

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
*Campus* de Rio Claro

**Relaxação e decaimento para pontos  
de equilíbrio em mapeamentos não  
lineares unidimensionais**

Danilo Silva Rando

Rio Claro (SP)

2015

Danilo Silva Rando

# Relaxação e decaimento para pontos de equilíbrio em mapeamentos não lineares unidimensionais

Trabalho de Conclusão de Curso - TCC - apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista - Campus de Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Licenciado em Física.

Orientador Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Edson Denis Leonel

UNESP - Rio Claro

---

Prof. Dr. Edson José Vasques

UNESP - Rio Claro

---

Prof. Dr. Makoto Yoshida

UNESP - Rio Claro

---

Rio Claro (SP)

2015

# RESUMO

Neste trabalho investigaremos o comportamento do decaimento para os pontos de equilíbrio, em especial em pontos de bifurcação, para uma família de mapeamentos discretos unidimensionais. Começaremos com o mapa logístico focando na bifurcação transcritical. Em seguida analisaremos a convergência para o estado estacionário para um mapa do tipo logístico-like. Próximo ao ponto fixo, a variável dinâmica varia muito lentamente. Essa propriedade permite aproximar/reescrever uma equação de diferenças, natural do mapeamento discreto, em uma equação diferencial ordinária. Resolvemos então esta equação que fornece a evolução para o estado estacionário. Nossas simulações numéricas confirmaram a previsão teórica e valida a aproximação acima mencionada.

# ABSTRACT

We investigate in this work the behaviour of the decay to the fixed points, in particular along the bifurcations, for a family of one-dimensional logistic-like discrete mappings. We start with the logistic map focusing in the transcritical bifurcation. Next we investigate the convergence to the stationary state at the cubic map. At the end we generalise the procedure for a mapping of the logistic-like type. Near the fixed point, the dynamical variable varies slowly. This property allows us to approximate/rewrite the equation of differences, hence natural from discrete mappings, into an ordinary differential equation. We then solve such equation which furnishes the evolution towards the stationary state. Our numerical simulations confirm the theoretical results validating the above mentioned approximation.

# AGRADECIMENTOS

Dedico esse projeto de conclusão de curso primeiramente aos meus pais, Vlademir e Josefa, que me proporcionaram condições de me manter aqui, em memória de minha mãe, que muito desejava presenciar esse momento, mas que, infelizmente não pode mais estar presente, sem eles, não seria possível chegar ao término do curso. Obrigado por tudo que me ensinaram e que ainda me ensinam. Agradeço ao apoio e ajuda de toda minha família, aos tios, Onivaldo, Amilton, Ilson, Márcio, Zéca, e Pedro, as tias, Leonice, Clarice, Leandra, Nilza, Celeide e Janete, aos primos, Igor, Vitor, João, Raphael e Rodrigo, as primas, Fabiana, Sabrina e Gabriela, vocês foram e são de muita importância para mim, agradeço a Maria pelo carinho e ajuda nesses últimos anos. Agradeço a minha namorada Ana Laura Boscolo pelo apoio e companheirismo durante todos esses anos de graduação, e a seus familiares, Angela, Carlos, Juliana e Karen, também por toda ajuda. Aos meus amigos de Votuporanga, Igor, Caio, Alan, Paulo, Augusto e Audrey, pela ajuda, conversas, risadas, churrascos, jogatinas.

Agradeço ao Prof. Dr. Edson Denis Leonel por toda ajuda e paciência não apenas nesse projeto, assim como ao grupo de pesquisa. Agradeço a todos amigos do curso de Física, da Faculdade e da cidade de Rio Claro. Agradeço também aos bons professores que tive durante o curso.

Para todos que me ajudaram não somente no período da graduação e que continuarão sendo importantes para mim. Meu muito obrigado.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>O Mapeamento Logístico Unidimensional</b>	<b>9</b>
2.1	Pontos Periódicos . . . . .	9
2.2	Diagrama de Órbita . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Convergência para o estado estacionário no mapa logístico-like</b>	<b>13</b>
3.1	Classificação de bifurcações . . . . .	13
3.2	Convergência para o ponto de equilíbrio no mapa cúbico . . . . .	18
3.3	Extrapolação para não linearidade $\gamma + 1$ . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>22</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Nas últimas décadas tem-se verificado um grande desenvolvimento no estudo dos fenômenos não-lineares [1] com a introdução de novas abordagens e conceitos no tratamento dos sistemas dinâmicos conservativos [2,3] e dissipativos [4,5]. Um dos aspectos centrais dos novos desenvolvimentos reside no comportamento caótico determinístico que pode ocorrer já em sistemas com pelo menos três graus de liberdade. Tal fato alterou significativamente a imagem que se fazia dos processos turbulentos, particularmente na Física de Fluidos. O estudo da transição ordem-caos em sistemas dissipativos levou à identificação de sequências de bifurcações, incluindo certos aspectos universais, que puderam ser verificados experimentalmente numa grande variedade de situações e em diferentes áreas do conhecimento. Embora a tradição dos estudos em sistemas dinâmicos remonte a Henri Poincaré, que, inspirado por problemas em Mecânica Celeste [6], percebeu a utilidade do estudo de estruturas topológicas no espaço de fases de trajetórias dinâmicas, com importantes contribuições posteriores de Birkhoff [7] que fortaleceram as bases teóricas legadas por Poincaré.

O estudo das rotas possíveis para o caos tem suas raízes no estudo geral de equações diferenciais determinísticas (teoria das bifurcações) e constitui a chamada teoria geométrica do caos [8,9]. À medida que um ou mais parâmetros de controle varia para os quais ocorre mudança de regime assintótico, são chamados pontos de bifurcação. O cenário de Feigenbaum [10] para o caos é o cenário de co-dimensão-1 mais conhecido e estudado e é o que apresenta maior número de evidências experimentais. Esse cenário é constituído por uma cascata de bifurcações do tipo duplicação de período [8].

Mapeamentos discretos são frequentemente utilizados para caracterizar a evolução temporal de diversos sistemas dinâmicos. Um mapeamento discreto bastante conhecido é o mapa logístico. O mapa foi estudado por Robert May [11] com o intuito de descrever a dinâmica de populações. O mapeamento tem uma série de comportamentos dinâmicos

relevantes, dentre os quais incluem-se regularidade, diversos tipos de bifurcações assim como rotas para o caos via cascata de duplicação de período. Ao longo das bifurcações de duplicação de período, existem dois expoentes conhecidos como expoentes de Feigenbaum [10] que descrevem comportamentos de escala conduzindo a uma universalidade. Nas proximidades das bifurcações, a dinâmica exibe um comportamento crítico. No ponto de bifurcação, uma órbita evolui para o ponto de equilíbrio, a partir de uma lei de potência em  $n$ , onde  $n$  é o número de iterações. Ligeiramente distante do ponto de bifurcação, a órbita evolui para o ponto de equilíbrio de forma exponencial, com um tempo de relaxação descrito por uma lei de potência no parâmetro de controle [12].

Estudamos neste trabalho, o mapa logístico-like cuja equação é dada por  $x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n^\gamma)$  onde  $R$  corresponde ao parâmetro de controle,  $x$  é a variável dinâmica e  $\gamma \geq 1$  é um parâmetro de controle. Nosso objetivo é investigar a dinâmica de relaxação para o equilíbrio no mapa logístico-like para dois tipos de bifurcação: (i) transcítica e (ii) forquilha. Consideramos em nosso estudo diversos valores de  $\gamma$  e duas descrições distintas. Uma delas é fenomenológica, utilizando simulações numéricas e outra um pouco mais formal e rigorosa.

Esta monografia está organizada da seguinte forma. No Capítulo 2 discutimos algumas propriedades do mapa logístico unidimensional. Apresentamos o conceito de ponto fixo e definimos o conceito de estabilidade. O Capítulo 3 traz a descrição da convergência para os pontos fixos utilizando um argumento matemático juntamente com a confirmação numérica. Por fim nossas conclusões e perspectivas são apresentadas no Capítulo 4.

# Capítulo 2

## O Mapeamento Logístico Unidimensional

Nesse capítulo serão apresentados os conceitos de órbita, ponto fixo, ciclos, e bifurcação. O comportamento assintótico para as trajetórias obtidas por iteração do mapeamento logístico será ilustrado através do diagrama de órbita.

### 2.1 Pontos Periódicos

O mapeamento logístico é definido pela equação

$$x_{n+1} = F(x_n) = Rx_n(1 - x_n), \quad (2.1)$$

onde  $R$  é o parâmetro de controle podendo assumir qualquer valor real embora a região que tenha interesse encontra-se no intervalo  $R \in [0, 4]$ . Sendo assim, a variável  $x$  fica limitada a assumir valores em  $[0, 1]$ , de modo que a aplicação de  $F(x)$  é fechada, pois  $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . O mapeamento é estudado pelo processo iterativo, de modo que dado um ponto inicial  $x_0$ , encontra-se  $x_1 = F(x_0)$ ,  $x_2 = F(x_1) = F^2(x_0), \dots$ ,  $x_n = F^n(x_0)$ . Aqui  $F^2(x_0)$  indica a segunda iteração do mapeamento, ou seja  $F(F(x_0))$ . A órbita ou trajetória de  $x_0$  é a sequência de pontos

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots \quad (2.2)$$

Ela representa a evolução do sistema a partir da condição inicial  $x_0$ . Se o sistema evolui de tal maneira que permanece sempre no mesmo valor de  $x$  tem-se um ponto fixo. Os pontos fixos são encontrados resolvendo-se a seguinte equação

$$F(x^*) = x^*. \quad (2.3)$$

Então, para a equação (2.1) encontra-se soluções dadas por

$$x_1^* = 0, \quad (2.4)$$

$$x_2^* = \frac{R-1}{R}. \quad (2.5)$$

Um ponto fixo  $x^*$  é dito ser estável (instável) caso a evolução da condição inicial  $x^* + \epsilon_0$ , onde  $\epsilon_0$  é pequeno, se aproximar (afastar) de  $x^*$ . Isso é caracterizado pela derivada de  $F(x)$  em relação a  $x$ , ou seja  $F'(x_0) = \frac{dF(x)}{dx}$ . Considerando  $x_0 = x^* + \epsilon_0$  e mantendo termos de ordem  $\epsilon_0$ , a primeira iteração fornece

$$x_1 = F(x_0) = x^* + \epsilon F'(x^*). \quad (2.6)$$

Observando que  $\epsilon_1 = \epsilon_0 F'(x^*)$ , pode-se iterar a equação anterior, bastando trocar  $\epsilon_0$  por  $\epsilon_1$ . Assim obtém-se para a  $n$ -ésima iteração que

$$x_n = F^n(x_0) = x^* + \epsilon_0 [F'(x^*)]^n. \quad (2.7)$$

Portanto, quando  $F'(x)$  tiver módulo menor que 1 o ponto fixo é dito ser estável; se for maior que 1 é instável e caso seja exatamente 1 tem-se que considerar derivadas de ordem superiores. Para o caso específico do mapeamento logístico tem-se que

$$F'(x^*) = R(1 - 2x^*). \quad (2.8)$$

O ponto fixo  $x^* = 0$  é estável para  $0 < R < 1$ , tornando-se instável a partir de  $R > 1$ . Em  $R = 1$  o ponto fixo dado pela equação (2.5) tem o valor 0 e o módulo da derivada de  $F(x)$  é igual a 1. Para  $R$  entre 1 e 3, esse ponto fixo é estável e para  $R > 3$  é instável. Para  $R > 3$  o sistema apresenta novo tipo de comportamento, onde o ponto fixo (2.5) é instável e surge um novo ponto periódico: uma órbita de período 2 ou um ciclo 2. Isso significa que assintoticamente o sistema apresenta a órbita  $\dots, x_1, x_2, x_1, x_2, \dots$ . A mudança de comportamento que ocorre em  $R = 3$ , quando um ponto fixo desestabiliza-se surge um órbita de período 2 é classificada como uma bifurcação de duplicação de período. Quando a órbita de período 2 fica instável, nova bifurcação de duplicação de período ocorre e surge uma órbita de período 4 e esse processo continua até ocorrência de caos. Órbitas de períodos maiores são definidas analogamente. Assim num ciclo 3 o sistema oscila entre 3 valores  $x_1, x_2, x_3$ . Obviamente, um ponto fixo corresponde a um ciclo 1. Semelhante a obtenção do ponto fixo, os pontos  $x_1$  e  $x_2$  associados a órbita de período 2 são obtidos resolvendo-se a equação de ponto fixo para  $F^2(x)$ , ou seja

$$F^2(x^*) = x^*. \quad (2.9)$$

Para o mapeamento logístico, a expressão para  $F^2(x)$  é dada por:

$$F^2(x) = (R^2x - R^2x^2) - (1 - Rx + Rx^2). \quad (2.10)$$

Os pontos fixos obtidos fazendo-se  $F(x^*) = x^*$ , são também soluções de  $F^2(x^*) = x^*$ , portanto pode-se simplificar a relação definindo uma função

$$G(x^*) = \frac{F^2(x^*) - x^*}{F(x^*) - x^*}. \quad (2.11)$$

ou de forma simplificada

$$G(x) = Rx^2 - (R^2 + R)x + R + 1. \quad (2.12)$$

As soluções de  $G(x)$  são

$$x_1^* = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \sqrt{R^2 - 2R - 3} \right), \quad (2.13)$$

$$x_2^* = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \sqrt{R^2 - 2R - 3} \right). \quad (2.14)$$

Estas soluções são reais somente se  $R^2 - 2R - 3 \geq 0$ , o que leva a obter-se

$$R_1 \geq 3, \quad (2.15)$$

$$R_2 \leq -1. \quad (2.16)$$

A solução  $R_2$  não é de interesse, pois  $R \in [0, 4]$ . Com o resultado acima, tem-se que  $R_1$  é o valor que determina o início da região de ciclo 2, enquanto que o valor que determina o término da região de estabilidade do ciclo 2 será obtido por meio do estudo da estabilidade deste ciclo. Necessita-se avaliar agora  $(F^2(x_2))'$ . Através da regra da cadeia mostra-se que

$$(F^2(x_2))' = F'(x_1)F'(x_2). \quad (2.17)$$

Caso  $|F^2(x)'| < 1$ , a solução é estável. Se  $|F^2(x)'| > 1$  a solução é instável. Usando  $x_1$  e  $x_2$  das relações (2.13) e (2.14), obtém-se

$$(F^2(x_2))' = R^2((1 - 2x_1)(1 - 2x_2)), \quad (2.18)$$

que simplificando leva a

$$(F^2(x_2))' = -R^2 + 2R + 4. \quad (2.19)$$

Daqui tira-se que  $|F^2(x)'| \geq 1$  se

$$R_3 \geq 1 + \sqrt{6}, \quad (2.20)$$

$$R_4 \leq 4 - \sqrt{6}, \quad (2.21)$$

mas  $R_4 < 0$  é sem interesse, já que  $R \in [0, 4]$ . Com esse resultado encontrado para  $R_3$ , concluí-se que a região de período 2 fica completamente especificada para qualquer  $x_0 \in (0, 1)$ , desde que  $R \in [3, 1 + \sqrt{6}]$ , sendo este último intervalo, o indicador da região de ciclo 2 estável. Generalização imediata é feita para a obtenção dos pontos pertencentes a ciclos de ordem  $n$ , onde a equação é da forma

$$F^n(x^*) = x^*. \quad (2.22)$$

A estabilidade agora é verificada por

$$|F^n(x^a)'| = |F'(x^1)F'(x^2)F'(x^3)\dots F'(x^n)| \leq 1, \quad (2.23)$$

onde  $a$  assume qualquer valor inteiro entre 1 e  $n$ .

## 2.2 Diagrama de Órbita

Agora que é conhecido o procedimento para a obtenção dos pontos fixos e ciclos de ordem  $n$ , pode-se introduzir o diagrama de órbita. O diagrama de órbita mostra o comportamento assintótico de uma trajetória a partir de uma dada condição inicial  $x_0$  para cada valor do parâmetro de controle. A região do espaço de fase para onde trajetórias convergem assintoticamente é dita ser um atrator. No mapeamento logístico, quando  $1 < R < 3$ , as trajetórias convergem para o ponto fixo estável dado pela equação (2.5) desde que a condição inicial  $x_0 \in (0, 1)$ . Dessa forma, o ponto fixo  $x_2^*$  é o atrator. Para

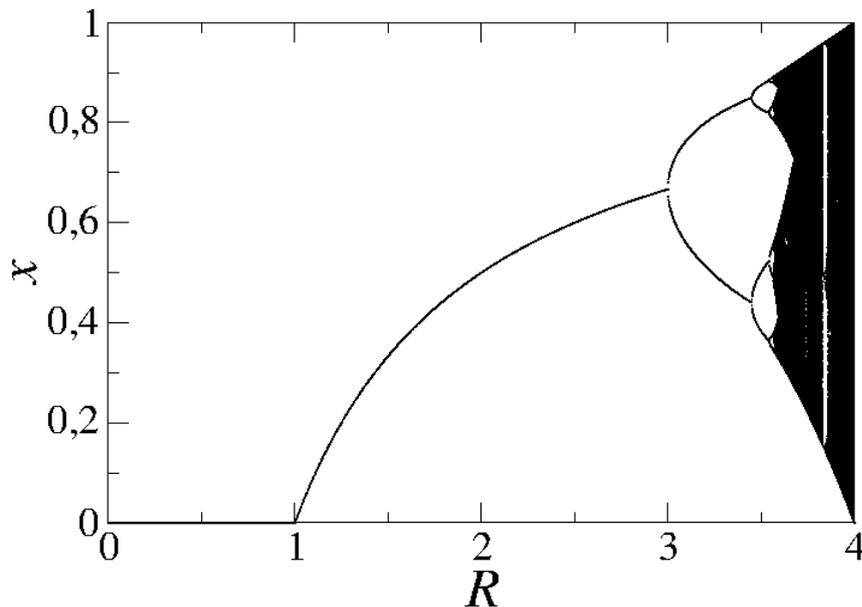


Figura 2.1: Esta figura ilustra o diagrama de órbita para o mapa logístico. No eixo horizontal tem-se o parâmetro de controle enquanto que no eixo vertical é representada a variável  $x$ . A condição inicial usada foi  $x_0 = \frac{1}{2}$ .

$3 \leq R \leq 1 + \sqrt{6}$  o atrator é um ciclo 2, definido pelos pontos cujas equações são (2.13) e (2.14). Dessa forma, a partir da condição inicial  $x_0$ , a trajetória evolui convergindo para os pontos  $x_1^*, x_2^*$  estabelecendo o ciclo 2 estável. Na figura (2.1) tem-se um diagrama típico, onde o eixo horizontal representa o parâmetro de controle e no eixo vertical é representado a variável  $x$ . O procedimento utilizado na obtenção deste diagrama é o seguinte. Como condição inicial  $x_0$  escolhe-se ( $x_0 = \frac{1}{2}$ ). A seguir itera-se o mapeamento dado pela equação (2.1) 100.000 vezes salvando apenas os últimos 100 pontos. O eixo horizontal foi dividido em 800 partes igualmente espaçadas.

# Capítulo 3

## Convergência para o estado estacionário no mapa logístico-like

Discutiremos, neste capítulo, a convergência para o estado estacionário em uma família de mapeamentos discretos unidimensionais. Iniciaremos o capítulo com a classificação de dois tipos de bifurcações: (i) transcritical e, (ii) forquilha. Em seguida descreveremos a convergência para os estados estacionários.

### 3.1 Classificação de bifurcações

Nesta seção definiremos dois tipos de bifurcação que serão tratadas neste trabalho. Uma delas é a bifurcação transcritical ao passo que a outra é a bifurcação de forquilha. Para ilustrar a classificação usaremos duas equações diferenciais ordinárias, embora o procedimento para mapeamentos discretos seja semelhante. Começaremos com a bifurcação transcritical.

Consideremos a equação diferencial ordinária dada por

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^2, \quad (3.1)$$

onde  $\mu$  é um parâmetro de controle e  $x$  é a variável dinâmica. Os pontos de equilíbrio são obtidos fazendo  $\dot{x}$ , o que levamos

$$x = 0 \text{ e } x = \mu. \quad (3.2)$$

A estabilidade é dada por

$$\frac{df_\mu}{dx} = \mu - 2x < 0. \quad (3.3)$$

Para  $x = 0$  temos

$$\frac{df_\mu}{dx}_{x=0} = \mu < 0, \quad (3.4)$$

para  $\mu < 0$ . O ponto equilíbrio  $x = 0$  é então assintoticamente estável para  $\mu < 0$ . O ramo  $x = 0$  perde estabilidade no ponto de bifurcação  $(x, \mu) = (0, 0)$ . Por outro lado, para  $x = \mu$  temos

$$\frac{df_\mu}{dx} \Big|_{x=\mu} = -\mu. \quad (3.5)$$

Portanto  $x = \mu$  é assintoticamente estável para  $\mu > 0$ . Ocorre a troca de estabilidade quando o parâmetro de controle passa por  $\mu = 0$ . Esse tipo de bifurcação é chamado de bifurcação transcritical.

Vamos agora discutir a bifurcação de forquilha. Consideremos agora a equação diferencial

$$\dot{x} = \mu x - x^3 = f_\mu(x), \quad (3.6)$$

onde  $\mu$  é um parâmetro de controle. Os pontos de equilíbrio são obtidos fazendo

$$f(x, \mu) = 0 = \mu x - x^3, \quad (3.7)$$

logo as soluções são

$$x = 0, \quad x = \sqrt{\mu}, \quad x = -\sqrt{\mu}. \quad (3.8)$$

É importante notar que o ponto fixo  $x = 0$  existe independente do valor ou sinal de  $\mu$ . Por outro lado, os pontos fixos  $x = -\sqrt{\mu}$  e  $x = \sqrt{\mu}$  só existem para  $\mu \geq 0$ . Realizando a derivada de  $\frac{df_\mu}{dx}$  temos

$$\frac{df_\mu}{dx} = \mu - 3x^2. \quad (3.9)$$

Aplicando em  $x = 0$  chegamos a

$$\frac{df_\mu}{dx} \Big|_{x=0} = \mu < 0, \quad (3.10)$$

para  $\mu < 0$ . Logo  $x = 0$  é assintoticamente estável para  $\mu < 0$  e instável para  $\mu > 0$ . Os pontos fixos  $\mu = \pm\sqrt{\mu}$  tem estabilidade dada por

$$\frac{df_\mu}{dx} \Big|_{x=\pm\sqrt{\mu}} = -2\mu < 0, \quad (3.11)$$

então ambos os ramos estáveis para  $\mu > 0$ . Em  $\mu = 0$  ocorre então uma bifurcação classificada como bifurcação de forquilha.

A classificação das bifurcações em mapeamentos discretos segue um procedimento semelhante. A determinação dos pontos fixos é dada por

$$x_{n+1} = F(x_n) = x_n, \quad (3.12)$$

e a estabilidade dada por  $\frac{dF}{dx} < 1$ , quando avaliado no ponto fixo. Conforme discutimos no Capítulo anterior, os pontos fixos para o mapeamento logístico são

$$x = 0 \quad e \quad x = 1 - \frac{1}{R}. \quad (3.13)$$

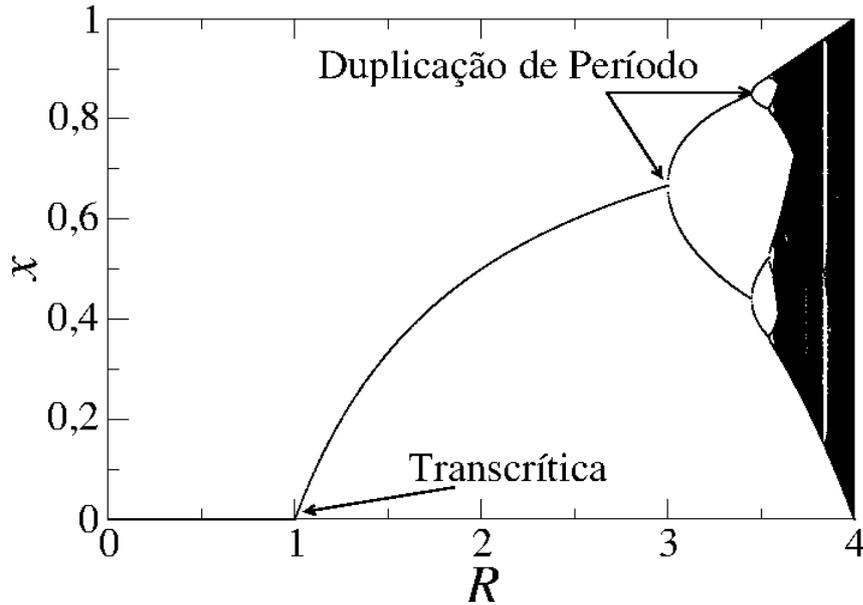


Figura 3.1: Diagrama de órbita para o mapa logístico.

Em  $R = 1$  ocorre uma bifurcação transcritical. A Fig.(3.1) ilustra o diagrama de órbita para o mapa logístico. Nosso objetivo é determinar a convergência para o ponto fixo na bifurcação transcritical e em suas vizinhanças.

Consideraremos que a distância da variável dinâmica ao ponto fixo é dada por  $Y$  e é função de  $n$  e  $\mu = |R - R_c|$ , onde  $R_c$  identifica o ponto de bifurcação. Próximo da bifurcação,  $Y$  pode ser tratada como uma variável contínua [12]. Exatamente no ponto de bifurcação  $\mu = 0$ , portanto  $R = R_c$  logo

$$Y \sim n^\beta, \quad (3.14)$$

onde  $\beta$  é o expoente de decaimento. Conforme discutido em [12], para  $\mu \neq 0$  (próximo à bifurcação), o decaimento é do tipo

$$Y_{n,\mu} \propto e^{-n/\tau}, \quad (3.15)$$

onde

$$\tau \sim \mu^z, \quad (3.16)$$

é o tempo de relaxação sendo  $z$  o expoente de relaxação. Agora voltando à equação do mapa logístico, quando  $R = 1$ , que é o ponto de bifurcação. Ficamos com a equação

$$x_{n+1} = x_n - x_n^2. \quad (3.17)$$

Subtraindo  $x_n$  dos dois lados obtemos

$$x_{n+1} - x_n = -x_n^2. \quad (3.18)$$

Considerando que

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1) - n} \simeq \frac{dx}{dn}, \quad (3.19)$$

temos que

$$\frac{dx}{dn} = -x^2. \quad (3.20)$$

Assim, ficamos com uma equação diferencial ordinária(EDO) de primeira ordem. Que pode ser facilmente resolvida. Isolando  $x$  de um lado  $n$  do outro, conseguimos resolver essa EDO integrando de ambos os lados, ou seja.

$$\int_{x_0}^x \frac{1}{x'^2} dx' = \int_0^n dn'. \quad (3.21)$$

Resolvendo essa integral e substituindo os devidos limites de integração temos:

$$\frac{-1}{x} + \frac{1}{x_0} = -n. \quad (3.22)$$

Isolando  $x$  chegamos

$$x = \frac{x_0}{1 + nx_0}. \quad (3.23)$$

Multiplicando o lado direito por  $\frac{x_0}{x_0}$  da equação resulta

$$x = \frac{1}{n + \frac{1}{x_0}}. \quad (3.24)$$

Para  $n \gg \frac{1}{x_0}$ , temos

$$x \sim \frac{1}{n} = n^{-1}. \quad (3.25)$$

Portanto chegamos à conclusão que

$$\beta = -1. \quad (3.26)$$

Para confirmar este resultado obtido para  $\beta$  e validar nossa aproximação  $x_{n+1} - x_n \cong \frac{dx}{dn}$ , fizemos um estudo numérico da convergência para o ponto fixo A Fig. 3.2 mostra a convergência para o ponto fixo  $x = 0$  no mapa logístico. Um ajuste em lei de potência forneceu  $\beta = -0,9970(5) \cong -1$ , conforme previsto teoricamente. Agora, para o caso em que temos  $R \neq 1$ , porém, em um intervalo próximo de 1, o valor de  $\mu \neq 0$ . Com isso, a equação do mapa logístico fica da seguinte forma

$$x_{n+1} = x_n R - R x_n^2. \quad (3.27)$$

Subtraindo  $x_n$  de ambos lados da equação temos

$$x_{n+1} - x_n = x_n R - x_n - R x_n^2. \quad (3.28)$$

Nessa equação também vamos usar a aproximação de  $x_{n+1} - x_n$  como a derivada de  $x$  em relação a  $n$ .

$$\frac{dx}{dn} = x(R - 1) - R x^2. \quad (3.29)$$

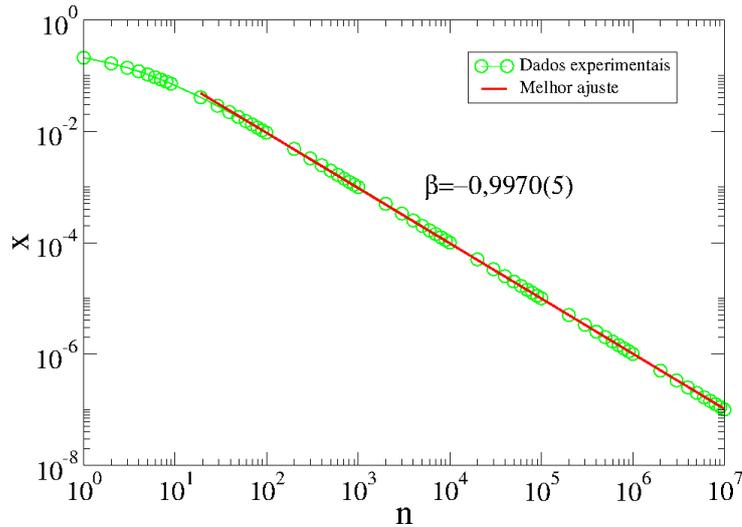


Figura 3.2: Decaimento para o ponto fixo  $x = 0$  no mapa logístico. O expoente obtido foi  $\beta = -0,9970(5) \approx -1$ .

Para  $x$  pequeno, esse valor, elevado ao quadrado, se torna um valor ainda menor. Por isso ele é desconsiderado da equação. Como  $R - 1 = \mu$  faremos essas substituições, e a equação segue como

$$\frac{dx}{dn} = x\mu. \quad (3.30)$$

Essa equação também se apresenta agora como uma EDO de primeira ordem. Isolando a variável  $x$  de um lado, e a variável  $n$  do outro, podemos integrá-los independentemente assim

$$\int_{x_0}^x \frac{dx'}{x'} = \int_0^n \mu dn'. \quad (3.31)$$

Resolvendo essa integral e substituindo os devidos limites de integração temos

$$\ln \frac{x}{x_0} = -\mu n. \quad (3.32)$$

Aplicando a devida álgebra chegamos em

$$x_n = x_0 e^{-\mu n}. \quad (3.33)$$

Comparando com a equação (3.15) temos

$$e^{-\mu n} = e^{\frac{-n}{\tau}}, \quad (3.34)$$

$$e^{-\mu n} = e^{\frac{-n}{\mu z}}, \quad (3.35)$$

$$z = -1. \quad (3.36)$$

Da mesma forma que fizemos para  $R = 1$ , podemos também verificar este resultado numericamente. A Fig. (3.3) mostra o comportamento de  $\tau$  vs.  $\mu$ . Um ajuste em lei de potência fornece  $z = -0,9668(4) \cong -1$ . Por este processo, determinamos os expoentes do mapa logístico em duas situações, a primeira, quando  $\mu = 0$ , e a segunda para  $\mu \neq 0$ , porém, próximo do ponto de bifurcação.

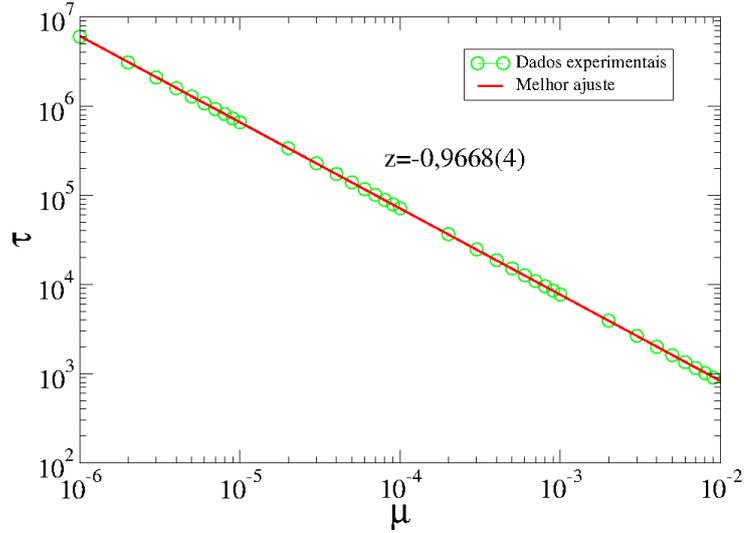


Figura 3.3: Esboço do tempo de relaxação  $\tau$  vs  $\mu$  no mapa logístico. O expoente obtido foi  $z = -0,9668(4) \approx -1$ .

## 3.2 Convergência para o ponto de equilíbrio no mapa cúbico

Nosso trabalho não se limita ao mapa logístico apenas, e a seguir, vamos mostrar analiticamente como obtemos os expoentes do mapa cúbico. Na seção anterior discutimos a convergência para o mapa logístico. Discutiremos agora um procedimento análogo, entretanto para o mapa cúbico. A expressão do mapeamento é dada por

$$x_{n+1} = Rx_n - x_n^3, \quad (3.37)$$

os pontos fixos são dados por  $x = 0$ , que é assintoticamente estável para  $R \in [0, 1]$  e  $x = \pm\sqrt{R-1}$ , que exibem estabilidade assintótica para  $R \in (1, 2)$ . Em  $R = 1$ , o sistema exibe uma bifurcação de forquilha. O diagrama de órbita é mostrado na Fig.(3.4). Nossa região de interesse é  $R = 1$  e suas vizinhanças. Seguiremos então um procedimento semelhante aquele realizado na seção anterior.

Subtraindo  $x_n$  dos dois lados da equação do mapeamento ficamos com

$$x_{n+1} - x_n = -x_n^3, \quad (3.38)$$

o termo  $x_{n+1} - x_n$ , podemos aproximar para a derivada de  $x$  em relação a  $n$ . Fazendo esse passo chegamos em

$$\frac{dx}{dn} = -x^3. \quad (3.39)$$

Assim, ficamos com uma EDO de primeira ordem, isolando  $x$  de um lado,  $n$  do outro, conseguimos resolver essa EDO integrando dos 2 lados.

$$\int_{x_0}^x \frac{1}{x'^3} dx' = \int_0^n dn'. \quad (3.40)$$

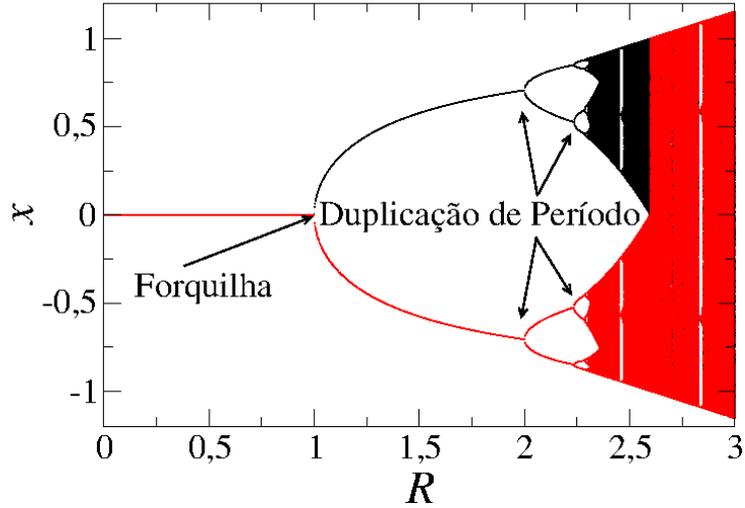


Figura 3.4: Diagrama de órbita para o mapa cúbico.

Resolvendo essa integral e substituindo os devidos limites de integração temos

$$\frac{-1}{2x^2} + \frac{1}{2x_0^2} = -n. \quad (3.41)$$

Isolando  $x$  temos

$$x^2 = \frac{2x_0^2}{2 + 4nx_0^2}. \quad (3.42)$$

multiplicando o lado direito da equação por  $\frac{x_0^2}{x_0^2}$  resulta

$$x^2 = \frac{2}{4n + \frac{2}{x_0^2}}. \quad (3.43)$$

Para  $n \gg \frac{2}{x_0^2}$ , temos

$$x \sim n^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.44)$$

o que conduz a

$$\beta = \frac{-1}{2} \quad (3.45)$$

Evoluindo numericamente a dinâmica, podemos encontrar o expoente  $\beta$ . A Fig.(3.5) mostra o comportamento de  $x$  vs  $n$  para o mapa cúbico utilizando  $R = 1$ . Um ajuste em lei de potência fornece  $\beta = -0,4970(3) \cong \frac{-1}{2}$ .

Agora, para o caso em que temos  $R \neq R_c$ , porém, em um intervalo próximo de  $R_c$ ,  $\mu \neq 0$ . Com isso, a equação do mapa cúbico fica da seguinte forma:

$$x_{n+1} = x_n R - x_n^3. \quad (3.46)$$

Do mesmo modo que subtraímos  $x_n$  dos dois lados da equação do mapeamento para  $R = R_c$ , vamos fazer aqui, com isso, ficamos com

$$x_{n+1} - x_n = x_n R - x_n - x_n^3. \quad (3.47)$$

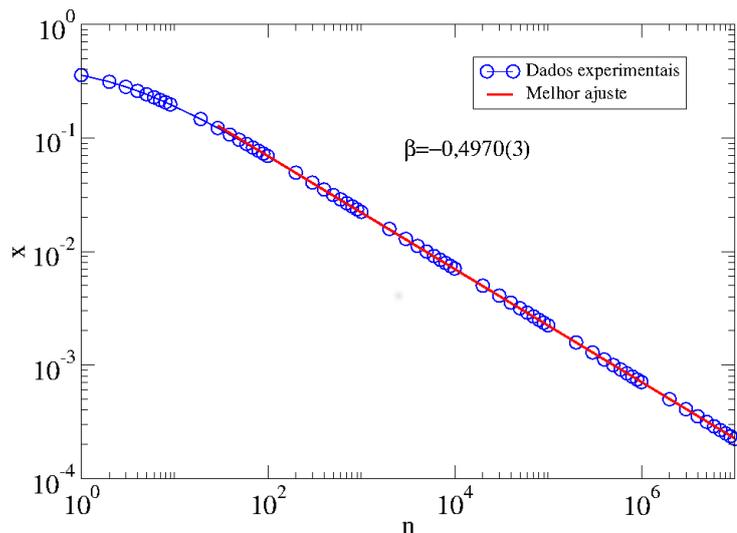


Figura 3.5: Decaimento para o ponto fixo  $x = 0$  no mapa cúbico. O expoente obtido foi  $\beta = -0,4970(3) \simeq -0,5$ .

Nessa equação também vamos usar a aproximação de  $x_{n+1} - x_n$  como a derivada de  $X$  em relação a  $n$ , temos

$$\frac{dx}{dn} = x(R - 1) - x^3. \quad (3.48)$$

Para  $x$  suficientemente pequeno, esse valor, elevado ao quadrado, se torna um valor menor ainda, por isso, desconsideramos o termo cúbico da equação. Como  $R - 1 = \mu$  faremos essas substituições, e a equação segue como

$$\frac{dx}{dn} = x\mu. \quad (3.49)$$

Essa equação também se apresenta agora como uma EDO de primeira ordem. Isolando a variável  $x$  de um lado, e a variável  $n$  do outro, podemos integrá-los

$$\int_{x_0}^x \frac{dx'}{x'} = \int_0^n \mu dn'. \quad (3.50)$$

Resolvendo essa integral e substituindo os devidos limites de integração temos

$$\ln \frac{x}{x_0} = -\mu n. \quad (3.51)$$

Aplicando a devida álgebra chegamos em

$$x_n = x_0 e^{-\mu n}. \quad (3.52)$$

Comparando com a equação(3.15) chegamos a

$$e^{-\mu n} = e^{-\frac{n}{\tau}}, \quad (3.53)$$

$$e^{-\mu n} = e^{-\frac{n}{\mu^2}}, \quad (3.54)$$

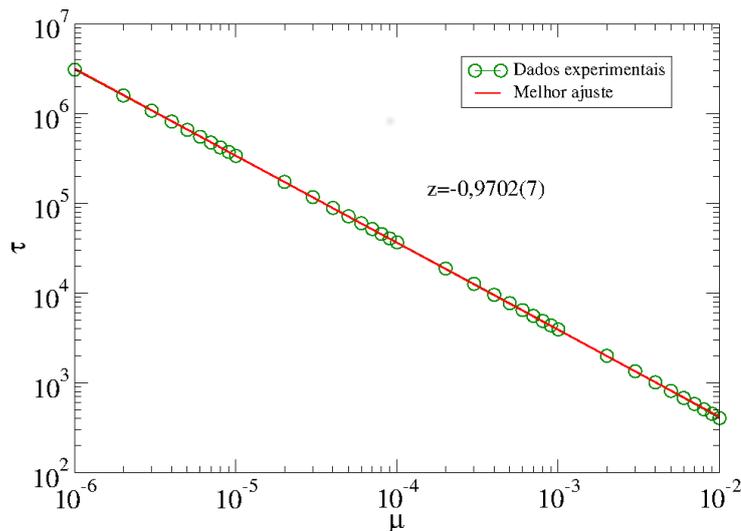


Figura 3.6: Esboço de  $\tau$  vs.  $\mu$  para o mapa cúbico. Um ajuste em lei de potência fornece  $z = -0,9702(7) \approx -1$ .

$$z = -1. \quad (3.55)$$

Uma simulação numérica confirma este resultado, conforme mostrado na Fig.(3.6). Um ajuste de lei de potência fornece  $z = -0,9702(7) \cong -1$ . Assim, determinamos os valores dos expoentes de decaimento e relaxação para o mapa logístico e para o mapa cúbico.

### 3.3 Extrapolação para não linearidade $\gamma + 1$

Conforme vimos nas duas seções anteriores, os expoentes  $\beta$  e  $z$  para o mapa logístico são  $\beta = -1$  e  $z = -1$  para  $\gamma = 1$ . Para o mapa cúbico, obtivemos que  $\beta = -\frac{1}{2}$  e  $z = -1$ . De fato, o expoente  $z$  não depende da não linearidade do mapeamento ao passo que  $\beta$  é sensível ao valor de  $\gamma$ . Para o caso genérico em que

$$x_{n+1} = Rx_n - x_n^{(\gamma+1)}, \quad (3.56)$$

chegamos à conclusão que a relação entre  $\beta$  e  $\gamma$  é dada por

$$\beta = -\frac{1}{\gamma}. \quad (3.57)$$

Fizemos diversas outras simulações numéricas e todas elas confirmam a previsão teórica.

# Capítulo 4

## Conclusões e Perspectivas

Investigamos neste trabalho o decaimento para o ponto de equilíbrio em uma família de mapeamentos do tipo logístico-like escrita como

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n^\gamma). \quad (4.1)$$

Para o mapa logístico e considerando a bifurcação transcítica, provamos que o decaimento para o ponto fixo é dado por  $x \sim n^\beta$  onde  $\beta = -1$ .

Para o mapa cúbico com  $\gamma = 2$  e considerando uma bifurcação de forquilha, mostramos que a relaxação para o equilíbrio é dada por  $x \sim n^\beta$  com  $\beta = \frac{-1}{2}$ . Para o caso genérico, provamos que  $\beta = \frac{-1}{\gamma}$ .

Nas proximidades das bifurcações mostramos que a não linearidade do mapa não influencia na relaxação para o equilíbrio e a lei é dada por

$$x \sim e^{\frac{-n}{\tau}}, \quad (4.2)$$

com  $\tau = \mu^z$  e  $z = -1$ .

Como perspectiva do trabalho, pretendemos investigar o comportamento da convergência para o ponto de equilíbrio utilizando uma função homogênea generalizada, com argumentos  $(x_0, n)$ , assim como investigar a dinâmica nas bifurcações de duplicação de período. Parte dos Resultados apresentados neste trabalho estão submetidos para Physics Letters A.

# Bibliografia

- [1] H. Haken, Evolution of order and Chaos in Physics, Chemistry and Biology, Springer Series in Synergetics, vol.17. Springer-Verlag, Berlim (1982); Synergetics- An introduction, ib. vol. 1. Springer-Verlag, Berlim (1983).
- [2] A. J. Lichtenberg e M. A. Lieberman, Regular and Stochastic Motion. Springer-Verlag, New York (1983).
- [3] R. S. Mackay e J. D. Meiss, Hamiltonian Dynamical Systems- A Reprint Selection. Adam Hilger, Bristol (1987).
- [4] J. Gunckenheimer e P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer-Verlag, New York (1983).
- [5] R. L. Devaney, An Introduction to Chaotic Dynamical Systems (segunda edição). Addison Wesley, Redwood City (1989).
- [6] H. Poincaré, Les Methodes Nouvelles de la Mécanique Celeste, vols 1-3. Gauthier-Villas, Paris (1899).
- [7] G. D. Birkhoff, Collected Mathematical Papers, vols. 1-3. American Physical Society, Providence (1950); Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa(2), 4, 267 (1935); Collected Mathematical Papers, vol. 2, pp. 466-505.
- [8] R. Seydel, From Equilibrium to Chaos-Practical Bifurcation and Stability Analysis. Elsevier, New York (1988).
- [9] P. Coullet e C. Tresser, J. Physique **C5**, 25 (1978); J. Physique Letters 41, L-255 (1980).
- [10] M. J Feigenbaum, J. Stat. Phys. **19**, 25 (1978); J. Stat. Phys. **21**, 669 (1979).
- [11] R. May, Biological populations with non overlapping generations: Stable points, a stable cycles and chaos. Science **86**, 645 (1974).

- [12] J. A. de Oliveira, E. R. Papesso e E. D. Leonel. Relaxation to fixed points in the Logistic Maps: Analytical and Numerical Investigation. *Entropy* **15**, 4310 (2013).