + J_\eta \omega_\eta^2 + J_\zeta \omega_\zeta^2 \right] ds \quad (3.28)$$

Malatkar (2003) reduziu a seguinte expressão da energia potencial V da viga:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l (D_\xi \rho_\xi^2 + D_\eta \rho_\eta^2 + D_\zeta \rho_\zeta^2) ds \quad (3.29)$$

Para uma viga isotrópica de seção retangular temos que (Arafat, 1999):

$$D_\xi = Gbh^3 \kappa_\xi \quad (3.30)$$

$$D_\eta = \frac{1}{12} Ehb^3 \quad (3.31)$$

$$D_\zeta = \frac{1}{12} Ehb^3 \quad (3.32)$$

onde E e G são o módulo de elasticidade transversal e o módulo de elasticidade longitudinal respectivamente, e

$$\kappa_\xi = \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left[\frac{192}{\pi^5} \left(\frac{h}{b} \right) \right] \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \left[\frac{n\pi}{2} \left(\frac{b}{h} \right) \right] \right\} \quad (3.33)$$

Utilizando as equações (3.25) e (3.29) e introduzindo o multiplicador de Lagrange $\lambda(s,t)$ para satisfazer a condição imposta pela inextensibilidade da viga definida pela equação (3.3), o Lagrangiano resulta em:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ m(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + (J_\xi \omega_\xi^2 + J_\eta \omega_\eta^2 + J_\zeta \omega_\zeta^2) - (D_\xi \rho_\xi^2 + D_\eta \rho_\eta^2 + D_\zeta \rho_\zeta^2) + \lambda \left[1 - (1 + u')^2 - v'^2 - w'^2 \right] \right\} ds \quad (3.34)$$

Substituindo as equações (3.14)-(3.19) em (3.34), o Lagrangiano do movimento é finalmente expresso como:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ m(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + J_\xi (\dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{v}'w' + \dot{v}'^2 w'^2) + J_\eta (\dot{w}'^2 - 2\dot{\phi}\dot{v}'w' + \phi^2 \dot{v}'^2 - 2v'\dot{v}'w'\dot{w}' - 2u'w'\dot{w}' - \phi^2 \dot{w}'^2 - 2u'\dot{w}'^2 - v'^2 \dot{w}'^2 - 2w'^2 \dot{w}'^2) + J_\zeta (\dot{v}'^2 + 2\dot{\phi}\dot{v}'w' - 2\dot{u}'\dot{v}'\dot{v}' - \phi^2 \dot{v}'^2 - 2u'\dot{v}'^2 - 2v'^2 \dot{v}'^2 - \dot{v}'^2 w'^2 + \phi^2 \dot{w}'^2) - D_\xi (\phi'^2 + 2\phi'v''w' + v''^2 w'^2) - D_\eta (w''^2 - 2\phi v''w'' + \phi^2 v''^2 - \phi^2 w''^2 - 2u''w'w'' - 2v'v''w'w'' - 2u'w''^2 - v'^2 w''^2 - 2w'^2 w''^2) - D_\zeta (v''^2 + 2\phi v''w'' - 2u''v'v'' - 2u'v''^2 + \phi^2 w''^2 - \phi^2 v''^2 - 2v'^2 v''^2 - v''^2 w'^2) + \lambda \left[1 - (1 + u')^2 - v'^2 - w'^2 \right] \right\} ds \quad (3.35)$$

3.1.2.2 Princípio de Hamilton estendido

As equações que governam o movimento e as condições de contorno podem ser obtidas através do princípio de Hamilton estendido (Meirovitch, 1970), expresso por:

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad (3.36)$$

onde W_{nc} é o trabalho realizado pelas forças não conservativas como amortecimento, forças externas e momentos. Utilizando as forças generalizadas ao longo dos eixos x , y , z e do ângulo ϕ , denotados por Q_u , Q_v , Q_w e Q_ϕ respectivamente, e os correspondentes coeficientes de amortecimento denotados por c_u , c_v , c_w e c_ϕ , a componente do trabalho das forças não conservativas é introduzida através da expressão:

$$\begin{aligned} \delta W_{nc} &= \int_0^l (Q_u^* \delta u + Q_v^* \delta v + Q_w^* \delta w + Q_\phi^* \delta \phi + Q_\lambda^*) ds \\ &= \int_0^l [(Q_u - c_u \dot{u}) \delta u + (Q_v - c_v \dot{v}) \delta v + (Q_w - c_w \dot{w}) \delta w + (Q_\phi - c_\phi \dot{\phi}) \delta \phi] ds \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde $Q_\lambda^* = 0$.

Definindo $\ell(s, t)$ como a densidade Lagrangiana, onde $L = \int_0^l \ell ds$, temos que:

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l [\delta \ell + Q_u^* \delta u + Q_v^* \delta v + Q_w^* \delta w + Q_\phi^* \delta \phi] ds dt = 0 \quad (3.38)$$

onde δu , δv , δw e $\delta \phi = 0$ em $t = t_1$ e $t = t_2$.

Sendo a densidade Lagrangiana para o sistema $\ell = \ell(q_i, \dot{q}_i, q_i', q_i'', \dot{q}_i', s, t)$, as equações de movimento são obtidas através de:

$$\frac{\partial \ell}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \ell}{\partial q_i'} \right) + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial \ell}{\partial q_i''} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}_i'} \right) = -Q_i^*, \quad 0 < s < l \quad (3.39)$$

e as condições de contorno associadas por:

$$B1_i = \left\{ \left[\frac{\partial \ell}{\partial q_i'} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \ell}{\partial q_i''} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}_i'} \right) \right] \delta q_i \right\}_{s=0}^{s=l} = 0 \quad (3.40)$$

$$B2_i = \left\{ \left[\frac{\partial \ell}{\partial q_i''} \right] \delta q_i' \right\}_{s=0}^{s=l} = 0 \quad (3.41)$$

onde $q_i(s,t)$ representa as variáveis $u(s,t)$, $v(s,t)$, $w(s,t)$, $\phi(s,t)$ e $\lambda(s,t)$.

Assumindo $q_i(s,t) = u(s,t)$, e aplicando as equações (3.39)-(3.41) à equação (3.35), obtemos a seguinte equação de movimento longitudinal na direção x :

$$m\ddot{u} - Q_u^* = [\lambda(1+u')] + D_\eta (w'w''') + D_\zeta (v'v''') - J_\eta (w'\ddot{w}') - J_\zeta (v'\ddot{v}') \quad (3.42)$$

As condições de contorno associadas são:

$$u = 0 \quad (3.43)$$

na extremidade engastada, em $s = 0$, e:

$$\lambda(1+u') = -D_\eta (w'w''') - D_\zeta (v'v''') + J_\eta (w'\ddot{w}') + J_\zeta (v'\ddot{v}') \quad (3.44)$$

na extremidade livre, em $s = l$.

Utilizando a condição de inextensibilidade expressa pela equação (3.4) e aplicando a condição de contorno $u(0,t) = 0$, temos que:

$$u(s,t) = -\frac{1}{2} \int_0^s (v'^2 + w'^2) ds + \dots \quad (3.45)$$

Utilizando as equações (3.4) e (3.45) expandidas até $O(\varepsilon^2)$ e substituindo os resultados nas equações (3.42) e (3.44), o multiplicador de Lagrange resulta em:

$$\begin{aligned} \lambda = & J_\eta (w' \ddot{w}') + J_\zeta (v' \ddot{v}') - D_\eta (w' w''') - D_\zeta (v' v''') \\ & - \frac{m}{2} \int_l^s \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^s (v'^2 + w'^2) ds \right] ds - \int_l^s Q_u^* ds + \dots \end{aligned} \quad (3.46)$$

No sistema considerado, o multiplicador de Lagrange $\lambda(s,t)$ é interpretado como uma força axial necessária para manter a condição de inextensibilidade da viga.

Assumindo $q_i(s,t) = v(s,t)$, aplicando as equações (3.39)-(3.41) à equação (3.35), e substituindo as equações (3.4), (3.45) e (3.46), obtemos a seguinte equação de movimento flexional na direção y :

$$\begin{aligned} m\ddot{v} + c_v \dot{v} + D_\zeta v^{iv} - J_\zeta \ddot{v}'' = & Q_v - D_\zeta (\phi' w' + v'' w'^2)'' - (D_\eta - D_\zeta) (\phi^2 v'' - \phi w'''' - \\ & D_\zeta [v'(v'v'')' + v'(w'w'')'] - J_\zeta \frac{\partial}{\partial t} (\phi w' + \dot{v}' w'^2)' - \\ & (J_\eta - J_\zeta) \left[(v' w' \ddot{w}') - \frac{\partial}{\partial t} (\dot{v}' \phi^2 - \dot{w}' \phi) \right]' + \\ & J_\zeta [v'(\dot{v}'^2 + \dot{w}'^2)]' - \frac{m}{2} \left\{ v' \int_l^s \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^s (v'^2 + w'^2) ds \right] ds \right\}' - \\ & \left(v' \int_l^s Q_u^* ds \right)' \end{aligned} \quad (3.47)$$

As condições de contorno associadas são expressas por:

$$v = 0 \text{ e } v' = 0 \quad (3.48)$$

na extremidade engastada, em $s = 0$, e:

$$D_{\zeta} v'' = -D_{\xi} (v'' w'^2 + \phi' w') - (D_{\eta} - D_{\zeta}) (\phi^2 v'' - \phi w'' - v' w' w'') \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} D_{\zeta} v''' - J_{\zeta} \dot{v}' &= -D_{\xi} (\phi' w' + w'^2 v'')' - (D_{\eta} - D_{\zeta}) (\phi^2 v'' - \phi w'')' \\ &\quad - D_{\zeta} \left[v' (v' v'')' + v' (w' w'')' \right] + J_{\xi} \frac{\partial}{\partial t} (\dot{\phi} w' + w'^2 \dot{v}') \\ &\quad + (J_{\eta} - J_{\zeta}) \frac{\partial}{\partial t} (\phi^2 \dot{v}' - \phi \dot{w}') + J_{\zeta} \left[v' \frac{\partial}{\partial t} (v' \dot{v}') + v' \frac{\partial}{\partial t} (w' \dot{w}') \right] \end{aligned} \quad (3.50)$$

na extremidade livre, em $s = l$.

Assumindo $q_i(s,t) = w(s,t)$, aplicando as equações (3.39)-(3.41) à equação (3.35), e substituindo as equações (3.4), (3.45) e (3.46), obtemos a seguinte equação de movimento flexional na direção z :

$$\begin{aligned} m\ddot{w} + c_w \dot{w} + D_{\eta} w^{iv} - J_{\eta} \ddot{w}'' &= Q_w + D_{\xi} (\phi' v'' + v''^2 w')' + (D_{\eta} - D_{\zeta}) (\phi^2 w'' + \phi v'')'' - \\ &\quad D_{\eta} \left[w' (w' w'')' \right]' - D_{\zeta} \left[w' (v' v'')' \right]' - J_{\xi} (\dot{\phi} v' + \dot{v}'^2 w')' + \\ &\quad J_{\eta} (w' \dot{w}'^2)' + J_{\zeta} (w' \dot{v}'^2)' - (J_{\eta} - J_{\zeta}) \frac{\partial}{\partial t} [(\dot{w}' \phi^2) + (\dot{v}' \phi)]' - \\ &\quad \frac{m}{2} \left\{ w' \int_l^s \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^s (v'^2 + w'^2) ds \right] ds \right\}' - \\ &\quad \left(w' \int_l^s Q_u^* ds \right)' \end{aligned} \quad (3.51)$$

As condições de contorno associadas são expressas por:

$$w = 0 \text{ e } w' = 0 \quad (3.52)$$

na extremidade engastada, em $s = 0$, e:

$$D_{\eta} w'' = (D_{\eta} - D_{\zeta}) (\phi^2 w'' + \phi v'') \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned}
D_\eta w''' - J_\eta \ddot{w}' &= D_\xi (w'v''^2 + v''\phi') - D_\eta [w'(w'w'')] - D_\zeta [w'(v'v'')] + \\
&\quad (D_\eta - D_\zeta)(\phi^2 w'' + \phi v'')' - J_\xi (w'\dot{v}'^2 + \dot{\phi}v') + J_\eta \left[w' \frac{\partial}{\partial t} (w'\dot{w}') \right] + \\
&\quad J_\zeta \left[w' \frac{\partial}{\partial t} (v'\dot{v}') \right] - (J_\eta - J_\zeta) \frac{\partial}{\partial t} (\phi^2 \dot{w}' + \phi \dot{v}')
\end{aligned} \quad (3.54)$$

na extremidade livre, em $s = l$.

Assumindo $q_i(s,t) = \phi(s,t)$, aplicando as equações (3.39)-(3.41) à equação (3.35), e substituindo as equações (3.4), (3.45) e (3.46), obtemos a seguinte equação de movimento torcional:

$$\begin{aligned}
J_\xi \ddot{\phi} + c_\phi \dot{\phi} - D_\xi \phi'' &= Q_\phi + D_\xi (v''w')' + (D_\eta - D_\zeta)(v''w'' - \phi v''^2 + \phi w''^2) - \\
&\quad J_\xi \frac{\partial}{\partial t} (\dot{v}'w') + (J_\eta - J_\zeta)(\phi \dot{v}'^2 - \phi \dot{w}'^2 - \dot{v}'\dot{w}')
\end{aligned} \quad (3.55)$$

As condições de contorno associadas são expressas por:

$$\phi = 0 \quad (3.56)$$

na extremidade engastada, em $s = 0$, e:

$$D_\xi \phi' = -D_\xi (v''w') \quad (3.57)$$

na extremidade livre, em $s = l$.

Crespo da Silva e Glynn (1978a,b) consideraram um caso particular para vigas assumindo que a inércia torcional não pode ser excitada através de excitações de baixa frequência devido a frequência torcional fundamental ser muito maior que as frequências dos modos flexionais excitados diretamente. Em adição, foi assumido que os momentos de inércia distribuídos exercem uma influência desprezível no movimento da viga. Isto posto, assumindo J_ξ , J_η e J_ζ nulos, integrando a

equação (3.55) duas vezes, utilizando a equação (3.56) e expandindo os termos até $O(\varepsilon^2)$, obtemos:

$$D_\xi \phi = -D_\xi \int_0^s v'' w' ds - \int_0^s \int_l^s [Q_\phi^* + (D_\eta - D_\zeta) v'' w''] ds ds + \dots \quad (3.58)$$

Substituindo a equação (3.58) nas equações (3.47) e (3.51), e considerando que $c_u \dot{u}$ e $c_\phi \dot{\phi}$ são desprezíveis para um sistema de baixo amortecimento como a viga analisada, obtemos as seguintes equações de movimento que governam as vibrações flexional-flexional não lineares de uma viga inextensível:

$$\begin{aligned} m\ddot{v} + c_v \dot{v} + D_\zeta v^{iv} = & Q_v + (D_\eta - D_\zeta) \left[w'' \int_l^s v'' w'' ds - w''' \int_0^s v'' w' ds \right]' - \\ & \frac{(D_\eta - D_\zeta)^2}{D_\xi} \left[w'' \int_0^s \int_l^s v'' w'' ds ds \right]'' - D_\zeta \left[v'(v'v'' + w'w'')' \right]' - \\ & \frac{m}{2} \left\{ v' \int_l^s \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^s (v'^2 + w'^2) ds \right] ds \right\}' - \left(v' \int_l^s Q_u ds \right)' + \\ & \left(w' \int_l^s Q_\phi ds \right)'' - \frac{(D_\eta - D_\zeta)}{D_\xi} \left(w'' \int_0^s \int_l^s Q_\phi ds ds \right)'' \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} m\ddot{w} + c_w \dot{w} + D_\eta w^{iv} = & Q_w - (D_\eta - D_\zeta) \left[v'' \int_l^s v'' w'' ds - v''' \int_0^s v' w'' ds \right]' - \\ & \frac{(D_\eta - D_\zeta)^2}{D_\xi} \left[v'' \int_0^s \int_l^s v'' w'' ds ds \right]'' - D_\eta \left[w'(v'v'' + w'w'')' \right]' - \\ & \frac{m}{2} \left\{ w' \int_l^s \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^s (v'^2 + w'^2) ds \right] ds \right\}' - \left(w' \int_l^s Q_u ds \right)' - \\ & \left(v'' \int_l^s Q_\phi ds \right)' - \frac{(D_\eta - D_\zeta)}{D_\xi} \left(v'' \int_0^s \int_l^s Q_\phi ds ds \right)'' \end{aligned} \quad (3.60)$$

As condições de contorno associadas são reduzidas as seguintes expressões:

$$v = 0, \quad v' = 0, \quad w = 0, \quad w' = 0 \quad (3.61)$$

na extremidade engastada, em $s = 0$, e:

$$v'' = 0, \quad v''' = 0, \quad w'' = 0, \quad w''' = 0 \quad (3.62)$$

na extremidade livre, em $s = l$.

O Lagrangiano correspondente é expresso por:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ m \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^s \frac{1}{2} (v'^2 + w'^2) ds \right]^2 + m(\dot{v}^2 + \dot{w}^2) - (D_\eta - D_\zeta) \left(2v''w'' \int_0^s v''w' ds \right) - \right. \\ \left. D_\eta (w''^2 + w'^2 w''^2) - D_\zeta (v''^2 + v'^2 v''^2 + 2v'v''w'w'') - \right. \\ \left. \frac{(D_\eta - D_\zeta)^2}{D_\xi} \left[\left(\int_l^s v''w'' ds \right)^2 + \left(2v''w'' \int_0^s \int_l^s v''w'' ds ds \right) \right] \right\} ds \quad (3.63)$$

Nas equações de movimento descritas, apenas não linearidades cúbicas estão presentes. O termo não linear que contém a derivada temporal parcial dupla, que aparece no lado direito da igualdade da equação (3.59) e da equação (3.60), constitui a inércia não linear flexional-flexional originada a partir da energia cinética do movimento axial. Os demais termos não lineares (termos que não contém as forças generalizadas) representam a não linearidade geométrica, com origem na energia potencial do movimento flexional. O segundo e terceiro representam não linearidades geométricas flexional-torcional, enquanto que o quarto termo representa a não linearidade geométrica flexional-flexional.

3.2 APARATO EXPERIMENTAL

O aparato experimental utilizado nesta tese incluiu no seu mecanismo de excitação um sistema de controle de vibrações em malha fechada, em contraste aos

aparatos experimentais encontrados na literatura (Moon e Shaw, 1983; Shaw, 1985; Smith, Balachandran e Nayfeh, 1992; Anderson, Balachandran e Nayfeh, 1992, 1994; Nayfeh e Nayfeh, 1994; Brandon e Mathias, 1995; Cusumano e Moon, 1995; Anderson, Nayfeh e Balachandran, 1996; Tabaddor e Nayfeh, 1997; Oh e Nayfeh, 1998; Oueini, 1999; Arafat, 1999 e Malatkar, 2003), onde nos estudos de caso investigados foi utilizado um sistema de excitação em malha aberta. A proposta de utilização do mecanismo em malha fechada foi a de suprimir as oscilações indesejáveis da amplitude do sinal de entrada, geralmente presentes em sistemas de excitação em malha aberta.

Um sistema de controle de vibrações é constituído de técnicas sofisticadas de controle, acelerômetros, elementos de hardware e vibradores. O seu princípio de funcionamento é baseado no controle ativo do sinal de resposta da estrutura excitada, segundo especificações pré-determinadas de amplitude e frequência declaradas na estratégia de controle. O emprego de sistemas de controle de vibrações em malha fechada em estudos experimentais de dinâmica não linear requer no entanto algumas precauções, uma vez que o pronunciamento de efeitos não lineares na resposta de um sistema dinâmico é influenciado pela escolha do tipo de excitação, da localização dos sensores e das ferramentas matemáticas utilizadas no processamento digital dos sinais.

Os métodos de entrada amplamente empregados em estudos experimentais de vibrações são baseados em excitações do tipo harmônica, aleatória ou transiente. Cada tipo de excitação apresenta suas vantagens e desvantagens e a escolha apropriada do método de excitação depende em geral dos requisitos de análise impostos e do tempo disponível para realização dos ensaios. Em termos práticos, as principais vantagens do emprego de excitações senoidais na realização de ensaios dinâmicos incluem o controle preciso do nível de entrada aplicado e uma boa relação sinal-ruído em comparação aos outros tipos de excitação, devido a toda energia do sinal estar concentrada em apenas uma frequência. O tempo de excitação relativamente longo quando comparado aos outros métodos de entrada, constitui a principal desvantagem da utilização deste tipo de excitação.

Excitações harmônicas representam o tipo de entrada mais recomendada para revelar e caracterizar os fenômenos não lineares. Quando uma estrutura linear é

submetida à uma entrada senoidal, ela deve apresentar uma resposta senoidal de mesma frequência da excitação. Devido a esta característica especial, excitações harmônicas são eleitas como a primeira escolha entre os sinais de excitação em estudos experimentais de vibrações não lineares, em contraste às excitações aleatórias e transientes normalmente que ocultam as não linearidades do sistema.

Entretanto, as não linearidades reveladas por entradas harmônicas do tipo varredura seno podem ser inadvertidamente ocultadas ao se empregar um sistema de controle de vibrações em malha fechada. Para atenuar possíveis distorções harmônicas dos sinais e satisfazer as exigências impostas pela frequência de Nyquist descritas por Barros (1999;2001), o hardware de controle utiliza filtros seguidores para filtrar frequências diferentes da frequência de excitação contidas nos sinais de entrada. Ao filtrar os sinais de uma resposta não linear, frequências presentes e responsáveis por fenômenos não lineares como sub-harmônicas, super-harmônicas, interações modais ou caos, são removidas e a resposta medida pelo sistema de controle pode aparentemente ser identificada como linear.

Decorrente das implicações do emprego de um sistema de controle de vibrações na observação experimental de fenômenos não lineares, um segundo sistema de aquisição de dados em malha aberta denominado sistema de medidas, foi adicionado ao aparato experimental proposto para monitorar a resposta não linear da viga excitada pelo sistema em malha fechada. O sistema de controle e o sistema de medidas estão ilustrados nas figuras 3.5 e 3.6 respectivamente.

Precauções adicionais relacionadas ao mecanismo de excitação também foram consideradas. Quando um vibrador é utilizado para obtenção de funções de resposta em frequência (FRF) entre o movimento de resposta à uma determinada força de entrada, torna-se comum o emprego de uma haste entre o vibrador e o sensor de força fixado na estrutura, denominada “stinger”, “push-rod” ou “drive-rod”. No caso ideal o “stinger” deve apresentar uma alta rigidez axial e uma baixa rigidez transversal, para permitir excitações axiais e minimizar excitações em todos os outros graus de liberdade. Os critérios para a escolha de um “stinger” podem ser consultados em Ewins (1984) e Maia e Silva. (1997). Entretanto, outras forças e momentos, além da componente da excitação axial, podem ser introduzidas e atuar na estrutura

investigada, influenciando as medidas de força e resposta. Os efeitos de “stingers” nas medições de funções de resposta em frequência são detalhados por Lee e Chou (1996) e Ashory e Hajighorbani (2002).

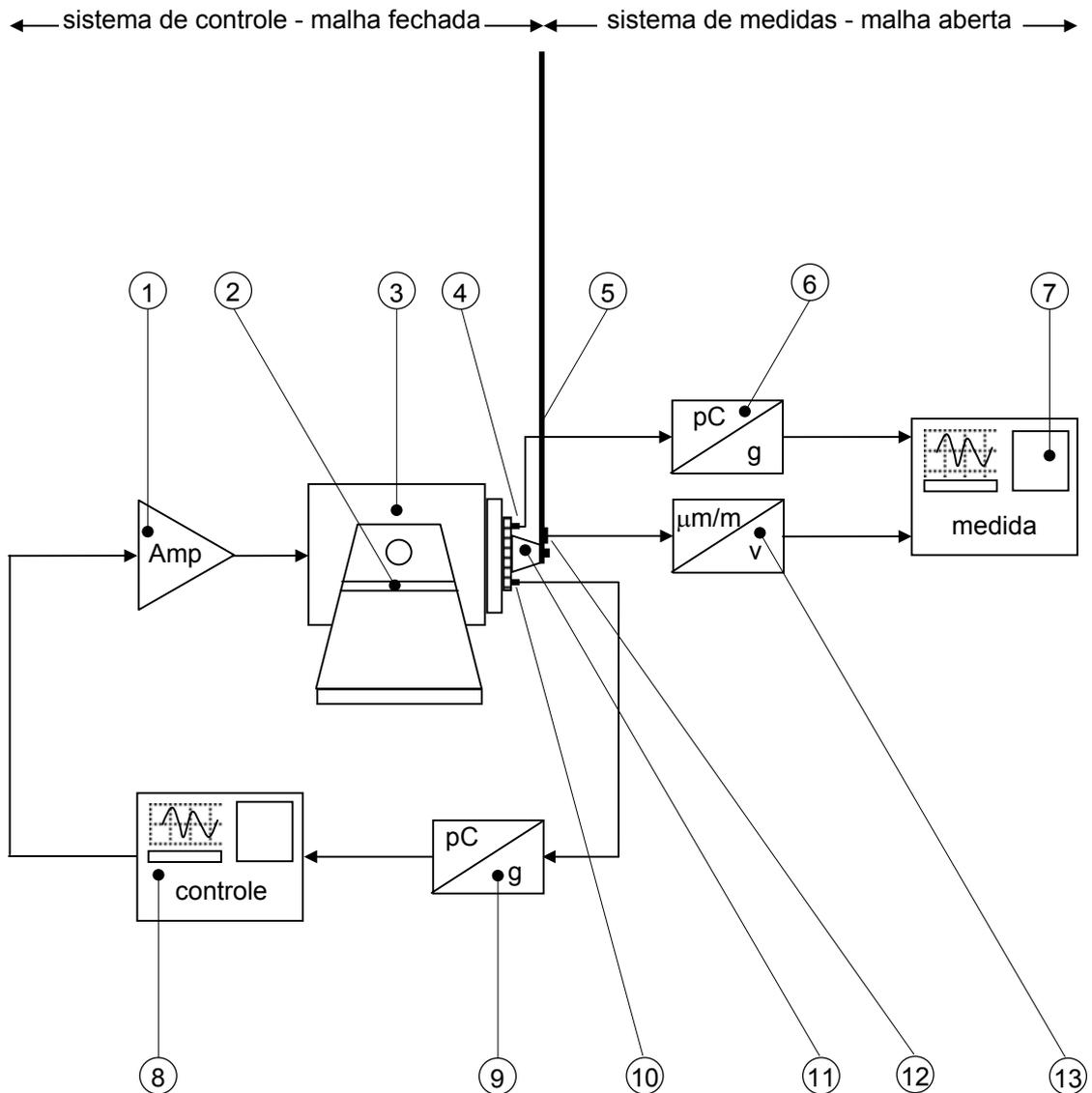
No aparato experimental proposto, os efeitos indesejáveis causados por “stingers”, sobretudo em estruturas flexíveis, foram eliminados utilizando-se como excitação de entrada um deslocamento aplicado na base da viga, ao invés da aplicação clássica de uma força pontual. O aparato experimental utilizado está ilustrado esquematicamente na figura 3.7. As vigas investigadas são uma viga de alumínio 2024-T3 e uma viga de alumínio 7075-T6 com uma fita metálica de espessura de 0,1 mm aplicada ao longo de uma das faces, ambas delgadas e de seções uniformes. As propriedades das vigas, os equipamentos, sensores, atuadores e aplicativos computacionais utilizados estão descritos nas tabelas 3.1 e 3.2.



Figura 3.5 – Sistema de controle.



Figura 3.6 – Sistema de medidas.



- | | |
|---|---|
| ① Amplificador de potência | ⑧ Sistema de controle de vibrações |
| ② Suspensão do vibrador | ⑨ Condicionador de sinais do acelerômetro |
| ③ Vibrador | ⑩ Acelerômetro de controle |
| ④ Acelerômetro de medida | ⑪ Dispositivo de engaste da viga |
| ⑤ Viga | ⑫ Extensômetro de resistência elétrica |
| ⑥ Condicionador de sinais do acelerômetro | ⑬ Condicionador de sinais do extensômetro |
| ⑦ Sistema de aquisição de dados | |

Figura 3.7 – Esquema do aparato experimental.

Tabela 3.1 – Propriedades das vigas de alumínio

Propriedades	Alumínio 2024-T3	Alumínio 7075-T6
Comprimento l (mm)	600	600
Largura b (mm)	20	20
Espessura h (mm)	0,8	0,4
Densidade ρ_0 (g/cm ³)	2,78	2,81
Densidade linear ρ (g/cm)	$4,45 \times 10^{-1}$	$2,25 \times 10^{-1}$
Módulo elasticidade E (GPa)	72,4	72
Coefficiente Poisson ν	0,33	0,33

Tabela 3.2 – Equipamentos e softwares utilizados

Descrição	Marca	Modelo
Sistema de controle	Spectral Dynamics	Jaguar
Sistema de aquisição de dados	Hewlett Packard	VXI E1432
Condicionador de sinais de acelerômetro	Brüel & Kjaer	2626
Condicionador de sinais de extensômetro	Yokogawa	3458-10
Acelerômetro	Brüel & Kjaer	4371
Extensômetro 120 Ohms	MM	CEA-06-187UW-120
Vibrador 450 N	LDS	V450
Amplificador de potência 0,50 KVA	LDS	PA500
Software de controle aleatório	Spectral Dynamics	2560-0120
Software de controle varredura seno	Spectral Dynamics	2560-0130
Software de controle modo combinado	Spectral Dynamics	2560-0121
Software de análise sinais	Spectral Dynamics	2560-0150
Software de aquisição de dados	Data Physics	SignalCalc 620

A viga foi fixada verticalmente no vibrador que fornece uma excitação transversal na direção y ou longitudinal na direção x , conforme ilustrado nas figuras 3.8 e 3.10, respectivamente. O dispositivo de engaste da viga ilustrado na figura 3.9 foi projetado para permitir excitações transversais e longitudinais produzidas por um vibrador eletrodinâmico, através de um deslocamento aplicado na base da viga.

A aceleração de entrada foi monitorada através de dois acelerômetros posicionados sobre o dispositivo de engaste da viga. Um acelerômetro foi monitorado pelo sistema de medidas e o outro pelo sistema de controle. A resposta planar da viga foi medida através de um extensômetro de resistência elétrica de resistência de 120 Ohms posicionado sobre o eixo neutral x , logo acima do ponto de engaste da viga, onde as deformações são altas e fora da posição dos pontos nodais, conforme ilustrado na figura 3.7. Considerando a massa do extensômetro desprezível, temos que a massa total em movimento é constituída apenas pela massa da viga. Nestas condições, a resposta da viga é preservada da influência de “stingers” e de massas adicionais de sensores de medida.

Durante a realização dos ensaios, os sinais de medida e controle foram monitorados no domínio do tempo e no domínio da frequência, e registrados para posterior processamento e análises. Com relação aos sinais de resposta medidos pelo extensômetro, deve ser considerado que extensômetros medem deformação no ponto onde são fixados e os valores lidos na saída dos condicionadores de extensômetros são geralmente expressos em volts. Os resultados obtidos nas observações experimentais realizadas não foram convertidos para amplitudes de deslocamento, sendo portanto expressos em volts proporcionais às deformações lidas. Assim, é conveniente alertar ao leitor que não existe uma correspondência direta entre os valores de deformação e os valores de amplitude dos deslocamentos de vários modos. Em outras palavras, um mesmo valor de deformação pode levar à diferentes valores de amplitude de deslocamentos para diferentes modos.

Os sistemas de controle e de medidas empregados operaram de forma sincronizada e automatizada. O sistema de medidas foi configurado para realizar aquisições de sinais durante 100 segundos a cada intervalo de 100 segundos. Os parâmetros utilizados para o processamento dos sinais de medida estão definidos na

tabela 3.3. O sinal de excitação do tipo varredura seno foi gerado pelo sistema de controle com uma taxa linear de 0,0005 Hz/s. Nesta configuração, o sistema de medidas realizou as aquisições dos sinais de entrada e resposta a cada incremento de frequência de 0,1 Hz do sinal de excitação gerado pelo sistema de controle.



Figura 3.8 – Viga fixada no vibrador sob excitação transversal na direção y .

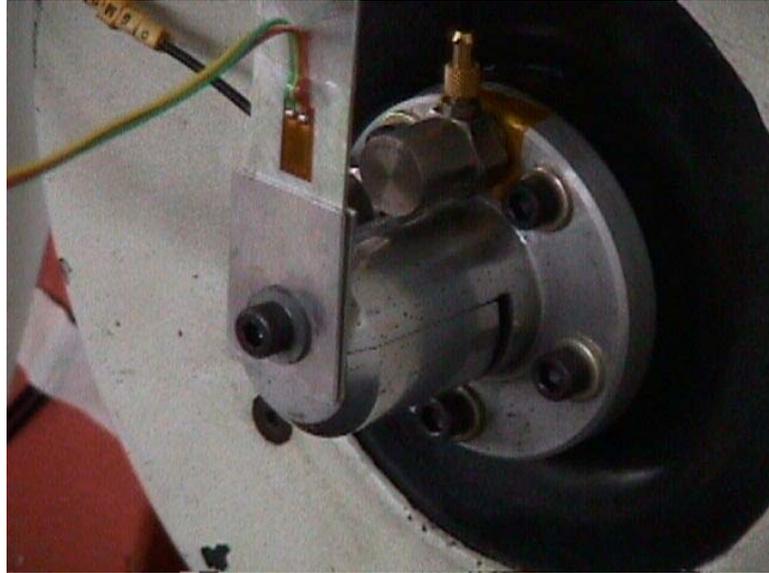


Figura 3.9 – Detalhe do dispositivo de engaste e localização dos acelerômetros e do extensômetro.



Figura 3.10 – Viga fixada no vibrador sob excitação longitudinal na direção x .

Tabela 3.3 – Parâmetros utilizados no processamento dos sinais de medida

Parâmetro	Valor
Δt	$6,1035 \times 10^{-4}$ segundos
N	16.384 amostras/registro
$T = N\Delta t$	10 segundos/registro
n_d	10 registros distintos
$N_{total} = n_d N$	163.840 amostras
$T_{total} = n_d T$	100 segundos
$f_c = 1/(2,56\Delta t)$	Frequência de Nyquist = 640 Hz
Δf	0,1 Hz
Janela	Hanning

CAPÍTULO 4

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 RESPOSTA PLANAR DE VIGAS CANTILEVER FLEXÍVEIS SOB EXCITAÇÃO TRANSVERSAL

Nesta seção os resultados da investigação experimental de interações modais não ressonantes na resposta planar de uma viga cantilever flexível sujeita à um deslocamento harmônico externo (transversal) na sua base são apresentados. A viga foi investigada na posição vertical e sob excitação senoidal na vizinhança do terceiro modo de flexão, foi observado para determinados valores de amplitude e frequência a ativação de modos de baixa frequência com elevados valores de amplitude e acompanhados de modulações das amplitudes e fases dos modos de alta frequência excitados. O mesmo fenômeno foi também observado para uma faixa de frequências de excitação acima da frequência do sexto modo de flexão. Em determinadas condições, movimentos quase periódicos com amplitudes moduladas caoticamente e moduladas periodicamente foram identificados.

Os resultados da observação experimental são apresentados no domínio do tempo e no domínio da frequência. As ferramentas utilizadas para caracterizar a dinâmica da viga incluem históricos temporais, espectros, curvas de resposta-frequência, espaços de fase e mapas de Poincaré.

4.1.1 Equações do movimento planar não linear

Uma viga cantilever inextensível, sujeita apenas a uma excitação harmônica transversal na sua base na direção y é considerada, estando ausentes todas as outras forças externas, com exceção da força exercida pela ação da gravidade, conforme ilustrado na figura 4.1.

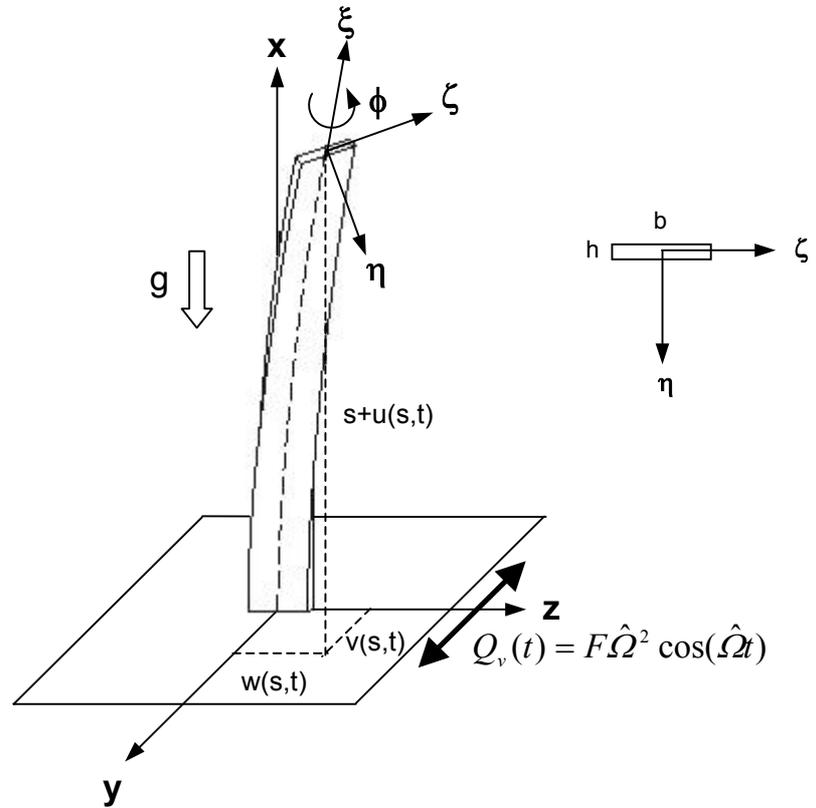


Figura 4.1 – Viga cantilever sob excitação harmônica transversal na base.

Nestas condições temos que $Q_w = Q_\phi = 0$, $Q_u = -mg$ e $Q_v = F\hat{\Omega}^2 \cos(\hat{\Omega}t)$, onde $F\hat{\Omega}^2$ é a amplitude e $\hat{\Omega} = 2\pi\Omega$ é a frequência da excitação aplicada. Substituindo as excitações atuantes nas equações (3.59) e (3.60), as equações de movimento flexional-flexional resultam em:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{v} + c_v\dot{v} + D_\zeta v^{iv} = & mg[v''(s-l) + v'] + (D_\eta - D_\zeta) \left[w'' \int_l^s v'' w'' ds - w''' \int_0^s v'' w' ds \right]' - \\
 & \frac{(D_\eta - D_\zeta)^2}{D_\xi} \left[w'' \int_0^s \int_l^s v'' w'' ds ds \right]'' - D_\zeta \left[v'(v'v'' + w'w'')' \right]' - \quad (4.1) \\
 & \frac{m}{2} \left\{ v' \int_l^s \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^s (v'^2 + w'^2) ds \right] ds \right\}' + F\hat{\Omega}^2 \cos(\hat{\Omega}t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m\ddot{w} + c_w \dot{w} + D_\eta w^{iv} = mg[w''(s-l) + w'] - (D_\eta - D_\zeta) \left[v'' \int_l^s v'' w'' ds - v''' \int_0^s v' w'' ds \right]' - \\
\frac{(D_\eta - D_\zeta)^2}{D_\xi} \left[v'' \int_0^s \int_l^s v'' w'' ds ds \right]'' - D_\eta \left[w'(v'v'' + w'w'')' \right]' - \\
\frac{m}{2} \left\{ w' \int_l^s \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^s (v'^2 + w'^2) ds \right] ds \right\}'
\end{aligned} \quad (4.2)$$

Fazendo $w(s,t) = 0$ nas equações diferenciais (4.1) e (4.2), obtemos a seguinte equação que governa o movimento planar não linear da viga na direção y :

$$\begin{aligned}
m\ddot{v} + c_v \dot{v} + D_\zeta v^{iv} = mg[v''(s-l) + v'] - D_\zeta \left[v'(v'v'')' \right]' - \\
\frac{m}{2} \left[v' \int_l^s \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^s v'^2 ds \right) ds \right]' + F\hat{\Omega}^2 \cos(\hat{\Omega}t)
\end{aligned} \quad (4.3)$$

com as seguintes condições de contorno associadas:

$$v = 0, \quad v' = 0 \quad (4.4)$$

na extremidade engastada, em $s = 0$, e:

$$v'' = 0, \quad v''' = 0 \quad (4.5)$$

na extremidade livre, em $s = l$.

4.1.2 Freqüências naturais lineares

No estudo experimental de fenômenos não lineares, um estudo inicial do comportamento dinâmico linear do sistema investigado para obtenção do modelo linear teórico e experimental torna-se imperativo.

Para estimação das frequências naturais lineares experimentais, a viga foi excitada através de um sinal do tipo “burst random” na faixa de frequências entre 0 Hz e 500 Hz e amplitude máxima de 10 mV, gerado pelo sistema de controle de vibrações operando em malha aberta. O modelo experimental foi estimado a partir da FRF obtida entre a aceleração aplicada na base e a deformação medida no ponto de fixação do extensômetro. Os parâmetros utilizados no processamento digital dos sinais de excitação e resposta estão apresentados na tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Parâmetros utilizados no processamento dos sinais de FRFs

Parâmetro	Valor
Δt	$7,8125 \times 10^{-4}$ segundos
N	4096 amostras/registro
$T = N\Delta t$	3,2 segundos/registro
n_d	100 registros distintos
$N_{total} = n_d N$	409.600 amostras
$T_{total} = n_d T$	320 segundos
$f_c = 1/(2,56\Delta t)$	Frequência de Nyquist = 500 Hz
Δf	$3,125 \times 10^{-1}$ Hz
Janela	Hanning

As observações experimentais foram restritas aos primeiros seis modos flexionais da viga, contidos na faixa de 0 Hz a 200 Hz. A FRF obtida para esta faixa de frequências está ilustrada na figura 4.2.

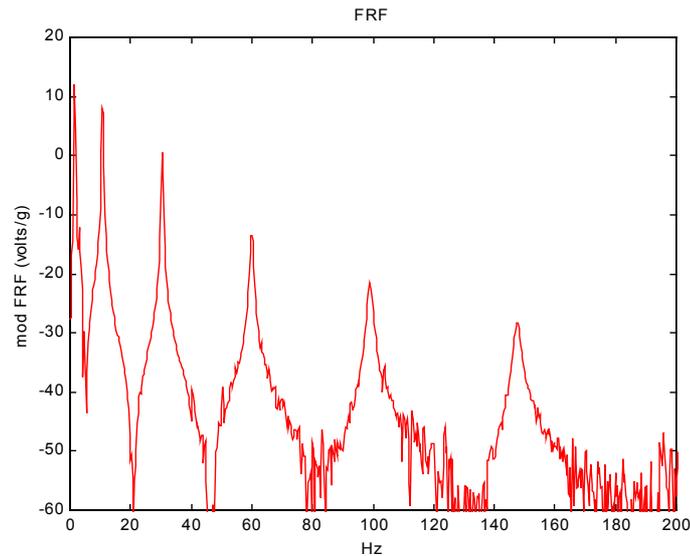


Figura 4.2 – FRF para a faixa de 0 Hz a 200 Hz.

Em seguida, os dados da FRF foram exportados para o software CADA-PC, um aplicativo comercial de análise modal (LMS, 1998), para estimação dos parâmetros modais da viga. Os parâmetros de frequência natural e fator de amortecimento foram estimados através do método “Circle-Fit”, um método de um grau de liberdade que opera no domínio da frequência. Os parâmetros modais são apresentados na tabela 4.2, que inclui também as frequências naturais teóricas obtidas com o aplicativo comercial de elementos finitos NASTRAN. Os valores estimados das frequências experimentais e teóricas apresentaram boa correlação, com exceção da discrepância apresentada para os valores do primeiro modo, decorrente do modelo teórico não incorporar o efeito da gravidade. Para uma viga de Euler-Bernoulli sob efeito da gravidade, Cusumano e Moon (1995) definiram que a gravidade tende a diminuir as frequências dos primeiros modos de uma viga flexível quando:

$$\beta = \frac{\rho g l^3}{EI} \leq 7,84 \quad (4.6)$$

Para o presente estudo de caso, $\beta = 1,53$ (19,5% do valor crítico) justifica a discrepância significativa de 11,77% para os valores estimados do primeiro modo.

Tabela 4.2 – Parâmetros modais teóricos e experimentais da viga de alumínio 2024-T3

Modo n ^o	Frequências Naturais (Hz)		Erro (%)	Fator Amortec. (%)
	MEF	Experimental		
ω_1	1,84	1,62	-11,77	10,81
ω_2	11,50	10,77	-6,35	1,62
ω_3	32,21	30,45	-5,46	0,54
ω_4	63,13	59,73	5,39	0,52
ω_5	104,40	98,90	5,27	0,70
ω_6	156,05	147,66	5,35	0,73

4.1.3 Transferência de energia para o 1^o modo

Após a estimação das frequências naturais lineares, a viga foi submetida a excitações do tipo varredura seno nos sentidos crescente e decrescente, com amplitude constante e taxa de varredura linear, na vizinhança das frequências dos modos flexionais. Foram realizadas diversas varreduras, variando-se gradualmente o valor da amplitude a cada excitação, no esforço de fazer as interações modais se pronunciarem. Os espectros da excitação e da resposta foram analisados em tempo real a cada incremento da amplitude da excitação e a faixa dinâmica abaixo de -60 dB (0,1%) foi assumida insignificante durante toda a análise experimental.

A primeira evidência de interação modal ocorreu variando-se a frequência de excitação Ω na vizinhança da frequência do terceiro modo ω_3 , entre 28 Hz e 32 Hz, com uma amplitude de aceleração na base (a_b) de $1,2 \text{ g} \pm 0,5 \text{ dB}$ (+5,93%;-5,59%), onde g é a aceleração devido à gravidade ($9,81 \text{ m/s}^2$). A figura 4.3 ilustra o espectro da excitação aplicada no sentido crescente. A forma geral exibida pela curva de resposta-frequência ilustrada na figura 4.4 indica um comportamento não linear do tipo “softening”, em conformidade com resultados experimentais obtidos por Tabaddor e Nayfeh (1997).

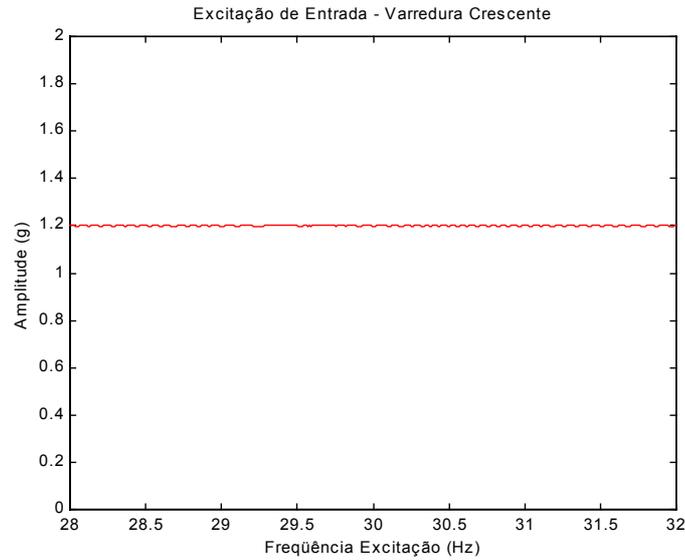


Figura 4.3 – Excitação de entrada: $\Omega = 28 \text{ Hz} - 32 \text{ Hz}$, $a_b = 1,2 \text{ g} \pm 0,5 \text{ dB}$.

As curvas de resposta-freqüência obtidas para a excitação na vizinhança do terceiro modo são apresentadas nas figuras 4.4 e 4.5.

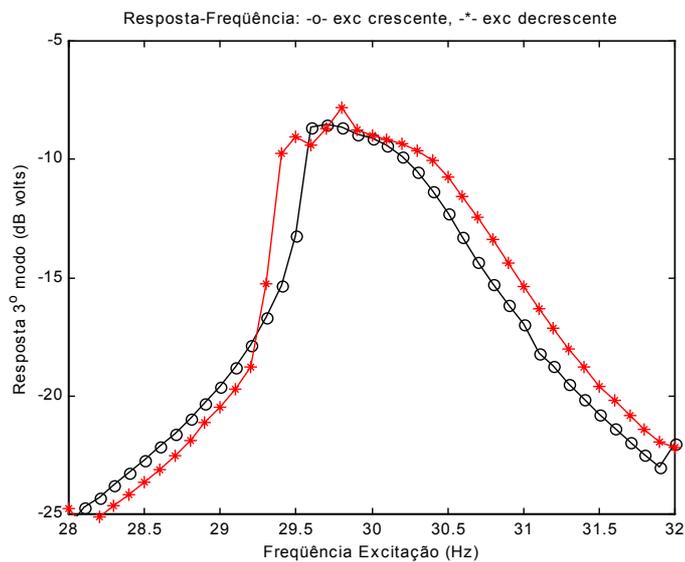


Figura 4.4 – Curva de Resposta-Freqüência para $\Omega = 28 \text{ Hz} - 32 \text{ Hz}$, $a_b = 1,2 \text{ g}$. Resposta do 3º modo.

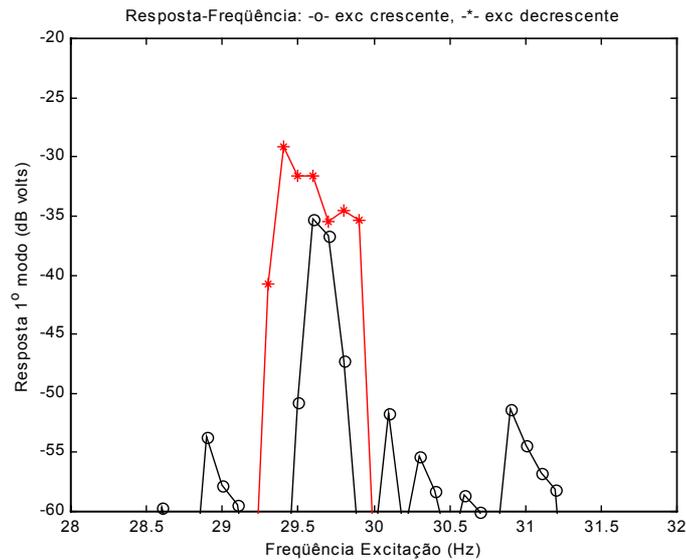
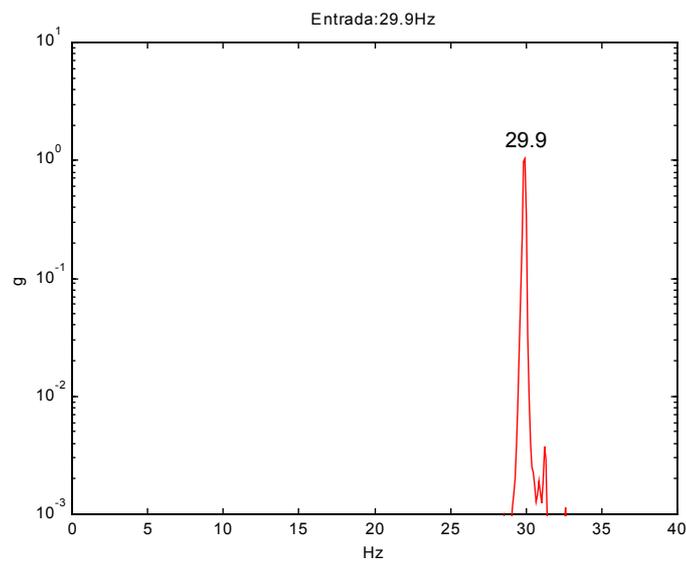


Figura 4.5 – Curva de Resposta-Frequência para $\Omega = 28 \text{ Hz} - 32 \text{ Hz}$, $a_b = 1,2 \text{ g}$. Resposta do 1º modo.

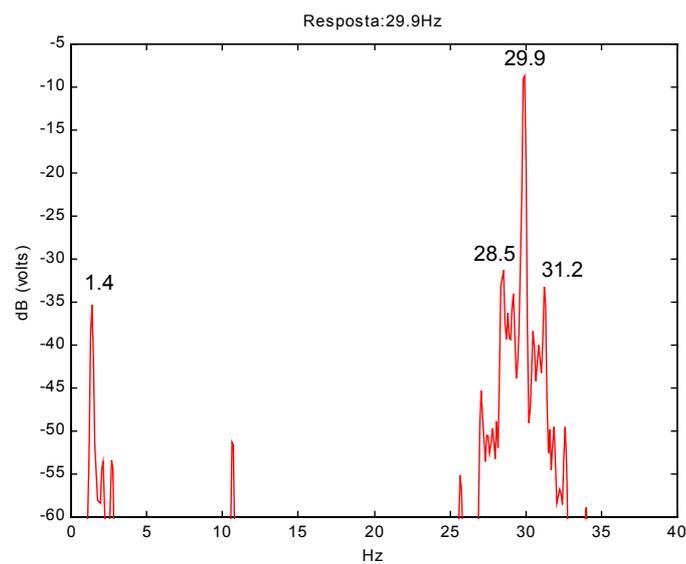
As curvas de resposta-frequência ilustradas nas figuras 4.4 e 4.5 foram obtidas aplicando-se inicialmente uma varredura tipo seno no sentido crescente, partindo de uma frequência de excitação Ω abaixo da frequência do terceiro modo ω_3 . Analisando as curvas obtidas neste sentido, observa-se inicialmente que a viga apresenta uma resposta unimodal constituída apenas do terceiro modo cuja amplitude aumenta gradualmente. Entretanto, quando Ω atinge o valor de 29,6 Hz é observado um “jump” na amplitude do primeiro modo, ativando este modo até $\Omega = 29,8 \text{ Hz}$. Neste intervalo de frequências a viga apresenta uma resposta bimodal dominada pelo primeiro e terceiro modos, caracterizando a transferência de energia do terceiro para o primeiro modo. Através de uma inspeção visual, foi observado que a viga apresentou um movimento constituído pela frequência do terceiro modo ω_3 sobreposto por um balanço de grande amplitude decorrente da contribuição do primeiro modo. Fora do intervalo de frequências compreendido entre 29,6 Hz e 29,8 Hz, observa-se que ocorre uma contribuição discreta do primeiro modo em algumas frequências de excitação, com valores de amplitude inferiores a -50 dB .

Invertendo o sentido da excitação, observa-se que a resposta bimodal é ativada dentro do intervalo de frequências entre $\Omega = 29,9 \text{ Hz}$ e $\Omega = 29,3 \text{ Hz}$, e que ocorre um

aumento da contribuição do primeiro modo. Os espectros da entrada e da resposta deste fenômeno não linear observado são apresentados na figura 4.6 para a frequência de excitação $\Omega = 29,9$ Hz durante a excitação no sentido decrescente.



(a)



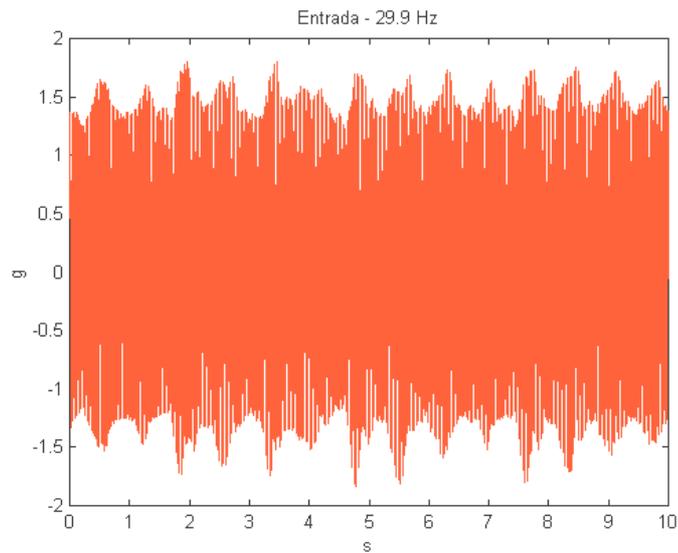
(b)

Figura 4.6 – Espectros para $\Omega = 29,9$ Hz, $a_b = 1,2$ g. (a) Entrada. (b) Resposta.

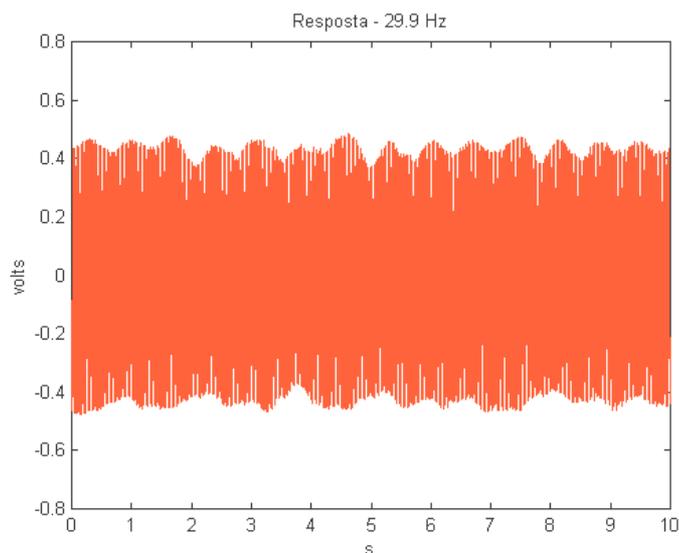
Observa-se na figura 4.6 que o espectro da entrada exibe um pico no valor da frequência de excitação, enquanto que o espectro da resposta além de apresentar picos associados ao terceiro e primeiro modos, apresenta também linhas espectrais assimétricas na vizinhança do pico associado ao terceiro modo (frequência da portadora). A existência de bandas laterais em torno da frequência da portadora evidencia que a amplitude e a fase do terceiro modo são moduladas. Observa-se também que o espaçamento entre estas bandas laterais (frequência de modulação) é aproximadamente igual à frequência natural do primeiro modo e, que a ativação do primeiro modo e a modulação da amplitude e fase do terceiro modo ocorrem simultaneamente sem a ativação de nenhum outro modo intermediário. Em resumo, analisando estes espectros, concluímos que a viga está sujeita à uma entrada harmônica simples com uma frequência de excitação próxima à frequência do terceiro modo e que a viga apresenta uma resposta bimodal constituída do terceiro modo, excitado diretamente, e do primeiro modo, ativado através da modulação do terceiro modo. Em outras palavras, a energia da estrutura foi transferida de um movimento de alta frequência e baixa amplitude para um movimento de baixa frequência e alta amplitude, indicando que o mecanismo de excitação do primeiro modo é o resultado da interação da dinâmica do primeiro modo com a dinâmica do terceiro modo, ou seja, é o resultado da interação não linear de dois modos distantes.

Os históricos temporais correspondentes aos espectros ilustrados na figura 4.6, estão ilustradas na figura 4.7. Uma análise do histórico temporal da entrada e do seu espectro correspondente, revela que a entrada também é modulada, indicando a existência de uma realimentação da estrutura para o vibrador. Ainda, uma inspeção visual do movimento da resposta revela claramente a modulação do terceiro modo.

Com interesses voltados para a observação de uma resposta bimodal da viga durante intervalo de tempo maior que 10 segundos, foi realizada uma nova excitação da estrutura, onde foi mantido a mesma amplitude de excitação e alterados apenas os parâmetros relacionados à velocidade de varredura em conformidade com o longo tempo de aquisição previsto, respeitando os limites máximos de tempo de aquisição impostos pelo sistema de aquisição.



(a)



(b)

Figura 4.7 – Histórico temporal para $\Omega = 29,9$ Hz, $a_b = 1,2$ g. (a) Entrada. (b) Resposta.

Neste contexto, foi adquirida uma resposta temporal de 102 segundos (65.536 leituras amostradas em intervalos de $1,5625 \times 10^{-3}$ segundos) para a frequência de excitação $\Omega = 29,9$ Hz, durante uma excitação no sentido decrescente de amplitude constante $a_b = 1,2$ g. Após uma inspeção do histórico temporal obtido, foi realizada uma análise do movimento na tentativa de identificar possíveis movimentos caóticos e movimentos não periódicos presentes na resposta não linear da viga. A ferramenta

eleita para este tipo de análise foi o mapa de Poincaré, utilizado para visualização do fluxo em um espaço de fase com número de dimensões maior que dois e definido por Moon (1987) como a seqüência de pontos no espaço de fase gerada pela penetração da trajetória do movimento em uma superfície arbitrária definida no espaço de fases. O espaço de fase para a frequência de excitação $\Omega = 29,9$ Hz ilustrado na figura 4.8 foi obtido através das variáveis de estado do sistema, definidas por $x(t)$, a deformação medida no ponto de fixação da viga, e $\dot{x}(t)$, a taxa de deformação. A diferenciação de $x(t)$ foi obtida através da função MATLAB *diff*.

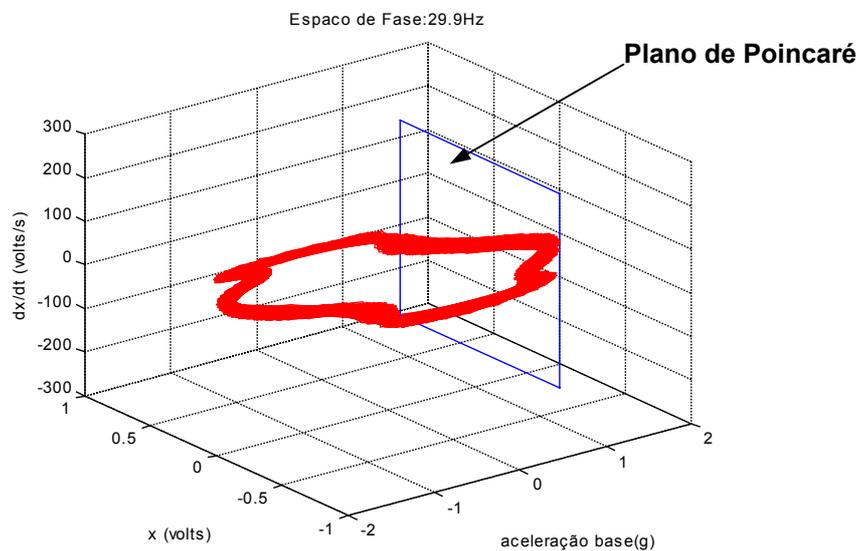


Figura 4.8 – Espaço de fase para $\Omega = 29,9$ Hz, $a_b = 1,2$ g.

Para o sistema forçado periodicamente investigado, o plano de interseção (plano de Poincaré) definido por $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ foi posicionado à -3 dB (70,7%) do valor de pico positivo da aceleração aplicada na base. Foi adotado o sentido anti-horário para a trajetória do movimento ilustrado na figura 4.8. O mapa experimental de Poincaré apresentado na figura 4.9 foi gerado com 5.373 coordenadas através da observação dos valores de $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ quando a trajetória do movimento penetra o plano de Poincaré definido (considerando que o plano contém duas faces, são consideradas apenas as interseções que ocorrem com a mesma face do plano).

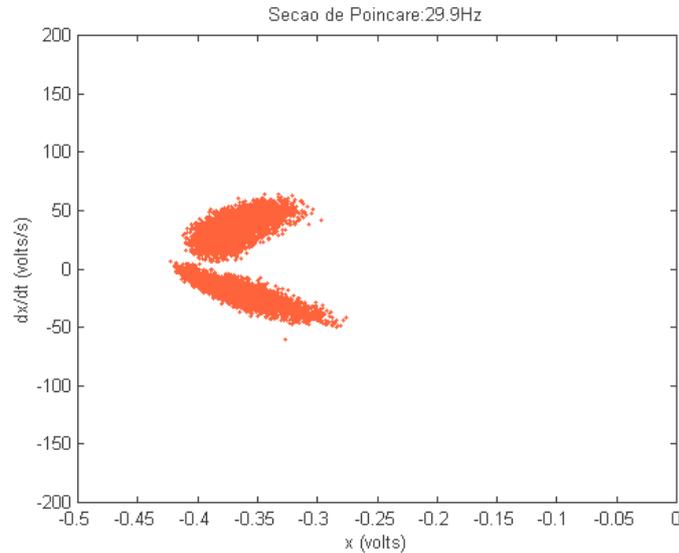


Figura 4.9 – Mapa de Poincaré para $\Omega = 29,9$ Hz, $a_b = 1,2$ g.

Analisando a figura 4.9, observamos que o mapa de Poincaré gerado para o movimento exibe duas figuras ou orbitas fechadas. A classificação de mapas de Poincaré definida por Moon (1987), classifica este tipo de movimento como um movimento quase-periódico com duas frequências incomensuráveis dominantes (isto é, a razão entre as duas frequências é um número irracional). Este tipo de movimento é precursor do movimento caótico e discutido em detalhes por Moon (1987). Foi observado ainda que a amplitude do primeiro modo varia com o tempo. Esta observação indica também que o movimento exibido é um movimento quase-periódico caoticamente modulado. Anderson, Balachandran e Nayfeh (1994) observaram o mesmo tipo de movimento para uma viga excitada parametricamente.

4.1.4 Transferência de energia em uma viga amortecida

No emprego de mapas de Poincaré para análises de movimentos caóticos de sistema dinâmicos, o amortecimento constitui-se em uma propriedade crítica. Em sistemas não amortecidos ou pouco amortecidos, o mapa de Poincaré exibe geralmente uma nuvem de pontos desorganizados, inviabilizando a evidência de fenômenos caóticos. No entanto, em sistemas amortecidos a presença de movimentos caóticos é

exibida pelo mapa de Poincaré como um conjunto de pontos altamente ordenados que caracterizam atratores e dimensão fractal (Moon, 1987). Baseados nesta definição, Moon e Shaw (1983) conduziram um experimento com uma viga amortecida com condições de contorno não lineares. O aumento do coeficiente de amortecimento da viga foi obtido através da aplicação de uma fita metálica de baixa espessura (0,1 *mm*), colada nas duas faces da viga investigada. Este artifício propiciou o aumento do coeficiente de amortecimento da viga, suficiente para o sistema exibir um caos dissipativo.

Motivado pela possibilidade de caracterização de um movimento quasi-periódico caoticamente modulado através de um mapa de Poincaré melhor definido, uma nova viga de alumínio 7075-T6, de seção uniforme e propriedades descritas na tabela 3.1, foi investigada. O aumento do amortecimento foi obtido através do mesmo recurso empregado por Moon e Shaw (1983), aplicando-se ao longo de uma das faces da viga uma fita metálica de espessura de 0,1 *mm*.

A FRF ilustrada na figura 4.10 foi obtida com uma resolução de frequência de 0,125 Hz, através de uma excitação transversal aleatória de valor global de 50 mV, gerada pelo sistema de medidas e aplicada na base de fixação da viga. Como no estudo de caso anterior, as observações experimentais foram restritas aos primeiros modos flexionais da viga, contidos na faixa de 0 Hz a 200 Hz. As primeiras cinco frequências naturais lineares experimentais obtidas estão ilustradas na tabela 4.3.

Aplicando-se uma excitação transversal do tipo varredura seno no sentido crescente na base da viga e variando-se a frequência de excitação Ω na vizinhança da frequência do terceiro modo com uma amplitude de aceleração a_b constante de 0,77 g \pm 0,5 dB, foi observada uma resposta bimodal entre $\Omega = 18,9$ Hz e $\Omega = 19,7$ Hz. O espectro para a frequência de excitação $\Omega = 19,5$ Hz apresentado na figura 4.11 ilustra a transferência de energia para o primeiro modo via modulação do terceiro modo. Observa-se ainda na figura 4.11 que a modulação do terceiro modo é caracterizada por bandas laterais bem definidas e espaçadas por 1,3 Hz (frequência do primeiro modo) e que o pico associado a frequência do primeiro modo é acompanhado de linhas espectrais assimétricas igualmente bem definidas e espaçadas pela mesma frequência.

Tabela 4.3 – Parâmetros modais experimentais da viga de alumínio 7075-T6 amortecida

Modo n°	Frequências Naturais (Hz)	Fator Amortec. (%)
ω_1	1,37	2,57
ω_2	6,88	3,08
ω_3	19,37	1,82
ω_4	36,81	2,51
ω_5	61,93	1,88

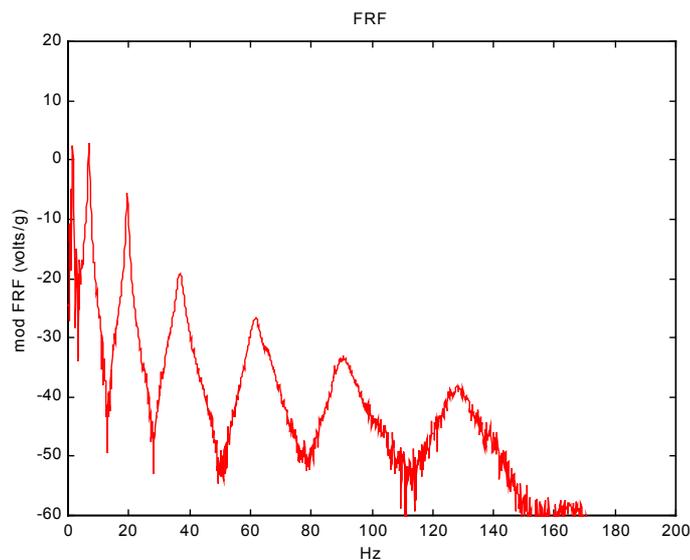


Figura 4.10 – FRF da viga amortecida para a faixa de 0 Hz à 200 Hz.

Uma análise mais detalhada do movimento da viga pode ser observada nas figuras 4.12 e 4.13. A figura 4.12a ilustra o início da observação, para a frequência de excitação $\Omega = 18,0$ Hz. O espaço de fase exibe uma elipse bem definida indicando a uma resposta de um movimento periódico, conforme esperado. O mapa de Poincaré exibe uma seqüência de pontos em torno das coordenadas $(x(t), \dot{x}(t)) = (-0,04; -8,39)$, caracterizando uma resposta periódica da viga que vibra em oposição de fase à

aceleração de entrada na base. O histórico temporal correspondente é ilustrado na figura 4.13a, sendo que este movimento foi observado até $\Omega = 18,8$ Hz, onde a resposta é estritamente dominada pelo terceiro modo.

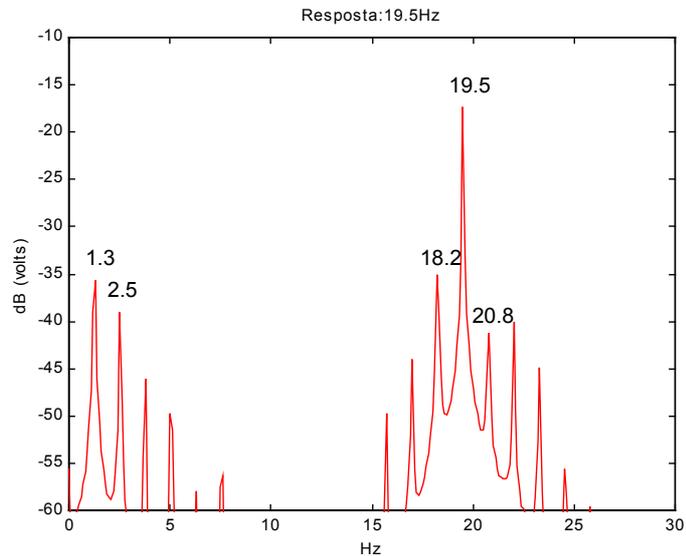


Figura 4.11 – Espectro da resposta da viga amortecida para $\Omega = 19,5$ Hz, $a_b = 0,77$ g.

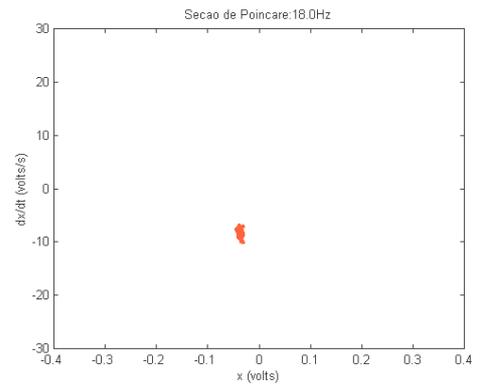
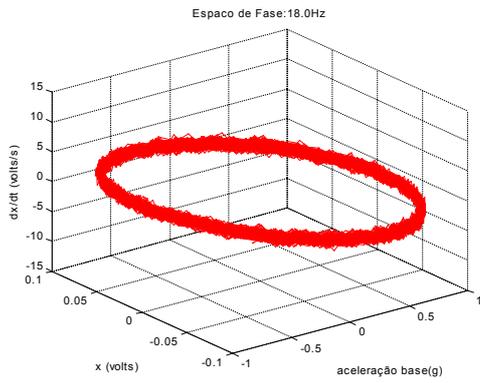
Uma inspeção visual das figuras 4.12b e 4.12c revelam claramente que a resposta passa a ser modulada quando $\Omega = 18,9$ Hz e apresenta uma componente de baixa frequência sobrepondo a resposta do terceiro modo. O histórico temporal de 10 segundos ilustrado na figura 4.13b evidencia a variação da amplitude do primeiro modo. O mapa de Poincaré correspondente exibe uma figura bem definida que indica a presença de um movimento quasi-periódico caoticamente modulado, decorrente da transferência de energia do terceiro modo para o primeiro modo via modulação. Este movimento também pode ser confirmado através do espectro ilustrado na figura 4.11, que apresenta uma forma contínua em determinadas faixas de frequência, que é característico de um movimento caoticamente modulado (Nayfeh, 2000).

Atratores caóticos bem definidos associados a uma resposta bimodal, foram exibidos durante toda a evolução da frequência de excitação, até Ω atingir o valor de 19,6 Hz, conforme ilustrado na figura 4.12d. A partir deste valor da frequência de excitação e avançando em direção à frequência do terceiro modo, não mais foi observada a transferência de energia para o primeiro modo e atratores deformados e de

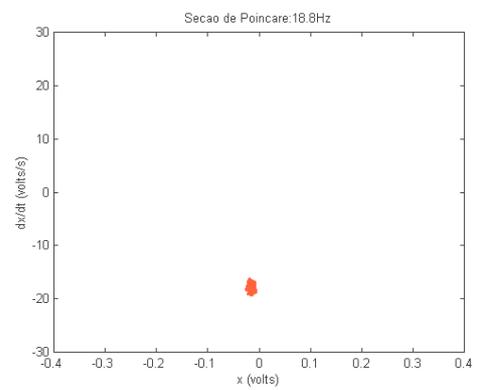
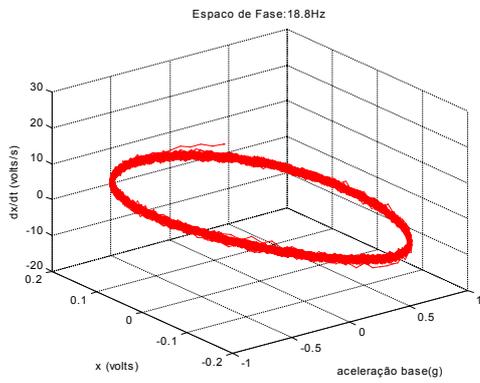
pouca definição passaram a ser exibidos, conforme ilustrado na figura 4.12e. Uma inspeção visual na figura 4.13c não consegue mais distinguir a modulação do sinal.

Quando Ω atinge o valor de 20,0 Hz ocorre uma inversão de fase da resposta, conforme ilustrado na figura 4.12f. O mapa de Poincaré correspondente exibe uma seqüência de pontos em torno das coordenadas $(x(t), \dot{x}(t)) = (0,12; 12,47)$, indicando novamente a presença de um movimento periódico. A viga passa então a vibrar estritamente na freqüência do terceiro modo e em fase com a aceleração aplicada na base, conforme ilustrado na figura 4.13d.

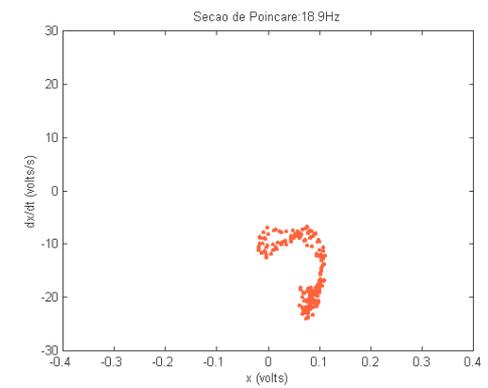
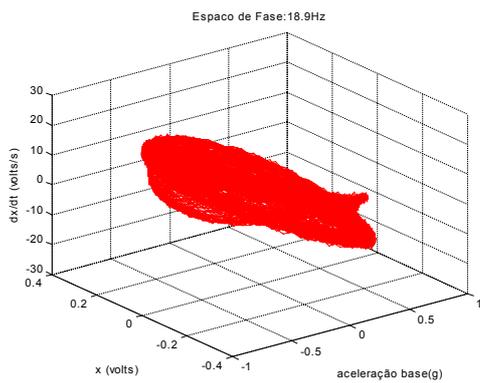
Concluindo as observações realizadas com a viga amortecida, analisamos a seguir o mapa experimental de Poincaré apresentado na figura 4.14. O mapa foi gerado através da observação de 1.248 valores de $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ na resposta temporal de 64 segundos (65.536 leituras amostradas em intervalos de $9,7656 \times 10^{-4}$ segundos) para a freqüência de excitação $\Omega = 19,5$ Hz, $a_b = 0,77$ g. O mapa exibe uma figura de Poincaré característica de um sistema dissipativo e bem melhor definida que a figura obtida no estudo de caso anterior, devido ao aumento do amortecimento da viga. Analisando o mapa, observamos novamente a ocorrência de um movimento quasi-periódico de duas freqüências dominantes, modulado caoticamente. Observa-se que para uma entrada periódica de amplitude constante, a amplitude de deformação variou de 0,13 volts a 0,29 volts. Enquanto que para um movimento periódico a deformação e a taxa de deformação apresentam valores de amplitude constantes, observamos no mapa exibido que a taxa de deformação atinge valores diferenciados positivos e negativos para um mesmo valor de deformação; por exemplo, para uma deformação de 0,2 volts, a taxa de deformação variou de $-14,65$ volts/s a $2,53$ volts/s.



(a)



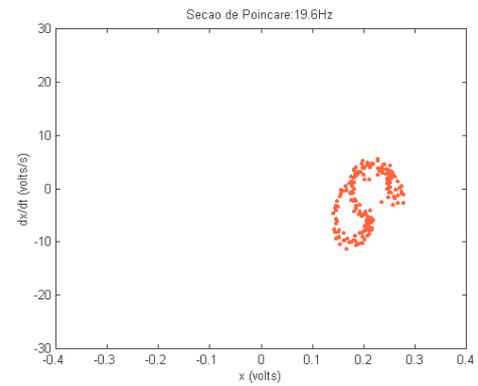
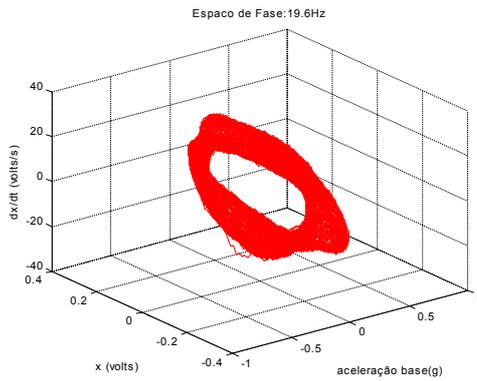
(b)



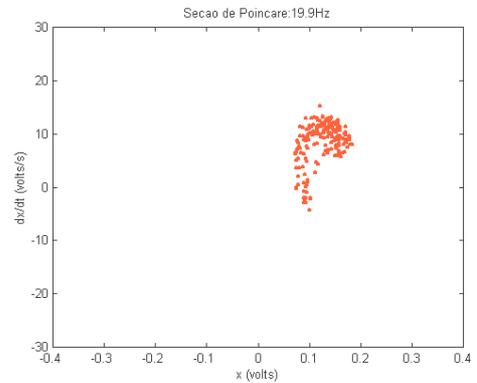
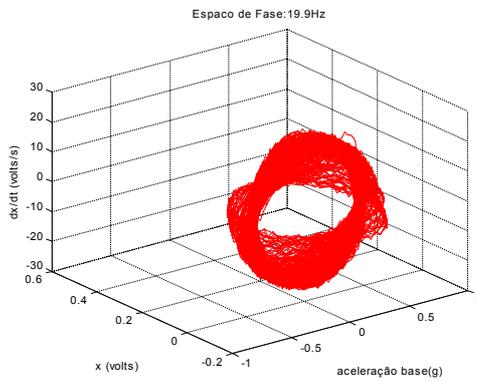
(c)

(continua)

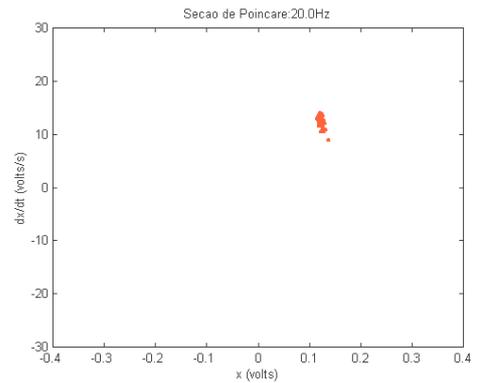
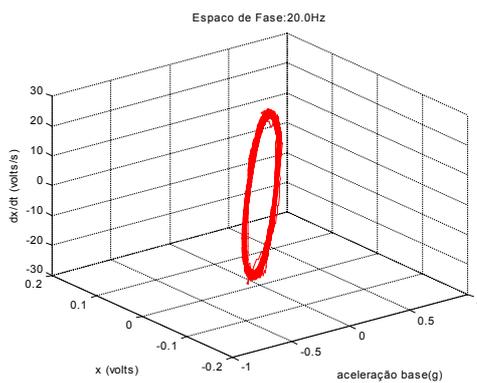
(continuação)



(d)

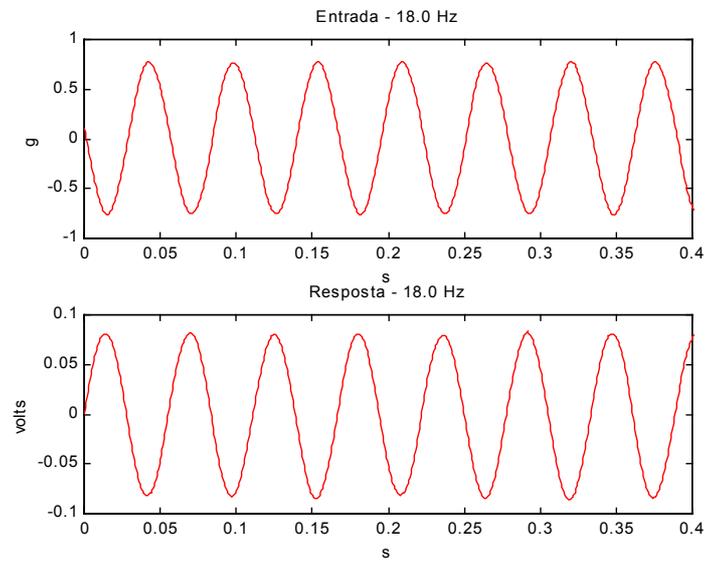


(e)

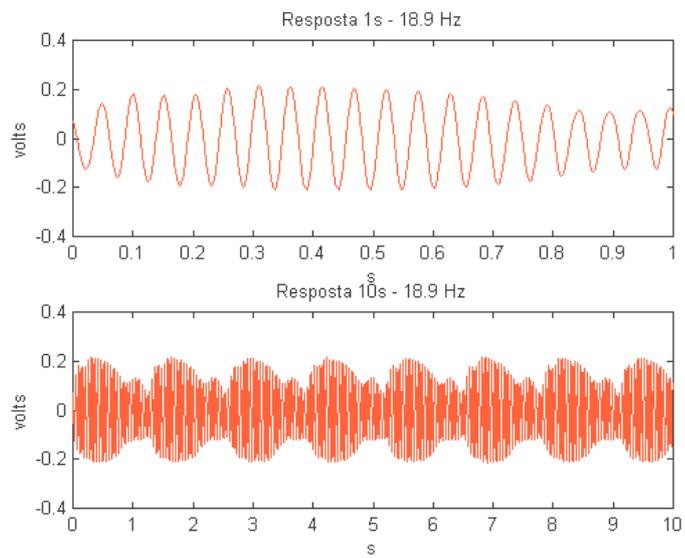


(f)

Figura 4.12 – Observação da resposta da viga amortecida para $\Omega = 18 \text{ Hz} - 20 \text{ Hz}$, $a_b = 0,77 \text{ g}$. (a) $\Omega = 18,0 \text{ Hz}$. Início da observação. (b) $\Omega = 18,8 \text{ Hz}$. Frequência precedente ao movimento quase-periódico. (c) $\Omega = 18,9 \text{ Hz}$. Início da transferência de energia. (d) $\Omega = 19,6 \text{ Hz}$. Final da transferência de energia. (e) $\Omega = 19,9 \text{ Hz}$. Frequência precedente à inversão de fase. (f) $\Omega = 20,0 \text{ Hz}$. Inversão de fase e passagem pela frequência do 3^o modo.



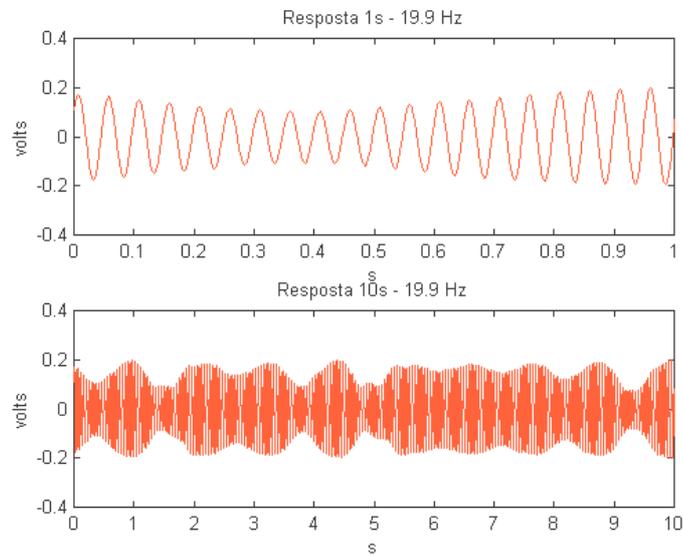
(a)



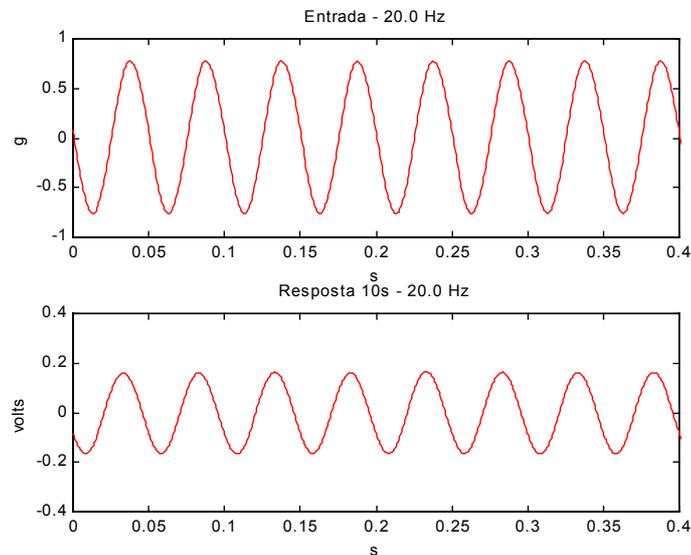
(b)

(continua)

(continuação)



(c)



(d)

Figura 4.13 – Histórico temporal da resposta da viga amortecida para $\Omega = 18 \text{ Hz} - 20 \text{ Hz}$, $a_b = 0,77 \text{ g}$. (a) Histórico temporal para $\Omega = 18,0 \text{ Hz}$. Início da observação. (b) Histórico temporal para $\Omega = 18,9 \text{ Hz}$. Início da modulação. (c) Histórico temporal para $\Omega = 19,9 \text{ Hz}$. Movimento precedente à inversão de fase da resposta. (d) Histórico temporal para $\Omega = 20,0 \text{ Hz}$. Frequência do 3º modo e inversão de fase.

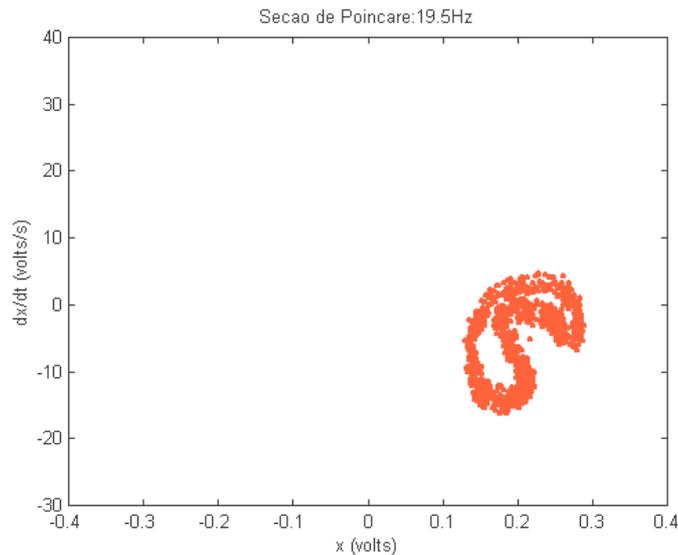


Figura 4.14 – Mapa de Poincaré da resposta da viga amortecida para $\Omega = 19,5$ Hz, $a_b = 0,77$ g.

Esta análise conclui as observações realizadas com a viga de alumínio 7075-T6 amortecida.

4.1.5 Transferência de energia para o 4º e 1º modos

Nos estudos de caso anteriores, foi observada a transferência de energia para excitações harmônicas na vizinhança da frequência do terceiro modo flexional. Em contraste, nesta terceira investigação uma nova observação experimental foi conduzida para verificar a possibilidade de exibição de interações modais para frequências de excitação não contidas no intervalo de frequências vizinhas aos modos flexionais.

Utilizando a viga de alumínio 2024-T3 e o mesmo procedimento experimental anteriores, foi observado a ativação do primeiro modo juntamente com o quarto modo para a faixa de frequências de excitação Ω entre 153 Hz e 156 Hz (acima da frequência do sexto modo ω_6), com uma amplitude de aceleração a_b constante de $20 \text{ g} \pm 0,5$ dB. O espectro da excitação de entrada está ilustrado na figura 4.15.

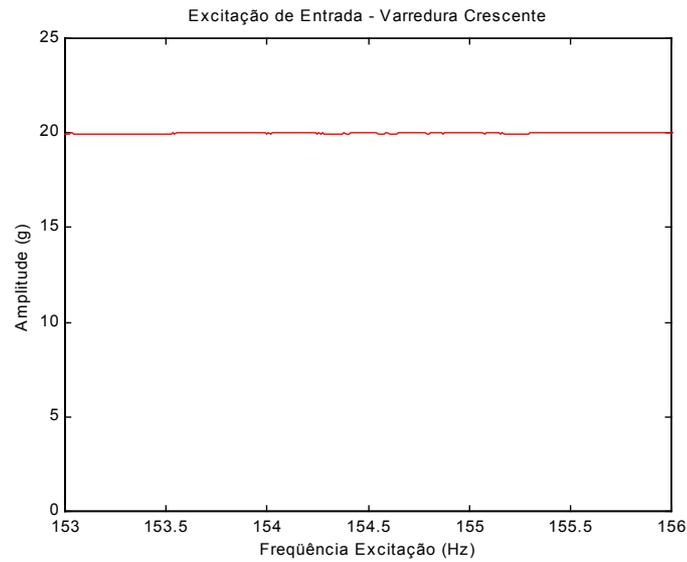


Figura 4.15 – Excitação de entrada: $\Omega = 153 \text{ Hz} - 156 \text{ Hz}$, $a_b = 20 \text{ g} \pm 0,5 \text{ dB}$.

As curvas de resposta-freqüência obtidas para a excitação aplicada estão apresentadas nas figuras 4.16, 4.17 e 4.18.

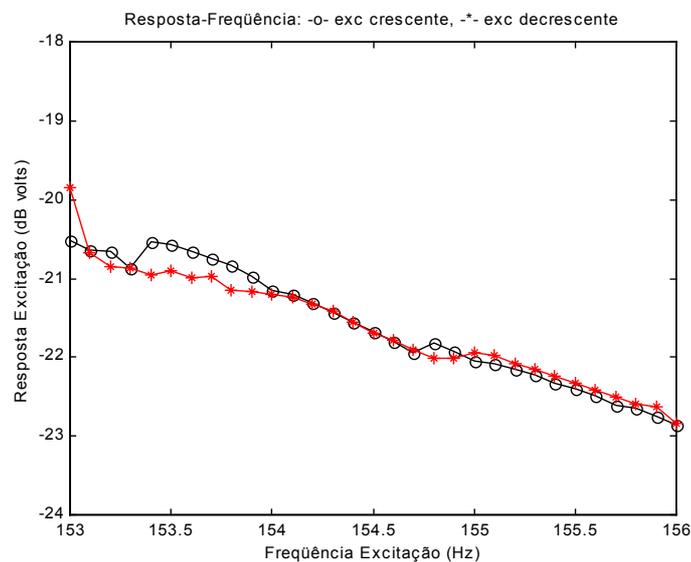


Figura 4.16 – Curva de Resposta-Freqüência para $\Omega = 153 \text{ Hz} - 156 \text{ Hz}$, $a_b = 20 \text{ g}$. Resposta da excitação.

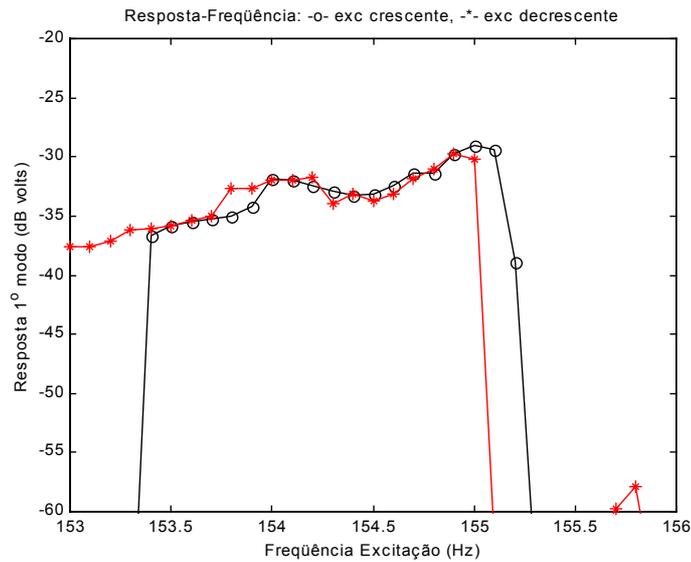


Figura 4.17 – Curva de Resposta-Frequência para $\Omega = 153 \text{ Hz} - 156 \text{ Hz}$, $a_b = 20 \text{ g}$. Resposta do 1º modo.

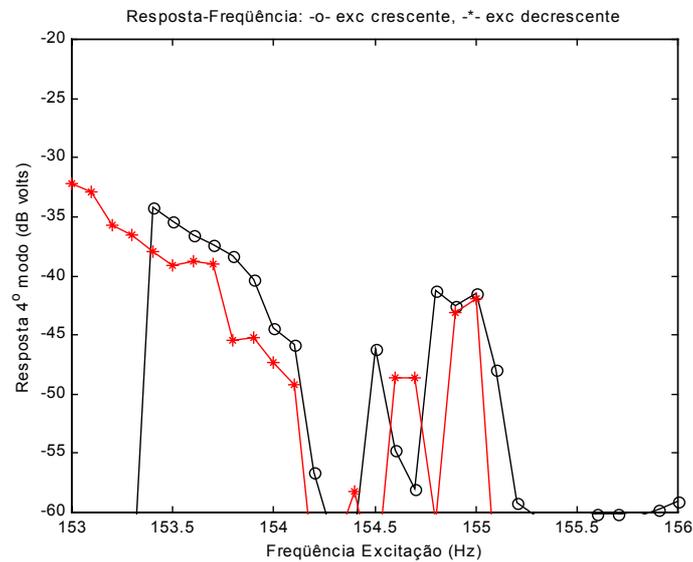


Figura 4.18 – Curva de Resposta-Frequência para $\Omega = 153 \text{ Hz} - 156 \text{ Hz}$, $a_b = 20 \text{ g}$. Resposta do 4º modo.

As curvas de resposta-frequência ilustradas foram obtidas como no caso anterior, aplicando-se inicialmente uma varredura tipo seno no sentido crescente, a partir de uma frequência de excitação Ω acima da frequência do sexto modo ω_6 . A figura 4.16

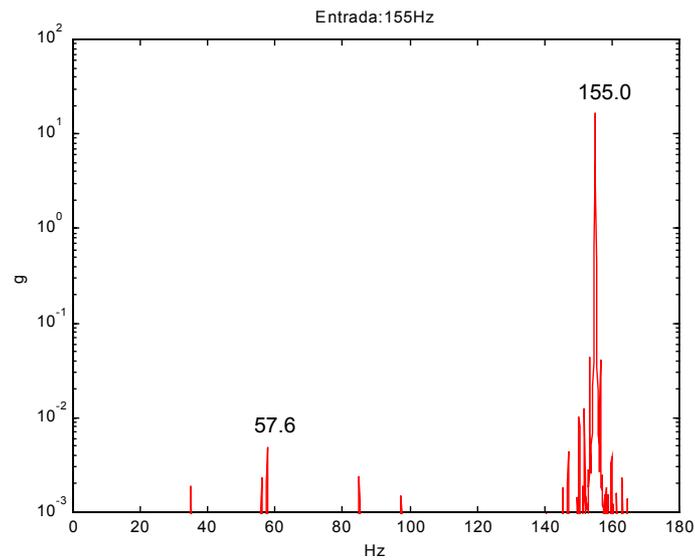
ilustra a atenuação da amplitude da resposta à excitação aplicada em função do aumento da frequência de excitação. Analisando as curvas obtidas no sentido crescente ilustradas nas figuras 4.17 e 4.18, conclui-se que a viga apresenta uma resposta bimodal a partir de $\Omega = 153,4$ Hz, constituída do primeiro e do quarto modos e que a transferência de energia para os modos não é mais observada para valores de Ω acima de 155,2 Hz. Se por um lado a amplitude do primeiro modo aumenta gradualmente até $\Omega = 155$ Hz, por outro lado a amplitude do quarto modo vai atenuando até Ω atingir 154,2 Hz e a partir deste valor, a amplitude oscila entre -41 dB e -59 dB. É observado ainda que a contribuição do primeiro modo é mais significativa que a do quarto modo em quase toda a faixa de frequências observada, com exceção de quando a resposta bimodal é ativada, entre $\Omega = 153,4$ Hz e 153,7 Hz.

No sentido de excitação decrescente, é observada uma resposta bimodal até Ω atingir 153 Hz, sendo que a amplitude do quarto modo apresenta valores superiores à amplitude do primeiro modo a partir de $\Omega = 153,3$ Hz.

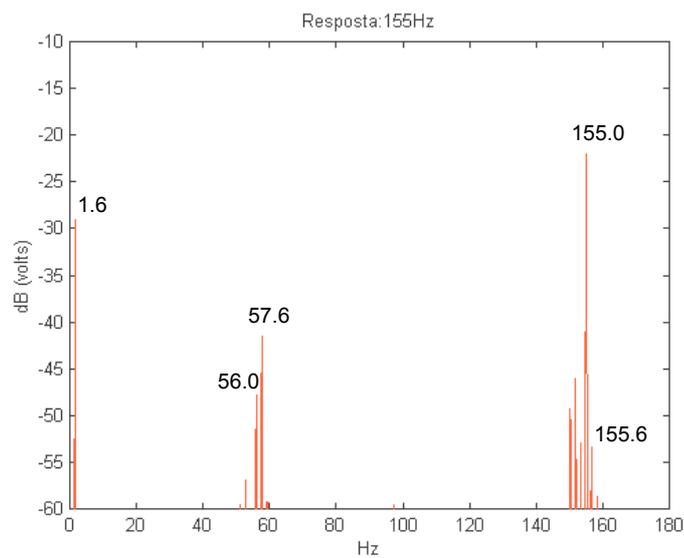
Os espectros da entrada e resposta para $\Omega = 155$ Hz são ilustrados na figura 4.19. O espectro da resposta apresenta várias linhas espectrais assimétricas separadas aproximadamente de 1,6 Hz na vizinhança da frequência de excitação e da frequência do quarto modo ω_4 , além de um pico de grande amplitude na frequência do primeiro modo ω_1 . Novamente foi verificado que a diferença em frequência entre a frequência da portadora e as bandas laterais é aproximadamente o valor da frequência do primeiro modo ω_1 . Em adição, a transferência de energia ativou ainda o quarto modo, que apresenta também bandas laterais separadas pela frequência de modulação de 1,6 Hz. Uma análise do espectro da entrada revela que o movimento de entrada também é fortemente modulado, apresentando uma realimentação da viga para o vibrador mais significativa que a interação identificada no estudo de caso anterior.

A figura 4.20 ilustra o histórico temporal de 10 segundos referente ao espectro de resposta para $\Omega = 155$ Hz. Uma inspeção visual pode evidenciar que a resposta é periodicamente modulada, em contraste à resposta caoticamente modulada exibida no estudo de caso precedente. Este movimento pode ser confirmado também através do espectro da resposta ilustrado na figura 4.19, que apresenta linhas espectrais bem

definidas indicando mais de uma frequência básica. O mapa de Poincaré correspondente ilustrado na figura 4.21 foi gerado com 605 coordenadas e exibe um conjunto de pontos desorganizados e de pouca definição, não indicando neste caso a presença de um movimento quasi-periódico.



(a)



(b)

Figura 4.19 – Espectros para $\Omega = 155$ Hz, $a_b = 20$ g. (a) Entrada. (b) Resposta.

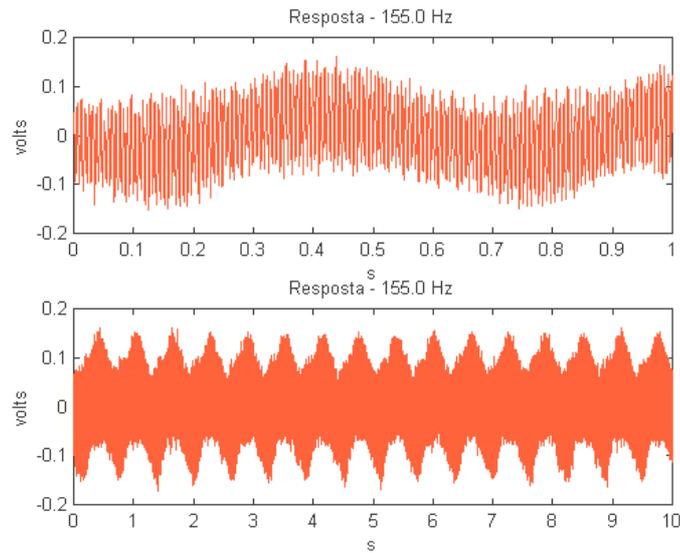


Figura 4.20 – Histórico temporal da resposta para $\Omega = 155$ Hz, $a_b = 20$ g.

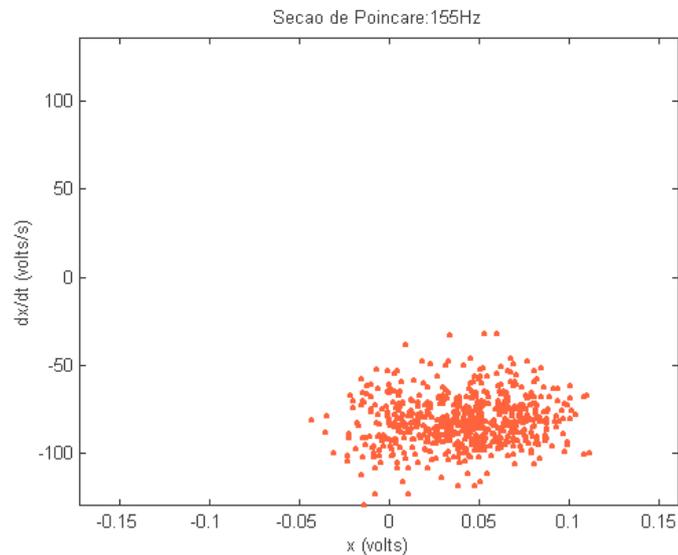


Figura 4.21 – Mapa de Poincaré para $\Omega = 155$ Hz, $a_b = 20$ g.

Estas análises concluem as observações experimentais de interações modais não ressonantes na resposta planar de uma viga cantilever sujeita à um deslocamento transversal.

4.2 RESPOSTA PLANAR DE VIGAS CANTILEVER FLEXÍVEIS SOB EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA

Nesta seção, um estudo experimental da resposta planar de uma viga cantilever flexível sujeita à um deslocamento harmônico paramétrico na sua base é apresentado. Este estudo inclui a ativação do primeiro modo e do segundo modo via modulação, decorrentes de frequências de excitação senoidal contidas entre 105 Hz e 108 Hz e entre 326 Hz e 329 Hz, respectivamente. Em adição, a influência de uma excitação aleatória e de uma excitação combinada de uma entrada aleatória sobreposta por uma entrada senoidal de frequência fixa, foi também investigada. Por fim, um movimento de resposta de período dois foi exibido, decorrente da excitação do terceiro modo através de uma ressonância paramétrica principal ($\Omega \approx 2\omega_3$), e da excitação do quarto modo através de uma ressonância externa primária ($\Omega \approx \omega_4$). As ferramentas matemáticas utilizadas para análise dos movimentos foram as mesmas empregadas na seção anterior.

4.2.1 Equações do movimento planar não linear

Nesta seção uma viga cantilever inextensível, sujeita apenas à uma excitação harmônica paramétrica na sua base na direção x é considerada, estando ausentes todas as outras forças externas e desconsiderando a força exercida pela ação da gravidade, conforme ilustrado na figura 4.22. A excitação paramétrica foi obtida através da mudança de orientação da excitação da direção y para a direção x .

Nestas condições temos que $Q_w = Q_\phi = Q_v = 0$ e $Q_u = G\hat{\Omega}^2 \cos(\hat{\Omega}t)$, onde $G\hat{\Omega}^2$ é a amplitude e $\hat{\Omega} = 2\pi\Omega$ é a frequência da excitação paramétrica aplicada na base. Substituindo nas equações (3.59) e (3.60), as equações de movimento flexional-flexional resultam em:

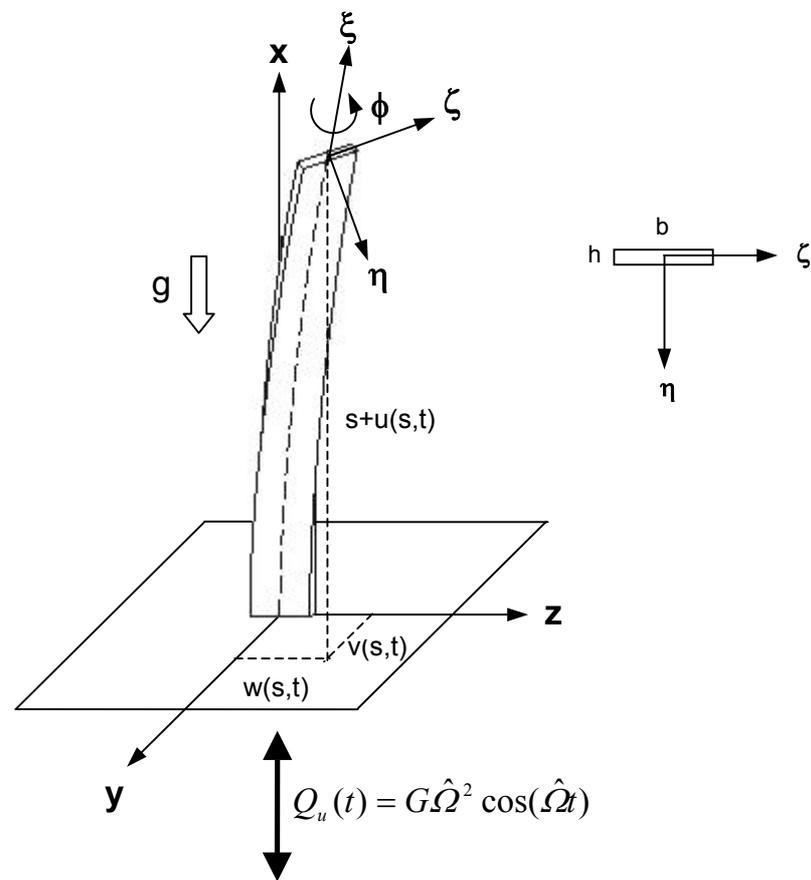


Figura 4.22 – Viga cantilever sob excitação paramétrica na base.

$$\begin{aligned}
 m\ddot{v} + c_v\dot{v} + D_\zeta v^{iv} = & (D_\eta - D_\zeta) \left[w'' \int_l^s v'' w'' ds - w''' \int_0^s v'' w' ds \right]' - \\
 & \frac{(D_\eta - D_\zeta)^2}{D_\xi} \left[w'' \int_0^s \int_l^s v'' w'' ds ds \right]'' - D_\zeta \left[v'(v'v'' + w'w'')' \right]' - \\
 & \frac{m}{2} \left\{ v' \int_l^s \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^s (v'^2 + w'^2) ds \right] ds \right\}' - \\
 & [v''(s-l) + v'] G \hat{\Omega}^2 \cos(\hat{\Omega}t)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
m\ddot{w} + c_w \dot{w} + D_\eta w^{iv} = & -(D_\eta - D_\zeta) \left[v'' \int_l^s v'' w'' ds - v''' \int_0^s v' w'' ds \right]' - \\
& \frac{(D_\eta - D_\zeta)^2}{D_\xi} \left[v'' \int_0^s \int_l^s v'' w'' ds ds \right]'' - D_\eta \left[w' (v' v'' + w' w'')' \right]' - \\
& \frac{m}{2} \left\{ w' \int_l^s \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^s (v'^2 + w'^2) ds \right] ds \right\}' - \\
& [w''(s-l) + w'] G \hat{\Omega}^2 \cos(\hat{\Omega} t)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Fazendo $w(s,t) = 0$ nas equações diferenciais (4.7) e (4.8), obtemos a seguinte equação que governa o movimento planar não linear da viga na direção x :

$$\begin{aligned}
\ddot{v} + c_v \dot{v} + \beta_y v^{iv} = & -D_\zeta \left[v' (v' v'')' \right]' - \frac{m}{2} \left[v' \int_l^s \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^s v'^2 ds \right) ds \right]' - \\
& [v''(s-l) + v'] G \hat{\Omega}^2 \cos(\hat{\Omega} t)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

com as condições de contorno associadas definidas nas equações (4.4) e (4.5).

4.2.2 Transferência de energia para o 1º modo

Nesta configuração de ensaio, foi realizada uma nova análise da resposta da viga sob uma excitação do tipo varredura seno nos sentidos crescente e decrescente e variando-se gradualmente o valor da amplitude a cada nova excitação.

Foi observado uma transferência de energia para o primeiro modo para uma amplitude de aceleração na base $a_b = 20 \text{ g} \pm 0,5 \text{ dB}$, variando-se a frequência de excitação Ω acima da frequência do quinto modo ω_5 , entre 105 Hz e 108 Hz. O espectro da excitação aplicada no sentido crescente é ilustrado na figura 4.23.

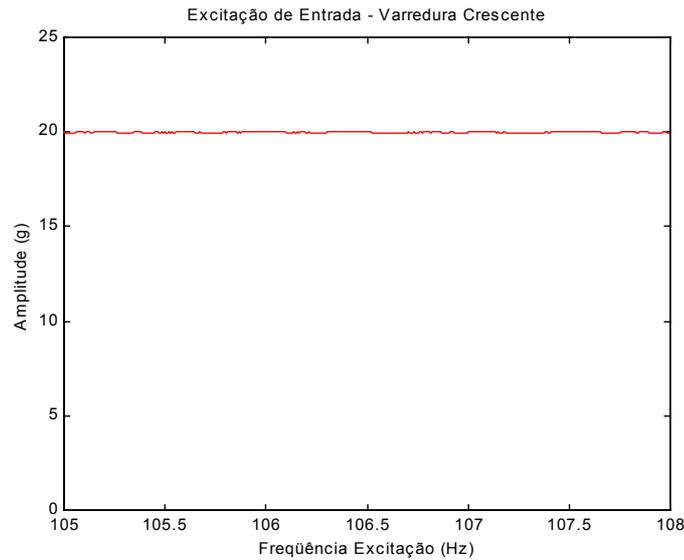


Figura 4.23 – Excitação de entrada: $\Omega = 105 \text{ Hz} - 108 \text{ Hz}$, $a_b = 20 \text{ g} \pm 0,5 \text{ dB}$.

As curvas de resposta-freqüência resultantes são apresentadas nas figuras 4.24 e 4.25. É observado na figura 4.24 a ocorrência de uma atenuação da amplitude da resposta da excitação a medida que a freqüência de excitação evolui, embora a amplitude da entrada seja mantida constante. Analisando a curva da figura 4.25 obtida no sentido crescente de excitação, é observado um “jump” na amplitude do primeiro modo quando Ω atinge 105,5 Hz, ativando o primeiro modo até $\Omega = 107,1 \text{ Hz}$. A evolução da freqüência de excitação resulta em um aumento gradual da amplitude do primeiro modo. Através de uma inspeção visual neste intervalo de freqüências, foi observado que a resposta da viga foi totalmente dominada pela freqüência do primeiro modo ω_1 , caracterizando novamente a transferência de energia de um movimento de alta freqüência e baixa amplitude para um movimento de baixa freqüência e alta amplitude.

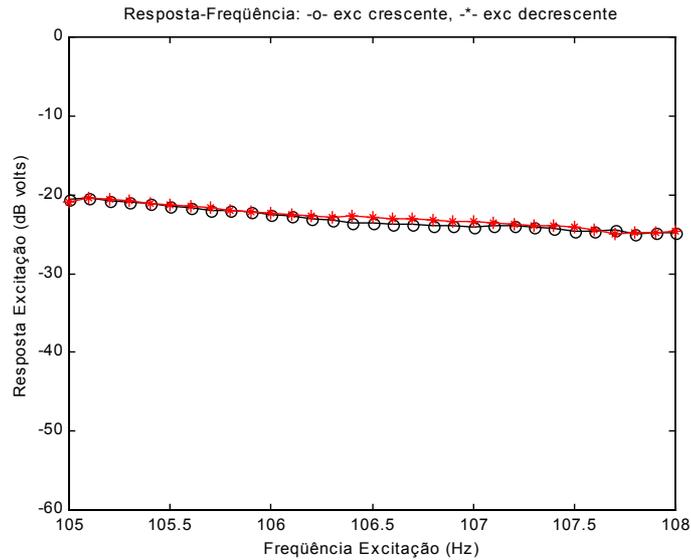


Figura 4.24 – Curva de Resposta-Frequência para $\Omega = 105 \text{ Hz} - 108 \text{ Hz}$, $a_b = 20 \text{ g}$. Resposta da excitação.

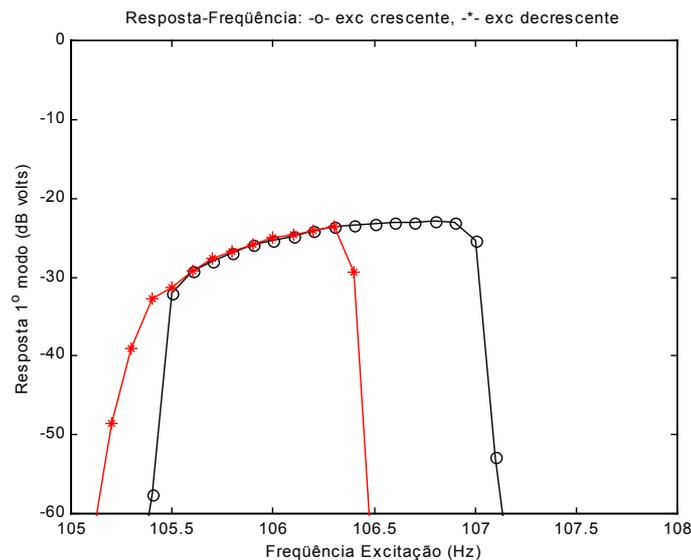
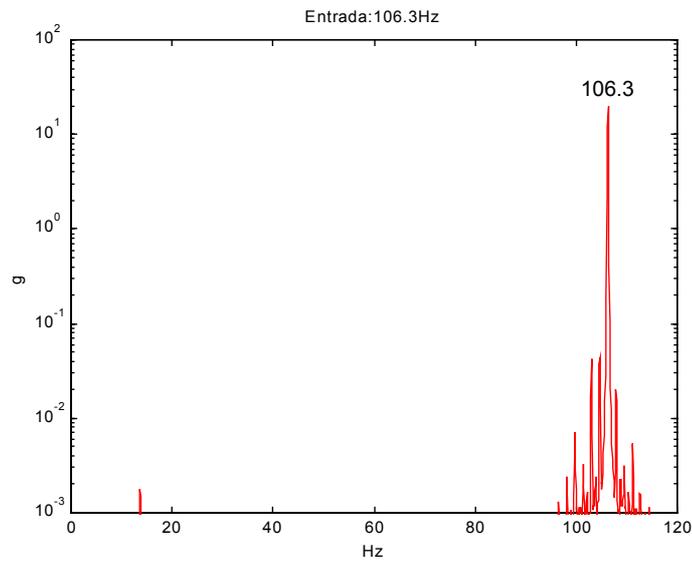
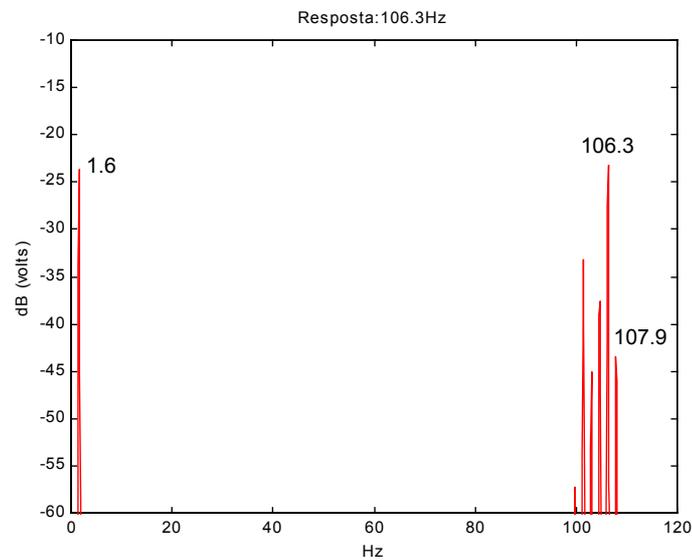


Figura 4.25 – Curva de Resposta-Frequência para $\Omega = 105 \text{ Hz} - 108 \text{ Hz}$, $a_b = 20 \text{ g}$. Resposta do 1º modo.

Invertendo o sentido da excitação, observa-se que o primeiro modo foi ativado dentro de um intervalo de frequências menor, entre $\Omega = 105,2 \text{ Hz}$ e $\Omega = 106,4 \text{ Hz}$. Uma análise complementar pode ser obtida através dos espectros da entrada e da resposta apresentados na figura 4.26 para a frequência de excitação $\Omega = 106,3 \text{ Hz}$ durante a excitação no sentido crescente.



(a)



(b)

Figura 4.26 – Espectros para $\Omega = 106,3$ Hz, $a_b = 20$ g. (a) Entrada. (b) Resposta.

Observa-se na figura 4.26a que o espectro da aceleração na base apresenta um pico principal em 106,3 Hz, referente à frequência de excitação Ω . Apresenta também bandas laterais de amplitudes elevadas, indicando que na ausência de um sistema de

controle de excitação em malha fechada, a aceleração da base poderia ser fortemente modulada. No espectro da resposta ilustrado na figura 4.26b, observa-se que a diferença em frequência entre a frequência da portadora e as bandas laterais é aproximadamente a frequência do primeiro modo ω_1 , indicando a presença de uma modulação periódica que pode ser confirmada no histórico temporal ilustrado na figura 4.27. Como observado nos estudos de caso da viga sob excitação transversal apresentados na seção 4.1, no movimento da viga sob excitação paramétrica foi também observado que o primeiro modo foi indiretamente excitado através da transferência de energia de um movimento de alta frequência e baixa amplitude para um movimento de baixa frequência e alta amplitude, confirmando que a ativação de modos de baixa frequência através de mecanismos não ressonantes de transferência de energia pode ocorrer sob diferentes condições de entrada.

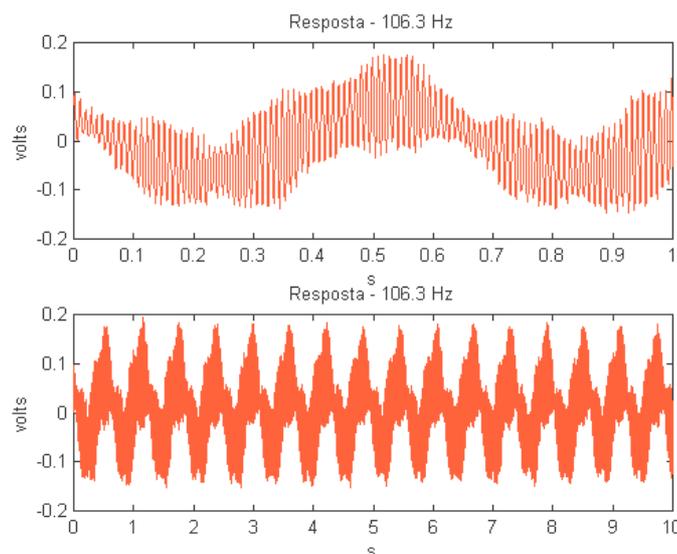


Figura 4.27 – Histórico temporal da resposta para $\Omega = 106,3$ Hz, $a_b = 20$ g.

4.2.3 Transferência de energia para o 2º modo

Nos experimentos conduzidos, foi observado que a ativação do primeiro modo flexional da viga investigada, acompanhado da modulação da amplitude e fase da frequência de excitação, ocorreu para diferentes condições de entrada. Entretanto, como o mecanismo de transferência de energia não se restringe apenas à ativação do

primeiro modo e a suspeita de que outros modos de baixa frequência poderiam também ser ativados, foi sugerida uma nova seqüência de procedimentos experimentais na tentativa de provocar a exibição de outros fenômenos não lineares envolvendo outros modos. Neste contexto, interações modais foram investigadas através da aplicação de dois outros tipos de excitações. Em adição à excitação harmônica paramétrica aplicada, a resposta da viga foi também observada sob uma excitação aleatória transversal e sob uma excitação combinada transversal, constituída de uma entrada aleatória sobreposta de uma entrada periódica.

Na literatura, além do emprego de excitações harmônicas clássicas do tipo varredura seno para investigação de fenômenos não lineares, foi também pesquisado a aplicação de uma entrada aleatória em estudos de casos isolados. No modelo bimodal de uma viga cantilever com um obstáculo na extremidade livre discutido por Davies (1980), foi assumido como entrada um ruído branco gaussiano. No experimento conduzido por Anderson, Balachandran e Nayfeh (1994), interações não lineares de uma viga sob excitação aleatória foram investigadas. Entretanto, não é do conhecimento deste autor o emprego de entradas combinadas no estudo experimental de interações não lineares na resposta de vigas.

4.2.3.1 Resposta da viga sob excitação aleatória

Neste estudo de caso, a viga foi submetida a uma excitação aleatória transversal de energia global de 10 g, cujo espectro de densidade espectral de potência (DEP) foi definido pelo padrão *International Organization for Standardization* (ISO) número 5344, apresentado na tabela 4.4. O principal objetivo da utilização deste perfil foi excluir a excitação direta do primeiro e segundo modos flexionais da viga e investigar a excitação destes modos através de interações não lineares.

Tabela 4.4 – Níveis de energia definidos pelo padrão ISO 5344

Frequência (Hz)	DEP (g²/Hz)
20	0,0020693
100	0,0517313
2000	0,0517313

A DEP da excitação aleatória aplicada está ilustrada na figura 4.28, cujo valor global experimental estimado de 10,03 g está plenamente em conformidade com o valor global nominal. O espectro da resposta à excitação aleatória, restrito aos primeiros seis modos flexionais, está apresentado na figura 4.29. Analisando curvas de entrada e resposta aleatória observamos que embora a viga não tenha sido excitada em frequências menores que 20 Hz, o espectro da resposta apresenta dois picos abaixo de -60 dB nas frequências correspondentes ao primeiro e segundo modos, exibindo uma suspeita de que estes modos podem ter sido excitados através de mecanismos não ressonantes.

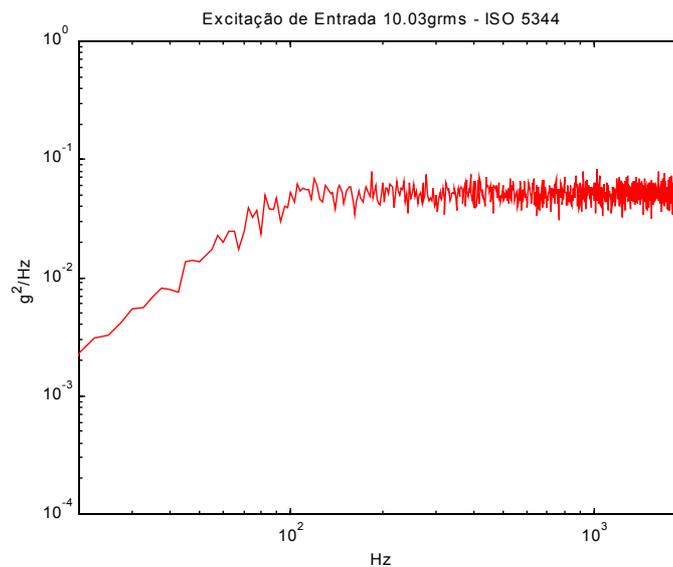


Figura 4.28 – DEP da entrada aleatória.

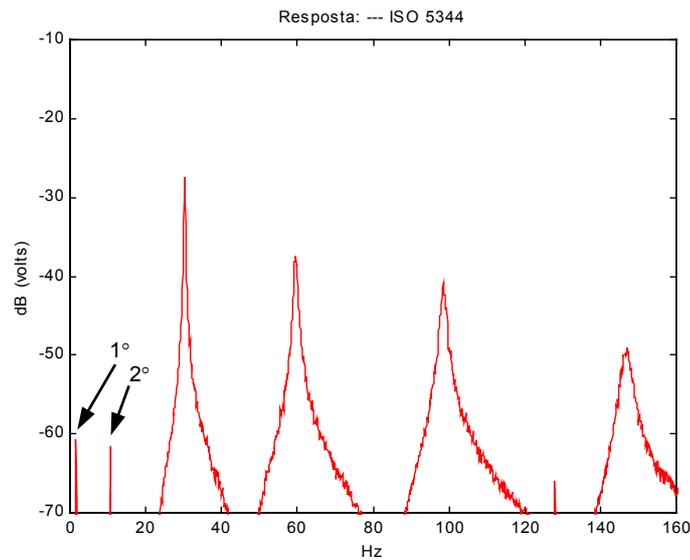


Figura 4.29 – Espectro da resposta à excitação aleatória.

4.2.3.2 Resposta da viga sob excitação combinada

Motivado pelos resultados anteriores obtidos com a excitação aleatória e pelas facilidades disponíveis no aparato experimental empregado, uma análise experimental complementar para evidenciar o mecanismo não ressonante de transferência de energia para o primeiro e segundo modos, foi conduzida.

Baseado nos resultados obtidos na seção 4.1, onde variando-se a frequência de excitação Ω na vizinhança da frequência do terceiro modo ω_3 , entre 28 Hz e 32 Hz, com uma amplitude de aceleração a_b de 1,2 g foi caracterizado que a modulação da frequência do terceiro modo ativou o primeiro modo, uma nova excitação de entrada combinada transversal foi definida através do espectro de energia ISO 5344 sobreposto de uma componente de frequência fixa de 30,45 Hz (frequência do terceiro modo) e amplitude constante de 1,2 g, para avaliar a contribuição dos primeiros modos na resposta da viga sob uma excitação combinada. A DEP da excitação combinada aplicada está ilustrada na figura 4.30, cujo valor global estimado foi de 10,08 g. O pico máximo de potência em 30,45 Hz indica a contribuição do seno fixo sobreposto à entrada aleatória. Comparando o valor global de aceleração de 10,03 g da excitação aleatória pura e o valor global da excitação combinada, concluímos que a energia aplicada na base da viga nos dois casos foi aproximadamente igual. Entretanto,

comparando as respostas à excitação aleatória pura e à excitação combinada ilustradas na figura 4.31, observa-se um aumento significativo da contribuição do primeiro e segundo modos de aproximadamente 18 dB e 11 dB respectivamente (o valor da amplitude linear dobra a cada acréscimo de 6 dB), além do aumento da contribuição do terceiro modo decorrente da excitação direta da frequência de 30,45 Hz. Esta observação confirma a suspeita de que não apenas o primeiro modo, mas também o segundo modo foi excitado indiretamente através de mecanismos não ressonantes.

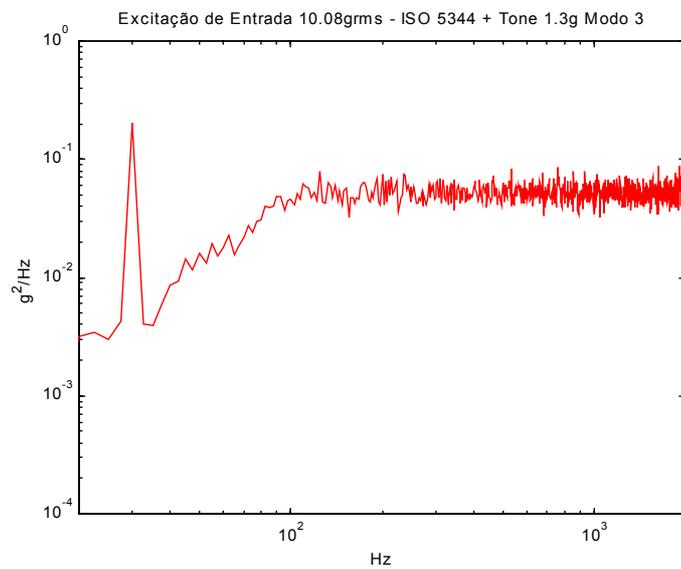


Figura 4.30 – DEP da entrada combinada.

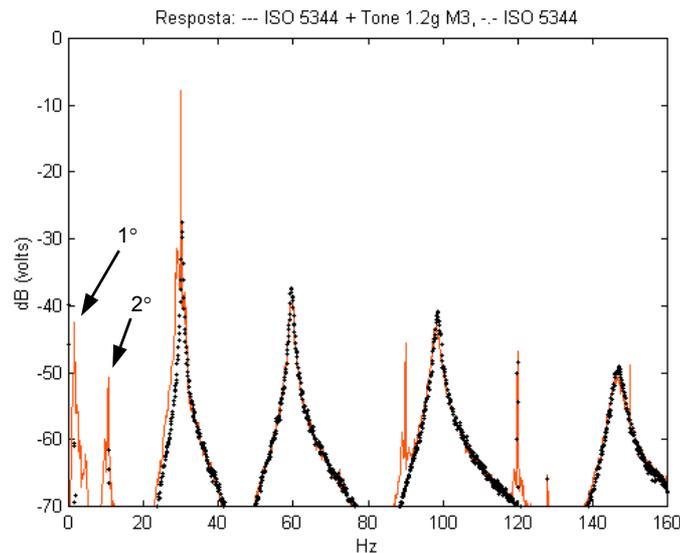


Figura 4.31 – Espectro da resposta à excitação combinada.

4.2.3.3 Resposta da viga sob excitação harmônica

Como a evidência da ativação do segundo modo na resposta da viga sujeita a uma excitação combinada suporta a afirmativa de que outros modos de baixa frequência, além do primeiro modo, podem também ser ativados através de mecanismos não ressonantes, outras observações experimentais com a viga sob excitação harmônica paramétrica foram conduzidas na tentativa de caracterização da transferência de energia de movimentos de alta frequência e baixa amplitude para o segundo modo da viga. Após submeter a viga a diferentes níveis de entrada e analisar o movimento de resposta, foi identificado a ativação do segundo modo para a faixa de frequências de excitação Ω entre 326 Hz e 329 Hz e amplitude a_b de $20 \text{ g} \pm 0,5 \text{ dB}$. A excitação aplicada no sentido crescente é ilustrada na figura 4.32.

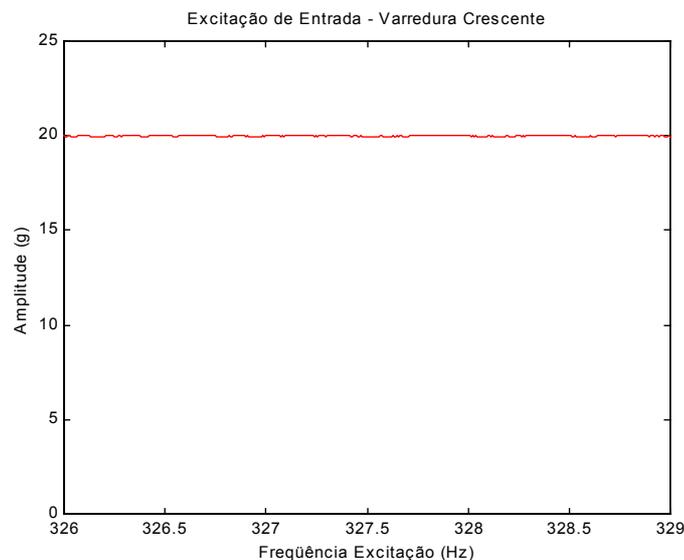


Figura 4.32 – Excitação de entrada: $\Omega = 326 \text{ Hz} - 329 \text{ Hz}$, $a_b = 20 \text{ g} \pm 0,5 \text{ dB}$.

As curvas de resposta-frequência obtidas nos sentidos crescente e decrescente são apresentadas na figura 4.33 e 4.34. Se por um lado a resposta da excitação obtida no estudo de caso anterior, para $\Omega = 105 \text{ Hz} - 108 \text{ Hz}$ e $a_b = 20 \text{ g}$ ilustrada na figura 4.24, apresenta uma atenuação de $4,25 \text{ dB}$ ao longo da faixa de frequências investigada, por outro lado é observado na figura 4.32 que a resposta da excitação apresenta uma

amplitude constante em toda as frequências excitadas. Na figura 4.34 é observado que a ativação do segundo modo ω_2 ocorre em ambos os sentidos da excitação a partir de $\Omega = 326,2$ Hz, e que ocorre um aumento gradual da amplitude do modo ativado a medida que a frequência de excitação evolui.

Os espectros da entrada e da resposta são apresentados na figura 4.35 para a frequência de excitação $\Omega = 328$ Hz durante a excitação no sentido crescente. O espectro da entrada consiste de um pico principal em 326,2 Hz acompanhado de bandas laterais que indicam a existência de uma forte realimentação da estrutura para o vibrador. O espectro da resposta apresenta pequenos picos abaixo de -60 dB na vizinhança da frequência de excitação, separados de 11,1 Hz que caracterizam uma modulação periódica. Apresenta também um pico máximo na frequência do segundo modo ω_2 , de 11,1 Hz. Uma inspeção visual do movimento da viga indicou que a resposta estava claramente dominada pelo segundo modo flexional.

Estes resultados obtidos indicam que o mecanismo de transferência de energia da faixa de frequências entre 326 Hz e 329 Hz para o segundo modo é similar ao mecanismo responsável pela transferência de energia da faixa de 105 Hz a 108 Hz para o primeiro modo, confirmando a hipótese de uma “cascata de energia” para os componentes de baixa frequência da resposta associada ao movimento planar. O termo “cascata de energia” foi atribuído a este fenômeno não linear por Cusumano e Moon (1995) uma vez que a energia entra no sistema através de altas frequências e pequenos deslocamentos, e é transferida para movimentos de baixas frequências e grandes deslocamentos.

Estas análises concluem as observações experimentais conduzidas para a investigação de interações modais não ressonantes em vigas cantilever flexíveis.

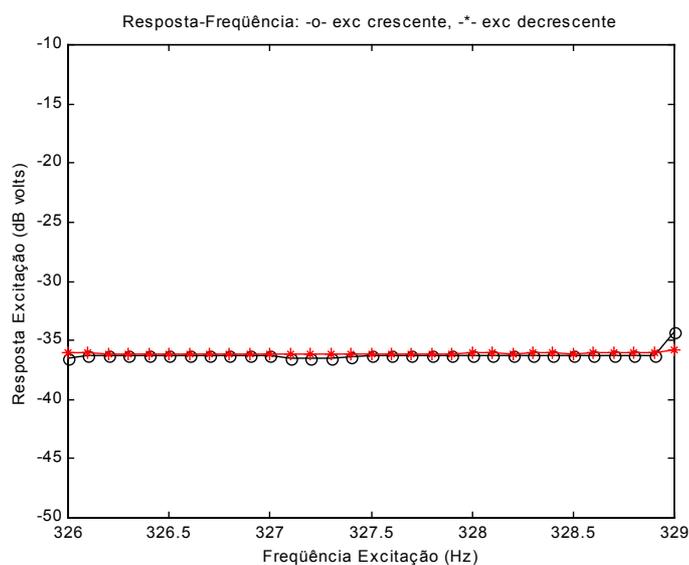


Figura 4.33 – Curva de Resposta-Freqüência para $\Omega = 326 \text{ Hz} - 329 \text{ Hz}$, $a_b = 20 \text{ g}$. Resposta da excitação.

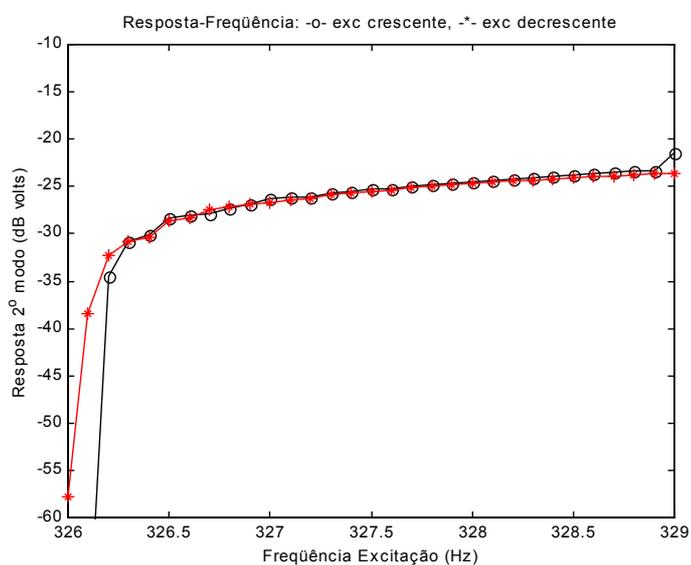
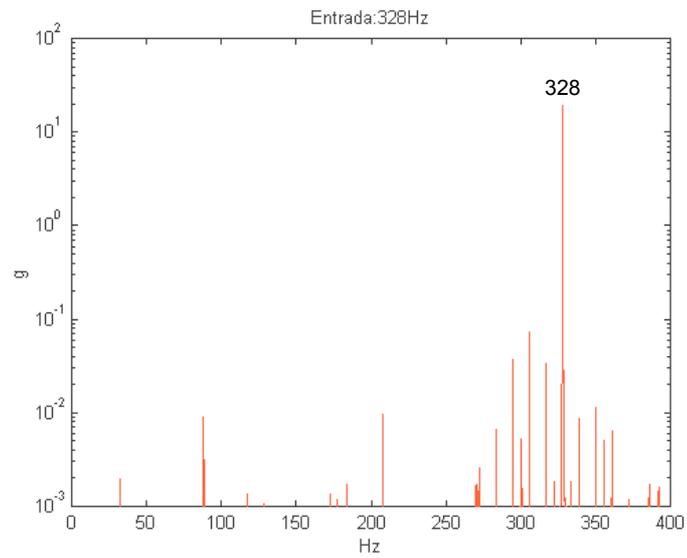
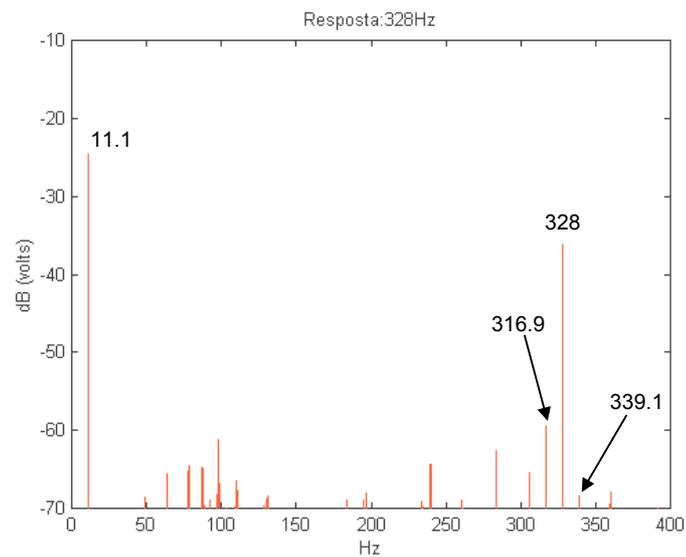


Figura 4.34 – Curva de Resposta-Freqüência para $\Omega = 326 \text{ Hz} - 329 \text{ Hz}$, $a_b = 20 \text{ g}$. Resposta do 2º modo.



(a)



(b)

Figura 4.35 – Espectros para $\Omega = 328$ Hz, $a_b = 20$ g. (a) Entrada. (b) Resposta.

4.2.4 Ressonância paramétrica principal do 3º modo

Um sistema auto paramétrico é definido como um sistema onde existe um acoplamento interno envolvendo pelo menos dois modos. Em uma explanação simples, um sistema auto paramétrico consiste de um sistema primário definido por um oscilador forçado externamente, acoplado a um sistema secundário que é parametricamente excitado através da resposta do sistema primário. Assumindo que o sistema primário é excitado próximo a frequência de ressonância, isto é, $\Omega \approx \omega_1$, e que a frequência de excitação é tal que $\omega_1 \approx 2\omega_2$, onde ω_2 é a frequência do sistema secundário, a resposta do sistema secundário é definida como ressonância paramétrica principal. Este tipo de interação modal difere das interações observadas nas seções anteriores, não apenas no número de modos envolvidos mas também nas condições sob as quais ocorre o fluxo de energia da resposta primária para a secundária. Em adição ao fenômeno de cascata de energia caracterizada nos estudos de caso anteriores, este fenômeno não linear foi também observado durante a realização dos experimentos realizados e reportado neste capítulo.

Na condução das investigações de interações modais na resposta da viga sob excitação harmônica paramétrica na faixa de frequências de excitação Ω entre 61 Hz e 64 Hz e amplitude a_b de $4 \text{ g} \pm 0,5 \text{ dB}$, foi observado a excitação do terceiro modo através de uma ressonância paramétrica principal, isto é, $\Omega = 2\omega_3$, e a excitação do quarto modo através de uma ressonância externa primária, isto é, $\Omega = \omega_4$. As curvas de resposta-frequência obtidas nos sentidos crescente e decrescente da excitação apresentadas na figura 4.36 e 4.37, indicam a ativação do terceiro modo entre 61,7 Hz e 63,0 Hz no sentido crescente, e durante quase todas as frequências de excitação no sentido decrescente. Analisando as curvas de resposta-frequência, é observado que o valor da frequência da resposta do terceiro modo é definido por $\Omega/2$, enquanto que o valor da frequência da resposta do quarto modo é definido por Ω . O espectro deste tipo de resposta para a frequência de excitação $\Omega = 61,9 \text{ Hz}$ é ilustrado na figura 4.38.

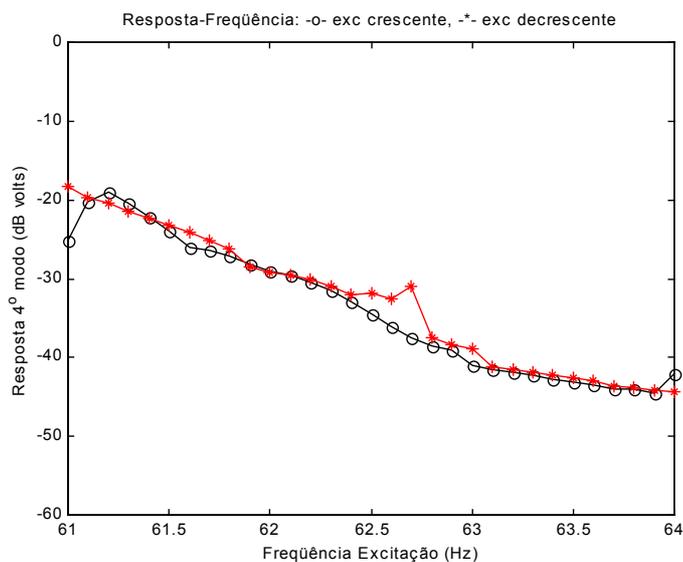


Figura 4.36 – Curva de Resposta-Freqüência para $\Omega = 61 \text{ Hz} - 64 \text{ Hz}$, $a_b = 4 \text{ g}$. Resposta do 4º modo.

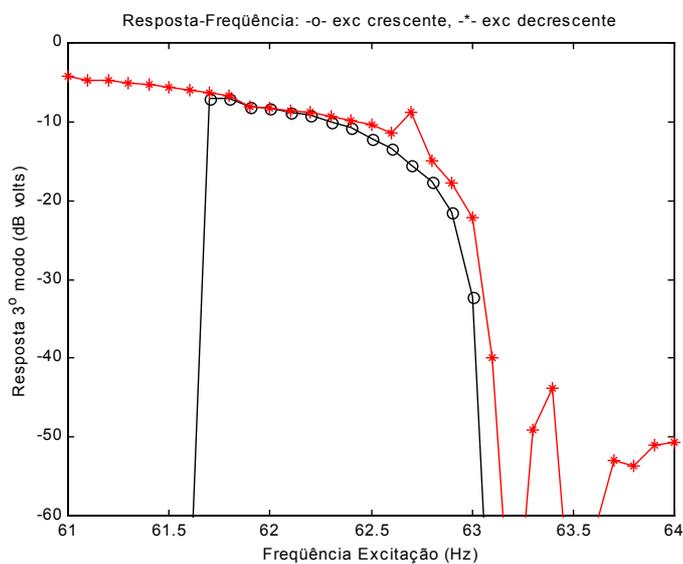


Figura 4.37 – Curva de Resposta-Freqüência para $\Omega = 61 \text{ Hz} - 64 \text{ Hz}$, $a_b = 4 \text{ g}$. Resposta do 3º modo.

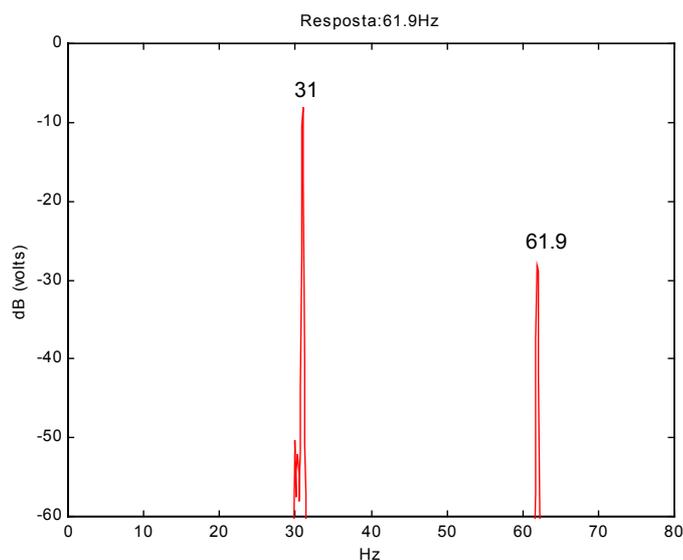


Figura 4.38 – Espectro da resposta para $\Omega = 61,9$ Hz, $a_b = 4$ g.

Este fenômeno é melhor caracterizado através do conceito do mapa de Poincaré, que por definição, para uma entrada harmônica, consiste de um conjunto de pontos (x, \dot{x}) tomados no espaço de fase em fases iguais da função de entrada. Para um movimento harmônico, o conjunto de pontos tomados convergem para uma região pontual no plano (x, \dot{x}) , enquanto que para um movimento subharmônico, os pontos definem no mapa regiões pontuais distintas.

Isto posto, as duas regiões pontuais exibidas pelo mapa de Poincaré da figura 4.39 e o pico de frequência espectral em $\Omega/2$ ilustrado na figura 4.38, confirmam a presença de um movimento de período dois quando o terceiro modo é ativado, ou ainda, uma ressonância subharmônica do quarto modo de ordem dois. Este movimento é dominado pela frequência do terceiro modo ω_3 e pode ser confirmado também através de uma inspeção do histórico temporal ilustrado na figura 4.40, onde a aceleração de entrada sobreposta pela resposta (normalizada pela aceleração para facilitar a interpretação) evidencia claramente que o período da resposta é aproximadamente duas vezes o período da aceleração de entrada.

A caracterização adicional deste fenômeno não linear conclui as observações experimentais da resposta planar de uma viga cantilever sujeita a um deslocamento paramétrico.

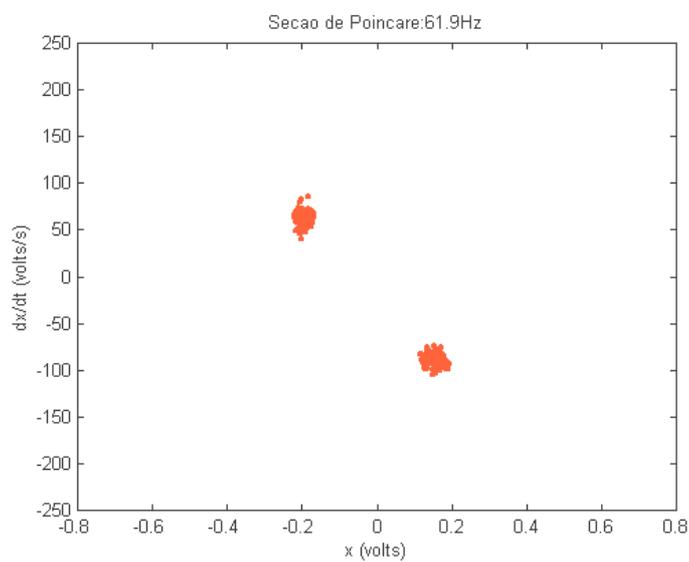


Figura 4.39 – Mapa de Poincaré para $\Omega = 61,9$ Hz, $a_b = 4$ g.

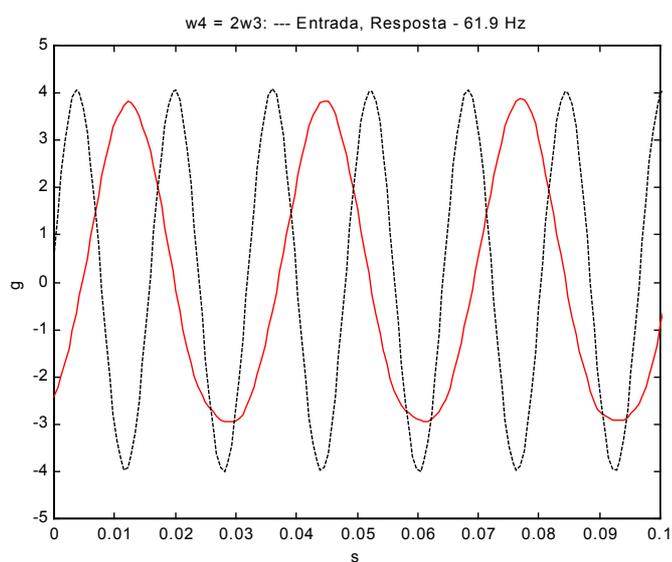


Figura 4.40 – Movimento da resposta com período de duas vezes o período da excitação para $\Omega = 61,9$ Hz, $a_b = 4$ g.

CAPÍTULO 5

5. CONCLUSÕES

Nesta tese, interações modais não ressonantes exibidas na resposta planar não linear de vigas cantilever flexíveis sujeitas à excitações transversal e paramétrica, foram investigadas. No estudo experimental desenvolvido foi observado que para entradas senoidais, a transferência de energia entre modos de alta frequência e baixa amplitude para modos de baixa frequência e alta amplitude ocorre via modulação, sendo função do valor da amplitude de excitação e da proximidade entre os valores da frequência de modulação e da frequência do modo ativado indiretamente. Foi observado também que a ativação de modos de baixa frequência pode ocorrer sob uma variedade de condições de entrada.

Em adição, outros fenômenos não lineares definidos como rotas para o movimento caótico também foram caracterizados. Sob excitação senoidal transversal, movimentos quasi-periódicos com amplitudes moduladas caoticamente e moduladas periodicamente foram observados na resposta da viga, e um movimento de período dois foi exibido pela viga quando sujeita à uma excitação paramétrica. Uma descrição sumária das investigações conduzidas é apresentada a seguir.

5.1 VIGA CANTILEVER FLEXÍVEL SOB EXCITAÇÃO TRANSVERSAL

A exibição de interações modais não ressonantes na resposta planar não linear de vigas cantilever sujeitas à uma excitação harmônica transversal foi investigada em duas vigas metálicas, flexíveis, relativamente longas, de seção retangular e com diferentes propriedades de amortecimento.

No primeiro caso, as investigações foram conduzidas com uma viga de alumínio 2024-T3 e os resultados experimentais demonstraram a influência dominante da resposta de baixa frequência e alta amplitude do primeiro modo da viga quando excitada na vizinhança do terceiro modo através de um deslocamento senoidal transversal aplicado na base, além da exibição de um movimento de amplitude

caoticamente modulada. A ativação do primeiro modo, juntamente com o quarto modo, também foi observada em uma faixa de frequências de excitação que não continha nenhuma frequência natural da viga, indicando que a transferência de energia de movimentos de alta frequência e baixa amplitude para modos de baixa frequência e alta amplitude via modulação pode ocorrer em uma variedade de condições. Além disto, um movimento de amplitude periodicamente modulado também foi exibido, em contraste ao movimento caoticamente modulado observado para excitações senoidais na vizinhança do terceiro modo. Enfim, o mecanismo de transferência de energia foi também avaliado para outras duas diferentes entradas, além de uma entrada senoidal. A ativação do primeiro e segundo modos foi observada de maneira discreta na resposta da viga quando sujeita à uma excitação aleatória transversal, e com maior intensidade quando esta mesma entrada aleatória foi sobreposta por uma entrada periódica de frequência constante definida pela frequência do terceiro modo.

No segundo caso, as investigações foram conduzidas com uma viga de alumínio 7075-T6 amortecida, cujo aumento do amortecimento foi obtido através da aplicação de uma fita metálica ao longo de uma das faces da viga. Este artifício possibilitou a exibição de um caos dissipativo e uma melhor caracterização do movimento de resposta quasi-periódico caoticamente modulado, quando comparado com os resultados obtidos com a viga de alumínio 2024-T3.

5.2 VIGA CANTILEVER FLEXÍVEL SOB EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA

Motivado pelos resultados obtidos sob excitações transversais, interações modais não ressonantes na resposta planar não linear de vigas cantilever sujeitas à excitações harmônicas paramétricas também foram investigadas.

Nos experimentos conduzidos com a viga de alumínio 2024-T3, foi demonstrado que a transferência de energia de movimentos de alta frequência e baixa amplitude em determinadas condições ativou o primeiro modo, e em outras condições ativou o segundo modo da viga.

Concluindo as investigações experimentais conduzidas, uma resposta de período dois ou ainda, uma ressonância subharmônica do quarto modo de ordem dois, foi

exibida. Este movimento foi decorrente da excitação do terceiro modo através de uma ressonância paramétrica principal, e da excitação do quarto modo através de uma ressonância externa primária.

5.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As análises reportadas nesta tese demonstraram que oscilações de alta frequência e baixa amplitude podem ativar oscilações flexionais de baixa frequência e alta amplitude para uma variedade de excitações externas e paramétricas, implicando em deflexões indesejáveis de grande amplitude associadas à excitação energética de modos de baixa frequência das vigas investigadas. Os resultados experimentais obtidos destacaram por um lado, a riqueza da resposta que uma simples estrutura flexível pode exibir e a idéia de que sistemas determinísticos simples podem apresentar um comportamento dinâmico complexo e, por outro lado, as dificuldades que podem ser encontradas na predição da resposta de outras estruturas flexíveis mais complexas na presença de não linearidades. Finalmente, estas considerações indicaram que interações modais não ressonantes, observadas originalmente no movimento dos painéis solares do telescópio Hubble e no movimento de resposta das vigas cantilever flexíveis aqui investigadas, representam um recente problema não linear que requer uma atenção especial do analista e a sua inclusão no contexto da análise de sistemas dinâmicos com características estruturais não lineares é evidentemente um tópico imperativo e de fundamental importância.

5.4 RECOMENDAÇÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

O estudo de interações modais não ressonantes apresentado foi simplificado para o caso do movimento planar não linear de vigas cantilever flexíveis, sujeitas à excitações externas (na direção y) e paramétricas (na direção x). Um estudo complementar para investigar a transferência de energia de modos de alta frequência para modos de baixa frequência na resposta flexional-torcional de vigas cantilever

flexionais sujeitas à uma excitação transversal em malha fechada ao longo da direção z , é recomendado.

Os estudos aqui apresentados foram focados em observações experimentais. No entanto, estudos analíticos específicos sobre modelos matemáticos representativos da dinâmica não linear de vigas cantilever flexíveis deverão ser conduzidos. A implementação de modelos para a predição dos resultados experimentais obtidos certamente enriquecerá o estudo experimental dos fenômenos não lineares observados nesta tese.

REFERÊNCIAS

ANDERSON, T. J., BALACHANDRAN, B., NAYFEH, A. H., *Observations of Nonlinear Interactions in a Flexible Cantilever Beam*, AIAA Paper No. 92-2332, pp. 1678-1686, 1992.

ANDERSON, T. J., BALACHANDRAN, B., NAYFEH, A. H., *Nonlinear Resonances in a Flexible Cantilever Beam*, ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 116, pp. 480-484, 1994.

ANDERSON, T. J., NAYFEH, A. H., BALACHANDRAN, B., *Experimental Verification of the Importance of the Nonlinear Curvature in the Response of a Cantilever Beam*, ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 118, pp. 21-27, 1996.

ANDERSON, T. J., NAYFEH, A. H., BALACHANDRAN, B., *Coupling Between High-Frequency Modes and a Low-Frequency Mode: Theory and Experiment*, Nonlinear Dynamics, Vol. 11, pp. 17-36, 1996.

ARAFAT, H. N., *Nonlinear Response of Cantilever Beams*, Ph.D. Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 1999.

ASHORY, M., R., HAJIGHORBANI, R. A., *The Effects of Stingers on Measured FRFs*, Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA), Leuven, Belgium, 2002.

BARROS, E. de, *Etude sur le Remplacement de la Station d'Acquisition MVS*, Rapport de Stage, Mastère Spécialisé, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse, France, 1999.

BARROS, E. de, *Implementação de um Sistema de Aquisição de Dados para Ensaios de Vibrações e Análise Modal*, Dissertação de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2001.

BRANDON, J. A., MATHIAS, M. H., *Complex Oscillatory Behaviour in a Cracked Beam Under Sinusoidal Excitation*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 186, pp. 350-354, 1995.

BRANDON, J. A., SUDRAUD, C., *An Experimental Investigation into the Topological Stability of a Cracked Cantilever Beam*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 211, pp. 555-569, 1998.

CRAIG, R. R., *Structural Dynamics*, Wiley, New York, 1981.

CRESPO DA SILVA, M. R. M., AND GLYNN, C. C., 1978, *Nonlinear Flexural-Flexural-Torsional Dynamics of Inextensional Beams. I. Equations of Motion*, Journal of Structural Mechanics, Vol. 6 (1978a), pp. 437-448.

CRESPO DA SILVA, M. R. M., AND GLYNN, C. C., 1978, *Nonlinear Flexural-Flexural-Torsional Dynamics of Inextensional Beams. II. Forced Motions*, Journal of Structural Mechanics, Vol. 6 (1978b), pp. 449-461.

CUSUMANO, J. P., MOON, F. C., *Chaotic Non-Planar Vibrations of the Thin Elastica, Part I: Experimental Observation of Planar Instability*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 179, pp. 185-208, 1995.

DAVIES, H. G., *Random Vibration of a Beam Impacting Stops*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 68, pp. 479-487, 1980.

EWINS, D. J., *Modal Testing: Theory and Practice*, Research Studies Press, Taunton, England, 1984.

LEE, J. C., CHOU, Y. F., *The Effects of Stingers on Receptance Function Measurements*, ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 118, pp. 220-226, 1996.

LEE, S. I., LEE, J. M., CHANG, S. I., *Nonlinear Modal Interactions of a Cantilever Beam with an Internal Resonance*, Proceedings of the International Modal Analysis Conference (IMAC), Orlando, Florida, pp. 1614-1621, 1997.

LYAN, P. A.; FUERST, W., *Introductory Digital Signal Processing with Computer Applications*, John Wiley & Sons, Baffins Lane, England, 1998.

MAIA, N. N. M., SILVA, J. M. M., *Theoretical and Experimental Modal Analysis*, Research Studies Press, Taunton, England, 1997.

MALATKAR, P., *Nonlinear Vibrations of Cantilever Beams and Plates*, Ph.D. Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 2003.

MEIROVITCH, L., *Analytical Methods in Dynamics*, Macmillan, New York, 1967.

MOON, F. C., SHAW, S. W., *Chaotic Vibrations of a Beam With Non-Linear Boundary Conditions*, International Journal of Nonlinear Mechanics, Vol. 18, pp. 465-477, 1983.

MOON, F. C., *Chaotic Vibrations*, Wiley, New York, 1987.

NAYFEH, A. H., *Introduction to Perturbation Techniques*, Wiley, New York, 1981.

NAYFEH, A. H., *Nonlinear Interactions*, Wiley, New York, 2000.

NAYFEH, A. H., MOOK, D. T., *Nonlinear Oscillations*, Wiley, New York, 1979.

NAYFEH, S. A., NAYFEH, A. H., *Nonlinear Interactions Between Two Widely Spaced Modes – External Excitation*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 3, pp. 417-427, 1993.

NAYFEH, S. A., NAYFEH, A. H., *Energy Transfer From High-to-Low-Frequency Modes in a Flexible Structure via Modulation*, ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 116, pp. 203-207, 1994.

NEWLAND, D. E., *An Introduction to Random Vibrations, Spectral & Wavelet Analysis*, Longman, Edinburgh Gate, England, 1993.

OH, K., NAYFEH, A. H., *High-to-Low-Frequency Modal Interactions in a Cantilever Composite Plate*, ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 120, pp. 579-587, 1998.

OUEINI, S. S., *Techniques for Controlling Structural Vibrations*, Ph.D. Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 1999.

PAI, P. F., *Nonlinear Flexural-Flexural-Torsional Dynamics of Metallic and Composite Beams*, Ph.D. Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 1990.

POPOVIC, P., NAYFEH, A. H., OH, K., NAYFEH, S. A., *An Experimental Investigation of Energy Transfer from a High-Frequency Mode to a Low Frequency Mode in a Flexible Structure*, Journal of Vibration and Control, Vol. 1, pp. 115-128, 1995.

RAND, R. H., *Lectures Notes on Nonlinear Vibrations*, Dept. Theoretical & Applied Mechanics, Cornell University, Ithaca, NY, 2003.

SHAW, S. W., *Forced Vibrations of a Beam With One-Sided Amplitude Constraint: Theory and Experiment*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 99, pp. 199-212, 1985.

SMITH, S. W., BALACHANDRAN, B., NAYFEH, A. H., *Nonlinear Interactions and the Hubble Space Telescope*, AIAA Paper No. 92-4617-CP, pp. 1460-1470, 1992.

TABADDOR, M., NAYFEH, A. H., *An Experimental Investigation of Multimode Responses in a Cantilever Beam*, ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 119, pp. 532-538, 1997.

ZAVODNEY, L. D., *Can the Modal Analyst Afford to be Ignorant of Nonlinear Vibration Phenomena ?*, Proceedings of the International Modal Analysis Conference (IMAC), pp. 154-159, 1987.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

BARROS, E. de, MATHIAS, M. H., SILVA, F. A., *Aplicação do Método Short-Time Fourier Transform para Análise Espectral de Sinais Vibratórios não Estacionários*, Anais do V Congresso Métodos Numéricos en Ingeniería, Madrid, Espanha, 2002.

BARROS, E. de, PINA, S. R. O., SILVA, F. A., YOSHIDA, V. P., *Identificação de Propriedades Dinâmicas de Vigas de Compósitos Cerâmicos C/C-SiC_xO_y*, Anais do 47º Congresso Brasileiro de Cerâmica, João Pessoa, 2003.

BARROS, E. de, MATHIAS, M. H., SILVA, F. A., *Influência do Mecanismo de Excitação na Medição de FRFs*, Anais da Jornada de Iniciação Científica e Pós Graduação da FEG, Guaratinguetá, 2003.

BARROS, E. de, MATHIAS, M. H., SILVA, F. A., *Avaliação da Hipótese de Estacionaridade de Sinais de Vibração Aleatória*, Anais do III Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, Belém, 2004.

BARROS, E. de, MATHIAS, M. H., SILVA, F. A., *Estudo Experimental de Interações Modais não Ressonantes em Vigas Cantilever Flexíveis*, Proceedings of the XXV Iberian Latin American Congress on Computational Methods, Recife, 2004 (a ser apresentado).

BENDAT, J. S., PIERSOL, A. G., *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, John Wiley & Sons, Los Angeles, U.S.A., 1986.

BENDAT, J. S., *Nonlinear System Techniques and Applications*, John Wiley & Sons, Los Angeles, U.S.A., 1998.

BUZDUGAN, G., MIHAILESCU, E., RADES, M., *Vibration Measurement*, Martinus Nijhoff Publishers, Bucharest, Romania, 1986.

DATA PHYSICS, *SignalCalc 620 Manual*, Data Physics Corporation, San Jose, CA, 2000.

HARRIS, C. M., *Shock and Vibration Handbook*, McGraw Hill, U.S.A., 1996.

ISO STANDARDS HANDBOOK 36, *Mechanical Vibration and Shock*, ISO Standards, Genève, Switzerland, 1990.

LMS , *CADA-PC, User Manual*, LMS International, Leuven, Belgium, 1994.

LYAN, P. A., FUERST, W., *Introductory Digital Signal Processing with Computer Applications*, John Wiley & Sons, Baffins Lane, England, 1998.

PIRANDA, J., FILLOD, R., FOLTETE, E., *Modal Identification of non-linear Structures*, Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA) 23, Leuven, Belgium, pp. 251-258, 1998.

PROAKIS, J. G., MANOLAKIS, D. G., *Digital Signal Processing – Principles, Algorithms, and Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, U.S.A., 1996.

RAO, S. S., *Mechanical Vibrations*, Addison-Wesley, U.S.A., 1990.

RODRIGUES, A. A. A., *Aplicação de Ferramentas Analíticas e Experimentais para Caracterização do Comportamento Não Linear de Estruturas*, Relatório Final de Projeto de Iniciação Científica, FAPESP, Processo 01/12622-9, 2004.

SPECTRAL DYNAMICS, *2560-0120 Random, Manual*, Spectral Dynamics, Inc., San Jose, CA, 1999.

SPECTRAL DYNAMICS, *2560-0130 Sine, Manual*, Spectral Dynamics, Inc., San Jose, CA, 1999.

SPECTRAL DYNAMICS, *2560-0121 Mixed-Mode, Manual*, Spectral Dynamics, Inc., San Jose, CA, 1999.

SPECTRAL DYNAMICS, *2560-0150 Signal Analysis, Manual*, Spectral Dynamics, Inc., San Jose, CA, 1999.

TOMLINSON, G. R., *Linear or Nonlinear – That is the Question*, Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA) 19, Leuven, Belgium, pp. 11-32.

ZAVODNEY, L. D., *Can the Modal Analyst Afford to be Ignorant of Nonlinear Vibration Phenomena ?*, Proceedings of the International Modal Analysis Conference (IMAC), pp. 154-159, 1987.