

**Roberto Ota**

**SUPRESSÃO DO MOVIMENTO CAÓTICO DE UM ROTOR  
DINÂMICO UTILIZANDO O CONTROLE LINEAR ÓTIMO**

Ilha Solteira  
2017



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Campus de Ilha Solteira

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Roberto Outa**

**SUPRESSÃO DO MOVIMENTO CAÓTICO DE UM ROTOR  
DINÂMICO UTILIZANDO O CONTROLE LINEAR ÓTIMO**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.  
Área do conhecimento: Mecânica dos Sólidos.

**Prof. Dr. Fábio Roberto Chavarette**  
**Orientador**

Ilha Solteira  
2017

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

O943s Outa, Roberto.  
Supressão do movimento caótico de um rotor dinâmico utilizando o controle linear ótimo / Roberto Outa. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2017  
121 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2017

Orientador: Fábio Roberto Chavarette  
Inclui bibliografia

1. Rotor de Jeffcott. 2. Caos. 3. Dinâmica não linear. 4. Estabilidade. 5. Controle caótico.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: SUPRESSÃO DO MOVIMENTO CAÓTICO DE UM ROTOR DINÂMICO  
UTILIZANDO O CONTROLE LINEAR ÓTIMO

AUTOR: ROBERTO OUTA

ORIENTADOR: FABIO ROBERTO CHAVARETTE

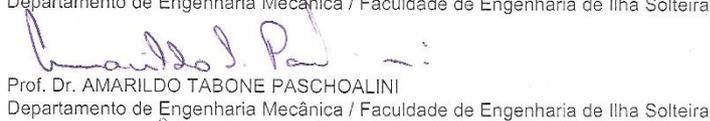
Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA  
MECÂNICA, área: MECANICA DOS SÓLIDOS pela Comissão Examinadora:



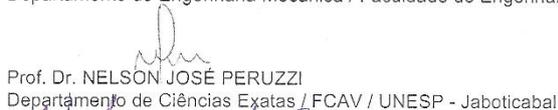
Prof. Dr. FABIO ROBERTO CHAVARETTE  
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



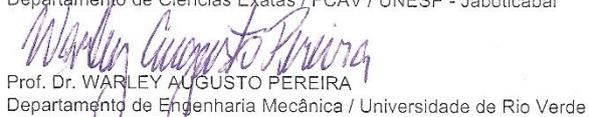
Prof. Dr. GILBERTO PECHOTO DE MELO  
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. AMARILDO TABONE PASCHOALINI  
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. NELSON JOSÉ PERUZZI  
Departamento de Ciências Exatas / FCAV / UNESP - Jaboticabal



Prof. Dr. WARLEY AUGUSTO PEREIRA  
Departamento de Engenharia Mecânica / Universidade de Rio Verde

Ilha Solteira, 27 de outubro de 2017

## DEDICATÓRIA

Dedico os conhecimentos adquiridos e a oportunidade dos meus estudos, até hoje, a minha família: Toshiaki Outa, Kiyoco Tanimoto Outa, Sara Outa Hayashi, Ricardo Seiji Hayashi, Rodrigo Hayashi, Daniele Hayashi, Ricardo Hayashi, Garu, e a Juliana Tavares Costa uma pessoa especial e cheia de vida.

“A severidade da vida nos torna mais humilde em nossos atos e decisões”.

Obrigado!

## AGRADECIMENTOS

Acredito que esta seja uma das partes mais difíceis de escrever em um trabalho, pois são tantas as lembranças de amigos, colegas, professores e até de pessoas distantes que, sem bem nos conhecer, nos desejam felicidades e sucesso.

Início agradecendo a Deus e “aos que me protegem” pela saúde, sabedoria, paz, harmonia e pela oportunidade de estudar, e do conhecimento adquirido até então.

Agradeço a vida, ao qual me proporcionou dificuldades e facilidades, testes de fé e coragem, e pelo desafio de acreditar em mim mesmo, enfim, por me dar a autoconfiança, liberdade e sabedoria para chegar concluso nesta etapa da vida.

Meus agradecimentos ao professor Dr. Fábio Roberto Chavarette pela paciência, orientação deste trabalho e durante os anos, pela formação da amizade que hoje temos. Acreditar em algo e em alguém requer sabedoria.

Agradeço a Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Mara Lúcia Martins Lopes; Prof. Dr. Luis Antonio Fernandes de Oliveira; Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Glaucia Amorim Faria; Prof. Dr. Amarildo Tabone Paschoalini e Prof. Dr. Gilberto Pechoto de Melo, pelos préstimos e auxílio no desenvolvimento do trabalho.

Aos meus amigos Celso Itsuzaki e em especial Álvaro Takei, cuja personalidade e fé foram inabaláveis na minha crença e determinação para chegar onde me encontro atualmente. A amiga Heloisa Fonseca Marão por participar intensamente da minha vida. Ao amigo e companheiro de jornada acadêmica Claudio Basquerotto.

Meus agradecimentos aos colegas de pós-graduação.

Meu obrigado a Marta Suzuki, Cristina Godoy e Neide Palombo, e a toda equipe, atuantes na biblioteca da UNESP FEIS, pessoas maravilhosas que me ajudaram contribuindo com conhecimentos e palavras de apoio.

Obrigado!

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é a elaboração de um controlador linear ótimo, que possa reduzir um sinal caótico do rotor dinâmico, em um sinal controlado. Para se obter o resultado esperado foi necessário desenvolver atividades ligadas à caracterização do experimento; análise de estabilidade pelo método de Lyapunov; aplicação da função de Lyapunov; análise da sensibilidade das condições iniciais utilizando o expoente de Lyapunov; desenvolvimento do projeto do controle ótimo linear. O resultado final mostra o desempenho da aplicação do controle linear ótimo no sinal caótico, cujo sinal foi reduzido para um comportamento estável e controlado.

**Palavras-chave:** Rotor de Jeffcott. Caos. Dinâmica não linear. Estabilidade. Controle caótico.

## **ABSTRACT**

The aim of this work is the elaboration of an optimal linear controller that can reduce a chaotic dynamic rotor signal in a controlled signal. To obtain the expected result, it was necessary to develop activities related to the characterization of the experiment; stability analysis by the Lyapunov method; application of the Lyapunov function; sensitivity analysis of the initial conditions by the Lyapunov exponent; development of linear optimum control. The result shows the performance of the optimal linear control in the chaotic signal, whose signal was reduced to a stable and controlled behavior.

**Keywords:** Jeffcott rotor. Chaos. Nonlinear dynamic. Stability. Control. Chaotic.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Princípio de Aditividade.....	21
Figura 2	Princípio de Proporcionalidade .....	21
Figura 3	Transformada de Laplace .....	26
Figura 4	Retrato de fases da relação entre a velocidade e as trajetórias.....	30
Figura 5	Modelo de um sistema mecânico com um grau de liberdade .....	31
Figura 6	Quadro resumo de estabilidade nodal.....	36
Figura 7	Classificação da função $V$ .....	42
Figura 8	Trajétoria sistema dinâmico - teorema do expoente de Lyapunov .....	48
Figura 9	Linearização de uma função em torno de uma trajetória .....	49
Figura 10	Representação gráfica de um MHS .....	51
Figura 11	Eixo desbalanceado com movimento rotativo .....	54
Figura 12	Detalhamento do eixo do sistema de rotor dinâmico de Jeffcott .....	54
Figura 13	Efeito giroscópico no centro de massa $G$ do eixo.....	59
Figura 14	Modelo espacial SDOF com amortecimento .....	64
Figura 15	Deflexão do eixo no plano $xy$ .....	65
Figura 16(a)	Deslocamento Lateral no tempo .....	66
Figura 16(b)	Deslocamento Angular no tempo .....	66
Figura 16(c)	Receptância Deslocamento Lateral .....	67
Figura 16(d)	Receptância Deslocamento Angular .....	67
Figura 16(e)	Mobilidade Deslocamento Lateral .....	68
Figura 16(f)	Mobilidade Deslocamento Angular.....	68
Figura 16(g)	Acelerância Deslocamento Lateral.....	69
Figura 16(h)	Acelerância do Deslocamento Angular .....	69
Figura 17(a)	Experimento do Rotor Dinâmico .....	70
Figura 17(b)	Referência de Medição .....	71

Figura 17(c) Acelerômetro.....	71
Figura 18(a) Ponto 1 - 1° fase Resposta a Excitação (teórico x experimental).....	72
Figura 18(b) Ponto 2 - 1° fase Resposta a Excitação (teórico x experimental).....	72
Figura 18(c) Ponto 1 - 2° fase Resposta a Excitação (teórico x experimental).....	73
Figura 18(d) Ponto 1 - 2° fase Resposta a Excitação (teórico x experimental).....	73
Figura 19 Motor CA tipo gaiola.....	79
Figura 20 Velocidade Síncrona do eixo do motor.....	81
Figura 21(a) Potência elétrica do motor em Watts ( $i = 1.0A$ ).....	82
Figura 21(b) Potência elétrica do motor em Watts ( $i = 1.8A$ ).....	82
Figura 22 Detalhe do disco fixo no eixo do rotor dinâmico.....	86
Figura 23 Detalhe da massa fixada no disco .....	86
Figura 24(a) Ponto 1- Resposta a Excitação 20Hz (teórico x experimental) .....	87
Figura 24(b) Ponto 2- Resposta a Excitação 20Hz (teórico x experimental) .....	87
Figura 25(a) Ponto 1- Resposta a Excitação 25Hz (teórico x experimental) .....	88
Figura 25(b) Ponto 2- Resposta a Excitação 25Hz (teórico x experimental) .....	88
Figura 26(a) Estabilidade do Eixo x deslocamento lateral.....	91
Figura 26(b) Estabilidade do Eixo y deslocamento lateral.....	91
Figura 26(c) Estabilidade do Eixo x desl. dinâmico do ângulo giroscópico .....	92
Figura 26(d) Estabilidade do Eixo y desl. dinâmico do ângulo giroscópico .....	92
Figura 27 Controle do Deslocamento Lateral $x_G$ .....	103
Figura 28 Controle do Deslocamento Lateral $y_G$ .....	103
Figura 29 Controle do Deslocamento Angular $\theta_{x_G}$ .....	104
Figura 30 Controle do Deslocamento Angular $\theta_{y_G}$ .....	104

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Transformada de Laplace .....	28
Tabela 2	Características dos componentes do experimento .....	71
Tabela 3	Análise resultados para caracterização do experimento .....	74
Tabela 4	Variância e Desvio Padrão do modelo teórico e experimental .....	74
Tabela 5	Resultado das Raízes das Equações Polinomiais .....	78
Tabela 6	Velocidade síncrona do rotor do motor AC .....	80
Tabela 7	Variância e Desvio Padrão .....	89
Tabela 8	Resultado de Estabilidade com Massa Desbalanceadora .....	90
Tabela 9	Autovalores e Autovetores – Simulação Computacional 60Hz .....	94
Tabela 10	Autovalores e Autovetores – Simulação Computacional $m = 0.01 Kg$ .....	94
Tabela 11	Autovalores e Autovetores – Simulação Computacional $k = 20 \frac{Kg}{mm^2}$ .....	95
Tabela 12	Autovalor do Expoente de Lyapunov .....	96

## LISTA DE SIMBOLOS

$\vec{F}_1(t), \vec{F}_2(t)$	Força qualquer em função do tempo
$\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)$	Resposta a força qualquer em função do tempo
$c_1$ e $c_2$	Constante qualquer
$P(x)$	Função com variável $x$
$Q(y)$	Função com variável $y$
$F(t)$	Função com a variável tempo
$f(s)$	Função no domínio de Laplace
$u_{exato}$	Função exata
$e(x)$	Função erro
$L$	Operador Linear
$R$	Função resíduo
$W$	Função peso ou função fraca
$[W]$	Matriz da função peso
$\vec{v}$	Velocidade vetorial
$\vec{x}(t)$	Deslocamento vetorial no tempo
$\vec{F}(t)$	Força vetorial no tempo
$\ddot{x}$	Aceleração – notação da segunda derivada do desl. da onda
$\dot{x}$	Velocidade – notação da primeira derivada do desl. da onda
$x$	Deslocamento – notação do deslocamento da onda
$x_0$	Posição inicial referência do deslocamento da onda
$\lambda$	Autovalor
$Re$	Notação para real
$Im$	Notação para imaginário
$a_n$	Constante em uma função polinomial
$\sigma_i; \sigma_e; \sigma_c$	Autovalor, instável, estável e central respectivamente
$r_i; r_e; r_c$	Autovalor real instável, estável e central respectivamente
$E^i; E^e; E^c$	Autovetores instável, estável e central respectivamente
$\lambda_L$	Expoente de Lyapunov
$ w_L $	Norma
$w_L$	Trajetória percorrida da origem até o ponto em análise
$O(r_{circ})$	Termo com tendência a nulidade

$\theta$	Ângulo de fase
$\varphi$	Ângulo de fase defasado
$f$	Frequência
$T$	Período
$\omega$	Frequência angular
$t$	Tempo
$u$	Velocidade da partícula da onda
$\lambda$	Comprimento de onda
$k$	Número de ondas
$A$	Amplitude
$m$	Massa
$k$	Constante de Rigidez
$c$	Constante de Amortecimento
$u_{xC}, u_{yC}$	Coordenadas do ponto C em x e y
$u_{xG}, u_{yG}$	Coordenadas do ponto G em x e y
$K_{eixo}$	Rigidez do eixo
$\dot{u}; \ddot{u}$	Notação de derivada primeira e segunda de u
$e_u; A_x; A_y$	Amplitude
$e^{i\omega t}$	Exponencial complexo do deslocamento da onda
$\omega_n$	Frequência natural
$\zeta$	Relação de amortecimento
$\omega_d$	Frequência natural amortecida
$\theta_{yG}; \theta_{xG}$	Ângulo giroscópico em x e y respectivamente
$J_p$	Momento de inercia rotacional polar
$J_t$	Momento de Inercia transverso

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>10</b>
<b>1.1</b>	<b>Estado da Arte .....</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>SISTEMAS DINÂMICOS.....</b>	<b>20</b>
<b>2.1</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>20</b>
<b>2.2</b>	<b>Conceito de Sistemas dinâmicos lineares e não lineares .....</b>	<b>20</b>
<b>2.3</b>	<b>Equações Diferenciais .....</b>	<b>22</b>
2.3.1	<i>Introdução .....</i>	<i>22</i>
2.3.2	<i>Conceito de equações diferenciais.....</i>	<i>22</i>
2.3.3	<i>Equação diferencial ordinária de primeira ordem - Solução por separação de variáveis .....</i>	<i>24</i>
2.3.4	<i>Transformada de Laplace.....</i>	<i>25</i>
<b>2.4</b>	<b>Análise de Sistemas Dinâmicos Não Lineares .....</b>	<b>28</b>
2.4.1	<i>Introdução a Análise de Sistemas Não Lineares.....</i>	<i>28</i>
2.4.2	<i>Espaço de Fases ou Espaço de Estados.....</i>	<i>28</i>
2.4.3	<i>Análise Gráfica do Espaço de Fase .....</i>	<i>32</i>
2.4.4	<i>Estabilidade Linear.....</i>	<i>32</i>
2.4.4.1	<i>Solução geral para estabilidade linear.....</i>	<i>33</i>
2.4.4.2	<i>Análise generalizada da solução geral para um sistema linear.....</i>	<i>35</i>
2.4.5	<i>Estabilidade Não-Linear .....</i>	<i>36</i>
2.4.5.1	<i>Método indireto de estabilidade não linear – Linearização pela série de Taylor .....</i>	<i>37</i>
2.4.5.2	<i>Método indireto de estabilidade não linear – Teoria da variedade central .....</i>	<i>38</i>
2.4.5.3	<i>Método direto de estabilidade não linear – Método direto de Lyapunov...40</i>	
2.4.5.4	<i>Método direto de estabilidade não linear – método direto de Lyapunov para sistemas invariantes no tempo.....</i>	<i>42</i>
2.4.6	<i>Mapas de Poincaré.....</i>	<i>44</i>
<b>2.5</b>	<b>Dinâmica Caótica.....</b>	<b>45</b>
2.5.1	<i>Introdução .....</i>	<i>45</i>
2.5.2	<i>Dinâmica Caótica e Caos.....</i>	<i>45</i>
2.5.3	<i>Atrator.....</i>	<i>46</i>
<b>2.6</b>	<b>Expoente de Lyapunov .....</b>	<b>47</b>

<b>3</b>	<b>ROTORES DINÂMICOS .....</b>	<b>50</b>
<b>3.1</b>	<b>Introdução a rotores dinâmicos .....</b>	<b>50</b>
<b>3.2</b>	<b>Ondas e movimento harmônico simples – MHS.....</b>	<b>50</b>
<b>3.3</b>	<b>Rotores de Jeffcott.....</b>	<b>54</b>
<b>3.3.1</b>	<i>Efeito Giroscópio .....</i>	<i>59</i>
<b>4.</b>	<b>ASPECTOS E CARACTERIZAÇÃO DE ENSAIOS.....</b>	<b>63</b>
<b>4.1</b>	<b>Modelo Teórico.....</b>	<b>63</b>
<b>4.1.1</b>	<i>Sistema com um grau de liberdade SDOF.....</i>	<i>63</i>
<b>4.2</b>	<b>Modelo experimental.....</b>	<b>69</b>
<b>4.2.1</b>	<i>Aplicação do Experimento.....</i>	<i>70</i>
<b>4.3</b>	<b>Discussão Geral da Caracterização do Experimento.....</b>	<b>75</b>
<b>4.4</b>	<b>Critério de Estabilidade Routh-Hurwitz.....</b>	<b>75</b>
<b>4.4.1</b>	<i>Aplicação do critério de Routh-Hurwitz.....</i>	<i>76</i>
<b>4.4.2</b>	<i>Discussão dos Resultados da Aplicação de Routh-Hurwitz.....</i>	<i>78</i>
<b>4.5</b>	<b>Motores Elétricos .....</b>	<b>78</b>
<b>4.5.1</b>	<i>Motores de Indução.....</i>	<i>79</i>
<b>4.5.2</b>	<i>Acoplamento da Equação da Velocidade Síncrona com a Equação do Rotor Dinâmico.....</i>	<i>83</i>
<b>4.5.3</b>	<i>Discussão da Introdução da Equação da Velocidade Síncrona .....</i>	<i>83</i>
<b>4.6</b>	<b>Discussão da estabilidade da Caracterização do Experimento .....</b>	<b>83</b>
<b>5</b>	<b>APLICAÇÃO EM SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES .....</b>	<b>85</b>
<b>5.1</b>	<b>Aplicação Experimental com a Massa Desbalanceadora .....</b>	<b>85</b>
<b>5.1.1</b>	<i>Discussão dos Resultados da Introdução da Massa Desbalanceadora ...</i>	<i>89</i>
<b>5.2</b>	<b>Análise de Estabilidade – Método Indireto de Lyapunov.....</b>	<b>90</b>
<b>5.3</b>	<b>Discussão Geral da Análise de Estabilidade – Método Indireto de Lyapunov .....</b>	<b>92</b>
<b>5.4</b>	<b>Simulação Computacional com Alteração de Massa e Rigidez .....</b>	<b>93</b>
<b>5.5</b>	<b>Análise da Dinâmica Caótica – Funções de Lyapunov .....</b>	<b>95</b>
<b>5.6</b>	<b>Discussão Geral Sobre a Estabilidade do Sistema .....</b>	<b>96</b>
<b>6</b>	<b>TEORIA DE CONTROLE.....</b>	<b>98</b>
<b>6.1</b>	<b>Controle Linear Ótimo.....</b>	<b>98</b>
<b>6.2</b>	<b>Aplicação da Teoria de Projeto de Controle no Rotor Dinâmico .....</b>	<b>101</b>
<b>6.3</b>	<b>Discussão dos Resultados da Aplicação do Controle Linear Ótimo .....</b>	<b>104</b>

<b>7</b>	<b>DISCUSSÃO GERAL DO TRABALHO DE PESQUISA.....</b>	<b>106</b>
<b>8</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>108</b>
<b>9</b>	<b>PROJETOS FUTUROS.....</b>	<b>110</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>111</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Atualmente os consumidores, de uma maneira em geral, tem exigido que os produtos gerados pelas empresas possuíssem melhor qualidade e preço de venda. Este fato tem feito com que as indústrias exerçam o melhoramento das atividades de controle de qualidade, garantindo que os produtos tenham maior confiabilidade, resultando assim, na melhora das características dos mesmos, atribuídas também à relação da redução dos custos de produção. Através deste conceito os projetos de máquinas são desenvolvidos para atender essas necessidades, reduzindo as falhas e antecipando os erros encontrados em máquinas operantes, sendo que, este conceito, ainda pode ser entendido como uma das filosofias necessárias à implantação do *Total Productive Maintenance* - TPM.

Uma área emergente de projetos de máquinas são as máquinas rotativas, também denominadas de rotores dinâmicos, sendo estes aplicados a turbinas de aviões, turbinas a vapor para a produção de energia elétrica, turbo-compressores, entre outros. Genta (2005) define rotores dinâmicos como um ramo da dinâmica que atua com dispositivos mecânicos, como rotor, ou seja, roda com movimento angular significativo. Já a Organização Internacional para Padronização (ISO) define um rotor como sendo um corpo suspenso por meio de um conjunto de articulações cilíndricas ou rolamentos que lhe permite rodar livremente em torno de um eixo fixo no espaço. As máquinas rotativas são classificadas pela deformação do eixo de rotação e este eixo quando em movimento, causado pelo momento giroscópico, produz ressonância oriundo da excentricidade da massa (ISHIDA; YAMAMOTO, 2012).

Na análise de vibração os sistemas de rotores complexos são simplificados e adequados em modelos matemáticos, cuja importância se dá nos parâmetros e características de modelagens (ISHIDA; YAMAMOTO, 2012). A princípio, o termo sistema, pode ser considerado como um conjunto de objetos estudados que se relacionam entre si e podem ser divididos em sistema lineares e não lineares.

Um sistema linear pode ser representado por uma relação causa-efeito e quando excitado pela combinação linear de duas entradas, é igual à combinação linear das saídas resultantes da aplicação isolada de cada entrada (AGUIRRE, 2007). Já um sistema não linear como aquele que não obedece ao princípio da superposição, isto é, se duas funções são soluções do sistema, então a soma de

ambas não necessariamente será uma solução (GEROMEL; KOROGUI, 2011). Os movimentos rotacionais são modelos de sistemas dinâmicos não lineares, cuja descrição do modelo pode ser feita por funções trigonométricas (GEROMEL; KOROGUI, 2011). Em rotores desbalanceados diferentes tipos de respostas do sistema não lineares podem surgir, são eles os fenômenos de salto, ressonâncias sub-harmônicas, ressonâncias de combinação, vibrações caóticas e aparecimentos de ciclos limites (ISHIDA; YAMAMOTO, 2012).

O objetivo desta tese é elaborar um controlador linear ótimo que atue na redução do movimento caótico de um rotor dinâmico, até o ponto de equilíbrio. A motivação para o desenvolvimento deste trabalho ocorreu da observação em campo de diferentes tipos de problemas nas máquinas rotativas que, de certo modo, alteram o comportamento do sistema dinâmico, resultando na alteração da estabilidade do sistema. Essas falhas, de uma forma geral, podem ser decorrentes da montagem, desalinhamento do eixo, falta de lubrificação e lubrificantes adequados, partículas estranhas nos rolamentos, entre outros.

Neste trabalho foi desenvolvido um experimento baseado na teoria de Jeffcott Rotors, para adquirir um sinal que demonstra o comportamento do rotor dinâmico, e assim, considerando os diferentes fenômenos, deslocamento lateral e angular, demonstrados no sinal, foi possível estabelecer um critério de estabilidade utilizando o teorema de Lyapunov. Com isso, considerando que o sistema do rotor dinâmico é instável e de comportamento caótico, foi desenvolvido um projeto de controle linear ótimo que atue minimizando o comportamento caótico em um sistema estável.

A organização geral deste trabalho pode ser descrita como:

- Estudo das teorias de sistemas dinâmicos não lineares, dinâmica caótica, análise modal, equações diferenciais parciais, rotores de Jeffcott, estabilidade de Lyapunov, expoente de Lyapunov, e a teoria de vibração;
- Caracterização do Experimento;
- Análise de estabilidade qualitativa do sistema utilizando o método de Routh-Hurwitz;
- Análise de estabilidade considerando a introdução de uma massa externa no sistema dinâmico;

- Investigação da estabilidade utilizando o método de Lyapunov;
- Investigação do comportamento caótico, utilizando o expoente de Lyapunov;
- Aplicação do projeto do controle linear ótimo para o controle do estado caótico no sistema dinâmico.

## 1.1 Estado da Arte

A dinâmica, nos conceitos e teorias que envolvem a física, pode ser relacionada às características do movimento e a deformação de um determinado corpo ou sistema, cujo comportamento dinâmico está contido nos princípios da mecânica analítica, cinemática e cinética. Os conceitos matemáticos também são aplicados, para o entendimento da dinâmica deste corpo ou sistema, e os resultados encontrados na solução deste equacionamento, descrevem os diferentes estados para as condições específicas. Porém, antes de se avançar nos conceitos e questões que envolvem os comportamentos de sistemas dinâmicos e suas respectivas soluções matemáticas, é importante compreender a formação histórica destes conceitos. Assim, foi introduzido na sequência, um breve comentário do surgimento dos estudos de sistemas dinâmicos considerando os principais pesquisadores de cada época, não desmerecendo outros pesquisadores de igual importância e relevância tratados na evolução da história.

Lang (1989) comenta que Aristóteles (384-322 a.C.) é o precursor do conceito da teleologia, que pode ser definido como a explicação para algo em função do seu propósito ou a que se destina. Em específico a física Aristotélica, “é dedutiva e apoiada em verdades evidentes, indo do particular para o geral, de hipóteses e axiomas para conclusões” (MONTEIRO, 2011).

Aristóteles (384-322 a.C.) desenvolveu diferentes teorias que envolviam o campo da física, sendo uma delas a que descreve quatro elementos, a terra, o ar, a água e o fogo, e as suas relações dinâmicas exemplificadas na natureza, que resultam nas características que constituem o movimento do objeto, ou seja, a função e o seu propósito, (LANG, 1989; MONTEIRO, 2011). Os princípios que regem o movimento dos corpos para Aristóteles (384-322 a.C.) são definidos como, “(1) para um corpo se manter em movimento é necessária a ação de uma força, se a força for removida, o corpo vai para o repouso; (2) a velocidade de um corpo é

proporcional à intensidade da força que atua sobre ele; (3) se os corpos de mesmo volume são soltos de uma mesma altura, então o mais pesado atinge o solo antes do mais leve”.

O trabalho de Galileu Galilei (1564-1642) *Le Meccaniche*, é dividido em três partes, sendo que a primeira parte mostra os fundamentos teóricos e trata dos “instrumentos cuja natureza se pode reduzir à balança (alavanca, eixo da roda ou cabestante)”. A segunda parte mostra o comportamento das talhas, atualmente o princípio da alavanca; e a terceira parte mostra o comportamento do parafuso, atualmente entendido como plano inclinado (VASCONCELOS, 2008). Considera-se ainda que, no trabalho de Galileu (1564-1642), são enunciados termos como, velocidade/resistência = peso/força, que é entendida pela representação matemática  $A/B=C/D$ , associando-a a uma igualdade de frações ( $A/B = C/D$ ). Outro termo importante também é mencionado como momento, “concebido como uma grandeza diferente da força, na medida em que seu caráter dimensional é dado pelo produto: força x comprimento” (VASCONCELOS, 2008).

Galileu (1564-1642) contradisse os trabalhos de Aristóteles (384-322 a.C.), influenciado pelos conceitos de Arquimedes de Siracusa (287–212 a.C.), utilizando os conceitos introdutórios de dinâmica, cuja compreensão do movimento de um corpo, considerando tempo, distância percorrida e velocidade, levou-o a compreensão de que uma força que atua sobre um corpo é proporcional a sua aceleração. Todavia, este conceito, foi desenvolvido por teóricos e filósofos (MONTEIRO, 2011; KOYRÉ, 1943).

Isaac Newton (1642-1727) teve a sua obra publicada em 1687, intitulada *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, e considerada uma das mais influentes na história da ciência, a qual descreve a lei da gravitação universal e as três leis que fundamentam a mecânica clássica. A primeira publicação revisada desta obra foi feita em 1713 intitulado *Rational Mechanics* e em seguida Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) introduz o nome *Dynamics*. Na obra de Newton (1642-1727) são utilizados métodos de cálculo infinitesimal em forma geométrica, e Leibniz (1646-1716) publica diversos artigos sobre cálculo infinitesimal no mesmo período em que Newton (1642-1727) desenvolve a sua obra (COHEN, 1999).

As três leis de Newton são: o princípio da inércia, cujo “centro de massa de um corpo permanece no seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme, a menos que uma força externa atue sobre ele”; o princípio fundamental da

dinâmica, cuja “taxa de variação temporal do momento qualquer, dado pelo produto da massa pela velocidade do corpo é igual à força externa”; o princípio da ação e reação, que “a cada ação correspondente uma reação de módulo igual e sentido oposto, sendo que cada uma das forças é aplicada a um dos dois corpos interagentes” (MONTEIRO, 2011).

Leonhard Paul Euler (1707-1783) atuou em diferentes ramos da dinâmica, porém na mecânica clássica, este descreve matematicamente as equações de rotação de um corpo utilizando quadros referenciais, com eixos fixos no corpo, e em paralelo ao corpo, considerados os eixos inerciais, (DUGAS, 1988).

Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) explica a filosofia da mecânica sobre o seu ponto de vista na publicação d'Alembert *Traité de Dynamique* e ainda comenta que a soma das diferenças entre as forças atuantes em um sistema, suas derivadas no tempo, ao longo do deslocamento virtual contendo vínculos, é igual a zero, (DUGAS, 1988).

Pierre Simon Marquis de Laplace (1749-1827) em sua obra *Mécanique Céleste* traduziu o estudo geométrico da mecânica clássica, utilizada por Newton (1642-1727), em um estudo baseado em cálculo (SOMERVILLE, 2009). “Se alguma inteligência pudesse conhecer a posição e a velocidade de cada partícula do universo num dado instante, assim como a massa e a força que age sobre cada uma dessas partículas, então essa inteligência, poderia prever o futuro do universo para o resto do tempo”, (MONTEIRO, 2011).

A estabilidade do nosso sistema solar foi estabelecida por Joseph Louis Lagrange (1736-1813), que ainda descobre as desigualdades periódicas no movimento elíptico, (SOMERVILLE, 2009). Lagrange (1736-1813) reformulou a lei Newtoniana eliminando a necessidade de calcular as forças nas partes isoladas do sistema dinâmico e todas as variáveis convenientes no sistema, obedecendo às restrições, e que pode ser usado para descrever o movimento (HAND, FINCH, 1998). Assim, uma única função de variáveis dinâmicas descreve o movimento de todo o sistema e as equações diferenciais, que governam este sistema dinâmico, são obtidas desta função, sem a necessidade de um diagrama vetorial. Este método de Lagrange, chamado comumente de método lagrangeano, expressa as diferenças das variáveis entre a energia cinética e a potencial que descrevem o movimento, após, são encontradas as equações diferenciais do movimento do sistema.

As soluções exatas são as melhores soluções para se caracterizar um sistema dinâmico, porém, é de conhecimento geral, que a maioria dos modelos de um sistema dinâmico é considerada não linear, portanto, a solução matemática desse sistema é calculada na forma de série de infinitos termos, em que, em cada termo se obtém uma solução simplificada da equação diferencial original, cujo resultado seja similar à zero.

O método para análise de estabilidade desenvolvida por Alexander Mikhailovich Lyapunov (1857-1918), conhecida como Lyapunov, é considerado o primeiro método e é empregado para se obter uma solução assintoticamente estável, ou seja, os valores iniciais de uma função qualquer, tem um comportamento estável, quando o autovalor tem sinal negativo e converge para zero, com o tempo tendendo para infinito, define (FULLER, 1992; FALEIROS; YONEYAMA, 2002). O primeiro método de Lyapunov escrito de uma maneira simplificada pode ser considerado como, “uma solução é estável se outras soluções, cujos valores no instante qualquer, forem iguais ao tempo inicial, e estão próximos do ponto inicial e permanecem próximas a este durante o passar do tempo” (MONTEIRO, 2011).

No primeiro método de Lyapunov as condições iniciais são muito importantes, portanto, imprescindíveis para a estabilidade em um sistema linear, e a não linearidade do sistema dinâmico é um resultado das condições iniciais deste mesmo sistema, o qual é chamado de caos determinístico (FERRARA; PRADO, 1994; MONTEIRO, 2011). Nos estudos de Poincaré (1854-1912) foram desenvolvidas técnicas geométricas e topológicas para os sistemas dinâmicos, concluindo que, para um sistema de três corpos uma fórmula analítica restrita, diferente de uma solução geral, é exata e descreve a massa de um corpo qualquer a partir da condição inicial, e é inexistente; sendo assim, as considerações das soluções de equilíbrio, utilizando os conceitos matemáticos de Lagrange (1736-1813), são válidas somente para condições iniciais particulares (FERRARA; PRADO, 1994; MONTEIRO, 2011).

A definição de caos pode ser entendida como que as pequenas diferenças na forma atual irão se tornar grandes consequências na forma e em um futuro, cujo exemplo é o bater de asas de uma borboleta (SMITH, 2007). Partindo desta condição, sabe-se que diferentes estudos e aplicações são feitos utilizando os conceitos e teoria de sistemas dinâmicos, cujo maior beneficiário é o ser humano.

O atual conceito e a teoria de sistemas dinâmicos podem ser utilizados cientificamente para a antecipação dos resultados, cuja aplicação destes resultados, além de promover o conhecimento sobre o comportamento do sistema, também promove a diminuição dos erros no estudo especial (MONTEIRO, 2011). Diferentes modelos de sistemas dinâmicos são estudados e calculados considerando as diferentes características de variáveis e parâmetros, que dependem exclusivamente da análise qualitativa. Um sistema dinâmico pode ser calculado através de equações diferenciais com características lineares e não lineares.

A teoria de sistemas dinâmicos aplicados em rotores dinâmicos é um excelente exemplo de uso, pode-se considerar que o conceito de um rotor é um eixo apoiado em um elemento rotativo, sendo este elemento rotativo um rolamento ou uma bucha. O desenvolvimento desta aplicação é comumente chamado de teoria de *Jeffcott Rotors*, a princípio desenvolvido por August Föppl em 1895 e Henry Homan Jeffcott em 1919 (YOON et al., 2013).

As histórias dos diferentes cientistas e suas aplicações mostram a importância das teorias e conceitos da mecânica clássica, dos sistemas dinâmicos, da física, da matemática, entre outros, e que, com a evolução dos anos, estes conceitos e teorias foram empregados em diferentes ramos de atividades. Entretanto, pode-se citar o uso destes na indústria mecânica, cujos projetos, fundamentados na mecânica clássica, transformam-se em produtos com aplicações em áreas como medicina, engenharia mecânica, civil, elétrica, aviação, automobilística, automação, acústica, entre outras. Portanto, as aplicações são específicas e, assim, para cada necessidade adquirida é desenvolvido um projeto específico, com tecnologia também específica, e que satisfaz a condição de uso.

Na indústria em geral, é possível antecipar as falhas em máquinas, atuando com a prevenção destas falhas em projetos específicos, possibilitando o controle da estabilidade do sistema e, também, contribuindo com a melhora da sensibilidade dos equipamentos que a detectam. Nos dias atuais, diferentes estudos de fenômenos ligados aos conceitos de instabilidade em sistemas dinâmicos, podem ser mostrados, e exemplificando até o uso em sistemas lineares e não lineares.

Podemos citar pesquisadores, como JianPing et al. (2004), que em sua pesquisa mostram os diferentes resultados de um sistema dinâmico não linear de um rotor com mancal de rolamento pelos métodos de análise de vibração e de elementos finitos, o resultado final demonstra que o método de elementos finitos é

mais preciso. Já os pesquisadores Ji e Leung (2003) demonstram em seu trabalho os efeitos da ressonância super-harmônica de forças magnéticas não lineares, em um rotor magnético de mancal de rolamento, utilizando a teoria e conceito de vibrações, o resultado final, mostra diferentes comportamentos de bifurcações, pulo, e a sensibilidade, sendo todos dependentes das condições iniciais. O pesquisador Sinou (2009) demonstra em seu trabalho o comportamento de um sistema não linear de um rotor dinâmico de eixo flexível apoiado em mancal de rolamento utilizando os conceitos e teoria de vibrações, o resultado encontrado mostra as folgas radiais, os sistemas de amortecimentos não lineares e a massa de desbalanceamento desequilibrando o eixo. Outa et al (2015) analisaram os fenômenos ligados a um eixo apoiado em dois mancais de rolamentos, utilizando o conceito e teoria de *Jefcott Rotors* comparando as acelerações do modelo teórico e modelo experimental. Nesta questão o desalinhamento do rotor é uma das mais comuns dificuldades encontradas quando se estuda máquinas rotativas e que, ainda, se mantém incompleta no seu entendimento, sendo que, até então, nenhuma análise satisfatória explica a gama de diferentes fenômenos observados neste processo (LEES, 2007).

A abordagem filosófica da história, de uma forma geral, das técnicas, conceitos e teorias fundamentados, no ser humano homem, até então, é mostrada de uma forma em que o homem está sempre em processo de mudança e crescimento, para atender às necessidades gerais do mundo. Este ego, termo utilizado na área da psicologia, alimentado por diferentes estímulos, gera impulsos considerados ideias criativas e inventivas no mundo tecnológico.

A pergunta que se enfatiza é: Qual o limite para mente humana e as suas necessidades? “Sempre que se reflete sobre as questões humanas mais cedo ou mais tarde um é confrontado com o fato da singularidade pessoal” (HARRÉ, 1998).

A ideia e condição de necessidade sugere a palavra conforto, que pode ser entendido como, tudo o que constitui o bem-estar e, pensando nesta condição, percebe-se então que, filosoficamente, o limite para a mente humana pode ser atrelado à própria existência humana.

Assim, é possível entender que condições adversas às atividades do ser humano são passíveis de acertos e erros que, quando assertivos, sugerem a aceitação e benefício deste resultado em uma grande comunidade, enquanto que, se errado, essas atividades, geram discussões e possível discórdia e desordem

nesta mesma comunidade. Portanto, como dito anteriormente, a mudança do comportamento humano pode ser uma proposta de desenvolvimento para novos produtos e que tendências de mercado, referentes ao consumo de produtos, podem também ser condicionadores de resultados financeiros nas empresas, resultando no efeito capitalista.

Neste ponto, é tendenciosa a ideia e comportamento da ganância, que se não observada com atenção, pode gerar a destruição do bem-estar de uma comunidade. “Cada ser humano único é uma complicada colcha de retalhos, de constante mudança de atributos pessoais e também de relações” (HARRÉ, 1998).

No que diz respeito a este trabalho de pesquisa, o estudo de controle caótico, pode contribuir aumentando o conforto do ser humano, considerando que sistemas de segurança possam ser melhorados, uma vez que sejam identificados os fenômenos de instabilidade e, até mesmo, o surgimento de um comportamento caótico. Uma das abordagens no estudo deste trabalho atende, também, às condições de conforto e bem-estar do ser humano, cujas considerações, se adotadas, podem ser utilizadas na segurança de produtos como máquinas, equipamentos, automóveis, entre outros sistemas rotativos, pois é possível identificar a estabilidade e caos do sistema dinâmico e, assim, controlar este estado.

As maiorias dos trabalhos pesquisados na área de rotor dinâmico mostraram intensas e aprofundadas estudo, para analisar o comportamento do rotor dinâmico e, durante a análise destas pesquisas, observou-se que foram utilizados diferentes métodos, para se explicar e solucionar os fenômenos do rotor dinâmico. Podem-se citar alguns, como a teoria de Lagrange, o método de Taylor, transformadas de Laplace, teoria de elementos finitos, entre outros.

Este trabalho, se comparado com os autores pesquisados, utiliza os critérios do rotor dinâmico, direcionando-o para o tratamento da estabilidade, introduzindo o desenvolvimento de um projeto de controle linear ótimo, sendo que os efeitos de deslocamento lateral e angular são analisados e criterizados pelo método de estabilidade de Lyapunov.

O resultado final deste trabalho mostra que o projeto de controle linear ótimo foi efetivo, controlando o estado caótico e minimizando-o para a condição de estabilidade do sistema. Com isso, o método de controle de estabilidade e detecção de comportamento de estabilidade para sistemas rotativos, pode ser aplicado em equipamentos que atuem na análise de falhas, contribuindo para a prevenção da

manutenção e, também, em equipamentos de segurança. A aplicação deste conceito de controle pode ser efetivo em equipamentos de análise de tempo real e, até mesmo, em equipamentos que detectam problemas específicos, como o desalinhamento do eixo, as falhas em rolamentos, entre outros.

## **2 SISTEMAS DINÂMICOS**

Nesta sessão são comentados os conceitos de sistemas dinâmicos lineares e não lineares, envolvendo soluções matemáticas das equações diferenciais e até mesmo a análise do comportamento da estabilidade, oriundo dos resultados dos autovalores de uma matriz jacobiana.

### **2.1 Introdução**

Um sistema, do ponto de vista físico, pode ser entendido como um conjunto de componentes interconectados que apresentam determinadas relações de causa-efeito, atuando como um todo para atender a um determinado objetivo. Esse sistema pode ser encontrado em um estado estático ou dinâmico, no caso estático as propriedades descritivas não variam com o tempo, enquanto que no caso dinâmico essas propriedades variam com o tempo.

A variação do espaço pode ocorrer em ambos os casos estático e dinâmico. Analisando esta definição de sistema, pode-se perceber que existem sistemas de naturezas diferentes, como sistema ecológico, econômico, de informação, de comunicação, entre outros. Assim, o sistema dinâmico estudado neste trabalho de pesquisa tem relação direta com um sistema mecânico e pode ser dito que é composto de uma massa qualquer e, provavelmente, contém energia cinética e potencial gravitacional, elástica, entre outros tipos.

A análise dinâmica deste sistema físico pode ser entendida como o estudo da relação causa-efeito, ou seja, desde que o sistema sofra uma excitação, o processo resultante desta excitação é demonstrado no comportamento da massa e pode ser chamado de resposta à excitação. Esses sistemas podem variar ou não no tempo e, quando são escritos matematicamente, o sistema invariante no tempo é aquele em que o coeficiente é constante, enquanto que o sistema variante no tempo tem o coeficiente também variante no tempo.

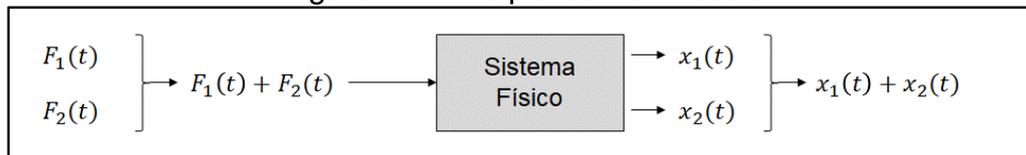
### **2.2 Conceito de Sistemas Dinâmicos Lineares e Não Lineares**

Um sistema dinâmico, para a engenharia, pode ser definido como a ação conjunta da combinação de diferentes elementos, com o objetivo de executar tarefas

específicas (DAVIES; SCHIMITZ, 2015). Um sistema dinâmico pode ser modelado através de equações matemáticas, geralmente através de equações diferenciais parciais lineares e não lineares, cuja condição depende exclusivamente das condições iniciais e do modelo qualitativo em estudo.

Monteiro (2011) define que para sistemas lineares são válidos os princípios da aditividade e o princípio da proporcionalidade entre a excitação e a resposta ou princípio da homogeneidade. O princípio de aditividade pode ser entendido como a entrada para uma força qualquer tem uma resposta qualquer, para outra força qualquer tem uma resposta qualquer e, assim, a entrada do sistema é a soma dessas forças e a saída será a soma dessas respostas e de constantes iguais ( $c_1 = c_2$ ), a figura 1 mostra esta condição.

Figura 1– Princípio de Aditividade



Fonte: Adaptada Monteiro (2011)

Para o princípio da proporcionalidade, a excitação corresponde à resposta, se introduzida uma constante qualquer na entrada conjuntamente com forças quaisquer, a saída será a soma das respostas conjuntamente com essas constantes quaisquer, a figura 2 mostra esta condição.

Figura 2– Princípio da Proporcionalidade



Fonte: Adaptada Monteiro (2011)

Estes dois princípios combinados podem ser chamados de princípio de superposição de efeitos, ou seja, para um sistema linear respostas de diferentes excitações podem ser obtidas separadamente e depois combinadas linearmente.

O modelo qualitativo a ser analisado em um estudo qualquer pode ter parâmetros fixos ou variáveis no tempo. Para um parâmetro fixo o coeficiente é constante, fazendo com que o tempo apareça na função de entrada e, em um

modelo com parâmetros variáveis no tempo um ou mais coeficientes são funções explícitas no tempo, caracterizando assim o conceito de funções lineares e não lineares. “Em um sistema físico real não existe parâmetro constante” (MONTEIRO, 2011). Portanto, resumindo os sistemas dinâmicos não lineares, que pode ser entendido como um sistema que não tem comportamento linear e não pode ser pré-determinado devido a aleatoriedade das variáveis, ou seja, o sistema evolui com o tempo com um comportamento desequilibrado e aperiódico, cujo futuro depende das condições iniciais (FERRARA; PRADO, 1994; SMITH, 2007). Portanto os modelos qualitativos com um sistema linear, pode ser considerado como o resultado da transformação de um sistema não linear, utilizando técnicas matemáticas de aproximação de resultados.

## **2.3 Equações Diferenciais**

### *2.3.1 Introdução*

Nesta sessão, são vistos apenas os conceitos principais da teoria, que envolvem as equações diferenciais, onde são descritas as técnicas de resolução de uma equação diferencial, ou a aproximação dos resultados das funções de aproximação. Esta condição é necessária, pois o conteúdo e aplicação das equações diferenciais ordinárias e parciais são extensas e, para os fins deste trabalho, a aplicação das técnicas, que envolvem a transformação de uma equação não linear em linear, são direcionadas à aplicação de um rotor dinâmico. Portanto, são suficientes, até então, a aplicação dos conceitos que envolvem os problemas de região de contorno e valores iniciais, a aplicação do teorema de Laplace e o teorema que envolve a solução de aproximação dos pontos nodais utilizando o método de Galerkin.

### *2.3.2 Conceito de equações diferenciais*

As equações matemáticas dos problemas de engenharia e da ciência, são compostas de equações que envolvem derivadas de uma ou mais funções desconhecidas, são chamadas de equações diferenciais. A equação diferencial pode ser classificada como uma equação diferencial ordinária ou *ordinary differential*

equation ODE, se contém derivadas ordinárias com uma única variável independente e, também, pode ser classificada como uma equação diferencial parcial ou *partial differential equation* PDE, se contém partes derivativas de duas ou mais variáveis dependentes (GREENBERG, 1998).

Olver (2014) define que uma equação diferencial é composta por uma única ou diferentes variáveis, como exemplo,  $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$ ;  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u$ . A equação  $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$  é uma equação diferencial para a função  $x(t)$ , com uma única variável  $t$ . Já a equação  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u$  é uma equação diferencial que envolve uma função  $u(t, x, y)$ , com três variáveis  $t, x$  e  $y$ . Ang e Park (2008), explicam que uma equação ODE é composta de ordens, cuja correspondência é o mais alto grau de derivada existente em uma equação diferencial, matematicamente esta condição pode ser escrita como,  $f(x, u(x), \dot{u}(x), \ddot{u}(x), \dots, u^n(x)) = 0$ . Esta equação, é dita como uma equação diferencial de ordem  $n$  quando  $u(x)$  é desconhecida. Assim, podem ser citados alguns exemplos de diferentes ordens das equações diferenciais, como,  $\frac{dx}{dt} = cx$  é de primeira ordem,  $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$  é de segunda ordem,  $EI \cdot \frac{d^4y}{dx^4} = -\omega(x)$  é de quarta ordem, entre outros.

É comum trabalhar com notações  $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ ;  $y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$ ;  $y'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$ ; enfim,  $y^n(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$ . Para  $n = 1, 2, 3, \dots, n$ ., de uma forma geral, o método para se resolver uma equação diferencial ordinária é a integração, considerando o grau da ordem da derivada envolvida. Contudo nesta integração também aparecerão constantes, cuja quantidade varia de acordo com o grau da ordem da derivada. Se algumas ou todas as constantes arbitrárias na solução geral de uma equação diferencial ordinária tem valores específicos, esta condição pode ser chamada de solução particular, afirma (ANG; PARK, 2008; GREENBERG, 1998). Assim, Betounes (2010) afirma que qualquer sistema de ordem superior de equações diferenciais pode ser reduzido a um sistema de primeira ordem, utilizando determinadas técnicas matemáticas.

Olver (2014) e Greenberg (1998), explicam que a solução para uma equação diferencial ordinária em dinâmica é única, pela imposição das condições iniciais, resultando em um problema de valor inicial. Por outro lado, as equações que

modelam os fenômenos de equilíbrio requerem condições de limite (região de contorno), para especificar soluções únicas, resultando nos problemas de valores de contorno. Existem três tipos de problemas de valor de contorno que podem ser utilizados em diversas aplicações:

- Especificando os valores da solução ao longo do domínio de contorno, chamado de condição de limite de Dirichlet;
- Especificando a derivada normal da solução ao longo dos resultados no contorno, chamada de condição de limite de Neumann;
- Prescrevendo a função ao longo de uma parte do contorno e a derivada normal ao longo dos resultados remanescentes da mistura dos problemas de valores de contorno.

Um aspecto importante é o tratamento da análise dimensional, cujas dimensões de todos os termos de uma expressão, equação ou fórmula física devem ser idênticas, e pode ser feito utilizando o conceito de uma equação diferencial homogênea. O conceito de uma equação diferencial homogênea se dá quando ocorre a soma dos termos e suas variáveis dependentes, ou seja, ocorrendo alguma mudança nas variáveis, o resultado desta mudança é outra função proporcional à função original (OLVER, 2014; GREENBERG, 1998).

Ang e Park (2008) definem que o método numérico é utilizado quando uma equação diferencial ordinária não pode ser resolvida de maneira exata, considerada método analítico, portanto, o resultado do método numérico refere-se a um valor aproximado de soluções das equações diferenciais ordinárias.

### 2.3.3 *Equação diferencial ordinária de primeira ordem – Solução por separação de variáveis*

Ang e Park (2008) consideram o caso em que uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, pode ser escrita como,

$$\frac{dy}{dx} = P(x). Q(y) \quad (1)$$

Este tipo de equação é dita estar com variáveis separadas, sendo  $P(x)$  e  $Q(y)$  funções conhecidas. Portanto, esta equação, pode ser escrita como,  $\frac{1}{Q(y)} \cdot \frac{dy}{dx} =$

$P(x)$ . Integrando o lado esquerdo e direito desta equação, ou seja, encontrando as primitivas, teremos,

$$\int \frac{1}{Q(y)} \cdot \frac{dy}{dx} dx = \int P(x) dx \quad (3)$$

esta equação é reescrita de maneira que o lado esquerdo contenha a variável  $y$  e o lado direito contenha a variável  $x$ . Esta solução é considerada a solução da equação  $\frac{dy}{dx} = P(x) \cdot Q(y)$  pelo método de separação de variáveis, assim,

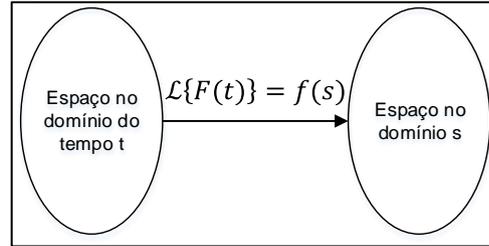
$$\int \frac{1}{Q(y)} dy = \int P(x) dx. \quad (4)$$

Ang e Park (2008) comentam que uma solução da equação homogênea pode ser encontrada utilizando o método separação de variáveis. Uma solução homogênea é caracterizada de maneira que uma função qualquer  $r(x) \equiv 0$  no intervalo de interesse. Já, uma solução da equação não homogênea pode ser encontrada utilizando o método de variação de parâmetros ou método de Lagrange. Uma solução da equação não homogênea é caracterizada de maneira que uma função qualquer  $r(x)$ , na região limite ou intervalo de interesse, tenha variáveis  $x$  diferente de zero.

#### 2.3.4 Transformada de Laplace

Nos sistemas dinâmicos, entende-se que as funções estão no domínio do tempo, escritas matematicamente como  $f(t)$ , aplicando a transformada de Laplace neste domínio com as funções do tempo, este domínio se torna um domínio Laplaciano, cuja variável é independente do tempo. Esta nova função no domínio laplaciano, considerada função apropriada, é uma integral imprópria de tamanho infinito (DYKE, 2004; DAVIES; SCHIMITZ, 2015). A figura 3 mostra a visão geral do domínio do tempo, do domínio Laplaciano, e a função Laplaciana.

Figura 3– Transformada de Laplace



Fonte: Adaptado de Dyke (2004, p.2).

A equação que descreve a transformada de Laplace é,

$$F(s) = \int_0^{\infty} F(t) e^{-st} dt. \quad (5)$$

sendo  $F(s)$  é a função no domínio de Laplace,  $F(t)$  é a função no domínio do tempo, e  $e^{-st}$  é um valor complexo real que identifica a imagem do espaço no tempo no domínio laplaciano  $s$ , sendo que a parte real é atribuída ao comportamento físico e a parte imaginária é atribuída à parte da frequência de oscilação. Assim o intervalo de 0 a  $t_0$ , condição inicial  $t_0$ , pode ser particionado até um número finito com diferentes subintervalos no tempo, formando assim a imagem no domínio laplaciano sempre na condição inicial de um sistema dinâmico (DYKE, 2004; DAVIES; SCHIMITZ, 2015).

Pelo teorema de Laplace para determinação de derivadas, tem-se,

$$F(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot F(t) dt \quad (6)$$

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot F(t) dt \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{ds} e^{-st} \cdot F(t) dt \quad (8)$$

desde que  $\frac{d}{ds} e^{-st} = -\frac{s}{e^{st}} = -s \cdot e^{-st}$ , assim,

$$\int_0^{\infty} -t \cdot e^{-st} \cdot F(t) dt \quad (9)$$

$$- \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot t \cdot F(t) dt. \quad (10)$$

Portanto,

$$\frac{dF(s)}{ds} = -\mathcal{L}\{t \cdot F(t)\} = - \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot t \cdot F(t) dt \quad (11)$$

a derivada de segunda ordem, pode ser resolvida como,

$$\frac{d}{ds} \cdot \left[ \frac{dF(s)}{ds} \right] = \frac{d}{ds} \cdot -\mathcal{L}\{t \cdot F(t)\} = \mathcal{L}\{t^2 \cdot F(t)\} \quad (12)$$

a derivada de terceira ordem, pode ser escrita como,

$$\frac{d}{ds} \cdot \left[ \frac{d^2 F(s)}{ds^2} \right] = \frac{d}{ds} \cdot \mathcal{L}\{t^2 \cdot F(t)\} = -\mathcal{L}\{t^3 \cdot F(t)\} \quad (13)$$

portanto o teorema geral para as derivadas de Laplace pode ser escrito como,

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} = -1^n \cdot \mathcal{L}\{t^n \cdot F(t)\} \quad (14)$$

Considerando que as deduções matemáticas do teorema de Laplace não são o objeto de estudo, introduz-se a tabela 1, já contendo as relações das funções no tempo com as respectivas considerações no domínio Laplaciano. Com isso, as informações do tratamento ou transformação para o domínio de Laplace se torna de melhor aplicação. A tabela 1 mostra os resultados das transformadas de Laplace para uso em diferentes aplicações.

Tabela 1– Transformada de Laplace

$F(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$
1	$\frac{1}{s}, s > 0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0$
$t^n, \text{ para } n \in \mathbb{Z}^+$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$
$f'(t)$	$s.F(s) - f(0)$
$t \cdot \cos at$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}, s > 0$
$\text{sen } at - at \cdot \cos at$	$\frac{2 \cdot a^3}{(s^2 + a^2)^2}, s > 0$
$u_a(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$	$\frac{e^{-as}}{s}, s > 0$
$f(t)\delta(t - t_0)(s)$	$e^{-t_0 s} f(t_0), s > 0$
$e^{at}$	$\frac{1}{s - a}, s > a$
$\text{sen } at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$
$e^{at} f(t)$	$F(s - a)$
$\ddot{f}(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$
$t \cdot \text{sen } at$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}, s > 0$
$\delta(t - t_0)(s)$	$e^{-t_0 s}, s > 0$
$u_a(t)f(t - a)$	$e^{-as} F(s)$
$\int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau$	$F(s)G(s)$

Fonte: Adaptada de Davies e Schimitz (2015)

## 2.4 Análise de Sistemas Dinâmicos Não Lineares

Nesta sessão serão vistos os conceitos teóricos e o teorema que se aplica à análise de um sistema não linear.

### 2.4.1 Introdução à Análise de Sistemas Não Lineares

Savi (2006) comenta que “a natureza é repleta de não linearidades que são responsáveis pela diversidade de comportamentos dos sistemas naturais”, e que existem ritmos regulares e irregulares (caóticos) que podem estar associados a comportamentos normais e patológicos. O comentário de Savi (2006) mostra que o foco dos estudos, de uma maneira geral, deve ser direcionado às não linearidades, cuja motivação intrínseca é a adversidade às ideias e consideração de aplicação de um sistema dinâmico.

Na análise de sistemas dinâmicos não lineares, comentado através de uma visão global e bem generalista, são estudados os resultados matemáticos aproximados de um ponto de equilíbrio estável e instável e considerando que este resultado seja a melhor aproximação de uma interpolação algébrica, oriunda da transformação de uma equação não linear. Ainda, em um sistema linear com equações lineares ou transformadas em lineares, é possível se chegar ao resultado por uma solução homogênea. As condições das estabilidades estável e instável dependem diretamente das condições iniciais.

A princípio, nesta sessão, serão considerados os métodos indiretos, com o teorema para solução geral e a sua análise dos resultados, assintóticos ou não; em seguida, serão considerados os métodos diretos, que não necessitam de cálculos matemáticos aplicados na solução geral do sistema linear, cujos resultados são também assintóticos ou não.

#### 2.4.2 Espaço de Fases ou Espaço de Estados

Ogata (2004) define o estado, as variáveis de estado, e o vetor de estado para um sistema dinâmico:

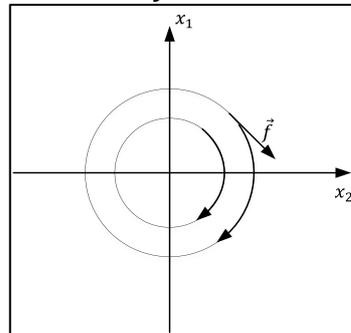
- O estado é o menor conjunto de variáveis quando em um instante qualquer  $t = t_0$ , se conhecida entrada quando  $t \geq t_0$ , então é possível se determinar o comportamento do sistema para qualquer tempo  $t \geq t_0$ .
- As variáveis de estado são variáveis que constituem um menor conjunto de variáveis que determina um estado dinâmico.
- O vetor de estado determina o estado de um sistema  $x(t)$  para qualquer  $t \geq t_0$ , se  $t = t_0$  for determinado na entrada então  $u(t)$  é especificado para  $t \geq t_0$ .

O espaço de fases ou estados pode ser definido como um espaço abstrato no qual se realiza o estudo qualitativo de um sistema dinâmico, ele é composto de  $n$ -dimensões, com eixos variando de *eixo* –  $x_1 \dots x_n$ , e para cada estado é apresentado um ponto de coordenadas  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  neste espaço (LUENBERG, 1979; OGATA, 2004). Considerando a evolução do sistema, esta evolução temporal pode ser representada por uma equação diferencial de primeira ordem, como,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t) \quad (15)$$

Portanto sabe-se que a velocidade vetorial  $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t)$ . As dimensões do espaço de fase equivalem ao número de equações de primeira ordem que descrevem o sistema que é igual ao número de variáveis de estado. O retrato de fases é o conjunto de curvas obtidas da revolução temporal do sistema a partir das condições iniciais, cujas funções  $\vec{f}$  são definidas. A figura 4 mostra a aplicação do retrato de fases das respectivas derivadas  $\frac{dx_1}{dt} = x_2$  e  $\frac{dx_2}{dt} = -x_1$ , e a velocidade  $\vec{v} = \vec{f}(f_1, f_2)$  tangente a trajetória (MONTEIRO, 2011).

Figura 4- Retrato de fases da relação entre a velocidade e as trajetórias.

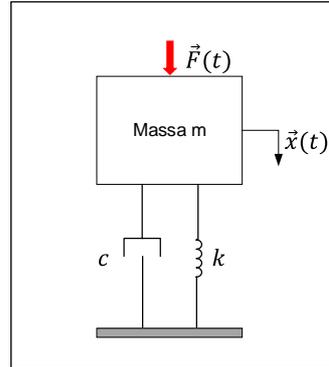


Fonte: Adaptado de Monteiro (2011, p. 67).

Assim, entende-se que a solução  $\vec{x}(t)$  para um sistema  $\frac{d\vec{x}}{dt}$  é correspondente a um caminho, cuja trajetória no espaço de fases percorrida com velocidade  $\vec{v}$ , coincide em cada ponto com o campo de velocidades  $\vec{f}(\vec{x}, t)$ .

Para um esclarecimento melhor do uso da técnica do espaço de estado, foi desenvolvido um modelo de aplicação por OGATA (2004). Considerando um sistema mecânico qualquer, como na figura 5, o deslocamento da massa é a saída do sistema e a força  $\vec{F}(t)$  é a entrada do sistema, cujo deslocamento  $\vec{x}(t)$  é medido da posição de equilíbrio até o deslocamento máximo da força aplicada.

Figura 5– Modelo de um sistema mecânico com um grau de liberdade



Fonte: Desenvolvimento Próprio

Deste modelo, a equação do movimento é descrita como,  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \vec{F}(t)$ , sendo  $m$  a massa do corpo,  $c$  o amortecimento,  $k$  a rigidez,  $\vec{x}(t)$  o deslocamento,  $\ddot{x} = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2}$  a segunda derivada de  $\vec{x}(t)$ , e  $\dot{x} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$  a primeira derivada de  $\vec{x}(t)$ . Sendo um sistema de segunda ordem, de duas integrações, portanto, são necessárias duas variáveis de estado que descrevem o sistema dinâmico, sendo  $x(0)$  e  $\dot{x}(0)$ , e uma função  $u(t) \geq 0$  que determina o comportamento do sistema quando  $t \geq 0$ , assim, escolhe-se  $x(t)$  e  $\dot{x}(t)$  como as variáveis de estado, assim,

$$y_1 = x \quad (16)$$

$$y_2 = \dot{x} \quad (17)$$

Então obtemos,

$$\dot{y}_1 = y_2 \quad (18)$$

$$\dot{y}_2 = \ddot{x} = \frac{1}{m}(-kx - c\dot{x}) + \frac{1}{m}\vec{F}(t) \quad (19)$$

Substituindo os termos e reescrevendo-a,

$$\dot{y}_2 = \ddot{x} = -\frac{k}{m} \cdot y_1 - \frac{c}{m} \cdot y_2 + \frac{1}{m}\vec{F}(t) \quad (20)$$

A saída da equação é

$$x = y_1 \quad (21)$$

A forma matricial é

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot \vec{F}(t) \quad (22)$$

A saída é

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

#### 2.4.3 *Análise gráfica do espaço de fase*

Savi (2006) define que a partir de um método numérico é possível avaliar a evolução do sistema dinâmico ao longo do tempo e, assim, quatro tipos de análise podem ser aplicadas, são elas,

- Trajetória: é o percurso da solução de uma função  $f(x_0, t_0)$  percorre no espaço de fase;
- Curva integral: é a solução de uma função  $f(x_0, t_0)$  que evolui no tempo;
- Órbita: dada as condições iniciais  $x_0, t_0$ , é o lugar geométrico no espaço de fase, por onde a solução de uma função  $f(x_0, t_0)$  passa na medida em que o tempo evolui;
- Fluxo ou retrato de fases: é a totalidade das orbitas representando todas as soluções possíveis de uma função  $f(x_0, t_0)$ .

#### 2.4.4 *Estabilidade Linear*

Na visão de Monteiro (2011) e Ferrara e Prado (1994) a palavra estabilidade é utilizada para caracterizar tanto uma solução estacionária ou ponto fixo, quanto uma solução de estabilidade estrutural de um sistema. Já Luenberg (1979) define a estabilidade para um sistema dinâmico, a partir de um ponto fixo, e só pode estar estável quando o vetor de estado está a uma distância pequena e tende a voltar para o mesmo local, ou não tende a se movimentar para longe deste mesmo ponto. Ferrara e Prado (1994) afirmam que a estabilidade pode ser caracterizada de duas

maneiras, a primeira, como estabilidade de uma solução estacionária ou ponto fixo, e a segunda, como estabilidade estrutural.

A primeira definição, estabilidade de uma solução estacionária, pode ser escrita matematicamente como,  $P^* = (x^*, y^*)$ . Sendo  $P^*$  o ponto fixo em um espaço de fase, localizado nas coordenadas dadas por  $(x^*, y^*)$ , o qual  $(x^*, y^*)$  é assintoticamente estável se a resposta do sistema a uma pequena perturbação aproxima-se de  $(x^*, y^*)$  quando o tempo tende ao infinito, cuja condição é considerada um sistema atrator. Ainda, no conceito de estabilidade de uma solução estacionária, o conceito de Lyapunov é mostrado, considerando a estabilidade estável ou estabilidade instável. O conceito de estabilidade estável ocorre quando a resposta do sistema, dada uma pequena perturbação, permanece pequena quando o tempo tende ao infinito. O conceito de estabilidade instável ocorre quando a resposta do sistema, dada a uma perturbação, cresce quando o tempo tende ao infinito, cuja condição é considerada um sistema repulsor ou fonte. Observa-se que o conceito de estabilidade de uma solução estacionária assintótica no conceito de Lyapunov (estável e instável) está ligado às condições iniciais de perturbação.

Na estabilidade estrutural são estudados os comportamentos de estabilidade e instabilidade em um fluxo, cuja perturbação inicial, dada por uma equação diferencial, é analisada no retrato de fases. A estabilidade estrutural estável ocorre quando a perturbação inicial na equação diferencial é pequena e o fluxo resultante das derivadas desta equação diferencial perturbada equivale à equação diferencial sem perturbação, ou seja, se os campos vetoriais estão suficientemente próximos, os resultados no retrato de fases devem ser equivalentes. Utiliza-se o termo robustez para esta condição, pois as características qualitativas se mantêm preservadas com esta equivalência dinâmica durante o fluxo. A estabilidade estrutural instável ocorre quando uma perturbação inicial altera as características qualitativas da equação diferencial, cuja instabilidade ocorre em todos os pontos de equilíbrio no fluxo.

#### 2.4.4.1 *Solução geral para estabilidade linear*

Após os conceitos de estabilidade estacionária assintótica, estabilidade estacionária por Lyapunov (estável e instável) e estabilidade estrutural, serem definidos, é importante introduzir os modelos matemáticos analíticos para a análise

de estabilidade. A seguir é definido o modelo matemático ou solução geral da estabilidade linear de duas dimensões. Luenberg (1979), Monteiro (2011), e Ferrara e Prado (1994) define que para um sistema linear,

$$\dot{x} = ax + by = f(x, y) \quad (24)$$

$$\dot{y} = cx + dy = g(x, y) \quad (25)$$

e o ponto de equilíbrio para  $(x^*, y^*) = (0,0)$ , a solução geral pode ser escrita como,

$$x(t) = e^{\lambda t} x_0 \quad (26)$$

$$y(t) = e^{\lambda t} y_0 \quad (27)$$

A solução trivial ou sistema homogêneo, para o sistema então é escrita como,

$$(a - \lambda)x_0 + by_0 = 0 \quad (28)$$

$$cx_0 + (d - \lambda)y_0 = 0 \quad (29)$$

Para que o sistema seja não trivial ou não homogêneo, é necessário trabalhar matematicamente de maneira que a determinante da matriz dos coeficientes seja igual a zero, portanto,

$$\det \begin{bmatrix} (a - \lambda) & b \\ c & (d - \lambda) \end{bmatrix} = 0 \quad (30)$$

O resultado do cálculo da determinante da matriz, é considerada como uma matriz Jacobiana e é escrita como,

$$\lambda^2 + ad - bc - a\lambda - d\lambda = 0 \quad (31)$$

Assim, substituindo os coeficientes  $\Delta = ad - bc$  e  $T = a + d$ , teremos

$$\lambda^2 - T\lambda + \Delta = 0 \quad (32)$$

Suas raízes são,

$$\lambda_{1,2} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4\Delta}}{2} \quad (33)$$

As raízes  $\lambda_{1,2}$  determinam a estabilidade do ponto de equilíbrio. No caso geral, de  $n$  dimensões, o  $\lambda_i$  são os autovalores, compostos por parte real e imaginária  $\lambda = Re(\lambda) + i.Im(\lambda)$ , portanto,

$$\vec{x}(t) = e^{Re(\lambda)t} \cdot e^{i.Im(\lambda)t} \cdot x_0 \quad (34)$$

Para  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , e  $\lambda_i$ , sendo  $i = 1, 2$ , o par  $(x_{0i}, y_{0i})$ . A solução geral para as derivadas  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$ , podem ser escritas matematicamente como,

$$\vec{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} x_{01} \\ y_{01} \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda_1 t} + k_2 \begin{bmatrix} x_{02} \\ y_{02} \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda_2 t} \quad (35)$$

Sendo  $k_1$  e  $k_2$  os valores a serem determinados pela condição inicial do sistema.

#### 2.4.4.2 *Análise generalizada da solução geral para um sistema linear*

Os parâmetros para análise da estabilidade, comentado por Ferrara e Prado (1994), dependem exclusivamente do valor real dado por  $Re(\lambda)$ , portanto para as condições:

##### Parâmetro de análise para uma solução estacionaria assintótica

- Ponto de equilíbrio estável – se  $Re(\lambda) < 0$  e  $\vec{x}(t)$  tende a zero quando o tempo tende a infinito, portanto  $\vec{x}(t)$  tende a  $P^* = (0,0)$ ;
- Ponto de equilíbrio instável - se  $Re(\lambda) > 0$  e  $\vec{x}(t)$  tende a infinito, quando o tempo tende a infinito, portanto  $\vec{x}(t)$  se afasta de  $P^* = (0,0)$ ;

##### Parâmetro de análise por Lyapunov dado a resposta pelo resultado do autovalor de $\lambda_i$

- Equilíbrio hiperbólico ou não degenerado – se  $Re(\lambda_i) \neq 0$ ;

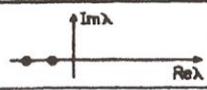
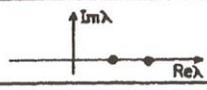
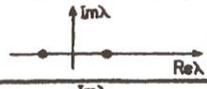
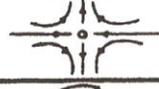
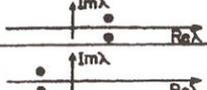
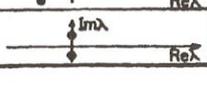
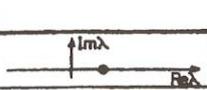
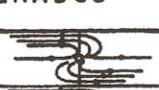
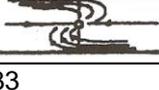
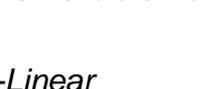
- Estabilidade assintótica – se  $Re(\lambda_i) < 0$ ;
- Instabilidade assintótica – se  $Re(\lambda_i) > 0$

Parâmetro de análise de um ponto estável, mas não assintoticamente estável

- Equilíbrio não hiperbólico, elíptico ou degenerado – se  $Re(\lambda_i) = 0$  e  $\vec{x}(t)$  está estável para o tempo tendendo a infinito, portanto  $\vec{x}(t)$  não se afastam e nem tendem a se aproximar de  $P^* = (0,0)$ , permanecendo na vizinhança.

A figura 6 mostra um breve resumo dos diferentes parâmetros de análise para os pontos fixos ou nodais em duas dimensões.

Figura 6– Quadro resumo de estabilidade nodal

Autovalores	Sinal da parte real	Representação no plano complexo	Ponto fixo	Exemplo	Estabilidade
$\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ $\lambda_1, \lambda_2 < 0$		nó (hiperbólico)		assintoticamente estável
	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ $\lambda_1, \lambda_2 > 0$		nó (hiperbólico)		instável
	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$		sela (hiperbólico)		instável
$\lambda_1 = \lambda_2^*$ (complexos conjugados)	positiva		foco (hiperbólico)		instável
	negativa		foco (hiperbólico)		assintoticamente estável
	nula		centro (elíptico) CASO DEGENERADO		estável (não assintoticamente)
$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$	nula	CASOS DEGENERADOS (elípticos)			
$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \in \mathbb{R}$	positiva		"inflected node" (hiperbólico)		instável
	negativa		"inflected node" (hiperbólico)		assintoticamente estável

Fonte: Ferrara e Prado (1994), página 33

#### 2.4.5 Estabilidade Não-Linear

A princípio a metodologia para se solucionar matematicamente um sistema linear é simples, pois como visto na sessão estabilidade linear, resolvendo a matriz jacobiana e o polinômio envolvido, através dos valores dos autovalores é possível classificar o estado de estabilidade do sistema. Nesta sessão serão vistos os

métodos para a solução de um sistema não linear, o método direto e indireto de Lyapunov.

Faleiros e Yoneyama (2002) afirmam que a solução, dado um sistema não linear, em geral, requer uma metodologia específica que melhor se adeque ao problema apresentado, cuja solução fechada nem sempre é possível de se obter. Neste caso é possível utilizar soluções aproximadas, gráficas, numéricas, transformações, e limitar-se a dedução de algumas propriedades desde que indicadas. Assim, as técnicas de linearização apresentadas neste trabalho de pesquisa, podem ser vistas na sessão que trata equações diferenciais.

“A estabilidade de uma solução de equilíbrio não pode ser determinada examinando os autovalores da matriz jacobiana do sistema associado, quando um de seus autovalores seja nulo”, definição do teorema Hartman-Grobman, (MONTEIRO, 2011). Portanto os métodos que necessitam de linearização são considerados métodos indiretos e os que não necessitam de linearização, como o método direto de Lyapunov.

#### 2.4.5.1 Método indireto de estabilidade não linear – linearização série de Taylor

Um método muito utilizado é o método de Taylor, cujo valor inicial não linear, especificadas as condições iniciais do ponto nodal em  $x_0$ , pode ser aproximada por uma série de Taylor em torno do ponto nodal. No caso específico, a série de Taylor também é chamada de linearização por truncamento de representação em série (ZILL, 2011; FALEIROS; YONEYAMA, 2002). Matematicamente esta condição pode ser escrita adotando a condição de um sistema qualquer,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (36)$$

sendo  $a$  a constante e  $x$  as variáveis da função polinomial a serem encontradas, assim, escreve-se a equação como,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \quad (37)$$

Quando  $x = 0$  equivale a condição de Maclaurin, então  $f(x) = ao\ 1^\circ\ termo$ , logo,  $f(0) = a_0$ , assim a primeira derivada de  $f(x)$  é,  $\frac{df(x)}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}$ , se  $x = 0$ , então  $f(x) = ao\ 1^\circ\ termo$ , logo,  $\frac{df(0)}{dx} = a_1$ , assim a segunda derivada de  $f(x)$  é,  $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 2a_2 + 3.2.a_3x + 4.3a_4x^2 + \dots + n.(n-1)a_nx^{n-2}$ .

Portanto deduz-se que,

$$f^n(0) = n!.a_n \quad (38)$$

Trabalhando matematicamente e isolando o coeficiente  $a_n$ , tem-se a equação,

$$a_n = \frac{f^n(0)}{n!} \quad (39)$$

Introduzindo o termo do lado direito da equação  $a_n$ , em  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ , teremos,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{f^n(0)}{n!} \right] x^n \quad (40)$$

Esta equação é a expansão da série de Taylor de uma função  $f(x)$  em torno de  $x = 0$ . Nesta condição teremos um número finito de derivadas em torno de  $x_0$  e a função pode ser derivada infinitamente para  $x_0$ . Em resumo a função analítica converge em um ponto qualquer para  $x_0$ .

#### 2.4.5.2 Método indireto de estabilidade não linear – teoria da variedade central

Este método, a teoria da variedade central ou *center manifold theory*, transforma um sistema não linear em linear, quando as técnicas usuais de linearização não têm resultados suficientes e reais (FERRARA; PRADO, 1994). O teorema da variedade central se inicia a partir dos teoremas de Hartman-Grobman e do teorema de variedades hiperbólicas, e partem do princípio de um sistema não linear, cujo ponto em estudo é um ponto de equilíbrio linear de uma matriz jacobiana.

Portanto, antes de definir a teoria da variedade central, serão conceituados os dois teoremas citados anteriormente.

Ferrara e Prado (1994), Faleiros e Yoneyama (2002), Monteiro (2011) definem o teorema da variedade hiperbólica, dizendo que calculada a matriz jacobiana de um ponto de equilíbrio, os autovalores,  $\sigma$ , correspondentes a essa matriz podem ser separados em três grupos, e podem ser representados matematicamente como:

$$\begin{aligned}\lambda \in \sigma_i, & \quad \text{se } Re(\lambda) > 0; \\ \lambda \in \sigma_e, & \quad \text{se } Re(\lambda) < 0; \\ \lambda \in \sigma_c, & \quad \text{se } Re(\lambda) = 0\end{aligned}$$

Sendo,  $\sigma_i$  um subespaço instável  $E^i$  com variável instável  $W^i$ ,  $\sigma_e$  um subespaço estável  $E^e$  com variável estável  $W^e$ , e  $\sigma_c$  um subespaço central  $E^c$  e com variável central  $W^c$ . Portanto, os autovalores com a parte real gerados  $r_n = r_i + r_e + r_c$ , respectivamente, pertencem a subespaços distintos de uma mesma dimensão. Admite-se que todos os autovalores gerados nos subespaços,  $\sigma_i, \sigma_e, e \sigma_c$ , são tangentes no equilíbrio hiperbólico  $x_0$ , invariantes locais, e  $r$  vezes diferenciáveis. Assim, soluções com condições iniciais em  $E^i$  se afastam de  $P^* = (0,0)$  com o tempo tendendo ao infinito, e soluções com condições iniciais em  $E^e$  se aproximam de  $P^* = (0,0)$  com o tempo tendendo a infinito. Sendo  $E^i$  e  $E^e$  condições únicas, enquanto que  $E^c$  não tem essa necessidade. Segundo Monteiro (2011), o teorema de Hartman-Grobman diz que “a estabilidade de uma solução de equilíbrio não pode ser determinada examinando os autovalores da matriz jacobiana do sistema associado, quando um de seus autovalores seja nulo”.

Perozzi e Ferraz-Mello (2010), Monteiro (2011) e Ferrara e Prado (1994) definem a teoria de variedade central ou *center manifold theory*, seja  $J$  o jacobiano de  $f$ , decomposto no espectro de  $J$  em três partes,

- $\sigma_e$  é composto por autovalores com a parte real negativa,
- $\sigma_c$  é composto por autovalores com a parte real nula (zero),
- $\sigma_i$  é composto por autovalores com a parte real positiva,

Seja  $E^e, E^c, E^i$  os autovetores associados a  $\sigma_e, \sigma_c, \sigma_i$ , respectivamente. Portanto, existe estabilidade, instabilidade e centro variáveis tangentes a  $E^e, E^c, E^i$

respectivamente na origem. A variedade central é invariante e toda a solução na proximidade da origem aproximam-se da variedade central. Considerando um sistema dinâmico descrito por equações diferenciais, sendo  $\dot{x}_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$ , e  $\dot{x}_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ , as equações são,

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + f_1(x_1, x_2) \quad (41)$$

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + f_2(x_1, x_2) \quad (42)$$

onde  $A_1$  é uma matriz  $m_1 \times m_1$ , e  $A_2$  é uma matriz  $m_2 \times m_2$ , sendo  $f_1, f_2$  funções vetoriais regulares. Assumindo que todo autovalor de  $A_1$  tem a parte real nula (zero) quando todo autovalor de  $A_2$  tem a parte real negativa. Além disso, assume-se que  $f_1$  e  $f_2$ , bem como os seus Jacobianos são zero na origem. A estabilidade variacional na origem ocorre quando  $x_1 = 0$ , e o centro variacional ocorre quando  $x_2 = 0$ . Em uma pequena vizinhança da origem, a variedade invariante é descrita pela equação  $x_2 = h(x_1)$ , se  $h$  e o jacobiano são zero na origem, para alguma função vetorial,  $h$  é o centro variacional. A equação do centro variacional quando  $y \in \mathbb{R}^{m_1}$ , determina a dinâmica na vizinhança da origem, e pode ser escrita como,

$$\dot{y} = A_1 y + f_1(y, h(y)) \quad (43)$$

#### 2.4.5.3 Método direto de estabilidade não linear – método direto de Lyapunov

Lyapunov elaborou dois métodos, sendo o primeiro tratado como método indireto que investiga a instabilidade local de um sistema não linear através do seu modelo linearizado e apresentam os parâmetros de análise, trabalhados matematicamente por uma matriz jacobiana, cujos resultados da análise são parâmetros na solução dos autovalores. O segundo método leva em consideração que a solução de um sistema não linear pode ser resolvida com equações originais, eliminando assim a linearização e os resultados dos autovalores. O método direto determina a estabilidade do ponto de equilíbrio utilizando o conceito análogo ao de energia que pode ser chamado de método direto de Lyapunov (FALEIROS; YONEYAMA, 2002; MONTEIRO, 2011; WIGGINS, 1990).

O teorema do método direto desenvolvido por Lyapunov, segundo Monteiro (2011) e Faleiros e Yoneyama (2002), é constituído de equações diferenciais de um sistema não linear,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \quad (44)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y) \quad (45)$$

A solução deste sistema pode ser considerada como  $(x(t), y(t))$ , a partir das condições iniciais  $(x(0), y(0))$ , com o ponto de equilíbrio em  $(x^*, y^*) = (0, 0)$ . A solução deste equilíbrio para  $\frac{dx}{dt} = f(x, y)$  e  $\frac{dy}{dt} = g(x, y)$ , é considerada quando as variáveis de estado  $(x, y)$  tem uma função  $V(x, y)$ , função de Lyapunov, e que a origem pertence a região do espaço de fases, contendo derivadas parciais contínuas da função  $V(x, y)$ . Considerando que o sistema evolui com o tempo, a solução deste sistema  $(x, y)$  também evolui, perfazendo uma trajetória  $C$  no espaço de fases, onde esta trajetória pode ser parametrizada pelas expressões  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$ . Desta maneira considera-se que a função  $V(x, y)$  é implícita no tempo  $t$  ao longo de sua trajetória  $C$ , cuja taxa de variação temporal pode ser representada pela equação,

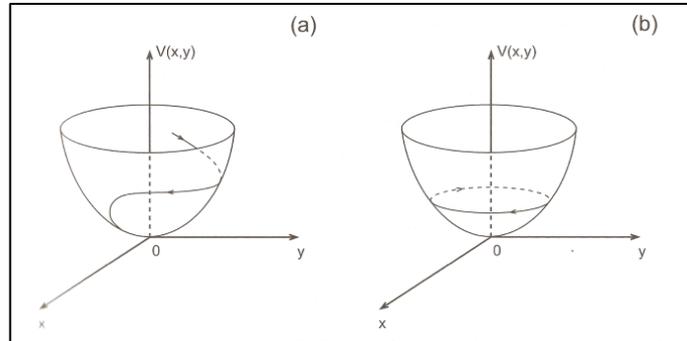
$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y} g(x, y) \quad (46)$$

Esta equação é considerada o método direto de Lyapunov e a função  $V$  pode ser classificada, considerando que  $V(x, y)$  se encontra em uma região qualquer, denominada  $B$  centrada na origem  $V(0, 0) = 0$ , nas condições  $V(x, y): B \rightarrow \mathbb{R}$  estando  $B \rightarrow \mathbb{R}^2$ , portanto a função  $V$  é,

- Localmente definida positiva (assintoticamente estável), se  $V(x, y) > 0$  para  $(x, y) \neq (0, 0) \in B$ ;
- Localmente semi-definida positiva (estável), se  $V(x, y) \geq 0$  para  $(x, y) \neq (0, 0) \in B$ ;
- Indefinida se se  $V(x, y)$  assume valores positivos e negativos para qualquer vizinhança de  $(0, 0)$ .

A figura 7 mostra a classificação da função  $V$ , no (a) lado esquerdo, a classificação assintoticamente estável, e, no (b) lado direito, a estável.

Figura 7– Classificação da função  $V$



Fonte: Monteiro (2011, p. 239).

#### 2.4.5.4 Método direto de estabilidade não linear – método direto de Lyapunov para sistemas invariantes no tempo

Este método tem como proposta que em um sistema linear autônomo, a função autônoma, onde o ponto de equilíbrio se localiza na origem  $(x^*) = (0,0)$ , possibilita a construção da função de Lyapunov  $V$  de uma matriz, cuja estabilidade deste ponto é bem caracterizada pelo cálculo dos autovalores, mesmo quando se tem o autovalor com parte real nula. Este ponto de equilíbrio é assintoticamente estável e aplicada globalmente na função de Lyapunov  $V$ , cuja função é considerada função candidata de Lyapunov (MONTEIRO, 2011; FALEIROS; YONEYAMA, 2002).

Faleiros e Yoneyama (2002) comentam que o método direto de Lyapunov para sistemas invariantes no tempo, pode ser aplicado localmente e globalmente. O método direto aplicado localmente segue o teorema especificando que em um sistema de ordem  $n$ , o qual  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) \quad (47)$$

$$f(0) = 0 \quad (48)$$

O sistema é estável em uma vizinhança  $B(0,\rho)$ , se existe uma função continua  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , no qual  $\rho$  é considerado a região de contorno limite ou local de análise. A classificação é,

- $V$  é positiva definida em  $B(0, \rho)$ ;
- $V(x(t))$  possui derivadas contínuas em relação ao  $t$ ;
- $\frac{dV(x(t))}{dt}$  é negativo semidefinida em  $B(0, \rho)$ ;

No método direto aplicado globalmente, Monteiro (2011) e Faleiros e Yoneyama (2002), definem que em um sistema de ordem  $n$ , o qual  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , portanto, esse sistema é globalmente estável se existe uma função contínua  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , cuja classificação é,

- $V$  é positiva definida em  $\mathbb{R}^n$ ;
- $V(x(t))$  possui duas derivadas contínuas em relação a  $t$ ;
- $\frac{dV(x(t))}{dt}$  é negativo semidefinida em  $\mathbb{R}^n$ ;
- $V$  é radialmente ilimitada

O desenvolvimento até a função candidata de Lyapunov, deve ser feito utilizando o método de Krasoviskii para se definir a função autônoma do sistema no ponto de equilíbrio, afirma Monteiro (2011). Portanto, considerando que  $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) = A \cdot \vec{x}(t)$  é o ponto de equilíbrio no sistema autônomo na origem, a matriz jacobiana pode ser considerada como  $A$ , e se este equilíbrio é assintoticamente estável, a condição para uma matriz na região  $B$  centrada na origem  $V(0,0) = 0$ , pode ser escrita como,

$$K = -(A + A^T) \quad (49)$$

No método de Krasoviskii a função candidata a função de Lyapunov para esse sistema pode ser escrito como,

$$V(\vec{x}(t)) = \vec{f}^T \frac{\vec{f}}{n} \quad (50)$$

o  $\vec{f}^T$  é uma função transposta autônoma,  $\vec{f}$  é uma função autônoma, e  $n$  a dimensão do sistema.

#### 2.4.6 Mapas de Poincaré

Para se analisar o comportamento de um fluxo, que evolui no tempo de forma discreta em um sistema dinâmico, é utilizado um mapa que mostra as relações recorrentes do comportamento deste fluxo (FERRARA; PRADO, 1994).

Nolte (2015) comenta que Poincaré analisa a condição de que um ciclo limite é considerado um estado de equilíbrio do sistema, cujos pontos fixos se apresentam com diferentes tipos de estabilidade. Reconhecida esta condição, Poincaré desenvolve uma forma de converter um ciclo limite de duas dimensões em um ponto fixo equivalente de uma dimensão, cujo método apresenta um mapa discreto chamado de primeiro retorno, ou seja, Ferrara e Prado (1994) de uma maneira mais simples comentam que nas seções de Poincaré, os estudos foram feitos para reduzir o estudo de um fluxo no espaço de fases de  $n$  dimensões em um mapa com espaço de fases  $n - 1$ . Este mapa é considerado o mapa de Poincaré ou mapa de retorno.

Para Monteiro (2011) o teorema do mapa de Poincaré pode ser definido por,

$$\vec{x}_{(j+1)} = \vec{P}(\vec{x}(j)) \quad (51)$$

e  $\vec{x}_j$ , para  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ , corresponde a sequência de pontos que um fluxo intercepta uma seção de Poincaré  $S$  transversal ao fluxo,  $\vec{P}$  é o mapa de Poincaré que relaciona  $\vec{x}_j$ , a função  $P$  geralmente é não linear. Se  $\vec{x}^* = \vec{P}(\vec{x}^*)$ , então  $\vec{x}^*$  é um ponto fixo no mapa, assim o ciclo limite da seção de Poincaré, representa uma trajetória fechada de um sistema dinâmico de tempo contínuo que começa em  $\vec{x}^*$  e após um tempo, com período  $T$  do fluxo, retorna  $\vec{x}^*$ . O ciclo só pode ser assintoticamente estável se  $|\vec{x}^*| < 1$ .

Savi (2006) comenta que, na seção de Poincaré, o procedimento que reduz um sistema dinâmico contínuo no tempo (fluxo) em um discreto (mapa), é eliminada uma das variáveis do problema, possibilitando assim uma melhor compreensão da dinâmica global do problema, e que não existe um método geral para a construção de uma seção de Poincaré. Entretanto existem quatro casos padrão (SAVI, 2006), são eles,

- Estudo de órbitas próximas a órbitas periódicas;
- Espaço de fase periódico com forçamento periódico;

- Espaço de fase quasi-periódico com forçamento periódico;
- Estudo da estrutura de órbitas próxima de órbitas homoclínica ou heteroclínica.

## **2.5 Dinâmica Caótica**

### *2.5.1 Introdução*

Euler em 1760 inicia seus estudos no problema de subconjuntos de três corpos restritos com abordagem analítica, considerando um plano com dois corpos maciços e um terceiro corpo de massa desprezível. A motivação para este estudo na época foi baseada na estabilidade da orbita da terra em torno do sol, cuja perturbação é feita por Júpiter, considerando que não existe solução analítica geral para este estudo. Poincaré, após Euler, também estudando o mesmo assunto, descobre nas suas soluções a existência do caos (NOLTE, 2015).

Nesta sessão será vista a teoria do caos tratada por sistemas dinâmicos deterministas e complexos. No sistema dinâmico determinístico, a principal característica é de que, devido a sensibilidade das condições iniciais do sistema dinâmico, o resultado deste sistema é imprevisível ou aleatório ao longo do tempo. Enquanto que, no sistema dinâmico complexo os resultados podem ser instáveis na evolução temporal. Neste trabalho não será tratado o assunto sistema dinâmico complexo. Portanto, a ênfase e o direcionamento aos conceitos, à teoria do caos e sistemas dinâmicos são para o sistema dinâmico caótico determinístico.

### *2.5.2 Dinâmica Caótica e Caos*

Smith (2007) afirma que o caos pode ser entendido como as pequenas diferenças na forma atual irão se tornar grandes consequências, na forma, em um futuro. Savi (2006) define o caos com significado próximo ao de Smith (2006), sendo que quando um sistema dinâmico responde com diversas possibilidades, a resposta a este sistema está associada ao comportamento caótico, a imprevisibilidade, e a sensibilidade das condições iniciais, ou seja, um comportamento estocástico (sistema indeterminado) de sistemas determinísticos. Zeraoulia (2012) comenta que o caos não determinístico, um caso particular do caos determinístico, mostra um

exponencial divergente na trajetória. Os sistemas dinâmicos são passíveis de apresentar um comportamento caótico, desde que possuam características não lineares e possuam um atrator estranho no seu espaço de fases (SAVI, 2006; MONTEIRO, 2011).

Enfim, a teoria do caos, na visão de Zeraoulia (2006), é o conceito do caos somado com o conceito de sistemas dinâmicos não lineares que, através de um modelo qualquer, os resultados das equações diferenciais não lineares em curto prazo são previsíveis, enquanto que em longo prazo são imprevisíveis.

Nolte (2015) comenta que o movimento caótico tem como principal característica dinâmica três ou mais variáveis, cujo movimento é imprevisível em detalhes e tem definições estatísticas e geométricas bem definidas. Na análise dos resultados analíticos são extraídas as informações da sensibilidade às condições iniciais, informações dos atratores estranhos, que é a estrutura geométrica das repetidas trajetórias em certas partes do espaço dinâmico.

O estudo de atratores associados a sistemas dinâmicos caóticos pode ser entendido como um estudo de suas propriedades estatísticas, sua aplicação é feita quando este atrator é topologicamente complicado e não se tem informações geométricas precisas (FERRARA; PRADO, 1994).

### 2.5.3 *Atrator*

Um atrator é considerado como um conjunto fechado de pontos no espaço de fases de um sistema dinâmico, podendo ser estranho ou não, e fornece informações diversas do comportamento assintótico de um sistema dinâmico. A junção das características das propriedades dos atratores, somada a teoria do caos determinístico e dos sistemas dinâmicos, permitem a análise de sinais experimentais com comportamento caótico (MONTEIRO, 2011; FERRARA; PRADO, 1994).

Monteiro (2011) explica que o teorema de Poincaré-Bendixson, em um sistema dinâmico de tempo contínuo, autônomo, tem propriedades diferentes em um sistema bidimensional e tridimensional.

Para um sistema bidimensional:

- O comportamento dinâmico, no ponto de equilíbrio, é independente do tempo;

- O comportamento é periódico no tempo com ciclo limite, cuja amplitude e período determinados são formados por equações e valores de parâmetros. Para um sistema tridimensional,
- A superfície toroidal tem regime periódico ou quase periódico com duas frequências fundamentais e independentes;
- O atrator estranho tem dependência sensível às condições iniciais.

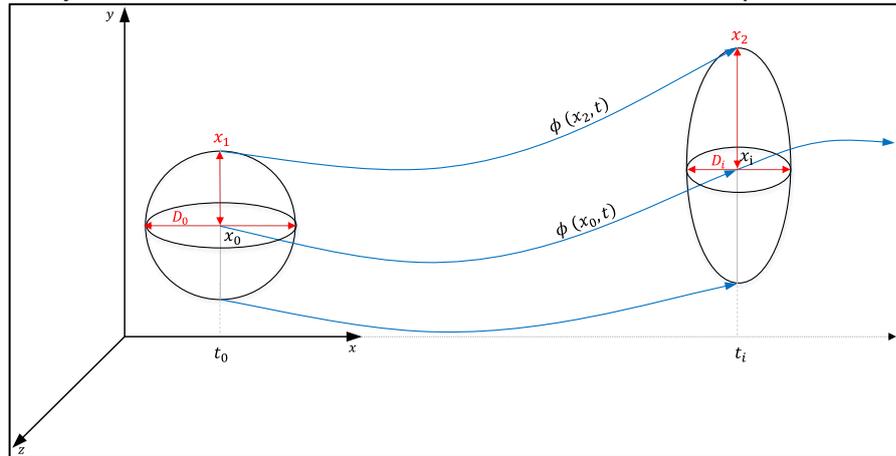
O caos em um sistema autônomo, dissipativo e de tempo contínuo, só existe quando o sistema é não linear e pelo menos tridimensional, como o sistema de Lorenz (MONTEIRO, 2011). O sistema de Lorenz ou atrator de Lorenz pode ser considerado como um mapa caótico que mostra o estado da evolução no tempo de um sistema dinâmico, cujo gráfico se assemelha a uma borboleta.

## 2.6 Expoente de Lyapunov

O expoente de Lyapunov, quando aplicado, avalia a sensibilidade nas condições iniciais de um sistema de tempo discreto ou contínuo, cujo resultado mostra as divergências das trajetórias vizinhas que correspondem a uma taxa média no tempo (SAVI, 2006; FERRARA; PRADO, 1994; MONTEIRO, 2011). O expoente de Lyapunov tem características de valores da matriz jacobiana (solução geral para linearização) que definem a estabilidade dos pontos fixos (NOLTE, 2015).

O teorema do expoente de Lyapunov, segundo Savi (2006), pode ser escrito, considerando que no instante  $t_0$ , o sistema dinâmico é representado por uma esfera com diâmetro  $D_0$ , cujo ponto central é  $y(0) = x_0$ , e na extremidade da esfera, tem-se um ponto  $y(r_{circ}) = x_1$ . Com o passar do tempo, a esfera desenvolve uma trajetória  $\phi(x_i, t)$ , representados no instante  $t_i$ , neste instante, a forma não é mais uma esfera, pois com a evolução do tempo, é uma circunferência deformada em elipsoide, cujo centro geométrico da forma é elíptica neste instante  $D_i$  e o ponto da extremidade é  $y(r_{elipse}) = x_2$ , com trajetória  $\phi(x_2, t)$  e o ponto central é  $y(r_{elipse}) = x_i$ . A figura 8 mostra a esfera e a elipse após a sua trajetória.

Figura 8— Trajetória de um sistema dinâmico - teorema do expoente de Lyapunov.



Fonte: Adaptada Savi (2006, p. 169).

A variação do diâmetro da esfera é,

$$d(t) = D_0 b^{\lambda t} \quad (52)$$

onde  $b$  é a base da referência,  $\lambda$  é o expoente de Lyapunov,  $\lambda_L$ . O  $\lambda$  pode ser calculado através da expressão matemática,

$$\lambda_L = \frac{1}{t} \log_b \left( \frac{d(t)}{d_0} \right) \quad (53)$$

ou seja,

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log_b \left( \frac{|D\phi(w_L, t)|}{|w_L|} \right) \quad (54)$$

onde  $w_L = \frac{dy}{dr_{circ}} \Big|_{x_1=0}$ , e  $|w_L|$  é a norma, assim a distância entre o ponto de origem no instante  $t_0$  e no instante  $t_i$ , pode ser escrita como,

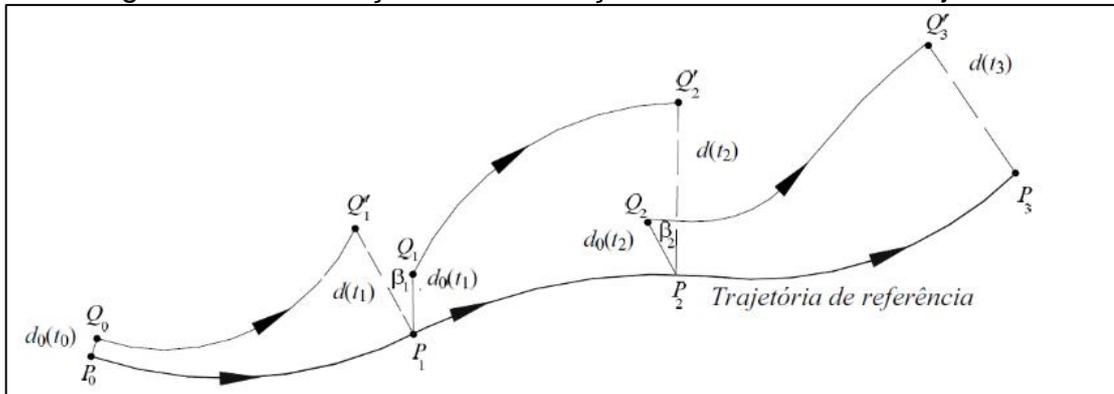
$$d(y(r_{circ}), y(x_0)) = r_{circ} \cdot |w_L| + O(r_{circ}) \quad (55)$$

e  $O(r_{circ})$  é um termo que tende a ser nulo na medida que o limite de  $r_{circ}$  tendendo a zero. Portanto,

$$d(\phi(y(r_{circ}), t), \phi(y(x_1, t))) = r_{circ} \cdot |D\phi(w_L, t)| + O(r_{circ}) \quad (56)$$

Savi (2006) ainda cita que os cálculos para a linearização do expoente de Lyapunov podem ser calculados com precisão a partir de um algoritmo, considerando que a distância de uma trajetória com referência inicial  $x_0$ , seja a referência inicial no próximo ponto da distância final da trajetória do sistema dinâmico. A figura 9 mostra o movimento do sistema dinâmico, saindo da origem com cada ponto  $P_n$ , nos instantes  $t_n$ , e nos pontos  $Q'_n$  são considerados os pontos referenciais para o ponto em estudo  $P_n$ , considerando que  $n = 1, 2, 3 \dots n$ .

Figura 9– Linearização de uma função em torno de uma trajetória



Fonte: Savi (2006, p. 172).

Matematicamente, a expoente de Lyapunov pode ser escrito como,

$$\lambda = \frac{1}{t_n - t_0} \sum_{k=1}^n \log_b \left( \frac{d(t_k)}{D_0(t_{k-1})} \right) \quad (57)$$

### 3 ROTORES DINÂMICOS

#### 3.1 Introdução a Rotores Dinâmicos

Os sistemas dinâmicos são passíveis de apresentar um comportamento caótico, desde que possuam características não lineares e possuam um atrator estranho no seu espaço de fases (SAVI, 2006; MONTEIRO, 2011). Portanto, para se entender determinados comportamentos físicos, são desenvolvidos modelos matemáticos ideais, ou seja, sem perturbações externas ao sistema, assim, considerando que este trabalho tem foco nos estudos e comportamentos de rotores dinâmicos, são importante os conceitos e teoria de ondas, movimento harmônico simples MHS e vibração.

A teoria de vibração para sistemas de rotores dinâmicos foi primeiramente desenvolvida por August Föppl em 1895 e Henry Homan Jeffcott em 1919 (YOON et al., 2013). Atualmente a teoria desenvolvida é comumente chamada de *Jeffcott rotors*. Vance et al (2010) comenta que diferentes problemas podem ser encontrados em um sistema de máquinas rotativas, como os advindos de problemas da estrutura, dos componentes como rolamentos, junções, entre outras, cujo resultado oriundo destes problemas pode gerar a instabilidade do sistema.

Randall (2011) comenta que a análise do movimento rotacional e a velocidade crítica de um eixo que não flexiona são mais simples e, quando o eixo flexiona, a análise do movimento rotacional e a velocidade crítica se tornam mais difíceis. O rotor de Jeffcott ou rotor Laval, a princípio, é entendido como o modelo mais simples de análise do movimento rotacional da flexão do eixo, pois contém um disco posicionado simetricamente no meio do eixo e, de uma forma geral, este modelo, representa o início dos estudos e análises da flexão do eixo, causado pelo movimento rotacional. A princípio os modelos espaciais em *multi degree of freedom* MDOF, oriundos do conceito do *single degree of freedom* SDOF, representam uma parte do conceito dos rotores de Jeffcott (EWINS, 2000).

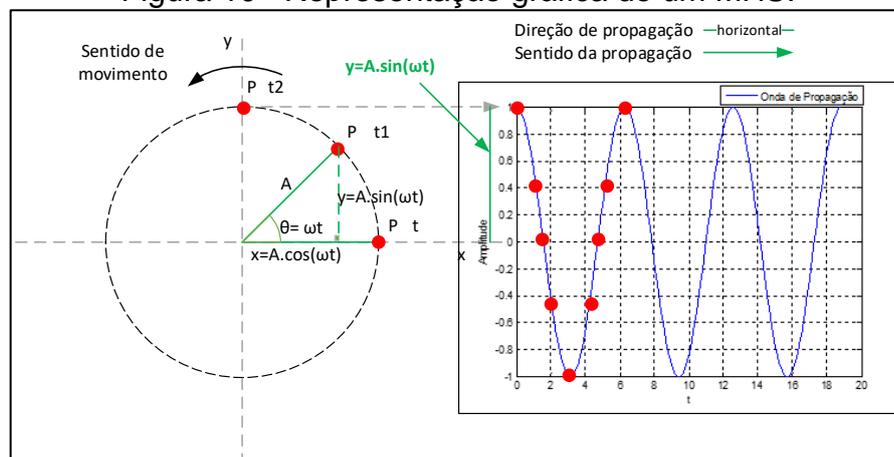
#### 3.2 Ondas e Movimento Harmônico Simples - MHS

O fenômeno ondulatório pode ser demonstrado pela irradiação em forma de anéis na superfície em movimento da água, cuja excitação foi feita por uma pedra

atirada, criando um distúrbio inicial nesta superfície. Knobel (2000, p. 4) afirma que “é chamado de sinal, qualquer medida quantitativa ou característica do meio, que identifica a localização e a velocidade do distúrbio”. A propagação do distúrbio ocorre em diferentes meios gasosos, líquidos, sólidos, entre outros, e durante a propagação ocorrem diferentes acontecimentos, todos são fenômenos importantes em diversos campos de estudo, como a engenharia, medicina, geologia, psicologia, entre outros. “Uma onda é qualquer sinal reconhecível, que se desloca de um meio a outro, com uma velocidade de propagação reconhecível” (WHI apud KNOBEL, 2000, p. 4). Para Cheeke (2002, p. 29) a definição de onda “é a propagação da velocidade constante, autossustentada, oriunda de uma perturbação, sem mudança na forma”.

Balachandran e Magrab (2011 p. 2) descrevem “oscilação como movimentos alternados de avanço e recuo, o qual é utilizado como sinônimo de vibração”. Crocker (2007, p. 1) define que, a “oscilação vibracional é conhecida como movimento harmônico simples, e podem ser representados em um gráfico por uma forma senoidal no tempo”. Considerando que um ponto qualquer  $P$  se desloca com movimento curvilíneo e uniforme  $mcu$ , no sentido anti-horário, a trajetória curvilínea de  $P$ , após um determinado tempo  $t$ , forma um ângulo  $\theta$  que está entre a referência inicial do ponto de partida até a localização no instante  $t$  de  $P$ . Trabalhando matematicamente, entende-se que  $\theta$  pode ser calculado como a velocidade angular  $\omega$ , multiplicada pelo tempo  $t$ , assim  $\theta = \omega t$ . A figura 10 mostra, do lado esquerdo, a representação do  $mcu$  e a geometria formada por um triângulo conforme o movimento de  $P$ .

Figura 10– Representação gráfica de um MHS.



Fonte: Adaptada Crocker (2007)

Assim, do lado direito da figura 10, está a projeção do ponto  $P$  em movimento no plano cartesiano. Observa-se que, segundo Brandt (2011) e Crocker (2007), o cateto oposto  $y$ , e o cateto adjacente  $x$ , podem ser calculados como,

$$y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t) \quad (58)$$

$$x(t) = A \cdot \text{cos}(\omega t) \quad (59)$$

Ambas as equações 58 e 59 são equações que formam ondas de forma senoidal. Se somadas essas equações, teremos um modelo matemático de uma função no tempo que descreve o movimento do ponto  $P$ , assim,

$$f(t) = A(\text{cos}(\omega t) + j\text{sen}(\omega t)) \quad (60)$$

que também pode ser escrito como,

$$f(t) = A \cdot e^{j\omega t} \quad (61)$$

Considerando que este ponto pode estar em qualquer local em um instante qualquer, deve-se considerar a defasem do ângulo  $\varphi$ , a equação 61 é reescrita como,

$$f(t) = A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (62)$$

Observa-se, portanto, que a oscilação pode ser escrita matematicamente, cujas funções no tempo pertencem a um movimento harmônico simples.

Uma onda se propaga através dos choques entre as moléculas, cujas energias potencial e cinética são transmitidas uma a uma, até se dissiparem no meio de propagação e/ou serem retidas em barreiras (CROCKER, 2007). Portanto, o movimento da onda, pode ser descrito no plano cartesiano (figura 10), recorrente ao movimento de  $P$ . Esta onda tem período  $T$ , frequência  $f$ , velocidade de propagação  $u$ , deslocamento  $x$ , comprimento de onda  $\lambda$ , e o numero de onda  $k$ . Matematicamente, podemos escrevê-las como,  $T = \frac{1}{f}$ ,  $f = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow f = \frac{u}{\lambda}$ ,  $x = u \cdot t$ ,  $\lambda = u \cdot T$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

Considerando que na equação  $x(t)$  e  $y(t)$  descrevem o movimento de  $P$  verticalmente e horizontalmente no plano cartesiano, e é composta de variáveis no tempo e no espaço, a equação geral é composta de duas variáveis  $f(x, t)$ , sendo considerada uma equação diferencial ordinária, assim, esta equação  $f(x, t)$  pode ser escrita como,

$$y(x, t) = A. \cos\left(\frac{2\pi.x}{\lambda} - \frac{2\pi.u.t}{u.T}\right) = A. \cos\left(\frac{2\pi.x}{\lambda} - \frac{2\pi f.u.t}{u}\right) \quad (63)$$

simplificando,

$$y(x, t) = A. \cos(k.x - \omega.t) \quad (64)$$

A equação de solução geral da onda, pode ser escrita dada a condição de derivação de segunda ordem para  $y(x, t)$ , considerando o tempo e o espaço, respectivamente, assim,

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A. \cos(kx - \omega t) \quad (65)$$

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A. \cos(kx - \omega t) \quad (66)$$

Observa-se que, os lados esquerdos das duas equações 65 e 66 são similares, igualam-se os termos, assim,

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{1}{\omega^2} = A. \cos(kx - \omega t) \quad (67)$$

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{1}{k^2} = A. \cos(kx - \omega t) \quad (68)$$

Conforme Knobel (2011) e Crocker (2007) a equação geral da onda é,

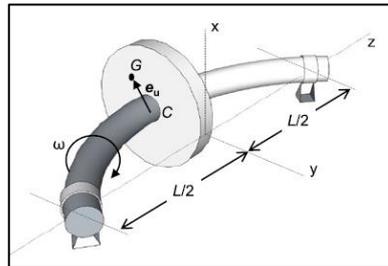
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{1}{k^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{1}{\omega^2} \quad (69)$$

### 3.3 Rotores de Jeffcott

A vibração de um sistema de rotor dinâmico é caracterizada por vibrações sincronizadas e não sincronizadas, dependendo da frequência dominante e de sua fonte de excitação, e as vibrações sincronizadas têm um componente de frequência dominante que corresponde à velocidade de rotação do eixo, que sofre o desbalanceamento por forças externas ou pela não sincronia de alguns dos elementos do sistema (YOON et al., 2013).

A figura 11 mostra um eixo de massa  $m_e$ , com o centro geométrico  $C$  em rotação, e acoplado ao eixo, um disco com massa  $m_d$ , ambos formam um corpo de massa  $m$ . O conjunto disco-eixo, quando em rotação, sofre um deslocamento lateral, o qual pode ser calculado adotando o ponto  $G$  como referência, assim,  $e_u$  é o vetor de desbalanceamento que conecta  $C$  e  $G$ , e a velocidade angular do eixo é  $\omega$ , e  $L$  é o comprimento do eixo.

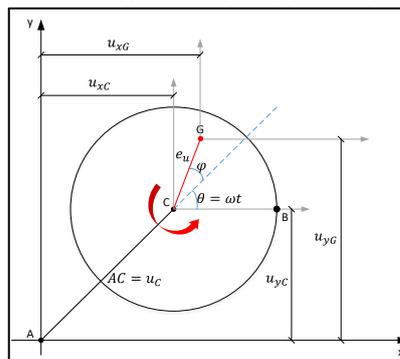
Figura 11– Eixo desbalanceado com movimento rotativo



Fonte: Yoon et al (2013)

A figura 12 mostra os detalhes do sistema do rotor de Jeffcott em um plano cartesiano e o ângulo de fase do deslocamento do ponto  $G$  (centro de massa do disco).

Figura 12– Detalhamento do eixo do sistema de rotor dinâmico de Jeffcott.



Fonte: Adaptada de Yoon et al. (2013)

As localizações dos pontos  $C$  e  $G$ , no plano cartesiano  $x, y$ , são representados respectivamente por  $u_{xC}, u_{yC}$  e  $u_{xG}, u_{yG}$ , e o segmento é  $\overline{AC} = e_c$ , e  $\overline{CG} = e_u$ . O  $\theta = \omega t$  é o ângulo de fase e  $\varphi$  é o ângulo do deslocamento do centro de massa do disco acoplado ao eixo. Para uma flexão uniforme, adota-se que o sistema não tem perda, e a rigidez do eixo pode ser definida como  $K_{eixo} = \frac{48.E.I}{L^3}$ , sendo  $E$  é o módulo de elasticidade,  $I$  é o momento de inércia (YOON et al., 2013). Considerando, ainda, que o eixo é uniforme de diâmetro  $d$ , a equação do momento de inércia  $I$  é escrito como,  $I = \frac{\pi d^4}{64}$ .

Considerando que o eixo é uniforme de diâmetro  $d$ , a equação do momento de inércia  $I$  é escrito como,  $I = \frac{\pi d^4}{64}$ . Portanto, considerando que o eixo tem massa desprezível, as forças atuantes no disco são as forças inerciais, de amortecimento e rigidez que originam a deformação do eixo. Segundo Yoon et al. (2013), a equação do movimento lateral do sistema nos eixos  $x$  e  $y$ , representado na figura 11, pode ser escrita como,

$$m\ddot{u}_{xG} = -K_{eixo}u_{xC} - C_{eixo}\dot{u}_{xC} \quad (70)$$

$$m\ddot{u}_{yG} = -K_{eixo}u_{yC} - C_{eixo}\dot{u}_{yC} \quad (71)$$

Sendo que  $u_{xG}$  e  $u_{yG}$  é o centro de massa do disco, e  $u_{xC}$  e  $u_{yC}$  é o centro geométrico do eixo, esses termos em relação ao eixo de massa C, considerando o eixo em rotação em um determinado tempo, podem ser escritos como,

$$u_{xG} = u_{xC} + e_u \cos(\omega t) \quad (72)$$

$$u_{yG} = u_{yC} + e_u \sin(\omega t) \quad (73)$$

Trabalhando matematicamente, o sistema em movimento, introduz-se os termos derivativos da aceleração nas equações e tem-se a equação do movimento de Jeffcott,

$$m\ddot{u}_{xG} + C_{eixo}\dot{u}_{xC} + K_{eixo}u_{xC} = m \cdot e_u \cdot \omega^2 \cos(\omega t) \quad (74)$$

$$m\ddot{u}_{yG} + C_{eixo}\dot{u}_{yC} + K_{eixo}u_{yC} = m \cdot e_u \cdot \omega^2 \sin(\omega t) \quad (75)$$

Uma observação importante é que essas equações não contém os efeitos das forças giroscópicas atuantes no rotor. Se os termos do lado esquerdo destas equações forem iguais a zero, entende-se esta condição como uma solução homogênea, assim são reescritas como,

$$m\ddot{u}_{xG} + C_{eixo}\dot{u}_{xC} + K_{eixo}u_{xC} = 0 \quad (76)$$

$$m\ddot{u}_{yG} + C_{eixo}\dot{u}_{yC} + K_{eixo}u_{yC} = 0 \quad (77)$$

Considerando que o deslocamento do eixo de centro de massa  $C$  é um sistema homogêneo, no conjunto eixo e disco, sistema do rotor, tem-se

$$u_{xC} = A_x e^{st} \quad (77)$$

$$u_{yC} = A_y e^{st} \quad (78)$$

sendo  $A$  a amplitude e  $e^{st} = e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\text{sen}(\omega t)$  que é a notação de uma exponencial complexa, que permite tratar simultaneamente duas formas de excitação harmônica (MEIROVITCH, 1997). As projeções vetoriais nos eixos, real e imaginário, são respectivamente,

$$\text{Re}. e^{i\omega t} = \cos(\omega t) \quad (79)$$

$$\text{Im}. e^{i\omega t} = \text{sen}(\omega t) \quad (80)$$

A frequência natural do sistema livre de amortecimento pode ser escrita como (YOON et al., 2013),

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_s}{m}} = \sqrt{\frac{48.E.I}{L^3 m}} \quad (81)$$

A solução homogênea, pelo método de Laplace é,

$$(ms^2 + C_s + K_s)A_x e^{st} = 0 \quad (82)$$

$$(ms^2 + C_s + K_s)A_y e^{st} = 0 \quad (83)$$

$C_s$  é o amortecimento e  $K_s$  é a rigidez do eixo na forma complexa, a equação característica amortecida do sistema rotor é

$$ms^2 + C_s s + K_s = 0 \quad (84)$$

A solução deste polinômio, quando igual a zero os resultados destas raízes são conhecidos como autovalor amortecido do sistema, assim,

$$s_{1,2} = -\frac{C_s}{2.m} \pm i \sqrt{\frac{K_s}{m} - \left(\frac{C_s}{2.m}\right)^2} \quad (85)$$

Neste caso o rotor/rolamento não amortecido tem a característica  $\frac{C_s}{2.m} < \frac{K_s}{m}$ , o qual  $s$  terá um componente imaginário, e a relação de amortecimento é  $\zeta = \frac{C_s}{2.m.\omega_n}$ .

A frequência natural amortecida  $\omega_d$  pode ser escrita como,

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (86)$$

Para Yoon et al (2013) o valor do coeficiente de amortecimento pode variar entre  $0.3 > \zeta > 0.03$ , quando  $\zeta = 0.1$  é considerado um valor normal de operação do rotor. A combinação linear da solução de um sistema não amortecido, pode ser escrita como,

$$u_{xc} = e^{-\zeta\omega_n t} (A_{x1} e^{i\omega_d t} + A_{x2} e^{-i\omega_d t}) = e^{-\zeta\omega_n t} (B_{x1} \cos(\omega t) + B_{x2} \sin(\omega t)) \quad (87)$$

$$u_{yc} = e^{-\zeta\omega_n t} (A_{y1} e^{i\omega_d t} + A_{y2} e^{-i\omega_d t}) = e^{-\zeta\omega_n t} (B_{y1} \cos(\omega t) + B_{y2} \sin(\omega t)) \quad (88)$$

Sendo  $(A e B) = e_u$  e são amplitudes do sistema rotor. A equação do movimento para a resposta à excitação em estado estacionário, no sistema Jeffcott, com massa diferente de zero é escrita como,

$$\ddot{u}_{xc} + 2\zeta\omega_n \dot{u}_{xc} + \omega^2 u_{xc} = e_u \omega^2 \cos(\omega t) \quad (89)$$

$$\ddot{u}_{yc} + 2\zeta\omega_n \dot{u}_{yc} + \omega^2 u_{yc} = e_u \omega^2 \sin(\omega t) \quad (90)$$

Considerando a combinação do deslocamento de  $x$  e  $y$ , a coordenada complexa  $u_c$  que é o deslocamento do centro geométrico do disco no plano cartesiano, pode ser escrito através da equação,

$$u_c = u_{xC} + iu_{yC} \quad (91)$$

A resposta a excitação em estado estacionário nas coordenadas, são representadas como,

$$u_{xC} = U_x e^{i\omega t} \quad (92)$$

$$u_{yC} = U_y e^{i\omega t} \quad (93)$$

Portanto o deslocamento do disco de centro de massa  $G$ , é escrito como,

$$u_c = U_x e^{i\omega t} + iU_y e^{i\omega t} = U e^{i\omega t} \quad (94)$$

Substituindo  $u_{xC} = U_x e^{i\omega t}$  e  $u_{yC} = U_y e^{i\omega t}$  em  $\ddot{u}_{xC} + 2\zeta\omega_n \dot{u}_{xC} + \omega^2 u_{xC} = e_u \omega^2 \cos(\omega t)$  e  $\ddot{u}_{yC} + 2\zeta\omega_n \dot{u}_{yC} + \omega^2 u_{yC} = e_u \omega^2 \sin(\omega t)$ , teremos um sistema de equações que descrevem a deflexão do eixo.

$$(-\omega^2 + 2i\omega\zeta\omega_n + \omega_n^2) U_x e^{i\omega t} = e_u \omega^2 \cos(\omega t) \quad (95)$$

$$(-\omega^2 + 2i\omega\zeta\omega_n + \omega_n^2) U_y e^{i\omega t} = e_u \omega^2 \sin(\omega t) \quad (96)$$

Essas equações na forma complexa podem ser escritas como,

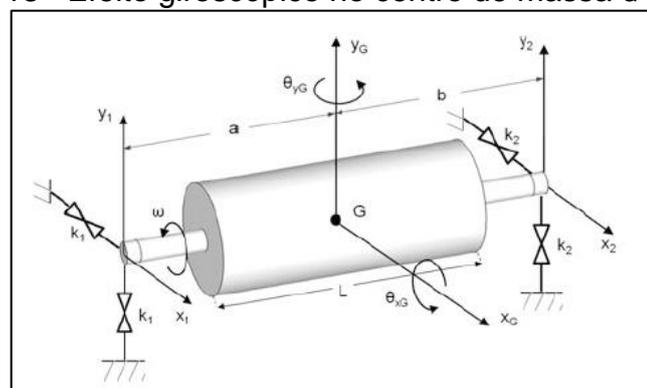
$$(-\omega^2 + 2i\omega\zeta\omega_n + \omega_n^2) u_c = e_u \omega^2 \quad (97)$$

Até então, como dito na introdução desta sessão, o desenvolvimento teórico foi descrito para a condição de um deslocamento lateral do rotor em rolamentos rígidos, ou seja, o alinhamento do eixo em rotação está alinhado com a linha de centro do rolamento, e os momentos de inércia, atuante no sistema, não estão sendo considerados.

### 3.3.1 Efeito Giroscópico

A partir desta sessão, o efeito giroscópico é introduzido no movimento do rotor dinâmico, e deduzido através de modelo matemático. No rotor dinâmico, o efeito giroscópico, ocorre no desalinhamento do eixo em relação aos seus componentes de apoio. Os movimentos que ocorrem do efeito giroscópico, resultam na rotação do eixo, em torno do eixo  $x$  e  $y$ , no centro de massa do disco  $G$ , e é representado na figura 13 considerando  $y_G$  e  $x_G$ .

Figura 13– Efeito giroscópico no centro de massa  $G$  do eixo.



Fonte: Yoon et al. (2013)

$\theta_{yG}$  e  $\theta_{xG}$  são os ângulos formados pela ação das forças giroscópicas no disco de centro de massa  $G$ .

As constantes de rigidez do eixo são  $K_1, K_2$ , e,  $a$  e  $b$ , correspondem à distância do centro do eixo de massa  $G$ , até o fim do eixo, e  $L$ , é a distância total do eixo entre os rolamentos.

O eixo é influenciado por duas forças giroscópicas, sendo a primeira força giroscópica, a inércia giroscópica, que atua na rigidez do rotor (disco) sobre a primeira lei de Newton (princípio de inércia), em que o sistema, a partir de que em movimento rotativo, tem rotação no mesmo plano, e em torno do mesmo eixo espacial, cujo resultado da inércia giroscópica é a alteração do eixo de rotação, em relação a sua referência. A segunda força giroscópica, é a precessão, que é uma força aplicada ao rotor (disco), que tende a alterar a direção do eixo de rotação, sempre se movimentando em ângulo reto, o resultado da precessão, ocorre quando, a velocidade angular em torno do seu próprio eixo altera a sua orientação, quando esta velocidade é muito maior que ela mesma.

O momento de inércia rotacional polar  $J_p$  do sistema, considerando um rolamento flexível, é escrito como  $J_p = \frac{mR^2}{2}$ , sendo  $R$  o raio do rotor. O momento transverso de inércia  $J_t$ , que é a inercia rotacional do eixo perpendicular no mesmo eixo de rotação, é escrito como,  $J_t = \frac{m}{4} \left( R^2 + \frac{1}{3} L^2 \right)$ .

Considerando que o deslocamento lateral do rotor é  $x_G$  e está na direção  $x$ , e  $y_G$  está na direção  $y$ , é possível demonstrar matematicamente os deslocamentos e rotações do rotor de centro no centro de massa  $G$ .

$$x_G = \frac{1}{L} (bx_1 + ax_2) \quad (98)$$

$$y_G = \frac{1}{L} (by_1 + ay_2) \quad (99)$$

$$\theta_{xG} = \frac{1}{L} (y_2 - y_1) \quad (100)$$

$$\theta_{yG} = \frac{1}{L} (x_2 - x_1) \quad (101)$$

As equações de movimento para a translação e rotação do rotor, no centro de massa  $G$ , são descritas, respectivamente, como,

$$m\ddot{x}_G + \alpha x_G - \gamma \theta_{yG} = 0 \quad (102)$$

$$m\ddot{y}_G + \alpha y_G - \gamma \theta_{xG} = 0 \quad (103)$$

$$J_t \ddot{\theta}_{xG} + J_p \omega \dot{\theta}_{yG} + \gamma x_G + \delta \theta_{xG} = 0 \quad (104)$$

$$J_t \ddot{\theta}_{yG} - J_p \omega \dot{\theta}_{xG} + \gamma y_G + \delta \theta_{yG} = 0 \quad (105)$$

A equação 102 e 103 descrevem o movimento de translação lateral do rotor, e as equações 104 e 105 descrevem o movimento dinâmico angular e serão utilizados constantemente neste trabalho de pesquisa, seja no modelo teórico, seja nas simulações numéricas e em outros modelos que tratem do fenômeno de deslocamento lateral e angular. A linearização do momento giroscópico, nos eixos  $x$  e  $y$ , são respectivamente,  $J_p \omega \dot{\theta}_{yG}$  e  $J_p \omega \dot{\theta}_{xG}$ . Os parâmetros de rigidez são:

$$\alpha = K_1 + K_2 \quad (106)$$

$$\gamma = -K_1 a + K_2 b \quad (107)$$

$$\delta = K_1 a^2 + K_2 b^2 \quad (108)$$

O desacoplamento do movimento translacional, e do movimento angular, ocorre quando  $\gamma = 0$  e são resolvidas separadamente. As equações também podem ser escritas vetorialmente e assim representadas pelo modelo matemático seguinte,

$$m\ddot{X} + \omega G\dot{X} + KX = 0 \quad (109)$$

Generalizando o vetor de estado, tem-se,

$$X = \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ \theta_{xG} \\ \theta_{yG} \end{bmatrix} \quad (110)$$

A matriz de massa  $m$ , a matriz de massa giroscópica  $G$  e a matriz de rigidez  $K$  são escritas respectivamente como,

$$m = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_t \end{bmatrix} \quad (111)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_p \\ 0 & 0 & -J_p & 0 \end{bmatrix} \quad (112)$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \alpha & \gamma & 0 \\ 0 & \gamma & \delta & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & \delta \end{bmatrix} \quad (113)$$

A precessão é calculada pela inclinação simétrica da matriz giroscópica  $G$  que representa o acoplamento entre o movimento do eixo  $x$  e  $y$ . No caso do desacoplamento do movimento translacional e do movimento angular,  $\gamma = 0$ , nas condições matriciais, deve-se considerar que  $K = K_1 = K_2$ , e o rotor é axialmente simétrico em relação ao centro de massa, sendo  $\frac{L}{2} = a = b$ . A matriz de rigidez então é escrita como,

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{bmatrix} \quad (114)$$

## 4 ASPECTOS DA CARACTERIZAÇÃO DE ENSAIOS

Nesta sessão são mostrados os métodos e processos, utilizados no experimento do rotor dinâmico, a partir do qual, validado o modelo, estes procedimentos, serão utilizados em experimentações seguintes.

Para se conseguir a validação do método, que são compostos pelo modelo teórico e experimental, é necessário explicar o procedimento destes, respectivamente, considerando que as condições iniciais de experimentação são aplicadas em ambos os modelos. As condições iniciais utilizadas são  $m = 0,5 \text{ Kg}$ ;  $k = 20.10^3 \frac{\text{kgf}}{\text{mm}^2}$ ;  $f = 60\text{Hz}$ ;  $d = 6,0 \text{ mm}$ ;  $a = b = 60,0 \text{ mm}$ ;  $L = 120,0 \text{ mm}$ ;  $\zeta = 0,01$ .

No modelo teórico, a equação 109, que representa a equação geral do sistema, será utilizada considerando as condições iniciais, onde o resultado será a frequência de oscilação do sistema. No modelo experimental serão obtidas as vibrações do sistema, utilizando um acelerômetro, posicionado nas referências cartesianas x, y, e z, respectivamente.

O resultado, para a validação do experimento e dos métodos e processos utilizados, será a comparação dos resultados do modelo teórico com o experimental. Se ambas as amplitudes forem similares, é possível afirmar que o comportamento teórico tem representatividade com o experimental.

### 4.1 Modelo Teórico

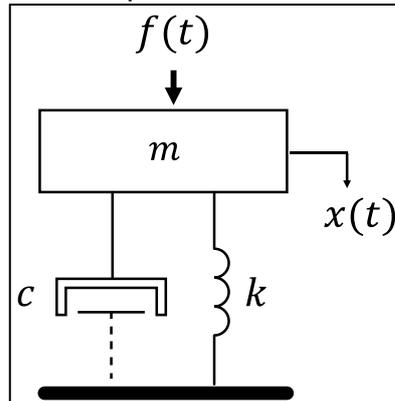
O modelo matemático foi desenvolvido baseando-se na teoria de rotores de *Jeffcott*, cujo movimento rotacional do eixo, a uma dada velocidade, pode demonstrar a causa de fenômenos como o deslocamento lateral do eixo, o desalinhamento do eixo, falhas nos rolamentos, entre outros.

#### 4.1.1 Sistema com um grau de liberdade SDOF

Geralmente um modelo espacial consiste de massa  $m$ , mola  $k$ , e amortecimento viscoso  $c$ , o qual pode ser representado na figura 14. Sabe-se que o modelo espacial ou SDOF é a base de modelagem matemática para muitas

estruturas reais, portanto as suas propriedades também são utilizadas em modelos de sistemas com vários graus de liberdade ou *multi degree of freedom* MDOF (EWINS, 2000). Assim, é importante salientar que os conceitos dos rotores de *Jeffcott* baseiam-se a partir deste modelo de SDOF (ADAMS, 2010).

Figura 14– Modelo espacial SDOF com amortecimento



Fonte: do próprio autor

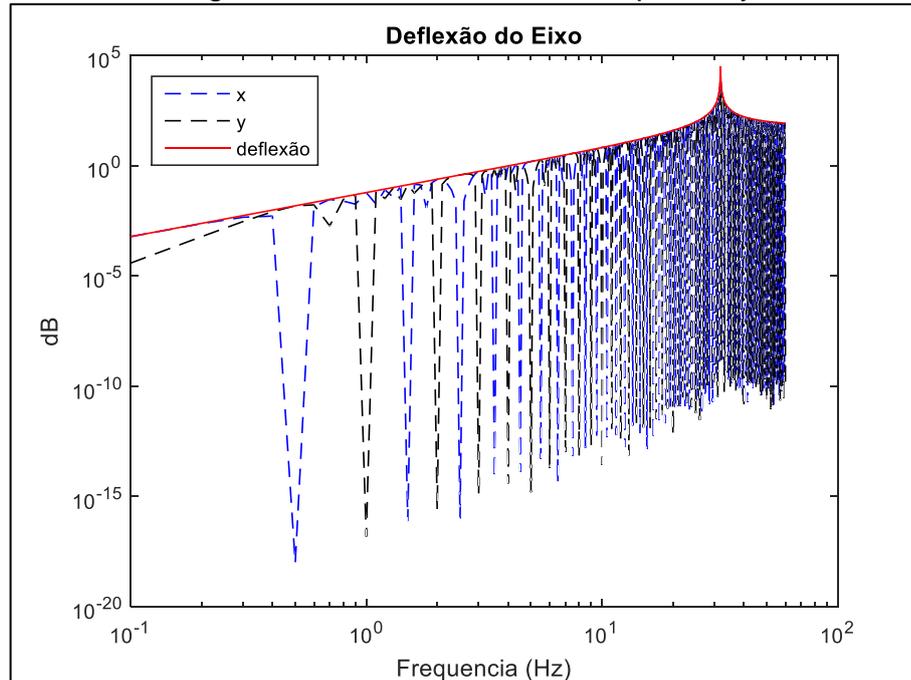
O SDOF pode ser classificado como:

- Sistema não amortecido;
- Sistema viscoso amortecido;
- Sistema amortecido estruturalmente ou amortecido histereticamente;

Ewins (2000) afirma que no sistema amortecido, o modelo espacial, consiste de  $m$  e  $k$ , o qual a  $f(t)$  e  $x(t)$  são quantidades de resposta da força e deslocamento que variam no tempo, respectivamente. O modelo matemático da equação geral, homogênea, do movimento de um sistema amortecido de um rotor de *Jeffcott* é a equação 109,  $m\ddot{X} + \omega G\dot{X} + KX = 0$ .

A princípio, o modelo teórico que determina o deslocamento lateral do eixo é representado pelas equações 95 e 96,  $(-\omega^2 + 2i\omega\zeta\omega_n + \omega_n^2) U_x e^{i\omega t} = e_u \omega^2 \cos(\omega t)$ ;  $(-\omega^2 + 2i\omega\zeta\omega_n + \omega_n^2) U_y e^{i\omega t} = e_u \omega^2 \sin(\omega t)$ , respectivamente. Aplicando as condições iniciais nas equações que representam o deslocamento lateral, teremos a resposta do sistema em frequência. A figura 15 mostra a deflexão do sistema ou resposta em frequência.

Figura 15– Deflexão do eixo no plano xy



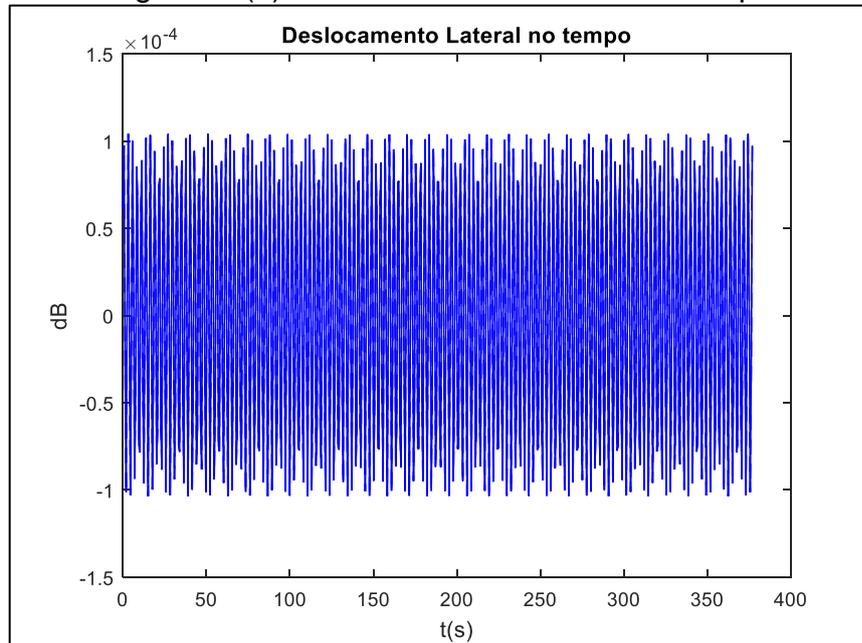
Fonte: Outa et al. (2015)

Observa-se que as linhas pontilhadas de cor azul e preta, representam a deflexão do eixo isolada nos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente, e a deflexão geral dos dois componentes, eixos  $x$  e  $y$ , é a linha contínua em vermelho, resultado da equação  $deflexão = \sqrt{x^2 + y^2}$ , correspondente à parte real e imaginária. O resultado da frequência natural é  $\omega_n = 6.3246 \frac{rad}{s}$ , também considerada a velocidade crítica do sistema.

Depois de analisado somente o deslocamento lateral do eixo, as condições iniciais foram introduzidas na equação geral do movimento para se obter os dois efeitos do rotor dinâmico, o deslocamento lateral e angular do eixo, assim, introduzindo as condições iniciais na equação geral do movimento (equação 109) é possível se obter as respostas do sistema no domínio do tempo e da frequência, considerando a receptância, mobilidade e aceleração. As figuras 16(a) a (h) mostram o comportamento da resposta do sistema da equação geral do movimento, sendo, as figuras 16(a) e (b) o deslocamento no tempo, considerando o deslocamento lateral e angular, respectivamente. As figuras 16(c) e (d), mostram a receptância na frequência e seus respectivos ângulos de fase, considerando o deslocamento lateral e angular, respectivamente, as figuras 16(e) e (f), mostram a mobilidade na frequência e seus respectivos ângulos de fase, considerando o

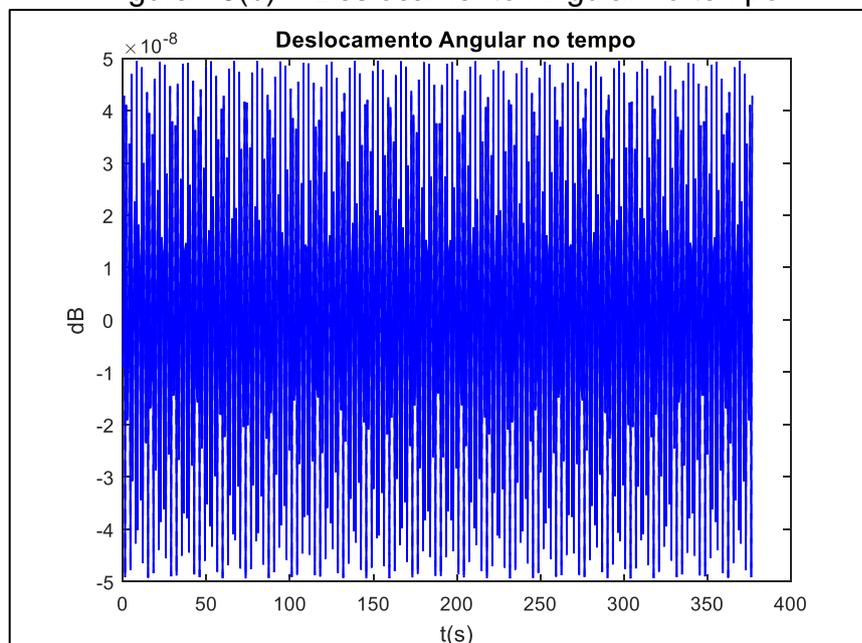
deslocamento lateral e angular, respectivamente; as figuras 16(g) e (h), mostram a aceleração na frequência e seus respectivos ângulos de fase, considerando o deslocamento lateral e angular, respectivamente.

Figura 16(a) – Deslocamento Lateral no tempo



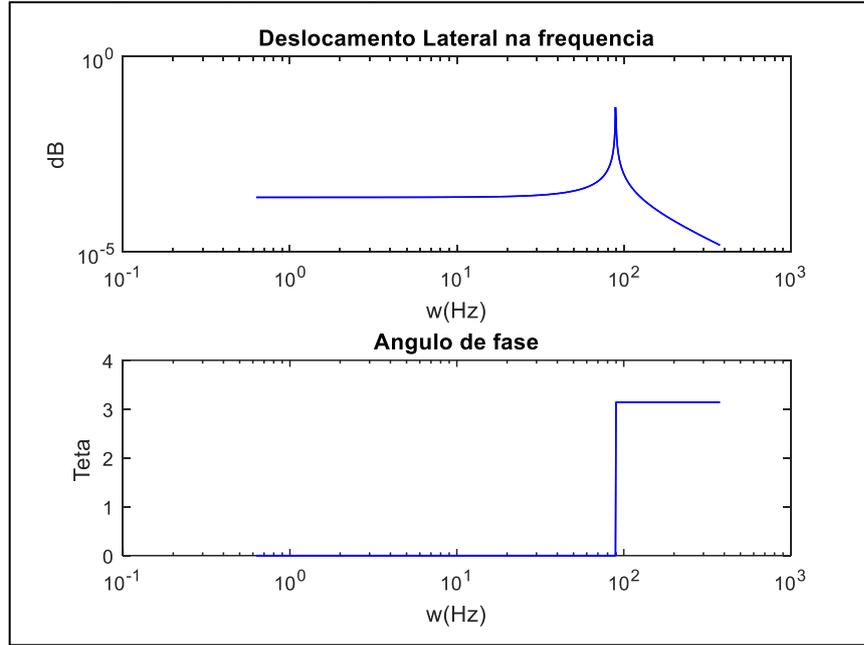
Fonte: Próprio autor.

Figura 16(b) – Deslocamento Angular no tempo



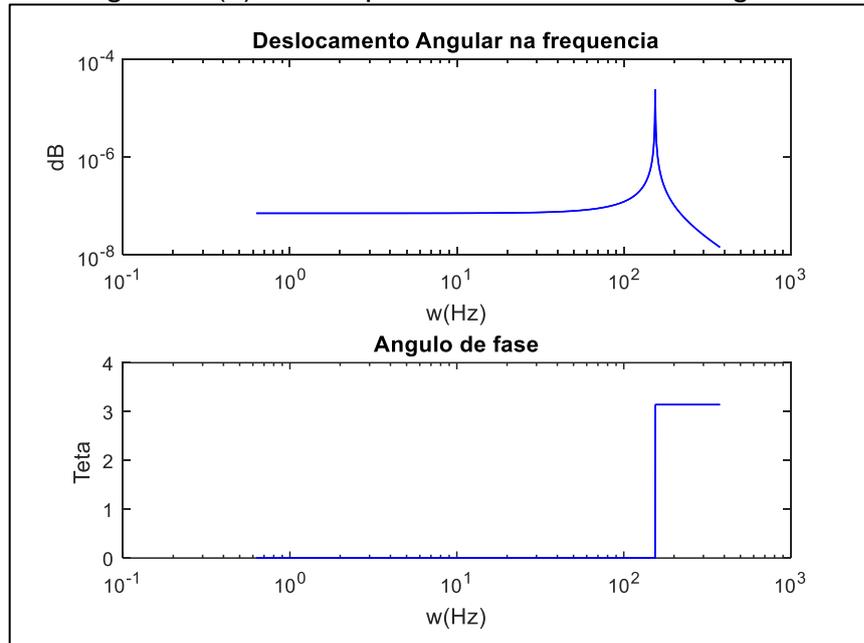
Fonte: Próprio autor.

Figura 16(c) – Receptância Deslocamento Lateral



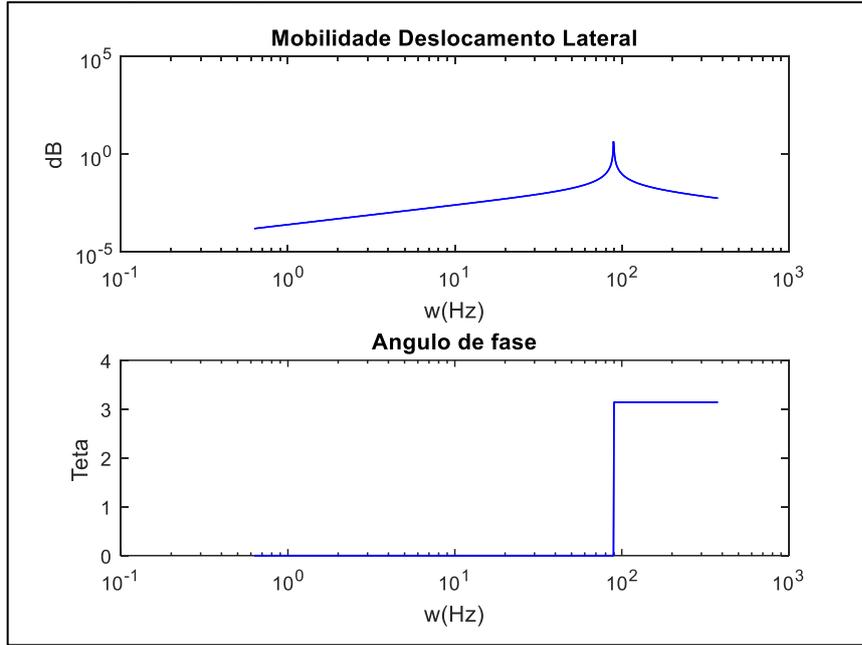
Fonte: Próprio autor.

Figura 16(d) – Receptância Deslocamento Angular



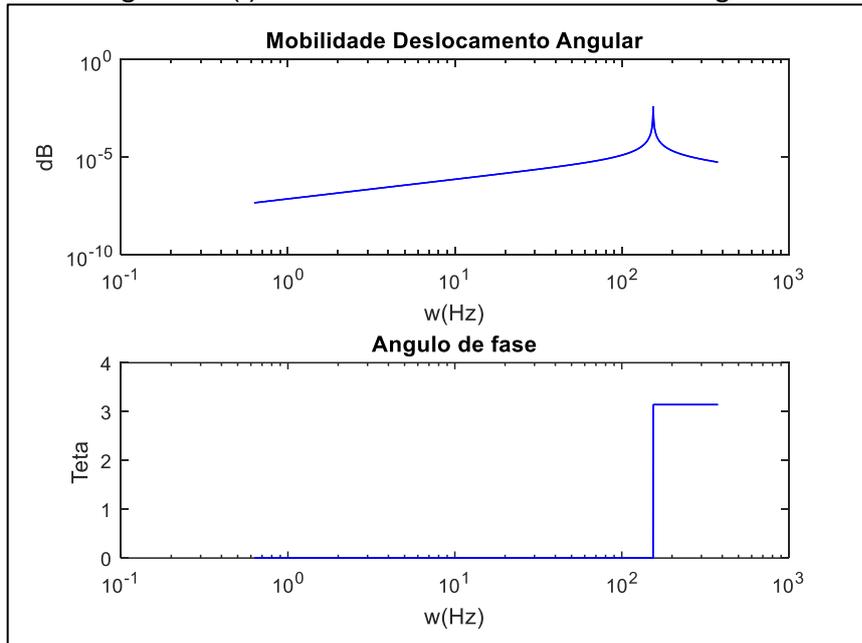
Fonte: Próprio autor.

Figura 16(e) – Mobilidade Deslocamento Lateral



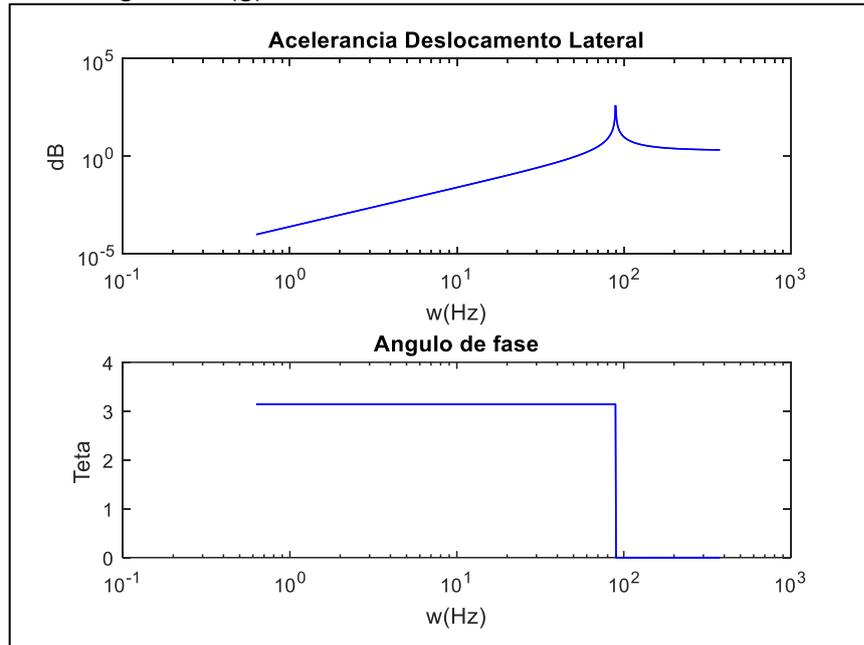
Fonte: Próprio autor.

Figura 16(f) – Mobilidade Deslocamento Angular



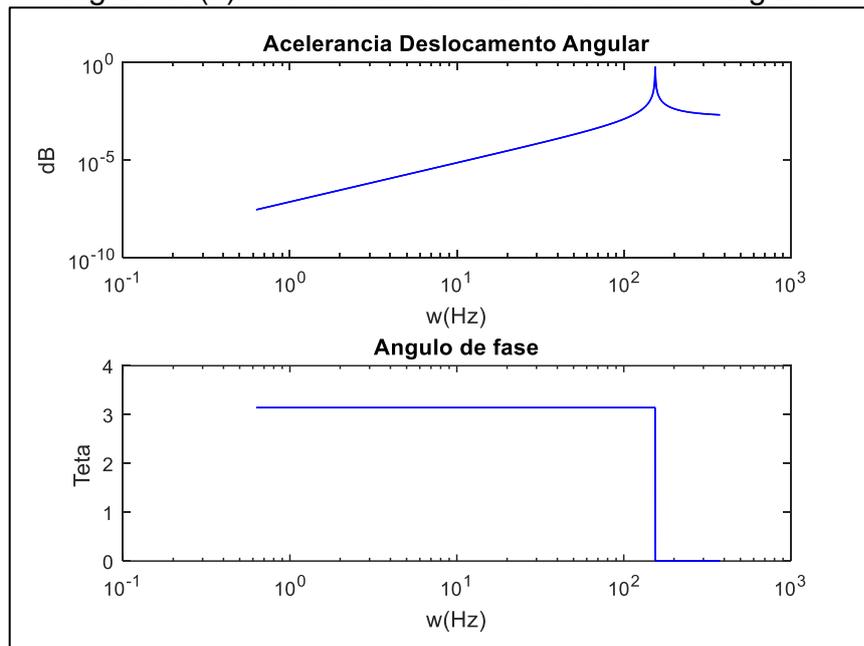
Fonte: Próprio autor.

Figura 16(g) – Acelerância Deslocamento Lateral



Fonte: Próprio autor.

Figura 16(h) – Acelerância do Deslocamento Angular



Fonte: Próprio autor.

## 4.2 Modelo Experimental

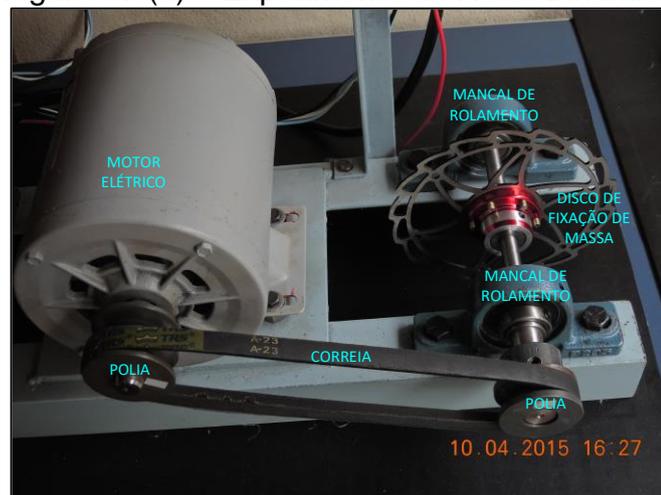
O modelo experimental tem a finalidade de simular o comportamento de um sistema dinâmico real e, assim, foi desenvolvido um experimento baseado na teoria de *Jeffcott*, cuja vibração, possa ser captada através de sensores e equipamentos apropriados.

#### 4.2.1 Aplicação do Experimento

O experimento foi projetado contendo um motor elétrico e um eixo apoiado em dois mancais de rolamento P205 UC205 (rotor), todos apoiados sobre uma única base. O eixo do motor elétrico, acoplado a uma polia, está conectado a uma correia, a qual, também está conectada a outra polia do rotor dinâmico. A transferência de energia rotacional é feita através da correia, cuja velocidade rotacional é alterada por um inversor de frequência, atuando de 0,1Hz a 60Hz. As especificações dos equipamentos são: um motor de 0,5cv, 60Hz; o inversor de frequência com capacidade de atuar na frequência de 0,1Hz a 60Hz; o eixo é de aço 1045 e tem diâmetro de 12mm; distância entre eixos de 120mm; dois mancais de rolamento novos P205 UC205 e um mancal de rolamento usado P205 UC205.

O equipamento utilizado para a medição da vibração atua na faixa de frequência de 10Hz a 1KHz, com sensor de vibração de sensibilidade aproximada de 15mA DC, os requisitos dos instrumentos para a medição de intensidade da vibração em máquinas rotativas e alternativas satisfazem a norma ISO2954. A figura 17(a) ilustra o experimento,

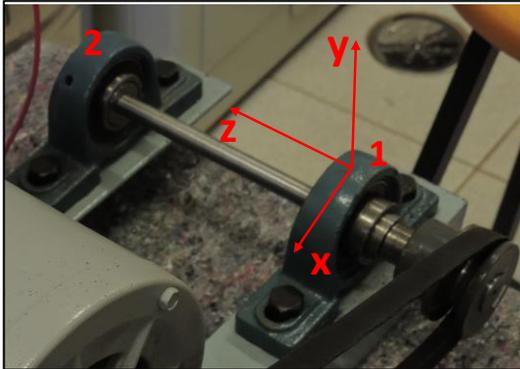
Figura 17 (a) – Experimento do Rotor Dinâmico



Fonte: Outa et al. (2015)

A figura 17(b) mostra a referência de posicionamento do acelerômetro sobre o mancal de rolamento, para a medição da vibração, cujas referências são  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Já a figura 17(c) mostra o detalhe do acelerômetro sobre o mancal de rolamento.

Figura 17(b) – Referência de Medição



Fonte: Outa et al. (2015)

Figura 17(c) – Acelerômetro



Fonte: Próprio autor.

As medições das vibrações foram feitas em duas fases distintas, considerando as condições iniciais do sistema. A primeira fase utilizou, como apoio do eixo, dois mancais novos, e a segunda fase, utilizou um mancal novo e um mancal já usado. Todas as medições, tanto na fase primeira e segunda, foram feitas utilizando as mesmas referências de posicionamento do acelerômetro ( $x, y$  e  $z$ ), e ainda, considerando o posicionamento sobre o mancal 1 e 2, respectivamente. O tempo de coleta de dados foi superior a 1 minuto, totalizando 256 amostras de aceleração em  $m/s^2$ , na condição de *route mean square* RMS.

A tabela 2 mostra as especificações dos mancais de apoio e, também, a sequência de montagem para a coleta da vibração do rotor dinâmico, considerando a primeira e segunda fase, respectivamente.

Tabela 2– Características dos componentes do experimento

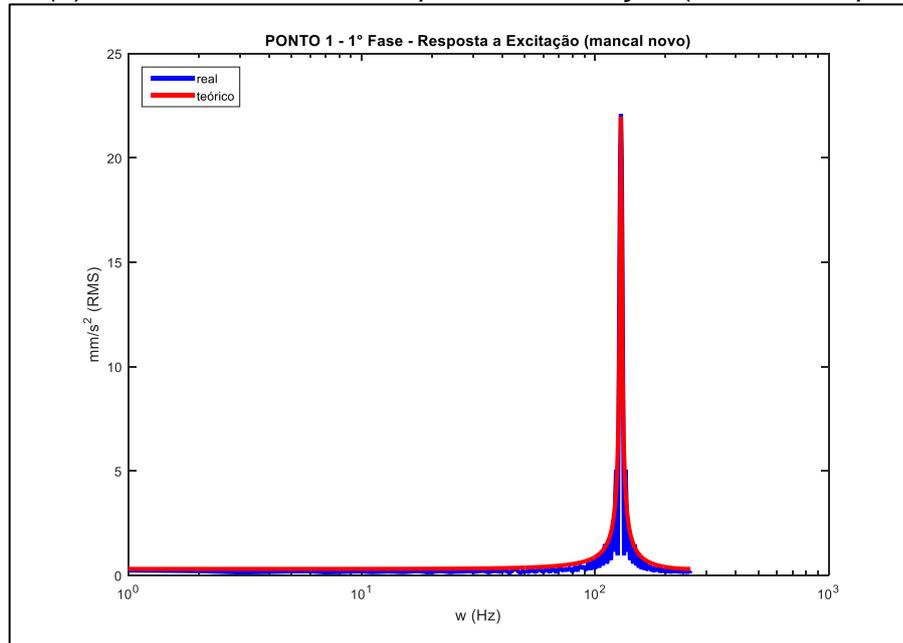
Componente	Posição do Mancal	Característica do Componente	Condição do Componente
P205 UC205	1	Novo	Sem uso
P205 UC205	2	Novo	Sem uso
P205 UC205	1	Novo	Sem uso
P205 UC205	2	Usado	Usado

Fonte: Outa et al. (2015)

O resultado das vibrações do experimento, foram comparadas ao resultado do modelo teórico, totalizando quatro figuras que representam o comportamento da primeira fase, no ponto de coleta 1 e 2, mostrados nas figuras 18(a) e (b); e o

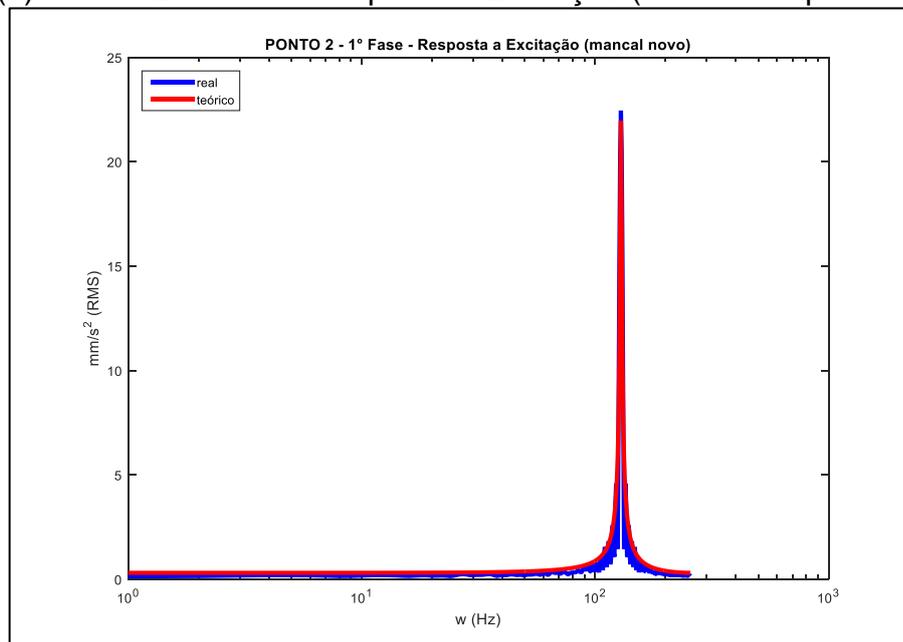
comportamento da segunda fase, também referenciados no ponto 1 e 2, mostrados nas figuras 18(c) e (d).

Figura 18(a)– Ponto 1 - 1° fase Resposta a Excitação (teórico x experimental)



Fonte: Outa et al. (2015)

18(b)– Ponto 2 - 1° fase Resposta a Excitação (teórico x experimental)

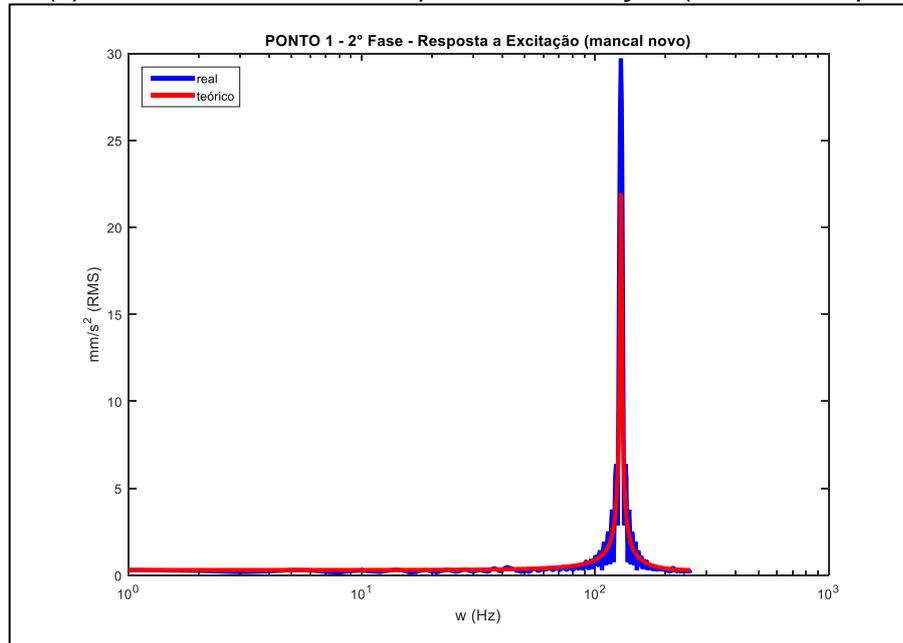


Fonte: Outa et al. (2015)

Observa-se que, nas figuras 18(a) e (b), as amplitudes, resultantes das aplicações do teórico e experimental são similares, quanto ao tamanho e a frequência, com isso, entende-se que os mancais novos podem até possuir um

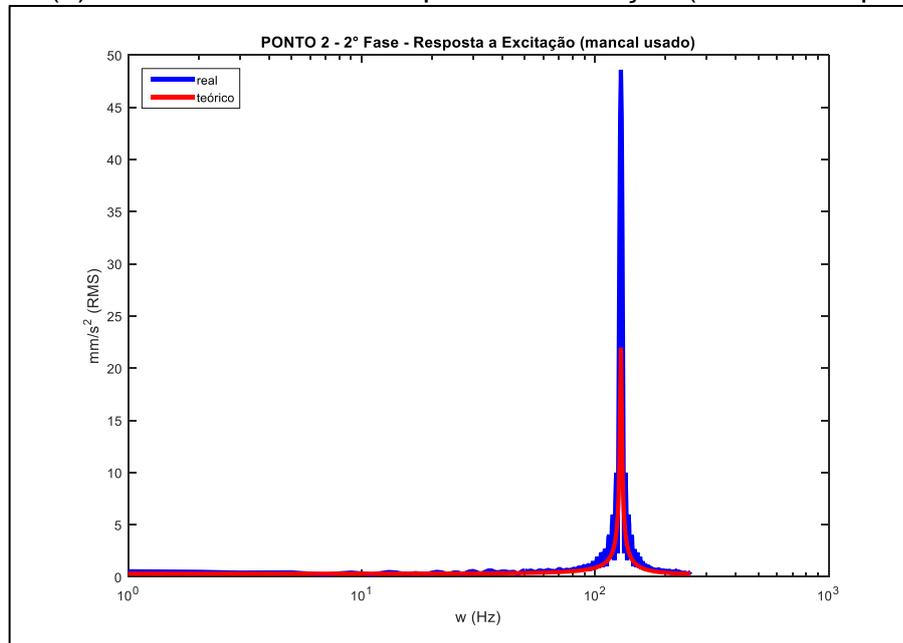
comportamento de falha, porém, este comportamento não é suficientemente significativo para ser mostrado na diferença de amplitude.

Figura 18(c) - Ponto 1 - 2º fase Resposta a Excitação (teórico x experimental)



Fonte: Outa et al. (2015)

Figura 18(d) - Ponto 2 - 2º fase Resposta a Excitação (teórico x experimental)



Fonte: Outa et al. (2015)

Nas figuras 18(c) e (d) nota-se que as frequências são similares, porém, as amplitudes entre o modelo teórico e o experimental são diferentes. Esta observação

pode ser explicada, considerando que um dos mancais novos foi substituído por um mancal já usado e com falhas e medido a vibração do sistema dinâmico.

Portanto, o comportamento característico de um bom funcionamento, com as falhas suprimidas do rotor dinâmico, com base neste trabalho, é aquele que, contenha a resposta em frequência do modelo experimental, similar ao comportamento do modelo teórico, utilizando as mesmas condições iniciais.

A tabela 3 mostra um breve resumo do comportamento da comparação entre o modelo teórico e o experimental, considerando as duas fases.

**Tabela 3– Análise dos resultados para caracterização do experimento**

<b>Comparação entre o modelo teórico com o experimental</b>	<b>Análise Geral</b>
Fase 1 - Aplicação dos mancais novos (ponto 1 e 2)	Similaridade entre as amplitudes e frequência entre o modelo teórico e experimental
Fase 2 - Aplicação do mancal novo e usado (ponto 1 e 2)	Similaridade entre as frequências, porém com diferenças entre as amplitudes do modelo teórico e experimental
Comparação entre as fases 1 e 2	A diferença entre as amplitudes, na fase 2, demonstram que, o sistema, quando contém uma falha significativa, é mostrado pelas diferenças de amplitudes. Portanto, o comportamento na fase 1, pode ser considerado o comportamento ideal, resultando na validação do experimento.

Fonte: Outa et al. (2015)

O método de análise do erro foi desenvolvido baseado no teorema de cálculo amostral finito, considerando a amostra coletada de tamanho 256, o erro foi calculado com 2%, e o índice de confiança é de 95%. A tabela 4 mostra o desvio padrão e a variância em cada ponto medido.

**Tabela 4– Variância e Desvio Padrão do modelo teórico e experimental.**

<b>Condição</b>	<b>Variância e Desvio Padrão</b>		
	<b>Característica do Mancal</b>	<b>Variância</b>	<b>Desvio Padrão</b>
<b>teórico</b>	modelo teórico	0,1027410	0,3205330
<b>ponto 1</b>	novo	0,1518930	0,3897340
<b>ponto 2</b>	novo	0,1502460	0,3876160
<b>ponto 1</b>	novo	0,2632240	0,5130540
<b>ponto 2</b>	usado	0,3697740	0,6080910

Fonte: Outa et al. (2015)

### 4.3 Discussão Geral da Caracterização do Experimento

Ante os resultados encontrados, da medição da amplitude e frequência, entre o modelo teórico e experimental, é possível observar que, os procedimentos e métodos experimentais tem conformidade e podem ser utilizados como referência em experimentações futuras, assim, considera-se que, o experimento está caracterizado. A condição seguinte, é averiguar a estabilidade do sistema quantitativamente através do critério de *Routh-Hurwitz*, que determina o estado da estabilidade analisando as equações que compõem o sistema.

### 4.4 Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Esta sessão trata da análise de estabilidade de sistemas dinâmicos lineares invariante no tempo, cujo critério de *Routh* foi o primeiro teste para se analisar a estabilidade de um polinômio, enquanto que o critério de *Hurwitz* é similar ao de *Routh* (GEROMEL; KOROGUI, 2011; AGUIRRE, 2007).

O critério de *Routh-Hurwitz*, assim chamado, se restringe ao estudo de estabilidade de sistemas dinâmicos a tempo contínuo, porém pode ser generalizado para estudos de estabilidade de sistemas dinâmicos invariante no tempo (GEROMEL; KOROGUI, 2011).

Para Monteiro (2011) e Aguirre (2007) o **Critério de Routh** inicia-se com a construção de uma tabela associada a um polinômio  $p(s)$ ,

$$p(s) = s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0 \quad (115)$$

Este polinômio é escrito em forma de tabela utilizando os coeficientes nas duas primeiras linhas, e após, nas linhas subsequentes, essas são determinadas a partir das duas primeiras linhas. Quando, no término dos coeficientes do polinômio, o preenchimento da tabela é feito acrescentando zero, portanto o limite da tabela é condicionado a um número máximo de  $(n - 1)$  linhas

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \end{bmatrix} \quad (115)$$

A equação que determina a condição de quantidade de linhas pode ser escrita como,

$$r_{ij} = \frac{[r_{i-1,1} \cdot r_{i-2,j+1} - r_{i-2,1} \cdot r_{i-1,j+1}]}{r_{i-1,1}} \quad (116)$$

O sistema é considerado assintoticamente estável quando os elementos da primeira coluna sejam positivos, ou seja,  $r_{i1} > 0$  para  $i = 2, 3, \dots, n + 1$ , e é definido  $r_{21} = a_{n-1}$  e  $r_{n+1,1} = a_0$ . As raízes do polinômio  $p(s)$  com partes reais positivas são exatamente iguais ao número de trocas de sinais na primeira coluna do arranjo.

O Critério de *Hurwitz*, segundo Monteiro (2011) e Aguirre (2007), determina que todas as raízes do polinômio  $p(s)$  possuem partes reais negativas, se e somente se, os valores menores do resultado da determinante da matriz de *Hurwitz* forem positivos. Assim,

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ \vdots & & & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (117)$$

A matriz de *Hurwitz*  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , uma matriz tridiagonal  $S$ , também conhecida como matriz de Schwarz, satisfaz a equação de Lyapunov com uma solução diagonal positiva  $P$ , permite a conclusão da estabilidade assintótica.

Matematicamente, se  $Re(\lambda_j) < 0$  para todo  $j=1, \dots, n$ ; se todos os coeficientes  $a_j$  são positivos, e se não positivos os determinantes  $\Delta_j$  são positivos determinantes  $\Delta_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), assim,

$$\Delta_1 = |a_1|, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = |\vec{H}| \quad (118)$$

#### 4.4.1 Aplicação do critério de Routh-Hurwitz

A aplicação do critério de Routh-Hurwitz se inicia quando as condições iniciais são introduzidas nas equações 102 a 105, que representam as equações do

sistema do rotor dinâmico. Com isso, os parâmetros de rigidez (equações 106 a 108); parâmetros de deslocamento lateral e angular (equações 98 a 101), respectivamente, também são aplicadas, considerando as condições iniciais. Com isso as equações são reescritas,

$$0.5\ddot{x}_G + 0.92443x_G - 0\theta_{yG} = 0 \quad (119)$$

$$0.5\ddot{y}_G + 0.92443y_G - 0\theta_{xG} = 0 \quad (120)$$

$$0.19744\ddot{\theta}_{xG} + 0.32197 \cdot 3.0815\dot{\theta}_{yG} + 0x_G + 0.053121\theta_{xG} = 0 \quad (121)$$

$$0.19744\ddot{\theta}_{yG} - 0.32197 \cdot 3.0815\dot{\theta}_{xG} + 0y_G + 0.053121\theta_{yG} = 0 \quad (122)$$

Transferindo os dados dos coeficientes dos polinômios das equações, para diferentes tabelas e aplicando a condição de  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}$ , assim se tem a solução para as equações, respectivamente,

$$\text{Solução da equação 119, } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & 0.92443 \end{vmatrix}$$

$$\text{Solução da equação 120, } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & 0.92443 \end{vmatrix}$$

$$\text{Solução da equação 121, } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0.19744 & 0 \\ 1 & 0.053121 \end{vmatrix}$$

$$\text{Solução da equação 122, } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0.19744 & 0 \\ 1 & 0.053121 \end{vmatrix}$$

Observa-se que a primeira coluna da esquerda é positiva em todos os termos e os resultados das raízes das equações polinomiais dessas equações, podem ser mostrados na tabela 5.

Tabela 5– Resultado das Raízes das equações polinomiais

Raízes das Equações		
Equação 119	$\Delta_1$	0
	$\Delta_2$	-66667
equação 120	$\Delta_1$	0
	$\Delta_2$	-66667
equação 121	$\Delta_1$	-3327,1
	$\Delta_2$	0
equação 122	$\Delta_1$	-3327,1
	$\Delta_2$	0

Fonte: Lab. UNESP FEIS

Segundo Monteiro (2011) o critério de *Routh-Hurwitz* garante que todas as raízes desse polinômio têm parte real negativa, se os coeficientes  $a_j$  são positivos.

#### 4.4.2 Discussão dos Resultados da aplicação de *Routh-Hurwitz*

Geromel e Korogui (2011) explicam que método de *Routh-Hurwitz* é uma técnica de estabilidade polinomial, que pode ser generalizada para estudos de estabilidade de sistemas dinâmicos invariantes no tempo. Este método demonstra a análise de estabilidade através da equação do polinômio que representa o sistema, sem resolver a equação diretamente, e criterizando-o em estável e instável, portanto, é uma análise qualitativa.

Nos resultados encontrados, onde todas as primeiras colunas do lado esquerdo têm valores positivos e as raízes das equações são negativas, pode-se afirmar que o sistema em estudo é assintoticamente estável.

## 4.5 Motores Elétricos

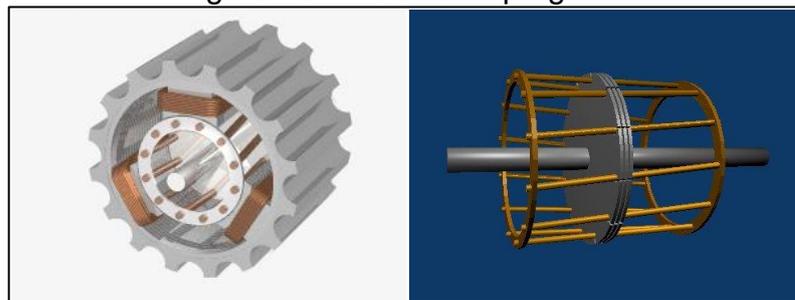
Durante o desenvolvimento do experimento, foi observada a possibilidade da interferência da vibração do motor elétrico nos mancais de rolamento e, com esta consideração, foi investigada a vibração do motor e suas características.

#### 4.5.1 Motores de Indução

No experimento foi utilizado um motor trifásico tipo gaiola, cujos conceitos de motores síncronos não serão comentados. Giri (2013) comenta que o princípio de funcionamento de motores, de corrente alternada AC, são classificados na categoria de indução e síncronos, sendo que ambos convertem energia elétrica AC em energia mecânica.

O motor de indução é o motor de corrente alternada mais amplamente utilizado na indústria, tem características de funcionamento de resistência, cuja composição física é feita por uma parte estacionária, o estator, que é ligado a uma alimentação elétrica e uma parte rotativa, o rotor, que funciona sob a ação de um campo magnético oriundo da alimentação elétrica (AHMAD, 2010). O motor de indução é também considerado um motor trifásico, e que, de uma forma geral, tem sua operação básica de funcionamento através de um campo magnético, que é induzido a uma força eletromotriz (FEM) e, nestes condutores, é gerado um fluxo de corrente que, por fim, exercem um torque no eixo, resultando na rotação do mesmo. O motor trifásico pode ser classificado em duas categorias, a primeira categoria é um motor trifásico de gaiola, constituído de um núcleo de lâminas de aço com os condutores dispostos paralelamente ao eixo e entranhados nas fendas em volta do perímetro do núcleo, enquanto a segunda categoria, é um motor trifásico de rotor bobinado ou enrolado, constituído de um núcleo do estator com lamina de aço provido de ranhuras e os enrolamentos dispostos nestas ranhuras, formam três conjuntos separados de polos (AHMAD, 2010; GIRI, 2013). A figura 19, do lado esquerdo, mostra o desenho esquemático de um motor assíncrono, com o rotor em forma de gaiola, e do lado direito, mostra o detalhe do rotor acoplado na gaiola.

Figura 19– Motor CA tipo gaiola



Fonte: Adaptado Gussow (1985)

A partir de que o campo magnético seja excitado, é gerado a rotação do eixo do rotor, que pode estar sincronizado com este campo magnético, ou com uma diferença nesta sincronia. Os motores AC com característica de sincronia são chamados motores síncronos, e a partida deste motor, podem ser feita através de um enrolamento em gaiola, embutida na face dos polos do rotor, elevando a velocidade a 95%, depois disso o motor é mantido sincronizado pelo torque de sincronismo, (GUSSOW, 1985).

Gussow (1985) considera que o motor de corrente alternada, de comportamento linear, varia conforme a frequência de energia, alterando a velocidade síncrona do rotor,  $v_{sr}(rpm)$ , e pode ser expressa matematicamente como,

$$v_{sr} = \frac{120.f}{n_p} \quad (123)$$

onde  $f$  é a frequência do motor em  $Hz$ , e  $n_p$  é o número total de polos.

Neste trabalho de pesquisa foram utilizadas diferentes frequências na experimentação, 20Hz, 25Hz e 60Hz, conseqüentemente, as  $v_{sr}$  também se alteraram, conforme as diferentes frequências.

As características do motor elétrico AC do experimento são, tensão  $V = 220V$ , potência elétrica do motor em Watts  $P_m = 0.37 Kw$ , potência elétrica do motor em HP  $P_{HP} = 0.50 HP$  ou  $0.50 cv$ . A tabela 6 mostra o resultado teórico calculado das velocidades síncronas, utilizando as informações do motor elétrico do experimento.

Tabela 6– Velocidade síncrona do rotor do motor AC

Frequência (Hz)	Velocidade Síncrona (rpm)	Número Polos
20	600	4
25	750	4
60	1800	4

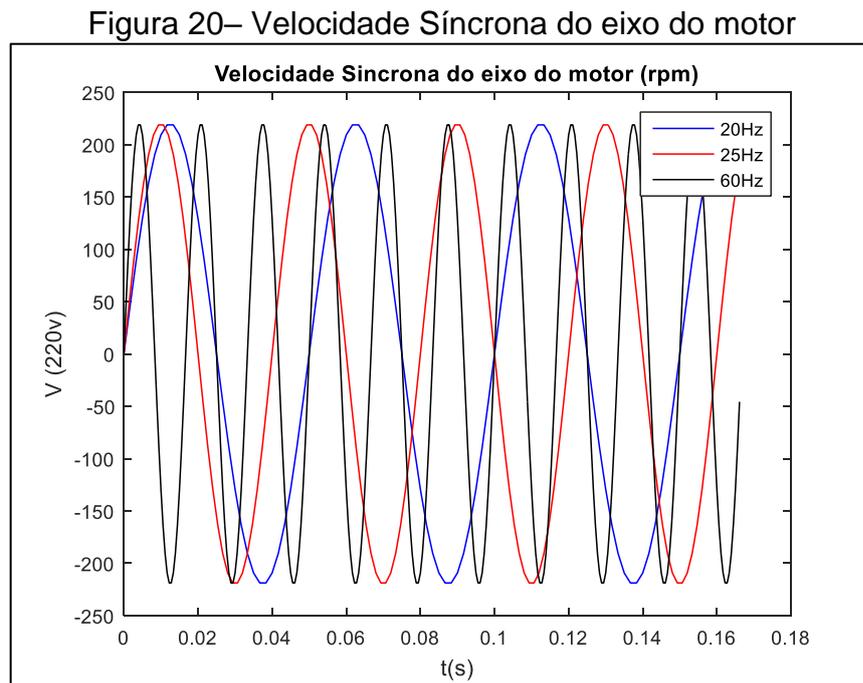
Fonte: Unesp (2017)

Gussow (1985) ainda comenta que a velocidade síncrona do rotor,  $v_{sr}(rpm)$ , pode ser calculada multiplicando tensão  $V$  pelo seno do ângulo de fase, o qual, é

representado pela velocidade angular  $\omega$  multiplicado pelo tempo  $t$ , assim, a expressão matemática pode ser escrita como,

$$v = V \cdot \text{sen}(\omega t) \quad (124)$$

A figura 20 mostra o modelo teórico da relação das velocidades síncronas das frequências de 20Hz, 25Hz e 60Hz.



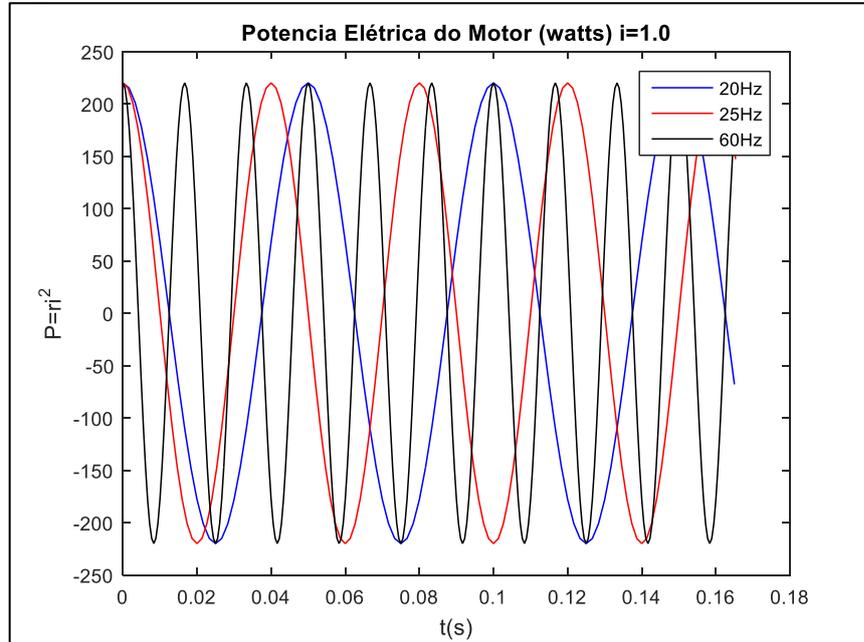
Observa-se que o resultado desta aplicação é uma função periódica, que corresponde à resposta à excitação de um circuito elétrico, e utiliza o conceito de redes lineares. Assim, considerando uma rede linear com tensão aplicada e periódica, a representação matemática da potência média  $P_m$ , pode ser calculada pela seguinte expressão matemática,

$$P_m = V_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos(\theta) = \frac{1}{2} V \cdot I \cdot \cos(\theta) \quad (125)$$

e  $V_{ef} \cdot I_{ef}$  são a tensão e corrente efetiva, respectivamente, e  $V \cdot I$  representam a tensão e corrente, respectivamente, o  $\cos(\theta)$  é o ângulo de fase. As figuras 21 (a) e

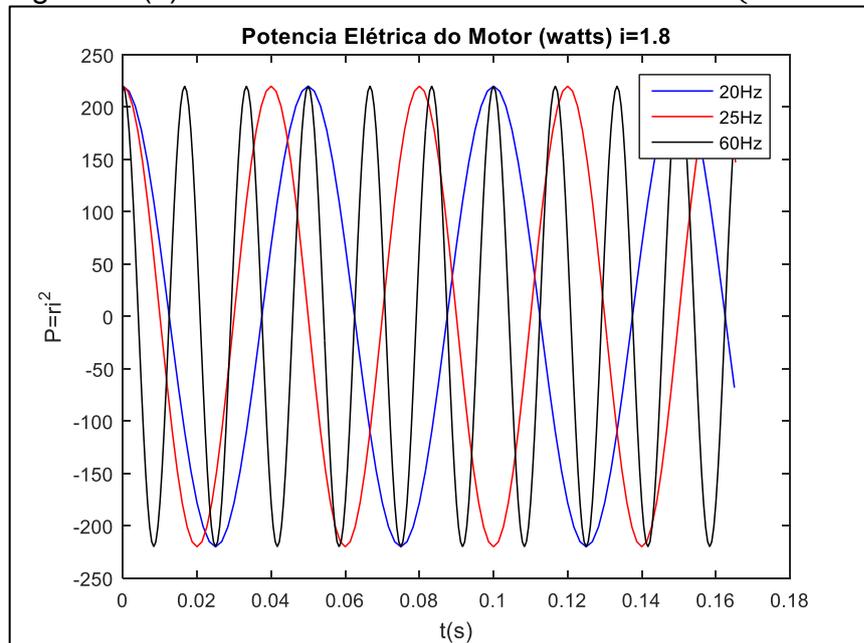
(b) mostram o modelo teórico das potências com corrente de  $i = 1.0A$  e  $i = 1.8A$ , respectivamente, para as frequências de 20Hz, 25Hz e 60Hz.

Figura 21(a)– Potência elétrica do motor em Watts ( $i = 1.0A$ )



Fonte: Lab. UNESP FEIS

Figura 21(b)– Potência elétrica do motor em Watts ( $i = 1.8A$ )



Fonte: Unesp (2017)

Observa-se nas figuras 21(a) e (b), que a amplitude da potência média varia diretamente com a corrente alternada  $i$ , que é a consequência da escolha do tipo de conexão em  $Y$  ou  $\Delta$  determinada para o circuito elétrico.

#### 4.5.2 *Acoplamento da Equação da Velocidade Síncrona com a Equação do Movimento do Rotor Dinâmico*

Isolando o termo da frequência  $f$  no equacionamento da velocidade síncrona  $v_{sr} = \frac{120 \cdot f}{n_p}$ , e substituindo o termo na equação da velocidade angular  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ , teremos,

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{v_{sr} \cdot n_p}{120} \quad (126)$$

substituindo esta equação (126) na equação do deslocamento angular (equações 104 e 105), reescrevemo-as contendo a velocidade síncrona do motor AC,

$$J_t \ddot{\theta}_{xG} + J_p \left( 2 \cdot \pi \cdot \frac{v_{sr} \cdot n_p}{120} \right) \dot{\theta}_{yG} + \gamma x_G + \delta \theta_{xG} = 0 \quad (127)$$

$$J_t \ddot{\theta}_{yG} - J_p \left( 2 \cdot \pi \cdot \frac{v_{sr} \cdot n_p}{120} \right) \dot{\theta}_{xG} + \gamma y_G + \delta \theta_{yG} = 0 \quad (128)$$

#### 4.5.3 *Discussão da Introdução da Equação da Velocidade Síncrona*

No experimento, o eixo do motor elétrico está ligado ao eixo do rotor dinâmico, por meio de uma correia dentada e, desconsiderando as perdas neste processo, a velocidade síncrona do eixo do motor elétrico, que se alterna pela frequência, deve ter os mesmos valores da velocidade do eixo do rotor dinâmico.

Observou-se que os valores da vibração, obtidos na medição do motor elétrico, teve valores constantes ao longo do tempo de medição. Dado este fato, conclui-se que a vibração do motor elétrico não interferiu na vibração medida no mancal de rolamento.

### 4.6 **Discussão Geral da Estabilidade da Caracterização do Experimento**

O sinal do rotor dinâmico, quando medido, deve ser analisado cuidadosamente, devido a uma série de características, informações e, até mesmo, a influência de agentes externos e internos desconhecidos, que podem provocar diferenças nos resultados. Assim, é possível afirmar que durante a experimentação

pode ter ocorrido um erro sistemático, que não causou diferenças significativas nos resultados, conforme mostra a comparação dos resultados encontrados entre as amplitudes do modelo teórico e do experimental, utilizando dois mancais novos.

Considerando todos os fatores comentados, da caracterização do experimento, e do método qualitativo da estabilidade por Routh-Hurwitz, bem como a possibilidade de interferência do motor elétrico, até então, é possível afirmar que, o método e procedimento experimental tem validade e a estabilidade do sistema é assintoticamente estável.

## 5 APLICAÇÃO EM SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES

Considerando que a experimentação foi validada, o procedimento seguinte foi o de analisar a estabilidade do comportamento do sistema, introduzindo o conceito de interferência de forças externas. Para isso, no experimento, foi introduzido uma massa de 0,1kg posicionado no disco, localizado no eixo, equidistante entre os dois mancais.

Considerando o acréscimo desta massa, o modelo experimental teve uma nova configuração das condições iniciais e pode ser definido como:  $m = 0,6 \text{ Kg}$ ;  $k = 20.10^3 \frac{\text{kgf}}{\text{mm}^2}$ ;  $f = 20\text{Hz e } 25\text{Hz}$ ;  $d = 6,0 \text{ mm}$ ;  $a = b = 60,0 \text{ mm}$ ;  $L = 120,0 \text{ mm}$ ;  $\zeta = 0,01$ . Observa-se que, as frequências foram de 20Hz e 25Hz, fator determinado pela condição de limitação do experimento.

Neste experimento, foram utilizados somente os mancais novos, visto que, este é o padrão obtido de similaridade entre as amplitudes e frequência, dos modelos teórico e experimental da caracterização do experimento.

### 5.1 Aplicação Experimental com a Massa Desbalanceadora

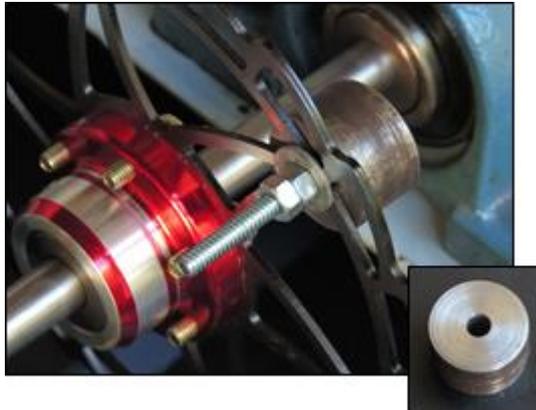
O experimento teve a mesma configuração da caracterização, porém, foi introduzida uma massa de 0,1kg, no disco, para que ocorresse o desbalanceamento do sistema, considerando os efeitos de deslocamento lateral e angular do rotor. A figura 22 mostra o disco fixo no eixo do mancal, e o acelerômetro, posicionado em uma das referências de medição. A figura 23 mostra o detalhe da introdução da massa no disco.

Figura 22 – Detalhe do disco fixo no eixo do rotor dinâmico



Fonte: Próprio autor.

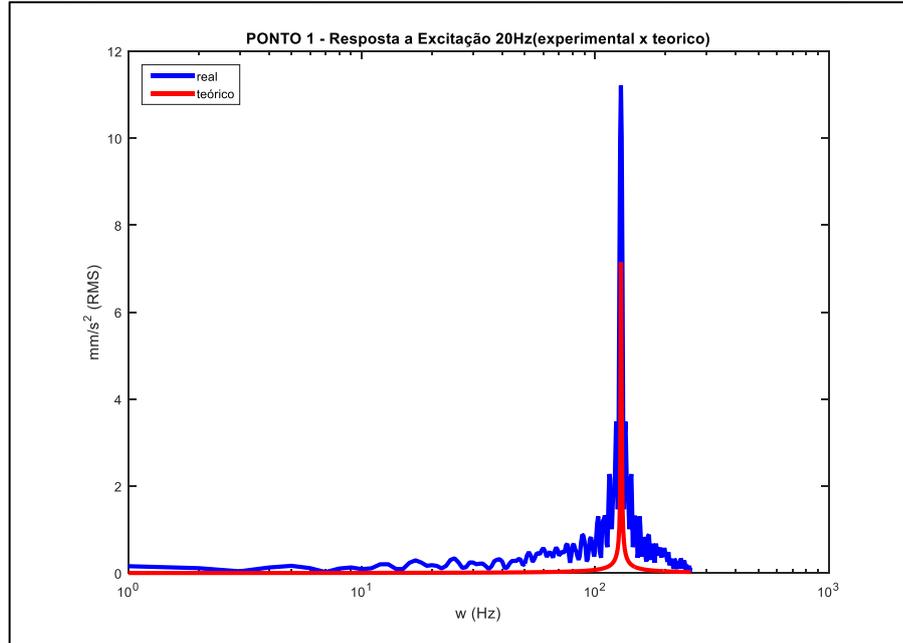
Figura 23 – Detalhe da massa fixada no disco



Fonte: Fonte: Próprio autor.

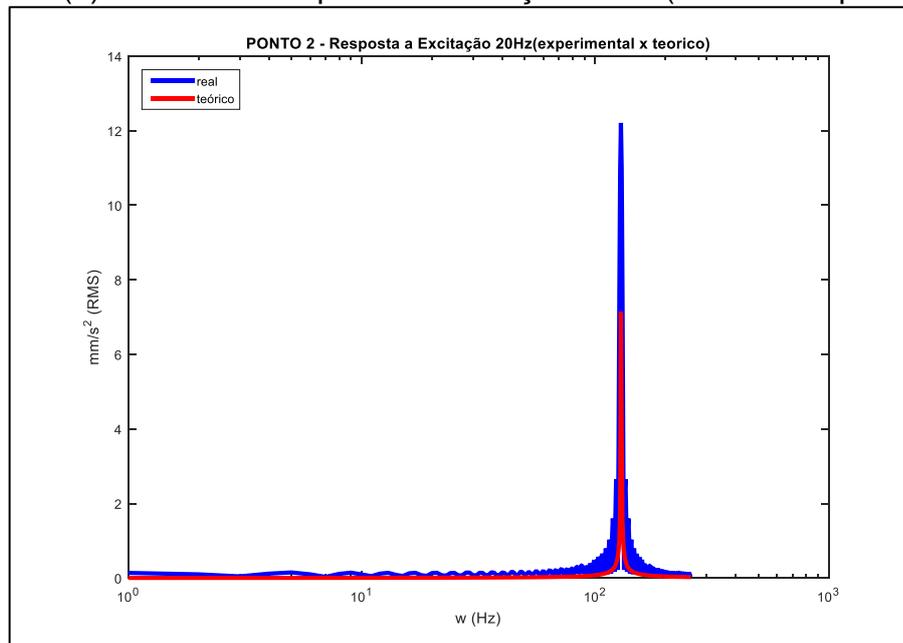
As medições de vibração foram feitas respeitando as mesmas referências do procedimento da caracterização, assim, o acelerômetro foi posicionado utilizando as referências  $x, y$  e  $z$ , nos pontos 1 e 2, respectivamente. O modelo teórico, com a nova configuração das condições iniciais, foi refeito, e assim, obtido um resultado para a amplitude e frequência, com isso, foi possível introduzir graficamente o resultado do modelo teórico e experimental em um único gráfico. As figuras 24 (a) e (b) mostram o resultado da aplicação para  $20Hz$ .

Figura 24(a)- Ponto 1 - Resposta a Excitação 20Hz (teórico x experimental)



Fonte: Próprio autor.

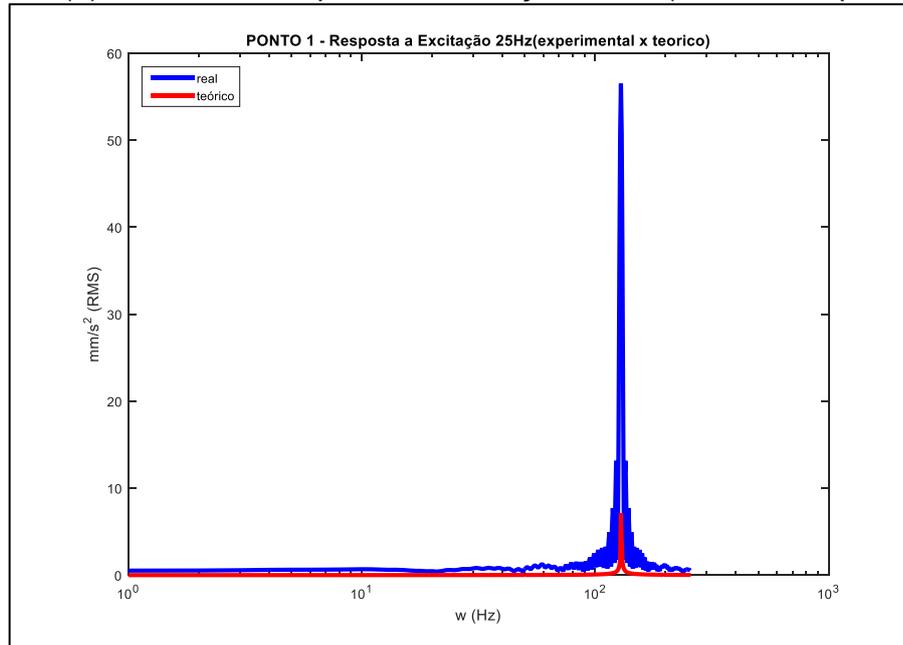
Figura 24(b)- Ponto 2 - Resposta a Excitação 20Hz (teórico x experimental)



Fonte: Próprio autor.

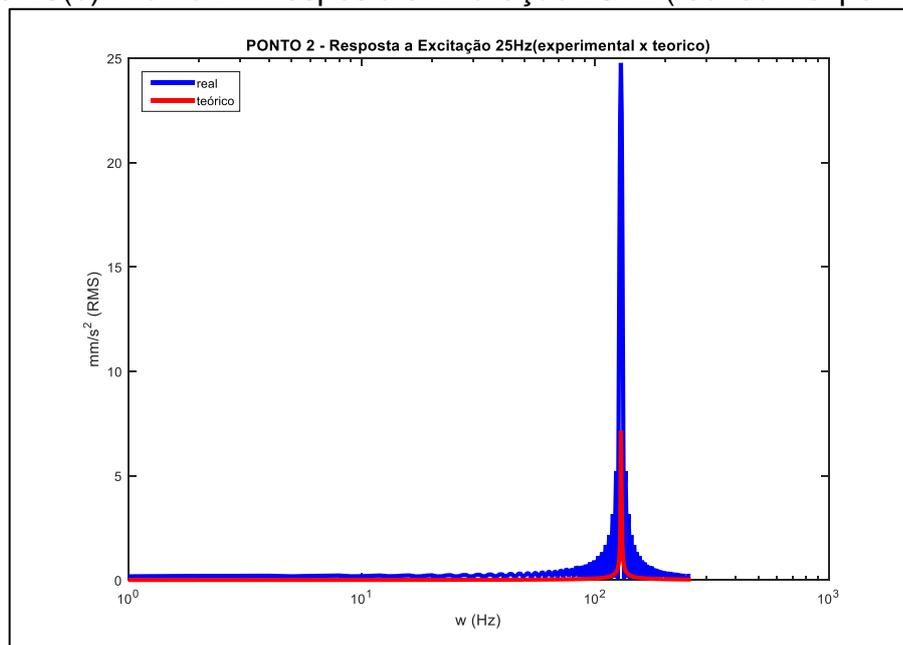
As figuras 25 (a) e (b) mostram a aplicação para a frequência de 25Hz.

Figura 25(a)- Ponto 1 - Resposta a Excitação 25Hz (teórico x experimental)



Fonte: Próprio autor.

Figura 25(b)- Ponto 2 - Resposta a Excitação 25Hz (teórico x experimental)



Fonte: Próprio autor.

Observa-se nas figuras 24(a) e (b), e 25(a) e (b), que as frequências são similares entre o modelo teórico e experimental, já as amplitudes são diferentes entre o modelo teórico e experimental. Da observação da diferença entre as amplitudes, e considerando que os mancais eram novos, é possível afirmar que, a introdução da massa desbalanceadora, causou uma descompensação no sistema que também pode ser analisado pela diferença entre as amplitudes.

O método de análise do erro foi desenvolvido baseado no teorema de cálculo amostral finito, e considerando a amostra coletada de tamanho 256, o erro foi calculado com 2%, e o índice de confiança é de 95%. A tabela 7 mostra o desvio padrão e a variância em cada ponto medido.

Tabela 7 – Variância e Desvio Padrão

---

**Tabela de Variância e Desvio Padrão com Massa Desbalanceadora**

Frequencia (Hz)	Condição do Mancal	Variância	Desvio Padrão
modelo teórico	Teórico	0,016	0,125
20Hz - ponto 1 e 2	novo	0,039	0,198
25Hz - ponto 1 e 2	novo	1,357	1,165

Fonte: Próprio autor.

#### 5.1.1 *Discussão dos Resultados da Introdução da Massa Desbalanceadora*

Considerando que, quando o sistema foi medido, na caracterização as vibrações do experimento com os mancais novos, comparados com o modelo teórico, não apresentaram diferença entre as amplitudes, sendo considerado que as pequenas falhas não foram significativas para a ocorrência de alterações do equilíbrio do sistema.

Utilizando a mesma configuração da caracterização do experimento e introduzindo a massa desbalanceadora, com a frequência de 20Hz e 25Hz, foi possível notar a ocorrência das diferenças entre as amplitudes do modelo teórico e experimental. Este comportamento denota que a ação de uma força externa alterou o comportamento do sistema significativamente, o que pode até ter alterado o comportamento de estabilidade assintótico qualitativo, determinado pelo critério de Routh-Hurwitz.

Diante deste fato, foi necessária a análise de estabilidade, utilizando o teorema de Lyapunov, cujos autovalores e autovetores, que uma vez determinados, poderiam ser caracterizados nas condições de estabilidade.

## 5.2 Análise de Estabilidade – Método Indireto de Lyapunov

O método indireto de Lyapunov, considerado o primeiro método, é aplicado para a identificação da estabilidade do sistema dinâmico. Este método analisa o resultado dos autovalores e autovetores, e os caracteriza de forma que se tenha o tipo de estabilidade e, também, determina o critério desta estabilidade no ponto fixo. A tabela 8 demonstra os resultados dos autovalores e autovetores da aplicação da experimentação com a introdução da massa desbalanceadora (FERRARA; PRADO, 1994, p. 33).

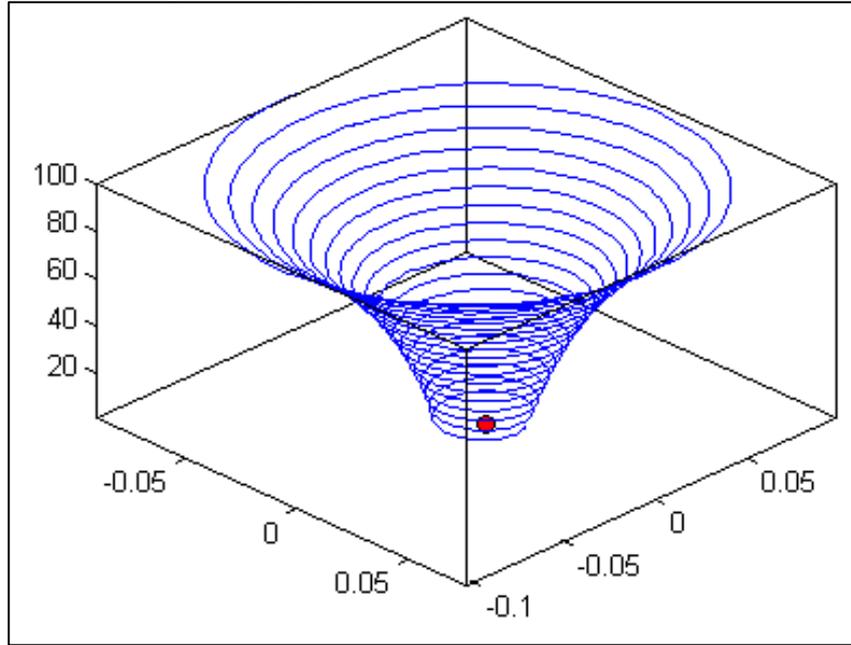
Tabela 8– Resultado de Estabilidade com Massa Desbalanceadora

RESUMO DA TABELA DE ESTABILIDADE - INTRODUÇÃO MASSA 0.1Kg					
Condição		real	imaginário	Ponto Fixo	Análise de Estabilidade
eixo x	1	-0.0020	+ 5.0254i	inflected node (hyperbolic)	assintoticamente estável
	2	-0.0020	- 5.0254i		
eixo y	3	0.0202	+ 1.2416i	inflected node (hyperbolic)	assintoticamente estável
	4	0.0202	- 1.2416i		
deslocamento angular x	5	0.0123	+ 1.2415i	inflected node (hyperbolic)	assintoticamente estável
	6	0.0123	- 1.2415i		
deslocamento angular y	7	-0.0840	0	sela (hyperbolic)	instável
	8	0.0229	0		

Fonte: Unesp (2017)

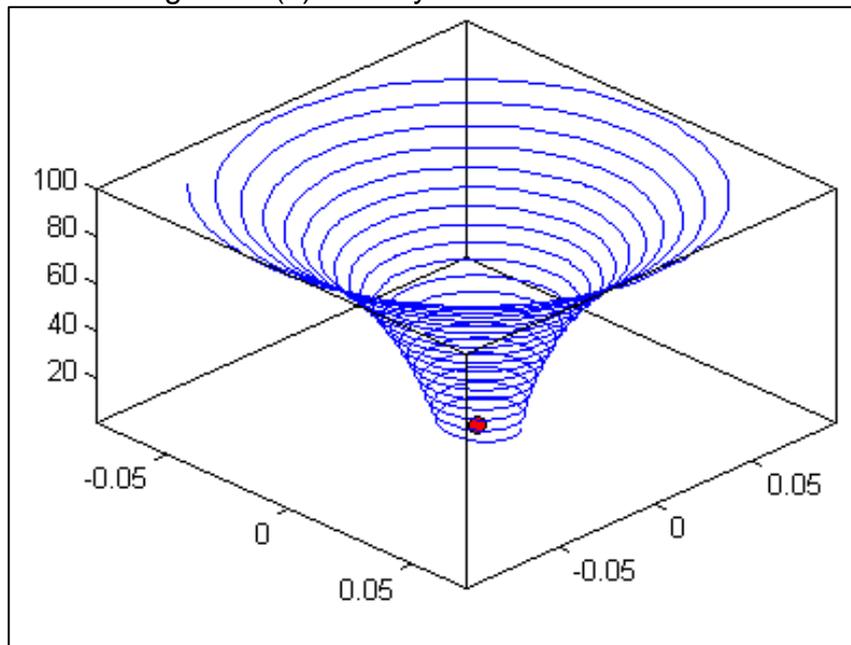
Nota-se que, na tabela 8, o deslocamento lateral do eixo em  $x$  e  $y$ , tem estabilidade assintoticamente estável e ambos têm o ponto fixo considerado um *inflected node* (hiperbólico). Enquanto que, no deslocamento angular em  $x$ , a estabilidade angular é assintoticamente estável, com o ponto fixo *inflected node* (hiperbólico) e deslocamento angular em  $y$ , é uma sela (hiperbólica) na condição instável. A representação gráfica do deslocamento lateral em  $x$  e  $y$ , e o deslocamento angular em  $x$  e  $y$ , pode ser mostrada nas figuras 26(a), 26(b), 26(c) e 26(d).

Figura 26(a) - Eixo x deslocamento lateral



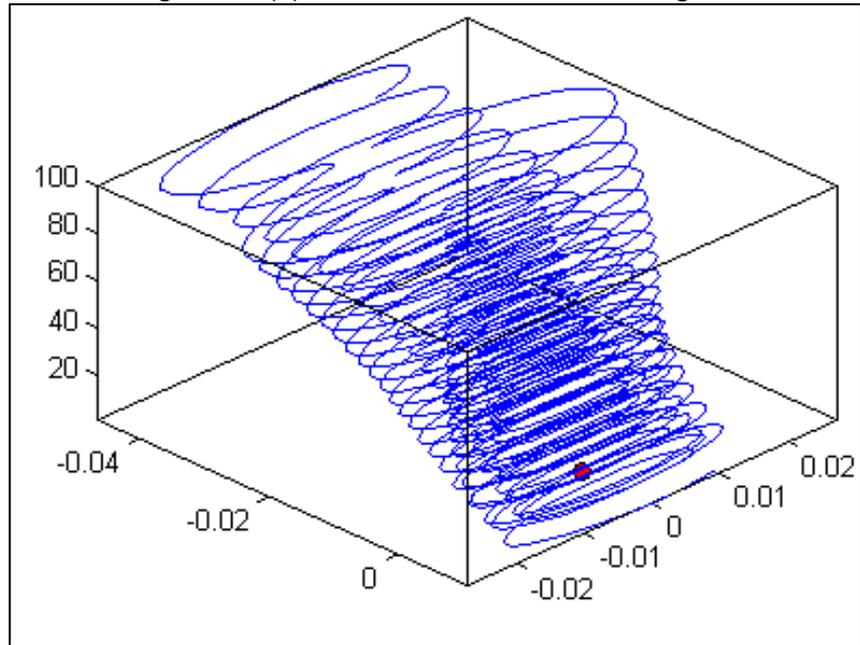
Fonte: Próprio autor.

Figura 26(b) - Eixo y deslocamento lateral



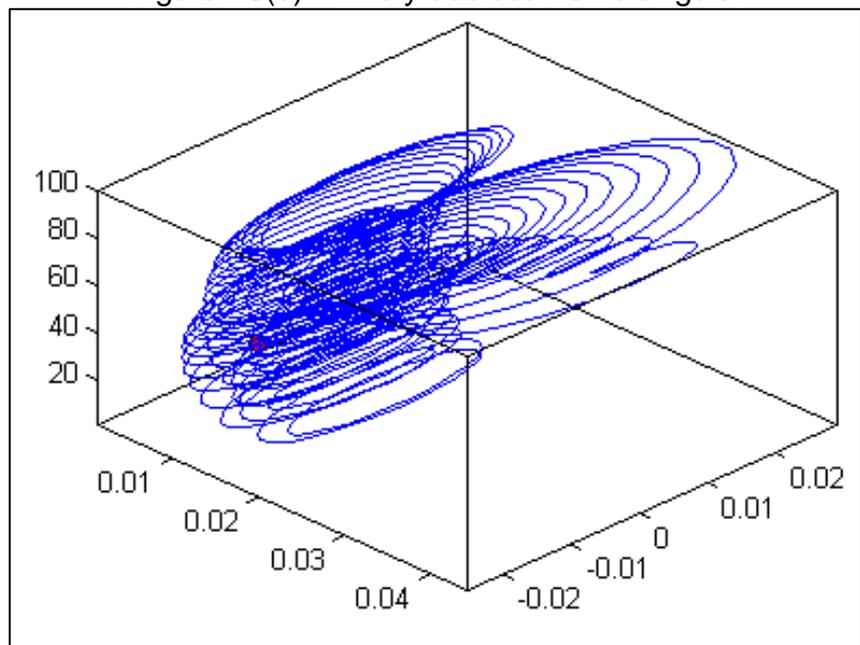
Fonte: Próprio autor.

Figura 26(c) - Eixo x deslocamento angular



Fonte: Próprio autor.

Figura 26(d) - Eixo y deslocamento angular



Fonte: Próprio autor.

### 5.3 Discussão Geral da Análise de Estabilidade – Método Indireto de Lyapunov

Partindo do conceito de que, a estabilidade estável, ocorre quando a resposta do sistema, dada a uma pequena perturbação, permanece pequena, quando o tempo tende ao infinito. O conceito de estabilidade instável ocorre quando

a resposta do sistema, dada a uma perturbação, cresce, quando o tempo tende ao infinito, cuja condição é considerada um sistema repulsor ou fonte (FERRARA, PRADO, 1994).

Nota-se que os resultados dos autovalores e autovetores determinaram que, com a massa introduzida no sistema, este é considerado instável.

#### 5.4 Simulação Computacional com Alteração de Massa e Rigidez

A introdução da massa no experimento mostrou que o resultado de estabilidade do sistema tem comportamento instável, esta investigação do estado foi feita, baseada na detecção de uma anomalia apresentada na diferença entre as amplitudes do modelo teórico e experimental. Contudo, dada a limitação do experimento, não foi possível que o sistema fosse investigado na frequência de 60Hz, sendo que, o critério de instabilidade foi feito utilizando 20Hz e 25Hz.

Com isso, é importante investigar o sistema, considerando as condições iniciais, quando o sistema atua a 60Hz, assim, nesta sessão, foram investigadas as condições de estabilidade do sistema através de simulação computacional na frequência de 60Hz.

A simulação computacional foi dividida em etapas, sendo,

- A primeira fase, a simulação computacional utilizando as condições iniciais  $m = 0,6 \text{ Kg}$ ;  $k = 20 \cdot 10^3 \frac{\text{kgf}}{\text{mm}^2}$ ;  $f = 60\text{Hz}$ ;  $d = 6,0 \text{ mm}$ ;  $a = b = 60,0 \text{ mm}$ ;  $L = 120,0 \text{ mm}$ ;  $\zeta = 0,01$ ;
- A segunda fase, a simulação computacional considerando as seguintes condições iniciais,  $m = 0,01 \text{ Kg}$ ;  $k = 20 \cdot 10^3 \frac{\text{kgf}}{\text{mm}^2}$ ;  $f = 60\text{Hz}$ ;  $d = 6,0 \text{ mm}$ ;  $a = b = 60,0 \text{ mm}$ ;  $L = 120,0 \text{ mm}$ ;  $\zeta = 0,01$ ;
- A terceira fase, a simulação computacional considerando as seguintes condições iniciais,  $m = 0,6 \text{ Kg}$ ;  $k = 20 \frac{\text{kgf}}{\text{mm}^2}$ ;  $f = 60\text{Hz}$ ;  $d = 6,0 \text{ mm}$ ;  $a = b = 60,0 \text{ mm}$ ;  $L = 120,0 \text{ mm}$ ;  $\zeta = 0,01$ .

O resultado de cada fase apresentou autovalores e autovetores, que serão caracterizados conforme as especificações contidas na tabela do critério de estabilidade de Lyapunov (FERRARA; PRADO, 1994).

A Simulação computacional da primeira fase pode ser verificada na tabela 9, considerando as condições iniciais já comentadas.

Tabela 9 – Autovalores e Autovetores – Simulação Computacional 60Hz

SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL (60Hz)					
Condição		real	imaginário	Ponto Fixo	Análise de Estabilidade
eixo x	1	-0.0020	+ 5.0254i	inflected node (hyperbolic)	assintoticamente estável
	2	-0.0020	- 5.0254i		
eixo y	3	0.0202	+ 1.2416i	inflected node (hyperbolic)	assintoticamente estável
	4	0.0202	- 1.2416i		
deslocamento angular x	5	0.0123	+ 1.2415i	inflected node (hyperbolic)	assintoticamente estável
	6	0.0123	- 1.2415i		
deslocamento angular y	7	-0.0840	0	sela (hyperbolic)	instável
	8	0.0229	0		

Fonte: Próprio autor.

A tabela 10 mostra o resultado dos autovalores e autovetores, oriundo da simulação computacional, considerando as condições iniciais da segunda fase;

Tabela 10 – Autovalores e Autovetores – Simulação Computacional  $m = 0.01 \text{ Kg}$ ;

SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL - ALTERAÇÃO DA MASSA 0,01Kg					
Condição		real	imaginário	Ponto Fixo	Análise de Estabilidade
eixo x	1	-0.0168	+ 9.6148i	inflected node (hyperbolic)	assintoticamente estável
	2	-0.0168	- 9.6148i		
eixo y	3	0.0053	+ 9.6147i	inflected node (hyperbolic)	assintoticamente estável
	4	0.0053	- 9.6147i		
deslocamento angular x	5	0.0421	+ 5.0254i	inflected node (hyperbolic)	assintoticamente estável
	6	0.0421	- 5.0254i		
deslocamento angular y	7	-0.0842	0	sela (hyperbolic)	instável
	8	0.0229	0		

Fonte: Próprio autor.

A tabela 11 mostra o resultado dos autovalores e autovetores, oriundo da simulação computacional, considerando as condições iniciais da terceira fase;

Tabela 11 – Autovalores e Autovetores – Simulação Computacional  $k = 20 \frac{Kg}{mm^2}$

SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL - ALTERAÇÃO DE RIGIDEZ 20Kg/mm <sup>2</sup>					
Condição		real	imaginário	Ponto Fixo	Análise de Estabilidade
eixo x	1	-0.0020	+ 5.0254i	inflected node (hyperbolic)	assintoticamente estável
	2	-0.0020	- 5.0254i		
eixo y	3	0.0202	+ 1.2416i	inflected node (hyperbolic)	assintoticamente estável
	4	0.0202	- 1.2416i		
deslocamento angular x	5	0.0123	+ 1.2415i	inflected node (hyperbolic)	assintoticamente estável
	6	0.0123	- 1.2415i		
deslocamento angular y	7	-0.0840	0	sela (hyperbolic)	instável
	8	0.0229	0		

Fonte: Próprio autor.

Observa-se, de uma forma geral, que as análises de estabilidade, do deslocamento lateral do eixo  $x$  e  $y$ , e do deslocamento angular em  $x$ , são assintoticamente estáveis, porém, o deslocamento angular em  $y$ , por sua vez é instável. Portanto, todo o sistema pode ser considerado instável.

Nesta condição, sabendo-se que a instabilidade evolui com o tempo, é necessário investigar se o sistema está associado a um comportamento caótico, pois, o caos pode ser entendido como as pequenas diferenças na forma atual, irão se tornar grandes consequências, na forma, em um futuro próximo (SMITH, 2007).

## 5.5 Análise da Dinâmica Caótica – Funções de Lyapunov

Conforme visto na simulação computacional, o sistema é instável, logo, é importante definir, se o sistema tem comportamento caótico e, assim, para se definir este conceito, avalia-se a sensibilidade das condições iniciais, considerando que, o sistema, se movimenta no tempo discreto ou contínuo. Neste conceito é considerado o teorema do expoente de Lyapunov (SAVI, 2006; FERRARA; PRADO, 1994; MONTEIRO, 2011).

Considerando as três fases da simulação computacional, que contém diferentes informações das condições iniciais, foi feita a simulação computacional utilizando o conceito do expoente de Lyapunov, para se encontrar o resultado do autovalor, cujo resultado, pode ser mostrado na tabela 12.

Tabela 12– Autovalor do Expoente de Lyapunov

---

**Simulação Computacional - Expoente de Lyapunov**

---

<b>Autovalor</b>	<b>Introdução da Massa 0,1kg</b>	<b>Alteração de Massa</b>	<b>Alteração de Rigidez</b>
$\lambda_1$	0,0200	0,0239	0,0200
$\lambda_2$	0,0164	0,0002	0,0164
$\lambda_3$	0,0168	0,0215	0,0168
$\lambda_4$	0,0132	-0,0023	0,0132
$\lambda_5$	0,0182	0,0192	0,0182
$\lambda_6$	-0,0019	0,0092	-0,0019
$\lambda_7$	-0,0295	-0,0184	-0,0295
$\lambda_8$	-0,0530	-0,0532	-0,0530

---

Fonte: Próprio autor.

Observa-se que, os autovalores, na condição da primeira fase, da segunda fase, e da terceira fase, contém resultados com os sinais positivos e negativos. Considerando uma análise geral, dado os valores positivos resultantes da simulação computacional, é possível afirmar que, “a existência de pelo menos um expoente positivo está associado ao caos, no caso de mais de um expoente positivo é convencionalmente chamado de hipercaos” (SAVI, 2006, p.169).

Assim, entende-se que o sistema do rotor dinâmico tem o comportamento caótico.

## **5.6 Discussão Geral Sobre a Estabilidade do Sistema**

Com a introdução da massa de 0,1kg no experimento do rotor dinâmico, notou-se, através das diferenças de amplitudes, que os efeitos do deslocamento lateral e angular, continuam irregularidades, das quais se investigou a estabilidade do sistema, considerando o teorema de Lyapunov. Esta condição experimental se

limitou a trabalhar com as frequências de  $20\text{Hz}$  e  $25\text{Hz}$ , pois, o experimento era limitado estruturalmente para atender à condição de  $60\text{Hz}$ .

Demonstrado o estado instável do sistema, foi possível simular computacionalmente três fases distintas, cada qual, com a sua respectiva condição inicial, todas na frequência de  $60\text{Hz}$ , cujo resultado destas simulações, mostraram que o sistema tem comportamento instável.

Com isso, foi possível determinar a necessidade de investigar a instabilidade do sistema, analisando a sensibilidade das condições iniciais, cujo teorema aplicado é considerado o expoente de Lyapunov. Deste resultado, foi possível analisar que o sistema instável também tem comportamento caótico.

O resultado da análise de estabilidade, é o de que o sistema, com a massa introduzida tem comportamento instável e caótico.

Considerando que o comportamento é caótico, foi necessário investigar a possibilidade de controlar este sistema, reduzindo este estado para o estado estável até o ponto de equilíbrio.

## 6 TEORIA DE CONTROLE

Nesta seção, foi desenvolvido um projeto de controle linear ótimo, para o controle do estado instável e caótico do rotor dinâmico, reduzindo o movimento oscilatório caótico, até um ponto estável.

### 6.1 Controle Linear Ótimo

Devido à simplicidade de configuração e implementação, o controle de realimentação de estado linear, foi proposto por Rafikov e Balthazar (2008) e aplicado em vários sistemas (Chavarette et al, 2010; 2011; 2012; 2013a; 2013b) e em problemas propostos (COSTA; PAIVA, 2002). Observa-se que esta abordagem é analítica, sem descartar qualquer termo não-linear.

Considerando as equações de movimento não lineares que governam o sistema (102 a 105) estas podem ser reescritas na forma de estado, considerando a condição

$$\dot{x} = Ax + g(x) + U \quad (159)$$

Aqui, consideramos uma função vetorial  $\tilde{x}$ , que caracteriza a direção da trajetória, e o vetor de controle  $U$  consiste em duas partes:  $\tilde{u}$  sendo a *feed forward*, e  $u_f$  uma resposta linear, de tal forma que,

$$u_f = Bu \quad (160)$$

onde  $B$  é uma matriz constante. Após, utilizando a divergência da trajetória do sistema, eq. 160, para desejado,  $y = x - \tilde{x}$ , esta pode ser escrita como,

$$\dot{y} = Ay + g(x) - g(\tilde{x}) + Bu \quad (161)$$

o qual  $G(y, \tilde{x})$  é uma matriz limitada. Assim, provamos o resultado importante (RAFIKOV, BALTHAZAR, 2008). A seguir, apresentamos um resultado importante, relativo a uma lei de controle que garante estabilidade para um sistema

não-linear e minimiza um funcional de desempenho não quadrático. Se existirem matrizes  $Q(T)$  e  $R(t)$ , definida, sendo  $Q$  simétrica positiva, de tal modo que a matriz:

$$\tilde{Q}(y, t) = Q(t) - G^T(y)P(t) - P(t)G(y) \quad (162)$$

É positiva definida para a matriz delimitada  $G$ , então o controle do retorno linear é,

$$u = -R^{-1}B^T P(t)y \quad (163)$$

é ótimo, de modo a transferir o sistema não linear, a partir do estado inicial para o estado final,

$$y(t_f) = 0 \quad (164)$$

Minimizando a função:

$$J = \int_0^{t_f} (y^T \tilde{Q}y + u^T Ru) dt \quad (165)$$

Portanto a matriz simétrica  $P(t)$  é avaliada através da solução da equação diferencial de Riccati:

$$\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (166)$$

Satisfazendo a condição final:

$$P(t_f) = 0 \quad (167)$$

Além disso, com o controle de retorno (163), existe uma vizinhança  $\Gamma_0 \subset \Gamma$ ,  $\Gamma \subset \mathfrak{R}^n$ , a origem de tal modo que se  $y_0 \in \Gamma_0$ , a solução  $y(t) = 0, t > 0$ , do sistema controlado (161) é localmente assintoticamente estável, e  $J_{min} = y_0^T P(0)y_0$ .

Finalmente, se  $\Gamma = \mathfrak{R}^n$ , em seguida, a solução  $y(t) = 0, t > 0$  do sistema controlado (161) é global assintoticamente estável.

Considerando que o controle linear de retorno (163), com uma matriz  $P$  determinada pela equação (166), transfere o sistema não linear (161) a partir de um estado inicial para o final (165), minimizando a função (166), cuja matriz precisa ser determinada.

De acordo com as regras da programação dinâmica, sabe-se que se o mínimo da função (161) existe, e se,  $V$  é uma função fraca das condições iniciais, então, o mesmo satisfaz a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, (BRYSON, 2002):

$$\min_u = \left( \frac{dV}{dt} + y^T \tilde{Q}y + u^T Ru \right) = 0 \quad (168)$$

Considerando a função:

$$V = y^T P(t)y \quad (169)$$

onde,  $P(t)$  é uma matriz simétrica positiva definida e satisfaz a equação diferencial de Riccati (166). Note que a derivada da função  $V$  avaliada na trajetória ótima com controle dado por (166) é:

$$\dot{V} = \dot{y}^T P(t)y + y^T \dot{P}(t)y + y^T P \dot{y} = [y^T A^T(t) + y^T G^T(y) - y^T P(t)B(R^{-1})^T B^T]P(t)y + y^T \dot{P}(t)y + y^T P(t)[A(t)y + G(y)y - BR^{-1}B^T P(t)y] \quad (170)$$

Então substituindo  $\dot{V}$  na equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (168), obtemos:

$$y^T [\dot{P} + A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + G^T(y)P + PG(y) + \tilde{Q}]y = 0 \quad (171)$$

Então:

$$\tilde{Q} = Q(t) - G^T(y)P(t) - P(t) - P(t)G(y) \quad (172)$$

Note-se que para uma matriz positiva definida  $\tilde{Q}$  e  $R$ , a derivada da função (169) é dada por  $\dot{V} = -y^T \tilde{Q}y - u^T Ru$ , e é negativa definida. Então, a função (169) é

uma função de Lyapunov, e o sistema controlado (161) é localmente assintoticamente estável.

Integrando a derivada da função de Lyapunov (169), dado por  $\dot{V} = -y^T \tilde{Q}y - u^T Ru$ , ao longo da trajetória ótima, obtemos  $J_{min} = y_0^T P(0)y_0$ .

Finalmente, se  $\Gamma \subset \mathfrak{R}^n$ , a estabilidade assintótica geral segue como consequência direta da condição radial ilimitada para a função de Lyapunov (165)  $V(y) \rightarrow \infty$ , como  $\|y\| \rightarrow \infty$ .

Observamos que, segundo a teoria de controle ótimo de sistemas lineares com funcional quadrático (ANDERSON, MOOR, 1990) a solução da equação de Riccati diferencial não-linear (162) é uma matriz positiva definida e simétrica  $P > 0$  para todo  $R > 0$ , e dado  $Q > 0$ , pode-se concluir a prova do teorema.

Se o intervalo é infinito e  $A, B, Q$ , e  $R$  são matrizes de elementos constantes, a matriz definida positiva  $P$  é a solução da não linearidade da matriz algébrica da equação de Riccati,

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (173)$$

## 6.2 Aplicação da Teoria de Projeto de Controle no Rotor Dinâmico

Os parâmetros do modelo foram determinados numericamente e testados de acordo com Outa et al (2015), assim,  $m = 0,6$ ;  $\alpha = 0,9244$ ;  $y = -0,16762$ ;  $J_p = 0,32197$ ;  $J_t = 0,19744$ ;  $\delta = 0,053121$ . O comportamento do sistema é determinado através da realização do método de Runge-Kutta de quarta ordem, resolvendo as equações diferenciais ordinárias de determinados parâmetros, na forma de espaço de estado. A simulação numérica considerada nas condições iniciais foram:  $x(0) = 1$ ;  $\dot{x}(0) = 0$ ;  $V(0) = 0$ , o tempo de amostragem de 0 a 200 s, com intervalo de 0,01.

Sabendo-se que o sistema tem comportamento de estabilidade instável e caótico, a sequência, foi controlar o comportamento dinâmico caótico, utilizando a

técnica do controle linear ótimo, OLC. Então, obteremos,  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $y = \begin{bmatrix} x_1 - \tilde{x}_1 \\ x_2 - \tilde{x}_2 \\ x_3 - \tilde{x}_3 \\ x_4 - \tilde{x}_4 \\ x_5 - \tilde{x}_5 \\ x_6 - \tilde{x}_6 \\ x_7 - \tilde{x}_7 \\ x_8 - \tilde{x}_8 \end{bmatrix}$ ,

$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , a matriz  $Q = I_8$  é uma matriz definida positiva, isto é, os autovalores são

positivos, neste caso  $\lambda_{1,8} = 1$  e  $R = [1]$ ,

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.5407 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.5407 & 0 & 0.2794 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8490 & 0 & 0 & 0 & -0.2690 & 0 & -5.0251 & -5.0251 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.8490 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , onde

$M|B|AB|A^2B \dots |A^{2n}B| \neq 0$ , então considera-se que o sistema dinâmico está controlado. Portanto a matriz  $P(t)$  é feita por

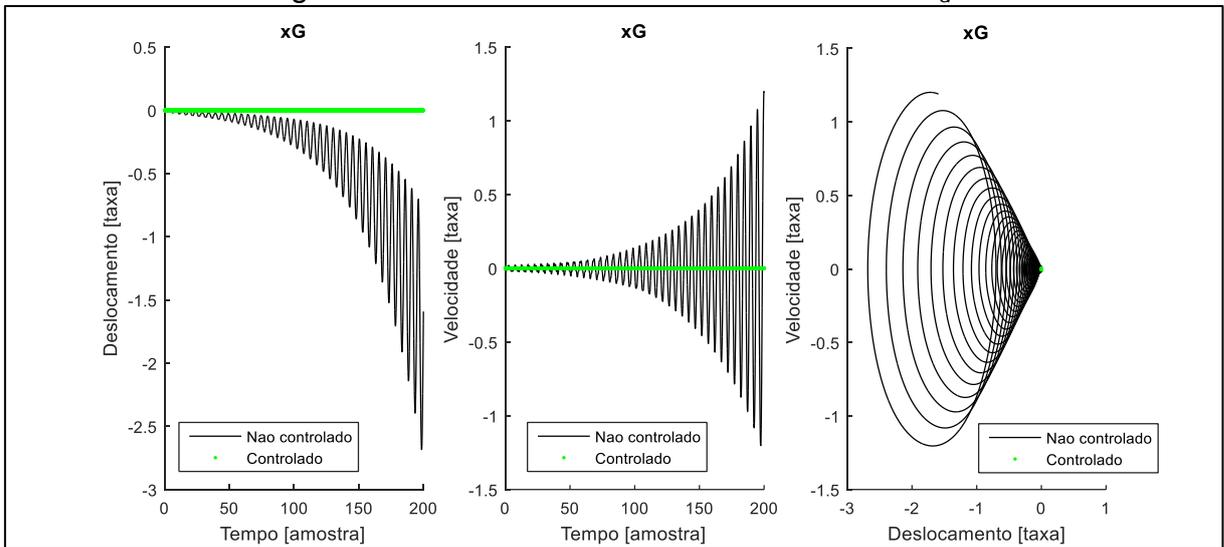
$P = 10^8 * \begin{bmatrix} 0.2080 & 0 & -0.2314 & -0.0186 & 0.0420 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1390 & 0.0186 & -0.1431 & -0.0715 & 0.0073 & 0.0369 & 0.0128 \\ -0.2314 & 0.0186 & 0.2600 & 0 & -0.0471 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0186 & -0.1431 & 0 & 0.1811 & -0.1191 & 0.0128 & 0.0645 & 0.0224 \\ 0.0420 & -0.0715 & -0.0471 & -0.1191 & 1.1574 & -0.1237 & -0.6216 & -0.2162 \\ 0 & 0.0073 & 0 & 0.0128 & -0.1237 & 0.0133 & 0.0669 & 0.0233 \\ 0 & 0.0369 & 0 & 0.0645 & -0.6216 & 0.0669 & 0.3364 & 0.1170 \\ 0 & 0.0128 & 0 & 0.0224 & -0.2162 & 0.0233 & 0.1170 & 0.0407 \end{bmatrix}$ , e

após obtém-se simplificadamente um controle otimizado,

$u = (-102044x_1 - 0.3953x_2 + 0.9582x_3 - 0.2800x_4 - 0.3760x_5 - 0.9182x_6 + 5.0923x_7 + 4.5320x_8)$ . A

trajetória do sistema, sem controle e com controle, pode ser mostrada nas figuras 27 a 30.

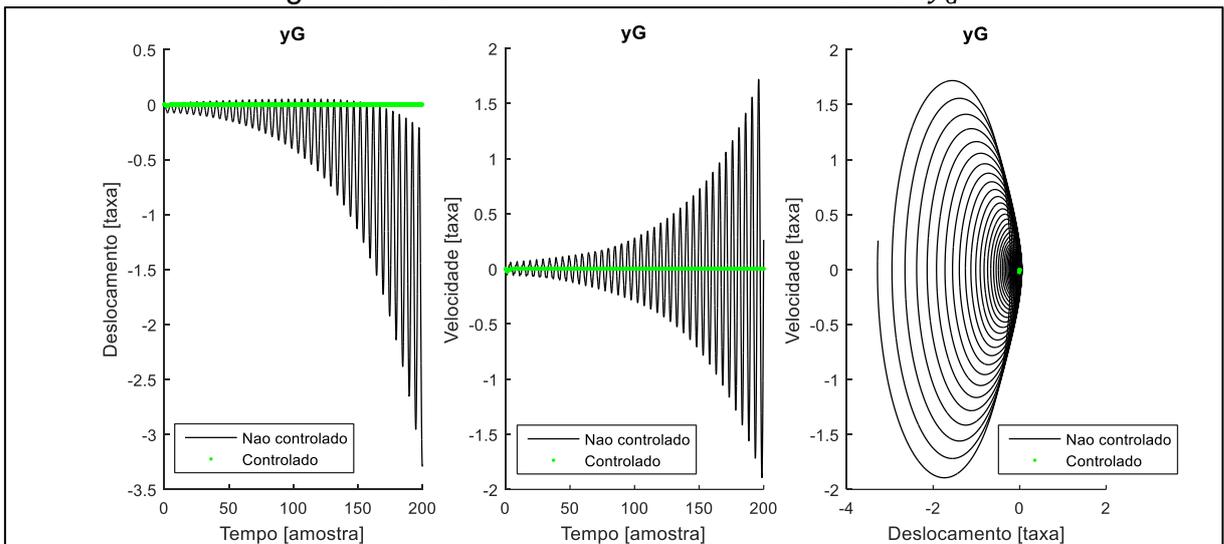
Figura 27 – Controle do Deslocamento Lateral  $x_G$



Fonte: Próprio autor.

Nota-se na figura 27, o deslocamento lateral  $x_G$ , cuja representação do estado caótico é apresentada em preto, e o estado caótico controlado até o ponto de equilíbrio, é apresentado em verde. O lado esquerdo da figura 27 mostra a representatividade da estabilidade no deslocamento pelo tempo; ao centro, a velocidade pelo tempo; e a direita, a velocidade pelo deslocamento.

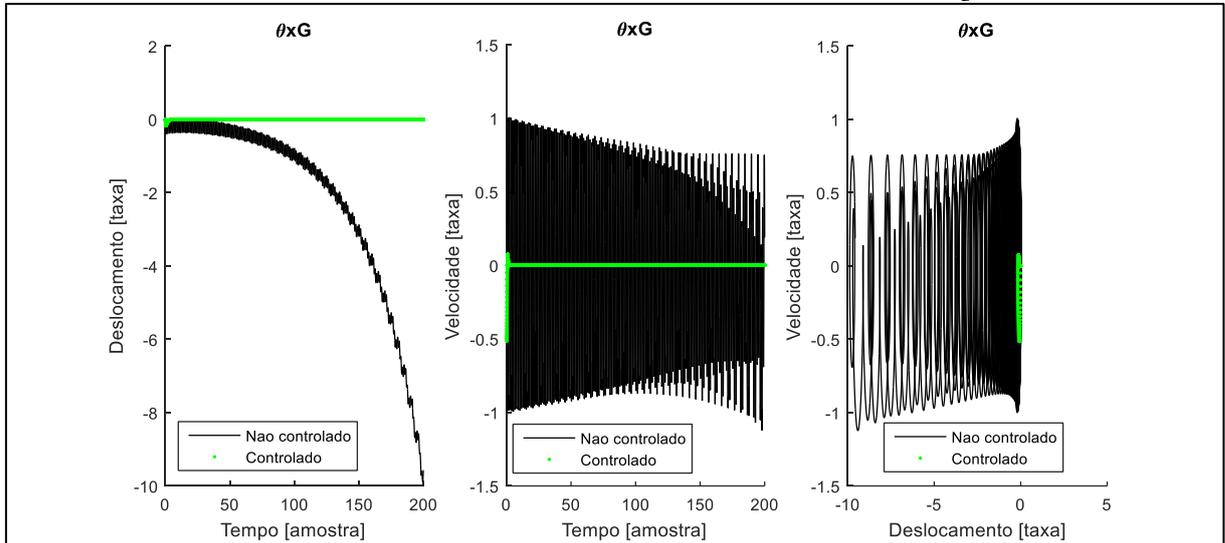
Figura 28 – Controle do Deslocamento Lateral  $y_G$



Fonte: Próprio autor.

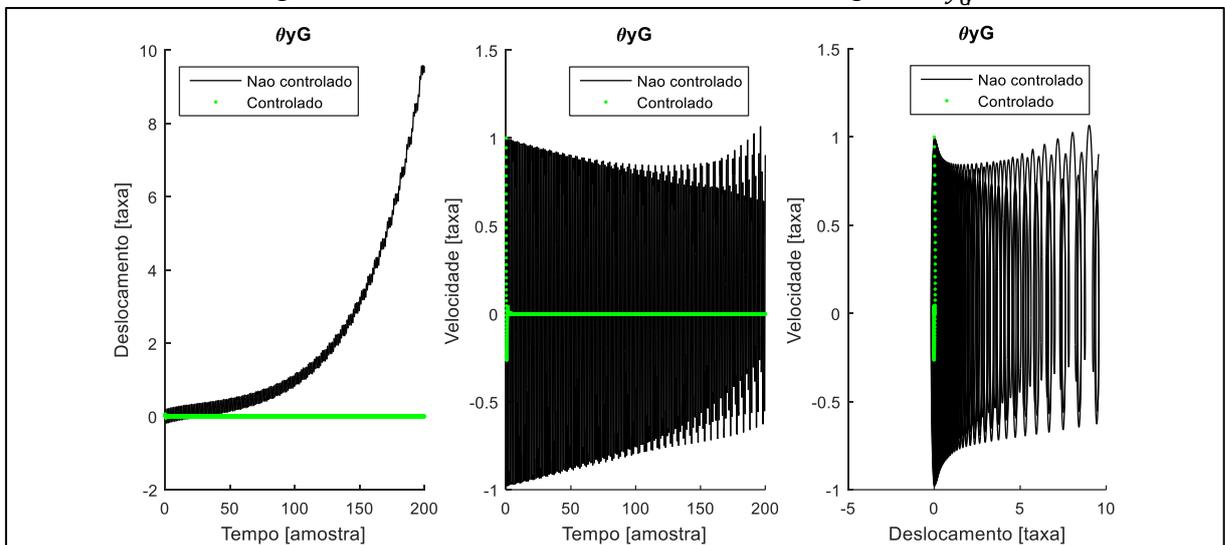
A figura 28, 29 e 30, é composta da mesma configuração relatada na figura 27, porém essas figuras representam o deslocamento lateral  $y_G$ ; deslocamento angular  $\theta_{x_G}$ ; e em  $\theta_{y_G}$ ; respectivamente.

Figura 29 – Controle do Deslocamento Angular  $\theta_{x_G}$



Fonte: Próprio autor.

Figura 30 – Controle do Deslocamento Angular  $\theta_{y_G}$



Fonte: Próprio autor.

### 6.3 Discussão dos Resultados da Aplicação do Controle Linear Ótimo

Observa-se que os resultados do comportamento de estabilidade instável e caótico foram controlados, utilizando uma estratégia de controle, cuja técnica

empregada foi o controle linear ótimo, que reduz o movimento caótico para o ponto de equilíbrio.

Portanto, é possível afirmar que este controlador, desenvolvido neste trabalho de pesquisa, atende às necessidades de estabilização do sinal de um rotor instável, até o ponto de equilíbrio.

## 7 DISCUSSÃO GERAL DO TRABALHO DE PESQUISA

Neste trabalho, os estudos de diferentes técnicas aplicadas em sistemas dinâmicos rotativos, foram relacionados para a redução do movimento instável e caótico, até o seu ponto de equilíbrio.

As etapas deste trabalho abordaram diferentes atividades, sendo elas:

- Estudo das teorias de sistemas dinâmicos não lineares, dinâmica caótica, análise modal, equações diferenciais parciais, rotores de *Jeffcott*, estabilidade de Lyapunov, expoente de Lyapunov, e a teoria de vibração.
- A caracterização do experimento, realizado com a montagem do experimento, modelagem, e aplicação teórica e experimental;
- A análise qualitativa do sistema do rotor dinâmico e suas equações pelo método de Routh-Hurwitz;
- Investigação interferência da vibração do motor de indução no rotor dinâmico;
- Experimentação e análise de estabilidade introduzindo a massa desbalanceadora no rotor dinâmico;
- Simulação computacional das diferentes condições iniciais do sistema dinâmico na frequência de 60Hz;
- Investigação da estabilidade do sistema considerando os resultados dos autovalores e autovetores da simulação computacional, pelo método de Lyapunov;
- Investigação da estabilidade caótica dos resultados do expoente de Lyapunov;
- Aplicação do projeto do controle linear ótimo, reduzindo o sistema caótico a um sistema estável até o ponto de equilíbrio.

Cada etapa descrita representa a ação de aplicações multidisciplinares, considerando a variedade de teorias abordadas, cujas aplicações, destas teorias, são demonstradas em experimento e, também, por meio de simulações computacionais. Todas estas etapas contêm resultados significativos, que estão correlacionados sequencialmente, mostrando, além do raciocínio lógico, possibilidades de aplicações práticas na vida real.

A teoria que aborda a estabilidade e controle se vista isoladamente, e não direcionado no rotor dinâmico, pode ser aplicado em diferentes áreas da engenharia, como em controle de navegação em aeronaves, em veículos automotores, em motocicletas, entre outros. Já, se direcionados em sistemas rotativos, este pode ser aplicado no controle de falhas de peças e componentes, melhorando sistemas industriais que atuem com técnicas preditivas.

## 8 CONCLUSÃO

Considerando as diferentes técnicas ligadas à engenharia, para a solução da problemática apresentada neste trabalho, foram reunidas, durante o desenvolvimento, muitas informações oriundas de teorias como, vibração, análise modal, soluções matemáticas envolvendo as equações diferenciais parciais, a teoria de estabilidade, a teoria de caos determinístico, teoria de sistemas dinâmicos não lineares, entre outras. Todas essas teorias foram utilizadas, na busca do entendimento dos fenômenos físicos da não linearidade, utilizando o caos determinístico e projetando o controle linear ótimo para a solução efetiva do controle caótico.

Um dos pontos centrais, deste trabalho, pode ser definido como a caracterização do experimento, cujo procedimento pode ser aplicado na análise de falhas, com procedimento em tempo real. Outro ponto é a análise da estabilidade, dada à condição da introdução da massa desbalanceadora, cujo resultado, demonstrado por um sinal de comportamento diferente do modelo teórico, utilizou o teorema de estabilidade de Lyapunov na sua análise. O último, conclusivo e, também, importante ponto, pode ser visto na análise da sensibilidade e definição do comportamento caótico do sistema, quando aplicado à teoria do expoente de Lyapunov e, assim, aplicado o controle linear ótimo, para o controle efetivo até o ponto de equilíbrio do sistema.

O comportamento de instabilidade e caos, deste trabalho, pode ser implementado como uma solução na engenharia para a detecção, análise e solução de falhas, pois, as soluções matemáticas e computacionais mostradas podem ser condicionadas e adaptadas, para classificar a estabilidade e submetê-las à solução de controle. Nesse caso, pode-se optar pela adaptação dos gráficos, cujas diferenças de amplitudes, entre o modelo teórico e experimental, demonstraram facilidade de leitura e análise.

Com isso, os estudos e resultados, demonstram maleabilidade em diferentes aplicações e áreas da engenharia, considerando, ainda, que a metodologia, demonstrada na caracterização do experimento, também pode ser compilada e direcionada a aplicações de pequenos instrumentos de precisão de baixo custo. Neste caso, citamos a aplicação de um sensor de três eixos, ligados a uma placa de arduino. Portanto, o conteúdo e resultado podem ser aplicados em diferentes áreas

da engenharia e, também, pode ser transformado em uma aplicação comercial de baixo custo.

Este trabalho pode ser considerado concluso, considerando as investigações feitas utilizando as diferentes teorias e conceituando-as experimentalmente com o rotor dinâmico, resultando em aplicações computacionais que demonstram a efetividade do projeto de controle.

## 9 PROJETOS FUTUROS

- Simulação computacional utilizando o sistema de estabilidade em redes neurais artificiais, objetivando aprendizado de parâmetros do comportamento do sistema, introduzindo o conceito de comportamento metaheurístico em otimização combinatória;
- Aplicação da teoria acústica estrutural no sistema dinâmico não linear, utilizando o resultado como parâmetros acústico para máquinas rotativas, aplicando o conceito de Neidel-Mead (*downhill simplex method*).

## REFERÊNCIAS

- ADAMS, J. R. M. L., **Rotating machinery vibration: from analysis to troubleshooting**. Broken Sound Parkway: CRC, 2010. 478 p.
- AGUIRRE, L. A.; PEREIRA, C. E.; PIQUEIRA, J. R. C.; PERES, P. L. D. **Enciclopédia de automática: controle e automação**. São Paulo: Blucher, 2007. v. 2. 417 p.
- AHMAD, M. **High performance ac drives modelling analysis and control**. London: Springer-Verlag, 2010. 194 p.
- ALAM, M. N.; AKHLAQ, A.; RAHMAN, N. Dynamic analysis and vibration control of a multi-body system using MSC Adams, **Latin American Journal of Solids and Structures**, Rio de Janeiro, v. 12, n. 15, p. 1505-1524, 2015.
- ANG, W. T. E PARK, Y. S., **Ordinary differential equations: methods and applications**. Boca Raton: Universal, 2008. 200 p.
- BALACHANDRAN, B.; MAGRAB, E. B. **Vibrações mecânicas**. São Paulo: Cengage Learning, 2011. 616 p.
- BETOUNES, D., **Differential equations: theory and applications**. 2.ed. London: Springer Science+Business Media, 2010. 634 p.
- BRANDT, A., **Noise and vibration analysis signal analysis and experimental procedures**. United Kingdom: John Wiley & Sons, 2011. 445 p.
- BRYSON, A.E., **Applied linear optimal control: examples and algorithms**. Cambridge, 2002. 384 p.
- CHASKALOVIC, J., **Mathematical and numerical methods for partial differential equations applications for engineering sciences**. Switzerland: Springer International, 2014. 362 p.
- CHAVARETTE, F. R. Control design applied to a non-ideal structural system with behavior chaotic. **International journal of pure and applied mathematics**, Sofia, v. 86, n. 3, p. 487-500, 2013a.
- CHAVARETTE, F. R. On an optimal linear control of a chaotic non-ideal duffing system. **Applied Mechanics and Materials**, Pfaffikon, v. 138-139, p. 50-55, 2012.
- CHAVARETTE, F. R. Optimal linear control to parametric uncertainties in a micro electro mechanical system. **International Journal of Pure and Applied Mathematics**, Sofia, v. 83, n. 4, p. 539-548, 2013b.
- CHAVARETTE, F. R.; BALTHAZAR, J. M.; FELIX, J. L. P. Remarks on an optimal linear control design applied to a nonideal and an ideal structure coupled to an essentially nonlinear oscillator. **Journal of Computational and Nonlinear Dynamics**, New York, v. 5, n. 2, p. 1- 9, 2010.

CHAVARETTE, F. R.; PERUZZI, N. J.; BALTHAZAR, J. M.; BARBANTI, L; DAMASCENO, B. C. On an optimal linear control applied to a non-ideal load transportation system, modeled whit periodic coefficients. **Applied Mechanics and Materials**, Sofia, v. 52- 54, n. 1, p. 13-18, 2011.

CHEEKE, J.; DAVID, N. **Fundamentals and applications of ultrasonic waves**. Boca Raton: CRC, 2002. 462 p.

COHEN, I. B. **A guide to Newton's principia**. Berkeley: University of California Press, 1999. 496 p.

COSTA, O. L. V.; PAIVA, A.C. Robust portfolio selection using linear-matrix inequalities. **Journal of Economic Dynamics & Control**, Holanda, v. 26, n. 6, p. 889-909, 2002.

CROCKER, M. J. **Handbook of noise and vibration control**. Hoboken: John Wiley & Sons, 2007. 1569 p.

DHATT, G.; TOUZOT, G.; LEFRANÇOIS, E. **Finite element method**. Hoboken: Wiley & Sons, 2012. 599 p.

DAVIES, M. A., SCHIMITZ T. L. **System dynamic for mechanical engineers**. New York: Springer Science+Business Media, 2015. 389 p.

DOS SANTOS, I.F. **Dinâmica de sistemas mecânicos**. Campinas: Makron Books, 2001. 272 p.

DUGAS, R. **A history of mechanics**. Street Mineola: Dover Publications Customer Care, 1988. 618 p.

DYKE, P. P. G. **An introduction to Laplace transforms and Fourier series**. London: Springer-Verlag, 2004. 249. p.

EWINS, D.J., **Modal testing theory, practice and aplication**. 2. ed. Hertfordshire, Couch House Cloister, 2000. 562 p.

FALEIROS, A.C., YONEYAMA, T. **Teoria matemática de sistemas**. São Paulo: Editora Instituto Tecnológico de Aeronáutica e Editora Arte&Ciencia, 2002. 288p.

FERRARA, N. F.; PRADO, C. P. C. **CAOS uma introdução**. São Paulo: Edgard Blucher, 1994. 402 p.

FULLER, A.T. **The general problem of the stability of motion, a m Lyapunov**. London: Taylor & Francis, 1992. 270 p.

GEISER, J. **Decomposition methods for differential equations theory and applications**. London: CRC, 2009. 319 p.

GENTA, G. **Dynamics of rotating systems**. New York: Springer Science+Business Media, 2005. 674 p.

GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H. **Controle linear de sistemas dinâmicos**. São Paulo: Blucher, 2011. 350 p.

GIRI, F. **AC electric motors control advanced design techniques and applications**. Chichester: John Wiley & Sons, 2013. 574 p.

GREENBERG, M.D. **Advanced engineering mathematics**. 2. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1998. 1348 p.

GUSSOW, M. **Eletricidade básica**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1985. 566 p.

HAND, L. N.; FINCH, J. D. **Analytical mechanics**. United Kingdom: Cambridge, 1998. 590 p.

HARRÉ, R. **The singular self: an introduction to the psychology of personhood**. London: SAGE, 1998. 145 p.

ISHIDA, Y., YAMAMOTO, T. **Linear and nonlinear rotordynamics**. Weinheim: Wiley-VCH Verlag & Co. KGaA, 2012. 454 p.

JI, J.C., LEUNG, A.Y.T. Non-linear oscillations of a rotor-magnetic bearing system under superharmonic resonance conditions, **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Hong Kong, v. 38, n. 6, p. 829-835, 2003. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020746201001366>>. Acesso em: 28 set. 2015

JIANPING, J. et al., On the non-linear dynamic behavior of a rotor–bearingsystem, **Journal of Sound and Vibration**, Harbin, v. 274, n. 3-5, p. 1031–1044, 2004. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X03006631>>. Acesso em 28 set. 2015.

KNOBEL, R. **An introduction to the mathematical theory of waves**. Providence: American Mathematical Society, 2000. 196 p.

KOYRÉ, A. **Galileu e Platão e do mundo do mais ou menos ao universo da precisão**. Lisboa: Gradiva-Publicações, 1943. 44 p.

KWON Y.W., BANG, H., **The finite element method using matlab**. London: CRC Press, 1997. 519 p.

LANG, H.S., Aristotelian Physics: Teleological Procedure in Aristotle, Thomas, and Buridan: **The Review of Metaphysics**, New York, v. 42, n. 3, p. 569-591, 1989. <<http://www.jstor.org/stable/20128765>>. Acesso em: 28 set. 2015.

LEES, A.W., Misalignment in rigidly coupled rotors, **Journal of Sound and Vibration**, Singleton Park, v. 305, n.1, p.261–271, 2007. <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X07002660>>. Acesso em: 28 set. 2015.

LUENBERG, D. G. **Introduction to dynamic systems theory, models, and applications**. Canadá: John Wiley & Sons, 1979. 446 p.

MEIROVITCH, L., **Principles and techniques of vibrations**. New Jersey: Prentice Hall, 1997. 694 p.

MOLINA, F. A. L.; KOROISHI, E. H.; STEFFEN JUNIOR, V. Uncertainty analysis of flexible rotors considering fuzzy parameters and fuzzy-random parameters. **Latin American Journal of Solids and Structures**, Rio de Janeiro, v. 12, n.10, p. 1807-1823, 2015.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos**. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011. 670 p.

NOLTE, D. D. **Introduction to modern dynamics: chaos, networks, space and time**. Oxford: University, 2015. 444 p.

OGATA, K. **Modern control engineering**. New Jersey: Pearson Education, 2010. 905 p.

OGATA K., **Systems dynamics**. 4. ed. New Jersey: Pearson Prentice Hall and Pearson Education, 2004. 777 p.

OLVER, P. J. **Equations Introduction to partial differential**. Springer International Publishing Switzerland, 2014. 652 p.

OUTA, R., CHAVARETTE, F.R., AMORIM, G. F., Comparative study of the dynamics between rolling bearings of a dynamic rotor. **International Journal of Pure and Applied Mathematics**, Sofia, v. 104, n. 1, p. 135-143, 2015.  
<<http://www.ijpam.eu/contents/2015-104-1/11/index.html>>. Acesso em: 28 set. 2015.

PADOIN, E., FONSECA, J.S.O., PERONDI, E.A., MENUZZI, O. Optimal placement of piezoelectric macro fiber composite patches on composite plates for vibration suppression, **Latin American Journal of Solids and Structures**, Rio de Janeiro, v. 12, n. 5, p. 925-947, 2015.

PEROZZI, E., FERRAZ-MELLO, S., **Space manifolds dynamics novel spaceways for science and exploration**. New York: Springer Science + Business Media, 2010. 258 p.

RANDALL, R. B., **Vibration-based condition monitoring - industrial, aerospace and automotive applications**. United Kingdom: John Wiley & Sons, 2011. 309 p.

RAFIKOV, M., BALTHAZAR, J.M., On control and synchronization in chaotic and hyperchaotic system via linear control feedback. **Communication on Nonlinear science and numerical simulation**, New York, v. 1397, p. 1246-1255, 2008.  
DOI:10.1016/j.cnsns.2006.12.011.

SAVI, M. A. **Dinâmica não linear e caos**. Rio de Janeiro: Marcelo Amorim Savi/E-papers Serviços Editoriais, 2006. 303 p.

SEGERLING, L. J. **Applied finite elements analysis**. Canada: John Wiley & Sons, 1984. 411 p.

SINOUE, J.J, Non-linear dynamics and contacts of an unbalanced flexible rotor supported on ball bearings. **Mechanism and Machine Theory**, Kidlington, v. 44, n. 9, p. 1713–1732, 2009. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X09000329>>. Acesso em: 28 set. 2015.

SMITH, L. A., **CHAOS, a very short introduction**. New York: Oxford University Press, 2007. 180 p.

SOMERVILLE, M., LAPLACE, P. S. M., **Mechanism of the heavens**. New York: Cambridge University, 2009. 496 p.

TAVAN, N., TAVAN, M., HOSSEINI, R. An optimal integrated longitudinal and lateral dynamic controller development for vehicle path tracking. **Latin American Journal of Solids and Structures**, Rio de Janeiro, v. 12, n. 6, p. 1006-1023, 2015.

TUSSET, A. M.; BALTHAZAR, J. M.; CHAVARETTE, F. R.; FELIX, J. L. P. On energy transfer phenomena, in a nonlinear ideal and nonideal essential vibrating systems, coupled to a (MR) magneto-rheological damper. **Nonlinear Dyn**, Holanda, v. 69, n. 4, p. 1859-1880, 2012. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11071-012-0391-5>>. Acesso em: 25 mar. 2016.

VANCE, J.; ZEIDAN, F. Y.; MURPHY, B. **Machinery vibration and rotordynamics**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2010. 419 p.

VASCONCELOS, J. C. R., Anotações para uma Leitura Contemporânea de As Mecânicas de Galileu Galilei, **Scientiae Studia**, São Paulo, v. 6, n. 4, p. 551-564, 2008. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/ss/v6n4/v6n4a05.pdf>>. Acesso em: 28 set. 2015.

WIGGINS, S. **Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos**. New York: Springer Science+Business Media, 1990. 672 p.

YOON, S. Y.; LIN, Z.; ALLAIRE, P. E. **Control of surge in centrifugal compressors by active magnetic bearings, theory and implementation**. London: Springer London, 2013. 292 p.

ZERAOULIA, E., **Models and applications of chaos theory in modern sciences**. Boca Raton: CRC, 2012. 736 p.

ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011. 410 p.