UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de Ilha Solteira - SP

RODRIGO DA PONTE CAUN

FORMULAÇÃO $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ DO CONTROLE LQR ROBUSTO APLICADO A DOMÍNIOS CONVEXOS E FECHADOS

Ilha Solteira - SP
2019

RODRIGO DA PONTE CAUN

FORMULAÇÃO $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ DO CONTROLE LQR ROBUSTO APLICADO A DOMÍNIOS CONVEXOS E FECHADOS

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia do Câmpus de Ilha Solteira - UNESP como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.
Especialidade: Automação.

Prof. Dr. Edvaldo Assunção
Orientador

Ilha Solteira - SP
2019

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

C373f

Caun, Rodrigo da Ponte.
Formulação $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ do controle LQR robusto aplicado a domínios convexos e fechados / Rodrigo da Ponte Caun. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2019
148 f. : il.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2019

Orientador: Edvaldo Assunção
Inclui bibliografia

1. LQR. 2. LMI. 3. Funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. 4. Controle $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ 5. Controle *gain scheduling*. 6. Taxa de decaimento.

João Josué Barbosa
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação
Diretor Técnico
CRB 8-5642

unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: **Formulação $H_2/H\infty$ do Controle LQR Robusto Aplicado a Domínios Convexos e Fechados**

AUTOR: RODRIGO DA PONTE CAUN
ORIENTADOR: EDVALDO ASSUNÇÃO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Diogo Ramalho de Oliveira
Prof. Dr. DIOGO RAMALHO DE OLIVEIRA
Câmpus de Três Lagoas / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul - IFMS

Prof. Dr. MÁRCIO ROBERTO COVACIC
Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade Estadual de Londrina - UEL

Cristiano Quevedo Andrea
Prof. Dr. CRISTIANO QUEVEDO ANDREA
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia / Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Ilha Solteira, 23 de outubro de 2019

Aos meus pais, Hélio (in memoriam) e Maria.
A minha família, Tatiana e Kauany.
Aos(as) filhos(as) que, ainda,
não estão conosco.
Ao meu irmão, Alessandro.
Amo todos vocês.

Agradecimentos

A **Deus**, uno e trino, que me moldou a cada dia feito barro na mão do oleiro e, pela sua graça, me permite viver em plenitude as maravilhas deste mundo que criastes para a humanidade;

Aos meus pais **Hélio** (*in memoriam*) e **Maria**, que na simplicidade de suas vidas me dedicaram mais que suas orações e preocupações;

A minha esposa **Tatiana**, por compartilharmos juntos os desafios desta longa jornada;

A minha filha **Kauany**, por revelar o verdadeiro sentido da palavra felicidade;

Ao meu irmão **Alessandro**, pelo eterno carinho;

Ao Prof. Dr. **Edvaldo Assunção**, por permitir o desenvolvimento das pesquisas a distância e na unidade familiar, pela paciência de anos de orientação e entender as limitações de um aluno entusiasta que conciliava a família, o trabalho e o doutoramento. Agradeço a Deus por seus valores morais e espirituais que tanto me ajudaram a concluir esta tese;

Aos Profs. Drs. **Marcelo C. M. Teixeira** e **Rodrigo Cardim**, pelo acompanhamento nas bancas examinadoras (Estudos Especiais, Qualificação e Tese) e suas sugestões, minha eterna gratidão;

Aos colegas de laboratório **Lázaro I. H. Llins** e **Marco A. L. Bebeto** pelo apoio nas implementações práticas, meu reconhecimento;

A **Universidade Tecnológica Federal do Paraná**, em especial ao Câmpus Toledo, pela oportunidade e apoio na conclusão deste trabalho.

"Comece fazendo o que é necessário,
depois o que é possível,
em breve estarás fazendo o impossível."

São Francisco de Assis

"Menor que meu sonho não posso ser."

Lindolf Bell

Resumo

A principal contribuição dessa tese é propor a representação $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ do regulador linear quadrático (LQR) para sistemas lineares invariantes no tempo e incertos. A motivação está em atender simultaneamente a minimização da função custo garantido e dos efeitos de entradas exógenas. De início, apresenta-se uma revisão da formulação do problema LQR usando-se a função de Lyapunov quadrática e, posteriormente, sua extensão aos modelos de incertezas. Neste ponto, a literatura volta-se exclusivamente ao uso de funções de Lyapunov com uma única matriz P para testar a estabilidade de todo o domínio de incerteza politópica, que naturalmente conduz a algum conservadorismo. Em vista de reduzir o pressuposto conservadorismo explorou-se técnicas de relaxação matricial através de lemas consolidados na literatura, i.e. Lema de Finsler e Lema da Projeção Recíproca. As novas formulações de síntese robusta permitem obter condições suficientes em desigualdades matriciais lineares (LMIs) por meio de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, embora não considere os efeitos da perturbação no processo de síntese de controle. Logo, o estudo da rejeição à perturbações permitiu obter condições LMIs inéditas envolvendo as normas $\mathscr{H}_2$ e $\mathscr{H}_\infty$. Adicionalmente, é proposto o estudo da robustez da planta em malha fechada, via descrição combinada de incertezas nas matrizes de estados e de entradas, e do controlador, aplicando técnicas de fragilidade via incertezas limitadas por norma. Por fim, propõe-se um método de controle LQR *gain scheduling* aplicado a sistemas lineares variantes no tempo. Nesta proposta utilizou-se a estabilidade quadrática das formulações por Lema de Finsler. Uma abordagem mais geral permitiu projetar controladores *gain scheduling* robustos, o qual é *scheduling* a falhas estruturais e robusto no que se refere as matrizes paramétricas do sistema. Ainda, as formulações matriciais permitem atribuir *a priori* uma restrição no tempo de estabelecimento dos sinais de estados. Aplicações práticas demonstram o desempenho dos teoremas propostos, cuja validação envolve testes de factibilidade sujeito a variação limite da taxa de decaimento, análise do comportamento temporal dos sinais de interesse e custo computacional dos algoritmos de controle.

Palavras-chave: LQR. LMI. Funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. Controle $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$. Controle *gain scheduling*. Taxa de decaimento.

Abstract

The main contribution of this thesis is to propose the $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ representation of the Linear Quadratic Regulator (LQR) for linear time-invariant uncertain systems. The motivation is to achieve the minimization of guaranteed cost and the effects of exogenous inputs, simultaneously. Initially, a review of the LQR problem formulation using the quadratic Lyapunov function is presented and after, its extension to the uncertain models. At this point, the literature turns to the use of Lyapunov functions with only one matrix P to test the stability of the whole polytopic domain, which naturally leads to some conservatism. The proposed to reduce the assumption conservatism allowed to explore techniques of matrix relaxation through classic lemmas in the literature, i.e. Finsler and Reciprocal Projection lemmas. The new robust synthesis formulations allow to obtain sufficient conditions in Linear Matrix Inequalities (LMIs) control by means of parameter-dependent Lyapunov functions; however, do not consider the perturbation effects on the control synthesis process. Thus, the study of disturbance rejection allowed to obtain new sufficient conditions via mixed $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ control. Furthermore, robustness studies of the closed-loop plant are proposed based on a mixed representation of uncertainties in the state and input matrices, and the controller robustness, by applying non-fragile theories via norm-bounded uncertainty. Finally, an LQR gain scheduling control method applied to linear time-varying systems is proposed. In this case, the quadratic stability was used in Finsler's Lemma formulations. A general approach allowed to design a robust gain scheduling controllers, which is scheduling to structural failures and robust to plant parametric matrices. The matrix formulations still allow assigning a priori a constraint in the setting time of state signals. Practical applications evaluate the performance of the proposed theorems, whose validation addresses tests of feasibility subject to variation limit of the decay rate, analysis of the temporal behaviour of interest signals and computational effort of the control algorithms.

Keywords: LQR. LMI. Parameter-dependent Lyapunov functions. $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ control. Gain scheduling control. Decay rate.

Lista de Figuras

1.1 Diagrama de blocos do sistema em malha fechada. 20
2.1 Regiões de modelos de incerteza. 29
2.2 Região de α-estabilidade dos autovalores. 33
2.3 Sistema Massa-Mola-Amortecedor. 39
2.4 Teste de factibilidade em função da variação da taxa de decaimento. 40
2.5 Evolução no tempo do sinal de controle $u(t)$, obtido pelo Teorema 2.3. 41
2.6 Evolução no tempo do sinal de estado $x_1(t)$, obtido pelo Teorema 2.3. 42
2.7 Evolução no tempo do sinal de estado $x_2(t)$, obtido pelo Teorema 2.3. 42
2.8 (a) Helicóptero 3-DOF. (b) Modelo esquemático. 43
2.9 Comportamento dos três graus de liberdade (ε, ρ, λ) referente a implementação prática dos Teoremas 2.1 e 2.2. 47
2.10 Implementação prática do controlador K, obtido pelo Teorema 2.2, ao sistema incerto sob falha no motor traseiro. 48
3.1 Teste de factibilidade em função da variação da taxa de decaimento enquadrando o Teorema 3.2. 63
3.2 Evolução no tempo do sinal de controle $u(t)$, obtido pelo Teorema 3.2. 64
3.3 Evolução no tempo do sinal de estado $x_1(t)$, obtido pelo Teorema 3.2. 64
3.4 Evolução no tempo do sinal de estado $x_2(t)$, obtido pelo Teorema 3.2. 65
3.5 Regiões limítrofes de α em função das matrizes de ponderação. 65
3.6 Comportamento transitório do estado $x_1(t)$ para diferentes ϱ, obtido pelo Teorema 3.2. 66
3.7 Comportamento transitório do controle $u(t)$ para diferentes ϱ, obtido pelo Teorema 3.2. 67
3.8 Curvas de α (*versus*) $\mathscr{J}_\infty$ em função de b para incertezas limitadas por norma. 68
3.9 $\mathscr{J}_\infty$ (*versus*) α para incertezas limitadas por norma. 68
3.10 α (*versus*) b para incertezas limitadas por norma. 69

3.11 Regiões de α-estabilidade do helicóptero 3-DOF. 70
3.12 Normas dos controladores refletindo os efeitos da variação de α. 71
3.13 Nuvem de autovalores da malha fechada do sistema incerto. 72
3.14 Comportamento dos três graus de liberdade (ε, ρ, λ) referente à implementação prática do Teorema 2.2. 73
3.15 Comportamento dos três graus de liberdade (ε, ρ, λ) referente à implementação prática do Teorema 3.1. 74
3.16 Curvas de α (*versus*) $\mathscr{J}_\infty$ em função de b para incertezas politópicas. 75
3.17 $\mathscr{J}_\infty$ (*versus*) α para incertezas politópicas. 75
3.18 α (*versus*) b para incertezas politópicas. 76
4.1 (a) Suspensão ativa. (b) Modelo esquemático. 96
4.2 Aplicação prática do Teorema 4.2 na condição de $\alpha = 0$, $\gamma = 7$ e $M_s = 1,455$kg. 99
4.3 Aplicação prática de modelos politópicos na condição de $\alpha = 0$, $\gamma = 7$ e $M_s = 2,45$kg. 100
4.4 Análise da influência da taxa de decaimento na condição de $M_s = 1,455$kg. . . 101
4.5 Comportamento temporal da força de controle $F_c(t)$ sujeito a variações da taxa de decaimento. 102
4.6 Análise comparativa da aplicação prática na condição de $\alpha = 0$ e $M_s = 2,45$kg. 103
4.7 Análise de resiliência do controlador via Teorema 4.4 na condição $\alpha = 0$, $\gamma = 7,8$ e $M_s = 2,45$kg. 104
4.8 Resposta ao degrau de $w(t)$ na condição de $\alpha = 0$, $\gamma = 7$ e $M_s = 1,455$kg via modelo de incerteza politópica. 105
4.9 Resposta ao degrau de $w(t)$ na condição de $\alpha = 0$, $\gamma = 7$ e $M_s = 1,455$kg via modelo de incerteza limitada por norma. 105
4.10 Resposta em frequência do sistema na condição de $\alpha = 0$, $\gamma = 7$ e $M_s = 2,45$kg. 106
4.11 Magnitude da função de transferência entre a deflexão da suspensão e a pista na condição de $M_s = 2,45$kg. 108
4.12 Magnitude da função de transferência entre a deflexão do pneu e a pista na condição de $M_s = 2,45$kg. 108
4.13 Magnitude da função de transferência entre a velocidade da massa do pneu e a pista na condição de $M_s = 2,45$kg. 109
4.14 Estudo da característica $||K||$ *versus* α e κ *versus* α do Teorema 4.2(a). 110
5.1 Aplicação prática do controlador projetado via Teorema 5.1 na condição de $\alpha = 0$ e $M_s = 2,45$kg. 120

5.2 Aplicação prática do controlador projetado via Teorema 5.1 na condição de $\alpha = 0$ e $M_s = 1,455$kg. 121
5.3 Análise da influência da frequência via Teorema 5.1 na condição de $\alpha = 0$ e $M_s = 2,45$kg. 122
5.4 Aplicação prática do controlador projetado via Teorema 5.2 na condição de $\alpha = 0$. 123
5.5 Análise da influência da frequência via Teorema 5.2 na condição de $\alpha = 0$ e $M_s = 2,45$kg. 124

Lista de Tabelas

2.1 Complexidade numérica dos modelos de incertezas. 41
2.2 Parâmetros do helicóptero. 45
3.1 Complexidade numérica para incertezas limitadas por norma. 67
3.2 Complexidade numérica para incertezas politópicas. 74
4.1 Parâmetros da suspensão ativa. 97

Abreviaturas e Acrônimos

CLQR	*Constrained Linear Quadratic Regulator*
DC	*Direct Current*
DLQR	*Discrete-Time Linear Quadratic Regulator*
DNLDIs	*Diagonal Norm-Bound LDIs*
DOF	*Degree of Freedom*
ISE	*Integral Square Error*
LDIs	*Linear Differential Inclusions*
LPC	Laboratório de Pesquisa em Controle
LPV	*Linear Parameter-Varying*
LMILab	*Solver LMI Control Toolbox*
LMIs	*Linear Matrix Inequalities*
LQR	*Linear Quadratic Regulator*
LTI	*Linear Time-Invariant*
LTV	*Linear Time-Varying*
MPC	*Model Predictive Control*
NLDIs	*Norm-Bound LDIs*
PDLF	*Parameter-Dependent Lyapunov Function*
PID	*Proportional-Integral-Derivative*
PLDIs	*Polytopic LDIs*
RDE	*Riccati Differential Equation*
RLQR	*Robust Linear Quadratic Regulator*
Yalmip	*Yet Another LMI Parser*

Lista de Símbolos

α	Taxa de decaimento
$\Lambda_i, \hat{\Lambda}_i$	Variáveis do *S-Procedure*
$\mathscr{Z}$	Matriz de realimentação invariante no tempo e incerta
$\mu,\ \upsilon$	Limitantes superiores da função custo garantido
Ω	Subconjunto de $\Re^{n\times n}$
$\Omega_P,\ \Omega_x$	Conjuntos descritos pelos vértices do politopo
Ω_N	Conjunto descrito pela imagem da norma matricial sob mapeamento linear-fracionário
ς	Incerteza paramétrica variante no tempo
ξ	Incerteza paramétrica invariante no tempo
ζ	Incerteza paramétrica limitada por norma invariante no tempo
$A(\zeta)$	Matriz de estados com incertezas limitadas e ganho de realimentação invariante no tempo
Co	Denota uma envoltória convexa
$H_{wz}(s)$	Operador distúrbio/saída
I	Matriz identidade
$\mathscr{J}_\infty$	Função custo garantido
K_{fault}	Controlador robusto sujeito a falha no atuador
K_α	Controlador robusto que garante a α-estabilidade do sistema
0	Matriz nula
$p(t)$, $q(t)$	Variáveis representando os parâmetros incertos
$\mathscr{Q}$	Matriz de ponderação dos estados
$\mathscr{R}$	Matriz de ponderação das entradas de controle
$V(x)$	Função de Lyapunov quadrática
$V(x,\xi)$	Função de Lyapunov dependente de parâmetros

X'	Operador de matriz transposta
X^{-1}	Operador de matriz inversa
$X^{\perp}$	Denota base do espaço nulo de X
$X > 0$	Denota que X é definida positiva
$X \geq 0$	Denota que X é semi-definida positiva

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **19**

2 REGULADORES LINEARES QUADRÁTICOS USANDO LMIs **27**
2.1 LMIs EM MODELOS DE INCERTEZA 28
2.2 FORMULAÇÃO POR FUNÇÃO DE LYAPUNOV QUADRÁTICA 30
2.3 O REGULADOR LINEAR E A ESTABILIDADE RELATIVA 32
2.3.1 **Taxa de decaimento** 32
2.3.2 **Formulação por incerteza politópica** 33
2.3.3 **Formulação por incerteza limitada por norma** 35
2.4 EXEMPLOS 39
2.4.1 **Massa-mola-amortecedor** 39
2.4.2 **Helicóptero 3-DOF Quanser®** 42
2.5 COMENTÁRIOS FINAIS 48

3 REGULADORES LINEARES QUADRÁTICOS VIA FUNÇÃO DE LYAPUNOV DEPENDENTE DE PARÂMETROS **50**
3.1 MATRIZ DE LYAPUNOV DEPENDENTE DE PARÂMETROS 50
3.1.1 **Formulação por incerteza politópica: Lema de Finsler** 51
3.1.2 **Formulação por incerteza limitada por norma: Lema de Finsler** . . 55
3.1.3 **Derivação do limitante superior** 59
3.1.4 **Formulação por incerteza politópica: Lema da Projeção Recíproca** . 60
3.2 EXEMPLOS 62
3.2.1 **Massa-mola-amortecedor** 62
3.2.2 **Helicóptero 3-DOF Quanser®** 69
3.3 COMENTÁRIOS FINAIS 76

4 FORMULAÇÃO $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ DO CONTROLE LQR ROBUSTO 78
4.1 EXTENSÃO A SISTEMAS LINEARES INVARIANTES NO TEMPO E INCERTOS . . . 81
4.1.1 **Representação combinada de incertezas politópicas e limitadas por norma** . . . 85
4.1.2 **Fragilidade de controladores** . . . 90
4.2 EXEMPLO . . . 95
4.2.1 **Suspensão ativa Quanser®** . . . 95
4.3 COMENTÁRIOS FINAIS . . . 110

5 LQR *GAIN SCHEDULING* 112
5.1 EXTENSÃO A SISTEMAS LPV E INCERTEZA LIMITADA POR NORMA 116
5.2 EXEMPLO . . . 119
5.2.1 **Suspensão ativa Quanser®** . . . 119
5.3 COMENTÁRIOS FINAIS . . . 124

6 CONCLUSÃO 125
6.1 PERSPECTIVAS FUTURAS . . . 126
6.2 PUBLICAÇÕES . . . 126

REFERÊNCIAS 129

A RESULTADOS ENVOLVENDO DESIGUALDADES MATRICIAIS 143

ÍNDICE REMISSIVO 147

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A teoria moderna de controle ótimo envolvendo a realimentação de estados tem avançado, nos últimos anos, em aplicações a sistemas dinâmicos de natureza elétrica (OLALLA *et al.*, 2009), mecânica (YUE; AN; SUN, 2016; GRITLI; BELGHITH, 2017), química (KHAIRY; ELSHAFEI; EMARA, 2010) e biológica (SAFAEI; HESPANHA; PROULX, 2012), cujas vantagens concentram-se na simplicidade de adotar valores reais de ganhos de controle sem a utilização de realimentação dinâmica de polos e zeros (OLALLA *et al.*, 2008). Dentre as classes de decisões, os índices baseados em funções quadráticas se destacam por apresentar versatilidade na medida do desempenho, pois utilizam funções de erro ou de energia (OGATA, 1985).

Neste contexto, a técnica de controle *off-line* (KANEV; VERHAEGEN, 2002) denominada Regulador Linear Quadrático (do inglês, *Linear Quadratic Regulator* – LQR) surgiu devido a seguinte combinação de fatores: (a) uso de equações diferenciais de primeira ordem, conhecida por abordagem em espaço de estados; (b) advento de sistemas computacionais (microcontroladores, por exemplo); (c) lançamento das bases da teoria de controle ótimo e, por fim, (d) o marco da publicação do artigo *"On the General Theory of Control Systems"*, na Conferência de Moscou no final da década de 50, no qual R. E. Kalman propõe um método de síntese para problemas de controle linear ótimo multivariável (BENNETT, 1996).

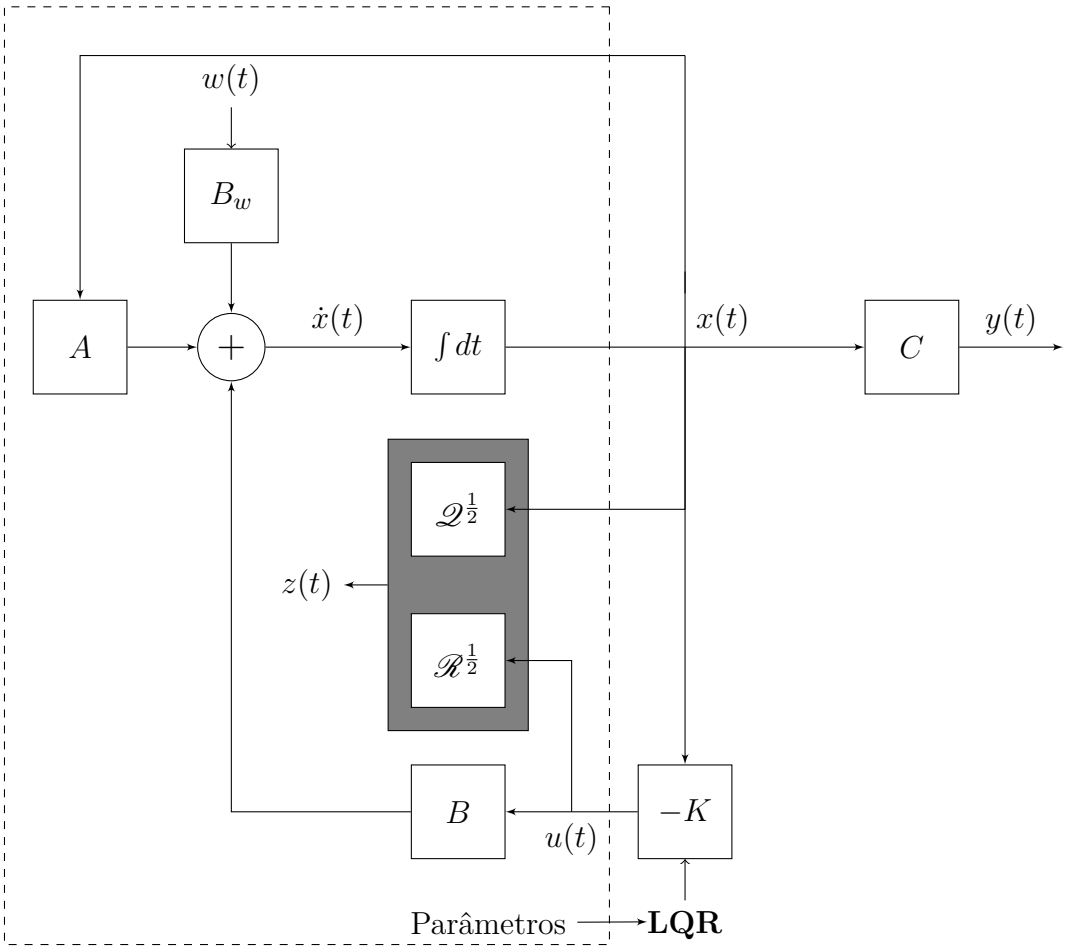
A metodologia adotada no problema LQR envolve, essencialmente, uma função de controle ótima de realimentação de estados de horizonte infinito (LEE; KWON; CHO, 1998), que minimize a função custo garantido (NIEL *et al.*, 2017):

$$\mathscr{J}_\infty = \int_0^\infty \left(x(t)^T \mathscr{Q} x(t) + u(t)^T \mathscr{R} u(t) \right) dt.$$

Nota-se que o índice de desempenho $\mathscr{J}_\infty$ é parametrizado pelas matrizes simétricas

definidas positivas $\{\mathscr{Q},\mathscr{R}\}$ em relação aos vetores de estado ($x(t)$) e controle ($u(t)$), respectivamente (DAS; PAN; DAS, 2015). A Figura 1.1 ilustra um sistema linear contínuo invariante no tempo (do inglês, *Linear Time-Invariant* – LTI) sob a ação do sinal de controle ótimo, sendo $w(t)$ a perturbação, $y(t)$ a saída de interesse e $z(t)$ a saída de desempenho cuja energia deve ser minimizada. As propriedades estruturais da planta a ser controlada (Parâmetros) são obtidas pelas matrizes de estados (A), de entradas (B) e de perturbações (B_w), além da matriz de saídas (C).

Figura 1.1 - Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.



Fonte: Adaptado de (ZHANG *et al.*, 2015).

É importante destacar, ainda, algumas propriedades interessantes do controle LQR aplicado a sistemas em malha fechada, tais como, otimalidade e robustez garantindo margens infinitas de ganhos (OLALLA *et al.*, 2009) operando na faixa de $[0,5,\infty)$ dB (GUO; XU; LEE, 2014) e margens de fase de no mínimo 60° (HONG; YANG; RAY, 2000), ganhos de transição entre baixas e altas frequências com amplas margens de estabilidade (TURKI; DUC; CLEMENT, 2004) e, por fim, ajuste simples das matrizes $\mathscr{Q}$ e $\mathscr{R}$ (MAHMOUD; ALYAZIDI; ABOUHEAF, 2017). Esta última apresenta um contraponto, pois a

escolha dos elementos das matrizes de ponderação é fortemente dependente da experiência do projetista, podendo conduzir a um problema LQR infactível, dado que as opções são ilimitadas. Neste caso, algumas propostas de sintonia podem ser encontradas em (MONTAGNER; DUPONT, 2010; YANG; GAO; SHI, 2010; DONGMEI; XINGANG; LI, 2012).

Não obstante, o problema de regulação ótima é uma técnica que remonta suas influências desde a década de 40. Neste período, o surgimento de métodos matemáticos e computacionais eficientes tem impulsionado a aplicação do regulador linear a diversos problemas de controle (BOYD; CRUSIUS; HANSSON, 1998; LEE, 2007; PAKSHIN; EMELIANOVA, 2016).

Esta é a motivação para a apresentação de um breve histórico que se inicia com as propostas emergentes de Hall (HALL, 1943) e Wiener (WIENER, 1949), que utilizavam um índice de desempenho na forma de integral do erro quadrático (do inglês, *Integral-Square Error* – ISE) aplicado à teoria de realimentação. Após uma década, retomaram-se as bases de sistemas de controle através do critério ISE na publicação do livro *"Analytical Design of Linear Feedback Controls"*. Entretanto, algumas desvantagens inerentes ao método de projeto analítico (do inglês, *Analytical Design Method*) envolveram um número reduzido de índices de desempenho e, em especial, a complexidade matemática que cresce rapidamente. Este último incorreu no desencorajamento de engenheiros que aplicavam o método em problemas práticos (NEWTON; GOULD; KAISER, 1957).

Após a difusão da teoria de controle baseado em índices de desempenho, Kalman propôs condições fortemente inovadoras e influentes ao chamado controle realimentado linear quadrático (que, posteriormente, tornou-se controle LQR) (KALMAN, 1960b, 1960a). Nestes trabalhos, as contribuições de Kalman foram, dentre outras: (a) apresentar, de um ponto de vista matemático, uma teoria completa para o problema do regulador linear a tempo contínuo e discreto, também conhecido por LQR discreto (do inglês, Discrete-Time LQR – DLQR) (BALANDAT; ZHANG; ABATE, 2012; NAKAJIMA; KOBAYASHI; YAMASHITA, 2016, 2017); (b) introduzir o conceito de estabilidade da equação diferencial de Riccati (do inglês, *Riccati Differential Equation* – RDE); (c) obter um algoritmo relacionado ao uso de sistemas computacionais para síntese do controle ótimo quadrático por realimentação de estados e (d) relacionar condições suficientes de estabilidade assintótica ao segundo método de Lypunov. Por outro lado, as desvantagens das propostas resumiam-se a: (a) dificuldades de aplicação em plantas industriais, devido à precisão dos modelos matemáticos e sua respectiva formulação em termos da aproximação por espaço de estados; (b) disponibilidade dos estados do sistema por amostragem ou estimação (HWANG *et al.*, 2010; CAICEDO *et al.*, 2012) e, (c) inoperância com restrições e perturbações (MAHMOUD; ALYAZIDI; ABOUHEAF, 2017).

A partir dos resultados de Kalman, fomentaram-se diversas pesquisas relacionadas à equação de Riccati, em particular, no desenvolvimento de pacotes computacionais dedicados a resolver a equação matricial por meio de programação convexa (WILSON; NEKOUI; HALIKIAS, 1998; MONTAGNER; DUPONT, 2010). Essa estreita relação entre os conjuntos convexos e a álgebra matricial, no estudo de controle ótimo, favoreceu a aplicação de soluções em termos de desigualdades matriciais proposto por (YAKUBOVICH, 1962). Em 1994, o surgimento do livro influente *"Interior-point Polynomial Algorithms in Convex Programming"* escrito por Nesterov e Nemirovskii, apresentou uma ferramenta altamente eficiente para obter soluções numéricas (NESTEROV; NEMIROVSKY, 1994).

Em meados da década de 90, Stephen Boyd e colaboradores reuniram diversos problemas de controle de relevância prática na forma de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* – LMIs) (BOYD *et al.*, 1994). Consequentemente, surgiram algumas derivações de terminologias de controle LMI do problema LQR, tais como: LQR por realimentação da saída (do inglês, LQR-*Output Feedback*) que objetiva um ganho estabilizante de realimentação estática da saída (IWASAKI; SKELTON; GEROMEL, 1994; SYRMOS *et al.*, 1997; ASSADIAN, 2000; TZES; NIKOLAKOPOULOS, 2004; PAKSHIN; PEAUCELLE, 2009; POLYAK; KHLEBNIKOV; SHCHERBAKOV, 2013); LQR robusto (do inglês, *Robust LQR* – RLQR) que garante a estabilidade assintótica para um domínio de incerteza (MARSH; WEI, 1996; GAJDÁR *et al.*, 1997; MONTAGNER; DUPONT, 2010; NIEL *et al.*, 2017); LQR restrito (do inglês, *Constrained LQR* – CLQR) que corresponde ao problema LQR com restrições nos sinais de estado e controle (LEE; KWON; CHO, 1998; MCKERNAN; WHIDBORNE; PAPADAKIS, 2005; OHTA *et al.*, 2005; LEE; KHARGONEKAR, 2007; SHAFAI; GHADAMI, 2013; ALMEIDA *et al.*, 2017; CAPRON; ODLOAK, 2018) e, mais recentemente, LQR fuzzy (do inglês, *Fuzzy LQR*) que aplica o problema LQR a sistemas baseados em modelo fuzzy (REN; YANG, 2004; ADELI; ZARABADIPOUR; SHOOREHDELI, 2011); LQR estocástico (do inglês, *Stochastic LQR*) que trata o controle de sistemas dinâmicos estocásticos lineares (FISHER; BHATTACHARYA, 2009; SONG; PARK, 2016); LQR chaveado (do inglês, *Switched LQR*) que opera em sistemas lineares chaveados (NIKOLAKOPOULOS *et al.*, 2005, 2007; VAGIA; NIKOLAKOPOULOS; TZES, 2008; BALANDAT; ZHANG; ABATE, 2012; LI; JAIN; ALLEYNE, 2012; PETERSON; KWATNY, 2014; CLAEYS; DAAFOUZ; HENRION, 2016); LQR probabilístico (do inglês, *Probabilistic LQR*) que utiliza uma aproximação probabilística para projetar controladores robustos (KHAN; AWAN; LIAQUAT, 2015; SCHILDBACH; GOULART; MORARI, 2015) e LQR derivativo (do inglês, *Derivative LQR*) que utiliza a realimentação da derivada dos estados (ALI; ALI, 2017; ALI, 2017; YAZICI; SEVER, 2017; SEVER *et al.*, 2017; BETETO *et al.*, 2018).

Além disso, a formulação LQR-LMI tornou-se mais atrativa devido ao enquadramento dos critérios clássicos (por exemplo, amortecimento da oscilação e tempo de estabeleci-

mento). Neste caso, os conceitos da $\mathscr{D}$-estabilidade aplicados ao controle por realimentação de estados apresentam-se em duas linhas, quais sejam: (a) restrições na forma de LMIs (CHILALI; GAHINET, 1996; CHILALI *et al.*, 1999; SATOH; SAITOH, 2004), no qual tem-se rencentemente considerado aplicações de amortecimento de oscilações (RAMOS; ALBEDO; BRETAS, 2004) aliado ao tempo de estabelecimento (SOLIMAN *et al.*, 2011) em sistemas de potência e a caracterização do desempenho transitório em malha fechada que, por sua vez, limite o sobressinal, a frequência de oscilação, o tempo de atraso, o tempo de subida e o tempo de estabelecimento de forma a garantir um nível de desempenho para sistemas incertos a tempo contínuo (FAIRUS *et al.*, 2015; FARD; ALDEEN, 2016b); (b) inclusão das condições de estabilidade marginal na matriz de estados de sistemas discretos (ZHOU *et al.*, 2006) e contínuos (ASCHEMANN; KERSTEN, 2017), cuja matriz de Lyapunov é obtida pela solução da equação de Riccati. No entanto, este método não envolve a otimização da função custo garantido.

Na indústria, as plantas podem ser afetadas por falhas estruturais que ocasionam problemas de segurança, como a perda de eficiência em atuadores e sensores (KANEV; VERHAEGEN, 2002; HMIDI *et al.*, 2018), e por leis de controle que apresentam saturação (AGRAWAL *et al.*, 1997; LIMON *et al.*, 2005). Esta preocupação tem impulsionado aplicações práticas do LQR baseado em LMIs. Assim, despontaram-se as aplicações na área de Engenharia Elétrica, envolvendo sistemas de potência (ISHIMARU *et al.*, 2002), máquinas elétricas (GUPTA; BANDYOPADHYAY; KULKARNI, 2003; SIVANANDAKUMAR; RAMAKRISHNAN, 2006; KOROISHI *et al.*, 2016), geração de energia (KO *et al.*, 2006, 2008), conversores de energia (OLALLA *et al.*, 2009; MONTAGNER; DUPONT, 2010; BEID; DOUBABI, 2014; AMRITHA; PAI, 2015), controle de frequência de sistemas de geração (PANDEY *et al.*, 2013, 2014) e de potência via ambiente *smart grid* (SINGH; KISHOR; SAMUEL, 2016) e, por fim, sistema fotovoltaícos (FARD; ALDEEN, 2016a). Na Engenharia Química, explorou-se a sintonia de controladores proporcional-integral-derivativo (do inglês, *Proportional-Integral-Derivative* – PID) em reatores de tanque agitado (GONÇALVES; PALHARES; TAKAHASHI, 2008), tanque de cone invertido (GE; CHIU; WANG, 2002) e reatores em unidades de tratamento de emissões de NOx (SINGH; NIKOLAOU, 2013). Outras aplicações envolvem problemas de controle de vibração estrutural (JOHNSON; ERKUS, 2002, 2005, 2007), controle de veículos aéreos (FISHER; BHATTACHARYA, 2009; PAKSHIN; PEAUCELLE, 2009; KONDO; OCHI, 2010; MAYER; DEHNERT; TIBKEN, 2013; TSAI *et al.*, 2013; PRADHAN; GHOSH, 2015; NIEL *et al.*, 2017), terrestres (MENHOUR; CHARARA; LECHNER, 2014; ALCALA *et al.*, 2018) e aquáticos (BHOPALE *et al.*, 2016; SOMAN; GOPMANDAL; GHOSH, 2018), controle de sistemas multiagentes (ZHANG *et al.*, 2013; FENG *et al.*, 2015), controle de temperatura de um ar condicionado *split* (YANG Y.; WU; CHANG, 2010; YANG; WU; CHANG, 2014), controle robótico (DALLALI *et*

al., 2014, 2015), controle de postura humana (PRIESS *et al.*, 2014) e controle de câmeras (EVREN; UNEL, 2016; HAN; UNEL, 2017).

Mais especificamente na indústria automotiva, há um forte interesse em projetos de suspensão ativa que remonta os anos 1960 (HROVAT, 1997). A função deste sistema é prover conforto aos passageiros, segurança ao veículo e diminuir os desgastes da suspensão causados por irregulariedades na pista (DU; LAM; SZE, 2003). Uma característica intríseca de operação destes sistemas dinâmicos é a robustez perante as incertezas nos parâmetros da planta, que deprecia o desempenho de controle (DU; LAM; SZE, 2005). Em vista disto, muitos pesquisadores têm entrelaçado a teoria de Lyapunov, as normas de sistemas (norma $\mathscr{H}_\infty$, norma $\mathscr{H}_2$) e a otimização convexa das LMIs na síntese de controladores por realimentação de estados. O objetivo é garantir a estabilidade robusta e o menor grau de influência no sinal de saída de um dado sistema (ZHANG *et al.*, 2011). Este fato consolida, na última década, uma tendência de superar a inoperância do LQR com perturbações (MAHMOUD; ALYAZIDI; ABOUHEAF, 2017). A proposta é combinar, também, as características do regulador linear em termos de desempenho transitório (CHAKRABORTY; RAY-CHAUDHURI, 2017). Neste contexto, surgiram a representação $\mathscr{H}_2$ do problema LQR estocástico (KO *et al.*, 2006, 2008; PANDEY *et al.*, 2013, 2014; HUANG *et al.*, 2013), o controle LQR/$\mathscr{H}_\infty$ (POURSHAGHAGHI *et al.*, 2007; HUANG *et al.*, 2011; MENHOUR; CHARARA; LECHNER, 2014; ALI, 2015) e o controle LMI baseado no problema DLQR via algoritmo de controle $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ (YANG; WU; CHANG, 2014).

Contudo, a literatura científica aponta, predominantemente, para o uso de condições suficientes de estabilidade quadrática na formulação do problema de otimização. De um ponto de vista de teoria de controle, o uso de funções de Lyapunov com uma única matriz P conduz a algum conservadorismo e, portanto, naturalmente surgiram algumas aplicações de relaxações matriciais. Atualmente, encontra-se apenas uma proposição, ou seja, a aplicação do Lema da Projeção (do inglês, *Projection Lemma*) em problemas DLQR com realimentação da saída (LEE, 2007). De outro modo, é possível obter condições relaxadas através da técnica de ganho escalonado (do inglês, *gain scheduling*), no qual a dinâmica do sistema linear variante no tempo (do inglês, *Linear Time-Varying* - LTV) varia em toda uma gama de condições de operação. Neste caso, um único ganho implementável não garante condições desejáveis de desempenho e estabilidade (MONTAGNER *et al.*, 2004). Uma alternativa é a síntese de controladores LQR com dependência afim de parâmetros. As atuais propostas se dividem pelo método de cálculo da matriz de realimentação de estados, seja utilizando funções de Lyapunov dependentes de parâmetros (do inglês, *Parameter Dependent Lyapunov Functions* – PDLF) (AKTAS; SEVER; YAZICI, 2016; LIU *et al.*, 2017), seja pelo uso de funções de Lyapunov quadráticas (ALCALA *et al.*, 2017, 2018). Esta última proposição é mais interessante, dado que não há a inversão

de uma matriz literal no cálculo do ganho escalonado, ainda que a matriz B seja independente do conjunto de variáveis *scheduling* nas referências citadas. Outras aplicações de relevância do *gain scheduling* na estrutura LQR-*Output Feedback* podem ser vistas em (WU, 1995; NIKOLAKOPOULOS *et al.*, 2005; VESELÝ; ILKA, 2017).

Em termos de estabilidade robusta, os modelos de incertezas utilizados se resumem as inclusões diferenciais lineares politópicas (do inglês, *Polytopic Linear Differential Inclusions* – PLDIs). Por outro lado, o uso das incertezas limitadas por norma (do inglês, *Norm-Bounded Linear Differential Inclusions* – NLDIs) podem ser preferíveis, pois apresentam menor complexidade computacional devido ao fato de que a dimensão da ordem das LMIs aumenta linearmente à medida que as incertezas são incluídas (BOYD *et al.*, 1994). Novamente, as referências são escassas e, atualmente, existe uma única proposta que considera o LQR-*Output Feedback* aplicado a sistemas não lineares via modelos NLDIs (RODRIGUES; KUIAVA; RAMOS, 2011).

Portanto, o objetivo dessa tese é obter condições suficientes e menos conservadoras da teoria LQR, sob estrutura de LMIs, de sistemas lineares em domínios convexos e fechados estendidas ao controle $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ e *gain scheduling*. Embora as propostas de síntese sejam robustas em relação às incertezas do sistema, podem apresentar sensibilidade às próprias incertezas (erros de implementação, por exemplo) (DU; LAM; SZE, 2003). Este problema é conhecido na literatura por fragilidade de controladores e, portanto, um objetivo adicional é obter condições inéditas de estabilidade quadrática que garanta projetos resilientes as variações limitadas por norma na matriz de realimentação de estados. Algumas pesquisas sobre o problema de fragilidade do controlador LQR/$\mathscr{H}_\infty$ estão disponíveis na literatura, como por exemplo (XIAOJIE, 2006, 2008; HUANG *et al.*, 2011; XIAOJIE, 2013). Uma aplicação prática no helicóptero 3-DOF da Quanser® permite avaliar as propostas de estabilidade quadrática, estendida e projetiva. O modelo de um quarto de carro da Quanser® é usado no estudo da suspensão ativa, no qual condições simuladas de falhas em atuadores e fragilidade de controladores são requisitos de desempenho avançados na avaliação dos teoremas. Por fim, a taxa de decaimento é um critério opcional de projeto, cuja finalidade é limitar a dependência da *expertise* do engenheiro na escolha das matrizes de ponderação $\{\mathscr{Q},\mathscr{R}\}$. Por outro lado, em aplicações práticas de controle robusto, o custo computacional do processo de otimização pode inviabilizar a implementação de soluções em tempo real, que motivou a incorporação da taxa de decaimento a formulação original das propostas deste trabalho.

A tese está organizada na seguinte ordem. No Capítulo 2, as formulações de síntese LQR baseada em LMIs propostas por (BOYD *et al.*, 1994) são revistas. Nas seções posteriores, as condições LMIs são estendidas a sistemas incertos contínuos no tempo e vinculadas a teoria de maior expoente de Lyapunov. O Capítulo 3 traz propostas

menos conservadoras do problema LQR robusto pela aplicação de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. A formulação $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ do controle LQR é discutida no Capítulo 4. Outras contribuições deste capítulo envolvem a caracterização de equações por variáveis de estados na representação combinada de incertezas politópicas e limitadas por norma, além do estudo da robustez do controlador. E, no Capítulo 5, propõem-se projetos de controladores *gain scheduling* baseado na ação simultânea de parâmetros incertos variantes e invariantes no tempo. Finalmente, as conclusões encerram o trabalho.

Capítulo 2

REGULADORES LINEARES QUADRÁTICOS USANDO LMIs

Os índices baseados em funções quadráticas tem-se destacado, recentemente, nas aplicações práticas de controle ótimo. A técnica consiste na obtenção de uma lei de controle através da otimização (minimização ou maximização) de uma função custo garantido, podendo apresentar restrições nas variáveis de estados e controle que garanta a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada (BOYD *et al.*, 1994). Dentre as classes de decisões, o controlador ótimo quadrático representa a extensão dos índices de desempenho utilizados nas técnicas de controle do domínio da frequência (ISE, por exemplo) a sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas. Usualmente, os métodos de síntese são baseados na teoria de estabilidade de Lyapunov descritos na forma de LMIs.

Considere, portanto, o seguinte sistema linear invariante no tempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0, \tag{2.1a}$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} \mathscr{Q}^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathscr{R}^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \tag{2.1b}$$

sendo $x(t) \in \Re^{n_x}$ o vetor de estados, $u(t) \in \Re^{n_u}$ a entrada de controle, $z(t) \in \Re^{n_z}$ a saída regulada e $x(0)$ o vetor de estados iniciais. Assume-se que o par (A, B) é estabilizável e as matrizes reais e constantes de dimensões apropriadas. Com vistas à equação de espaço de estado descrito na equação (2.1), será apresentado uma revisão dos principais resultados preliminares e fundamentais para a demonstração dos teoremas propostos.

2.1 LMIs EM MODELOS DE INCERTEZA

A descrição matemática de processos/plantas pode conter parâmetros incertos, delineando os erros entre o modelo matemático e o sistema real. Neste contexto, surgiram as representações de incertezas, sendo que as mais difundidas referem-se às abordagens politópica (procedentes, por exemplo, de diferentes pontos de operação assumidos pelo sistema) e limitação em norma (comumente derivadas de erros de predição contidos em processos de identificação) (BOMBOIS, 2000).

Portanto, para caracterizar as incertezas mencionadas, considere o sistema (2.1) e um conjunto pré-definido na forma $[A \quad B] \in \Omega$, com o conjunto Ω descrevendo os parâmetros incertos nas matrizes A e B. Assim, é possível constituir um sistema politópico, através do conjunto $\Omega_P \subset \Omega$, composto por,

$$[A(\xi) \quad B(\xi)] \in \Omega_P, \tag{2.2a}$$

$$[A(\xi) \quad B(\xi)] = \sum_{i=1}^{\mathscr{N}} \xi_i [A_i \quad B_i], \ \xi \in \Xi, \tag{2.2b}$$

$$\Xi = \{ \xi \in \Re^{\mathscr{N}} \ : \ \sum_{i=1}^{\mathscr{N}} \xi_i = 1, \xi_i \geq 0 \}. \tag{2.2c}$$

que corresponde a um conjunto convexo de $\mathscr{N}$ vértices. Neste caso, é possível notar que os vértices $[A_i \quad B_i]$ do politopo são obtidos pela combinação dos valores extremos assumidos pelas variáveis incertas de um sistema físico $\{v_i \in \Re : v_{i_{min}} < v_i < v_{i_{max}}, i = 1, \ldots, l\}$, com $\mathscr{N} = 2^l$. Por outro lado, as incertezas limitadas por norma são equivalentes a:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_p p(t), \tag{2.3a}$$

$$q(t) = C_q x(t) + D_q u(t), \tag{2.3b}$$

$$p(t) = \mathscr{Z} q(t), \tag{2.3c}$$

em que $\mathscr{Z} : \Re_+ \to \Re^{r \times r}$, $q(t)$, $p(t) \in \Re^r$ representam a matriz de incerteza invariante no tempo, a saída e a perturbação, respectivamente. As matrizes B_p, C_q e D_q são matrizes reais e constantes de dimensões apropriadas que capturam a estrutura das incertezas. É possível obter variações usuais, tais como $||\mathscr{Z}|| \leq 1$ ou $|\zeta_k| \leq 1$. Contudo, a restrição considerada será $|\zeta_k| \leq 1$, conhecida na literatura por LDIs limitada por norma diagonal (do inglês, *Diagonal Norm-Bound LDIs* - DNLDIs), no qual,

$$\mathscr{Z} = \begin{bmatrix} \zeta_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \zeta_k & \vdots \\ 0 & \cdots & \zeta_r \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Dessa forma, pode-se descrever o conjunto de incertezas limitada por norma na forma,

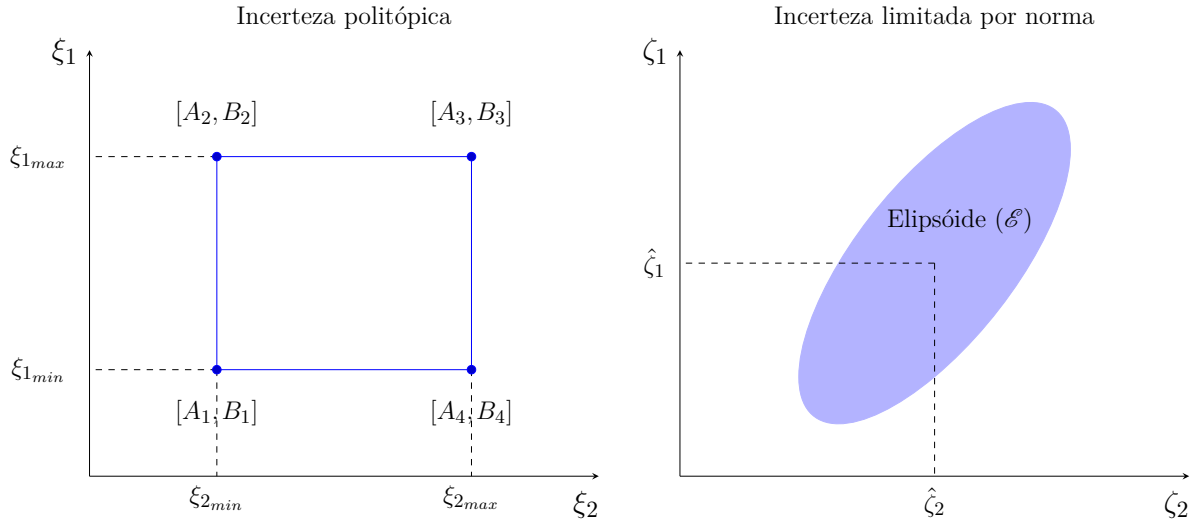
$$\Omega_N = \{[A + B_p \mathscr{Z} C_q \quad B + B_p \mathscr{Z} D_q] : |\zeta_k| \leq 1, \mathscr{Z} \text{ satisfaz } (2.4)\}. \tag{2.5}$$

Observa-se, ainda, que a região de incerteza deve conter o sistema real para um determinado nível de probabilidade, no qual os parâmetros incertos pertencem ao interior de um elipsóide ($\mathscr{E}$) (BOMBOIS, 2000),

$$\mathscr{E} = \left\{\zeta : (\zeta - \hat{\zeta})' \Sigma^{-1} (\zeta - \hat{\zeta}) < P_\zeta\right\}, \tag{2.6}$$

com ζ o vetor de parâmetros incertos, $\hat{\zeta}$ o parâmetro estimado, Σ a matriz de covariância de $\hat{\zeta}$ e P_ζ o nível de probabilidade desejado. A Figura 2.1 apresenta as regiões descritas anteriormente para o caso de duas incertezas presentes em um sistema.

Figura 2.1 - Regiões de modelos de incerteza.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Em alguns casos, é possível aproximar a incerteza politópica em uma estrutura de incerteza limitada em norma (BOYD *et al.*, 1994); isto reduz o número de linhas de LMIs, por exemplo, em síntese de controladores.

Observação 2.1. *Notadamente a topologia politópica apresenta um problema com valores crescentes de vértices, representando uma limitação em aplicações de sistemas com dimensões amplas (i.e., atendimento a um extenso número de incertezas) e, consequentemente, dificulta a factibilidade na síntese de controladores.*

2.2 FORMULAÇÃO POR FUNÇÃO DE LYAPUNOV QUADRÁTICA

A teoria de controle LQR representa um critério quadrático que, por meio de um processo de otimização linear, define uma lei de controle ótima associada a funções energia das variáveis de estados e controle. Consequentemente, o regulador deverá equilibrar a velocidade de resposta do sistema e a intensidade do sinal de controle. Este compromisso desejado permite conceituar a seguinte função custo garantido,

$$\mathscr{J}_\infty = \min \int_0^\infty (x(t)'\mathscr{Q}x(t) + u(t)'\mathscr{R}u(t))dt, \tag{2.7}$$

no qual $\mathscr{Q} = \mathscr{Q}' > 0$ e $\mathscr{R} = \mathscr{R}' > 0$. Nota-se que é possível obter uma relação de preferência entre os valores dos elementos da diagonal principal da matriz de ponderação $\mathscr{R}$. De forma análoga, aplica-se esta conceituação de ponderação para os elementos da matriz $\mathscr{Q}$.

Para obter um método de síntese baseado em LMIs para o regulador linear de horizonte infinito definido em (2.7) (vide Teorema 2.1), considere a lei de controle de realimentação de estados $u(t) = -Kx(t)$ que minimiza $\mathscr{J}_\infty = f(x(t), u(t))$. Considere, ainda, a função quadrática $V(x(t)) = x(t)'Px(t)$, com $P = P' > 0$. Para que o critério $\mathscr{J}_\infty$ seja finito é necessário que $x(\infty) \to 0$.

Sejam as seguintes condições de estabilidade:

$$\dot{V}(x(t), \dot{x}(t)) < 0,\ z'(t)z(t) > 0,\ \forall (x(t), \dot{x}(t), z(t)) \text{ considerando (2.1).} \tag{2.8}$$

Neste caso, o *S-Procedure* garante a relação entre $z'(t)z(t)$ e a função de Lyapunov (OLIVEIRA, 2004). E, dado que a função $\dot{V}(x(t), \dot{x}(t))$ é homogênea em P, pode-se (sem perda de generalidade) atribuir o valor unitário à variável escalar relacionada ao *S-Procedure* (BOYD *et al.*, 1994), obtendo a expressão,

$$\dot{V}(x(t), \dot{x}(t)) < -z'(t)z(t). \tag{2.9}$$

Integrando (2.9) de 0 a ∞, resulta em,

$$\mathscr{J}_\infty < V(x(0)) = x(0)'Px(0), \tag{2.10}$$

ou seja, a estabilidade assintótica do sistema (2.1) propicia a relação entre as condições iniciais e a função de Lyapunov.

Por outro lado, uma solução pela minimização de $\mathscr{J}_\infty$ (aplicado a sistemas com

parâmetros precisamente conhecidos), pode ser expressa por (KALMAN, 1960b, 1960a),

$$u(t) = -Kx(t) = -(\mathscr{R})^{-1}B'Px(t), \tag{2.11}$$

tal que P satisfaça a equação de Riccati,

$$A'P + PA - PB(\mathscr{R})^{-1}B'P + \mathscr{Q} = 0. \tag{2.12}$$

Teorema 2.1. *Seja $x(t)$ o estado do sistema (2.1) medido no instante t. Assuma que o sistema (2.1) não está sujeito a restrições.*

*(**a**) **Otimização.** A matriz de realimentação de estado K associada à lei de controle $u(t) = -Kx(t)$, que minimiza o limite superior $V(x(0))$ dada em (2.10) na função objetivo é dada por*

$$K = -ZW^{-1}, \tag{2.13}$$

com Z obtido da solução (se esta existir) do seguinte problema de minimização do objetivo linear,

$$\min_{\mu,W,Z} \mu$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} AW + WA' + BZ + Z'B' & * & * \\ W & -\mathscr{Q}^{-1} & * \\ Z & 0 & -\mathscr{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{2.14}$$

$$\begin{bmatrix} \mu & * \\ x(0) & W \end{bmatrix} > 0. \tag{2.15}$$

*(**b**) **Estabilidade quadrática.** Considere uma planta com o ganho de realimentação (2.13) que é estabilizável. E, seja $\mathscr{Q}$ e $\mathscr{R}$ matrizes simétricas definidas positivas. Então a planta controlada será uniformente e assintoticamente estável e $V(x)$ uma função de Lyapunov, se existir $P = W^{-1}$ solução das desigualdades (2.14)-(2.15).*

Prova: Vide (BOYD *et al.*, 1994) para maiores detalhes. ■

Observação 2.2. *As variáveis denotadas por $x(t)$, $u(t)$, etc. enfatizam que estas são computadas para o instante t. Entretanto, por conveniência de notação, é possível omitir o t nas próximas seções. Note ainda que "$*$" representa termos inferidos da simetria.*

2.3 O REGULADOR LINEAR E A ESTABILIDADE RELATIVA

Em sistemas de controle há uma forte necessidade de corrigir o desempenho transitório de sistemas dinâmicos, pois possivelmente estes parâmetros não são adequados e exigem especificações adicionais no projeto. Tais condições podem ser incluídas por meio de restrições adicionais na forma de LMIs (CHILALI; GAHINET, 1996). Por outro lado, ao definir uma margem de estabilidade relativa, a parametrização da matriz de ponderação $\mathscr{Q}$ torna-se menos dependente da *expertise* do engenheiro.

Todavia, a desvantagem relacionada ao processo de alocação de autovalores envolve acréscimo da complexidade computacional. Neste caso, propõe-se reduzir o impacto no processamento do algoritmo de controle através da incorporação da taxa de decaimento na formulação original das LMIs (XIE, 2008).

Nesse contexto, a inovação consiste no uso do maior expoente de Lyapunov em inclusões diferenciais lineares do tipo politópica e limitada por norma (BOYD *et al.*, 1994), tendo em vista que projetos de controladores LQR robustos (em estrutura LMI) sujeito a restrição da taxa de decaimento, não é bem discutido na literatura.

2.3.1 Taxa de decaimento

A taxa de decaimento (ou, maior expoente de Lyapunov) permite garantir um limitante inferior de α-estabilidade no sistema (2.1). Conceitualmente, se $\frac{dV(x)}{dt} \leq -2\alpha V(x)$, $\forall x$, então (BOYD *et al.*, 1994):

$$V\left(x(t)\right) \leq V\left(x(0)\right) e^{-2\alpha t},\ t \geq 0, \tag{2.16}$$

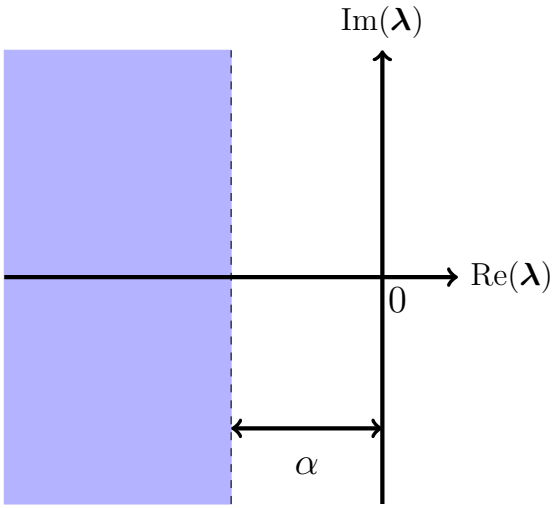
cuja estabilidade é alcançada com $\alpha > 0$. O critério pode ser expandido a sistemas lineares invariantes (ou variantes) no tempo, por meio da equivalência:

$$A'P + PA + 2\alpha P < 0. \tag{2.17}$$

A influência da taxa de decaimento no plano complexo dos autovalores-$\boldsymbol{\lambda}$ de um sistema é ilustrada na Figura 2.2.

Nas próximas subseções novas abordagens fornecem métodos de síntese LQR baseadas em LMIs sujeito a taxa de decaimento via a função de Lyapunov quadrática. Nos casos em estudo, considerar-se-á a classe de parâmetros incertos e invariantes no tempo.

Figura 2.2 - Região de α-estabilidade dos autovalores.



Fonte: Adaptado de (OLALLA *et al.*, 2008).

2.3.2 Formulação por incerteza politópica

Seja a lei de controle de realimentação de estado que minimiza robustamente (2.7),

$$u(t) = -Kx(t). \tag{2.18}$$

Considere a função quadrática $V(x(t))$, que para todo $t \geq 0$ implica que $P > 0$. Dado que $x(\infty) = 0$, implica que $V(x(\infty)) = 0$ e, assim, determina-se um limitante superior na forma de $x(0)'Px(0) < \mu$. A condição LMI equivalente é obtida pela aplicação do complemento de Schur (vide Lema A.1) simultaneamente à mudança de variável $W = P^{-1}$, que resulta em:

$$\begin{bmatrix} \mu & * \\ x(0) & W \end{bmatrix} > 0, \tag{2.19}$$

no qual μ é um coeficiente de desempenho não-negativo a ser minimizado.

Como uma extensão, busca-se por um politopo $\Omega_x = \mathrm{Co}\{x_1(0), x_2(0), \ldots, x_{\mathscr{M}}(0)\}$, cuja máxima energia encontra-se em um dos vértices (BOYD *et al.*, 1994). Por fim, uma nova LMI é obtida pela desigualdade,

$$\begin{bmatrix} \mu & * \\ x_j(0) & W \end{bmatrix} > 0, \ j = 1, \ldots, \mathscr{N}_x. \tag{2.20}$$

No próximo teorema é proposto novas condições através da incorporação do maior expoente de Lyapunov na formulação original de LMIs do problema LQR baseado em modelos politópicos, conforme discutido por (GE; CHIU; WANG, 2002). Uma abordagem similar, para LDIs limitadas por norma de (BOYD *et al.*, 1994), é proposta no Teorema

2.3 da Subseção 2.3.3.

Teorema 2.2. *O sistema (2.2) é estável por* $u(t) = -Kx(t)$*, com taxa de decaimento maior ou igual a* α *e custo garantido* $\mathscr{J}_\infty$ *inferior a* μ*, se existirem matrizes* $W = W' > 0 \in \Re^{n_x \times n_x}$ *e* $Z \in \Re^{n_u \times n_x}$*, tais que:*

$$\min_{\mu,W,Z} \mu$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} \mathscr{G}_i & * & * \\ W & -\mathscr{Q}^{-1} & * \\ Z & 0 & -\mathscr{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{2.21}$$

$$\begin{bmatrix} \mu & * \\ x(0) & W \end{bmatrix} > 0, \tag{2.22}$$

sendo $\mathscr{G}_i = A_i W + W A_i' + B_i Z + Z' B_i' + 2\alpha W,\ i = 1, \ldots, \mathscr{N}$*. Portanto, o ganho de realimentação de estados é dado por* $K = -ZW^{-1}$*.*

Prova: Considere a existência de uma função de Lyapunov para estabelecer um limitante inferior na taxa de decaimento para a condição (2.9) (BOYD *et al.*, 1994), ou seja,

$$\dot{V}(x) + 2\alpha V(x) < -x(t)'(K'\mathscr{R}K + \mathscr{Q})x(t), \tag{2.23}$$

em que, a expansão da desigualdade de Lyapunov, resulta em (2.24).

$$x(t)'PA_f(\xi)x(t) + x(t)'A_f(\xi)'Px(t) + 2\alpha x(t)'Px(t) < -x(t)'(K'\mathscr{R}K + \mathscr{Q})x(t), \tag{2.24}$$

com $A_f(\xi) = (A(\xi) - B(\xi)K)$ pertencente ao politopo (2.2). A partir da separação dos termos de $A_f(\xi)$, isola-se $x(t)'$ e $x(t)$ na desigualdade (2.24) e, após, multiplicada-se à esquerda e à direita por $P^{-1} = W$. Em seguida, isola-se $x(t)'$ à esquerda e $x(t)$ à direita, obtendo:

$$A(\xi)W + WA(\xi)' + B(\xi)Z + Z'B(\xi)' + 2\alpha W + Z'\mathscr{R}Z + W\mathscr{Q}W < 0, \tag{2.25}$$

em que $Z = -KW$. Da aplicação do complemento de Schur em (2.25), têm-se a LMI equivalente,

$$\begin{bmatrix} \mathscr{G}(\xi) & * & * \\ W & -\mathscr{Q}^{-1} & * \\ Z & 0 & -\mathscr{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{2.26}$$

sendo $\mathscr{G}(\xi) = (\sum_{i=1}^{\mathscr{N}} \xi_i A_i)W + W(\sum_{i=1}^{\mathscr{N}} \xi_i A_i)' + (\sum_{i=1}^{\mathscr{N}} \xi_i B_i)Z + Z'(\sum_{i=1}^{\mathscr{N}} \xi_i B_i)' + 2\alpha W$.

Finalmente, a expansão das matrizes incertas por meio de seus vértices na desigualdade (2.26), produz a LMI (2.21).

Nota-se, contudo, que a síntese de controladores robustos baseia-se em uma única matriz de Lyapunov para testar a estabilidade de todo o domínio de incerteza. Esta condição destaca-se pela facilidade na síntese robusta, ou seja, parametrização convexa imediata do controlador dada em (2.13), sendo conhecida por estabilidade quadrática. Em teoria de controle, esta abordagem é considerada conservadora e, portanto, o próximo capítulo contemplará o estudo de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros aplicadas a sistemas lineares e incertos a tempo contínuo.

A prova do Teorema 2.2 está concluída. ■

Observação 2.3. *Na equação (2.23), houve uma alteração na relação entre a desigualdade de Lyapunov e a função custo garantido. Consequentemente, o efeito da inclusão do termo* $2\alpha V(x)$ *na desigualdade (2.10) motiva uma re-avaliação da expressão dada em (2.22). Assim, seja* $V(x)$ *uma função de Lyapunov candidata (definida positiva, por definição) e um escalar positivo* α*. É possível, sem perda de generalidade, assumir* $\mathscr{J}_\infty$ *como um limitante superior para* $-2\alpha V(x) - x(t)'(K'\mathscr{R}K + \mathscr{Q})x(t)$*, i.e. define-se uma forma equivalente tal que* $\dot{V}(x) < -2\alpha V(x) - x(t)'(K'\mathscr{R}K + \mathscr{Q})x(t) < -x(t)'(K'\mathscr{R}K + \mathscr{Q})x(t)$*. Portanto, esta condição é aplicada a todas as LMIs sujeitas a taxa de decaimento que envolvem o limitante superior de* $\mathscr{J}_\infty$ *neste trabalho.*

2.3.3 Formulação por incerteza limitada por norma

Teorema 2.3. *O sistema (2.3) é estável por* $u(t) = -Kx(t)$*, com taxa de decaimento maior ou igual a* α *e custo garantido* $\mathscr{J}_\infty$ *inferior a* μ*, se existirem matrizes* $W = W' > 0 \in \Re^{n_x \times n_x}$*,* $Z \in \Re^{n_u \times n_x}$ *e* $\Lambda \in \Re^{r \times r}$*, tais que:*

$$\min_{\mu, W, Z, \Lambda} \mu$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} WA' + AW + Z'B' + BZ + 2\alpha W + B_p \Lambda B_p' & * & * & * \\ W & -\mathscr{Q}^{-1} & * & * \\ Z & 0 & -\mathscr{R}^{-1} & * \\ C_q W + D_q Z & 0 & 0 & -\Lambda \end{bmatrix} < 0, \tag{2.27}$$

$$\begin{bmatrix} \mu & * \\ x(0) & W \end{bmatrix} > 0, \tag{2.28}$$

com,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Lambda_r \end{bmatrix} > 0. \tag{2.29}$$

E o ganho de realimentação de estados pode ser obtido por $K = -ZW^{-1}$.

Prova: Seja $u(t) = -Kx(t)$ a lei de controle. É possível reescrever a equação dos estados por,

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + B_p p(t). \tag{2.30}$$

De fato, impondo que $|\zeta_k| \leq 1$, resulta em

$$p_k^2(t) \leq q_k^2(t),\ k = 1, \ldots, r, \tag{2.31}$$

ou,

$$p_k^2(t) \leq x(t)'(C_{q,k} - D_{q,k}K)'(C_{q,k} - D_{q,k}K)x(t) = q_k(t)'q_k(t), \tag{2.32}$$

no qual, $C_{q,k}$ e $D_{q,k}$ denotam a i-ésima linha das matrizes C_q e D_q, assim como $p_k(t)$ e $q_k(t)$ representam o i-ésimo elemento dos vetores $p(t)$ e $q(t)$.

Agora, reconsidere as condições de estabilidade dado em (2.23).

$$\dot{x}(t)'Px(t) + x(t)'P\dot{x}(t) + 2\alpha x(t)'Px(t) < -x(t)'(\mathscr{Q} + K'\mathscr{R}K)x(t). \tag{2.33}$$

Pela aplicação do *S-Procedure* à desigualdade (2.33) é possível obter a desigualdade (2.34). Então a desigualdade (2.35) é obtida pela expansão do operador soma, no qual $\hat{\Lambda}$ é a variável matricial da aplicação do *S-Procedure*, que implica diretamente na existência de $\hat{\Lambda}_k$ não negativos.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)'[P(A-BK) + (A-BK)'P]x(t) + 2x(t)'PB_p p(t) + 2\alpha x(t)'Px(t) \\ + \sum_{k=1}^{r} \hat{\Lambda}_k \left(x(t)'(C_{q,k} - D_{q,k}K)'(C_{q,k} - D_{q,k}K)x(t) - p_k^2(t) \right) \\ < -x(t)'(\mathscr{Q} + K'\mathscr{R}K)x(t), \end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned} x(t)'(A-BK)'Px(t) + p(t)'B_p'Px(t) + x(t)'P(A-BK)x(t) \\ + x(t)'PB_p p(t) + 2\alpha x(t)'Px(t) - p(t)'\hat{\Lambda}p(t) \\ + x(t)'(\mathscr{Q} + K'\mathscr{R}K + (C_q - D_qK)'\hat{\Lambda}(C_q - D_qK))x(t) < 0. \end{aligned} \tag{2.35}$$

E, isolando o vetor $[x(t)'\, p(t)']$ à esquerda e o vetor $\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}$ à direita, resulta em (2.36). Seja, ainda, aplicar a transformação de congruência $\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ a desigualdade (2.36), com $W = P^{-1}$, que resulta na desigualdade (2.37).

$$\begin{bmatrix} x(t)' \\ p(t)' \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} (A-BK)'P + P(A-BK) + 2\alpha P + \\ \mathscr{Q} + K'\mathscr{R}K + (C_q - D_qK)'\hat{\Lambda}(C_q - D_qK) \end{pmatrix} & * \\ B_p'P & -\hat{\Lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} < 0, \tag{2.36}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} W(A-BK)' + (A-BK)W + 2\alpha W + W\mathscr{Q}W + \\ WK'\mathscr{R}KW + W(C_q - D_qK)'\hat{\Lambda}(C_q - D_qK)W \end{pmatrix} & * \\ B_p' & -\hat{\Lambda} \end{bmatrix} < 0. \tag{2.37}$$

Por fim, aplicando o complemento de Schur em (2.37) e ao considerar as mudanças de variáveis $\Lambda = \hat{\Lambda}^{-1}$ (descrito pela equação (2.29)) e $Z = -KW$, a desigualdade (2.37) será equivalente a,

$$\begin{bmatrix} WA' + AW + Z'B' + BZ + 2\alpha W + B_p\Lambda B_p' & * & * & * \\ W & -\mathscr{Q}^{-1} & * & * \\ Z & 0 & -\mathscr{R}^{-1} & * \\ C_qW + D_qZ & 0 & 0 & -\Lambda \end{bmatrix} < 0. \tag{2.38}$$

A prova do Teorema 2.3 está concluída. ■

Lema 2.1 (*Factibilidade*)**.** *Se as condições do Teorema 2.2 são factíveis, então as condições do Teorema 2.3 serão também factíveis.*

Prova: Suponha que as condições (2.21) e (2.22) do Teorema 2.2 sejam factíveis. Dado que as desigualdades (2.22) e (2.28) são equivalentes a demonstração mostrará que a factibilidade de (2.21) implica na factibilidade de (2.27) e (2.29).

Da prova do Teorema 2.2, (2.21) implica em (2.26), que após a aplicação do complemento de Schur implica em (2.25) e, finalmente, com as definições $P^{-1} = W$ e $Z = -KW$, em (2.24).

Assim, de (2.24), tem-se que

$$\begin{aligned} x'Jx &\leq x'x\lambda_{\max}J < 0, \text{ para } x \neq 0, && \text{(2.39a)} \\ J &= PA_f(\xi) + A_f(\xi)'P + 2\alpha P + K'\mathscr{R}K + \mathscr{Q}, && \text{(2.39b)} \\ \lambda_{\max}(J) &= \text{máximo autovalor de } (J) < 0. && \text{(2.39c)} \end{aligned}$$

E, de (2.2) - (2.5),

$$A_f(\xi) = A(\xi) - B(\xi)K = A + B_p\mathscr{Z}C_q + (B + B_p\mathscr{Z}D_q)K. \tag{2.40}$$

Em vista de (2.3), em que $p = \mathscr{Z}q = \mathscr{Z}(C_q x + D_q u)$, é possível obter a equação (2.41) a partir de (2.39)-(2.40), com $u = -Kx$, i.e.:

$$\begin{aligned} J(x) = x'Jx &= x'\{P[A + B_p\mathscr{Z}C_q - (B + B_p\mathscr{Z}D_q)K] + * + 2\alpha P + K'\mathscr{R}K \\ &+ \mathscr{Q}\}x, \\ &= x'[P(A-BK) + (A-BK)'P]x + x'PB_p\mathscr{Z}(C_q - D_qK)x \\ &+ x'(C_q - D_qK)'\mathscr{Z}B_p'Px + x'(2\alpha P + K'\mathscr{R}K + \mathscr{Q})x, \\ &= x'[P(A-BK) + (A-BK)'P + 2\alpha P + K'\mathscr{R}K + \mathscr{Q}]x \\ &+ x'PB_pp + p'B_p'Px, \end{aligned} \tag{2.41}$$

com $p = \mathscr{Z}(C_q - D_qK)x$.

Agora, da prova do Teorema 2.3, as LMIs (2.27) e (2.29) implicam na condição (2.34). Considerando as equações (2.39) a (2.41), tem-se que (2.34) é equivalente a,

$$J(x) + \sum_{k=1}^{r} \hat{\Lambda}_k \left(x(t)'(C_{q,k} - D_{q,k}K)'(C_{q,k} - D_{q,k}K)x(t) - p_k(t)'p_k(t) \right) < 0, \tag{2.42}$$

para $x \neq 0$. Note, ainda, que a factibilidade das condições do Teorema 2.2 implicam em (2.39) a (2.41) e, assim, sempre a condição do Teorema 2.3 dada em (2.42) será factível para,

$$\lambda_{\max\limits_{k\in\{1,\ldots,r\}}}\hat{\Lambda}_{\mathrm{k}} < \frac{-\lambda_{\max}(J)}{\lambda_{\max\limits_{k\in\{1,\ldots,r\}}}(\mathrm{L_k})}, \text{ tal que } \mathrm{L}_k = (C_{q,k} - D_{q,k}K)'(C_{q,k} - D_{q,k}K), \tag{2.43}$$

pois, de (2.39) - (2.41) e (2.43), sendo que $\hat{\Lambda}_k > 0$, $k \in \{1, \ldots, r\}$, resulta em:

$$\begin{aligned} J(x) &+ \sum_{k=1}^{r} \hat{\Lambda}_k \left(x(t)'(C_{q,k} - D_{q,k}K)'(C_{q,k} - D_{q,k}K)x(t) - p_k(t)'p_k(t) \right) \\ &\leq x'x\lambda_{\max}(J) + \sum_{k=1}^{r} \hat{\Lambda}_k \left(x(t)'(C_{q,k} - D_{q,k}K)'(C_{q,k} - D_{q,k}K)x(t) \right) \\ &\leq x'x\{\lambda_{\max}(J) + \lambda_{\max\limits_{k\in\{1,\ldots,r\}}}(\hat{\Lambda}_{\mathrm{k}}) \,.\, \lambda_{\max\limits_{k\in\{1,\ldots,r\}}}(\mathrm{L_k})\} < 0, x \neq 0, \end{aligned} \tag{2.44}$$

para todo $\hat{\Lambda}_k > 0$, $k = 1, \ldots, r$ satisfazendo (2.43).

A prova do Lema 2.1 está concluída. ■

2.4 EXEMPLOS

Nesta seção são apresentadas duas aplicações que ilustram a eficiência dos teoremas propostos neste capítulo. Nos exemplos, o pacote computacional LMIlab e a interface YALMIP (LöFBERG, 2004), em ambiente Matlab, foram usados para o cômputo da solução do problema de otimização.

2.4.1 Massa-mola-amortecedor

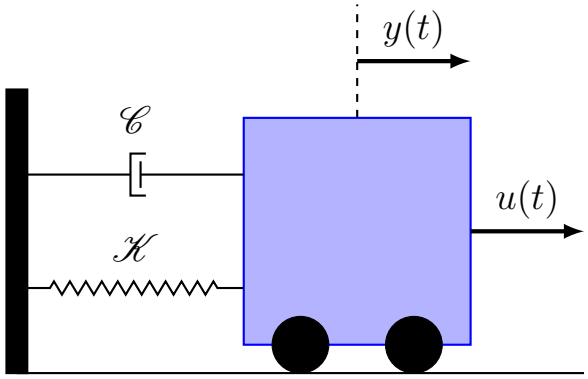
Considere o sistema dinâmico contínuo no tempo da Figura 2.3 descrito por:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mathscr{K} & -\mathscr{C} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \tag{2.45a}$$

$$y(t) = [1 \quad 0]x(t), \tag{2.45b}$$

com $-\mathscr{K} \in [-1,2\ ,\ -0,8]$ e $-\mathscr{C} \in [-2,2\ ,\ -1,8]$ os parâmetros incertos, em unidades apropriadas. Seja $u(t)$ a ação da força externa, $x_1(t)$ a posição e $x_2(t)$ a velocidade da massa.

Figura 2.3 - Sistema Massa-Mola-Amortecedor.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Neste caso, o conjunto politópico pode ser representado como:

$$\Omega_P = \text{Co}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1,2 & -2,2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1,2 & -1,8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,8 & -2,2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,8 & -1,8 \end{bmatrix} \right\}, \tag{2.46}$$

sendo a matriz B constante para todos os vértices. Alternativamente, o conjunto convexo que caracteriza a incerteza estruturada é dado por:

$$\Omega_N = \{[A(\zeta) = A + B_p \mathscr{Z} C_q \quad B] : |\zeta_k| \leq 1\}. \tag{2.47}$$

A partir deste ponto, será apresentado o procedimento de determinação das matrizes

para o sistema,

$$\dot{x}(t) = A(\zeta)x(t) + Bu(t). \tag{2.48}$$

Para tanto, sejam as variáveis $-\mathscr{K} = -1 + 0,2\zeta_1$ e $-\mathscr{C} = -2 + 0,2\zeta_2$, tal que as seguintes identidades são obtidas,

$$\zeta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,2\zeta_1 & 0,2\zeta_2 \end{bmatrix} = B_p \mathscr{Z} C_q = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 \\ 0 & \zeta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, \tag{2.49}$$

em que extrai-se a representação em espaço de estados da equação (2.50).

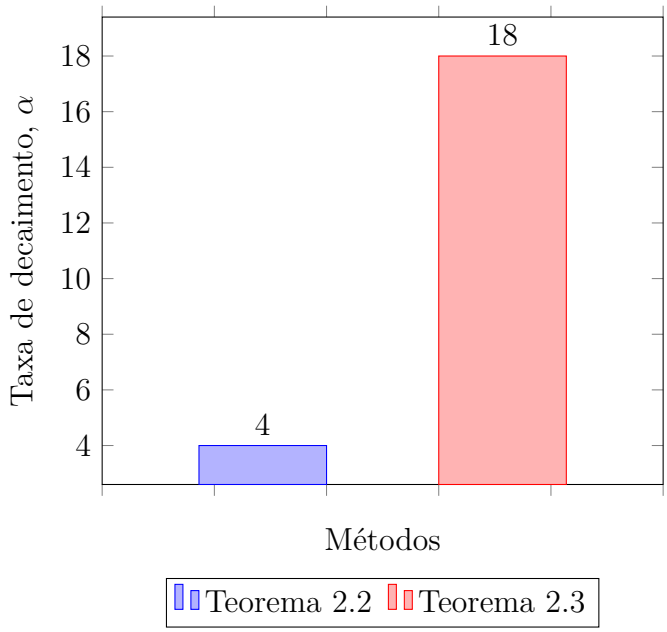
$$\dot{x}(t) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,2 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 \\ 0 & \zeta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) x(t) + Bu(t), \tag{2.50a}$$

$$y(t) = [1 \quad 0]x(t). \tag{2.50b}$$

Informa-se, a priori, que as matrizes de ponderação adotadas são $\mathscr{R} = 10$ e $\mathscr{Q} = \text{diag}(1,1)$, com a condição inicial $x_0 = [1 \quad 0]'$. Se $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$ implica no sistema nominal (ou seja, $A(\zeta) = A$).

A Figura 2.4 apresenta uma análise via regiões de factibilidade, sendo a quantidade de soluções factíveis da representação politópica significativamente inferior ao modelo de incerteza limitada por norma. Este fato condiz com formulações menos restritivas via *S-Procedure*.

Figura 2.4 - Teste de factibilidade em função da variação da taxa de decaimento.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

Na Tabela 2.1, explorou-se testes de impacto no processamento computacional por meio do número de variáveis escalares (V) e de linhas de LMIs (L) em função do número

de incertezas (U), destacando a suavização da complexidade numérica do modelo de incerteza limitada por norma. Esse problema convexo é resolvido em tempo polinomial, tal que as seguintes expressões podem ser definidas: (a) LDIs politópicas: $L = 2n_x(\mathscr{N}+1)+n_u\mathscr{N}+1$ e $V = 1+n_xn_u+n_x(n_x+1)/2$, (b) LDIs limitadas por norma diagonal: $L = 4n_x+2r+n_u+1$ e $V = 1+r+n_xn_u+n_x(n_x+1)/2$

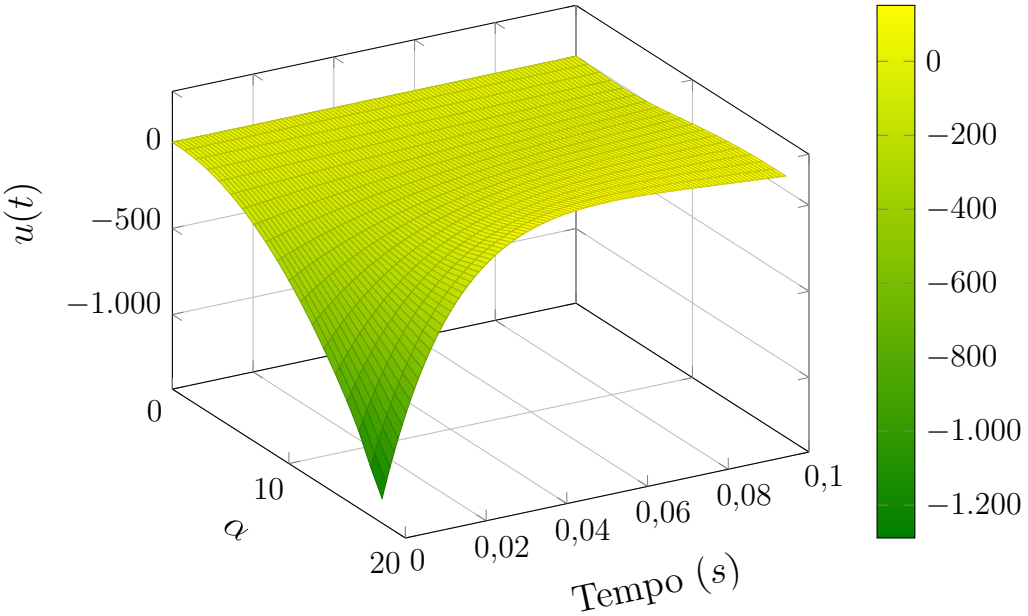
Tabela 2.1 - Complexidade numérica dos modelos de incertezas.

Método	U	V	L
Teorema 2.2	2	6	25
Teorema 2.3	2	8	14

Fonte: Dados de pesquisa do autor

Finalmente, as Figuras 2.5 a 2.7 apresentam a concatenação do comportamento dos sinais de estados e controle ao longo do tempo ante a variação da taxa de decaimento (valores inteiros), considerando o sistema nominal. Note, nestes resultados, que a imposição da taxa de decaimento pode ser vista como uma alternativa simples para especificar o tempo de estabelecimento na ausência de experiência do projetista. Para uma melhor visualização das linhas de têndencia dos sinais, optou-se pela apresentação na forma de superfícies ao invés de linhas isoladas, assim como na Subseção 3.2.1.

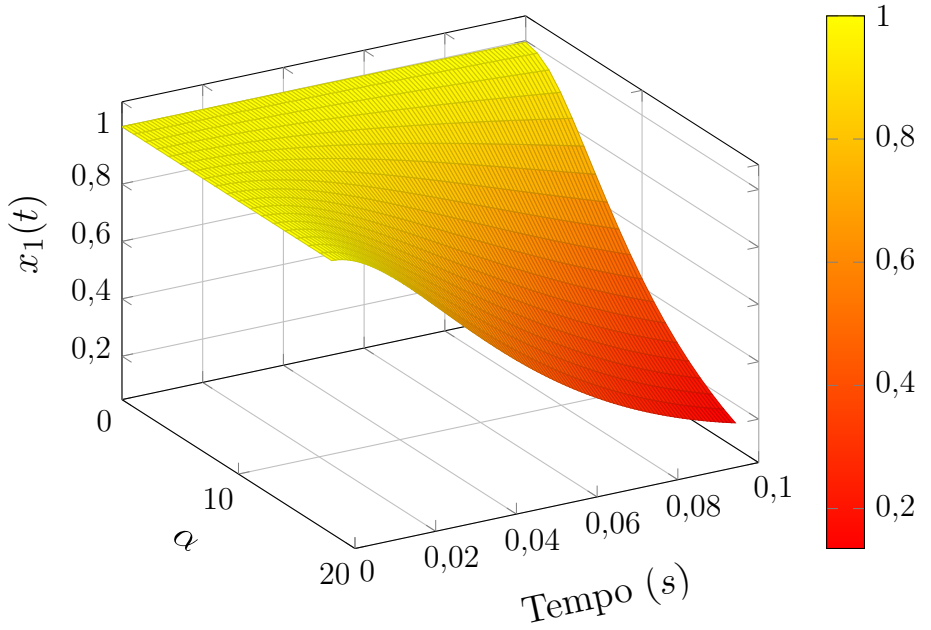
Figura 2.5 - Evolução no tempo do sinal de controle $u(t)$, obtido pelo Teorema 2.3.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

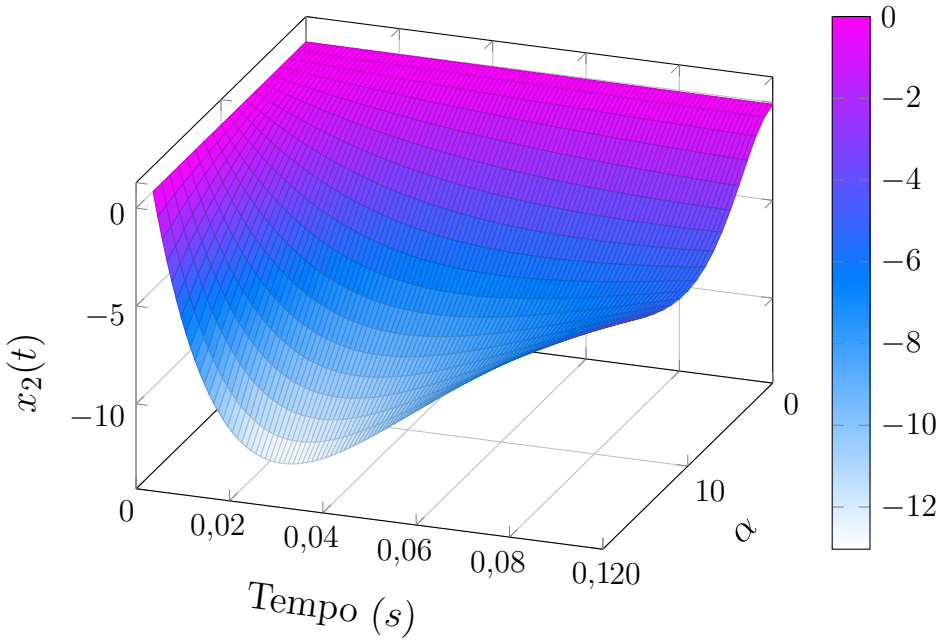
Outro detalhe refere-se a linha temporal para $\alpha = 0$, que por apresentar um tempo de estabelecimento relativamente lento (em torno de 7s) não se torna perceptível sua variação no intervalo de tempo simulado.

Figura 2.6 - Evolução no tempo do sinal de estado $x_1(t)$, obtido pelo Teorema 2.3.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

Figura 2.7 - Evolução no tempo do sinal de estado $x_2(t)$, obtido pelo Teorema 2.3.



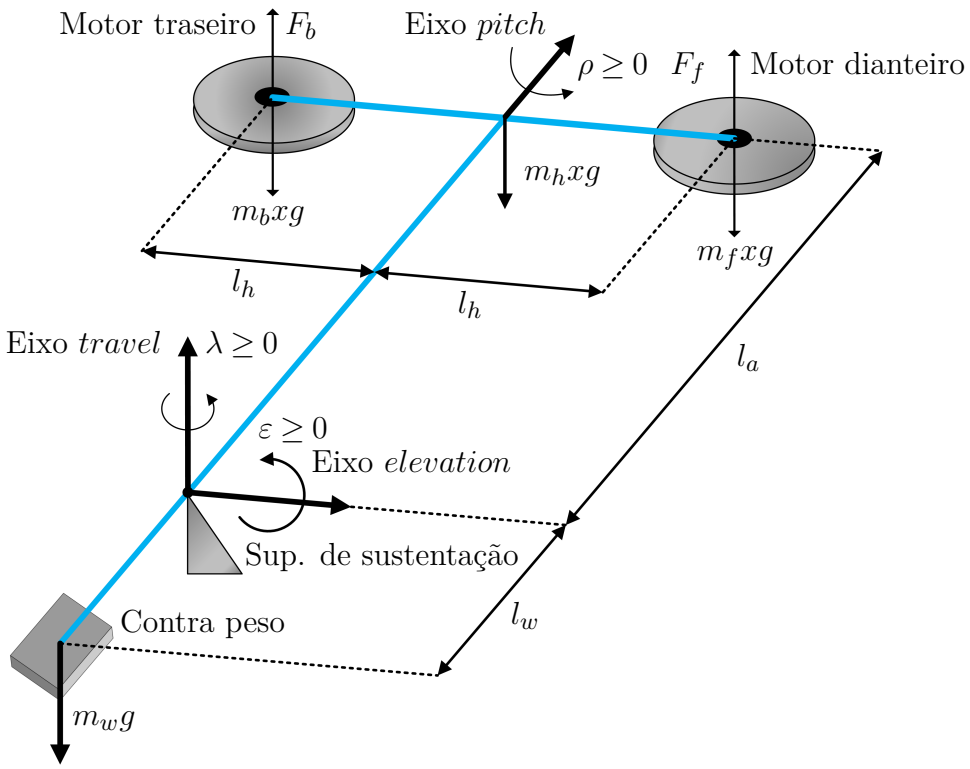
Fonte: Dados de pesquisa do autor.

2.4.2 Helicóptero 3-DOF Quanser®

Considere o modelo esquemático da Figura 2.8(b) do helicóptero com três graus de liberdade apresentado na Figura 2.8(a).

Figura 2.8 - (a) Helicóptero 3-DOF. (b) Modelo esquemático.

(a)



(b)

Fonte: (a) Helicóptero 3-DOF Quanser® do LPC - UNESP. (b) Adaptado de (QUANSER, 2002).

Dois motores DC estão montados nas extremidades de uma haste retangular e acionam

duas hélices propulsoras. Os eixos dos motores são paralelos entre si e o vetor de empuxo normal em relação à haste (QUANSER, 2002). Como descrito em (BUZACHERO *et al.*, 2012), o braço é conectado por uma junta 2-DOF e é livre para inclinar e guinar. Na extremidade oposta do braço existe um contrapeso que torna a massa efetiva leve o suficiente para viabilizar que os motores levantem o helicóptero. Uma tensão elétrica positiva aplicada no motor frontal (V_f) causa uma inclinação positiva, enquanto que uma tensão positiva aplicada no motor traseiro (V_b) causa uma inclinação negativa (ângulo *pitch* (ρ)). Uma tensão positiva nos dois motores causa uma elevação de todo o corpo (ângulo *elevation* (ε) do braço). Se o corpo inclina, o vetor impulsão resulta no deslocamento do corpo (ângulo *travel* (λ) do sistema).

A proposta deste experimento é projetar um sistema de controle para rastrear e regular a elevação e o percurso do helicóptero 3-DOF. A trajetória é dividida em três estágios: (a) decolagem, subindo em $27,5°$ de forma a buscar o ângulo elevação $\varepsilon = 0°$; (b) o helicóptero apresenta um percurso de $120°$ e (c) a aterrissagem na posição inicial ($\varepsilon = -27,5° \approx -0,48$ rad). No modelo de espaço de estados que descreve o helicóptero o vetor de estado é $x(t)$, o sinal de controle é $u(t)$ e as matrizes A, B são definidas por:

$$x(t) = [\varepsilon \quad \rho \quad \lambda \quad \dot{\varepsilon} \quad \dot{\rho} \quad \dot{\lambda} \quad \epsilon \quad \gamma]', \quad u(t) = \begin{bmatrix} V_f \\ V_b \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(2m_f l_a - m_w l_w)g}{2m_f l_a^2 + 2m_f l_h^2 + 2m_f l_w^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{l_a k_f}{m_w l_w^2 + 2m_f l_a^2} & \frac{l_a k_f}{m_w l_w^2 + 2m_f l_a^2} \\ \frac{1}{2}\frac{k_f}{m_f l_h} & -\frac{1}{2}\frac{k_f}{m_f l_h} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observação 2.4. *As variáveis de estado ϵ e γ representam a integral dos ângulos ε e λ, respectivamente. Ocorre que o sistema não alcança valores nulos para estes estados.*

Além disso, na Tabela 2.2 são descritas as constantes que aparecem nas matrizes A e B.

Tabela 2.2 - Parâmetros do helicóptero.

Parâmetros	Símbolo	Valor
Constante da força de propulsão da hélice (experimental)	k_f	0,1188
Massa do corpo do helicóptero (kg)	m_h	1,158
Massa do contra-peso (kg)	m_w	1,87
Massa do conjunto da hélice dianteira (kg)	m_f	$m_h/2$
Massa do conjunto da hélice traseira (kg)	m_b	$m_h/2$
Distância: eixo de pitch - cada motor (m)	l_h	0,1778
Distância: eixo de elev. - helicóptero(m)	l_a	0,6604
Distância: eixo de elev. - contra-peso (m)	l_w	0,4699
Constante gravitacional (m/s^2)	g	9,81

Para adicionar incerteza ao sistema, implementou-se uma queda de 50% de potência no motor da hélice traseira. Neste caso, utilizou-se uma chave temporizadora conectada a um amplificador com ganho de $0,5$ diretamente no atuador do motor. Assim, constituiu-se um politopo de dois vértices com uma incerteza na matriz de entrada do sistema e, consequentemente, é possível reescrever as matrizes na forma,

- Vértice 1 (100% de potência no motor traseiro):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,2304 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0858 & 0,0858 \\ 0,5810 & -0,5810 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Vértice 2 (50% de potência no motor traseiro):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,2304 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0858 & 0,0429 \\ 0,5810 & -0,2905 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A partir do Teorema 2.2, aplicado ao sistema nominal, obteve-se o controlador ótimo da equação (2.51) sujeito a uma taxa de decaimento de $\alpha = 0,3$. Os valores adotados para as matrizes de ponderação são $\mathscr{R} = 0,025\ \mathrm{diag}(1\ 1)$ e $\mathscr{Q} = \mathrm{diag}(100\ 1\ 10\ 0,01\ 0,01\ 2\ 10\ 0,1)$, com a condição inicial $x_0 = [-0,48\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]'$ rad.

$$K_\alpha = \begin{bmatrix} 71,5562 & 45,0190 & -87,4366 & 30,6902 & & & & \\ 71,5562 & -45,0190 & 87,4366 & 30,6902 & & & & \\ & & & & 10,6061 & -80,3018 & 38,7344 & -32,8671 \\ & & & & -10,6061 & 80,3018 & 38,7344 & 32,8671 \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

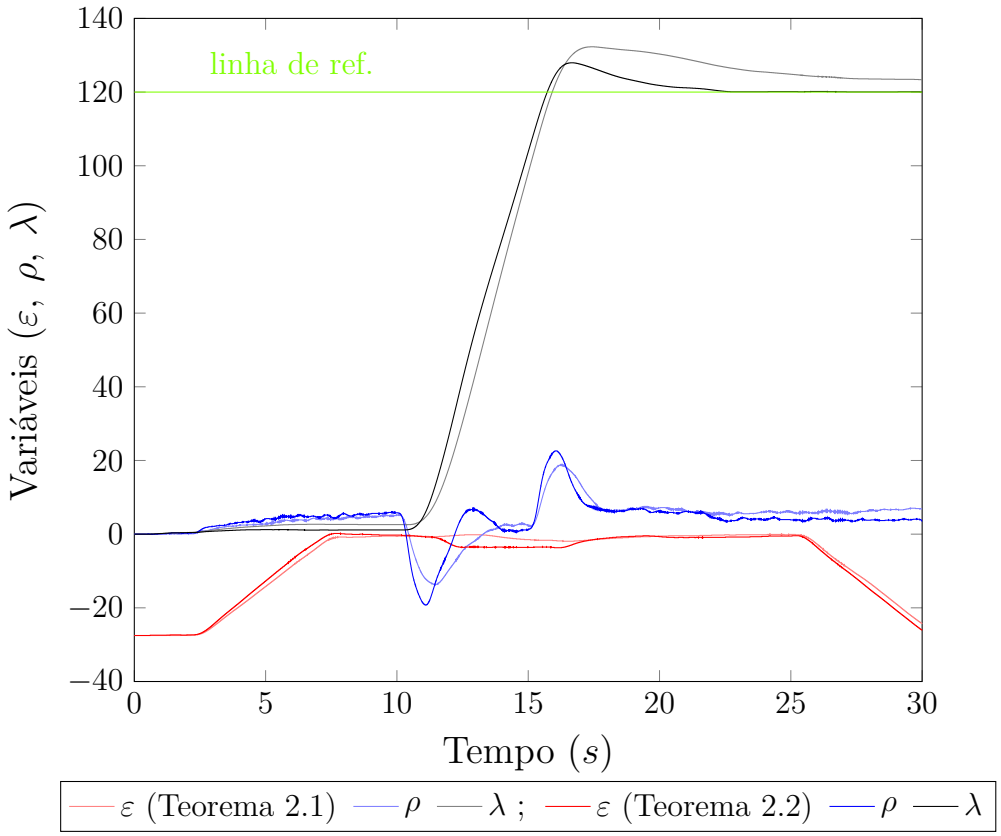
De forma similar, obteve-se o controlador da equação (2.52) via Teorema 2.1, i.e.

$$K = \begin{bmatrix} 51,9244 & 28,3836 & -33,9587 & 24,6066 & & & & \\ 51,9244 & -28,3836 & 33,9587 & 24,6066 & & & & \\ & & & & 8,1892 & -41,3914 & 14,1454 & -3,7821 \\ & & & & -8,1892 & 41,3914 & 14,1454 & 3,7821 \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Pela aplicação dos controladores ao helicóptero de bancada, coletou-se os dados práticos de forma a reconhecer o comportamento temporal dos sinais de estado, conforme ilustra a Figura 2.9. Note que o Teorema 2.2 apresentou menor oscilação e tempo de estabelecimento da variável (λ) em relação ao Teorema 2.1. O ônus associado equivale a um maior esforço dos sinais de controle, que pode ser observado pela norma dos controladores projetados.

Por outro lado, a Figura 2.10 apresenta as variáveis de estado (*elevation*, *pich* e *travel*) e as tensões elétricas dos motores obtidas pela ação do controlador K. Neste caso, a planta apresenta uma falha de 50% na potência do motor da hélice traseira no instante de $25s$. Durante a ocorrência da falha, nota-se a efetiva ação de controle através da redução do sinal de tensão do motor dianteiro e a consequente variação no comportamento dos três graus de liberdade do helicóptero durante a estabilização. Constata-se, portanto, que o regime permanente está fortemente atrelado à alocação de autovalores via α-estabilidade, que promove uma dessensibilização na variação dos estados e garante o transitório desejado.

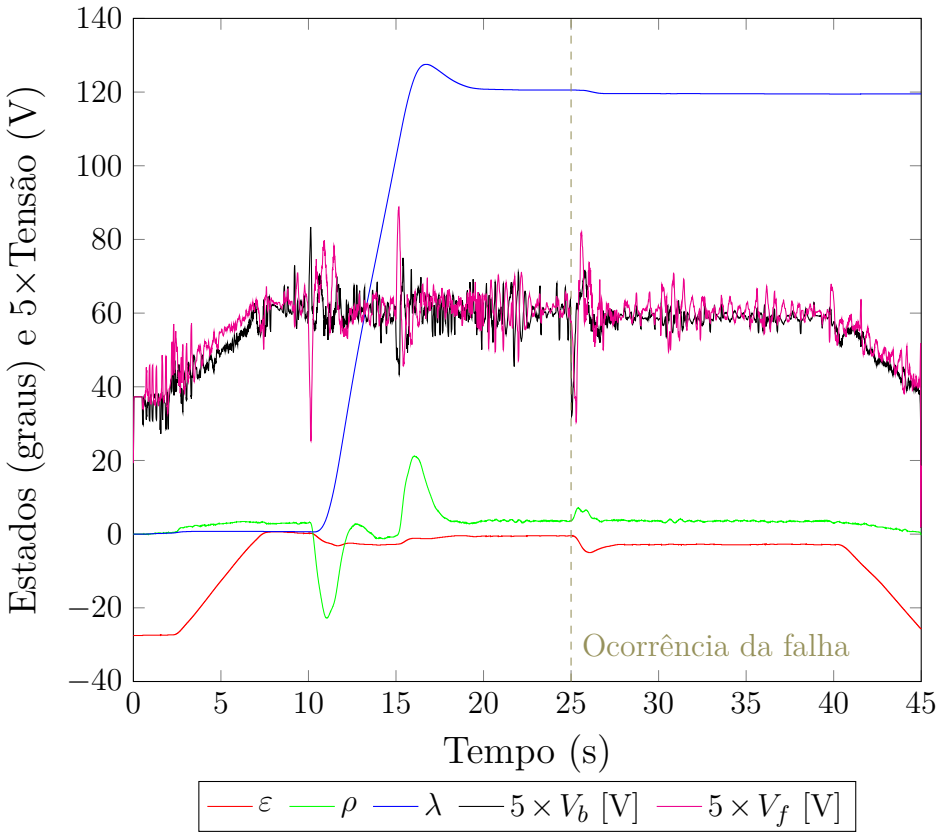
Figura 2.9 - Comportamento dos três graus de liberdade (ε, ρ, λ) referente a implementação prática dos Teoremas 2.1 e 2.2.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

Uma importante consideração é que os *encoders* consideram as variáveis de estados como zero (exceto o ângulo de elevação), quando o código *real-time* é iniciado. Em vista que a trajetória realizada pelo protótipo é composta por três estágios, declarar uma única condição inicial torna-se uma proposta muito conservadora. Por isso, procedeu-se a substituição da LMI (2.22) por (2.20) no Teorema 2.2, no qual considerou-se o intervalo de operação dos estados por $-0,48 \leq x_{0_1} \leq 0$ rad, $0 \leq x_{0_3} \leq 2,09$ rad e os demais nulos. À vista disso, a síntese do sistema expôs um controlador com norma reduzida que garantiu a mesma taxa de decaimento. Este fato evidencia que a restrição da condição inicial é relaxada e, portanto, uma melhor solução é alcançada no interior do politopo. Por fim, optou-se por projetar um ganho K cuja norma de controle é equivalente ao implementado na Figura 2.10. Para tanto, selecionou-se $\alpha = 0,65$ na execução do algoritmo e, após a implementação prática, constatou-se um melhor tempo de estabelecimento e uma menor perda de altitude na ocorrência da falha.

Figura 2.10 - Implementação prática do controlador K, obtido pelo Teorema 2.2, ao sistema incerto sob falha no motor traseiro.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

2.5 COMENTÁRIOS FINAIS

Notoriamente as propostas de projeto discutidas neste estudo são realizadas de forma *off-line*. Contudo, problemas de escala industrial precisam ser mitigados rapidamente, seja por motivos econômicos seja de segurança na operação de processos. Atualmente, o controle LQR tem sido utilizado em diversas aplicações industriais de engenharia de controle - reator contínuo de tanque agitado, por exemplo - auxiliando em projetos de controle PID. O esforço computacional destes algoritmos de controle variam com as dimensões da planta. Este fato pode implicar em atrasos na implementação de controladores que atendam novas condições de operação, que motiva a aplicação de técnicas que garantam soluções em tempo real. Portanto, este capítulo contribui na redução do número de linhas programadas em algoritmos LQR-LMI e explora o custo/benefício dos modelos de incerteza. Na Subseção 2.4.1, um exemplo numérico ilustra a eficiência da proposta limitada por norma em termos da redução do conservadorismo (melhor índice de taxa de decaimento) e complexidade computacional. Na Subseção 2.4.2, uma aplicação prática analisa o comportamento dos três graus de liberdade do helicóptero 3-DOF da Quanser®, por meio do desempenho transitório mediante uma falha severa de 50% de perda na

potência no motor traseiro. A partir dos resultados preliminares de estabilidade absoluta e relativa, contrastados nos resultados da Figura 2.9, é possível concluir que existem sub-regiões do semi-plano complexo dos autovalores-$\boldsymbol{\lambda}$ que, além da estabilidade, permite aperfeiçoar critérios de desempenho em aplicações reais. Entretando, as propostas consideram uma única função de Lyapunov para definir a estabilidade de todo o domínio de incerteza, que implica em uma condição mais simples porém mais conservadora. Portanto, o Capítulo 3 apresenta estratégias de controle LQR via estabilidade estendida e projetiva, que permitem adotar funções de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros. Um caso de estudo, refere-se a aplicação do Lema de Finsler que incorpora multiplicadores as restrições e fornece graus de liberdade extras em problemas de síntese de controladores. Este fato revela condições menos conservadoras das imposições realizadas diretamente na matriz de Lyapunov e, portanto, representam novas formulações em LMIs. De fato, para sistemas precisamente conhecidos, a formulação aumentada do problema LQR equivale ao Teorema 2.1. Por outro lado, as condições aplicadas a sistemas incertos apresentam factibilidade aumentada e, desse modo, garante-se a factibilidade do Lema de Finsler a partir da factibilidade dos Teoremas 2.2 e 2.3. Note ainda que o *S-Procedure* introduz uma matriz topológica que reduz o número de restrições LMIs. Logo, esta matriz não equivale a uma variável de folga, porém suas condições conduzem a uma maior factibilidade por serem menos restritivas.

Capítulo 3

REGULADORES LINEARES QUADRÁTICOS VIA FUNÇÃO DE LYAPUNOV DEPENDENTE DE PARÂMETROS

O uso de técnicas de relaxação, em problemas de otimização com restrição quadrática, permite a expansão da factibilidade sem aumento considerável do custo computacional. Dentre as propostas mais difundidas, os lemas de Finsler e da Projeção Recíproca são comumente aplicados em teoria de controle a tempo contínuo e discreto. A principal motivação vem da possibilidade de desacoplar a matriz de Lyapunov da matriz do controlador (CASTELAN *et al.*, 2006) devido ao uso de variáveis de folga (OLIVEIRA; SKELTON, 2001). Contudo, a contribuição deste capítulo permite estender as condições de projeto LQR propostas no Capítulo 2, que consideram a matriz de Lyapunov quadrática, para o caso da matriz de Lyapunov dependente de parâmetros. Em termos das condições limitadas por norma, a manipulação da função de Lyapunov dependente de parâmetros é baseada nos resultados de (KUNNEE; BANJERDPONGCHAI, 2008).

3.1 MATRIZ DE LYAPUNOV DEPENDENTE DE PARÂMETROS

Uma função de Lyapunov dependente de parâmetros é definida como:

$$V(x,\xi) = x'P(\xi)x. \tag{3.1}$$

E, a matriz de Lyapunov dada por,

$$P(\xi) = \xi_1 P_1 + \xi_2 P_2 + \ldots + \xi_{\mathscr{N}} P_{\mathscr{N}}, \tag{3.2}$$

sendo $P_i = P_i' > 0$ para $i = 1, \ldots, \mathscr{N}$, tal que $\sum_{i=1}^{\mathscr{N}} \xi_i = 1,\ \xi_i \geq 0$.

Os resultados de síntese obtidos por funções de Lyapunov dependente de parâmetros estão sujeito as variações dos parâmetros incertos, diferentemente do caso da função de Lyapunov quadrática. Logo, em aplicações de modelos de incerteza, uma única função de Lyapunov pode tornar-se uma proposta muito conservadora.

Com essa notação (e as constantes no Apêndice A) é possível construir condições mais relaxadas de síntese LQR baseadas na matriz de Lyapunov (3.2), conforme apresenta as subseções seguintes.

3.1.1 Formulação por incerteza politópica: Lema de Finsler

Considere as LMIs (2.21)-(2.22) apresentadas no Capítulo 2. Seja o Lema A.3 aplicado ao Teorema 2.2, cuja formulação permite contornar o produto entre a matriz de Lyapunov e a solução do problema objetivo linear (2.13). Consequentemente, é possível aplicar as funções de Lyapunov com dependência nos parâmetros em projeto de controladores robustos invariantes no tempo.

Teorema 3.1. *O sistema (2.2) é estável por $u(t) = -Kx(t)$, com taxa de decaimento maior ou igual a α e custo garantido $\mathscr{J}_\infty$ inferior a μ, se para um dado $b > 0$, existirem matrizes $Y \in \Re^{n_x \times n_x}$, $Z \in \Re^{n_u \times n_x}$ e $\mathscr{W}_i = \mathscr{W}_i' > 0 \in \Re^{n_x \times n_x}$, com $i = 1, 2, \ldots, \mathscr{N}$, tais que:*

$$\min_{\mu, \mathscr{W}_i, Z, Y} \mu$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} A_iY + B_iZ + Y'A_i' + Z'B_i' + 2\alpha\mathscr{W}_i & * & * & * \\ \mathscr{W}_i - Y' + bA_iY + bB_iZ & -bY - bY' & * & * \\ Y & 0 & -\mathscr{Q}^{-1} & * \\ Z & 0 & 0 & -\mathscr{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{3.3}$$

$$\begin{bmatrix} \mu & * \\ x(0) & Y' + Y - \mathscr{W}_i \end{bmatrix} > 0, \tag{3.4}$$

com $K = -ZY^{-1}$.

Prova: Multiplicando (3.3) por $\xi_i \geq 0$, com $i = 1$ a $i = \mathscr{N}$, resulta em (3.5).

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A(\xi)Y + Y'A(\xi)' + \\ B(\xi)Z + Z'B(\xi)' + 2\alpha\mathscr{W}(\xi) \end{pmatrix} & * & * & * \\ \mathscr{W}(\xi) - Y' + bA(\xi)Y + bB(\xi)Z & -bY - bY' & * & * \\ Y & 0 & -\mathscr{Q}^{-1} & * \\ Z & 0 & 0 & -\mathscr{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0. \tag{3.5}$$

Sejam as variáveis, $w = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$, $\mathscr{B} = [(A(\xi) - B(\xi)K) \quad -I]$, $\mathscr{B}^{\perp} \begin{bmatrix} I \\ (A(\xi) - B(\xi)K) \end{bmatrix}$ e $\mathscr{L} = \begin{bmatrix} 2\alpha P(\xi) + K'\mathscr{R}\mathscr{K} + \mathscr{Q} & * \\ P(\xi) & 0 \end{bmatrix}$, com $P(\xi) = P(\xi)' > 0$. Diante ao exposto, proceder-se-á o desenvolvimento das condições do Lema A.3, conforme segue:

1. Se $\exists P(\xi) = P(\xi)' > 0$, tal que $w'\mathscr{L}w < 0$ então,

$$\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 2\alpha P(\xi) + K'\mathscr{R}K + \mathscr{Q} & * \\ P(\xi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} < 0, \tag{3.6}$$

que, expandindo a multiplicação vetorial, resulta em:

$$x'P(\xi)\dot{x} + \dot{x}'P(\xi)x + 2\alpha x'P(\xi)x < -x'(K'\mathscr{R}K + \mathscr{Q})x, \tag{3.7}$$

ou, simplesmente,

$$x'P(\xi)\dot{x} + \dot{x}'P(\xi)x + 2\alpha x'P(\xi)x < 0. \tag{3.8}$$

Adicionalmente, considere a condição $\mathscr{B}w = 0$, i.e.

$$\begin{bmatrix} (A(\xi) - B(\xi)K) & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = 0, \tag{3.9}$$

que é equivalente a,

$$\dot{x} = (A(\xi) - B(\xi)K)x. \tag{3.10}$$

2. Se $\exists P(\xi) = P(\xi)' > 0$, tal que $\mathscr{B}^{\perp'}\mathscr{L}\mathscr{B}^{\perp} < 0$, então,

$$\begin{bmatrix} I \\ A(\xi) - B(\xi)K \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 2\alpha P(\xi) + K'\mathscr{R}K + \mathscr{Q} & * \\ P(\xi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ A(\xi) - B(\xi)K \end{bmatrix} < 0, \tag{3.11}$$

ou, multiplicando os vetores,

$$(A(\xi) - B(\xi)K)'P(\xi) + P(\xi)(A(\xi) - B(\xi)K) + 2\alpha P(\xi) < -(K'\mathscr{R}K + \mathscr{Q}). \tag{3.12}$$

Neste ponto, observa-se que as condições 1 e 2 do Lema de Finsler são satisfeitas, então a desigualdade (3.3) é obtida pela condição 4, conforme segue:

3. Se $\exists \mathscr{X} \in \Re^{2n_x \times n_x}$, $P(\xi) = P(\xi)' > 0$, então,

$$\begin{bmatrix} 2\alpha P(\xi) + K'\mathscr{R}K + \mathscr{Q} & * \\ P(\xi) & 0 \end{bmatrix} + \mathscr{X}\begin{bmatrix} (A(\xi) - B(\xi)K) & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (A(\xi) - B(\xi)K)' \\ -I \end{bmatrix}\mathscr{X}' < 0. \quad (3.13)$$

Seja considerar $\mathscr{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$, tal que,

$$\begin{bmatrix} 2\alpha P(\xi) + K'\mathscr{R}K + \mathscr{Q} & * \\ P(\xi) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1(A(\xi) - B(\xi)K) & -X_1 \\ X_2(A(\xi) - B(\xi)K) & -X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (A(\xi) - B(\xi)K)'X_1' & (A(\xi) - B(\xi)K)'X_2' \\ -X_1' & -X_2' \end{bmatrix} < 0, \quad (3.14)$$

ou, ainda,

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1(A(\xi) - B(\xi)K) + (A(\xi) - B(\xi)K)'X_1' + \\ 2\alpha P(\xi) + K'\mathscr{R}K + \mathscr{Q} \end{pmatrix} & * \\ P(\xi) - X_1' + X_2(A(\xi) - B(\xi)K) & -X_2 - X_2' \end{bmatrix} < 0. \quad (3.15)$$

Para uma escolha arbitrária de $X_1 = M$ e $X_2 = bM$, com $b > 0$, não haverá introdução de conservadorismo (PIPELEERS *et al.*, 2009). Então,

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} M(A(\xi) - B(\xi)K) + (A(\xi) - B(\xi)K)'M' + \\ 2\alpha P(\xi) + K'\mathscr{R}K + \mathscr{Q} \end{pmatrix} & * \\ P(\xi) - M' + bM(A(\xi) - B(\xi)K) & -bM - bM' \end{bmatrix} < 0. \quad (3.16)$$

Agora, multiplicando (3.16) por $\begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix}$ à esquerda e $\begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix}'$ à direita, obtém-se a desigualdade (3.17). Através das mudanças de variáveis $Y = (M')^{-1}$ e $Z = -KY$, é determinada a desigualdade (3.18).

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} (A(\xi) - B(\xi)K)(M')^{-1} + \\ M^{-1}(A(\xi) - B(\xi)K)' + 2\alpha M^{-1}P(\xi)(M')^{-1} + \\ M^{-1}K'\mathscr{R}K(M')^{-1} + M^{-1}\mathscr{Q}(M')^{-1} \end{pmatrix} & * \\ M^{-1}P(\xi)(M')^{-1} - M^{-1} + b(A(\xi) - B(\xi)K)(M')^{-1} & -b(M')^{-1} - bM^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.17)$$

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A(\xi)Y + B(\xi)Z + Y'A(\xi)' + Z'B(\xi)' + \\ 2\alpha Y'P(\xi)Y + Z'\mathscr{R}Z + Y'\mathscr{Q}Y \end{pmatrix} & * \\ Y'P(\xi)Y - Y' + bA(\xi)Y + bB(\xi)Z & -bY - bY' \end{bmatrix} < 0. \quad (3.18)$$

Desde que $\mathscr{W}(\xi) = Y'P(\xi)Y$, implica em,

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A(\xi)Y + B(\xi)Z + Y'A(\xi)' + Z'B(\xi)' + \\ 2\alpha\mathscr{W}(\xi) + Z'\mathscr{R}Z + Y'\mathscr{Q}Y \end{pmatrix} & * \\ \mathscr{W}(\xi) - Y' + bA(\xi)Y + bB(\xi)Z & -bY - bY' \end{bmatrix} < 0. \tag{3.19}$$

Usando o complemento de Schur, afim de decompor os termos quadráticos de $\mathscr{Q}$ e $\mathscr{R}$, obtém-se a LMI equivalente,

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A(\xi)Y + Y'A(\xi)' \\ +B(\xi)Z + Z'B(\xi)' + 2\alpha\mathscr{W}(\xi) \end{pmatrix} & * & * & * \\ \mathscr{W}(\xi) - Y' + bA(\xi)Y + bB(\xi)Z & -bY - bY' & * & * \\ Y & 0 & -\mathscr{Q}^{-1} & * \\ Z & 0 & 0 & -\mathscr{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{3.20}$$

sendo $Y \in \Re^{n_x \times n_x}$, $Y \neq Y'$, $Z \in \Re^{n_u \times n_x}$, $\mathscr{W}(\xi) = Y'P(\xi)Y$, $P(\xi) = P(\xi)' > 0$ e $K = -ZY^{-1}$.

Finalmente, a expansão das matrizes incertas por meio de seus vértices resulta em (3.3).

A prova do Teorema 3.1 está completa. ■

Proposição 3.1

Considere o sistema (2.2). Dada uma condição inicial $x(0)$, matrizes definidas positivas $\mathscr{Q}$ e $\mathscr{R}$, assuma que existam matrizes Y e Z, matrizes simétricas $\mathscr{W}_i = \mathscr{W}, \forall i = 1, \ldots, \mathscr{N}$ e um escalar positivo b que satisfaça (3.3) e (3.4). Então, este resultado converge no caso particular de uso de funções de Lyapunov quadráticas.

Observação 3.1. *Verifica-se, através de testes práticos, que quando o parâmetro b torna-se suficientemente pequeno, ocorre um aumento da factibilidade dos controladores via Lema de Finsler (GEROMEL; KOROGUI, 2006). Assim, parametrizados pelos resultados de (GEROMEL; KOROGUI, 2006), optou-se por adotar valores de ordem milesimal em aplicações do Teorema 3.1, tal como será ilustrado e discutido nos exemplos da Seção 3.2.*

Observação 3.2. *O Teorema 3.1 apresenta uma restrição de positividade do parâmetro b. Esta condição está relacionada ao Lema da Projeção (ou Lema de Eliminação de Variáveis) discutido por (PIPELEERS* et al.*, 2009). Para tanto, seja a equivalência entre as LMIs (3.11) e (3.13), dado a variável adicional $\mathscr{X} \in \Re^{2n_x \times n_x}$. A proposta de Pipeleers e colaboradores define estratégias para a obtenção da matriz coluna $\mathscr{V}$ relacionada a desigualdade de projeção $\mathscr{V}^{\perp\prime}\mathscr{L}\mathscr{V}^{\perp} < 0$, sendo $\mathscr{V}^{\perp}$ uma base para o espaço nulo de $\mathscr{V}$. Neste caso, o projeto de $\mathscr{V}$ deve conduzir a condição de $P(\xi) > 0$,*

dado que a estabilidade do sistema requer que a matriz de Lyapunov seja definida positiva. Assim, seja o vetor $\mathscr{V} = \begin{bmatrix} I & bI \end{bmatrix}$ *e, consequentemente,* $\mathscr{V}^{\perp} = \begin{bmatrix} bI \\ -I \end{bmatrix}$ *que produz* $\mathscr{V}^{\perp\prime}\mathscr{L}\mathscr{V}^{\perp} = 2b^2\alpha P(\xi) - bP(\xi) - bP(\xi) < -b^2\mathscr{Q} - b^2K'\mathscr{R}K < 0$. *E, portanto, esta desigualdade pode ser reescrita por* $P(\xi)(b - \alpha b^2) > 0$, *que implica em* $b(1-\alpha b) > 0$ *dado que* $P(\xi) > 0$. *Dessa forma, define-se que* $b \in]0, \frac{1}{\alpha}[$ *e, por conseguinte,* $b > 0$. *Note que a metodologia proposta aplica o Lema A.5 na direção oposta, em que* $\mathscr{X}$ *é a variável adicional. Neste caso, a equivalência entre as LMIs (A.8) e (A.9) implica que a matriz* $\mathscr{V}$ *é escolhida tal que (A.10) não introduza conservadorismo.*

3.1.2 Formulação por incerteza limitada por norma: Lema de Finsler

No próximo teorema, o Lema de Finsler é incorporado ao Teorema 2.3. Com uma escolha adequada do parâmetro b, o objetivo é obter resultados menos conservadores e, portanto, este resultado representa uma extensão do Teorema 2.3.

Teorema 3.2. *O sistema (2.3) é estável por* $u(t) = -Kx(t)$, *com taxa de decaimento maior ou igual a* α *e custo garantido* $\mathscr{J}_\infty$ *inferior a* μ, *se para um dado* $b > 0$, *existirem matrizes* $Y \in \Re^{n_x \times n_x}$, $Z \in \Re^{n_u \times n_x}$, $\Lambda_k \in \Re$ *e* $\mathscr{W}_k = \mathscr{W}_k' > 0 \in \Re^{n_x \times n_x}$, *com* $k = 1, 2, \ldots, r$, *tais que:*

$$\min_{\mu, \mathscr{W}_k, \Lambda_k, Z, Y} \mu$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} AY + BZ + Y'A' + Z'B' + 2\alpha\mathscr{W}_k + B_{p,k}\Lambda_k B_{p,k}' & * \\ \mathscr{W}_k - Y' + b(AY + BZ + B_{p,k}\Lambda_k B_{p,k}') & b(bB_{p,k}\Lambda_k B_{p,k}' - Y' - Y) \\ Y & 0 \\ Z & 0 \\ C_{q,k}Y + D_{q,k}Z & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ -\mathscr{Q}^{-1} & * & * \\ 0 & -\mathscr{R}^{-1} & * \\ 0 & 0 & -\Lambda_k \end{bmatrix} < 0, \tag{3.21}$$

$$\begin{bmatrix} \mu & * \\ x(0) & Y'+Y-\mathscr{W}_k \end{bmatrix} > 0, \tag{3.22}$$

com,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Lambda_r \end{bmatrix} > 0, \tag{3.23}$$

e, portanto, o ganho ótimo é obtido por $K = -ZY^{-1}$.

Prova: Considere, inicialmente, as variáveis auxiliares do Lema A.4:

$$w = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ p_k(t) \end{bmatrix}, \mathscr{B} = [(A-BK) \quad -I \quad B_{p,k}] \text{ e } \mathscr{L} = \begin{bmatrix} 2\alpha P_k + K'\mathscr{R}K + \mathscr{Q} & * & * \\ P_k & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se $\exists P_k = P_k' > 0$ (definido em (KUNNEE; BANJERDPONGCHAI, 2008)), tal que $w'\mathscr{L}w < 0$, então,

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ p_k(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 2\alpha P_k + K'\mathscr{R}K + \mathscr{Q} & * & * \\ P_k & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ p_k(t) \end{bmatrix} < 0. \tag{3.24}$$

Além disso, a desigualdade via NLDIs restrita por $|\zeta_k| \leq 1 : \ k = 1, \ldots, r$, que considera a matriz de parâmetros incertos $\mathscr{Z}$ no sistema (2.3), é dada por:

$$\begin{aligned} p_k(t)^2 &= (C_{q,k}x(t) + D_{q,k}u(t))'\zeta_k'\zeta_k(C_{q,k}x(t) + D_{q,k}u(t)) \\ &\leq (C_{q,k}x(t) + D_{q,k}u(t))'(C_{q,k}x(t) + D_{q,k}u(t)). \end{aligned} \tag{3.25}$$

A partir dos elementos da variável matricial (3.23) do *S-Procedure*, é possível derivar a desigualdade (3.26) usando a lei de controle $u(t) = -Kx(t)$.

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ p_k(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} (C_{q,k} - D_{q,k}K)'\hat{\Lambda}_k(C_{q,k} - D_{q,k}K) & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & -\hat{\Lambda}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ p_k(t) \end{bmatrix} \geq 0. \tag{3.26}$$

Após, aplicando a condição equivalente do Lema A.4 e, em seguida, o *S-Procedure* mediante a desigualdade (3.26), têm-se:

$$\begin{bmatrix} 2\alpha P_k + K'\mathscr{R}K + \mathscr{Q} & * & * \\ P_k & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathscr{X}\begin{bmatrix}(A-BK) & -I & B_{p,k}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(A-BK)' \\ -I \\ B'_{p,k}\end{bmatrix}\mathscr{X}' + \begin{bmatrix}(C_{q,k}-D_{q,k}K)'\hat{\Lambda}_k(C_{q,k}-D_{q,k}K) & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & -\hat{\Lambda}_k\end{bmatrix} < 0, \quad (3.27)$$

sendo que $B_{p,k}$ denota a i-ésima coluna de B_p. Seja admitir $\mathscr{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ 0 \end{bmatrix}$, então,

$$\begin{bmatrix} 2\alpha P_k + K'\mathscr{R}K + \mathscr{Q} & * & * \\ P_k & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}(A-BK) & -I & B_{p,k}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(A-BK)' \\ -I \\ B'_{p,k}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ 0 \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix}(C_{q,k}-D_{q,k}K)'\hat{\Lambda}_k(C_{q,k}-D_{q,k}K) & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & -\hat{\Lambda}_k\end{bmatrix} < 0. \quad (3.28)$$

Por simples mudança de variáveis, $X_1 = M$ e $X_2 = bM$, obtém-se uma LMI equivalente por,

$$\begin{bmatrix} 2\alpha P_k + K'\mathscr{R}K + \mathscr{Q} + (C_{q,k}-D_{q,k}K)'\hat{\Lambda}_k(C_{q,k}-D_{q,k}K) & * & * \\ P_k & 0 & * \\ 0 & 0 & -\hat{\Lambda}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M \\ bM \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}(A-BK) & -I & B_{p,k}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(A-BK)' \\ -I \\ B'_{p,k}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} M \\ bM \\ 0 \end{bmatrix}' < 0, \quad (3.29)$$

ou,

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} M(A-BK) + (A-BK)'M' + 2\alpha P_k + K'\mathscr{R}K + \\ \mathscr{Q} + (C_{q,k}-D_{q,k}K)'\hat{\Lambda}_k(C_{q,k}-D_{q,k}K) \end{pmatrix} & * & * \\ bM(A-BK) - M' + P_k & -bM' - bM & * \\ B'_{p,k}M' & bB'_{p,k}M' & -\hat{\Lambda}_k \end{bmatrix} < 0. \quad (3.30)$$

Pré-multiplicando por $\begin{bmatrix} M^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & M^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & M^{-1} \end{bmatrix}$ e pós-multiplicando por $\begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & M^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{matrix}0\\0\\M^{-1}\end{matrix}\Bigg]'$$ a desigualdade (3.30), tem-se,

$$\left[\begin{array}{c}\left(\begin{array}{c}(A-BK)(M')^{-1}+M^{-1}(A-BK)'+2\alpha M^{-1}P_k(M')^{-1}+\\ M^{-1}K'\mathscr{R}K(M')^{-1}+M^{-1}\mathscr{Q}(M')^{-1}+\\ M^{-1}(C_{q,k}-D_{q,k}K)'\hat{\Lambda}_k(C_{q,k}-D_{q,k}K)(M')^{-1}\end{array}\right)\\ b(A-BK)(M')^{-1}-M^{-1}+M^{-1}P_k(M')^{-1}\\ M^{-1}B'_{p,k}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc}* & *\\ -bM^{-1}-b(M')^{-1} & *\\ bM^{-1}B'_{p,k} & -M^{-1}\hat{\Lambda}_k(M')^{-1}\end{array}\right]<0. \tag{3.31}$$

Seja $Y=(M')^{-1}$, então,

$$\left[\begin{array}{ccc}\left(\begin{array}{c}(A-BK)Y+Y'(A-BK)'+2\alpha Y'P_kY+\\ Y'K'\mathscr{R}KY+Y'\mathscr{Q}Y+\\ Y'(C_{q,k}-D_{q,k}K)'\hat{\Lambda}_k(C_{q,k}-D_{q,k}K)Y\end{array}\right) & * & *\\ b(A-BK)Y-Y'+Y'P_kY & -bY'-bY & *\\ Y'B'_{p,k} & bY'B'_{p,k} & -Y'\hat{\Lambda}_kY\end{array}\right]<0, \tag{3.32}$$

e, considerando a mudança de variável $\mathscr{W}_k=Y'P_kY$, têm-se:

$$\left[\begin{array}{ccc}\left(\begin{array}{c}(A-BK)Y+Y'(A-BK)'+2\alpha\mathscr{W}_k+\\ Y'K'\mathscr{R}KY+Y'\mathscr{Q}Y+\\ Y'(C_{q,k}-D_{q,k}K)'\hat{\Lambda}_k(C_{q,k}-D_{q,k}K)Y\end{array}\right) & * & *\\ b(A-BK)Y-Y'+\mathscr{W}_k & -bY'-bY & *\\ Y'B'_{p,k} & bY'B'_{p,k} & -Y'\hat{\Lambda}_kY\end{array}\right]<0. \tag{3.33}$$

A partir da desigualdade anterior, aplica-se a relação de transformação pela multiplicação de $\begin{bmatrix}I&0&0\\0&I&0\\0&0&(Y')^{-1}\end{bmatrix}$ à esquerda e $\begin{bmatrix}I&0&0\\0&I&0\\0&0&(Y')^{-1}\end{bmatrix}'$ à direita, obtendo (3.34).

$$\left[\begin{array}{ccc}\left(\begin{array}{c}(A-BK)Y+Y'(A-BK)'+2\alpha\mathscr{W}_k+\\ Y'K'\mathscr{R}KY+Y'\mathscr{Q}Y+\\ Y'(C_{q,k}-D_{q,k}K)'\hat{\Lambda}_k(C_{q,k}-D_{q,k}K)Y\end{array}\right) & * & *\\ b(A-BK)Y-Y'+\mathscr{W}_k & -bY'-bY & *\\ B'_{p,k} & bB'_{p,k} & -\hat{\Lambda}_k\end{array}\right]<0. \tag{3.34}$$

De forma a suprimir as não linearidades, aplica-se o complemento de Schur com as mudanças de variáveis $Z = -KY$ e $\Lambda_k = \hat{\Lambda}_k^{-1}$, tal que (3.21) é alcançada.

A prova do Teorema 3.2 está completa. ■

Proposição 3.2
Considere o sistema (2.3). Dada uma condição inicial $x(0)$, matrizes definidas positivas $\mathscr{Q}$ e $\mathscr{R}$, assuma que existam matrizes Y, Z e Λ, matrizes simétricas $\mathscr{W}_k = \mathscr{W}$, $\forall k = 1, \ldots, r$ e um escalar positivo b que satisfaça (3.21) a (3.23). Então, este resultado converge no caso particular de uso de funções de Lyapunov quadráticas.

3.1.3 Derivação do limitante superior

Esta subseção é dedicada à demonstração do limitante superior $\mathscr{J}_\infty$ via Lema de Finsler, i.e.

$$\begin{bmatrix} \mu & * \\ x(0) & Y' + Y - \mathscr{W}_i \end{bmatrix} > 0. \tag{3.35}$$

Neste caso, para a prova de suficiência, serão considerados os resultados de (DAAFOUZ; BERNUSSOU, 2001) tal que (3.35) é suposto factível e, portanto, $Y' + Y - \mathscr{W}_i > 0$. Assim, dado Y (*rank* completo) e $\mathscr{W}_i$ (estritamente definida positiva), tem-se,

$$(\mathscr{W}_i - Y)\mathscr{W}_i^{-1}(\mathscr{W}_i - Y)' > 0, \tag{3.36}$$

no qual, equivalentemente, $Y\mathscr{W}_i^{-1}Y' > Y' + Y - \mathscr{W}_i$. Desta forma satisfazendo,

$$\begin{bmatrix} \mu & * \\ x(0) & Y\mathscr{W}_i^{-1}Y' \end{bmatrix} > 0. \tag{3.37}$$

Pela decomposição de $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}$ à esquerda e $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}'$ à direita, resulta em,

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu & * \\ Y^{-1}x(0) & \mathscr{W}_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}' > 0, \tag{3.38}$$

que, por complemento de Schur, obtém-se

$$x(0)'(Y')^{-1}\mathscr{W}_i Y^{-1}x(0) < \mu. \tag{3.39}$$

Agora, procedendo a mudança de variável $\mathscr{W}_i = Y'P_iY$, produz a seguinte condição

LMI:

$$x(0)'(Y')^{-1}Y'P_iYY^{-1}x(0) < \mu. \tag{3.40}$$

Finalmente, considere o simplex unitário tal que $\sum_{i=1}^{\mathscr{N}} \xi_i = 1,\ \xi_i \geq 0$. Multiplicando (3.40) por ξ_i, com $i = 1$ a $i = \mathscr{N}$, resulta em $x(0)'P(\xi)x(0) < \mu$.

Observação 3.3. *Observa-se, neste caso, que a única variação entre os Teoremas 3.1 e 3.2 envolve os limites do subíndice i, sendo que no modelo de incerteza politópica é considerado o número de vértices e no modelo de incerteza limitada por norma o número de parâmetros incertos.*

3.1.4 Formulação por incerteza politópica: Lema da Projeção Recíproca

Nesta subseção, é proposto no Teorema 3.3 novas condições LMIs via Lema da Projeção Recíprova (vide Lema A.6). O politopo é descrito pelo conjunto $\Omega_p \cup \Omega_x$, em que as incertezas da planta não são os únicos parametros incertos do sistema e, portanto, uma condição inicial ($x_j(0)$) é considerada na formulação a seguir.

Teorema 3.3. *O sistema (2.2) é estável por $u(t) = -Kx(t)$, com taxa de decaimento maior ou igual a α e custo garantido $\mathscr{J}_\infty$ inferior a μ, se existirem matrizes $V \in \Re^{n_x \times n_x}$, $Z \in \Re^{n_u \times n_x}$ e $X_{ij} = X_{ij}' > 0 \in \Re^{n_x \times n_x}$, tais que:*

$$\min_{\mu, X_{ij}, Z, Y} \mu$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} -(V'+V) & * & * & * & * \\ A_iV + B_iZ + \alpha V + X_{ij} & -X_{ij} & * & * & * \\ V & 0 & -X_{ij} & * & * \\ V & 0 & 0 & -\mathscr{Q}^{-1} & * \\ Z & 0 & 0 & 0 & -\mathscr{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{3.41}$$

$$\begin{bmatrix} \mu & * \\ x_j(0) & X_{ij} \end{bmatrix} > 0, \tag{3.42}$$

com $i, j = 1, \ldots, \mathscr{N}$. Assim, o controlador é obtido por $K = -ZV^{-1}$.

Prova: Considere a equação de Riccati com a restrição da taxa de decaimento e, inicialmente, uma matriz de Lyapunov P tal que:

$$P(A - BK) + (A - BK)'P + 2\alpha P + K'\mathscr{R}K + \mathscr{Q} < 0. \tag{3.43}$$

Assuma que $\Psi = K'\mathscr{R}K + \mathscr{Q}$, $S = P(A-BK)+\alpha P$ e $S' = (A-BK)'P+\alpha P$. Assim, da condição 2 do Lema A.6, é possível estabelecer,

$$\begin{bmatrix} K'\mathscr{R}K+\mathscr{Q}+T-(W+W') & * \\ P(A-BK)+\alpha P+W & -T \end{bmatrix} < 0. \tag{3.44}$$

Aplicando a transformação de congruência $\begin{bmatrix} (W')^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix}$ na desigualdade anterior, é encontrado (3.45).

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} (W')^{-1}K'\mathscr{R}KW^{-1}+(W')^{-1}\mathscr{Q}W^{-1}+ \\ (W')^{-1}TW^{-1}-((W')^{-1}+W^{-1}) \end{pmatrix} & * \\ (A-BK)W^{-1}+\alpha W^{-1}+P^{-1} & -P^{-1}TP^{-1} \end{bmatrix} < 0. \tag{3.45}$$

Declarando as variáveis $X = P^{-1}$ e $V = W^{-1}$, pode-se expressar (3.45) por,

$$\begin{bmatrix} V'K'\mathscr{R}KV+V'\mathscr{Q}V+V'TV-(V'+V) & * \\ (A-BK)V+\alpha V+X & -XTX \end{bmatrix} < 0. \tag{3.46}$$

Seja uma nova mudança de variáveis, $T = X^{-1}$ e $Z = -KV$, tal que,

$$\begin{bmatrix} Z'\mathscr{R}Z+V'\mathscr{Q}V+V'X^{-1}V-(V'+V) & * \\ AV+BZ+\alpha V+X & -X \end{bmatrix} < 0. \tag{3.47}$$

Pela aplicação do complemento de Schur, de forma a decompor os termos quadráticos, obtém-se,

$$\begin{bmatrix} -(V'+V) & * & * & * & * \\ AV+BZ+\alpha V+X & -X & * & * & * \\ V & 0 & -X & * & * \\ V & 0 & 0 & -\mathscr{Q}^{-1} & * \\ Z & 0 & 0 & 0 & -\mathscr{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0. \tag{3.48}$$

Agora, expandindo (3.48) em termos dos vértices do politopo é obtido (3.49).

$$\begin{bmatrix} -(V'+V) & * & * & * & * \\ A_iV+B_iZ+\alpha V+X_{ij} & -X_{ij} & * & * & * \\ V & 0 & -X_{ij} & * & * \\ V & 0 & 0 & -\mathscr{Q}^{-1} & * \\ Z & 0 & 0 & 0 & -\mathscr{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0. \tag{3.49}$$

Por fim, seja o simplex unitário o conjunto no qual os parâmetros ξ_i, $\hat{\xi}_j$ podem assumir

valores. Multiplicando (3.49) por $\xi_i\hat{\xi}_j \geq 0$ e realizando um somatório de $i,j=1$ a $i,j=\mathscr{N}$, resulta em (3.50).

$$\begin{bmatrix} -(V'+V) & * & * & * & * \\ A(\xi)V+B(\xi)Z+\alpha V+X(\xi,\hat{\xi}) & -X(\xi,\hat{\xi}) & * & * & * \\ V & 0 & -X(\xi,\hat{\xi}) & * & * \\ V & 0 & 0 & -\mathscr{Q}^{-1} & * \\ Z & 0 & 0 & 0 & -\mathscr{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0. \qquad (3.50)$$

A prova do Teorema 3.3 está completa. ■

Observação 3.4. *A prova da desigualdade (3.42) encontra-se na Subseção 2.3.2, substituindo em (2.20) a matriz de Lyapunov dependente de parâmetros.*

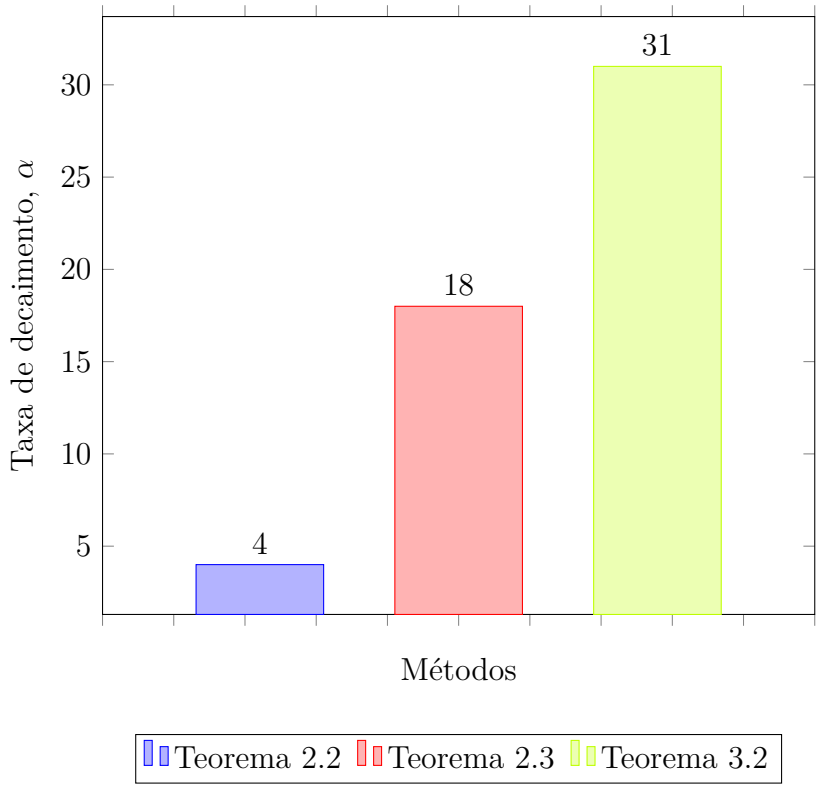
3.2 EXEMPLOS

Nesta seção são retomadas as duas aplicações apresentadas no Capítulo 2. Nos exemplos, o pacote computacional LMIlab e a interface YALMIP (LöFBERG, 2004), em ambiente Matlab, foram usados para o cômputo da solução do problema de otimização.

3.2.1 Massa-mola-amortecedor

Considere o sistema Massa-Mola-Amortecedor da Figura 2.3 e os respectivos modelos dinâmicos e incertos (2.46) e (2.50). As matrizes de ponderação e a condição inicial são as citadas na Subseção 2.4.1. Ademais, a Figura 3.1 confronta, em termos de testes de factibilidade, os Teoremas 2.2, 2.3 e 3.2 (com $b=10^{-3}$). Estes resultados distinguem que as propostas de síntese baseado em modelos de incerteza limitada por norma, promovem uma significativa expansão dos limites de factibilidade em função de α, sobretudo pela aplicação do Lema de Finsler.

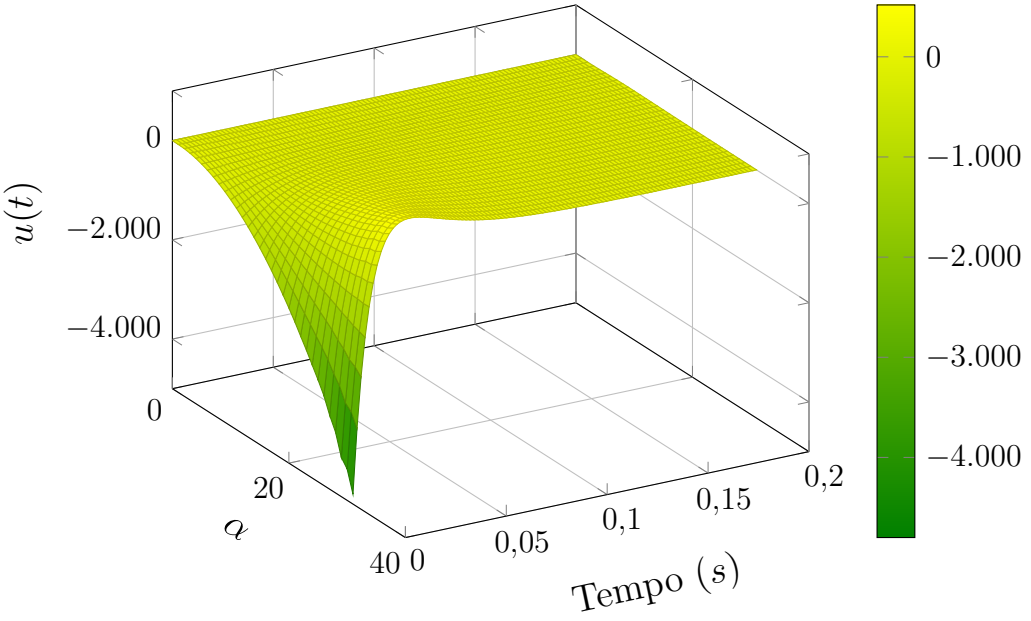
Figura 3.1 - Teste de factibilidade em função da variação da taxa de decaimento enquadrando o Teorema 3.2.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

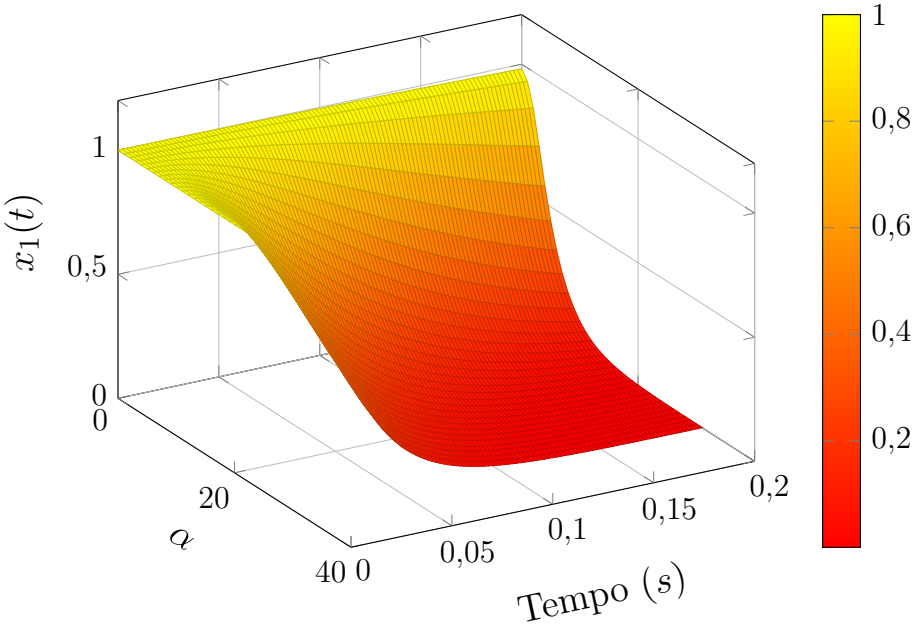
Por conseguinte, as Figuras 3.2 a 3.4 apresentam a resposta dinâmica dos sinais de controle e estados aplicado ao sistema nominal, considerando a variação da taxa de decaimento até seus respectivos limites de factibilidade. Nesta conjuntura o Teorema 3.2 apresentou desvantagens como maiores esforços nos sinais de controle e nos sobressinais durante o transitório das variáveis de estado em relação aos resultados das Figuras 2.5 a 2.7. Além disso, em uma faixa contendo maiores níveis de taxa de decaimento não é possível garantir um melhor desempenho no tempo de estabilização em relação ao Teorema 2.3.

Figura 3.2 - Evolução no tempo do sinal de controle $u(t)$, obtido pelo Teorema 3.2.



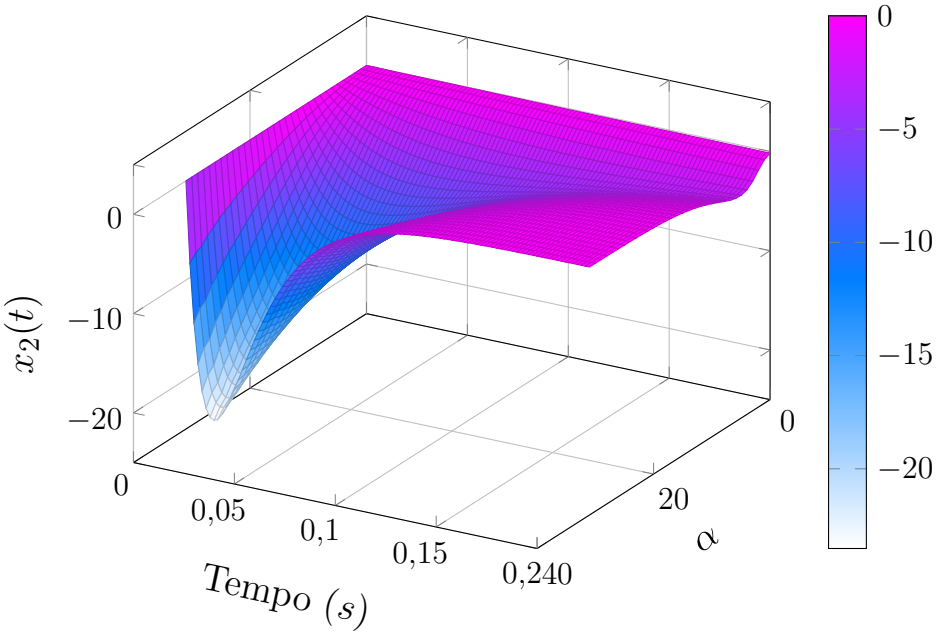
Fonte: Dados de pesquisa do autor.

Figura 3.3 - Evolução no tempo do sinal de estado $x_1(t)$, obtido pelo Teorema 3.2.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

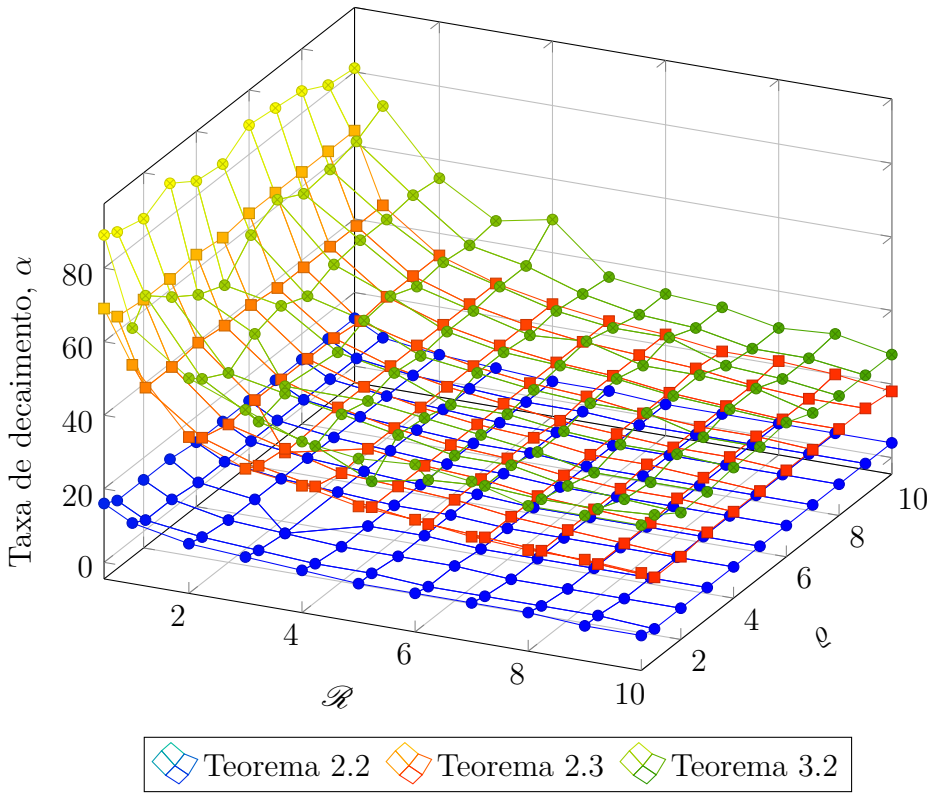
Figura 3.4 - Evolução no tempo do sinal de estado $x_2(t)$, obtido pelo Teorema 3.2.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

A Figura 3.5 explora regiões de factibilidade considerando em seus eixos valores inteiros de α e as variações $0,5 \leq \mathscr{R} \leq 10$ e $\mathscr{Q} = \varrho * \text{diag}(1,1)$, com $0,5 \leq \varrho \leq 10$.

Figura 3.5 - Regiões limítrofes de α em função das matrizes de ponderação.



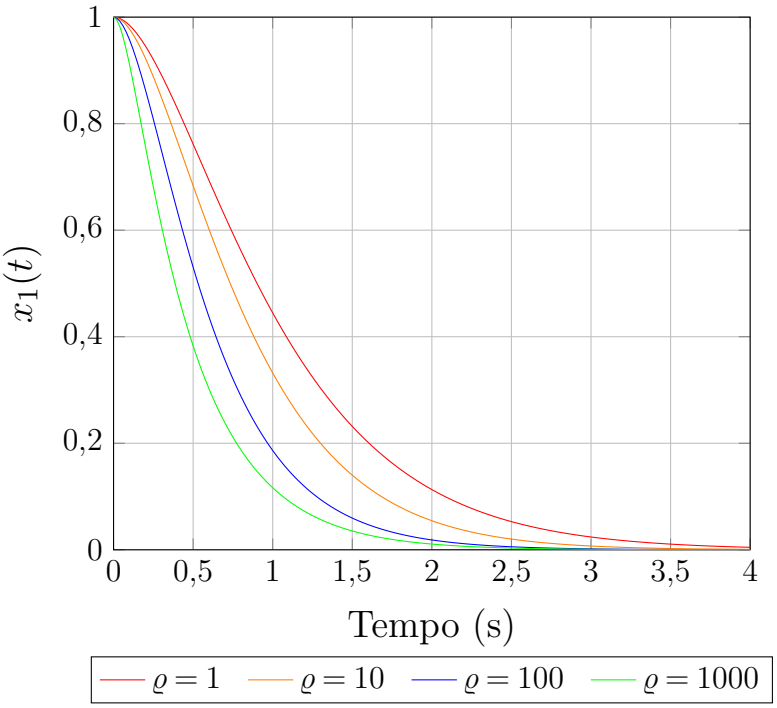
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Verifica-se, na figura acima, que à medida que se prioriza o sinal de controle a taxa de

decaimento decresce, justificado pelo fato que aumentos de α imprimem maiores esforços dos atuadores. Por outro lado, a variação de ϱ pouco influencia as regiões limítrofes, porém dificulta a obtenção de valores menos oscilatórios de α, conforme constatado na superfície do Teorema 3.2. Um detalhe a ser pontuado refere-se às condições de convergência numérica do Teorema 3.2, apresentando em poucos casos problemas de factibilidade pontuais. Diante deste fato, explorou-se regiões de proximidade através de sensíveis variações da taxa de decaimento e/ou das matrizes de ponderação, implicando na factibilidade do algoritmo, conforme esperado.

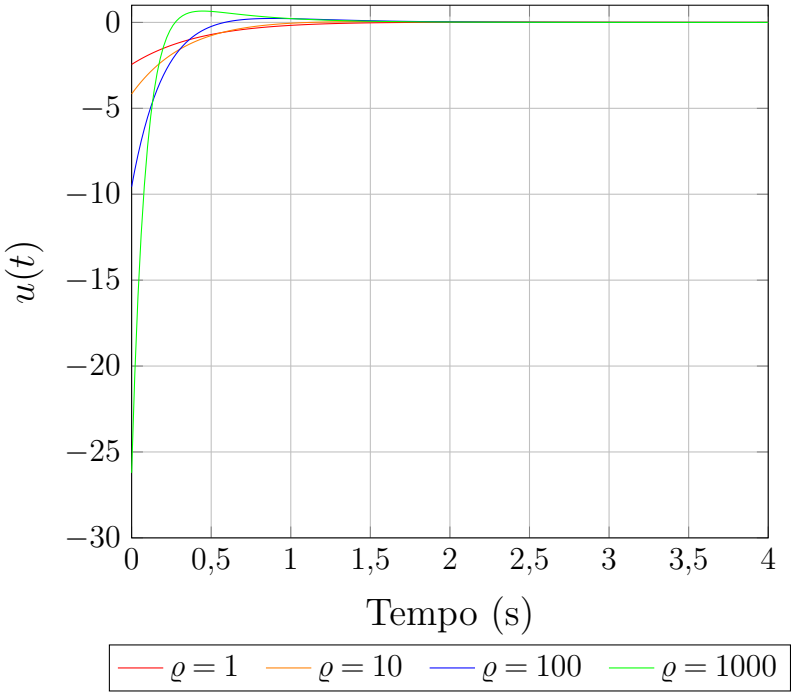
De outro modo, as Figuras 3.6 e 3.7 apresentam a resposta transitória dos sinais $x_1(t)$ e $u(t)$ em função de ϱ, obtidas pela aplicação do controle robusto proposto no Teorema 3.2 ao sistema incerto (2.50), que considera $\mathscr{R} = 1$, $\mathscr{Q} = \varrho * \text{diag}(1,1)$ e $b = 10^{-3}$. Neste caso, é notório que aumentos significativos de ϱ alteram a velocidade de alcance do regime permanente ao custo de sobressinais. Esta constatação valida a preservação das características de sintonia através do par $\{\mathscr{Q},\mathscr{R}\}$.

Figura 3.6 - Comportamento transitório do estado $x_1(t)$ para diferentes ϱ, obtido pelo Teorema 3.2.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

Figura 3.7 - Comportamento transitório do controle $u(t)$ para diferentes ϱ, obtido pelo Teorema 3.2.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

Por fim, na Tabela 3.1, explorou-se testes de impacto no processamento computacional avaliando o número de variáveis escalares (V) e de linhas de LMIs (L) consonante ao número de incertezas (U). Contrastando os dados pertinentes a Tabela 2.1, Tabela 3.1 e Figura 3.1; nota-se que a melhor relação factibilidade (*versus*) custo computacional é fornecida pelo Teorema 2.3.

Tabela 3.1 - Complexidade numérica para incertezas limitadas por norma.

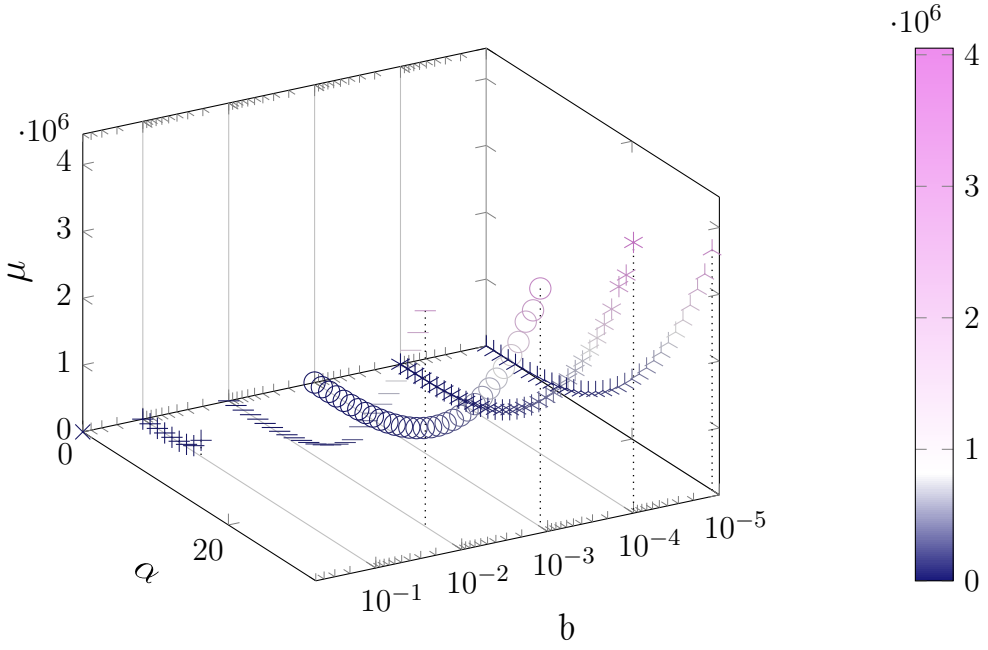
Método	U	V	L
Teorema 2.3	2	8	14
Teorema 3.2	2	15	28

Fonte: Dados de pesquisa do autor.

Até este ponto, a variável b tem sido parametrizada por referências bibliográficas que utilizam a estrutura das variáveis de folga do Lema de Finsler na forma discutida por (PIPELEERS *et al.*, 2009). Não obstante, a formulação por BMIs obtidas nas subseções anteriores permite selecionar valores de b mais adequados ao problema LQR, i.e. prover uma busca que garanta a factibilidade aumentada e $\mathscr{J}_\infty$ reduzido, dado o conjunto $\{\mathscr{Q}, \mathscr{R}, x(0)\}$.

Desse modo, a Figura 3.8 ilustra as variações da taxa de decaimento e da função custo garantido frente aos incrementos em décadas de b. Para uma melhor visualização dos resultados optou-se por utilizar o eixo b em escala logarítmica.

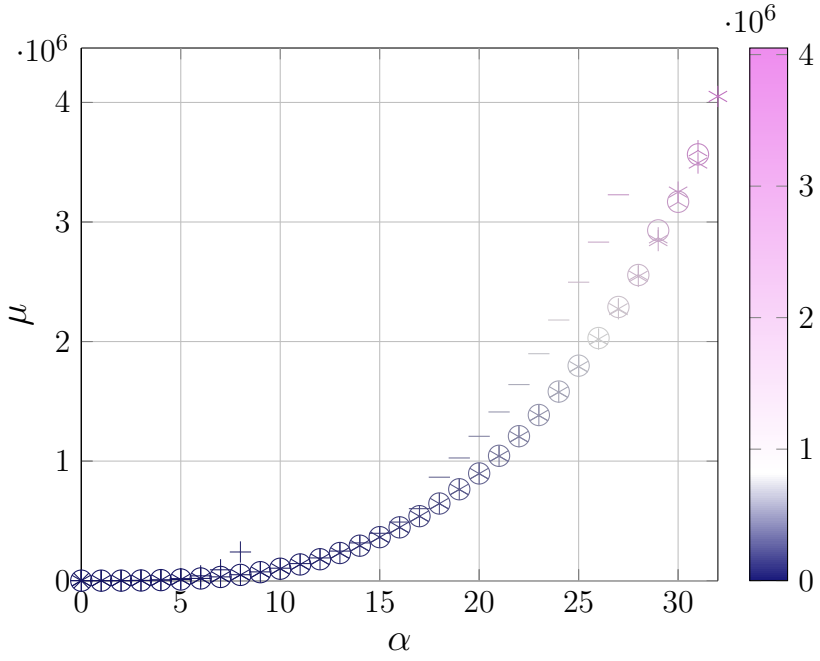
Figura 3.8 - Curvas de α (*versus*) $\mathscr{J}_\infty$ em função de b para incertezas limitadas por norma.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

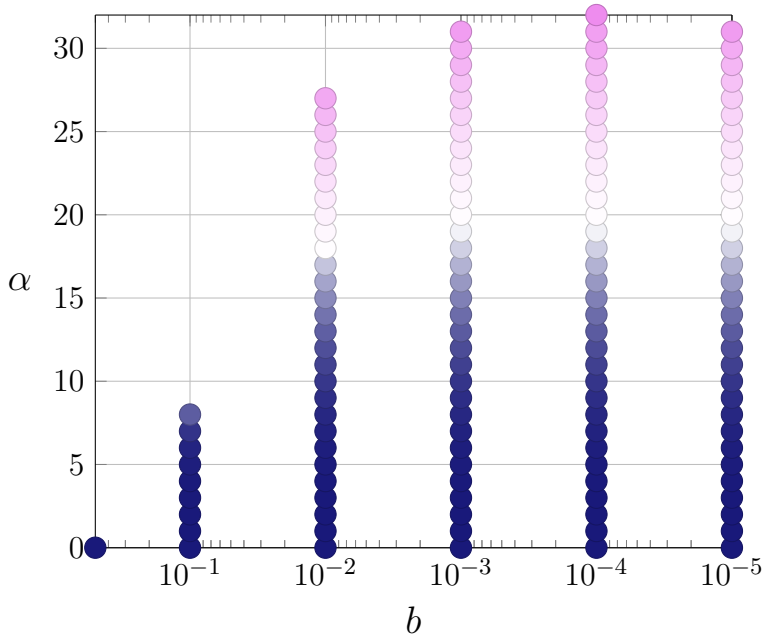
Para uma análise mais adequada da influência da variável b, optou-se pela projeção da Figura 3.8 nos planos μ (*versus*) α e α (*versus*) b, conforme ilustram as Figuras 3.9 e 3.10. Por conveniência tipográfica, omitiu-se as legendas das figuras a seguir.

Figura 3.9 - $\mathscr{J}_\infty$ (*versus*) α para incertezas limitadas por norma.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

Figura 3.10 - α (*versus*) b para incertezas limitadas por norma.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

Estes resultados demonstram que não há contribuições suficientes na factibilidade do Teorema 3.2 para valores inferiores a $b = 0,001$. Por outro lado, pode-se obter alguma melhora no limitante superior de $\mathscr{J}_\infty$ que justifique o uso de ordem reduzida para b ao custo da sensibilidade de convergência do *solver* para com o algoritmo de controle.

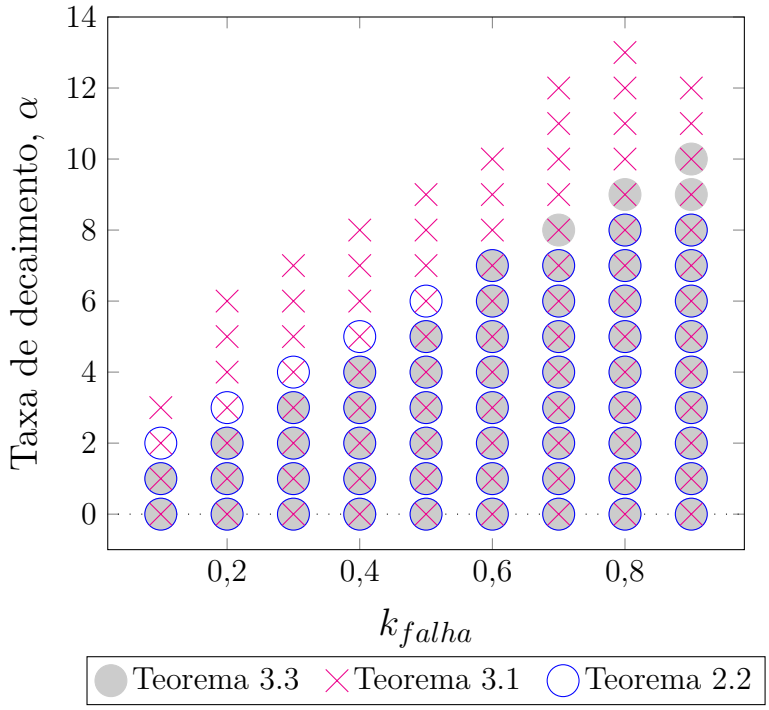
3.2.2 Helicóptero 3-DOF Quanser®

Considere os parâmetros e as condições apresentadas na Subseção 2.4.2. Objetiva-se prover análises da α-estabilidade de sistemas incertos baseado na descrição politópica do modelo de variáveis de estado do helicóptero. Para tanto, define-se a lei de controle $u(t)_{falha} = k_{falha}F_c(t)$ que descreve um canal de falha do atuador para o controlador e, portanto, é previsto três casos: (a) $k_{falha} = 0$, implica que o atuador $u(t)_{falha}$ falhou completamente; (b) $k_{falha} = 1$, representa o caso de nenhuma falha no atuador $u(t)_{falha}$ e; (c) $0 < k_{falha} < 1$, significa que existe uma falha parcial no atuador $u(t)_{falha}$.

A Figura 3.11 lista o parâmetro α (valores inteiros) em função da perda de potência no motor traseiro do helicóptero. No gráfico, o Teorema 3.3 apresenta dificuldades em delinear regiões abrangentes de factibilidade, especialmente para falhas severas que resultou no pior caso. Entretanto, a partir deste *gap* ($k_{falha} > 0,6$), é perceptível alguma melhora em relação aos resultados obtidos pelo Teorema 2.2. Ressalta-se, ainda, que os melhores índices foram obtidos pelo Teorema 3.1. Neste caso, o sucesso desta proposta é alcançado pela seleção apropriada da constante b, que libera faixas de aumento da taxa de decaimento. Não obstante, a solução associada a $k_{falha} = 0,7$ e $\alpha = 11$, obtida pelo

Teorema 3.1, foi infactível. Diante deste fato, explorou-se uma região de proximidade, i.e. $\alpha = 11,01$, que conduziu a convergência do algoritmo, como esperado.

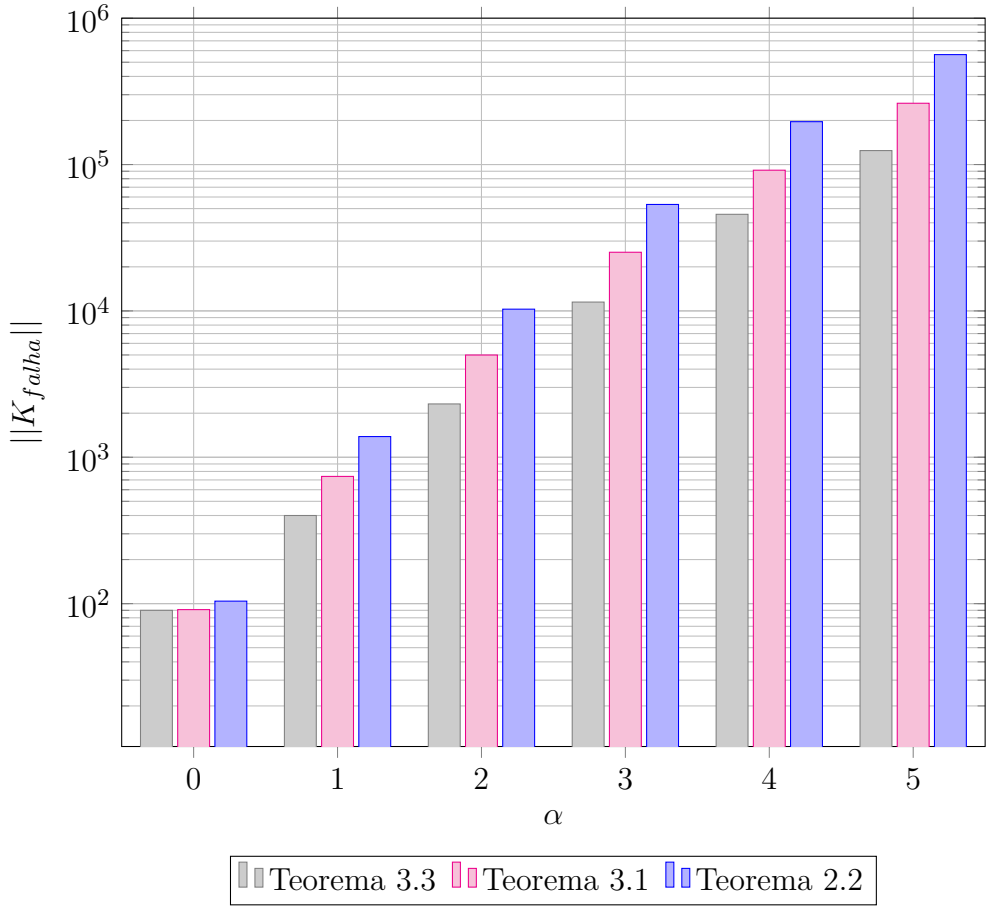
Figura 3.11 - Regiões de α-estabilidade do helicóptero 3-DOF.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

Outra ferramenta importante de análise corresponde aos valores das normas dos controladores, os quais encontram-se agrupados na Figura 3.12 para o caso do percentual de falha em 50% da potência do motor da hélice traseira. Nestes resultados é destacada a maior vantagem relacionada ao processo de relaxação via Lema da Projeção Recíproca, ou seja, reduzidos valores das normas dos controladores. Tal fato é considerado de fundamental interesse, tendo em vista as limitações práticas inferidas aos sinais de controle associadas à necessidade de adequar o comportamento temporal das respostas transitórias as condições de operação, que tende a elevar os níveis destas normas. Observe, ainda, que para uma melhor visualização dos resultados optou-se por utilizar o eixo das ordenadas em escala logarítmica.

Figura 3.12 - Normas dos controladores refletindo os efeitos da variação de α.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

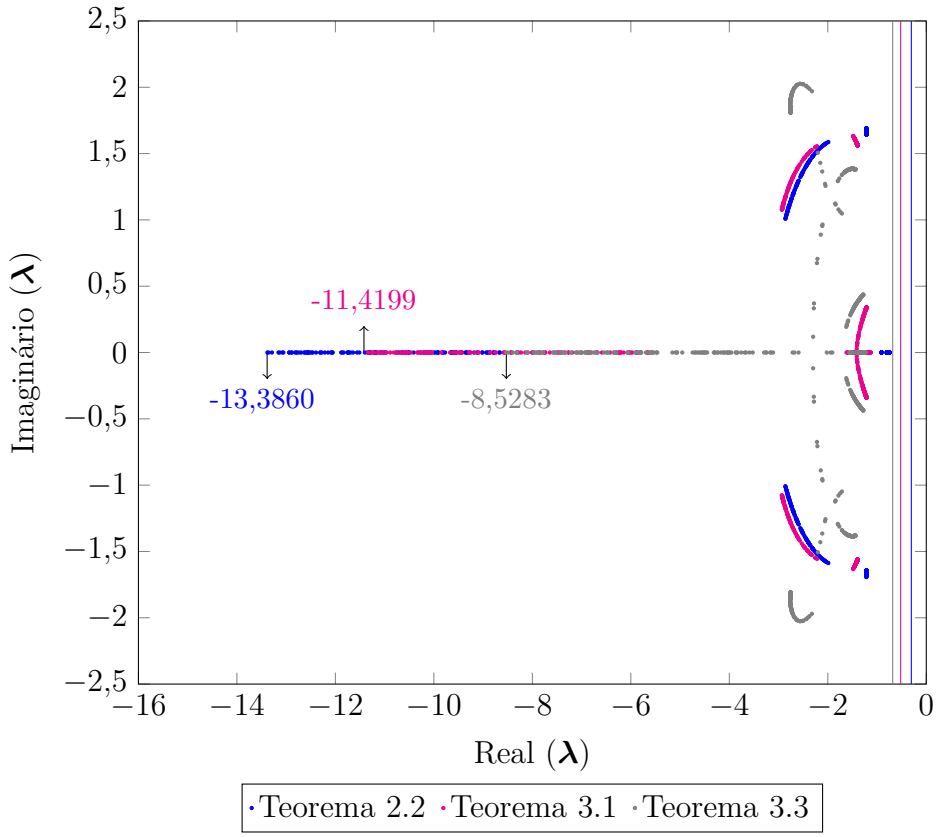
A Figura 3.13 ilustra a nuvem de autovalores (pontos interiores do politopo, por meio do cálculo dos autovalores de cada subsistema) do sistema incerto operando em malha fechada, obtida pela variação do parâmetro ξ particionado em 125 valores em (2.2). Portanto, verifica-se que o Teorema 3.3 provocou um significativo espalhamento de autovalores no plano complexo, restringindo a faixa de Real ($\boldsymbol{\lambda}$) a valores superiores a $-8,5283$, implicando diretamente em reduzidas normas de K_{falha}. Em contraste tem-se $-11,4199$ no Teorema 3.1 e $-13,3860$ no Teorema 2.2. Neste caso, os vetores de controle (e, suas respectivas normas) obtidos pelos teoremas via PLDIs são apresentados a seguir.

Utilizando o Teorema 2.2 com $\alpha = 0,304$, o seguinte ganho robusto foi obtido,

$$K_{falha} = \begin{bmatrix} 54,7526 & 70,2982 & -143,1766 & 23,1019 \\ 67,1585 & -32,3773 & 37,1384 & 43,9531 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 16,5321 & -127,2152 & 34,9454 & -59,1723 \\ -14,5093 & 79,3976 & 46,0547 & 33,2088 \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

$||K_{falha}|| = 250,074.$

Figura 3.13 - Nuvem de autovalores da malha fechada do sistema incerto.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

Para os resultados do Teorema 3.1 com $\alpha = 0,520$,

$$K_{falha} = \begin{bmatrix} 68,8144 & 63,4005 & -146,0047 & 29,9927 \\ 133,6774 & -48,0380 & 84,8775 & 63,0075 \\ & & 13,4586 & -121,7239 & 49,2704 & -68,7515 \\ & & -13,6774 & 77,9366 & 86,9324 & 37,7634 \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

$||K_{falha}|| = 250,2487.$

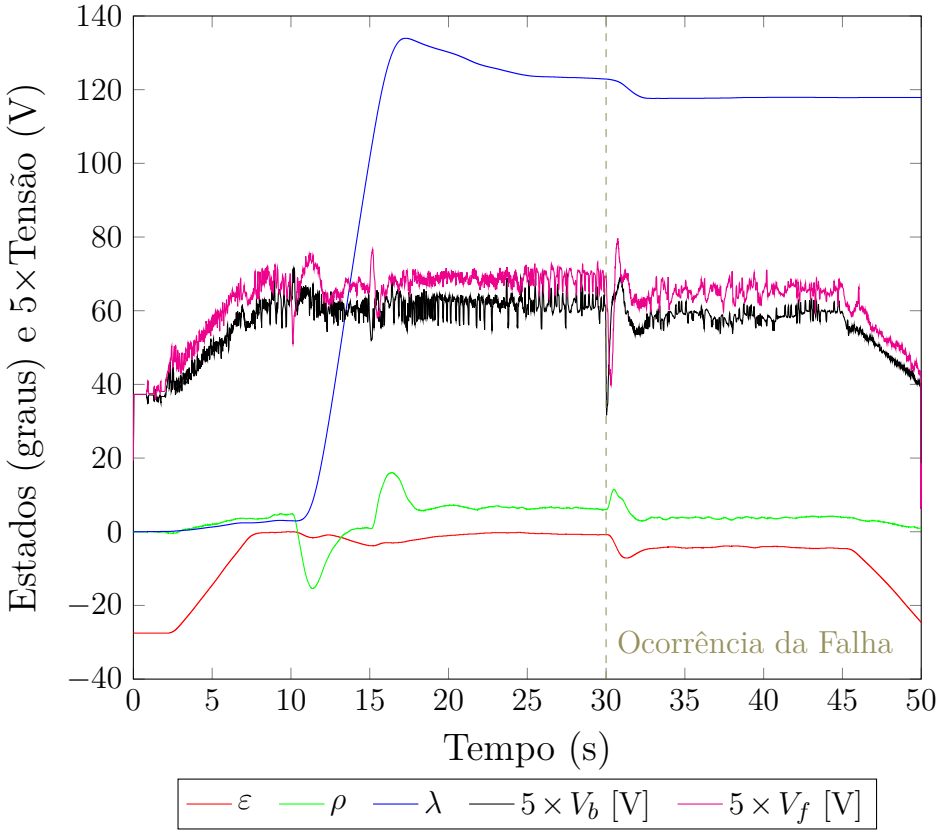
Por fim, do Teorema 3.3 com $\alpha = 0,682$ obtém-se,

$$K_{falha} = \begin{bmatrix} 81,7190 & 51,0580 & -117,5639 & 34,2308 \\ 163,4573 & -26,4418 & 18,3298 & 68,3651 \\ & & 10,6967 & -98,1478 & 63,3405 & -55,6429 \\ & & -9,9345 & 28,8215 & 124,3286 & 3,9903 \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

$||K_{falha}|| = 249,6496.$

Optou-se, por conseguinte, ilustrar o comportamento das variáveis de estados (*elevation* (ε), *pitch* (ρ), *travel* (λ)) e as tensões dos motores dianteiro e traseiro, sob uma falha de 50% na potência do motor da hélice traseira no instante de 30 s e que atenda a condição de $||K_{falha}|| \approx 120$, conforme ilustram as Figuras 3.14 e 3.15 (esta aplicação limitou-se aos Teoremas 2.2 e 3.1). Por estas figuras, nota-se uma melhora significativa no regime permanente durante o intervalo de tempo de 0 a 30 segundos, imposto pelo aumento da taxa de decaimento. Houve, também, uma sensível redução da perda de altitude do helicóptero após a aplicação da falha, sem arremeter drásticos níveis de tensão nos atuadores, confirmado por meio dos sinais $V_f(t)$ e $V_b(t)$.

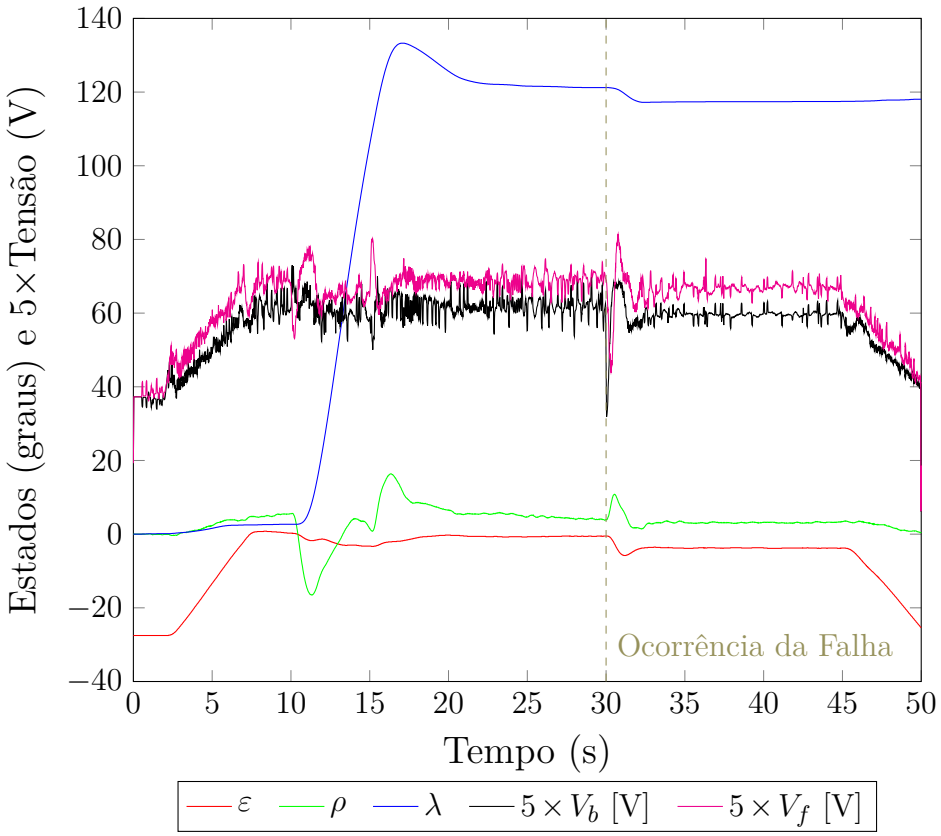
Figura 3.14 - Comportamento dos três graus de liberdade (ε, ρ, λ) referente à implementação prática do Teorema 2.2.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

Deseja-se, ainda, realizar testes de impacto no processamento computacional à medida que se aumenta uma incerteza ao sistema. Desta feita, a Tabela 3.2 ilustra a complexidade computacional requerida em termos do número de variáveis escalares (V) e de linhas de LMIs (L). Avalia-se a condição de uma falha de 50% na perda de potência do motor da hélice traseira e a restrição prática para $||K_{falha}|| \approx 250$. Posteriormente, uma nova incerteza é adicionada na condição inicial, i.e. o ângulo de elevação pertence ao intervalo que varia de $\varepsilon = -27,5°(\approx -0,48$ rad) a $\varepsilon = -1°(\approx -0,0175$rad).

Figura 3.15 - Comportamento dos três graus de liberdade (ε, ρ, λ) referente à implementação prática do Teorema 3.1.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

Note que os dados tabulados expõem um aumento do processamento computacional à medida que ocorre acréscimos de vértices no politopo. Este fato incentiva estudos na exploração de técnicas que superem este inconveniente, em especial, no tratamento de problemas de controle sujeito as diferentes incertezas atuantes na planta, conforme apresentado na Subseção 3.2.1.

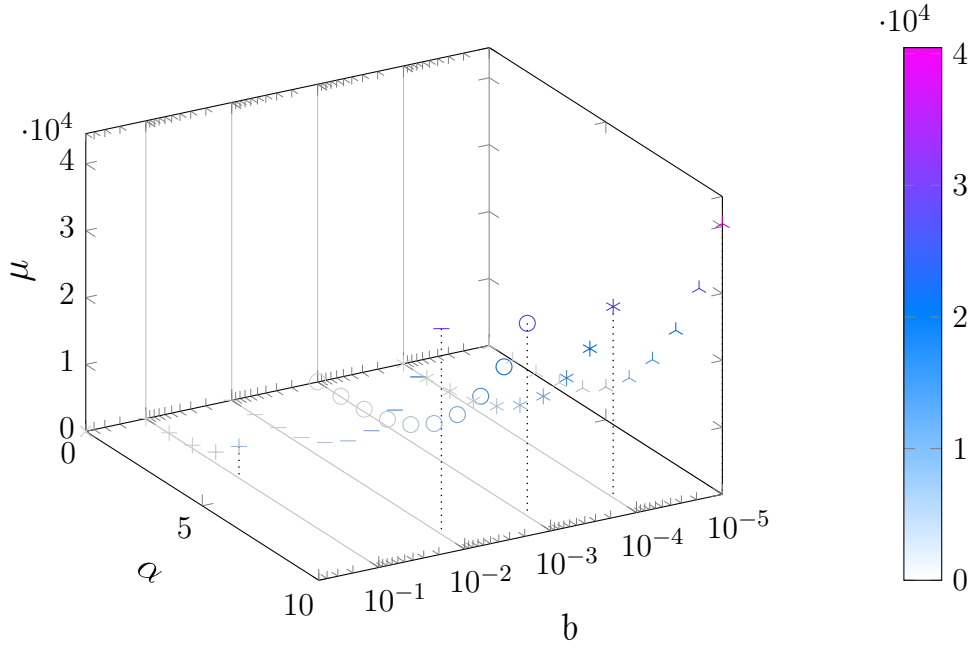
Tabela 3.2 - Complexidade numérica para incertezas politópicas.

Método	U	V	L
	1	53	53
Teorema 2.2	2	53	116
	1	153	86
Teorema 3.1	2	225	172
	1	153	102
Teorema 3.3	2	225	204

Fonte: Dados da pesquisa do autor.

Ademais, a formulação por BMIs motivou o estudo da influência da variável b na factibilidade do algoritmo de controle e no limitante superior de $\mathscr{J}_\infty$, dado o conjunto $\{\mathscr{Q}, \mathscr{R}, x(0)\}$ (vide Figura 3.16). Para uma melhor visualização dos resultados optou-se por utilizar o eixo b em escala logarítmica, tal que b varia de 10^{-5} a 10^{-1} em décadas.

Figura 3.16 - Curvas de α (*versus*) $\mathscr{J}_\infty$ em função de b para incertezas politópicas.

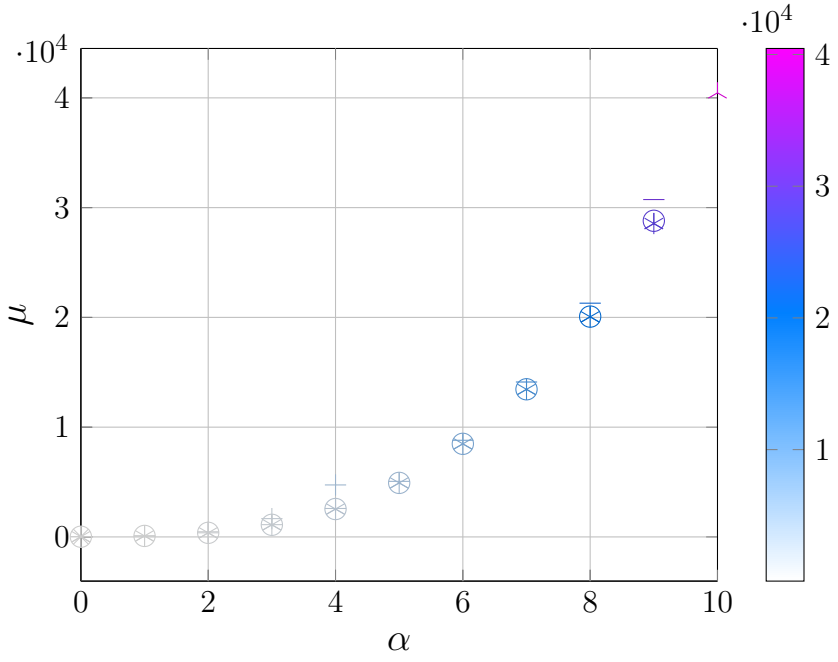


$\times b = 5 * 10^{-1}$ $+ b = 10^{-1}$ $- b = 10^{-2}$ $\circ b = 10^{-3}$ $* b = 10^{-4}$ $\curlywedge b = 10^{-5}$

Fonte: Dados de pesquisa do autor.

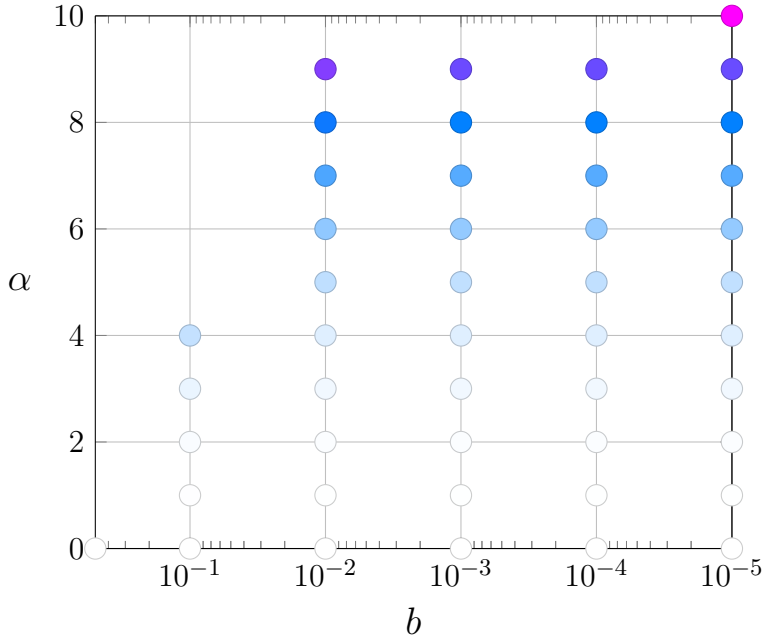
No mais, as Figuras 3.17 e 3.18 apresentam a projeção da Figura 3.16 nos planos μ (*versus*) α e α (*versus*) b. Por conveniência tipográfica, omitiu-se as legendas das figuras a seguir.

Figura 3.17 - $\mathscr{J}_\infty$ (*versus*) α para incertezas politópicas.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

Figura 3.18 - α (*versus*) b para incertezas politópicas.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

Estes resultados demonstram que não há contribuições suficientes na factibilidade ou no limitante superior de $\mathscr{J}_\infty$ (para $b < 0,001$) que justifique o uso de ordem reduzida de b ao custo da sensibilidade de convergência do *solver* para com o algoritmo de controle.

3.3 COMENTÁRIOS FINAIS

Neste capítulo são propostas condições menos conservadoras no controle LMI do problema LQR. Optou-se por aplicar técnicas que são amplamente utilizadas em teoria de controle i.e., Lema de Finsler e da Projeção Recíproca. O objetivo é desacoplar a matriz de Lyapunov do cômputo da matriz K através do uso de variáveis de folga e, portanto, K torna-se dependente de uma matriz auxiliar não necessariamente simétrica. A vantagem encontrada nestas aplicações está no uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros em projeto de ganhos estáticos de realimentação de estados. Este fato revela resultados menos conservadores em relação ao Capítulo 2, expondo características interessantes de um ponto de vista de aplicações práticas, tais como a redução da norma de controladores robustos e/ou a expansão das regiões de factibilidade. Em termos das NLDIs, a Subseção 3.2.1 permitiu avaliar a influência das matrizes de ponderação da função custo garantido à vista da variação limite da taxa de decaimento. Um fato relevante das formulações está na preservação da característica de sintonia da função energia pelas variáveis de estados e controle, conforme ilustram as Figuras 3.6 e 3.7. Em termos da implementação prática do sistema de controle aplicado ao helicóptero 3-DOF, a

estabilidade projetiva apresentou o pior caso de factibilidade. Em contrapartida, o espalhamento de autovalores do sistema em malha fechada permitiu o projeto de controladores com normas reduzidas, garantindo uma taxa de decaimento sob menor esforço nos motores. Por outro lado, a estabilidade estendida (via Lema de Finsler) obteve a maior região de factibilidade. O sucesso desta proposta depende da escolha adequada de uma variável escalar de relaxação. As formulações por BMIs, decorrentes desta variável, são contornadas fixando-se (*à priori*) valores escalonados que permitiu elucidar a relação mais vantajosa entre α (*versus*) μ. Por fim, e não menos importante, os teoremas propostos apresentam algumas opções de suavização do processamento computacional, seja pela inclusão da taxa de decaimento sem o uso de linhas adicionais de LMIs seja pela escolha do modelo de incerteza. Estes aspectos podem otimizar o tempo de processamento dos algoritmos e, consequentemente, viabilizar a comutação de controladores em situações de correções eminentes imposta por mudanças na operação da planta. Embora as propostas por PDLF permitam obter condições LMIs relaxadas, não é previsto na fase de projeto do controlador a existência de entradas exógenas na síntese de controle. Todavia, em muitas ocasiões, estes sinais provocam desvios indejáveis na saída dos sistemas, que deprecia o desempenho do controlador. Logo, o Capítulo 4 apresenta condições inéditas para o controle $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ do problema LQR.

Capítulo 4

FORMULAÇÃO $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ DO CONTROLE LQR ROBUSTO

As condições de projeto LQR, discutidas nos Capítulos 2 e 3, não consideram a influência da matriz de perturbações no sistema. A principal motivação nesse estudo consiste no fato que diversas plantas sofrem interferências de sinais indesejados e, portanto, faz-se necessário ações de controle que, além de reduzir os efeitos destas entradas exógenas, permita garantir a minimização da função custo garantido. Logo, a contribuição deste capítulo é obter formulações LMIs inéditas para o controle $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ do problema LQR.

Para tanto, seja a equação dinâmica de um sistema linear invariante no tempo, expressa na forma de espaço de estados por,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t),\ x(0) = x_0, \tag{4.1a}$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} \mathscr{Q}^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathscr{R}^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \tag{4.1b}$$

sendo $w(t) \in \Re^{n_w}$ o vetor de distúrbios e B_w uma matriz real e constante de dimensões apropriadas.

Em vista da revisão bibligráfica apresentada no Capítulo 1, nota-se uma única proposta de controle $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ do problema LQR a tempo discreto (YANG; WU; CHANG, 2014). Por outro lado, um controle preditivo (do inglês, *Model Predictive Control* - MPC), cuja função custo garantido possui horizonte infinito e não apresenta restrições nos sinais de entrada e saída, é equivalente ao DLQR (CAPRON; ODLOAK, 2018). Este fato motivou uma busca de trabalhos acadêmicos de controladores preditivos baseados no controle misto $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$. Dentre as propostas analisadas, os resultados de (ORUKPE; JAIMOUKHA; EL-ZOBAIDI, 2007; ORUKPE; JAIMOUKHA, 2009; HUANG; LI; XI, 2012; JIWEI *et al.*, 2013) apresentam uma estrutura interessante de MPC-LMI que atenua os

efeitos de distúrbios em sistemas lineares e incertos a tempo discreto. Portanto, os resultados deste capítulo envolve a extensão destes resultados ao controle LQR-LMI a tempo contínuo.

Considere, inicialmente, o conjunto de restrições a serem satisfeitas (ORUKPE; JAIMOUKHA; EL-ZOBAIDI, 2007):

1. A norma do sinal $w(t)$ é limitada, i.e. $||w(t)||_2 \triangleq \sqrt{\int_0^\infty w(t)'w(t)dt} \leq \beta$.
2. A norma $\mathscr{H}_\infty$ do operador distúrbio/saída, $H_{wz}(s)$, é definida por $||H_{wz}(s)|| = \sup \frac{||z(t)||_2}{||w(t)||_2} < \gamma$.
3. A norma $\mathscr{H}_2$ de $H_{wz}(s)$ implica que $||z(t)||_2 \triangleq \sqrt{\int_0^\infty z'(t)z(t)dt} < \kappa$.
4. Atender um nível mínimo de tempo de estabelecimento.

Seja a lei de controle $u(t) = -Kx(t)$ que minimiza $\mathscr{J}_\infty = f(x(t), u(t))$. O próximo teorema apresenta novas condições LMIs que garantem a existência da matriz de realimentação de estados K.

Teorema 4.1. *Seja $x(t)$ o estado do sistema (4.1) medido no instante t. Assuma que o sistema (4.1) não está sujeito a restrições.*

(a) ***Otimização.*** *A matriz de realimentação de estados K associada à lei de controle $u(t)$, que minimiza o limite superior $V(x(0))$ na função objetivo é dada por*

$$K = -ZQ^{-1}, \tag{4.2}$$

com taxa de decaimento maior ou igual a α, um distúbio limitado por β e um nível de atenuação γ, tal que Z é obtido da solução (se esta existir) do seguinte problema de minimização do objetivo linear,

$$\min_{\upsilon,Q,Z} \upsilon$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} AQ + QA' + BZ + Z'B' + 2\alpha Q & * & * & * \\ \upsilon B'_w & -\upsilon\gamma^2 I & * & * \\ Q & 0 & -\upsilon\mathscr{Q}^{-1} & * \\ Z & 0 & 0 & -\upsilon\mathscr{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{4.3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ \beta^2\gamma^2 & \upsilon\beta^2\gamma^2 & * \\ x(0) & 0 & Q \end{bmatrix} > 0. \tag{4.4}$$

(b) Estabilidade quadrática. *Considere uma planta com a lei de controle (4.2) que é estabilizável. E, seja $\mathscr{Q}$ e $\mathscr{R}$ matrizes simétricas definidas positivas. Então a planta controlada será uniformente e assintoticamente estável e $V(x)$ uma função de Lyapunov, se existir $P = \upsilon Q^{-1}$ solução das desigualdades (4.3)-(4.4).*

Prova: Seja uma função de Lyapunov candidata $V(x) = x'Px$, dado $P > 0$, $\gamma > 0$ e $\alpha > 0$, tal que para todo o instante t (BOYD *et al.*, 1994),

$$\dot{V}(x) + 2\alpha V(x) + z(t)'z(t) - \gamma^2 w(t)'w(t) < 0, \tag{4.5}$$

desde que $z(t)'z(t) = x'(t)\mathscr{Q}x(t) + u(t)'\mathscr{R}u(t)$, implica em,

$$\dot{x}(t)'Px(t) + x(t)'P\dot{x}(t) + 2\alpha x(t)'Px(t) + x'(t)\mathscr{Q}x(t) + u(t)'\mathscr{R}u(t) - \gamma^2 w(t)'w(t) < 0, \tag{4.6}$$

que, expandindo o vetor $\dot{x}(t)$ produz

$$\begin{aligned}\left[x(t)'(A-BK)' + w(t)'B_w'\right]Px(t) + x(t)'P\left[(A-BK)x(t) + B_w w(t)\right] \\ + 2\alpha x(t)'Px(t) + x'(t)\mathscr{Q}x(t) + x(t)'K'\mathscr{R}Kx(t) - \gamma^2 w(t)'w(t) < 0.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Agora, rearranjando na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} (A-BK)'P + P(A-BK) + 2\alpha P + \mathscr{Q} + K'\mathscr{R}K & * \\ B_w'P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} < 0. \tag{4.8}$$

A partir de (4.8), para $x(t) \neq 0$ e $w(t) \neq 0$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} (A-BK)'P + P(A-BK) + 2\alpha P + \mathscr{Q} + K'\mathscr{R}K & * \\ B_w'P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \tag{4.9}$$

Aplicando o produto dos termos $\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}'$ à direita e $\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ à esquerda na desigualdade (4.8), tal que $W = P^{-1}$ e, após, o complemento de Schur obtém-se (4.10).

$$\begin{bmatrix} W(A-BK)' + (A-BK)W + 2\alpha W & * & * & * \\ B_w' & -\gamma^2 I & * & * \\ W & 0 & -\mathscr{Q}^{-1} & * \\ -KW & 0 & 0 & -\mathscr{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0. \tag{4.10}$$

Por fim, multiplicando (4.10) por $\upsilon = \kappa^2$, em que $Q = \upsilon W$ e $Z = -KQ$, resulta em (4.3).

Seja, neste ponto, reaver a desigualdade (4.9). É possível garantir através do *Bounded-Real Lemma* que o sistema em malha fechada será estável e $||H_{wz}(s)||_\infty < \gamma$ se e somente se $\exists P = P' > 0$ tal que a desigualdade (4.11) é verificada (BOYD *et al.*, 1994).

$$\begin{bmatrix} (A-BK)'P + P(A-BK) + 2\alpha P & * \\ B_w'P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathscr{Q} + K'\mathscr{R}K & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix} < 0. \tag{4.11}$$

Para a prova da desigualdade (4.4) reconsidere a desigualdade (4.5). Aplicando o operador de integração em (4.5), desde que o sistema é assintoticamente estável, obtém-se:

$$\int_0^\infty \Big(z(t)'z(t)\Big)\,dt < V\left(x(0)\right) + \gamma^2 \int_0^\infty \Big(w(t)'w(t)\Big)\,dt. \tag{4.12}$$

Note que o termo $2\alpha V(x)$ é suprimido devido sua natureza definida positiva que não penaliza a desigualdade. Além disso, é suposto uma condição inicial dada por $x(0)$. Por conseguinte, aplicando o conceito de norma e a Restrição 1,

$$||(z(t)'z(t)||_2^2 < x(0)'Px(0) + \gamma^2||w(t)'w(t)||_2^2 < x(0)'Px(0) + \gamma^2\beta^2. \tag{4.13}$$

E, através da imposição da Restrição 3, obtém-se:

$$||(z(t)'z(t)||_2^2 < x(0)'Px(0) + \gamma^2\beta^2 < \kappa^2. \tag{4.14}$$

Rearranjando a desigualdade (4.14) e dividindo por κ^2 define-se (4.15). Por fim, pela aplicação do complemento de Schur e, após, atribuindo $\upsilon = \kappa^2$ encontra-se a desigualdade (4.4).

$$1 - \kappa^{-2}x(0)'Px(0) - \kappa^{-2}\gamma^2\beta^2 > 0. \tag{4.15}$$

A prova do Teorema 4.1 está completa. ■

4.1 EXTENSÃO A SISTEMAS LINEARES INVARIANTES NO TEMPO E INCERTOS

Nesta seção, o sistema (4.1) está sujeito a matrizes paramétricas invariantes no tempo. Note que a inclusão do sinal $w(t)$ no sistema (2.1) não produz alterações na aplicação dos modelos de incerteza discutidos na Seção 2.1, dado que a matriz B_w não contém

parâmetros incertos. Desse modo, a equação dinâmica em espaço de estados torna-se:

$$\dot{x}(t) = A(\xi)x(t) + B(\xi)u(t) + B_w w(t),\ x(0) = x_0, \tag{4.16a}$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} \mathscr{Q}^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathscr{R}^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \tag{4.16b}$$

com as matrizes $(A, B)(\xi) \in \Omega_P$ não precisamente conhecidas.

De outro modo, o modelo por incertezas limitadas por norma é descrito por,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t) + B_p p(t), \tag{4.17a}$$

$$q(t) = C_q x(t) + D_q u(t), \tag{4.17b}$$

$$p(t) = \mathscr{Z} q(t), \tag{4.17c}$$

em que a matriz invariante no tempo e incerta $\mathscr{Z} : \Re_+ \to \Re^{r \times r}$ assume a estrutura de (2.4).

Em vista disso, o próximo teorema apresenta formulações originais de estabilidade robusta aplicadas a domínios convexos e fechados.

Teorema 4.2. *Seja $x(t)$ o estado do sistema medido no instante t, assumindo que não há restrições nos sinais de entrada e saída.*

(a) ***Incerteza Politópica**. O sistema (4.16) é estável por $u(t) = -Kx(t)$, com taxa de decaimento maior ou igual a α, um distúbio limitado por β e custo garantido $\mathscr{J}_\infty$ inferior a υ, se para um dado nível de atenuação γ, existirem matrizes $Q = Q' > 0 \in \Re^{n_x \times n_x}$ e $Z \in \Re^{n_u \times n_x}$, tais que as seguintes desigualdades são satisfeitas para $i = 1, \ldots, \mathscr{N}$:*

$$\min_{\upsilon, Q, Z} \upsilon$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} A_i Q + Q A_i' + B_i Z + Z' B_i' + 2\alpha Q & * & * & * \\ \upsilon B_w' & -\upsilon\gamma^2 I & * & * \\ Q & 0 & -\upsilon \mathscr{Q}^{-1} & * \\ Z & 0 & 0 & -\upsilon \mathscr{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{4.18}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ \beta^2\gamma^2 & \upsilon\beta^2\gamma^2 & * \\ x(0) & 0 & Q \end{bmatrix} > 0. \tag{4.19}$$

Então o ganho de realimentação de estados é dado por $K = -ZQ^{-1}$ e a norma $\mathscr{H}_2$ do sistema em malha fechada satisfaz $||H_{wz}(s)||_2^2 < \upsilon$.

(b) ***Incerteza Estruturada***. *O sistema (4.17) é estável por* $u(t) = -Kx(t)$, *com taxa de decaimento maior ou igual a* α, *um distúbio limitado por* β *e custo garantido* $\mathscr{J}_\infty$ *inferior a* υ, *se para um dado nível de atenuação* γ, *existirem matrizes* $Q = Q' > 0 \in \Re^{n_x \times n_x}$, $Z \in \Re^{n_u \times n_x}$ *e* $\Lambda \in \Re^{r \times r}$, *tais que as seguintes desigualdades são satisfeitas:*

$$\min_{\upsilon, Q, Z, \Lambda} \upsilon$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} QA' + AQ + Z'B' + BZ + \\ 2\alpha Q + B_p \Lambda B_p' \end{pmatrix} & * & * & * & * \\ \upsilon B_w' & -\upsilon\gamma^2 I & * & * & * \\ Q & 0 & -\upsilon \mathscr{Q}^{-1} & * & * \\ Z & 0 & 0 & -\upsilon \mathscr{R}^{-1} & * \\ C_q Q + D_q Z & 0 & 0 & 0 & -\Lambda \end{bmatrix} < 0, \quad (4.20)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ \beta^2\gamma^2 & \upsilon\beta^2\gamma^2 & * \\ x(0) & 0 & Q \end{bmatrix} > 0, \quad (4.21)$$

com,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \Lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Lambda_r \end{bmatrix} > 0. \quad (4.22)$$

Então o ganho de realimentação de estados é dado por $K = -ZQ^{-1}$ *e a norma* $\mathscr{H}_2$ *do sistema em malha fechada satisfaz* $||H_{wz}(s)||_2^2 < \upsilon$.

Prova: A prova será realizada considerando as duas partes separadamente.

(a) Seja multiplicar (4.18) por $\xi_i \geq 0$, realizando o somatório de $i = 1$ a $i = \mathscr{N}$, de forma a obter:

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \left(\sum_{i=1}^{\mathscr{N}} \xi_i A_i\right) Q + Q \left(\sum_{i=1}^{\mathscr{N}} \xi_i A_i\right)' + \\ \left(\sum_{i=1}^{\mathscr{N}} \xi_i B_i\right) Z + Z' \left(\sum_{i=1}^{\mathscr{N}} \xi_i B_i\right)' \\ +2\alpha Q \end{pmatrix} & * & * & * \\ \upsilon B_w' & -\upsilon\gamma^2 I & * & * \\ Q & 0 & -\upsilon \mathscr{Q}^{-1} & * \\ Z & 0 & 0 & -\upsilon \mathscr{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.23)$$

e, portanto, a partir da desigualdade (4.23) a prova resume-se nas etapas efetuadas no Teorema 4.1, em sentido oposto.

(b) Seja aplicar o *S-Procedure* à desigualdade (4.7), tal que a estabilidade quadrática é obtida pela existência de P e $\hat{\Lambda}_k$, satisfazendo (4.24).

$$\begin{aligned}\left[x(t)'(A-BK)'+w(t)'B_w'\right]Px(t)+x(t)'P\left[(A-BK)x(t)+B_ww(t)\right]\\ +2x(t)'PB_pp(t)+2\alpha x(t)'Px(t)+x'(t)\mathscr{Q}x(t)+x(t)'K'\mathscr{R}Kx(t)-\gamma^2w(t)'w(t)\\ +\sum_{k=1}^{r}\hat{\Lambda}_k\left(x(t)'(C_{q,k}-D_{q,k}K)'(C_{q,k}-D_{q,k}K)x(t)-p_k(t)^2\right)<0, \quad (4.24)\end{aligned}$$

e, para $\hat{\Lambda}=\mathrm{diag}(\hat{\Lambda}_1,\ldots,\hat{\Lambda}_r)$, tem-se

$$\begin{aligned}\left[x(t)'(A-BK)'+w(t)'B_w'\right]Px(t)+x(t)'P\left[(A-BK)x(t)+B_ww(t)\right]\\ +2x(t)'PB_pp(t)+2\alpha x(t)'Px(t)+x'(t)\mathscr{Q}x(t)+x(t)'K'\mathscr{R}Kx(t)-\gamma^2w(t)'w(t)\\ -p(t)'\hat{\Lambda}p(t)+x(t)'(C_q-D_qK)'\hat{\Lambda}(C_q-D_qK)x(t)<0, \quad (4.25)\end{aligned}$$

que, por sua vez, equivale-se a:

$$\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}(A-BK)'P+P(A-BK)+2\alpha P+\mathscr{Q}+K'\mathscr{R}K\\ +(C_q-D_qK)'\hat{\Lambda}(C_q-D_qK)\end{pmatrix} & * & *\\ B_w'P & -\gamma^2I & *\\ B_p'P & 0 & -\hat{\Lambda}\end{bmatrix}<0. \quad (4.26)$$

Pré e pós-multiplicando por $\mathrm{diag}(P^{-1},I,I)$ a desigualdade (4.26) e, ainda, definindo $W=P^{-1}$ e $H=-KW$, tem-se por complemento de Schur,

$$\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}WA'+AW+\\ H'B'+BH+2\alpha W\end{pmatrix} & * & * & * & * & *\\ B_w' & -\gamma^2I & * & * & * & *\\ B_p' & 0 & -\hat{\Lambda} & * & * & *\\ W & 0 & 0 & -\mathscr{Q}^{-1} & * & *\\ H & 0 & 0 & 0 & -\mathscr{R}^{-1} & *\\ C_qW+D_qH & 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat{\Lambda}^{-1}\end{bmatrix}<0. \quad (4.27)$$

Por conseguinte, aplicando a transformação de congruência $\mathrm{diag}(I,I,\hat{\Lambda}^{-1},I,I,I)$ na desigualdade (4.27) e, após, efetuando a multiplicação por $\upsilon=\kappa^2$, com $Q=\upsilon W$, $\Lambda=\upsilon\hat{\Lambda}^{-1}$ e $Z=\upsilon H$, a desigualdade (4.20) é finalmente alcançada por complemento de Schur.

A prova do Teorema 4.2 está completa. ■

Proposição 4.1

Incerteza politópica. *Seja uma condição inicial $x(0)$, uma taxa de decaimento α, um distúrbio limitado β, um nível de atenuação γ e matrizes $\{\mathscr{Q}, \mathscr{R}\}$ definidas positivas. Assuma que existam matrizes Z e Q (definida positiva e simétrica), tais que (4.18) - (4.19) são factíveis com $B_w = 0$. Então, este resultado converge no caso particular do Teorema 2.2.*

Incerteza limitada por norma. *Seja uma condição inicial $x(0)$, uma taxa de decaimento α, um distúrbio limitado β, um nível de atenuação γ e matrizes $\{\mathscr{Q}, \mathscr{R}\}$ definidas positivas. Assuma que existam matrizes Λ, Z e Q (definida positiva e simétrica), tais que (4.20) - (4.22) são factíveis com $B_w = 0$. Então, este resultado converge no caso particular do Teorema 2.3.*

Até este ponto, as inclusões diferenciais lineares de sistemas variantes no tempo com parâmetros incertos é restrita ao caso invariante no tempo, discutindo classes especiais como as LDIs politópicas e limitadas por norma, separadamente. Apesar disso, a representação combinada destas LDIs oferece vantagens, tal como expressar diferentes restrições em uma LMI, seja na coexistência de parâmetros incertos variantes e invariantes no tempo (ZHANG; ZHANG; JUNMIN, 2014; ZHANG; JUNMIN, 2016) (a ser discutida no Capítulo 5) seja no método de obtenção do parâmetro que forneça a melhor precisão ao modelo matemático (TARBOURIECH; SOUÈRES; GAO, 2005), como apresenta a Subseção 4.1.1.

4.1.1 Representação combinada de incertezas politópicas e limitadas por norma

A novidade do próximo teorema consiste em obter condições suficientes de LMIs utilizando duas estratégias de incertezas combinadas, que modela especificamente falhas de atuadores por politopos (MONTAGNER *et al.*, 2005) e equações de espaço de estados por incertezas limitadas por norma, na forma de:

(a) *Estratégia I*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \left(\sum_{i=1}^{2} \xi_i B_i\right) u(t) + B_w w(t) + B_p p(t), \tag{4.28a}$$

$$q(t) = C_q x(t) + \left(\sum_{i=1}^{2} \xi_i D_{qi}\right) u(t), \tag{4.28b}$$

$$p(t) \;=\; \mathscr{Z}q(t), \tag{4.28c}$$

e, portanto,

$$\Omega'_N = \{[A+B_p\mathscr{Z}C_q \quad B_i+B_p\mathscr{Z}D_{qi}] :\ i=1,2 \text{ e } \mathscr{Z} \text{ satisfaz (2.4)}\}. \tag{4.29}$$

(b) *Estratégia II* (ZHANG; JUNMIN, 2016)

$$\dot{x}(t) = (A+\Delta A)x(t) + \left(\sum_{i=1}^{2}\xi_i(B_i+\Delta B_i)\right)u(t) + B_w w(t), \tag{4.30}$$

em que $(B_i+\Delta B_i)$ representa os vértices do politopo, tal que,

$$\Omega''_N = \{[A+E_1\mathscr{Z}F_1 \quad B_i+E_{2i}\mathscr{Z}F_{2i}] :\ i=1,2 \text{ e } \mathscr{Z} \text{ satisfaz (2.4)}\}. \tag{4.31}$$

Em particular, ambas as estratégias pressupõem o simplex unitário como o conjunto no qual o vetor de parâmetros incertos pode assumir valores.

Teorema 4.3. *Seja $x(t)$ o estado do sistema medido no instante t, assumindo que não há restrições nos sinais de entrada e saída.*

(a) ***Condição S-procedure****. O sistema (4.28) é estável por $u(t) = -Kx(t)$, com taxa de decaimento maior ou igual a α, um distúbio limitado por β e custo garantido $\mathscr{J}_\infty$ inferior a υ, se para um dado nível de atenuação γ, existirem matrizes $Q = Q' > 0 \in \Re^{n_x\times n_x}$, $Z \in \Re^{n_u\times n_x}$ e $\Lambda \in \Re^{r\times r}$, tais que as seguintes desigualdades são satisfeitas para $i=1,2$:*

$$\min_{\upsilon,Q,Z,\Lambda} \upsilon$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} QA'+AQ+Z'B_i'+B_iZ+ \\ 2\alpha Q+B_p\Lambda B_p' \end{pmatrix} & * & * & * & * \\ \upsilon B_w' & -\upsilon\gamma^2 I & * & * & * \\ Q & 0 & -\upsilon\mathscr{Q}^{-1} & * & * \\ Z & 0 & 0 & -\upsilon\mathscr{R}^{-1} & * \\ C_qQ+D_{qi}Z & 0 & 0 & 0 & -\Lambda \end{bmatrix} < 0, \tag{4.32}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ \beta^2\gamma^2 & \upsilon\beta^2\gamma^2 & * \\ x(0) & 0 & Q \end{bmatrix} > 0, \tag{4.33}$$

com,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \Lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Lambda_r \end{bmatrix} > 0, \tag{4.34}$$

no qual o ganho ótimo é obtido por $K = -ZQ^{-1}$ *e a norma* $\mathscr{H}_2$ *do sistema em malha fechada satisfaz* $||H_{wz}(s)||_2^2 < \upsilon$.

(b) ***Condição Lema 2.1 (XIE; SOUZA, 1991)***. *O sistema (4.30) é estável por* $u(t) = -Kx(t)$, *com taxa de decaimento maior ou igual a* α, *um distúbio limitado por* β *e custo garantido* $\mathscr{J}_\infty$ *inferior a* υ, *se para um dado nível de atenuação* γ, *existirem matrizes* $Q = Q' > 0 \in \Re^{n_x \times n_x}$, $Z \in \Re^{n_u \times n_x}$ *e escalares positivos* τ_1, τ_{2i}, *tais que as seguintes desigualdades são satisfeitas para* $i = 1, 2$*:*

$$\min_{\upsilon,\tau_1,\tau_{2i},Q,Z} \upsilon$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} QA' + AQ + Z'B_i' + B_iZ + 2\alpha Q & * & * & * \\ \upsilon B_w' & -\upsilon\gamma^2 I & * & * \\ Q & 0 & -\upsilon\mathscr{Q}^{-1} & * \\ Z & 0 & 0 & -\upsilon\mathscr{R}^{-1} \\ \tau_1 E_1' & 0 & 0 & 0 \\ F_1 Q & 0 & 0 & 0 \\ \tau_{2i} E_{2i}' & 0 & 0 & 0 \\ F_{2i} Z & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ -\tau_1 I & * & * & * \\ 0 & -\tau_1 I & * & * \\ 0 & 0 & -\tau_{2i} I & * \\ 0 & 0 & 0 & -\tau_{2i} I \end{bmatrix} < 0, \tag{4.35}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ \beta^2\gamma^2 & \upsilon\beta^2\gamma^2 & * \\ x(0) & 0 & Q \end{bmatrix} > 0, \tag{4.36}$$

no qual o ganho ótimo é obtido por $K = -ZQ^{-1}$ *e a norma* $\mathscr{H}_2$ *do sistema em malha fechada satisfaz* $||H_{wz}(s)||_2^2 < \upsilon$.

Prova: A prova será realizada considerando as duas partes separadamente.

(a) Seja multiplicar (4.32) por $\xi_i \geq 0$, tal que $i = 1, 2$, de forma a obter:

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} QA' + AQ + 2\alpha Q + B_p \Lambda B_p' \\ Z' \left(\sum_{i=1}^{2} \xi_i B_i\right)' + \left(\sum_{i=1}^{2} \xi_i B_i\right) Z \end{pmatrix} & * & * & * & * \\ \upsilon B_w' & -\upsilon\gamma^2 I & * & * & * \\ Q & 0 & -\upsilon \mathscr{Q}^{-1} & * & * \\ Z & 0 & 0 & -\upsilon \mathscr{R}^{-1} & * \\ C_q Q + \left(\sum_{i=1}^{2} \xi_i D_{qi}\right) Z & 0 & 0 & 0 & -\Lambda \end{bmatrix} < 0, \tag{4.37}$$

e, portanto, a partir da desigualdade (4.37) a prova resume-se nas etapas efetuadas no Teorema 4.2(b), em sentido oposto.

(b) A partir das matrizes incertas $(A + \Delta A)$ e $(B_i + \Delta B_i)$ definidas em (4.30), a desigualdade (4.8) pode ser reescrita na forma:

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} [(A + \Delta A) - (B_i + \Delta B_i)K]' P \\ + P[(A + \Delta A) - (B_i + \Delta B_i)K] \\ + 2\alpha P + \mathscr{Q} + K' \mathscr{R} K \end{pmatrix} & * \\ B_w' P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{4.38}$$

que, por complemento de Schur, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} ((A + \Delta A) - (B_i + \Delta B_i)K)' P \\ + P((A + \Delta A) - (B_i + \Delta B_i)K) + 2\alpha P \end{pmatrix} & * & * & * \\ B_w' P & -\gamma^2 I & * & * \\ I & 0 & -\mathscr{Q}^{-1} & * \\ -K & 0 & 0 & -\mathscr{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{4.39}$$

ou, equivalentemente a,

$$\begin{bmatrix} (A - B_i K)' P + P(A - B_i K) + 2\alpha P & * & * & * \\ B_w' P & -\gamma^2 I & * & * \\ I & 0 & -\mathscr{Q}^{-1} & * \\ -K & 0 & 0 & -\mathscr{R}^{-1} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} PE_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathscr{X} \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathscr{X} \begin{bmatrix} E_1' P & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} PE_{2i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathscr{Z} \begin{bmatrix} -F_{2i}K & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K'F_{2i}' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathscr{Z} \begin{bmatrix} E_{2i}'P & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0. \quad (4.40)$$

Pelo uso do Lema 2.1 de (XIE; SOUZA, 1991), a existência da desigualdade (4.40) para $\varepsilon_1, \varepsilon_{2i} > 0$, implica que:

$$\begin{bmatrix} (A-B_iK)'P + P(A-B_iK) + 2\alpha P & * & * & * \\ B_w'P & -\gamma^2 I & * & * \\ I & 0 & -\mathscr{Q}^{-1} & * \\ -K & 0 & 0 & -\mathscr{R}^{-1} \end{bmatrix} +$$

$$\varepsilon_1 \begin{bmatrix} PE_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1'P & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon_1^{-1} \begin{bmatrix} F_1' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\varepsilon_{2i} \begin{bmatrix} PE_{2i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{2i}'P & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon_{2i}^{-1} \begin{bmatrix} -K'F_{2i}' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F_{2i}K & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0. \quad (4.41)$$

Seja, em seguida, pré e pós-multiplicar a desigualdade (4.41) por $\mathrm{diag}(P^{-1}, I, I, I)$, em que $W = P^{-1}$ e $H = -KW$. Após, tem-se do complemento de Schur,

$$\begin{bmatrix} WA' + AW + H'B_i' + B_iH + 2\alpha W & * & * & * \\ B_w' & -\gamma^2 I & * & * \\ W & 0 & -\mathscr{Q}^{-1} & * \\ H & 0 & 0 & -\mathscr{R}^{-1} \\ \varepsilon_1 E_1' & 0 & 0 & 0 \\ F_1 W & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{2i} E_{2i}' & 0 & 0 & 0 \\ F_{2i} H & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ -\varepsilon_1 I & * & * & * \\ 0 & -\varepsilon_1 I & * & * \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{2i} I & * \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{2i} I \end{bmatrix} < 0. \tag{4.42}$$

Por conseguinte, aplica-se o produto da variável $\upsilon = \kappa^2$ à desigualdade (4.42), com $Q = \upsilon W$, $Z = \upsilon H$, $\tau_1 = \upsilon\varepsilon_1$ e $\tau_{2i} = \upsilon\varepsilon_{2i}$ resultando em (4.35).

A prova do Teorema 4.3 está completa. ■

4.1.2 Fragilidade de controladores

Recentemente, a fragilidade de controladores tem sido objeto de estudo na literatura em aplicações de síntese de controle ótimo. Na prática, a estabilidade e o desempenho de sistemas em malha fechada podem ser altamente sensíveis as mudanças dos coeficientes dos controladores (KEEL; BHATTACHARYYA, 1997). É amplamente reconhecido, também, que a robustez tem sido discutida prioritariamente em modelos de incertezas de plantas. De fato, algumas das implicações mais relevantes referiam-se a sistemas de controle embarcados, que envolvia restrições no tamanho da base digital dos dados, em especial, na implementação de controladores de alta ordem (MäKILä, 1998). Atualmente, entende-se a fragilidade por erros de implementação e, portanto, objetiva-se estudar a sensibilidade dos coeficientes frente a possibilidade de falha na implementação exata (DU; LAM; SZE, 2003, 2005).

Seja, então, as equações descritas por (4.43), resultantes da ação da lei de controle $u(t) = -(K + \Delta K)x(t)$ no sistema (4.17). Note que ΔK denota uma variação (à *priori*) de ganho por incerteza limitada por norma, com $\Delta K = L\mathscr{Z}E$ tal que $\mathscr{Z}$ satisfaz (2.4).

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(K + \Delta K)x(t) + B_w w(t), \tag{4.43a}$$

$$q(t) = C_q x(t) + D_q(K + \Delta K)x(t), \tag{4.43b}$$

$$p(t) = \mathscr{Z}q(t), \tag{4.43c}$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} \mathscr{Q}^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathscr{R}^{1/2}(K + \Delta K) \end{bmatrix} x(t). \tag{4.43d}$$

Em vista disso, a formulação do Teorema 4.4 permite projetar controladores resilientes

as variações limitadas por norma no ganho da matriz de realimentação de estados.

Teorema 4.4. *O sistema (4.43) é estável por $u(t) = -(K + \Delta K)x(t)$, com taxa de decaimento maior ou igual a α, um distúbio limitado por β e custo garantido $\mathscr{J}_\infty$ inferior a υ, se para um dado nível de atenuação γ, existirem matrizes $Q = Q' > 0 \in \Re^{n_x \times n_x}$, $Z \in \Re^{n_u \times n_x}$, $\Lambda \in \Re^{r \times r}$ e um escalar positivo τ, tais que as seguintes desigualdades são satisfeitas:*

$$\min_{\upsilon,\tau,Q,Z,\Lambda} \upsilon$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} QA' + AQ + Z'B' + BZ + 2\alpha Q + B_p \Lambda B_p' & * & * & * \\ \upsilon B_w' & -\upsilon\gamma^2 I & * & * \\ C_q Q + D_q Z & 0 & -\Lambda & * \\ Q & 0 & 0 & -\upsilon\mathscr{Q}^{-1} \\ Z & 0 & 0 & 0 \\ \tau L' B' & 0 & \tau L' D_q' & 0 \\ E'Q & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ -\upsilon\mathscr{R}^{-1} & * & * \\ \tau L' & -\tau I & * \\ 0 & 0 & -\tau I \end{bmatrix} < 0, \tag{4.44}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ \beta^2\gamma^2 & \upsilon\beta^2\gamma^2 & * \\ x(0) & 0 & Q \end{bmatrix} > 0. \tag{4.45}$$

Então o ganho de realimentação de estados é dado por $K = -ZQ^{-1}$ e a norma $\mathscr{H}_2$ do sistema em malha fechada satisfaz $||H_{wz}(s)||_2^2 < \upsilon$.

Prova: Seja o sistema (4.43) e a desigualdade (4.8), dos quais é deduzido (4.46):

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} (A - B(K + \Delta K))'P + P(A - B(K + \Delta K)) \\ +2\alpha P + \mathscr{Q} + (K + \Delta K)'\mathscr{R}(K + \Delta K) \\ +(C_q - D_q(K + \Delta K))'\hat{\Delta}(C_q - D_q(K + \Delta K)) \end{pmatrix} & * & * \\ B_w' P & -\gamma^2 I & * \\ B_p' P & 0 & -\hat{\Lambda} \end{bmatrix} < 0, \tag{4.46}$$

cujos termos não lineares são convertidos para LMIs pelo uso do complemento de Schur, i.e.:

$$\begin{bmatrix} (A-BK)'P+P(A-BK)+2\alpha P & * & * & * & * & * \\ B_w' & -\gamma^2 I & * & * & * & * \\ B_p'P & 0 & -\hat{\Lambda} & * & * & * \\ C_q+D_qK & 0 & 0 & -\hat{\Lambda}^{-1} & * & * \\ I & 0 & 0 & 0 & -\mathscr{Q}^{-1} & * \\ K & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathscr{R}^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (B\Delta K)'P+PB\Delta K & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ D_q\Delta K & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ \Delta K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0, \quad (4.47)$$

que equivale-se a,

$$\begin{bmatrix} (A-BK)'P+P(A-BK)+2\alpha P & * & * & * & * & * \\ B_w' & -\gamma^2 I & * & * & * & * \\ B_p'P & 0 & -\hat{\Lambda} & * & * & * \\ C_q+D_qK & 0 & 0 & -\hat{\Lambda}^{-1} & * & * \\ I & 0 & 0 & 0 & -\mathscr{Q}^{-1} & * \\ K & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathscr{R}^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} PBL \\ 0 \\ 0 \\ D_qL \\ 0 \\ L \end{bmatrix} \mathscr{Z} \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathscr{Z} \begin{bmatrix} L'B'P & 0 & 0 & L'D_q' & 0 & L' \end{bmatrix} < 0. \quad (4.48)$$

Pelo uso do Lema 2.1 de (XIE; SOUZA, 1991), a existência da desigualdade (4.48) para $\varepsilon > 0$, implica em:

$$\begin{bmatrix} ((A-BK)'P+P(A-BK)+2\alpha P & * & * & * & * & * \\ B_w' & -\gamma^2 I & * & * & * & * \\ B_p'P & 0 & -\hat{\Lambda} & * & * & * \\ C_q+D_qK & 0 & 0 & -\hat{\Lambda}^{-1} & * & * \\ I & 0 & 0 & 0 & -\mathscr{Q}^{-1} & * \\ K & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathscr{R}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$+\varepsilon\begin{bmatrix}PBL\\0\\0\\D_qL\\0\\L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L'B'P & 0 & 0 & L'D_q' & 0 & L'\end{bmatrix}+\varepsilon^{-1}\begin{bmatrix}E\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}<0, \quad (4.49)$$

ou, expandindo as multiplicações vetoriais,

$$\begin{bmatrix}(A-BK)'P+P(A-BK)+2\alpha P & * & * & * & * & *\\ B_w' & -\gamma^2 I & * & * & * & *\\ B_p'P & 0 & -\hat{\Lambda} & * & * & *\\ C_q+D_qK & 0 & 0 & -\hat{\Lambda}^{-1} & * & *\\ I & 0 & 0 & 0 & -\mathscr{Q}^{-1} & *\\ K & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathscr{R}^{-1}\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}\varepsilon PBLL'B'P+\varepsilon^{-1}EE' & * & * & * & * & *\\ 0 & 0 & * & * & * & *\\ 0 & 0 & 0 & * & * & *\\ \varepsilon DqLL'B'P & 0 & 0 & \varepsilon D_qLL'D_q' & * & *\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & *\\ \varepsilon LL'B'P & 0 & 0 & \varepsilon LL'D_q' & 0 & \varepsilon LL'\end{bmatrix}<0. \quad (4.50)$$

Depois disso, aplica-se a transformação de congruência $\mathrm{diag}(P^{-1},I,I,I,I,I)$ à desigualdade (4.50), com $W=P^{-1}$ e $H=-KW$, tal que por complemento de Schur é alcançado (4.51).

$$\begin{bmatrix}WA'+AW+H'B'+BH+2\alpha Q+B_p\hat{\Lambda}^{-1}B_p' & * & * & *\\ B_w' & -\gamma^2 I & * & *\\ C_qW+D_qH & 0 & -\hat{\Lambda}^{-1} & *\\ W & 0 & 0 & -\mathscr{Q}^{-1}\\ H & 0 & 0 & 0\\ \varepsilon L'B' & 0 & \varepsilon L'D_q' & 0\\ E'W & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ -\mathscr{R}^{-1} & * & * \\ \varepsilon L' & -\varepsilon I & * \\ 0 & 0 & -\varepsilon I \end{array}\right] < 0. \tag{4.51}$$

Por fim, multiplicando a desigualdade acima por $\upsilon = \kappa^2$, e escolhendo $Q = \upsilon W$, $\Lambda = \upsilon\hat{\Lambda}^{-1}$, $Z = \upsilon H$ e $\tau = \upsilon\varepsilon$ resulta em (4.44).

A prova do Teorema 4.4 está completa. ■

Proposição 4.2

Incerteza limitada por norma. *Seja uma condição inicial $x(0)$, uma taxa de decaimento α, um distúrbio limitado por β, um nível de atenuação γ e matrizes $\{\mathscr{Q}, \mathscr{R}\}$ definidas positivas. Assuma que existam matrizes Λ, Z, Q (definida positiva e simétrica) e um escalar positivo τ, tais que (4.44) - (4.45) são factíveis com $\Delta K = 0$. Então, este resultado converge no caso particular do Teorema 4.2(b).*

Logo, é possível enunciar o Teorema 4.5 para domínios de incertezas limitadas por norma:

Teorema 4.5. *Proposição 4.1 $\Longrightarrow$ Proposição 4.2*

Note que o Teorema 4.4 generaliza as formulações LMIs do problema LQR discutidas na Subseção 2.3.3 e na Seção 4.1, explorando a fragilidade de controladores. Enfim, o algoritmo computacional é descrito por:

Algoritmo.

1. *Meça $x(0)$.*
2. *Defina α, β, γ, $\mathscr{Q}$ e $\mathscr{R}$.*
3. *Inicialize as matrizes L e E com todos os elementos nulos.*
4. *Resolva $\min_{\upsilon,\tau,Q,Z,\Lambda}\ \upsilon$, sujeito as restrições (4.44)-(4.45).*
5. *Compute K e ΔK.*
6. *Determine as matrizes L e E.*
7. *Retorne ao passo 3, recompute K e fim.*

4.2 EXEMPLO

Nesta seção é apresentado uma aplicação prática, no qual o pacote computacional LMIlab e a interface YALMIP (LöFBERG, 2004), em ambiente Matlab, foram usados para o cômputo da solução do problema de otimização.

4.2.1 Suspensão ativa Quanser®

Considere o modelo esquemático da Figura 4.1(b) da suspensão ativa de um veículo ilustrado na Figura 4.1(a) (QUANSER, 2002).

De acordo com (CARNIATO *et al.*, 2018), o sistema consiste de um conjunto composto por duas massas, denominadas M_s e M_{us}. A massa M_s representa $\frac{1}{4}$ do corpo total do veículo e é suportada pela mola k_s e pelo amortecedor b_s. A massa M_{us} corresponde a massa do conjunto do pneu do veículo e é suportada pela mola k_{us} e pelo amortecedor b_{us}. Para diminuir as vibrações causadas por irregularidades na pista utiliza-se o sistema de suspensão ativa, representado por um motor conectado entre as massas M_s e M_{us}, e controlado pela força F_c.

O modelo dinâmico (QUANSER, 2002) pode ser representado pela equação (4.52).

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{M_s} & -\frac{b_s}{M_s} & 0 & \frac{b_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M_{us}} & \frac{b_s}{M_{us}} & -\frac{k_{us}}{M_{us}} & -\frac{(b_s+b_{us})}{M_{us}} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{M_{us}} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{b_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix} w(t), \quad (4.52a)$$

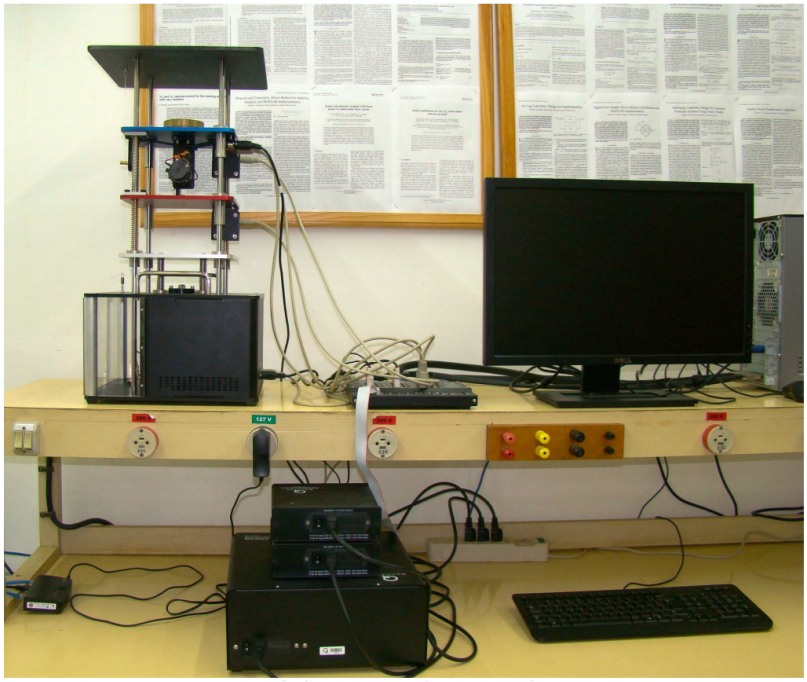
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + w(t), \quad (4.52b)$$

com

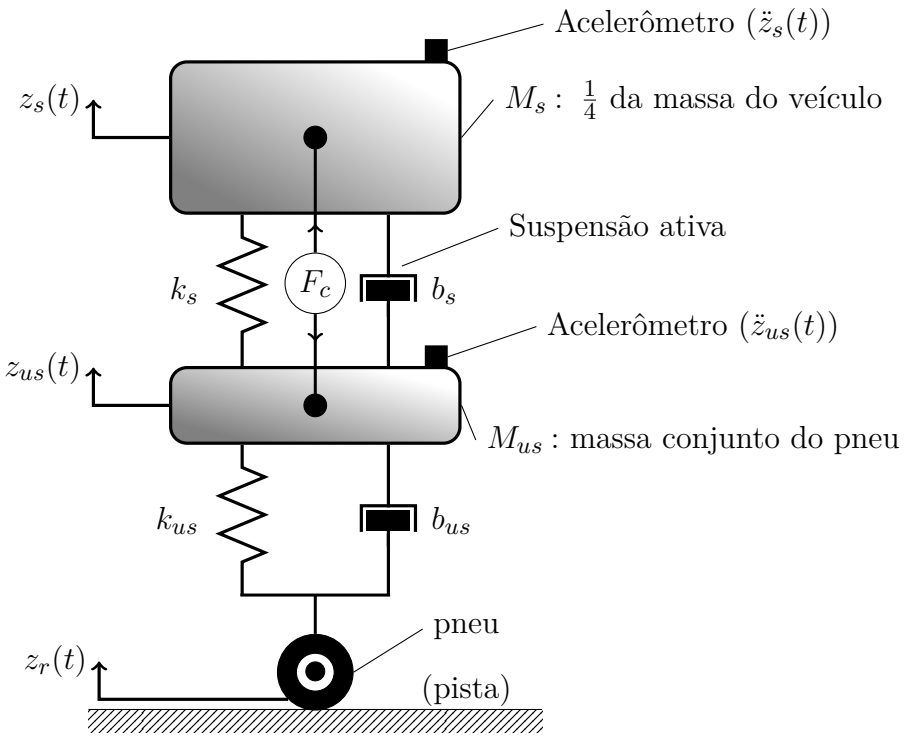
$$x(t) = \begin{bmatrix} z_s(t) - z_{us}(t) \\ \dot{z}_s(t) \\ z_{us}(t) - z_r(t) \\ \dot{z}_{us}(t) \end{bmatrix}, \; u(t) = F_c,$$

note que $y(t) = z_s(t)$ é a saída de interesse e $w(t) = z_r(t)$ a perturbação.

Figura 4.1 - (a) Suspensão ativa. (b) Modelo esquemático.



(a)



(b)

Fonte: (a) Suspensão ativa Quanser® do LPC - UNESP. (b) Adaptado de (QUANSER, 2002).

Os valores nominais das constantes podem ser encontrados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 - Parâmetros da suspensão ativa.

Parâmetros	Símbolo	Valor
Massa de $\frac{1}{4}$ do corpo total do veículo (kg)	M_s	2,45
Massa do conjunto do pneu (kg)	M_{us}	1
Constante de rigidez da mola (N/m)	k_s	900
Constante de rigidez da mola (N/m)	k_{us}	2500
Coeficiente de amortecimento (Ns/m)	b_s	7,5
Coeficiente de amortecimento (Ns/m)	b_{us}	5

No modelo físico da suspensão ativa existe uma massa de carga útil removível, constituída por duas unidades de peso idênticas, compondo a massa M_s. Logo, a massa M_s pode assumir valores entre 1,455 kg (sem as duas unidades de peso) e 2,45 kg (com as duas unidades de peso). Sendo assim, a massa M_s é incerta e pertence ao intervalo $1,455 \leq M_s \leq 2,45$ kg. Além disso, considerar-se-á a existência da perda de potência proveniente de uma falha no atuador, representada no modelo pela constante k_{falha}. Considerando o canal de falha do atuador para o controlador, tem-se $u(t)_{falha} = k_{falha}F_c(t)$. A partir dessas informações, um politopo possuindo 4 vértices é formado, i.e.

- Vértice 1: $M_s = 1,455$ kg e 100% de potência na força de controle $F_c(t)$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -618,56 & -5,154 & 0 & 5,154 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix}, \; B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,687 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- Vértice 2: $M_s = 2,45$ kg e 100% de potência na força de controle $F_c(t)$:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367,34 & -3,061 & 0 & 3,061 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,408 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- Vértice 3: $M_s = 1,455$ kg e 70% de potência na força de controle $F_c(t)$:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -618,56 & -5,154 & 0 & 5,154 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix}, \; B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,481 \\ 0 \\ -0,7 \end{bmatrix}.$$

- Vértice 4: $M_s = 2,45$ kg e 70% de potência na força de controle $F_c(t)$:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367,34 & -3,061 & 0 & 3,061 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix}, \; B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,286 \\ 0 \\ -0,7 \end{bmatrix}.$$

Assume-se, em um caso particular, que a incerteza admissível ocorra apenas em M_s. Neste caso, o politopo é constituído pelos Vértices 1 e 2. Por conseguinte, a representação por espaço de estados via incertezas limitadas por norma é dada por,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -492,75 & -4,11 & 0 & 4,11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix} \right. \\ &+ \left. \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \zeta \begin{bmatrix} -126 & -1,05 & 0 & -1,05 \end{bmatrix} \right) x(t) + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0,5475 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \zeta \begin{bmatrix} 0,14 \end{bmatrix} \right) u(t) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} w(t). \end{aligned} \tag{4.53}$$

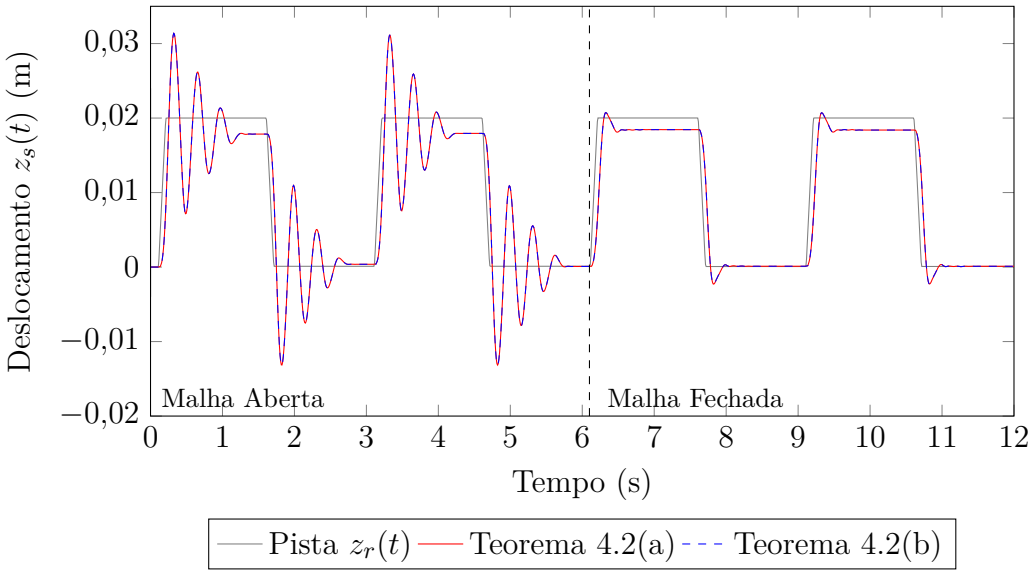
A proposta deste experimento é projetar um controlador robusto (K) que atue na força de controle $F_c(t)$, tal que as vibrações causadas por irregularidades da pista sejam minimizadas. A referência $z_r(t)$ foi escolhida para produzir um sinal de onda quadrada de amplitude 0,02m, frequência de $\frac{1}{3}$ Hz com largura de pulso de 50%. Além disso, devido as características de fabricação da suspensão, o vetor de estados iniciais é assumido nulo. Esta condição de contorno representa um caso particular dos teorema propostos, que permitem estabelecer estados iniciais não nulos. Nos casos sob estudo, as matrizes de ponderação são $\mathscr{Q} = \text{diag}(0,1\ 0,1\ 0,1\ 0,12)$ e $\mathscr{R} = 0,01$. Por fim, admite-se que a norma do sinal $w(t)$ seja limitada por $\beta = 0,02$.

(a) *Caso 1.* Considere o modelo de variáveis de estado representado por (4.52) e (4.53), sujeito a ocorrência de incerteza na massa M_s. A estratégia da implementação prática envolveu dois estágios: (i) no intervalo de 0 a 6,1 segundos o sistema encontra-se em malha aberta e, (ii) a partir de 6,1 segundos o sinal de controle

atua no sistema em malha fechada. Este teste prático é repetido para ambas situações da massa M_s, assim como discutido nos demais casos de estudo. As Figuras 4.2 e 4.3 apresentam as respostas dinâmicas da saída $z_s(t)$.

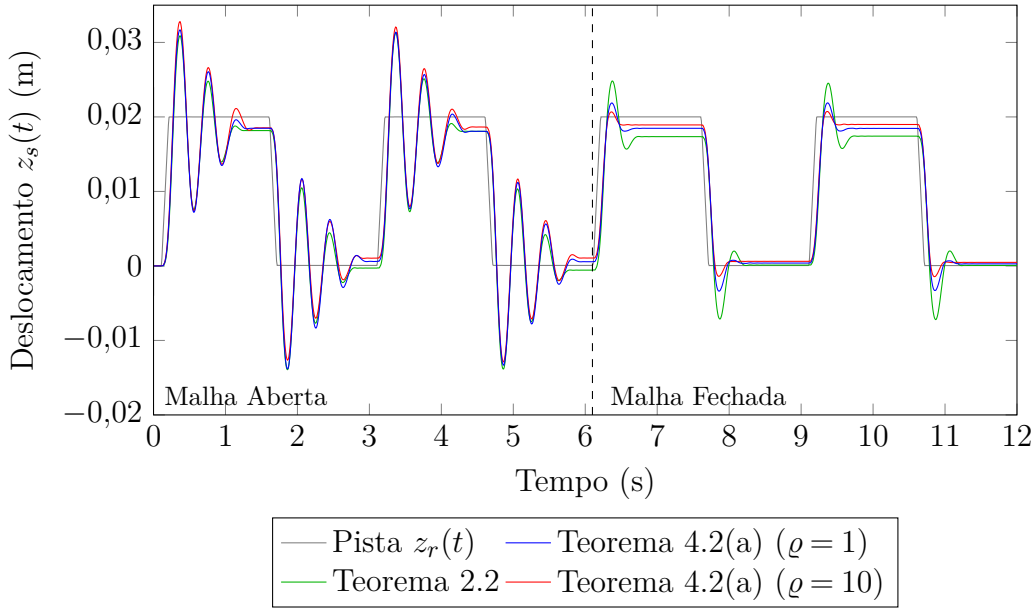
Note que o sistema em malha aberta é estável naturalmente, porém sua característica transitória é excessivamente oscilatória. Estas oscilações são suavizadas na operação em malha fechada devido a força F_c. Mais especificamente, a Figura 4.2 ilustra aplicações do Teorema 4.2 (para o menor γ factível), explicitando que a aplicação de diferentes modelos de incerteza não conduz a divergências de desempenho do controlador. As matrizes de ganho foram: $K_{T4.2(a)} = [299,7571\ 63,2988\ 292,3914\ 5,6540]$, com $||K_{T4.2(a)}|| = 423,5395$ e $K_{T4.2(b)} = [281,7502\ 62,2898\ 310,1377\ 6,1836]$, com $||K_{T4.2(b)}|| = 423,6589$. Neste caso, o Teorema 4.2(b) apresenta uma vantagem no custo computacional por meio da redução de 18 linhas de LMIs não programadas. Outra condição favorável é a redução da norma do controlador na aplicação da α-estabilidade.

Figura 4.2 - Aplicação prática do Teorema 4.2 na condição de $\alpha = 0$, $\gamma = 7$ e $M_s = 1,455$kg.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

Figura 4.3 - Aplicação prática de modelos politópicos na condição de $\alpha = 0$, $\gamma = 7$ e $M_s = 2,45$kg.

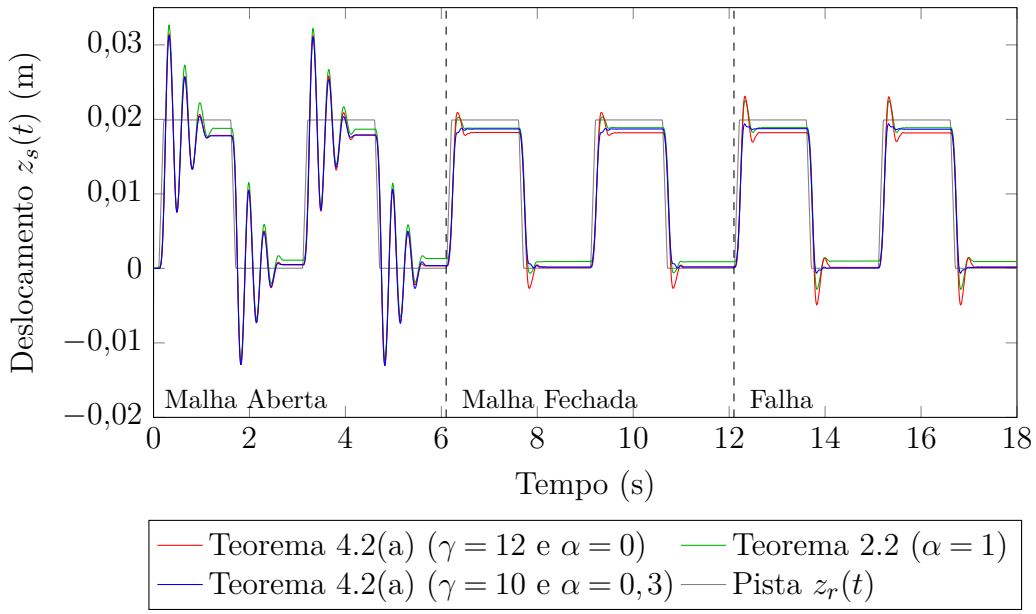


Fonte: Dados de pesquisa do autor.

Por outro lado, a Figura 4.3 permite verificar a preservação da característica de sintonia da matriz $\mathscr{Q}$ do Teorema 4.2(a). Para tanto, a matriz de ponderação de estados torna-se $\varrho\mathscr{Q}$, sendo ϱ um escalar positivo. Assim, a medida que prioriza-se mais os estados há um reflexo positivo em termos do transitório, conforme demonstra o controlador $K_\varrho = [765,7748\ \ 100,4804\ \ 424,5129\ \ 7,1628]$, com $||K_\varrho|| = 881,3455$. Complementarmente, para validar a ação da rejeição ao distúrbio do Teorema 4.2, propõem-se contrastar o comportamento temporal via Teorema 2.2, que se baseia no controle LMI do problema LQR. Neste caso, obteve-se $K = [-32,5157\ \ 27,3028\ \ -85,0217\ \ -3,2284]$, com $||K|| = 95,0885$. Verifica-se, portanto, que o Teorema 4.2(a) garante níveis de rejeição de $w(t)$ em situações que não seja possível aprimorar o desempenho por meio das matrizes de ponderação.

(b) *Caso 2.* Considere o sistema (4.52) sujeito as incertezas em M_s e $F_c(t)$ sendo, portanto, representado pelo politopo de Vértices 1 a 4. A estratégia da implementação prática foi dividida em três estágios: (i) no intervalo de 0 a 6,1 segundos o sistema encontra-se em malha aberta; (ii) a partir de 6,1 segundos o sinal de controle atua no sistema em malha fechada e, por fim, (iii) no instante de 12,1 segundos ocorre uma falha de 30% no sinal do atuador. Os testes propostos na Figura 4.4 consideram os efeitos da taxa de decaimento na síntese robusta.

Figura 4.4 - Análise da influência da taxa de decaimento na condição de $M_s = 1,455$kg.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

Neste caso, os resultados do Teorema 4.2(a) na condição de $\gamma = 12$ e $\alpha = 0$ será o sinal de referência. A partir desta informação, nota-se que para atingir um desempenho similar através do Teorema 2.2, deve-se impor $\alpha = 1$. Em contrapartida, a aplicação do Teorema 4.2(a) parametrizado por $\gamma = 10$ e $\alpha = 0,3$ implica em uma severa rejeição dos efeitos de $w(t)$, mesmo na presença de falha estruturais no atuador. Este fato torna a formulação $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ do problema LQR menos dependente dos efeitos da taxa de decaimento e, portanto, menos susceptível a não factibilidade do algoritmo de controle no alcance desejável do nível de rejeição. As matrizes de ganho implementadas foram:

(i) Teorema 2.2, com $\alpha = 1$:

$$K = [71,1986\ 64,0721\ -7,5881\ 4,9229], \tag{4.54}$$

cuja norma é $||K|| = 96,2096$.

(ii) Teorema 4.2(a), com $\gamma = 12$ e $\alpha = 0$:

$$K = [51,4267\ 51,2173\ 68,3067\ 3,6459], \tag{4.55}$$

cuja norma é $||K|| = 99,7347$.

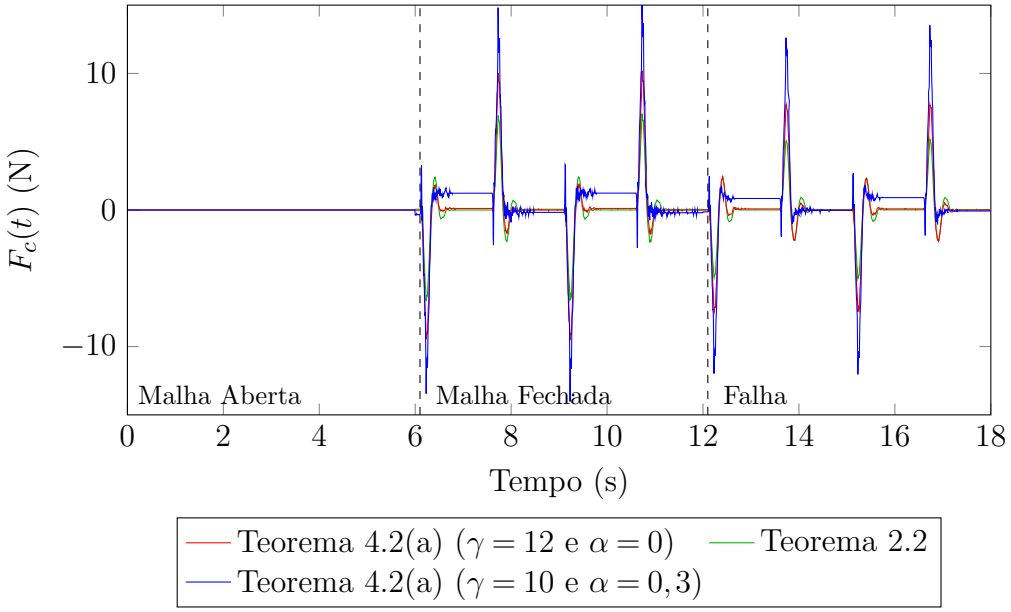
(iii) Teorema 4.2(a), com $\gamma = 10$ e $\alpha = 0,3$:

$$K = [1306,8\ 150,1\ 1067,5\ 16,3], \tag{4.56}$$

cuja norma é $||K|| = 1694,1455$.

No mais, os sinais de controle são contrastados na Figura 4.5. A partir desta figura, nota-se que atuador é naturalmente mais exigido a medida que atenua-se os efeitos das vibrações por meio da taxa de decaimento.

Figura 4.5 - Comportamento temporal da força de controle $F_c(t)$ sujeito a variações da taxa de decaimento.



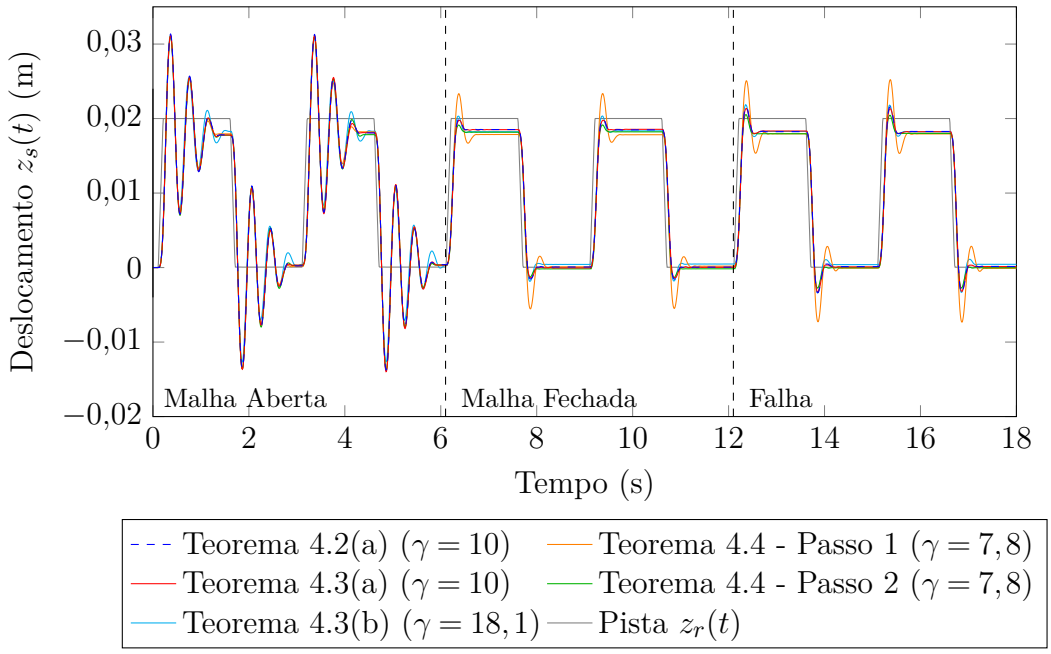
Fonte: Dados de pesquisa do autor.

(c) *Caso 3.* Neste tópico é proposto uma análise conjunta entre os seguintes modelos dinâmicos: (i) equação (4.52), representado pelos Vértices 1 a 4; (ii) equação (4.28), representado por (4.53) sujeito a teoria de falhas; (iii) equação (4.30), representado por (4.53) sujeito a teoria de falhas e; (iv) equação (4.43), representado por (4.53) sujeito a fragilidade no controlador K. Em particular, assume-se que a fragilidade tem a mesma proporção em todos os ganhos que compõe K. Todavia, a variação limitada por norma do vetor de realimentação de estados apresenta incertezas diferentes para cada elemento que compõe ΔK, cujas variações são restringidas a 30%. Note que a estrutura proposta no Teorema 4.4 é ainda mais geral, pois permite atribuir diferentes níveis de variações, refletidos na composição das matrizes L e E. Desta forma, esta particularidade concilia (em certa medida) as teorias de fragilidade de controladores e falhas estruturais, tendo em vista que na implementação prática impõe-se um canal de falha do atuador para o controlador.

A resposta temporal da saída $z_s(t)$ é apresentada na Figura 4.6. Nesta implementação, a geração dos resultados foi baseada na estratégia adotada no Caso 2. Em uma análise inicial, é possível afirmar que os Teoremas 4.2(a) e 4.3(a) retratam condições LMIs equivalentes, visto a similaridade dos resultados práticos obtidos sob os mesmos parâmetros de síntese robusta. Por outro lado, esta compatibilidade

permite elucidar prós e contras da abordagem combinada de incerteza politópica e limitada por norma, que são: (a) custo computacional, através da redução de 17 linhas de LMIs não programadas e (b) intensidade do sinal de controle, avaliado por meio da variação da $||K||$ que representa um acréscimo de 5,4% em relação ao Teorema 4.2(a). Em contrapartida, o Teorema 4.3(b) gerou uma ação de controle que representa um esforço de 23,7% a mais em relação ao Teorema 4.2(a). Neste projeto considerou-se $\gamma = 18,1$, uma vez que as formulações LMIs são obtidas por métodos distintos e, portanto, as características de projetos divergem entre si. Salienta-se, ainda, que a implementação prática apresentou um resultado inferior frente as demais propostas discutidas. Este fato se justifica devido ao ensaio ser realizado após a manutenção da suspensão, que reduziu o atrito mecânico das partes móveis.

Figura 4.6 - Análise comparativa da aplicação prática na condição de $\alpha = 0$ e $M_s = 2,45$kg.



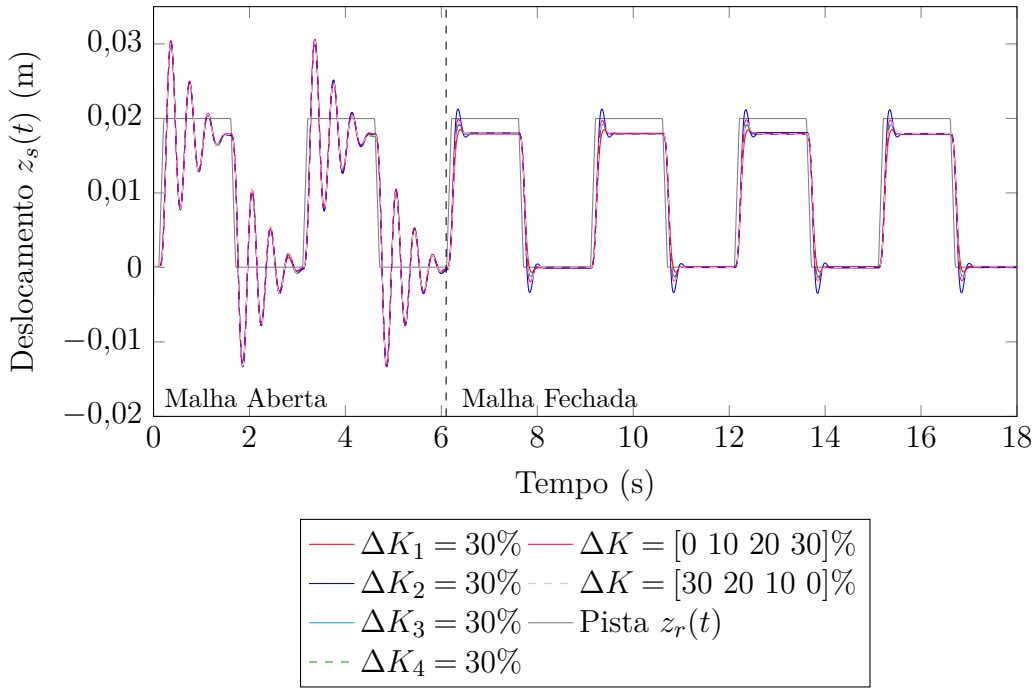
Fonte: Dados de pesquisa do autor.

A seguir, será avaliado o desempenho do Teorema 4.4. Através da implementação do algoritmo definido na Seção 4.1.2, na ausência da fragilidade (Passo 1), obteve-se a matriz de ganho $K = [42,8191\ 40,0105\ 91,6902\ 3,2532]$. Note que esta ação de controle expôs um desempenho inferior, que se justifica pela escolha de γ que garantiu a factibilidade das LMIs (4.44) e (4.45) para a execução do Passo 2 do algoritmo, sob uma severa variação de 30% na norma do controlador. Esta imposição implicou em $L = [6,4229\ 6,0016\ 13,7535\ 0,4880]$ e $E = \text{diag}(1\ 1\ 1\ 1)$, cujo recomputo definiu $K = [1048,8\ 130,7\ 85,9\ 6,5]$.

Posteriormente, propôs-se uma análise de resiliência em termos das variações dos elementos do vetor K, conforme ilustra a Figura 4.7. Para tanto, a estratégia

adotada nos testes práticos refere-se ao Caso 1, tal que na operação em malha fechada os controladores foram implementadas com as variações propostas. Neste cenário, é perceptível que ΔK_3 e ΔK_4 pouco influênciam no deslocamento de $z_s(t)$, além de dispor de respostas temporais similares. No entanto, a fragilidade associada aos estados x_1 e x_2 exibe características ímpares. Se de um lado a ΔK_1 melhora a atenuação de $w(t)$, do outro a ΔK_2 representa a condição de pior caso de oscilação. Por fim, variações desiguais nos ganhos de K foram testadas. Estes resultados permitem concluir a eficácia do projeto de resiliência do controlador, tendo em vista que houve pequenos acréscimos no sobressinal de $z_s(t)$.

Figura 4.7 - Análise de resiliência do controlador via Teorema 4.4 na condição $\alpha = 0$, $\gamma = 7{,}8$ e $M_s = 2{,}45$kg.

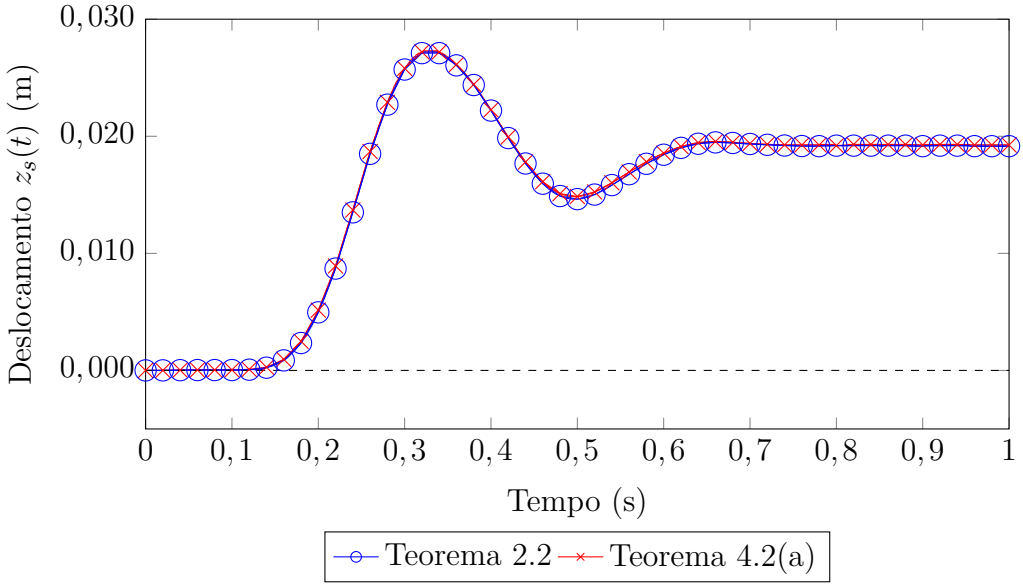


Fonte: Dados de pesquisa do autor.

(d) *Caso 4.* Considere os modelos de variáveis de estados discutidos no Caso 1, no qual o único parâmetro incerto é a massa M_s. A estratégia da implementação prática envolve a resposta a uma excitação do tipo degrau de $w(t)$, com amplitude $0{,}02$ m no intervalo de 1s. Este teste prático representa uma alternativa adotada frente as dificuldades práticas na obtenção da resposta ao degrau de $F_c(t)$ na ausência de $w(t)$ na suspensão ativa.

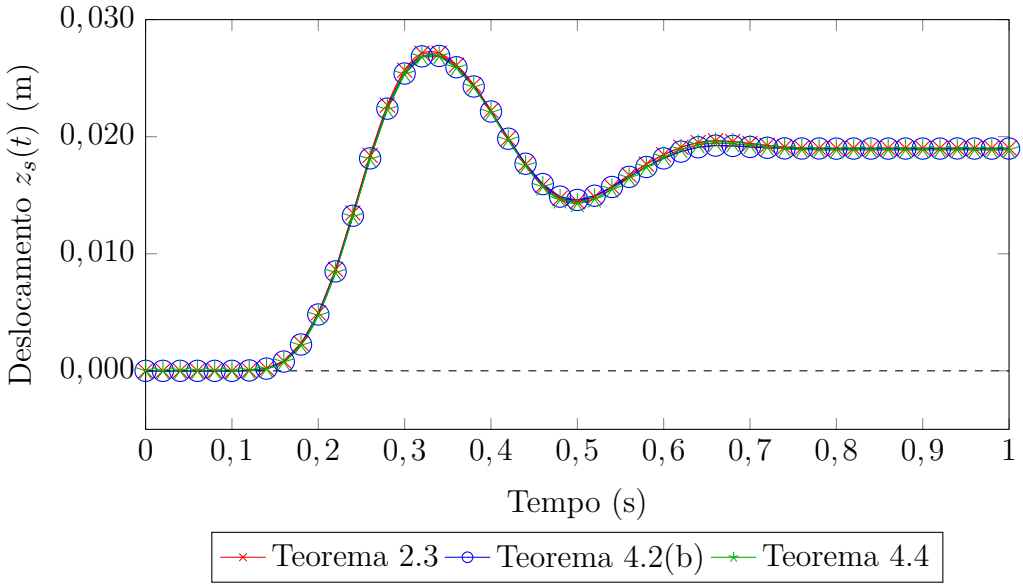
As figuras a seguir ilustram os efeitos do controlador projetado na ausência da perturbação ($B_w = 0$). Mais especificamente, a Figura 4.8 evidencia que o Teorema 4.2(a) se resume ao Teorema 2.2. De forma análoga, mostra-se através da Figura 4.9 que os resultados do Teorema 2.3, Teorema 4.2(b) e Teorema 4.4 se convergem e, portanto, validam-se as Proposições 4.1 e 4.2.

Figura 4.8 - Resposta ao degrau de $w(t)$ na condição de $\alpha = 0$, $\gamma = 7$ e $M_s = 1,455$kg via modelo de incerteza politópica.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

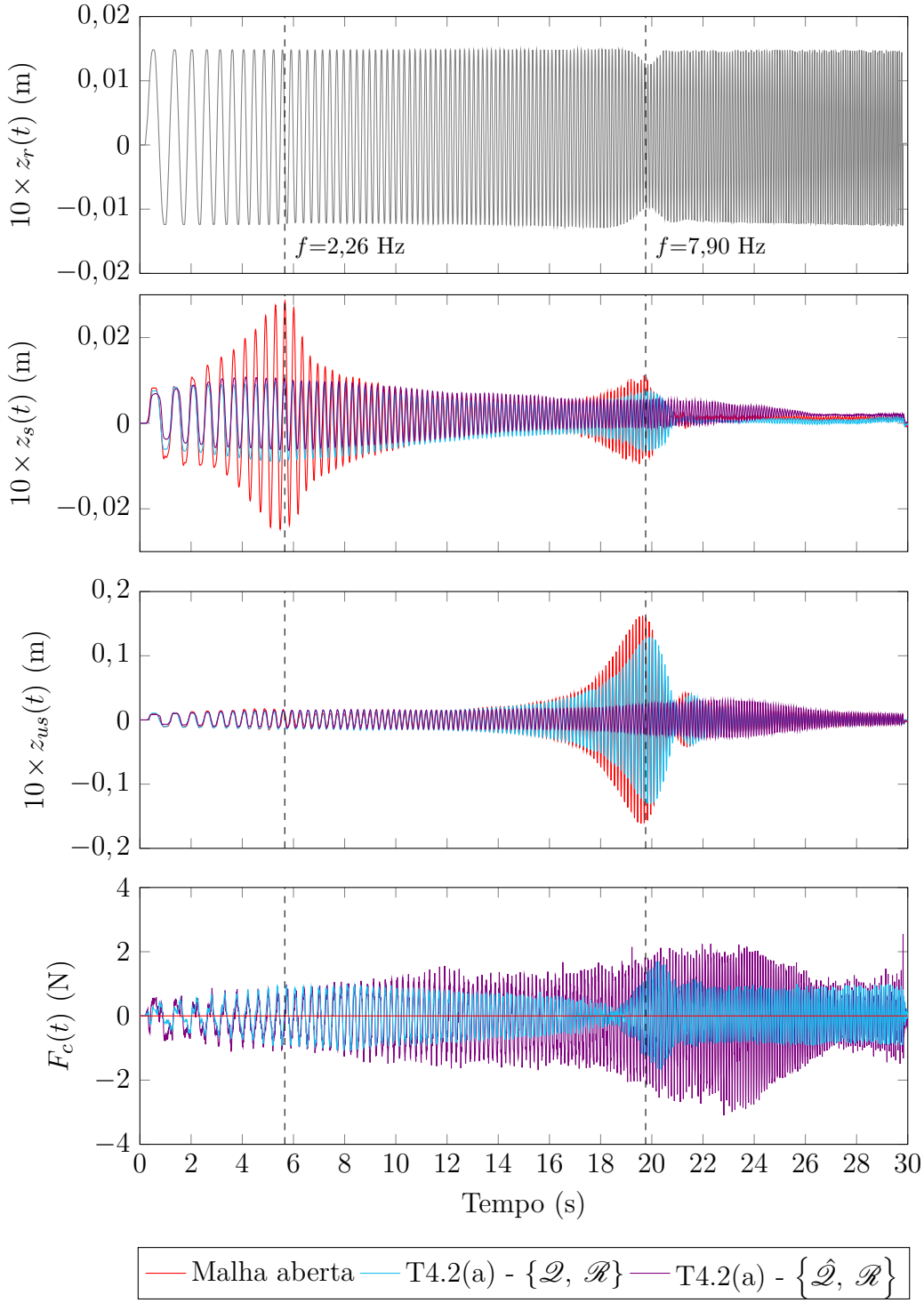
Figura 4.9 - Resposta ao degrau de $w(t)$ na condição de $\alpha = 0$, $\gamma = 7$ e $M_s = 1,455$kg via modelo de incerteza limitada por norma.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

(e) *Caso 5.* Seja o sistema (4.52), tal que o politopo é constituído pelos Vértices 1 e 2. A Figura 4.10 apresenta o resultado da implementação prática da resposta em frequência para a excitação $r(t) = 0,0012\text{sen}(2\pi ft)$, com f entre 1 a 12Hz.

Figura 4.10 - Resposta em frequência do sistema na condição de $\alpha = 0$, $\gamma = 7$ e $M_s = 2,45$kg.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

O experimento é dividido em três estágios: (i) no intervalo de 0 a 0,2 segundos o sistema não é excitado, (ii) no intervalo de 0,21 a 29,79 segundos aplica-se uma entrada senoidal com frequência (f) variável de 1 a 12 Hz a uma taxa de 0,4 Hz/s,

aproximadamente, (iii) a partir de $29,80$ segundos as oscilações são cessadas.

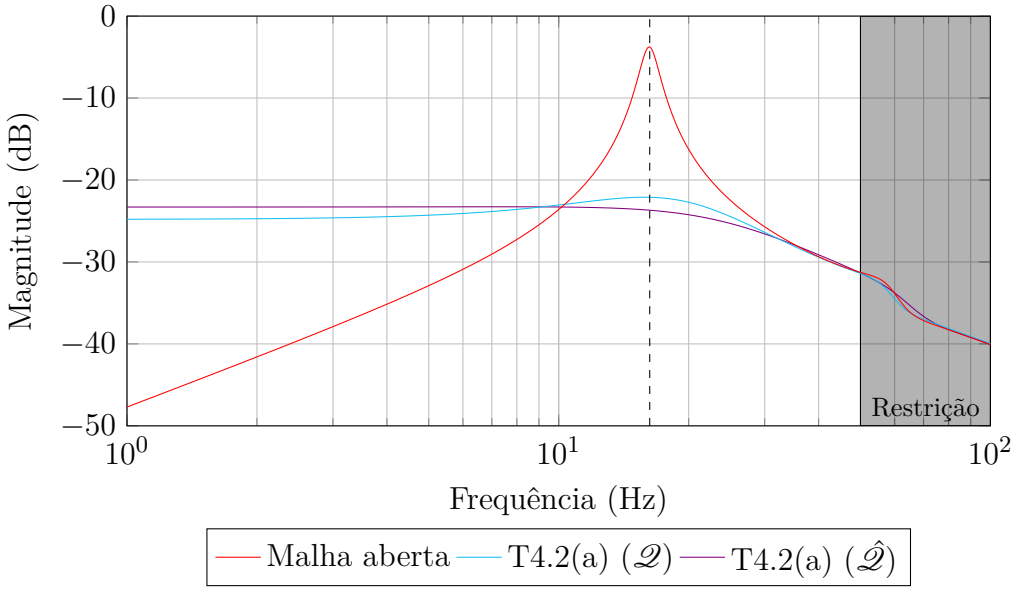
Em relação a saída $z_s(t)$, a figura acima caracteriza o sistema de malha aberta com duas oscilações predominantes, cujos picos ocorrem nos instantes de $5,66$s e $19,76$s. Por outro lado, no deslocamento $z_{us}(t)$ há uma alta magnitude de ressonância em $t = 19,76$s. É notório, ainda, que nas proximidade de 8Hz a pista apresenta um pequeno afundamento de sua amplitude de oscilação. Esta é uma limitação prática da suspensão dado que o sinal deveria ser uniforme em todo o espectro.

A princípio, será avaliado a resposta do sistema em malha fechada via Teorema 4.2(a) parametrizado por $\alpha = 0$, $\gamma = 7$ e $\{\mathscr{Q},\ \mathscr{R}\}$. Nesta proposta, o sinal de controle imposto por $K = [299,7571\ 63,2988\ 292,3914\ 5,6540]$, cuja $||K|| = 423,5395$, atua de forma efetiva no amortecimento das ressonâncias de $z_s(t)$, em especial, na frequência de $2,26$Hz. Em relação as vibrações em $z_{us}(t)$, nota-se uma tênue influência no pico de ressonância. Neste cenário, sob o ponto de vista de conforto aos passageiros de um veículo, esta proposta é aceitável. Apesar disso, há um problema de desgaste no sistema de suspensão ativa devido ao excessivo esforço atuante no conjunto do pneu, não sendo possível suavizá-lo mediante a α-estabilidade.

Optou-se, portanto, por priorizar mais os estados $x_2(t)$ e $x_4(t)$ em relação a $x_1(t)$ e $x_3(t)$. Assim, a nova matriz de ponderação de estados é definida por $\hat{\mathscr{Q}} = \text{diag}(0,1\ \ 0,5\ \ 0,1\ \ 3,0)$. Após a aplicação prática no módulo de suspensão ativa pela matriz de ganhos $K = [1573,4\ 155,7\ 504,2\ 13,4]$, cuja $||K|| = 1659,5878$, nota-se uma significativa redução das oscilações para $z_{us}(t)$ e, consequentemente, em $z_s(t)$. Contudo, um fator preponderante na parametrização por $(\hat{\mathscr{Q}},\ \mathscr{R})$ refere-se ao transitório dos sinais. A justificativa está na composição de entradas senoidais, que são auto-funções de sistemas LTI e, portanto, é natural que as saídas se comportem como os sinais de excitação multiplicada por uma constante complexa, que não prejudica a operação da suspensão ativa.

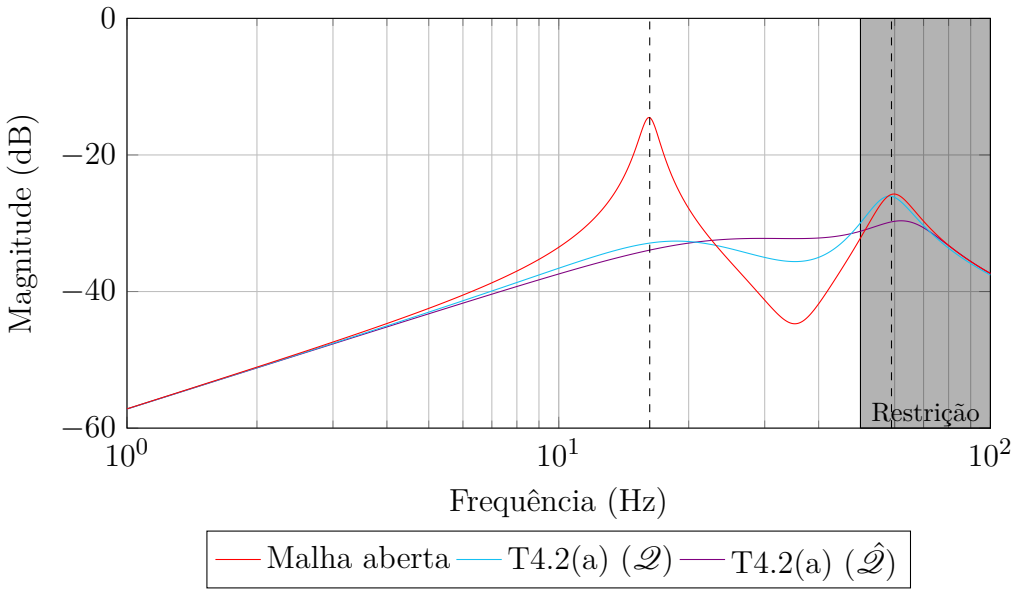
Por fim, faz-se necessário compatibilizar as informações da varredura em frequência (em implementação prática) e a teoria de resposta em frequência (por diagramas de valores singulares) do protótipo. Para tanto, considere as magnitudes da função de transferência entre o distúrbio e: (a) a deflexão da suspensão (Figura 4.11), (b) a deflexão do pneu (Figura 4.12) e (c) a velocidade da massa do pneu (Figura 4.13). Note que na faixa de ressonância o desempenho do sistema de malha fechada é superior a resposta da suspensão não controlada, seja qual for a condição adotada.

Figura 4.11 - Magnitude da função de transferência entre a deflexão da suspensão e a pista na condição de $M_s = 2,45$kg.



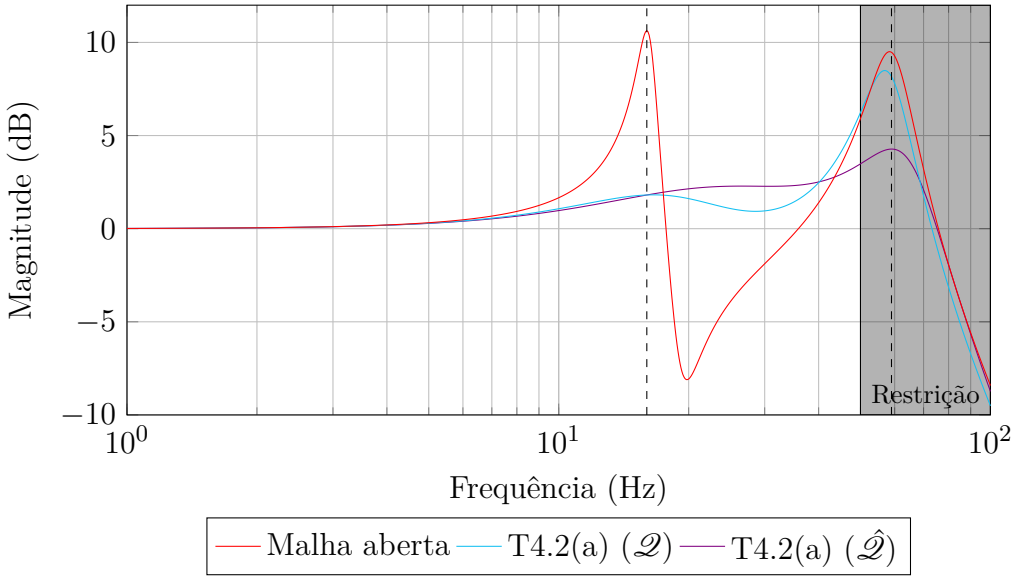
Fonte: Dados de pesquisa do autor.

Figura 4.12 - Magnitude da função de transferência entre a deflexão do pneu e a pista na condição de $M_s = 2,45$kg.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

Figura 4.13 - Magnitude da função de transferência entre a velocidade da massa do pneu e a pista na condição de $M_s = 2,45$kg.

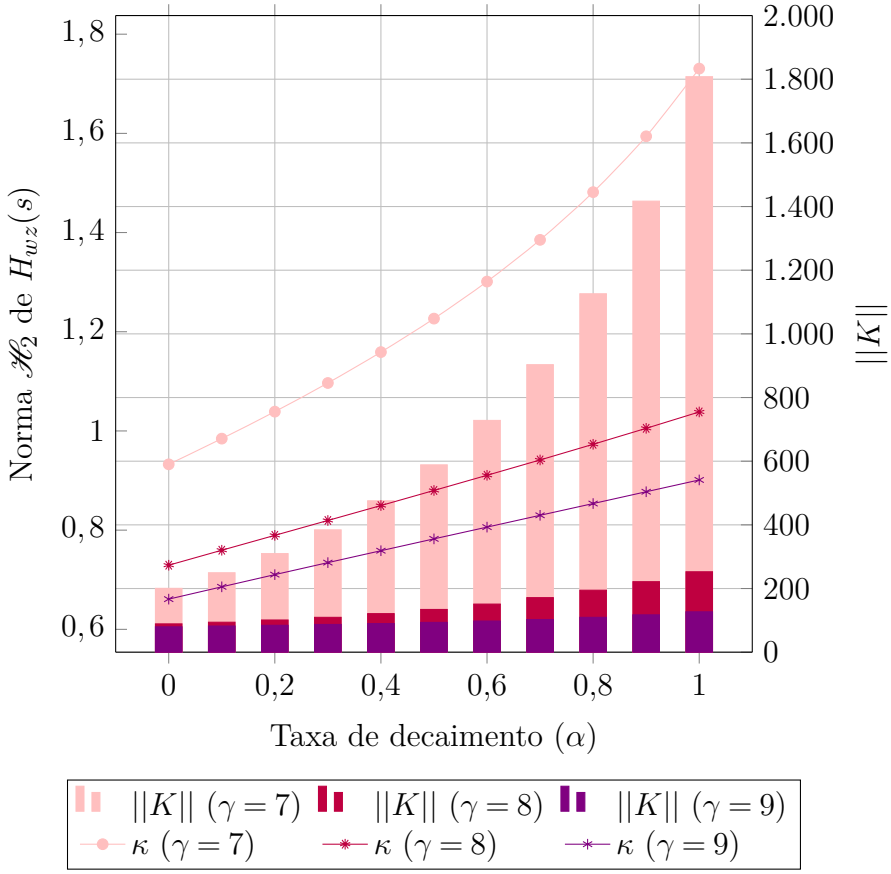


Fonte: Dados de pesquisa do autor.

Observação 4.1. *Note que a frequência de ressonância da massa de $\frac{1}{4}$ do corpo ocorre em uma frequência mais baixa. Isso se deve ao fato de que M_s é mais pesada que o pneu e a suspensão é mais leve que a rigidez do pneu (QUANSER, 2002).*

(f) *Caso 6.* Considere o sistema discutido no Caso 5. É proposto avaliar o custo garantido ótimo, obtido pelo valor mínimo de κ, e os reflexos na intensidade do sinal de controle em função da taxa de decaimento. Após simulações de síntese robusta, sob condições iniciais nulas, notou-se que os algoritmos do Teorema 4.2 não apresentaram variações de κ em relação a α. Diante deste fato, optou-se por investigar a norma $\mathscr{H}_2$ da função de transferência em malha fechada da matriz $H_{wz}(s)$ por meio da existência de incertezas nas condições iniciais. Assim, atribuiu-se o intervalo de operação dos estados por $-0,02 \leq x_{0_1}, x_{0_3} \leq 0,02$m e os demais nulos. Esta abordagem permitiu expressar a sensibilidade de κ (*versus*) α e $||K||$ (*versus*) α, conforme ilustra a Figura 4.14.

Figura 4.14 - Estudo da característica $||K||$ *versus* α e κ *versus* α do Teorema 4.2(a).



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

Note que a energia do sistema (norma $\mathscr{H}_2$ de $H_{wz}(s)$) e a norma dos controladores ($||K||$) apresentam uma relação de não linearidade com α para baixos níveis de γ. É interessante observar, ainda, que esta característica torna-se mais linear a medida que diminui-se o nível de atenuação e, portanto, há uma maior dessensibilização dos efeitos da taxa de decaimento na faixa de valores adotados.

4.3 COMENTÁRIOS FINAIS

Neste capítulo, novas formulações LMIs são propostas para a síntese robusta invariante no tempo baseada no controle $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ do problema LQR. De início, é possível listar dois fatores preponderantes: (a) equivalência entre os teoremas propostos e as condições do controle LQR-LMI discutidas no Capítulo 2, em que a matriz de distúrbio é desconsiderada e, (b) as condições iniciais podem assumir valores não necessariamente nulos. Logo, as formulações apresentadas podem ser vistas como um caso mais geral. Além disso, uma interpretação de LDIs descritas por sistemas lineares invariantes no tempo e incertos permitiu representar modelos de variáveis de estado por meio da descrição de incertezas

combinadas. Esta condição, em particular, admite expressar diferentes tipos de restrições na forma de LMIs, tal que um politopo (que descreve uma falha estrutural) é incorporado a representação limitada por norma de parâmetros incertos da planta. Nota-se, em vista disso, que o problema de robustez em modelos de sistemas é um fato amplamente discutido na literatura. No entanto, a robustez do controlador tem sido recentemente tratada por alguns pesquisadores. A ideia é obter uma margem de robustez da estabilidade em malha fechada e de desempenho, que motivou a formulação do Teorema 4.4. O módulo de um quarto de carro da Quanser® é usado no estudo da suspensão ativa. Este sistema é considerado incerto e descrito por modelos de incertezas politópica, limitada por norma e na representação mista destas incertezas. Testes práticos têm ilustrado as principais características das proposições deste capítulo, que se resumem a: (a) desempenho transitório análogo para diferentes abordagens de incertezas; (b) preservação da sintonia de $\{\mathscr{Q}, \mathscr{R}\}$; (c) especificação do tempo de estabelecimento na ausência de *expertise* do projetista; (d) avalição do nível de atenuação ao distúrbio frente aos diversos tipos de restrições LMIs a partir da intensidade do sinal de controle; (e) avaliação da sensibilidade e resilência do controlador; (f) validação prática do desempenho do projeto proposto para a minimização da norma $\mathscr{H}_\infty$ por meio da varredura em frequência e; (g) estudo da norma $\mathscr{H}_2$ sob condições iniciais incertas.

Capítulo 5

LQR *GAIN SCHEDULING*

As condições de projeto LQR propostas no Capítulo 3 consideram que os parâmetros são incertos e invariantes no tempo. A contribuição deste capítulo é apresentar a extensão para o caso da lei de controle dependente de parâmetros variantes no tempo. A principal motivação vem da possibilidade de obter resultados menos conservadores que a estabilidade inferida por parâmetros invariantes no tempo. A implicação mais relevante refere-se a aplicações de controle baseado na técnica *gain scheduling*, como discutido por (MONTAGNER; PERES, 2004). É importante enfatizar que, nesta proposta, o ganho de realimentação de estados depende da inversão da matriz de Lyapunov dependente de parâmetros, que é literal. Um problema intrínseco refere-se a complexidade de inversão desta matriz, que pode crescer em função da ordem do sistema (WU, 2001; CADALSO, 2006). Portanto, propõem-se um ganho de realimentação de estados LPV (do inglês, *Linear Parameter-Varying* - LPV) quadraticamente estabilizante sem a inversão de uma matriz literal. Esta abordagem é mais conservadora que a proposta de (MONTAGNER; PERES, 2004) e, portanto, para garantir um relaxamento matricial é utilizado as restrições LMIs obtidas pelo Lema de Finsler afim de diminuir o conservadorismo deste método em relação a (MONTAGNER; PERES, 2004). Para tanto, considere novamente o sistema (2.2) e a seguinte desigualdade,

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A(\varsigma)Y + Y'A(\varsigma)' \\ +B(\varsigma)Z(\varsigma) + Z(\varsigma)'B(\varsigma)' + 2\alpha\mathscr{W} \end{pmatrix} & * & * & * \\ \mathscr{W} - Y' + bA(\varsigma)Y + bB(\varsigma)Z(\varsigma) & -bY - bY' & * & * \\ Y & 0 & -\mathscr{Q}^{-1} & * \\ Z(\varsigma) & 0 & 0 & -\mathscr{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0. \qquad (5.1)$$

As matrizes $A(\varsigma)$ e $B(\varsigma)$ pertencem ao politopo Ω_P e são parametrizadas em função do vetor de parâmetros variantes no tempo $\varsigma(t), \forall t \geq 0$, tal que $\varsigma(t)$ pertence ao simplex

unitário. Observe, neste caso, a necessidade de decompor o produto $B(\varsigma)Z(\varsigma)$ da desigualdade (5.1), que implicará em LMIs definidas pelos produtos cruzados do termo citado. Dessa forma, expandindo as matrizes da desigualdade (5.1), e, isolando o parâmetro $\varsigma(t)$, obtém-se

$$\varsigma_i^2(t)\mathscr{M}_i + \varsigma_k(t)\varsigma_l(t)\mathscr{M}_{k,l} < 0, \tag{5.2}$$

com

$$\mathscr{M}_i = \begin{bmatrix} A_iY + Y'A_i' + B_iZ_i + Z_i'B_i' + 2\alpha\mathscr{W} & * & * & * \\ \mathscr{W} - Y' + bA_iY + bB_iZ_i & -bY - bY' & * & * \\ Y & 0 & -\mathscr{Q}^{-1} & * \\ Z_i & 0 & 0 & -\mathscr{R}^{-1} \end{bmatrix}, \tag{5.3}$$

e

$$\mathscr{M}_{k,l} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A_kY + Y'A_k' + A_lY + Y'A_l' + \\ B_kZ_l + B_lZ_k + Z_l'B_k' + Z_k'B_l' + \\ 4\alpha\mathscr{W} \end{pmatrix} & * & * & * \\ \begin{pmatrix} 2\mathscr{W} - 2Y' + \\ bA_kY + bA_lY + bB_kZ_l + bB_lZ_k \end{pmatrix} & -2bY - 2bY' & * & * \\ 2Y & 0 & -2\mathscr{Q}^{-1} & * \\ Z_k + Z_l & 0 & 0 & -2\mathscr{R}^{-1} \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Teorema 5.1. *Considere o sistema (2.2) e o critério (2.7).*

(a) ***Otimização.*** *Assuma que para uma dado estado fixo $x(0)$ exista um custo garantido $\mathscr{J}_\infty$ inferior a μ e taxa de decaimento maior ou igual a α, se para um dado $b > 0$, existirem matrizes $Y \in \Re^{n_x \times n_x}$, $Z_i \in \Re^{n_u \times n_x}$ e $\mathscr{W} = \mathscr{W}' > 0 \in \Re^{n_x \times n_x}$ tais que, para todo $i = 1, 2, \ldots, \mathscr{N}$, as seguintes LMIs são verificadas*

$$\min_{\mu, \mathscr{W}, Z_i, Y} \mu$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} A_iY + Y'A_i' + B_iZ_i + Z_i'B_i' + 2\alpha\mathscr{W} & * & * & * \\ \mathscr{W} - Y' + bA_iY + bB_iZ_i & -bY - bY' & * & * \\ Y & 0 & -\mathscr{Q}^{-1} & * \\ Z_i & 0 & 0 & -\mathscr{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{5.5}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A_kY + Y'A_k' + A_lY + Y'A_l' + \\ B_kZ_l + B_lZ_k + Z_l'B_k' + Z_k'B_l' + \\ 4\alpha\mathscr{W} \end{pmatrix} & * & * & * \\ \begin{pmatrix} 2\mathscr{W} - 2Y' + bA_kY + \\ bA_lY + bB_kZ_l + bB_lZ_k \end{pmatrix} & -2bY - 2bY' & * & * \\ 2Y & 0 & -2\mathscr{Q}^{-1} & * \\ Z_k + Z_l & 0 & 0 & -2\mathscr{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (5.6)$$

$$k = 1, \ldots, \mathscr{N} - 1, l = k + 1, \ldots, \mathscr{N},$$

$$\begin{bmatrix} \mu & * \\ x(0) & Y' + Y - \mathscr{W} \end{bmatrix} > 0. \quad (5.7)$$

Então, a lei de controle $u(t) = -\left(\sum_{i=1}^{\mathscr{N}} \varsigma_i(t) K_i\right) x(t)$, *com* $K_i = -Z_i Y^{-1}$ *e* $\mathscr{N} = 2$, *assegura a estabilidade robusta do sistema de malha fechada.*

*(**b**)* ***Estabilidade quadrática .*** *Considere uma planta estabilizável e matrizes* $\{\mathscr{Q}, \mathscr{R}\}$ *simétricas definidas positivas. As condições declaradas no item* ***(a)*** *asseguram a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada.*

Prova: Seja multiplicar (5.5) por $\varsigma_i^2(t) > 0$, tal que $i = 1, \ldots, \mathscr{N}$.

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{\mathscr{N}} \varsigma_i^2(t) \left(A_iY + Y'A_i' + B_iZ_i + Z_i'B_i' + 2\alpha\mathscr{W}\right) & * \\ \sum_{i=1}^{\mathscr{N}} \varsigma_i^2(t) \left(\mathscr{W} - Y' + bA_iY + bB_iZ_i\right) & -\sum_{i=1}^{\mathscr{N}} \varsigma_i^2(t) \left(bY + bY'\right) \\ \sum_{i=1}^{\mathscr{N}} \varsigma_i^2(t) Y & 0 \\ \sum_{i=1}^{\mathscr{N}} \varsigma_i^2(t) Z_i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ -\sum_{i=1}^{\mathscr{N}} \varsigma_i^2(t) \mathscr{Q}^{-1} & * \\ 0 & -\sum_{i=1}^{\mathscr{N}} \varsigma_i^2(t) \mathscr{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (5.8)$$

Para a desigualdade (5.6), o processo é repetido com $\varsigma_k(t)\varsigma_l(t)$, tal que $k = 1, \ldots, \mathscr{N} - 1$ e $l = k + 1, \ldots, \mathscr{N}$. Então,

$$\left[\begin{array}{cc}
\left(\begin{array}{c}\sum_{k=1}^{\mathscr{N}-1}\sum_{l=k+1}^{\mathscr{N}}\varsigma_k(t)\varsigma_l(t)(A_kY+\\ Y'A_k'+A_lY+Y'A_l'+B_kZ_l+\\ B_lZ_k+Z_l'B_k'+Z_k'B_l'+4\alpha\mathscr{W})\end{array}\right) & * \\
\left(\begin{array}{c}\sum_{k=1}^{\mathscr{N}-1}\sum_{l=k+1}^{\mathscr{N}}\varsigma_k(t)\varsigma_l(t)(2\mathscr{W}-2Y'+\\ bA_kY+bA_lY+bB_kZ_l+bB_lZ_k)\end{array}\right) & -\sum_{k=1}^{\mathscr{N}-1}\sum_{l=k+1}^{\mathscr{N}}\varsigma_k(t)\varsigma_l(t)\left(2bY+2bY'\right) \\
\sum_{k=1}^{\mathscr{N}-1}\sum_{l=k+1}^{\mathscr{N}}\varsigma_k(t)\varsigma_l(t)2Y & 0 \\
\sum_{k=1}^{\mathscr{N}-1}\sum_{l=k+1}^{\mathscr{N}}\varsigma_k(t)\varsigma_l(t)\left(Z_k+Z_l\right) & 0
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{cc}
* & * \\
* & * \\
-2\sum_{k=1}^{\mathscr{N}-1}\sum_{l=k+1}^{\mathscr{N}}\varsigma_k(t)\varsigma_l(t)\mathscr{Q}^{-1} & * \\
0 & -2\sum_{k=1}^{\mathscr{N}-1}\sum_{l=k+1}^{\mathscr{N}}\varsigma_k(t)\varsigma_l(t)\mathscr{R}^{-1}
\end{array}\right] < 0. \tag{5.9}$$

Genericamente, sabe-se que:

$$R(\varsigma)S(\varsigma)=\sum_{i=1}^{\mathscr{N}}\varsigma_i^2(t)R_iS_i+\sum_{k=1}^{\mathscr{N}-1}\sum_{l=k+1}^{\mathscr{N}}\varsigma_k(t)\varsigma_l(t)(R_kS_l+R_lS_k), \tag{5.10}$$

e,

$$\sum_{k=1}^{\mathscr{N}}\varsigma_k(t)\sum_{l=1}^{\mathscr{N}}\varsigma_l(t)=\sum_{i=1}^{\mathscr{N}}\varsigma_i^2(t)+2\sum_{k=1}^{\mathscr{N}-1}\sum_{l=k+1}^{\mathscr{N}}\varsigma_k(t)\varsigma_l(t). \tag{5.11}$$

Por consequência, os termos relacionados a operação de soma entre as LMIs (5.8) e (5.9) podem ser agrupados na seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^{\mathscr{N}}\varsigma_i^2(t)A_iY+\sum_{k=1}^{\mathscr{N}-1}\sum_{l=k+1}^{\mathscr{N}}\varsigma_k(t)\varsigma_l(t)(A_kY+A_lY)$$
$$=\sum_{k=1}^{\mathscr{N}}\varsigma_k(t)\sum_{l=1}^{\mathscr{N}}\varsigma_l(t)A_lY=\sum_{l=1}^{\mathscr{N}}\varsigma_l(t)A_lY=A(\varsigma)Y, \tag{5.12}$$

$$\sum_{i=1}^{\mathscr{N}}\varsigma_i^2(t)B_iZ_i+\sum_{k=1}^{\mathscr{N}-1}\sum_{l=k+1}^{\mathscr{N}}\varsigma_k(t)\varsigma_l(t)(B_kZ_l+B_lZ_k)$$
$$=\sum_{k=1}^{\mathscr{N}}\varsigma_k(t)\sum_{l=1}^{\mathscr{N}}\varsigma_l(t)B_lZ_k=B(\varsigma)Z(\varsigma), \tag{5.13}$$

$$\sum_{i=1}^{\mathscr{N}}\varsigma_i^2(t)Z_i+\sum_{k=1}^{\mathscr{N}-1}\sum_{l=k+1}^{\mathscr{N}}\varsigma_k(t)\varsigma_l(t)(Z_k+Z_l)$$
$$=sum_{k=1}^{\mathscr{N}}\varsigma_k(t)\sum_{l=1}^{\mathscr{N}}\varsigma_l(t)Z_k=\sum_{k=1}^{\mathscr{N}}\varsigma_k(t)Z_k=Z(\varsigma), \tag{5.14}$$

$$\sum_{i=1}^{\mathscr{N}} \varsigma_i^2(t)(2\alpha\mathscr{W}) + \sum_{k=1}^{\mathscr{N}-1}\sum_{l=k+1}^{\mathscr{N}} \varsigma_k(t)\varsigma_l(t)(4\alpha\mathscr{W}) = \sum_{k=1}^{\mathscr{N}} \varsigma_k(t) \sum_{l=1}^{\mathscr{N}} \varsigma_l(t)(2\alpha\mathscr{W}) = 2\alpha\mathscr{W}, \quad (5.15)$$

$$\sum_{i=1}^{\mathscr{N}} \varsigma_i^2(t)Y + \sum_{k=1}^{\mathscr{N}-1}\sum_{l=k+1}^{\mathscr{N}} \varsigma_k(t)\varsigma_l(t)2Y = \sum_{k=1}^{\mathscr{N}} \varsigma_k(t) \sum_{l=1}^{\mathscr{N}} \varsigma_l(t)Y = Y. \quad (5.16)$$

Por conveniência de espaço, os termos simétricos e demais elementos serão omitidos, pois são repetições das formulações expostas e, finalmente, a desigualdade (5.1) é alcançada.

A prova do Teorema 5.1 está completa. ■

5.1 EXTENSÃO A SISTEMAS LPV E INCERTEZA LIMITADA POR NORMA

Nesta seção é proposto o estudo do problema de estabilização via controle *gain scheduling* robusto. A ideia é investigar situações de coexistência de incertezas paramétricas variantes e invariantes no tempo. A justificativa de tratar diferentemente estes parâmetros envolve duas vertentes: (a) viabilidade de medição em tempo real dos parâmetros e; (b) variação suficientemente lenta a ponto de ser desnecessário a monitoração (ZHANG; JUNMIN, 2016). A contribuição está no projeto do controlador, o qual será *scheduling* com respeito aos parâmetros variantes no tempo (falhas no atuador, por exemplo) e robusto em relação ao par $\{A(\zeta),\ B(\zeta)\}$ de matrizes paramétricas do sistema.

Seja o sistema (4.28) e a seguinte desigualdade,

$$\begin{bmatrix} AY + Y'A' + B(\varsigma)Z(\varsigma) + Z(\varsigma)'B(\varsigma)' + 2\alpha\mathscr{W} + B_p\Lambda B_p' & * \\ \mathscr{W} - Y' + b(AY + B(\varsigma)Z(\varsigma) + B_p\Lambda B_p') & b(bB_p\Lambda B_p' - Y' - Y) \\ Y & 0 \\ Z & 0 \\ C_qY + D_q(\varsigma)Z(\varsigma) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ -\mathscr{Q}^{-1} & * & * \\ 0 & -\mathscr{R}^{-1} & * \\ 0 & 0 & -\Lambda \end{bmatrix} < 0. \quad (5.17)$$

As matrizes $B(\varsigma)$ e $D_q(\varsigma)$ pertencem ao politopo de dois vértices em Ω_P, tal que $\varsigma(t)$ é o parâmetro variante no tempo pertencente ao simplex unitário. Analogamente

ao Teorema 5.1, deve-se decompor os produtos $B(\varsigma)Z(\varsigma)$ e $D_q(\varsigma)Z(\varsigma)$ e, portanto, a desigualdade (5.18) é obtida.

$$\varsigma_i^2(t)\mathscr{S}_i + \varsigma_k(t)\varsigma_l(t)\mathscr{S}_{k,l} < 0, \tag{5.18}$$

com

$$\mathscr{S}_i = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} AY + Y'A' + B_iZ_i + \\ Z_i'B_i' + 2\alpha\mathscr{W} + B_p\Lambda B_p' \end{pmatrix} & * & * & * & * \\ \begin{pmatrix} \mathscr{W} - Y' + \\ b(AY + B_iZ_i + B_p\Lambda B_p') \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b^2B_p\Lambda B_p' - \\ bY - bY' \end{pmatrix} & * & * & * \\ Y & 0 & -\mathscr{Q}^{-1} & * & * \\ Z_i & 0 & 0 & -\mathscr{R}^{-1} & * \\ C_qY + D_{qi}Z_i & 0 & 0 & 0 & -\Lambda \end{bmatrix} < 0, \tag{5.19}$$

e

$$\mathscr{S}_{k,l} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 2AY + 2Y'A' + B_kZ_l + B_lZ_k + \\ Z_l'B_k' + Z_k'B_l' + 4\alpha\mathscr{W} + 2B_p\Lambda B_p' \end{pmatrix} & * \\ \begin{pmatrix} 2\mathscr{W} - 2Y' + \\ b(2AY + B_kZ_l + B_lZ_k + 2B_p\Lambda B_p') \end{pmatrix} & 2b(bB_p\Lambda B_p' - Y - Y') \\ 2Y & 0 \\ Z_k + Z_l & 0 \\ 2C_qY + D_{qk}Z_l + D_{ql}Z_k & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ -2\mathscr{Q}^{-1} & * & * \\ 0 & -2\mathscr{R}^{-1} & * \\ 0 & 0 & -2\Lambda \end{bmatrix} < 0. \tag{5.20}$$

Teorema 5.2. *Considere o sistema (4.28) e o critério (2.7).*

(a) ***Otimização.*** *Assuma que para um dado estado inicial fixo $x(0)$ exista um custo garantido $\mathscr{J}_\infty$ inferior a μ e taxa de decaimento maior ou igual a α, se para um dado $b > 0$, existirem matrizes $Y \in \Re^{n_x \times n_x}$, $Z_i \in \Re^{n_u \times n_x}$, $\Lambda \in \Re^{r \times r}$, e $\mathscr{W} = \mathscr{W}' > 0 \in \Re^{n_x \times n_x}$ tais que, para todo $i = 1, \ldots, \mathscr{N}$, as seguintes LMIs são verificadas*

$$\min_{\mu, \mathscr{W}, Z_i, \Lambda, Y} \mu$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} AY+Y'A'+B_iZ_i+ \\ Z_i'B_i'+2\alpha\mathscr{W}+B_p\Lambda B_p' \end{pmatrix} & * & * & * & * \\ \begin{pmatrix} \mathscr{W}-Y'+ \\ b(AY+B_iZ_i+B_p\Lambda B_p') \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b^2B_p\Lambda B_p'- \\ bY-bY' \end{pmatrix} & * & * & * \\ Y & 0 & -\mathscr{Q}^{-1} & * & * \\ Z_i & 0 & 0 & -\mathscr{R}^{-1} & * \\ C_qY+D_{qi}Z_i & 0 & 0 & 0 & -\Lambda \end{bmatrix} < 0, \tag{5.21}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 2AY+2Y'A'+B_kZ_l+B_lZ_k+ \\ Z_l'B_k'+Z_k'B_l'+4\alpha\mathscr{W}+2B_p\Lambda B_p' \end{pmatrix} & * \\ \begin{pmatrix} 2\mathscr{W}-2Y'+ \\ b(2AY+B_kZ_l+B_lZ_k+2B_p\Lambda B_p') \end{pmatrix} & 2b(bB_p\Lambda B_p'-Y-Y') \\ 2Y & 0 \\ Z_k+Z_l & 0 \\ 2C_qY+D_{qk}Z_l+D_{ql}Z_k & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ -2\mathscr{Q}^{-1} & * & * \\ 0 & -2\mathscr{R}^{-1} & * \\ 0 & 0 & -2\Lambda \end{bmatrix} < 0, \tag{5.22}$$

$$k=1,\ldots,\mathscr{N}-1, l=k+1,\ldots,\mathscr{N},$$

$$\begin{bmatrix} \mu & * \\ x(0) & Y'+Y-\mathscr{W} \end{bmatrix} > 0. \tag{5.23}$$

Então, a lei de controle $u(t)=-\left(\sum_{i=1}^{\mathscr{N}}\varsigma_i(t)K_i\right)x(t)$, *com* $K_i=-Z_iY^{-1}$ *e* $\mathscr{N}=2$, *assegura a estabilidade robusta do sistema de malha fechada.*

*(**b**)* ***Estabilidade Robusta.*** *Considere uma planta estabilizável e matrizes* $\{\mathscr{Q}, \mathscr{R}\}$ *simétricas definidas positivas. As condições declaradas no item* ***(a)*** *asseguram a estabilidade assintótica robusta do sistema em malha fechada.*

Prova: A prova será omitida, visto que o procedimento adotado para provar (5.21) e (5.22) é análogo ao Teorema 5.1. ■

5.2 EXEMPLO

Nesta seção é retomada a aplicação prática apresentada no Capítulo 4. No exemplo, o pacote computacional LMIlab e a interface YALMIP (LöFBERG, 2004), em ambiente Matlab, foram usados para o cômputo da solução do problema de otimização.

5.2.1 Suspensão ativa Quanser®

Considere o suspensão ativa da Figura 4.1 e os respectivos modelos de variáveis de estados: (a) equação (4.52), representada pelos vértices $\{1,3\}$ e $\{2,4\}$ e; (b) equação (4.28), representado por (4.53) sujeito a teoria de falhas. Nesta seção considerou-se as matrizes de ponderação sugeridas pelo fabricante i.e., $\mathscr{Q} = \text{diag}(450\ 30\ 5\ 0{,}01)$ e $\mathscr{R} = 0{,}01$. Além disso, conforme discutido na Subseção 4.2.1, o vetor de condição inicial é nulo. Por fim, o parâmetro de relaxação é $b = 10^{-3}$.

Neste experimento, a perda de potência no atuador é variante ao longo do tempo e a massa de carga útil removível (M_s) é considerada constante, no Teorema 5.1, e incerta, no Teorema 5.2. Note que a suspensão ativa não possui sensores aptos a medir a variação da força $F_c(t)$, tampouco apresenta dispositivos capazes de alterar a condição de desempenho do atuador. Logo, uma situação de parâmetro variante no tempo é criada em ambiente Matlab/Simulink através de um bloco *function*. Neste ambiente o sinal de controle é assumido ser uma função senoidal com ponto de *bias* em 85% de $F_c(t)$ (N), cujo intervalo de variação é $[70,100]\%$.

As Figuras 5.1 e 5.2 ilustram testes práticos da variação paramétrica dada por $\varsigma(t) = 0{,}5 + 0{,}5sen(2\pi ft + \pi/2)$ e frequência de $f = \frac{1}{18}$ Hz, cujos valores de $K(\varsigma(t))$ ao longo do tempo são calculados por:

(**a**) Na condição de $\alpha = 0$ e $M_s = 2{,}45$ Kg,

$$K(\varsigma(t)) = \varsigma_1(t)[189{,}6475\ 81{,}5654\ 92{,}4706\ 6{,}9028] + (1-\varsigma_1(t))[155{,}5598\ 66{,}8350\ 76{,}0025\ 5{,}6649]. \quad (5.24)$$

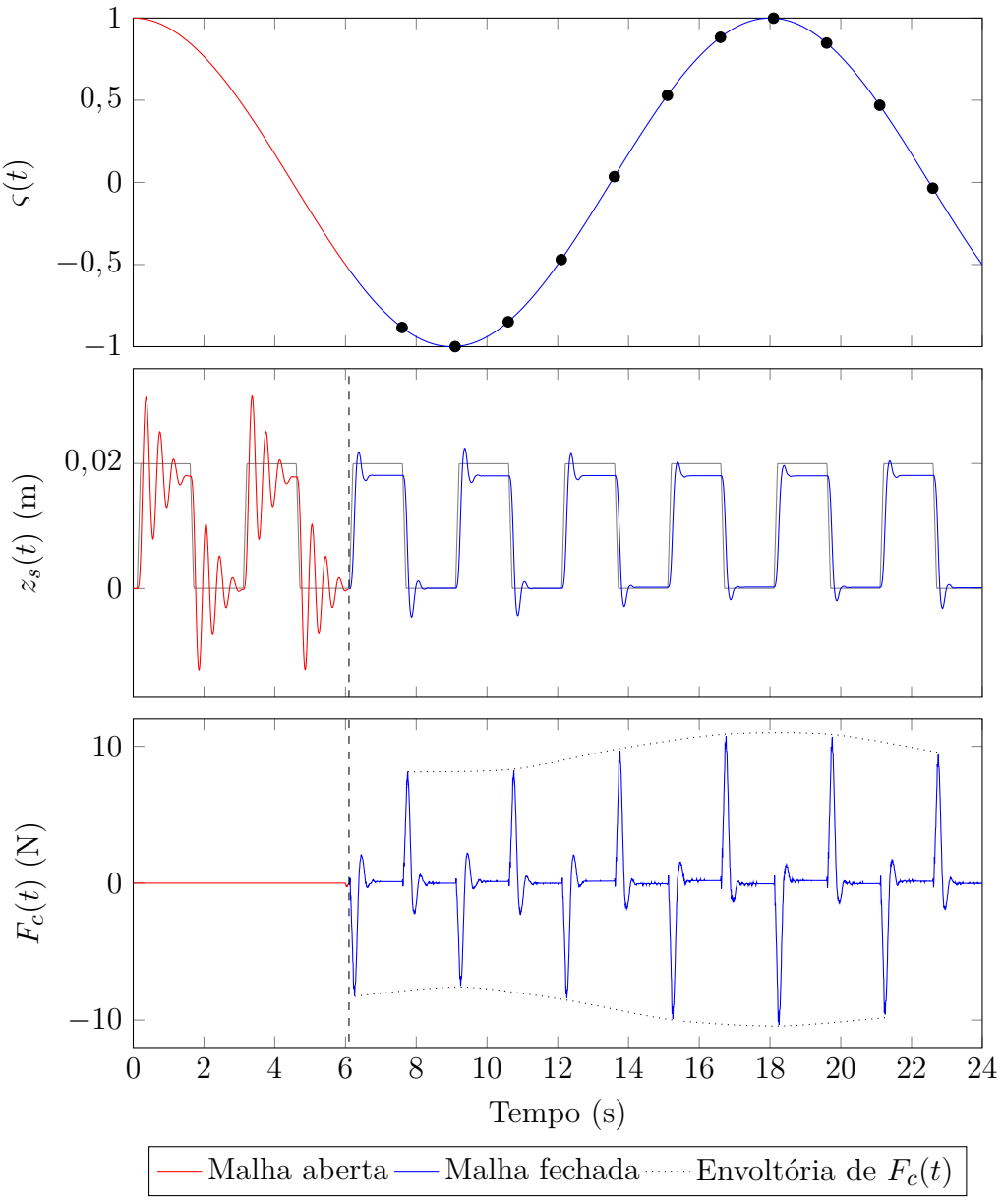
(**b**) Na condição de $\alpha = 0$ e $M_s = 1{,}455$ Kg,

$$K(\varsigma(t)) = \varsigma_1(t)[272{,}3891\ 80{,}1279\ 136{,}8925\ 10{,}1603] + (1-\varsigma_1(t))[224{,}6188\ 65{,}6247\ 114{,}6633\ 8{,}3609]. \quad (5.25)$$

Note que, em ambas as figuras, existe uma característica de modulação do sinal de controle devido a variação temporal $\varsigma(t)$ no ganho do canal de saída do sinal $u(t)$. Este

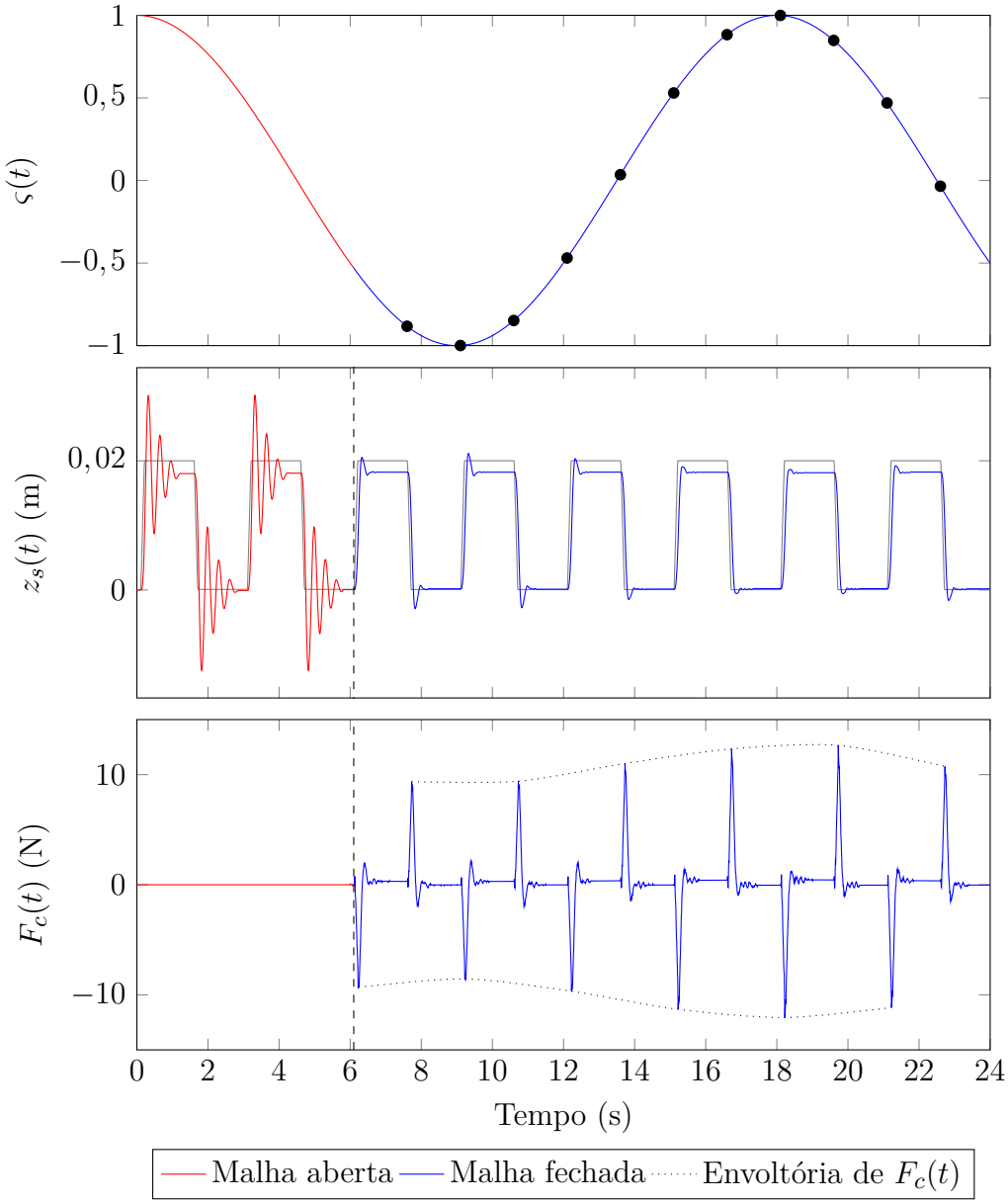
efeito é visualizado no deslocamento de $z_s(t)$ através das variações do transitório, tal que níveis baixos de $\varsigma(t)$ (i.e., no intervalo de 6s à 12s) implicam em uma depreciação do desempenho do controlador. Outra particularidade refere-se ao projeto baseado na condição mais leve de M_s, que inferiu um melhor desempenho em relação a situação de massa total (com a carga útil removível). Este fato se justifica devido a menor oscilação da suspensão ativa (na ausência da carga útil) e a maior intensidade de sinal de controle. Por fim, as marcações no sinal $\varsigma(t)$ referem-se aos valores instantâneos que atuam na força $F_c(t)$ durante a mudança de amplitude da referência $z_r(t)$.

Figura 5.1 - Aplicação prática do controlador projetado via Teorema 5.1 na condição de $\alpha = 0$ e $M_s = 2,45$kg.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

Figura 5.2 - Aplicação prática do controlador projetado via Teorema 5.1 na condição de $\alpha = 0$ e $M_s = 1,455$kg.

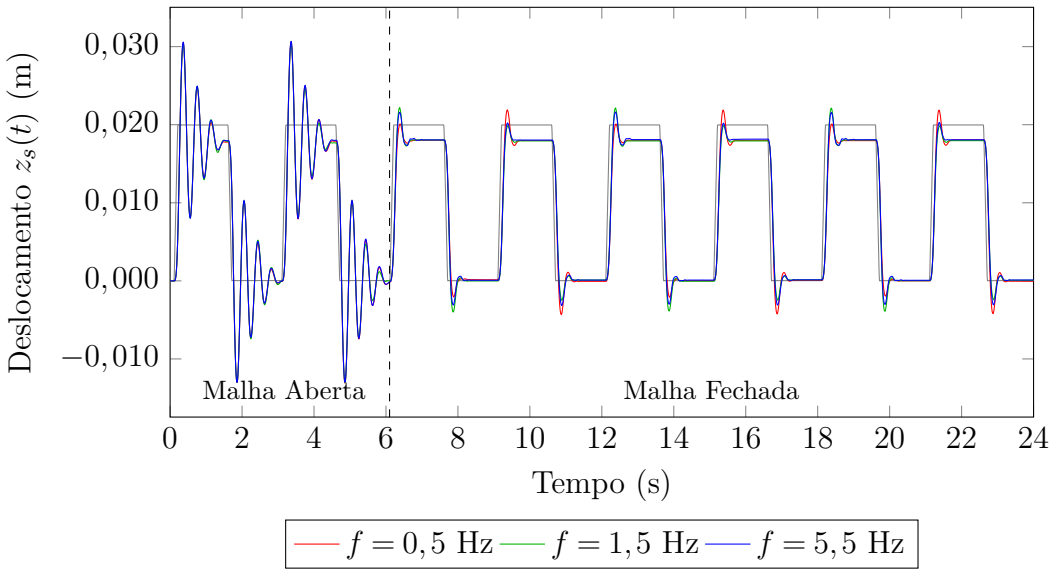


Fonte: Dados de pesquisa do autor.

Um efeito desejável em projetos *gain scheduling* é garantir o desempenho do sistema de controle na presença de variações da frequência em $\varsigma(t)$. Para tanto, a Figura 5.3 ilustra o sinal $z_s(t)$ para três casos. É notório, nesta implementação, que o controle atua de forma efetiva, destacando diferentes pontos de operação de $\varsigma(t)$, conforme a frequência. Além destes testes, procedeu-se as implementações de $f = 15,5$Hz e $f = 50,5$Hz. Em vista disso, observou-se que apesar do transitório de $z_s(t)$ não apresentar os efeitos da modulação, sua presença pode ser constatada na força $F_c(t)$ ao custo da adição de ruídos no sinal do atuador. Esta dessensibilização no deslocamento é natural uma vez que a suspensão

ativa apresenta uma operação segura de resposta em frequência limitada a 12Hz, conforme discutido no Caso 5 da Subseção 4.2.1.

Figura 5.3 - Análise da influência da frequência via Teorema 5.1 na condição de $\alpha = 0$ e $M_s = 2,45$kg.



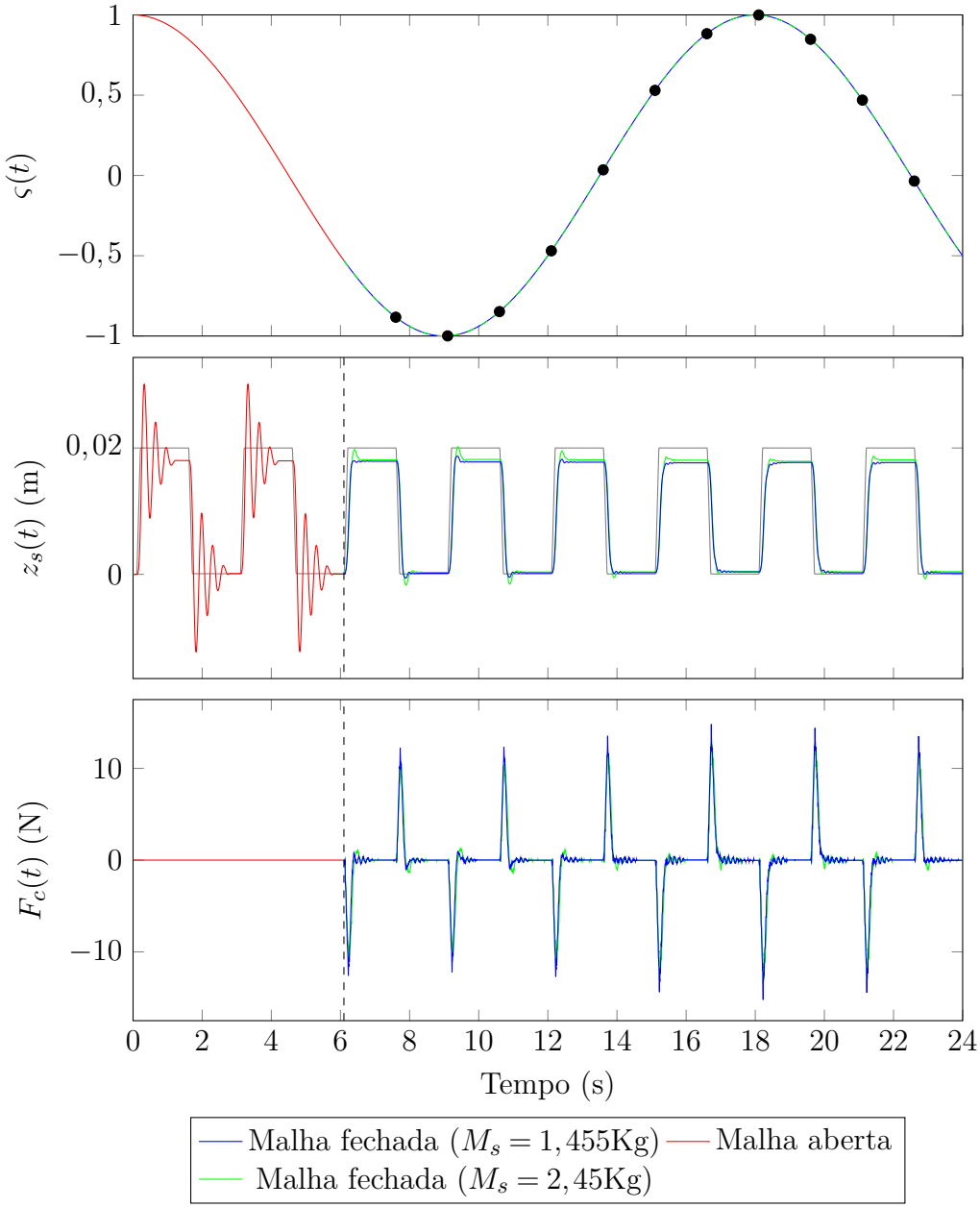
Fonte: Dados de pesquisa do autor.

Por outro lado, a Figura 5.4 mostra os resultados do controlador LQR *gain scheduling* robusto. O parâmetro variante no tempo $\varsigma(t)$ é a função senoidal discutida nas Figuras 5.1 e 5.2, sendo a massa M_s um parâmetro incerto da planta. Note, neste caso, que os valores de $K(\varsigma(t))$ ao longo do tempo assume uma única estrutura (independente de M_s) dada por:

$$K(\varsigma(t)) = \varsigma_1(t)[92,9123\ 111,2714\ -12,4394\ 10,8068] + (1-\varsigma_1(t))[84,5028\ 102,1569\ -10,3901\ 9,9337], \quad (5.26)$$

em que α é assumido nulo. A princípio é perceptível duas vantagens nesta técnica, ou seja: (a) a norma do controlador é 31,9% e 51,3% menor (em média) em relação ao Teorema 5.1 nas condições de $M_s = 2,45$Kg e $M_s = 1,455$Kg, respectivamente e, (b) o desempenho transitório tornou-se extremamente eficiente por efeito da redução do ganho relacionado ao estado $x_1(t)$, conforme discutido no Caso 3 da Subseção 4.2.1. No mais, a suspensão ativa sob influência de M_s maior apresenta, naturalmente, uma resposta mais oscilatória.

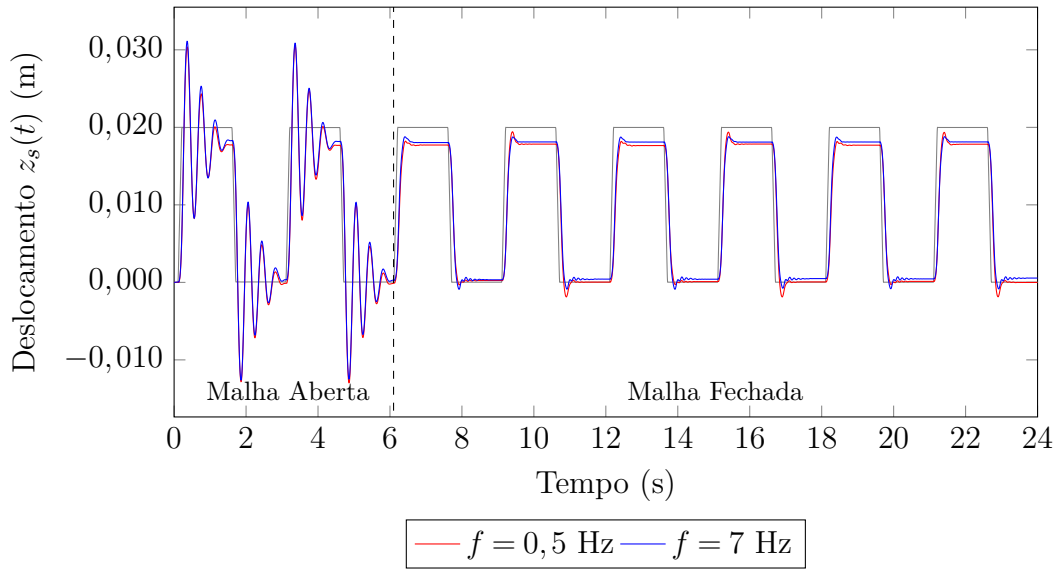
Figura 5.4 - Aplicação prática do controlador projetado via Teorema 5.2 na condição de $\alpha = 0$.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

E, finalmente, a Figura 5.5 ilustra o comportamento do sinal $z_s(t)$ da suspensão ativa sob diferentes frequências atuantes no parâmetro $\varsigma(t)$. Observe que há a preservação do efeito modulante da falha estrutural, em que o controlador $K(\varsigma)$ exibe um desempenho eficiente sem saturar o atuador.

Figura 5.5 - Análise da influência da frequência via Teorema 5.2 na condição de $\alpha = 0$ e $M_s = 2,45$kg.



Fonte: Dados de pesquisa do autor.

5.3 COMENTÁRIOS FINAIS

O principal resultado deste capítulo foi obter um controlador LQR *gain scheduling* com restrição da taxa de decaimento. O projeto considerou as formulações via Lema de Finsler, discutidas no Capítulo 3. Estas condições fornecem LMIs relaxadas que permitem obter leis de controle sem a inversão de uma matriz literal. Uma limitação da estrutura proposta é o uso da estabilidade quadrática, que induz algum conservadorismo. A taxa de decaimento é uma especificação de projeto opcional, que permite atribuir um tempo de estabelecimento de forma simples, sem aumento do custo computacional. Uma extensão de projeto a controladores *gain scheduling* robustos é proposta via incerteza limitada por norma. A aplicação prática no sistema de suspensão ativa, agregou um entedimento prático de ação do parâmetro variante no tempo e do cálculo da matriz $K(\varsigma(t))$. O sistema em malha fechada projetado via Teorema 5.1 e 5.2 se mostrou eficaz frente as variações da frequência de $\varsigma(t)$. Por fim, avalia-se que o LQR *gain scheduling* robusto é a proposta mais vantajosa em termos de desempenho transitório e simplicidade de implementação, visto que a estrutura de controle é aplicável a diferentes condições de massa M_s.

Capítulo 6

CONCLUSÃO

Este trabalho apresenta estudos do controle LQR baseado no custo quadrático irrestrito usando formulações por LMIs. De início, as estratégias propostas permitem obter ganhos de realimentação de estados inferindo uma taxa de decaimento na formulação original, avaliando os prós e contras em termos do custo computacional para diferentes modelos de incerteza. O conservadorismo da função de Lyapunov quadrática é superado através de formulações relaxadas via Lemas de Finsler e da Projeção Recíproca, que permitem alcançar factibilidade aumentada e, por consequência, a expansão dos níveis aplicáveis de taxa de decaimento. O objetivo resume-se a obter um controlador invariante no tempo e menos conservador na presença de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. Em contrapartida, os métodos propostos exigem um maior esforço computacional, que pode ser crescente de forma linear ou exponencial, conforme a abordagem de incerteza escolhida.

Os modelos foram escolhidos com base em sistemas reais descritos por equações de variáveis de estado a tempo contínuo. Optou-se, prioritariamente, por ensaios práticos através de protótipos disponíveis no Laboratório de Pesquisa em Controle. Em especial, a implementação de falhas estruturais em atuadores, no sistema de suspensão ativa, permitiu o estudo prático deste parâmetro variante no tempo em projetos de controle LQR *gain scheduling*. Por consequência, a metodologia é extendida ao caso da coexistência de incertezas paramétricas variantes e invariantes no tempo, motivando a enunciação do controle LQR *gain scheduling* robusto, cujas matrizes de estados e controle são descritas por modelos de incerteza limitada por norma. A vantagem está no projeto do controlador que não depende da inversão de uma matriz de Lyapunov literal, além de reduzir o conservadorismo da estabilidade quadrática pelo uso do Lema de Finsler.

Além disso, é proposto o estudo da influência de distúrbios na planta, originando uma proposta de controle $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ do problema LQR. Nesse caso, pode-se garantir um

compromisso entre o valor do critério quadrático de otimização (norma $\mathscr{H}_2$) e o nível de rejeição da perturbação (norma $\mathscr{H}_\infty$). Em uma abordagem inovadora, propõem-se a representação por espaço de estados de modelos combinados de incertezas e, consequentemente, formulações originais são obtidas para duas estratégias. Todavia, até este ponto, as restrições LMIs são baseadas em parâmetros incertos que atuam na planta. Este fato motivou a aplicação do critério de robustez à controladores e, portanto, foi possível garantir um nível de resiliência na presença de variações limitadas por norma na matriz de realimentação de estados.

6.1 PERSPECTIVAS FUTURAS

- Considerar o uso de uma função de erro no índice de desempenho $\mathscr{J}_\infty$ em problemas de rastreamento ótimo de trajetórias de referências.
- Estender as metodologias de controle LMI do problema LQR discutidas para o caso da realimentação derivativa dos estados e à sistemas lineares a tempo discreto.
- Em termos de sistemas contínuos variantes no tempo, de modo geral, poderia-se incorporar taxas de variações limitadas nos parâmetros.
- Reduzir o conservadorismo da formulação $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ do problema LQR introduzindo estratégias de controle *gain scheduling*.
- Reduzir o conservadorismo das propostas apresentadas no Capítulo 5 pelo uso de funções de Lyapunov dependente de parâmetros.
- Obter formulações do controle LQR *gain scheduling* robusto para sistemas lineares politópicos.

6.2 PUBLICAÇÕES

- Publicações diretamente relacionadas com o conteúdo da tese.
  (a) *Artigos completos publicados em periódicos:*
    1. CAUN, R. P.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CAUN, A. P. LQR-LMI Control Aplied to Convex-bounded Domains. *Cogent Engineering*, v. 5, 27 p. 2018.
  (b) *Trabalhos completos publicados em anais de congressos:*

1. CAUN, R. P.; ASSUNÇÃO, E.; LLINS, L. I. H.; TEIXEIRA, M. C. M. Controlador LQR via Aproximação LMI com Restrição de Taxa de Decaimento Aplicado ao Helicóptero 3-DOF de Bancada. In: XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2015, Natal/RN. XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - SBAI 2015, 2015. v. 1. p. 49-54.
2. CAUN, R. P.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CAUN, A. P. Projeto de Controladores LQR-LMI com Restrição de Taxa de Decaimento e Estabilidade Estendida. In: XXI Congresso Brasileiro de Automática, 2016, Vitória/ES. Anais do XXI Congresso Brasileiro de Automática, 2016. p. 72-79.
3. CAUN, R. P.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CAUN, A. P. Relaxação de Controladores Robustos LQR-LMI Sujeito a Restrição de Taxa de Decaimento via Lema da Projeção Recíproca. In: 12th IEEE/IAS Internacional Conference on Industry Applications - INDUSCON 2016, 2016, Curitiba/PR. Anais do 12th IEEE/IAS Internacional Conference on Industry Applications - INDUSCON 2016, 2016. p. 1-7.

- Publicações indiretamente relacionadas ao conteúdo da tese:

  (a) *Trabalhos completos publicados em anais de congressos:*

  1. BETETO, M. A. L.; SILVA, E. R. P.; BUZACHERO, L. F. S.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CAUN, R. P. Síntese de Controlador LQR-Derivativo Robusto via LMI: Sintonia Através de Algoritmo Genético. In: XXI Congresso Brasileiro de Automática - CBA 2016, 2016, Vitória/ES. Anais do XXI Congresso Brasileiro de Automática, 2016. v. 1. p. 1416-1421.
  2. BETETO, M. A. L.; SILVA, E. R. P.; BUZACHERO, L. F. S.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CAUN, R. P. Síntese de Controlador LQR-Derivativo Robusto via LMI com Restrição na Taxa de Decaimento : Sintonia Através de Algoritmo Genético. In: 12th IEEE/IAS Internacional Conference on Industry Applications - INDUSCON 2016, 2016, Curitiba/PR. Anais do 12th IEEE/IAS Internacional Conference on Industry Applications - INDUSCON 2016, 2016. p. 1-8.
  3. BETETO, M. A. L.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; SILVA, E. R. P.; BUZACHERO, L. F. S.; CAUN, R. P. Design of Robust LQR-derivative Controllers for the $\mathscr{D}$-stabilization of Linear Systems. In: XXII Congresso Brasileiro de Automática, 2018, João Pessoa/PB. Anais do XXII Congresso Brasileiro de Automática, 2018. p. 1-6.

4. ALVES, U. N. L. T.; OLIVEIRA, D. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; CAUN, R. P. Projeto de Controlador com Estrutura Variável para Minimização de Custo Quadrático Utilizando a Função Mínimo. In: XXII Congresso Brasileiro de Automática, 2018, João Pessoa/PB. Anais do XXII Congresso Brasileiro de Automática, 2018. p. 1-8.
5. BETETO, M. A. L.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; SILVA, E. R. P.; BUZACHERO, L. F. S.; CAUN, R. P. New Design of Robust LQR-State Derivative Controllers via LMIs. In: 9th IFAC Symposium on Robust Control Design and 2nd IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems, 2018, Florianópolis/SC. 9th IFAC Symposium on Robust Control Design and 2nd IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems, 2018. v. 1. p. 612-617.

REFERÊNCIAS

ADELI, M.; ZARABADIPOUR, H.; SHOOREHDELI, M. A. Crane control via parallel distributed fuzzy LQR controller using genetic fuzzy rule selection. In: THE INTERNATIONAL 2nd CONFERENCE ON CONTROL, INSTRUMENTATION AND AUTOMATION, 2, 2011, Shiraz. *Proceedings of the* [...] Shiraz: IEEE, 2011. p. 390 – 395.

AGRAWAL, A. K.; YANG, J. N.; SCHMITENDORF, W. E.; JABBARI, F. Stability of actively controlled structures with actuator saturation. *Journal of Structural Engineering*, Reston, v. 123, p. 505 – 512, Apr. 1997.

ALI, H. Mixed LQR/H-infinity controller design for uncertain multivariable systems. *Emirates Journal for Engineering Research*, Al Ain, v. 20, p. 101 – 107, Oct. 2015.

AKTAS, A.; SEVER, M.; YAZICI, H. Gain scheduling LQR control of linear parameter varying overhead crane. In: NATIONAL CONFERENCE ON ELECTRICAL, ELECTRONICS AND BIOMEDICAL ENGINEERING, 2016, Turquia. *Proceedings of the* [...]. Turquia: IEEE, 2016. p. 232 – 236.

ALCALA, E.; PUIG, V.; QUEVEDO, J.; ESCOBET, T. Gain scheduling LPV control scheme for autonomous guidance problem using a dynamic modelling approach. *IET Research Journals*, p. 1 – 10, Dec. 2017. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/321487914_Gain_Scheduling_LPV_Control_Scheme_for_the_Autonomous_Guidance_Problem_using_a_Dynamic_Modelling_Approach. Acesso em: 29 out. 2019.

ALCALA, E.; PUIG V.; QUEVEDO, J.; ESCOBET, T.; COMASOLIVAS, R. Autonomous vehicle control using a kinematic Lyapunov-based technique with LQR-LMI tuning. *Control Engineering Practice*, Oxford, v. 73, p. 1 – 12, 2018.

ALI, H. I. $\mathscr{H}_2$-optimal control synthesis using state derivative feedback. *Al-Nahrain Journal for Engineering Sciences*, Baghdad, v. 20, n. 5, p. 1057 – 1063, 2017.

ALI, H. I.; ALI, M. Z. M. LQR and $\mathscr{H}_2$ controllers design using state derivative feedback for multivariable systems. *American Scientific Research Journal for Engineering, Technology, and Sciences*, Raipur, v. 37, n. 1, p. 118 – 128, Oct. 2017.

ALMEIDA, J.; MENDONCA, T.; ROCHA, P.; RODRIGUES, L. Controller design for

neuromuscular blockade level tracking based on optimal control. *Control Engineering Practice*, Oxford, v. 59, p. 151 – 158, 2017.

AMRITHA, A.; PAI, A. D. A comparative study of controllers used for interleaved double dual boost converter. *In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL, COMMUNICATION & COMPUTING*, 2015, Trivandrum. *Proceedings of the* [...]. Trivandrum: IEEE, 2015. p. 101 – 106.

APKARIAN, P.; TUAN, H. D.; BERNUSSOU, J. Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and $\mathscr{H}_2$ synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterizations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 46, p. 1941 – 1946, Dec. 2001.

ASCHEMANN, H.; KERSTEN, J. Active damping and drive train control for a wind turbine with a hydrostatic transmission and a PMSG. *IFAC-PapersOnLine*, v. 50, n. 1, p. 9920 – 9925, 2017.

ASSADIAN, F. Static output feedback: An approach to compare optimal partial state linear controllers. *IFAC Intelligent Components and Instruments for Control Applications*, v. 33, p. 149 – 154, Sep. 2000.

AZIZI, S.; TORRES; B, L. A.; PALHARES, R. M. Regional robust stabilisation and domain-of-attraction estimation for MIMO uncertain nonlinear systems with input saturation. *International Journal of Control*, Abingdon, v. 91, n. 1, p. 215 – 229, 2018.

BALANDAT, M.; ZHANG, W.; ABATE, A. On infinite horizon switched LQR problems with state and control constraints. *Systems & Control Letters*, Amsterdam, v. 61, n. 4, p. 464 – 47, 2012.

BARBOSA, K. A. *Técnicas LMI para sistemas com restrições algébricas no estado.* 1999. 70 f. Dissertação (Mestrado em Controle, Automação e Informática Industrial) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1999.

BEID, S.; DOUBABI, S. DSP-based implementation of fuzzy output tracking control for a boost converter. IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS, Piscataway, v. 61, n. 1, p. 196 – 209, Jan. 2014.

BENNETT, S. A brief history of automatic control. *IEEE Control Systems*, Piscataway, v. 16, p. 17 – 25, Jun. 1996.

BETETO, M. A. L.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; SILVA, E. R. P.; BUZACHERO, L. F. S.; CAUN, R. P. New design of robust LQR-state derivative controllers via LMIs. In: IFAC SYMPOSIUM ON ROBUST CONTROL DESIGN AND, 9, IFAC WORKSHOP ON LINEAR PARAMETER VARYING SYSTEMS, 2, 2018, Florianópolis. *Proceedings of the* [...]. Florianópolis: [s.n.], 2018. v. 1, p. 612 – 617.

BHOPALE, P. S.; BAJARIA, P. K.; KAZI, F. S.; SINGH, N. M. LMI based depth control for autonomous underwater vehicle. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL, INSTRUMENTATION, COMMUNICATION AND COMPUTATIONAL TECHNOLOGIES, 2016, Kumaracoil. *Proceedings of the* [...]. Kumaracoil: IEEE, 2016. p. 477 – 481. 2016.

BOMBOIS, X. *Connecting prediction error identification and robust control analysis: a new framework*. Tese (Doutorado) — Universitè Catholique de Louvain, 2000. Doctoral dissertation.

BOYD, S.; CRUSIUS, C.; HANSSON, A. Control applications of nonlinear convex programming. *Journal of Process Control*, London, v. 8, n. 5, p. 313 – 324, Jun. 1998.

BOYD, S.; FERON, E.; GHAOUI, L.; BALAKRISHNAN, V. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. 193 p. Disponível em: http://web.stanford.edu/ boyd/lmibook/. Acesso em: 30 out. 2019.

BUZACHERO, L. F. S.; ASSUNÇÃO, E. ; TEIXEIRA, M. C. M.; SILVA, E. R. P. D. New techniques for optimizing the norm of robust controllers of polytopic uncertain linear systems. In: SERRA, G. L. (ed.). *Frontiers in advanced control systems*. [S.l.]: IntechOpen, 2012. cap. 4, p. 75 – 100.

CADALSO, M. R. R. *Projeto via LMI de controladores gain scheduling com restrição de $\mathscr{D}$-estabilidade*. 2016. 74 f. Dissertação (Mestrado em Automação) — Faculdade de Engenharia - Câmpus de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2016. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/151098/rodriguez_cadalso_mr_me_ilha.pdf?sequence=3&isAllowed=y. Acesso em: 30 out. 2019.

CAICEDO, M. A. R.; SENAME, O.; WITRANT, E.; CAILLOL, C.; HIGELIN, P. A parameter varying observer for the enclosed mass in a spark ignited engine. In: IFAC WORKSHOP ON ENGINE AND POWERTRAIN CONTROL, SIMULATION AND MODELING, 3, 2012, Rueil Malmaison. *Proceedings of the* [...]. Rueil Malmaison: IFAC, 2012. v. 45, p. 318 – 325, Oct. 2012.

CAPRON, B. D. O.; ODLOAK, D. A robust LQR-MPC control strategy with input constraints and control zones. *Journal of Process Control*, London, v. 64, p. 89 – 99, 2018.

CARNIATO, L. A.; CARNIATO, A. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; MAINARDI JR, E. I.; ASSUNÇÃO, E. Output control of continuous-time uncertain switched linear systems via switched static output feedback. *International Journal of Control*, London, v. 0, n. 0, p. 1 – 20, 2018.

CASTELAN, E. B.; TARBOURIECH, S.; SILVA, J. M. G. da; QUEINNEC, I. $\mathscr{L}_2$-stabilization of continuous-time linear systems with saturating actuators. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Oxford, v. 16, n. 18, p. 935 – 944, 2006.

CHAKRABORTY, S.; RAY-CHAUDHURI, S. Equivalence of optimal gain between $\mathscr{H}_2$ norm minimization and LQR control of a linear system. *Journal of Engineering Mechanic*, New York, v. 143, p. 1 – 3, Jun. 2017.

CHILALI, M.; GAHINET, P.; ; APKARIAN, P. Robust pole placement in LMI regions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 44, n. 12, p. 2257 – 2270, Dec. 1999.

CHILALI, M.; GAHINET, P. $\mathscr{H}_\infty$ design with pole placement constraints: An LMI

approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 41, p. 358 – 367, Mar. 1996.

CLAEYS, M.; DAAFOUZ, J.; HENRION, D. Modal occupation measures and LMI relaxations for nonlinear switched systems control. *Automatica*, Oxford, v. 64, p. 143 – 154, Jun. 2016.

DAAFOUZ, J.; BERNUSSOU, J. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems & Control Letters*, Amsterdam, v. 43, n. 5, p. 355 – 359, 2001.

DALLALI, H.; LEE, J.; TSAGARAKIS, N. G.; CALDWELL, D. G. Experimental study on linear state feedback control of humanoid robots with flexible joints. *IFAC-PapersOnLine*, v. 48, n. 19, p. 130 – 135, 2015.

DALLALI, H.; MEDRANO-CERDA, G.; KASHIRI, N.; TSAGARAKIS, N.; CALDWELL, D. Decentralized feedback design for a compliant robot arm. In: EUROPEAN MODELLING SYMPOSIUM, 8, 2014, Pisa. *Proceedings of the* [...]. Pisa: [s.n.], 2014. p. 269 – 274.

DAS, S.; PAN, I.; DAS, S. Multi-objective LQR with optimum weight selection to design FOPID controllers for delayed fractional order processes. *ISA Transactions*, New York, v. 58, p. 35 – 49, 2015.

DONGMEI, Z.; XINGANG, W.; LI, M. Consensus for multi-agent dynamic systems: An LQR perspective. In: PROCEEDINGS OF THE CHINESE CONTROL CONFERENCE, 31, 2012, Hefei. *Proceedings of the* [...]. Hefei: [s.n.], 2012. p. 6261 – 6266.

DU, H.; LAM, J.; SZE, K. Y. Non-fragile output feedback $\mathscr{H}_\infty$ vehicle suspension control using genetic algorithm. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Oxford, v. 16, p. 667 – 680, 2003.

DU, H.; LAM, J.; SZE, K. Y. Design of non-fragile $\mathscr{H}_\infty$ controller for active vehicle suspensions. *Journal of Vibration and Control*, London, v. 11, p. 225 – 243, 2005.

EVREN, S.; UNEL, M. Stabilization of a pan-tilt system using a polytopic quasi-LPV model and LQR control. In: ANNUAL CONFERENCE OF THE IEEE INDUSTRIAL ELECTRONICS SOCIETY, 42, 2016, Forence. *Proceedings of the* [...]. Forence: IEEE, 2016. p. 636 – 641.

FAIRUS, M. A.; MOHAMED, Z.; AHMAD, M. N.; LOI, W. S. LMI-based multiobjective integral sliding mode control for rotary inverted pendulum system under load variations. *Jurnal Teknologi*, Johor Darul Takzim, v. 73, n. 6, p. 125 – 137, 2015.

FARD, M.; ALDEEN, M. Linear quadratic regulator design for a hybrid photovoltaic-battery system. In: AUSTRALIAN CONTROL CONFERENCE, 2016, Newcastle. *Proceedings of the* [...]. Newcastle: IEEE, 2016. p. 347 – 352

FARD, M.; ALDEEN, M. Robust control design for a boost converter in a photovoltaic system. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON POWER ELECTRONICS FOR DISTRIBUTED, GENETRATION SYSTEMS, 7, 2016, Vancouver. *Proceedings of*

the [...]. Vancouver: IEEE, 2016. p. 1 – 9..

FENG, T.; ZHANG, H.; LUO, Y.; LIAN, H. Consensus rate regulation for general linear multi-agent systems under directed topology. *Applied Mathematics and Computation*, Philadelphia, v. 271, p. 845 – 859, 2015.

FISHER, J.; BHATTACHARYA, R. Linear quadratic regulation of systems with stochastic parameter uncertainties. *Automatica*, Oxford, v. 45, n. 12, p. 2831 – 2841, 2009.

GAJDÁR, T.; SUDA, Y.; SZABÓ, Z.; KORONDI, P. Gain scheduling robust $\mathscr{H}_\infty$ controllers for intelligent railway vehicle systems. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 30, n. 16, p. 273 – 278, 1997.

GE, M.; CHIU, M.; WANG, O. Robust PID controller design via LMI approach. *Journal of Process Control*, London, v. 12, n. 1, p. 3 – 13, 2002.

GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H. Analysis and synthesis of robust control systems using linear parameter dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 51, p. 1984 – 1989, 2006.

GONÇALVES, E. N.; PALHARES, R. M.; TAKAHASHI, R. H. C. A novel approach for $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ robust PID synthesis for uncertain systems. *Journal of Process Control*, London, v. 18, n. 1, p. 19 – 26, 2008.

GRITLI, H.; BELGHITH, S. Robust feedback control of the underactuated inertia wheel inverted pendulum under parametric uncertainties and subject to external disturbances: LMI formulation. *Journal of the Franklin Institute*, Oxford, p. 1 – 42, 2017. Special Issue on 2010-2012 Advances in Variable Structure Systems and Sliding Mode Algorithms.

GUO, Z.; XU, J.; LEE, T. H. Design and implementation of a new sliding mode controller on an underactuated wheeled inverted pendulum. *Journal of the Franklin Institute*, Oxford, v. 351, n. 4, p. 2261 – 2282, 2014. Special Issue on 2010-2012 Advances in Variable Structure Systems and Sliding Mode Algorithms.

GUPTA, R.; BANDYOPADHYAY, B.; KULKARNI, A. M. Design of power system stabiliser for single-machine system using robust periodic output feedback controller. *IEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution*, Stevenage, v. 150, p. 211 – 216, Mar. 2003.

HALL, A. C. *The analysis and synthesis of linear servomechanisms*. Cambridge, MA: The Technology Press, 1943.

HAN, S. E.; UNEL, M. Stabilization of pan-tilt systems using acceleration based LMI-LQR controller. In: ASIAN CONTROL CONFERENCE,11, 2017, Gold Coast. *Proceedings of the* [...]. Gold Coast: [s.n.], 2017. p. 2552 – 2557.

HMIDI, R.; BRAHIM, A. B.; HMIDA, F. B.; SELLAMI, A. Robust fault tolerant control for lipschitz nonlinear systems with simultaneous actuator and sensor faults. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ADVANCED SYSTEMS AND ELECTRIC TECHNOLOGIES - ICASET, 2018, Hammamet. *Proceedings of the* [...]. Hammamet:

IEEE, 2018. p. 277 – 283.

HONG, B.; YANG, V.; RAY, A. Robust feedback control of combustion instability with modeling uncertainty. *Combustion and Flame*, New York, v. 120, n. 1, p. 91 – 106, 2000.

HROVAT, D. Survey of advanced suspension developments and related optimal control applications. *Automatica*, Oxford, v. 33, n. 10, p. 1781 – 1817, 1997.

HUANG, H.; LI, D.; XI, Y. The improved robust model predictive control with mixed $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ control approach. *Acta Automatica Sinica*, Beijing, v. 38, n. 6, p. 944 – 949, Jun. 2012.

HUANG, Y.; SUN, C.; WANG, L.; XIA, J. Mixed LQR/$\mathscr{H}_\infty$ non-fragile control with regional pole placement for flight kinematics system. In: CHINESE CONTROL AND DECISION CONFERENCE, 2011, Mianyang. *Proceedings of the* [...]. Mianyang: IEEE, 2011. p. 1410 – 1414.

HUANG, Y.; SUN, C.; XUE, L.; YANG, W. Multi-objective switching tracking control for a flexible air-breathing hypersonic vehicle. In: PROCEEDINGS OF THE CHINESE CONTROL CONFERENCE, , 32, 2013, XiâĂŹan. *Proceedings of the* [...]. Xi'an: IEEE, 2013. p. 5414 – 5419.

HWANG, C.; HUANG, K.; LIN, K.; LEE, B. Observer base linear quadratic regulation with estimated state feedback control. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON MACHINE LEARNING AND CYBERNETICS,2010, Qingdao. *Proceedings of the* [...]. Qingdao: IEEE, 2010. p. 2802 – 2805

ISHIMARU, M.; YOKOYAMA, R.; SHIRAI, G.; NIIMURA, T. Robust thyristor-controlled series capacitor controller design based on linear matrix inequality for a multi-machine power system. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, London, v. 24, n. 8, p. 621 – 629, 2002.

IWASAKI, T.; SKELTON, R. E.; GEROMEL, J. C. Linear quadratic suboptimal control with static output feedback. *Systems & Control Letters*, Amsterdam, v. 23, n. 6, p. 421 – 430, 1994.

JIWEI, L.; DEWEI, L.; YUGENG, X.; JIANBO, L. Mixed $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ model predictive control for systems with energy-bounded disturbance. In: PROCEEDINGS OF THE CHINESE CONTROL CONFERENCE, , 32, 2013, XiâĂŹan. *Proceedings of the* [...]. Xi'an: IEEE, 2013. p. 4052 – 4056.

JOHNSON, E. A.; ERKUS, B. Structural control with dissipative damping devices. In: PROCEEDINGS OF THE AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2002, Anchorage. *Proceedings of the* [...]. Anchorage: IEEE, 2002. p. 2463 – 2468. May 2002.

JOHNSON, E. A.; ERKUS, B. Investigation of dissipativity for control of smart dampers via LMI synthesis. In: PROCEEDINGS OF THE AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2005, Portland. *Proceedings of the* [...]. Portland: IEEE, 2005. p. 3084 – 3089.

JOHNSON, E. A.; ERKUS, B. Dissipativity and performance analysis of smart dampers

via LMI synthesis. *Structural Control Health Monitoring*, Oxford, v. 14, n. 3, p. 471 – 496, 2007.

KALMAN, R. E. Contributions to the theory of optimal control. *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*, Basel, v. 5, p. 102 – 119, 1960.

KALMAN, R. E. On the general theory of control systems. In: PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL CONGRESS AUTOMATIC CONTROL, 1, 1960, Moscow. *Proceedings of the* [...]. Moscow: [s.n.], 1960. p. 481 – 491.

KANEV, S.; VERHAEGEN, M. Reconfigurable robust fault-tolerant control and state estimation. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 35, n. 1, p. 95 – 100, 2002.

KEEL, L. H.; BHATTACHARYYA, S. P. Robust, fragile, or optimal? *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 42, n. 8, p. 1098 – 1105, 1997.

KHAIRY, M.; ELSHAFEI, A. L.; EMARA, H. M. LMI based design of constrained fuzzy predictive control. *Fuzzy Sets and Systems*, Amsterdam, v. 161, n. 6, p. 893 – 918, 2010. Theme: "Fuzzy Control".

KHAN, M. M.; AWAN, A. U.; LIAQUAT, M. Improving vehicle handling and stability under uncertainties using probabilistic approach. *IFAC-PapersOnLine*, v. 48, n. 25, p. 42 – 247, 2015.

KO, H.; JATSKEVICH, J.; DUMONT, G.; YOON, G. An advanced LMI-based-LQR design for voltage control of grid-connected wind farm. *Electric Power Systems Research*, Amsterdam, v. 78, n. 4, p. 539 – 546, 2008.

KO, H. S.; DUMONT, G. A.; JATSKEVICH, J.; MOSHREF, A. A new LMI representation of LQR based voltage control of grid-connected wind farm. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2006, Minneapolis. *Proceedings of the* [...]. Minneapolis: [s.n.], 2006. p. 851 – 856.

KONDO, H.; OCHI, Y. Design of a model-following PID control system for an MAV. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 43, n. 15, p. 13 – 18, 2010.

KOROISHI, E. H.; LARA-MOLINA, F. A.; BORGES, A. S.; JR., V. S. Robust control in rotating machinery using linear matrix inequalities. *Journal of Vibration and Control*, London, v. 22, n. 17, p. 3767 – 3778, 2016.

KUNNEE, V.; BANJERDPONGCHAI, D. Robust constrained model predictive control for linear time-varying systems with norm-bounded uncertainty. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ELECTRICAL ENGINEENERING/ELECTRONICS, COMPUTER, TELECOMMUNICATIONS AND INFORMATION TECHNOLOGY, 2008, Krabi. *Proceedings of the* [...]. Krabi: IEEE, 2008. p. 589 – 592.

LEE, J.; KHARGONEKAR, P. P. Constrained infinite-horizon linear quadratic regulation of discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 52, p. 1951 – 1958, Oct. 2007.

LEE, J.; KWON, W. H.; CHO, H. S. Exponential stability and feasibility of receding

horizon control for constrained systems. *IFAC System Structure and Control*, Nantes, França, p. 317 – 322, 1998.

LEE, K. H. Suboptimal digital LQ output feedback control design via LMI relaxations. *Optimal Control Applications and Methods*, Oxford, v. 28, p. 451 – 465, 2007.

LEE, S. M.; PARK, J. H.; JI, D. H.; WON, S. C. Robust model predictive control for LPV systems using relaxation matrices. *IET Control Theory & Applications*, Stevenage, v. 1, p. 1567 – 15738, Nov. 2007.

LI, B.; JAIN, N.; ALLEYNE, A. G. LMI control design for nonlinear vapor compression cycle systems. *Dynamic Systems and Control Conference*, v. 2, p. 711 – 718, Oct. 2012. Disponível em: https://engineering.purdue.edu/JainResearchLab/pdf/lmi-control-design-nonlinear-vapor-compression-cycle.pdf. Acesso em: 30 out. 2019.

LIMON, D.; SILVA, J. M. G.; ALAMO, T.; CAMACHO, E. F. Improved MPC design based on saturating control laws. *European Journal of Control*, Amsterdam, v. 11, n. 2, p. 112 – 122, 2005.

LIU, Z.; THEILLIOL, D.; GU, F.; HE, Y.; YANG, L.; HAN, J. State feedback controller design for affine parameter-dependent LPV systems. *IFAC-PapersOnLine*, v. 50, n. 1, p. 9760 – 9765, Oct. 2017.

LöFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. *n: PROCEEDINGS IN IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION*,2004, New Orleans. *Proceedings of the* [...]. New Orleans: IEEE, 2004. 2004. p. 284 – 289.

MAHMOUD, M. S.; ALYAZIDI, N. M.; ABOUHEAF, M. I. Adaptive intelligent techniques for microgrid control systems: A survey. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, London, v. 90, p. 292 – 305, 2017.

MäKILä, P. M. Comments on 'robust, fragile, or optimal?'. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 43, n. 9, p. 1265 – 1267, 1998.

MARSH, C.; WEI, H. Robustness bounds for systems with parametric uncertainty. *Automatica*, Oxford, v. 32, n. 10, p. 1447 – 1453, 1996.

MAYER, S.; DEHNERT, R.; TIBKEN, B. Controller synthesis of multi dimensional, discrete LTI systems based on numerical solutions of linear matrix inequalities. In: AMERICAN CONTROL CONFERECE, 2013, Washington. *Proceedings of the* [...]. Washington: IEEE, 2013. p. 2386 – 2391.

MCKERNAN, J.; WHIDBORNE, J. F.; PAPADAKIS, G. Minimisation of transient pertubation growth in linearised lorenz equations. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 38, n. 1, p. 342 – 347, 2005.

MENHOUR, L.; CHARARA, A.; LECHNER, D. Switched LQR/$\mathscr{H}_\infty$ steering vehicle control to detect critical driving situations. *Control Engineering Practice*, Oxford, v. 24, p. 1 – 14, 2014.

MONTAGNER, V. F.; DUPONT, F. H. A robust LQR applied to a boost converter with response optimized using a genetic algorithm. *In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA*, 18, 2010, Bonito. *Anais* [...] Bonito: SBA, 2010. p. 2297 – 2302.

MONTAGNER, V. F.; LEITE, V. J. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F. de; PERES, P. L. D. Controle $\mathscr{H}_\infty$ por realimentação de estados linear variante com parâmetros: Uma abordagem LMI. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 15, 2010, Gramado. *Anais* [...]. Gramado: SBA, 2004. p. 1 – 6.

MONTAGNER, V. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; LEITE, V. J. S.; PERES, P. L. D. Gain scheduled state feedback control of discrete systems with time-varying uncertainties: an LMI approach. In: PROCEEDINGS OF THE IEEE CONFERENCE ON DECISION, 44, AND CONTROL EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, ECC, 2005, Seville. *Proceedings of the* [...]. Seville: IEEE, 2005. p. 4305 – 4310.

MONTAGNER, V. F.; PERES, P. L. D. State feedback gain scheduling for linear systems with time-varying parameters. In: PROCEEDINGS OF THE AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2004, Boston. *Proceedings of the* [...]. Boston: IEEE, 2004. p. 2004 – 2009. Boston, Massachusetts, p. 2004 – 2009, Jul. 2004.

NAKAJIMA, K.; KOBAYASHI, K.; YAMASHITA, Y. Linear quadratic regulator with decentralized event-triggering. In: ANNUAL CONFERRENCE OF THE IEEE INDUSTRIAL ELECTRONICS SOCIETY, 42, 2016, Florence. *Proceedings of the* [...]. Florence: IEEE, 2016. p. 5374 – 5379.

NAKAJIMA, K.; KOBAYASHI, K.; YAMASHITA, Y. Linear quadratic regulator with decentralized event-triggering. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics Communications and Computer Sciences*, E100-A, Tokyo, n. 2, p. 414 – 420, 2017.

NESTEROV, Y.; NEMIROVSKY, A. *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. Disponível em: https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9781611970791. Acesso em: 30 out. 2019.

NEWTON, G. C.; GOULD, L. A.; KAISER, J. F. *Analytical design of linear feedback controls*. London: Chapman and Hall, 1957. 418 p.

NIEL, F.; SEURET, A.; ZACCARIAN, L.; FAGLEY, C. Robust LQR control for stall flutter suppression: a polytopic approach. *IFAC-PapersOnLine*, v. 50, n. 1, p. 11367 – 11372, 2017.

NIKOLAKOPOULOS, G.; PANOUSOPOULOU, A.; TZES, A.; LYGEROS, J. Multi-hopping induced gain scheduling for wireless networked controlled systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 44, 2005, Seville. *Proceedings of the* [...]. Seville: IEEE, 2005. p. 470 – 475.

NIKOLAKOPOULOS, G.; PANOUSOPOULOU, A.; TZES, A.; LYGEROS, J. Multi-hopping induced gain scheduling for wireless networked controlled systems. *Asian Journal of Control*, Hoboken, v. 9, n. 4, p. 450 – 457, 2007.

OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1985. 930p.

OHTA, Y.; MORI, K.; YUKIMOTO, K.; MISHIO, R. On-line reference management for discrete-time servo systems under state and control constraints. In: ANNUAL CONFERENCE OF IEEE INDUSTRIAL ELECTRONICS SOCIETY, 31, 2005, [Piscataway]. *Proceedings of the* [...]. [Piscataway]: IEEE, 2005. p. 183 – 188.

OLALLA, C.; LEYVA, R.; AROUDI, A.; QUEINNEC, I. LMI control applied to non-minimum phase switched power converters. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON INDUSTRIAL ELETRONICS, 2008, Cambridge. *Proceedings of the* [...]. Cambridge: IEEE, 2008. p. 154 – 159.

OLALLA, C.; LEYVA, R.; AROUDI, A.; QUEINNEC, I. Robust LQR control for PWM converters: An LMI approach. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Piscataway, v. 56, p. 2548 – 2558, 2009.

OLIVEIRA, M. C. de. Novos testes de estabilidade para sistemas lineares. *Revista Controle & Automação*, Campinas, v. 15, n. 1, p. 17 – 23, 2004.

OLIVEIRA, M. C. de; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. In: MOHEIMANI, S. R. (ed.). *Perspectives in robust control*. London: Springer London, 2001. p. 241 – 257.

ORUKPE, P. E.; JAIMOUKHA, I. M. Robust model predictive control based on mixed $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ control approach. *Proceedings of the European Control Conference*, Budapest, Hungary, p. 2223 – 2228, Aug. 2009.

ORUKPE, P. E.; JAIMOUKHA, I. M.; EL-ZOBAIDI, H. M. H. Model predictive control based on mixed $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ control approach. In: IEEE AMERICAN CONTROL CONFERRENCE, 2007, New York. *Proceedings of the* [...]. New York: IEEE, 2007. p. 6147 – 6150.

PAKSHIN, P.; EMELIANOVA, J. An experience of using LMI technique in control education. *IFAC-PapersOnLine*, v. 49, n. 6, p. 115 – 120, 2016.

PAKSHIN, P.; PEAUCELLE, D. LQR parametrization of static output feedback gains for linear systems with Markovian switching and related robust stabilization and passification problems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 48, CHINESE CONTROL CONFERENCE, 28, 2009, Shanghai. *Proceedings of the* [...]. Shangai: IEEE, 2009. p. 1157 – 1162.

PANDEY, S. K.; MOHANTY, S. R.; KISHOR, N.; CATALÃO, J. P. S. *An Advanced LMI-based-LQR design for load frequency control of an autonomous hybrid generation system*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013. p. 371 - 381

PANDEY, S. K.; MOHANTY, S. R.; KISHOR, N.; CATALÃO, J. P. S. Frequency regulation in hybrid power systems using particle swarm optimization and linear matrix inequalities based robust controller design. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, London, v. 63, p. 887 – 900, 2014.

PETERSON, E.; KWATNY, H. G. Multi-model adaptive regulation for a family of systems containing different zero structures. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 47, n. 3, p. 389 – 394, 2014.

PIPELEERS, G.; DEMEULENAERE, B.; SWEVERS, J.; VANDENBERGHE, L. Extended LMI characterizations for stability and performance of linear systems. *Systems & Control Letters*, Amsterdam, v. 58, n. 7, p. 510 – 518, 2009.

POLYAK, B.; KHLEBNIKOV, M.; SHCHERBAKOV, P. An LMI approach to structured sparse feedback design in linear control systems. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 2013, Zurich. *Proceedings of the* [...]. Zurich: IEEE, 2013. p. 833 – 838.

POURSHAGHAGHI, H. R.; JAHED-MOTLAGH, M. R.; MONTAZER, A.; POSHTAN, J.; JALALI, A. A. Optimized multiobjective $\mathscr{H}_\infty$ control applied to inverted pendulum. In: ANNUAL CONFERENCE OF THE IEEE INDUSTRIAL ELECTRONICS SOCIETY,33, 2007,Taipei. *Proceedings of the* [...]. Taipei: IEEE, 2007. p. 938 – 943.

PRADHAN, J. K.; GHOSH, A. Multi-input and multi-output Proportional-Integral-Derivative controller design via linear quadratic regulator-linear matrix inequality approach. *IET Control Theory & Applications*, Stevenage, v. 9, p. 2140 – 2145, 2015.

PRIESS, M. C.; CONWAY, R.; CHOI, J.; POPOVICH, J. M.; RADCLIFFE, C. Solutions to the inverse LQR problem with application to biological systems analysis. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Piscataway, v. 23, p. 770 – 777, 2014.

QUANSER. *3-DOF Helicopter - Reference Manual*. [S.l.], 2002. Http://www.quanser.com/english/html/products/fs_product_echallenge.asp?lang_code=english&pcat_code=exp-spe&prod_code=S1-3dofheli&tmpl=1. Acesso em: 25 jun. 2018.

RAMOS, R. A.; ALBERTO, L. F. C.; BRETAS, N. G. A new LMI-based procedure for the design of robust damping controllers for power systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 43, 2004, Nassau. *Proceedings of the* [...]. Nassau: IEEE, 2004. p. 4467 – 4472.

REN, J.; YANG, Y. Fuzzy gain scheduling attitude control for Hydrofoil Catamaran. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2011, Boston. *Proceedings of the* [...] Boston: IEEE, 2004. p. 1103 – 1108.

RODRIGUES, C. R.; KUIAVA, R.; RAMOS, R. A. Design of a linear quadratic regulator for nonlinear systems modeled via norm-bounded linear differential inclusions. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 44, n. 1, p. 7352 – 7357, 2011.

SAFAEI, F. R. P.; HESPANHA, J. P.; PROULX, S. R. Infinite horizon linear quadratic gene regulation in fluctuating environments. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 51, 2012, Maui. *Proceedings of the* [...]. Maui: IEEE, 2012. p. 2298 – 2303.

SATOH, T.; SAITOH, N. Design of critical control systems using genetic algorithms and LMI-based regional pole assignment technique. In: IEEE CONFERENCE ON ROBOTICS, AUTOMATION AND MECHATRONICS, 2004, Singapore. *Proceedings of the* [...]. Singapore: IEEE, 2004. p. 1014 – 1019.

SCHILDBACH, G.; GOULART, P.; MORARI, M. Linear controller design for chance

constrained systems. *Automatica*, Oxford, v. 51, n. 1, p. 278 – 284, 2015.

SEVER, M.; SEDUR, H. S.; YAZICI, H.; ARSLAN, M. S. Electro hydraulic suspension system design wiht optimal state derivative feedback controller. *Journal of Science and Technology - Applied Sciences and Engineering*, West Bengal, v. 18, n. 04, p. 777 – 787, 2017.

SHAFAI, B.; GHADAMI, R. A two-step procedure for optimal constrained stabilization of linear continuous-time systems. In: MEDITERRANEAN CONFERENCE ON CONTROL AND AUTOMATION, 21, 2013, Chania. *Proceedings of the* [...]. Chanai: IEEE, 2013. p. 910 – 915.

DA SILVA, E. R. P.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; BUZACHERO, L. F. Parameter-dependent Lyapunov functions for state-derivative feedback control in polytopic linear systems. *International Journal of Control*, Abingdon, v. 84, n. 8, p. 1377 – 1386, 2011.

SINGH, A. P.; NIKOLAOU, M. Control of a process with unmeasured disturbances that change its steady-state gain sign. *Journal of Process Control*, London, v. 23, n. 3, p. 294 – 305, 2013.

SINGH, V. P.; KISHOR, N.; SAMUEL, P. Load frequency control with communication topology changes in smart grid. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, Piscataway, v. 12, n. 05, p. 1943 – 1952, Oct. 2016.

SIVANANDAKUMAR, D.; RAMAKRISHNAN, K. LMI based digital state feedback controller for a wound rotor induction drive with guaranteed closed loop stability. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON POWER ELECTRONIC, DRIVES AND ENERGY SYSTEMS, 2006, New Delhi. *Proceedings of the* [...]. New Delli: IEEE, 2006. p. 1 – 6

SOLIMAN, H. M.; DABROUM, A.; MAHMOUD, M. S.; SOLIMAN, M. Guaranteed-cost reliable control with regional pole placement of a power system. *Journal of the Franklin Institute*, Oxford, v. 348, n. 5, p. 884 – 898, 2011.

SOMAN, R. S.; GOPMANDAL, F.; GHOSH, A. MIMO PID compensation for dynamic positioning of a ship. In: INDIAN CONTROL CONFERENCE, 2018, Kanpur. *Proceedings of the* [...]. Kanpur: IEEE, 2018. p. 137 – 142.

SONG, X.; PARK, J. H. Linear quadratic regulation problem for discrete-time systems with multi-channel multiplicative noise. *Systems & Control Letters*, Amsterdam, v. 89, p. 74 – 82, 2016.

SYRMOS, V. L.; ABDALLAH, C. T.; DORATO, P.; GRIGORIADIS, K. Static output feedback - A survey. *Automatica*, Oxford, v. 33, n. 2, p. 125 – 137, 1997.

TARBOURIECH, S.; SOUÈRES, P.; GAO, B. A multicriteria image-based controller based on a mixed polytopic and norm-bounded representation of uncertainties. In: PROCEEDINGS OF THE IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, AND EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 44, 2005, Seville. *Proceedings of the* [...]. Seville: IEEE, 2005. p. 5385 – 5390.

TSAI, S.; HUO, C.; YANG, Y.; SUN, T. Variable feedback gain control design based on particle swarm optimizer for automatic fighter tracking problems. *Applied Soft Computing*, Amsterdam, v. 13, n. 1, p. 58 – 75, 2013.

TURKI, M. A.; DUC, G.; CLEMENT, B. Robust control of a space launcher by introducing LQG/LTR ideas in the NCF robust stabilisation problem. *IFAC Proceedings Volumes*, Saint-Petersburg, Russia, v. 37, n. 6, p. 1003 – 1008, Jun. 2004.

TZES, A.; NIKOLAKOPOULOS, G. LQR-output feedback gain scheduling of mobile networked controlled systems. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2004, Boston. *Proceedings of the* [...]. Boston: IEEE, 2004. p. 4325 – 4329.

VAGIA, M.; NIKOLAKOPOULOS, G.; TZES, A. Design of a robust PID-control switching scheme for an electrostatic micro-actuator. *Control Engineering Practice*, Oxford, v. 16, n. 11, p. 1321 – 1328, 2008.

VESELÝ, V.; ILKA, A. Generalized robust gain-scheduled PID controller design for affine LPV systems with polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, Amsterdam, v. 105, p. 6 – 13, 2017.

WIENER, N. *Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series*. Cambridge: The Technology Press, 1949.

WILSON, D. A.; NEKOUI, M. A.; HALIKIAS, G. D. An LQR weight selection approach to the discrete generalized $\mathscr{H}_2$ control problem. *International Journal of Control*, Abingdon, v. 71, n. 1, p. 93–101, 1998.

WU, F. *Control of linear parameter varying systems*. Tese (Doutorado) — University of California, 1995. Doctoral dissertation.

WU, F. A generalized LPV system analysis and control synthesis framework. *International Journal of Control*, Abingdon, v. 74, n. 7, p. 745–759, 2001.

XIAOJIE, X. Non-fragile mixed LQR/$\mathscr{H}_\infty$ control problem for linear systems with controller uncertainty. In: CHINESE CONTROL CONFERENCE. 2006, Harbin. *Proceedings of the* [...]. Harbin: IEEE, 2006. p. 579 – 583.

XIAOJIE, X. Characterization of all static state feedback mixed LQR/$\mathscr{H}_\infty$ controllers for linear continuous-time systems. *27th Chinese Control Conference*, Kunming, China, p. 678 – 682, Jul. 2008.

XIE, W. Multi-objective $\mathscr{H}_{infty}/\alpha$-stability controller synthesis of LTI systems. *IET Control Theory Applications*, Stevenage, v. 2, n. 1, p. 51–55, Jan. 2008.

XIAOJIE, X. Structural constrained mixed LQR/$\mathscr{H}_\infty$ controllers for continuous-time systems. In: PROCEEDINGS OF THE CHINESE CONTROL CONFERENCE, 32, 2013,[s.l.]. *Proceedings of the* [...]. [s.l.]: IEEE, 2013. p. 2727 – 2732.

XIE, L.; SOUZA, C. E. $\mathscr{H}_\infty$ filtering for linear periodic systems with parameter uncertainty. *System & Control Letters*, Amsterdam, v. 17, p. 343 – 350, 1991.

YAKUBOVICH, V. A. The solution to certain matrix inequalities. *Automatic Control*,

Dokl Akad Nauk, v. 143, p. 1304 – 1307, 1962.

YANG, X.; GAO, H.; SHI, P. Robust orbital transfer for low earth orbit spacecraft with small-thrust. *Journal of the Franklin Institute*, Oxford, v. 347, n. 10, p. 1863 – 1887, 2010.

YANG, Y.; WU, M.; CHANG, Y. Temperature control of the four-zone split inverter air conditioners using LMI expression based on LQR for mixed $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$. *Applied Energy*, Oxford, v. 113, p. 912 – 923, 2014.

YANG Y.; WU, M.; CHANG, Y. Linear matrix inequalities based on linear quadratic regulator for the $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_infty$ control of the inverter split air conditioner temperature. In: INTERNATIONAL REFRIGERATION AND AIR CONDITIONING CONFERENCE, 2010. Purdue. *Proceedings of the* [...]. Purdue: [s.n.]. p. 1 – 8. Disponível em: https://pdfs.semanticscholar.org/84d5/e1258e201070d4b1b6420ec163fdbe4cba23.pdf. Acesso em: 30 out. 2019.

YAZICI, H.; SEVER, M. Design of an optimal state derivative feedback LQR controller and its application to an offshore steel jacket platform. *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications*, New York, v. 8, n. 1, p. 84 – 91, 2017.

YUE, M.; AN, C.; SUN, J. Zero dynamics stabilisation and adaptive trajectory tracking for WIP vehicles through feedback linearisation and LQR technique. *International Journal of Control*, Abingdon, v. 89, p. 2533 – 2542, 2016.

ZHANG, D.; OU, L.; MENG, L.; WANG, X. LQR control for homogeneous agents with multi-graph topology. *Acta Automatica Sinica*, Beijing, v. 39, n. 6, p. 913 – 919, 2013.

ZHANG, H.; JUNMIN, W. Vehicle lateral dynamics control through AFS/DYC and robust gain-scheduling approach. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Piscataway, v. 65, n. 1, p. 489 – 494, 2016.

ZHANG, H.; WU, Y.; HE, D.; ZHAO, H. Model predictive control to mitigate chatters in milling processes with input constraints. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, New York, v. 91, p. 54 – 61, 2015.

ZHANG, H.; ZHANG, X.; JUNMIN, W. Robust gain-scheduling energy-to-peak control of vehicle lateral dynamics stabilisation. *International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, [s.l.], v. 52, n. 3, p. 309 – 340, 2014.

ZHANG, Q.; YE, S.; LI, Y.; WANG, X. An enhanced LMI approach for mixed $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$ flight tracking control. *Chinese Journal of Aeronautics*, Beijing, v. 24, n. 3, p. 324 – 328, 2011.

ZHOU, H.; SHIEH, L.; WANG, Q.; LIU, C. R. State-space digital PI controller design for linear stochastic multivariable systems with input delay. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, Hoboken, v. 84, p. 230 – 238, Apr. 2006.

APÊNDICE A

RESULTADOS ENVOLVENDO DESIGUALDADES MATRICIAIS

Define-se a forma padrão de uma LMI por,

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^{l} x_i F_i > 0, \tag{A.1}$$

sendo que os elementos de $x \in \Re^l$ correspondem as variáveis de decisão e $F_i = F_i' > 0 \in \Re^{n \times n}$ matrizes conhecidas.

Não obstante, em diversos casos, é importante aplicar métodos clássicos que podem linearizar expressões, tais como o complemento de Schur. É possível, ainda, exceder as limitações impostas por restrições convexas por meio de técnicas de relaxações matriciais que permitem reduzir o conservadorismo em problemas de controle (LEE *et al.*, 2007; AZIZI *et al.*, 2018). Consequentemente, haverá uma expansão das áreas de busca no processo de otimização que implica em resultados menos conservadores ao custo da complexidade computacional (BUZACHERO *et al.*, 2012; SILVA E. R. P., 2011). Para tanto, serão apresentados os principais lemas e definições que serão essenciais para as formulações originais das propostas de projeto abordado nesta tese.

Lema A.1 (Complemento de Schur)**.** *Seja $Q(x) = Q'(x)$, $R(x) = R'(x)$, e $S(x)$ dependente de modo afim da variável x. Então a LMI,*

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S'(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0, \tag{A.2}$$

é equivalente à desigualdade matricial,

$$R(x) > 0,\ Q(x) - S'(x)R(x)^{-1}S(x) > 0, \tag{A.3}$$

ou,

$$Q(x) > 0,\ R(x) - S'(x)Q(x)^{-1}S(x) > 0. \tag{A.4}$$

Prova: Vide (BOYD *et al.*, 1994) para maiores detalhes. ■

Lema A.2 (*Bounded-Real Lemma*)**.** *As seguintes declarações são equivalentes,*

1.Se $||H_{wz}(s)|| \leq \gamma$ *(restrição da norma* $\mathscr{H}_\infty$*) e* A *estável com* $H_{wz}(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$*;*

2.Então existe uma solução $P > 0$ *tal que,*

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & * \\ B'P + D'C & D'D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \tag{A.5}$$

Prova: Vide (BOYD *et al.*, 1994) para maiores detalhes. ■

Lema A.3 (Finsler)**.** *Considere* $w \in \Re^n$*,* $\mathscr{L} \in \Re^{n\times n}$*,* $\mathscr{B} \in \Re^{m\times n}$ *com rank* $(\mathscr{B}) < n$ *e* $\mathscr{B}^\perp$ *uma base para o espaço nulo de* $\mathscr{B}$ *(ou seja,* $\mathscr{B}\mathscr{B}^\perp = 0$*). Então as condições a seguir serão equivalentes,*

1.$w'\mathscr{L}w < 0,\ \forall w \neq 0,\ \mathscr{B}w = 0$

2.$\mathscr{B}^{\perp\prime}\mathscr{L}\mathscr{B}^\perp < 0$

3.$\exists \mu \in \Re,\ \mathscr{L} - \mu\mathscr{B}'\mathscr{B} < 0$

4.$\mathscr{X} \in \Re^{n\times m} : \mathscr{L} + \mathscr{X}\mathscr{B} + \mathscr{B}'\mathscr{X}' < 0$

Prova: Vide (OLIVEIRA; SKELTON, 2001) para maiores detalhes. ■

Lema A.4 (Finsler - Particularidade)**.** *Dada a matriz simétrica* $\mathscr{L} \in \Re^{n\times n}$ *e a matriz* $\mathscr{B}$ *de dimensões compatíveis e seja* $\mathscr{B}$ *uma matriz tal que* $\mathscr{B}\mathscr{B}^\perp = 0$*. Então,*

$$\mathscr{B}^{\perp\prime}\mathscr{L}\mathscr{B}^\perp < 0, \tag{A.6}$$

se e somente se $\exists \mathscr{X}$ *tal que*

$$\mathscr{L} + \mathscr{X}\mathscr{B} + \mathscr{B}'\mathscr{X}' < 0. \tag{A.7}$$

Prova: Vide (BOYD *et al.*, 1994) para maiores detalhes. ■

Observação A.1. *Este resultado (conhecido por L-C_a Scaling) é comumente utilizado em métodos de eliminação de variáveis matriciais podendo ser estendido a problemas de síntese de controladores (OLIVEIRA, 2004). Uma abordagem de uso do Lema A.4 pode ser encontrada em (BARBOSA, 1999).*

Lema A.5 (Projeção)**.** *Dada uma matriz simétrica $\mathscr{L}$ e duas matrizes $\mathscr{U}$ e $\mathscr{V}$ de dimensão coluna m. Então existe uma matriz $\mathscr{X}$ que satisfaça:*

$$\mathscr{U}'\mathscr{X}\mathscr{V} + \mathscr{V}'\mathscr{X}\mathscr{U} + \mathscr{L} < 0, \tag{A.8}$$

se e somente se as seguintes desigualdades de projeção com respeito a X são satisfeitas:

$$\mathscr{U}^{\perp\prime}\mathscr{L}\mathscr{U}^{\perp} < 0, \tag{A.9}$$

$$\mathscr{V}^{\perp\prime}\mathscr{L}\mathscr{V}^{\perp} < 0, \tag{A.10}$$

em que $\mathscr{U}^{\perp}$ e $\mathscr{V}^{\perp}$ são matrizes arbitrárias cujas colunas formam uma base do espaço nulo de $\mathscr{U}$ e $\mathscr{V}$, respectivamente.

Prova: Vide (BOYD *et al.*, 1994) para maiores detalhes. ■

Lema A.6 (Projeção Recíproca)**.** *Seja T uma dada matriz definida positiva. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

1.

$$\Psi + S + S' < 0, \tag{A.11}$$

2.O seguinte problema é fatível com respeito a W,

$$\begin{bmatrix} \Psi + T - (W + W') & S' + W' \\ S + W & -T \end{bmatrix} < 0. \tag{A.12}$$

Prova: Vide (APKARIAN; TUAN; BERNUSSOU, 2001) para maiores detalhes. ■

Adicionalmente, existem métodos que permitem o tratamento de problemas que envolvem a topologia de incerteza limitada por norma, como é o caso do *S-Procedure*.

Definição A.1 (*S-Procedure*)**.** *Considere as funções simétricas $F_0, \ldots, F_v$ e a condição,*

$$\psi' F_0 \psi > 0, \forall \psi \neq 0 : \psi' F_i \psi \geq 0, i = 1, \ldots, v. \tag{A.13}$$

Se existirem escalares $\tau_1 \geq 0, \ldots, \tau_v \geq 0$ tais que,

$$F_0 - \sum_{i=1}^{v} \tau_i F_i > 0, \tag{A.14}$$

e, portanto, a condição (A.13) é satisfeita.

Prova: Vide (BOYD *et al.*, 1994) para maiores detalhes. ■

ÍNDICE REMISSIVO

Ω, 28
Ω_N, 29
Ω_P, 29, 39
Ω_x, 33
$\mathscr{E}$, 29
Bounded-Real Lemma, 144
Lema
    Factibilidade, 37
S-Procedure, 145

Complemento
    Schur, 143
Complexidade
    computacional, 25, 34, 48, 73, 143
    numérica, 40, 67, 74
Condição inicial, 40, 42, 73
    variante no tempo, 33
Conjunto(s) convexo(s), 22, 28, 39
Controlador
    norma, 70, 71, 77
Controle
    ótimo, 19, 21, 27, 29
    realimentação de estados, 19, 21, 30
Controle $\mathscr{H}_2/\mathscr{H}_\infty$, 24, 25, 77, 78

Desigualdades
    matriciais lineares, 22
Distúrbios, 78, 79
DNLDIs, 28

Eliminação de variáveis, 145
Equação de Riccati, 21, 23, 30, 61
Estabilidade
    absoluta, 48
    assintótica, 21, 22, 27, 30
    estendida, 48
    marginal, 23, 31, 48
    quadrática, 24, 31, 34, 80, 114
    robusta, 24, 25, 118

Incerteza
    domínio, 22, 34, 48
    estruturada, 39
    limitada(s) por norma, 25, 28, 35, 55, 63
    matriz invariante no tempo, 28
    modelo, 29
    politópica, 33, 51, 60, 74

LDI
    limitada por norma, 25, 77
    limitada por norma diagonal, 28
    politópica, 25, 71
Lema
    da Projeção Recíproca, 60
    da Projeção, 24, 55, 145
    da Projeção Recíproca, 145
    de eliminação de variáveis, 55
    de Finsler, 51, 55, 144
    de Finsler (particularidade), 144
LMILab, 38, 62, 94, 119
LMIs, 28
LQR, 19–21, 25
    LMI, 22
    robusto, 22, 25
    síntese, 25, 32, 51
Lyapunov
    desigualdade, 34
    expoente, 25, 32
    função dependente de parâmetros, 50

função, 31, 80
função quadrática, 30, 54, 60
matriz, 23, 50, 51, 55

Matlab, 38, 62, 95, 119
Matrizes
paramétricas, 81

NLDIs, 25, 77

Otimização, 23, 27, 31, 79, 113, 117
problema, 24, 38, 50, 62, 95, 119

Parâmetros
incertos, 29, 39
invariante(s) no tempo, 28, 33
precisamente conhecidos, 30
PLDI
aproximação por NLDI, 29
Programação
convexa, 22

RDE, 21
Relaxação
matricial, 143
técnicas, 50

Sistema incerto, 47, 72
Sistema LTI, 20, 27, 78

Taxa de decaimento, 32, 127
factibilidade, 40, 63, 70

Variável
de folga, 50, 76